

Лекция 17 от 06.02.2017

Замкнутые и полные ОГС.

Тригонометрическая система

Замкнутые и полные ортогональные системы

Пусть H — пространство со скалярным произведением, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетная ортогональная система в H . Тогда для вектора $x \in H$ можно ввести *коэффициенты Фурье*: $\hat{x}_n = \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}$ и, соответственно, *ряд Фурье*: $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Отметим, что этот ряд не является ни числовым, ни функциональным.

Продолжим обсуждение замкнутых ортогональных систем. Повторим определение (на этот раз сформулируем его немного иначе).

Определение 1. Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *замкнутой*, если

$$\forall x \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists c_1, \dots, c_N: \left\| x - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\| < \varepsilon.$$

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1. ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута;

2. $\forall x \in H \quad \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n = x$;

3. $\forall x \in H \quad \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 \|e_n\|^2 = \|x\|^2$;

4. $\forall x, y \in H \quad (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \hat{y}_n \|e_n\|^2$.

Доказательство. Фактически это просто суммирование предыдущих результатов. Действительно, (1) \Rightarrow (2) и (2) \Leftrightarrow (3) было доказано на прошлой лекции, (2) \Rightarrow (1) следует очевидным образом. Из нового: (4) \Rightarrow (3) получается сразу при $y = x$, и только (3) \Rightarrow (4) требует какого-то доказательства.

Заметим, что $\widehat{(x+y)}_n = \hat{x}_n + \hat{y}_n$. Тогда:

$$\begin{aligned} (x, y) &= \frac{(x+y, x+y) - (x, x) - (y, y)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{x}_n + \hat{y}_n)^2 \|e_n\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 \|e_n\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{y}_n^2 \|e_n\|^2 \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \hat{y}_n \|e_n\|^2. \end{aligned}$$

Собственно, утверждение (4) тоже иногда называют *равенством Парсеваля*. □

Определение 2. Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *полной*, если из того, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad (x, e_n) = 0$ следует, что $x = 0$, то есть существует только один вектор, ортогональный всей системе.

Понятия *замкнутости* и *полноты* в разной литературе используются абы как и часто меняются местами. Это связано с тем, что данные термины *почти* взаимозаменяемы.

Утверждение 1. *Если ортогональная система замкнута, то она полна.*

Доказательство. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая ортогональная система, то $\forall x \in H \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$.

Но если $\forall n \in N \ (x, e_n) = 0$, то $\hat{x}_n = 0$ и, следовательно, $x = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$. \square

Утверждение 2. *Если ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в полном пространстве H , то она замкнута.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из H . Рассмотрим соответствующий ряд Фурье, который в силу полноты пространства обязан куда-то сходиться: $y := \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Из теоремы о единственности разложения следует, что $\forall n \in \mathbb{N} \ \hat{x}_n = \hat{y}_n$, а значит, $(x, e_n) = (y, e_n)$. Итого, $\forall n \in \mathbb{N} \ (x - y, e_n) = 0$, что верно только если $x - y = 0$, то есть $x = y$. \square

Упражнение 1 (Бонусная задача). *Наше доказательство не пройдет в любом пространстве, но это не означает, что полнота пространства является необходимым требованием. Итак, верно ли, что если ортогональная система полна, то она замкнута?*

Пара слов о практическом применении

Допустим, мы имеем дело с черно-белой изображением (с цветными все аналогично). Фактически это функция, заданная на пространстве-прямоугольнике P , где $f(p)$ — интенсивность пикселя. Можно ввести скалярное произведение: $(f, g) = \int_P f g dx dy$. Однако так как мы работаем с дискретным пиксельным пространством, интеграл можно заменить на сумму: $\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$, где a и b это значения пикселей.

Выберем конечную ортогональную систему $x_{n=1}^N$. Для удобства пусть она будет нормированной, то есть $\|e_n\| = 1$. Тогда $x = \sum_{n=1}^N \hat{x}_n e_n$. Известно, что $\|x - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n e_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n^2$.

На практике мы не можем все коэффициенты Фурье, а только несколько из них. А глядя на равенство выше понятно, что лучше взять большие коэффициенты, чтобы уменьшить погрешность. Именно эта идея и лежит в ключе всех алгоритмов сжатия с частичной потерей данных (но эт не вся идея).

Соответственно, встает вопрос: а как выбрать ортогональную систему так, чтобы как можно меньше коэффициентов Фурье были большими и как можно больше — маленькими? Тогда для такой системы большинство элементов пространства можно будет посчитать с небольшой погрешностью.

Тригонометрическая система

В математическом анализе есть два самых главных отрезка: $[0, 1]$ и $[-\pi, \pi]$. Будем работать со вторым.

Пусть $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Функции не обязательно должны быть непрерывными, потому что на практике разрывы I рода встречаются сплошь и всюду (например, граница фона и объекта на изображении). Поэтому будем рассматривать функции $f, g \in R[\pi, \pi]$.

Факторизуем пространство по следующему отношению эквивалентности: $f \equiv g \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (f - g)^2 dx = 0$.

Строго говоря, можно было рассматривать функции, интегрируемые по Риману в несобственном смысле, но тогда и интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} fg dx$ будет несобственным, и чтобы он существовал, необходимо потребовать интегрируемость в несобственном смысле квадратов функций, так как $(f, g) \leq \frac{f^2 + g^2}{2}$, что помогло бы нам ограничить интеграл. Но полученное пространство все еще не будем полным, поэтому мы не будем его рассматривать — это всего лишь полушаг к желаемому результату и оно того не стоит.

Итак, ортогональная система в таком пространстве: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$

Посчитаем длину каждого вектора (не забыв о четности косинуса):

$$\begin{aligned}(1, 1) &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi; \\ (\sin nx, \sin nx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = \pi; \\ (\cos nx, \cos nx) &= \dots = \pi.\end{aligned}$$

В силу традиций (а, к слову, тригонометрическая система старше интегралов), коэффициенты Фурье, связанные с $\cos nx$ и $\sin nx$ принято обозначать как a_n и b_n соответственно:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.\end{aligned}$$

А коэффициент Фурье при 1 очень похож на коэффициенты при $\cos nx$, поэтому его принято обозначать как $a_0/2$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx.$$

Итого, ряд Фурье для функции f выглядит следующим образом:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Для аккуратности надо бы ставить скобки под суммой, но это и так воспринимается как единое целое.

Для тригонометрической системы есть дальше два вектора развития:

1. Доказать замкнутость или полноту. Вот только пространство неполное, так что незачем;
2. Заметить, что ряд Фурье в данном случае это обычный функциональный ряд, и для него осмысленен вопрос, чему равно $f(1)$ и так далее. Вот этим и займемся.

Комплексная система

Если внимательно посмотреть на ряд Фурье тригонометрической системы, то можно заметить, что он степенной — точнее, к нему можно свести, используя комплексную запись все той же тригонометрической системы: $\{e^{inx}\}_{-\infty}^{+\infty}$.

В комплексном случае $(x, y) = \overline{y}, \overline{x}$, поэтому $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$. Тогда

$$(e^{inx}, e^{inx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi.$$

По традиции, коэффициенты Фурье обозначают как c_n :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Итого, комплексный ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Покажем, что это то же самое, что и ряд Фурье в обычной тригонометрической системе.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2};$$

$$c_{-n} = \dots = \frac{a_n}{2} + i \frac{b_n}{2}.$$

Итого:

$$\begin{aligned} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} &= \left(\frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2} \right) (\cos nx + i \sin nx) + \left(\frac{a_n}{2} + i \frac{b_n}{2} \right) (\cos nx - i \sin nx) = \\ &= a_n \cos nx + b_n \sin nx. \end{aligned}$$

Двумерные пространства, натянутые на $\langle \cos nx, \sin nx \rangle$ и $\langle e^{inx}, e^{-inx} \rangle$, будут совпадать, в них совпадают наилучшие приближения и частичные суммы.