

Лекция 16 от 30.01.2017

Метрические и нормированные пространства (продолжение), ряды Фурье

Коэффициенты Фурье

Вспомним основной результат предыдущей лекции. Пусть H — пространство со скалярным произведением, $\{e_n\}_{n=1}^N$ — ортогональная система, $x \in H$. Тогда если c_1, \dots, c_N — коэффициенты из \mathbb{R} , то

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=1}^N \left(c_n \|e_n\| - \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} \|e_n\| \right)^2 - \sum_{n=1}^N \left(\frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} \right)^2 (e_n, e_n)$$

Определение 1. Коэффициентами Фурье, соответствующими вектору x и элементу ортогональной системы $\{e_n\}_{n=1}^N$, называются числа $\hat{x}_n = \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}$

Принимая это определение во внимание, исходное равенство переписывается в более красивом виде

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\|^2 = \|x\|^2 + \|e_n\|^2 \sum_{n=1}^N (c_n - \hat{x}_n)^2 - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n^2 \|e_n\|^2$$

Утверждение 1 (очевидное). Для любых коэффициентов c_1, \dots, c_N

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\| \geq \left\| x - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n e_n \right\|$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $c_n = \hat{x}_n$.

Это равенство действительно очевидно, учитывая, что в переписанном выражении (которое, кстати, неотрицательно) у нас лишь второе (также неотрицательное) слагаемое правой части зависит от c_n . Минимум достигается, если оно равно нулю. Отметим важное свойство: коэффициент c_n не зависит от c_i для $i \neq n$.

Утверждение 2 (Тождество Бесселя).

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n^2 \|e_n\|^2$$

Следствие 1 (Неравенство Бесселя). $\sum_{n=1}^N \hat{x}_n^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$

Пространство l^2

Отступим в сторону. Пусть l^2 — множество всех числовых последовательностей, сумма квадратов элементов которых конечна. Заметим, что это множество будет являться линейным пространством, поскольку

$$\begin{aligned} & \forall \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2, \alpha \in \mathbb{R} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n^2 = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \Leftrightarrow \{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 < \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n^2 + 2b_n^2) < \infty \Leftrightarrow \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \end{aligned}$$

Обозначим $\bar{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, $\bar{b} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, мы можем ввести скалярное произведение следующим образом

Определение 2. Для пространства l^2 ,

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \\ \|\bar{a}\| &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \end{aligned}$$

Сходимость в нормированных пространствах

Отойдем еще на шаг в сторону. Пусть $(L, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ее элементов. В таком случае, говоря о сходимости таких последовательностей, можно ввести те же формулировки, что и в случае числовых последовательностей.

Определение 3. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x , если

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

При помощи неравенства треугольника можно также установить и арифметические свойства пределов, например предел суммы.

Утверждение 3. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x , $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к y . Тогда $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x + y$

Доказательство. Воспользуемся неравенством треугольника:

$$0 \leq \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Ряды для из элементов вводятся абсолютно так же, как и числовые ряды, рассмотренные нами ранее (абсолютная сходимость определяется как сходимость ряда из норм элементов).

Ряды Фурье

Теперь когда мы ввели понятие сходимости в нормированных пространствах, будем двигаться дальше, к рядам Фурье. Вернемся к рассмотрению исходного пространства H со скалярным произведением, в котором мы уже ввели понятие коэффициентов Фурье.

Определение 4. Ряд $\sum_n \hat{x}_n e_n$ называется рядом Фурье (разложением в ряд Фурье) по ортогональной системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Из этого определения не следует, что ряд Фурье вообще сходится.

Утверждение 4. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $x = \sum_{n=1}^\infty \hat{x}_n e_n$.
2. $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \hat{x}_n^2 \|e_n\|^2$.

Доказательство. Прямое следствие тождества Бесселя. □

Утверждение 5 (Единственность разложения). Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — ортогональная система и $x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$, для некоторых коэффициентов c_i . Тогда $\hat{x}_i = c_i \forall i \in \mathbb{N}$

Доказательство. Зафиксируем $n_0 \in \mathbb{N}$, пусть $N > n_0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^\infty c_n e_n = \sum_{n=1}^N c_n e_n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^\infty c_n e_n}_{\rightarrow 0, N \rightarrow \infty}$$

Далее запишем, чему равно \hat{x}_{n_0}

$$\hat{x}_{n_0} = \frac{(x, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = \frac{\left(\sum_{n=1}^N c_n e_n, e_{n_0} \right) + (r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = \frac{c_{n_0} (e_{n_0}, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} + \frac{(r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = c_{n_0} + \frac{(r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})}$$

Второе слагаемое стремится к нулю. Устремим $N \rightarrow \infty$, получим требуемое. □

Заметим, что если $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — ортогональная система, то ряд $\sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ удовлетворяет условию

Коши тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^\infty c_n^2 \|e_n\|^2$ сходится.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\| \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n \right\| < \varepsilon$$

Действительно,

$$\left(\sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n, \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n \right) = \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n^2 \|e_n\|^2$$

И увидим, что искомому условию Коши удовлетворяет и желаемый ряд.

Следствие 2. Если пространство со скалярным произведением полно, то все ряды Фурье там сходятся.

Доказательство. Из неравенства Бесселя $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 \|e_n\|^2 < \infty$ следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ удовлетворяет условию Коши, а с учетом полноты $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ сходится. \square

Итак, в полных нормированных пространствах ряды Фурье сходятся, но отнюдь не всегда они сходятся куда надо.

Определение 5. Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута, если

$$\forall x \in H, \forall \varepsilon > 0 \exists e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_K}, c_1, c_2, \dots, c_K \Rightarrow \left\| x - \sum_{k=1}^K c_k e_{n_k} \right\| < \varepsilon$$

Утверждение 6. Если ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута, то $\forall x \in H \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое K_0 и коэффициенты c_1, \dots, c_{K_0} , что $\left\| x - \sum_{n=1}^{K_0} c_n e_n \right\| < \varepsilon$. Тогда

$$\forall N > K_0 \left\| x - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n e_n \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{K_0} c_k e_k \right\|$$

\square