Лекции по предмету

# Математический анализ-3

Группа лектория ФКН ПМИ 2016-2017
Михаил Дискин, Анастасия Иовлева, Руслан Хайдуров.

2016/2017 учебный год

## Содержание

# Лекция 01 от 05.09.2016 Основные определения и свойства рядов. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости

**Определение 1.** *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность действительных чисел. Числовым рядом называется выражение вида* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, записываемое также как* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$*.*

**Определение 2.** $N$*-й частичной суммой ряда называется сумма первых* $N$ *членов.*

$$S_n = a_1 \; + \; \ldots \; + \; a_N$$

**Определение 3.** *Последовательность* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется последовательностью частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Говорят, что ряд *сходится (к числу $A$)*, если (к числу $A$) сходится последовательность его частичных сумм. Аналогично, ряд *расходится к $+\infty$ (к $-\infty$)*, если к $+\infty$ (к $-\infty$) расходится последовательность его частичных сумм. Если последовательность частичных сумм расходится, ряд называют *расходящимся*.

**Определение 4.** *Суммой ряда называется предел* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$*.*

Вспоминая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет — из одного можно получить другое и наоборот. Следовательно, вместо ряда можно рассматривать его частичные суммы.

**Пример 1** (Предел Коши для последовательностей)**.** *Последовательность* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m,k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы нахаляву получили первую теорему.

**Теорема 1** (Критерий Коши сходимости ряда)**.** *Для сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k+1} + a_{k+2} \ldots + a_{k+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

**Утверждение 1** (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

*Доказательство.* Ряд сходится, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon.$$

А это и есть определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства: вспомним, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ и что $S_n$, как и $S_{n-1}$, стремятся к одному пределу при стремлении $n$ к бесконечности. Итого, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

$\square$

Теперь сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

**Свойства 1.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

*Доказательство.* Это напрямую следует из свойств предела последовательности и того, что $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$. $\square$

**Свойства 2.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$ *для любого действительного* $\alpha$.

*Доказательство.* Аналогично вытекает из свойств предела последовательности. $\square$

Введём еще одно определение.

**Определение 5.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Обозначим некоторые его подсуммы,*

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}_{b_2} + \underbrace{a_{n_2+1} \ldots + a_{n_3}}_{b_3} + a_{n_3+1} + \ldots,$$

*где* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *получен из исходного* расстановкой скобок.

**Утверждение 2.** *Если ряд сходится или расходится к* $\pm\infty$*, то после любой расстановки скобок он сходится, неформально говоря, туда же.*

*Доказательство.* Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательность в последовательности частичных сумм исходного ряда:

$$S_1^b = S_{n_1}^a, \quad S_2^b = S_{n_2}^a, \quad S_3^b = S_{n_3}^a, \quad \ldots$$

Осталось только вспомнить, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. $\square$

*Обратное неверно!!!* Пример такого ряда:

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

При расстановке скобок $(1-1) + (1-1) + \ldots = 0$ получается сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится, хотя бы потому что не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда к нулю.

Однако сходимость элементов к нулю не единственное препятствие. Например, можно «распилить» единицы из предыдущего примера и получить следующий ряд:

$$1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

Его элементы стремятся к нулю, но он все еще расходится. Однако расставив скобки, можно получить сходящийся ряд:

$$(1-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\dots=0.$$

**Утверждение 3.** *Если $a_n \to 0$ и длины скобок ограничены (т.е. существует такое $C \in \mathbb{R}$, что $n_{k+1}-n_k < C$ при всех $k$), то из сходимости ряда, полученного расстановкой таких скобок, следует сходимость исходного ряда.*

*Доказательство.* Доказать предлагается самостоятельно. Указание: найти $N$ такое что $\forall n > N |a_n| < \frac{\varepsilon}{C}$. □

**Утверждение 4.** *Изменение, удаление или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, но, разумеется, влияет на его сумму.*

Поговорим теперь об абсолютной сходимости.

**Определение 6.** *Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно.*

**Определение 7.** *Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.*

**Утверждение 5.** *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абслютно, то он сходится.*

*Доказательство.* Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p}|a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left|\sum_{n=k+1}^{k+p}a_n\right| \leqslant \sum_{n=k+1}^{k+p}|a_n| < \varepsilon$$

□

**Определение 8.** *Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $N$–м хвостом или $N$–м остатком называется сумма $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$.*

Иногда хвостом называют сам ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$, а остатком — сумму этого ряда.

Для сходящегося ряда очевидно, что каждый его хвост сходится.

# Лекция 02 от 12.09.2016
# Признаки сравнения и другие признаки сходимости знакопостоянных рядов

## О знакопостоянных рядах

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах неубывающая. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [0, +\infty]$.

**Утверждение 1** (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами)**.** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов.

**Обозначение 1.** *Ряд сходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$; ряд расходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Однако для рядов общего вида такая запись смысла не имеет, поскольку ряды могут не иметь даже бесконечного придела частичных сумм, то есть не иметь предела вообще (как например любимый нами ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$).

## Признаки сравнения

**Признак 1** (Первый признак сравнения)**.** *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами, и начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда:*

1. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;*
2. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

*Доказательство.* Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leqslant b_n$ уже при $n \geqslant 1$ (убрав «начало» ряда, сходимость мы не поменяем).

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = C$ для некоторого $C$. Последовательность $S_n^b$ очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leqslant C$ для любого $n$. А значит, для всех $n$ верно, что
$$0 \leqslant S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leqslant C.$$
Это показывает, что $S_n^a$ монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет конечный предел. Так что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Прямо следует из первого пункта.

$\square$

**Признак 2** (Второй признак сравнения). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с положительными членами и* $a_n \asymp b_n$ *(то есть* $\exists c, C > 0$ *такие, что начиная с некоторого индекса* $N$*,* $c < \dfrac{a_n}{b_n} < C$*). Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

*Доказательство.* Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. $\square$

**Замечание 1.** *Если* $a_n \sim b_n$ *при* $n \to \infty$*, то* $a_n \asymp b_n$*.*

**Пример 1** (тривиальный). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *— расходится.*

**Признак 3** (Третий признак сравнения). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого номера* $N \in \mathbb{N}$ *для всех* $n > N$ *верно* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ *Тогда:*

1. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*;*
2. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$*.*

*Доказательство.* По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geqslant 1$. Для любого натурального $k$ мы можем представить элементы $a_k$ и $b_k$ следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}}$$
$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leqslant \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким образом, мы получили, что $a_k \leqslant \dfrac{a_1}{b_1} b_k$. Но мы не знаем, как соотносятся элементы $a_1$ и $b_1$. Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leqslant b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. $\square$

**Замечание 2.** *Отметим, что для любого* $q \in [0,1)$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *сходится. Действительно,*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{q(q^N - 1)}{q - 1} = \frac{q}{1-q}.$$

## Прочие признаки

**Признак 4** (Признак д'Аламбера)**.**

1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами, и существует такое* $q \in [0, 1)$*, что начиная с некоторого номера* $N$ *верно, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами, и начиная с некоторого номера* $N$ *верно, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$*. Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

*Доказательство.*

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. «Тут и доказывать нечего» © лектор (*прим. ред.:* утверждение очевидно из самой формулировки).

$\square$

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

**Следствие 1** (Предельный признак д'Аламбера)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \in [0; +\infty]$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\alpha < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\alpha > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*
3. *если* $\alpha = 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

*Доказательство.*

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\forall \varepsilon\ \exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$. Можно взять $\varepsilon$ так, чтобы $\alpha + \varepsilon < 1$, а значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

$\square$

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

**Следствие 2.** *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами верно, что* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, то ряд сходится, а если* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, то расходится.*

**Признак 5** (Радикальный признак Коши). *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами.*

1. *Пусть существует такое* $q \in [0, 1)$*, что начиная с некоторого номера* $N$ *верно, что* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть существует бесконечное множество индексов* $n$*, для которых верно, что* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$*. Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

*Доказательство.*

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно по определению расходимости ряда.

□

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

**Следствие 3** (Радикальный признак Коши в предельной форме). *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$*, где* $A \in [0, \infty]$*. Тогда:*

1. *если* $A < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $A > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

*Или, более общо:*

1. *если* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, то* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

**Пример 2.** *Рассмотрим следующий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots$$

*Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{2}.$$

*Как мы видим, ряд сходится.*

**Упражнение 1.** *Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?*

Для разных рядов может быть удобнее использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Мы всё ещё не научились выяснять сходимость рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Интуиция подсказывает, что он сходится при $\alpha > 1$, как и интеграл. Сейчас мы в этом убедимся. В этом нам поможет следующая теорема.

**Признак 6** (Интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — невозрастающая на $[1, \infty)$ функция. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости*

$$\int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant r_N = f(N+1) + f(N+2) + \ldots \leqslant \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx.$$

*Доказательство.* Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.

Тогда мы получаем, что $f(1)+f(2)+\ldots+f(N) = \int\limits_{1}^{N} S(x)dx$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} S(x)dx$. Действительно, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x) \geqslant f(x)$. С другой стороны, сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_{2}^{\infty} f_S(x)dx$, а она влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} S(x)dx$, так как $S(x) \leqslant f_S(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leqslant \int\limits_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx = \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx,$$
$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geqslant \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx.$$

$\square$

**Пример 3.** *Допустим, мы хотим узнать сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.*

$$\int\limits_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{n}^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

*Итого,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} + \theta, \quad \text{где } \theta \in \left[\frac{1}{2 \cdot 101^2}, \frac{1}{2 \cdot 100^2}\right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм расходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{N}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.

# Лекция 03 от 19.09.2016 Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

## Граница между сходящимися и расходящимися рядами

На прошлой лекции был сформулирован и доказан следующий признак:

**Признак 7** (Интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — невозрастающая на $[1, \infty)$ функция. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

С помощью него мы можем исследовать на сходимость семейство рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Как и для соответствующего интеграла, ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Может сложиться впечатление, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является своего рода граничным между сходящимися и расходящимися рядами. Но исследуем теперь другой ряд (он нам также понадобится в дальнейшем):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл.

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_{2}^{\infty} = \infty$$

Данный ряд меньше, чем гармонический ряд, однако расходится. Причем, как несложно убедиться, семейство рядов $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ при $\beta > 1$ уже сходится. Но при этом «граница» между сходящимися и расходящимися рядами не проходит по ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ — взять, например, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$, который тоже расходится. И так далее, «границу» можно «уточнять» бесконечно. Следовательно, точной «границы» не существует.

## Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов

На прошлой лекции мы с помощью интегрального признака Коши–Маклорена научились оценивать остаток сходящихся рядов. Теперь научимся оценивать скорость роста частичных сумм расходящихся рядов.

Возьмем, например, гармонический ряд. Утверждается, что его частичные суммы оцениваются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + C + o(1),$$

где $C$ эта некая константа. Но как доказать, что это действительно корректная оценка?

Фактически мы утверждаем сходимость последовательности $\{S_n\}$, где

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Это можно воспринимать как последовательность частичных сумм и перейти к соответствующему ряду:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

На последнем шаге мы воспользовались формулой Тейлора.

Мы получили, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, следовательно, данный ряд сходится. И так как мы построили сходящийся ряд, у которого последовательность $\{S_n\}$ будет последовательностью частичных сумм, данная последовательность также сходится. Что и доказывает нашу оценку.

Точно так же можно доказать оценки скорости «расходимости» частичных сумм, например, следующих рядов:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} = \ln\ln N + C + o(1)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{3N^{2/3}}{2} + C + o(1)$$

## Снова признаки сходимости знакопостоянных рядов

Вернемся теперь к признакам сходимости.

**Признак 8** (Признак Куммера)**.** *Пусть $a_n$, $b_n > 0$ и $v_n := \dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1}$. Тогда:*

1. *если существует такое $l > 0$, что начиная с некоторого места $v_n \geqslant l$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если начиная с некоторого места $v_n \leqslant 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда наше неравенство выполняется для всех $n$.

1. Итого, мы имеем, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \geqslant l$. Домножим неравенство на $a_{n+1}$, благо оно положительно:

$$a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1} \geqslant l a_{n+1} > 0$$

Воспользуемся этим, оценив частичную сумму следующего ряда, при $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} l a_n \leqslant l a_1 + (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_2 b_2 - a_3 b_3) + \ldots + (a_{N-1} b_{N-1} - a_N b_N) = l a_1 + a_1 b_1 - a_N b_N \leqslant l a_1 + a_1 b_1$$

Итого, мы получили, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l a_n$ ограничены сверху. Значит, этот ряд сходится и, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Имеем, что $\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1} \leqslant 0$. Перенесем $b_{n+1}$ в правую часть и разделим все на $b_n$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Теперь перевернем дробь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n}.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, а значит признак сравнения дает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Но признак Куммера особо не используется, он скорее нужен, чтобы вывести другие признаки.

**Признак 9** (Признак Раабе)**.** *Пусть $a_n > 0$ и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = A \in [-\infty, +\infty].$$

*Тогда:*

1. *если $A > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

*Доказательство.* Признак Куммера при $b_n = n$. □

Покажем, зачем нужен признак Раабе. Пусть $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Тогда:

$$n\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right) = n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n\left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \longrightarrow \alpha.$$

Как мы видим, признак Раабе позволяет «ловить» ряды с полиномиальной скоростью убывания членов. И это хорошо, так как раньше мы этого не умели.

Но у этого признака все еще есть «мертвая зона», когда $A = 1$. Поэтому рассмотрим еще один признак, который не имеет «мертвой зоны», но, к сожалению, тоже не всегда применим.

**Признак 10** (Признак Гаусса)**.** *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ верно, что*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

*Тогда:*

1. *если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $\alpha < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;*
3. *если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*

4. *если* $\alpha = 1$ *и* $\beta \leqslant 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

*Доказательство.* Все эти утверждения на самом деле следуют из уже рассмотренных нами признаков. Так что просто назовем их.

1. Признак д'Аламбера.
2. Признак д'Аламбера.
3. Признак Раабе.
4. Если $\beta \neq 1$ — признак Раабе. Если $\beta = 1$ — признак Куммера при $b_n = n \ln n$.

Рассмотрим подробнее последний случай, когда $\alpha = \beta = 1$. Воспользуемся признаком Куммера при $b_n = n \ln n$ и равенством из условия:

$$\begin{aligned} v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right) n \ln n - (n+1)\ln(n+1) = \\ &= (n+1)\left(\ln n - \ln(n+1)\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) = \\ &= -(n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) = \\ &= -(n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) \longrightarrow -1 \end{aligned}$$

Итого, по признаку Куммера ряд действительно расходится. □

**Замечание 1.** *Вместо* $O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ *можно писать более слабое* $O\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$. *Но первое чаще появляется в интересных примерах, поэтому исторически сложилось использовать его.*

# Признаки сходимости знакопеременных рядов

**Признак 11** (Признак Лейбница)**.** *Пусть последовательность* $\{b_n\}$ *монотонно убывает к нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ *сходится, причем его остаток* $r_N$ *имеет знак* $(-1)^{N+1}$ *и по модулю не больше* $b_{N+1}$.

*Доказательство.* Докажем с помощью критерия Коши. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ верно, что $b_n < \varepsilon$. Теперь для любого $m > N$ и $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую величину:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right|.$$

Можно вынести $(-1)^{m+1}$ из суммы — на модуль это не повлияет, но зато нам будет удобнее считать, что первое слагаемое идет с положительным знаком.

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| = \left| b_{m+1} + (-b_{m+2} + b_{m+3}) + (-b_{m+4} + b_{m+5}) + \ldots \right|.$$

В силу монотонного убывания последовательности получаем, что каждая скобка не больше нуля. Последнее слагаемое, $b_{m+p}$, могло остаться без пары, но тогда оно идет с отрицательным знаком. Итого, получаем, что мы с $b_{m+1}$ складываем только неположительные величины.

Сразу хочется ограничить модуль сверху величиной $|b_{m+1}|$, однако надо понимать, что выражение под модулем могло оказаться отрицательным, и тогда наша оценка не сработает. Поэтому надо отдельно показать, что подмодульное выражение все-таки положительно.

Сгруппируем слагаемые другим способом:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(-1)^n b_n\right| = \big|(b_{m+1}-b_{m+2})+(b_{m+3}-b_{m+4})+\ldots\big|.$$

Каждая группа слагаемых не меньше нуля в силу монотонного убывания. Без пары могло остаться только последнее слагаемое, $b_{m+p}$, но тогда оно идет с положительным знаком. Следовательно, выражение под модулем не меньше нуля.

Итого:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(-1)^n b_n\right| \leqslant |b_{m+1}| < \varepsilon.$$

Получаем, что по критерию Коши ряд сходится. Отсюда же следует оценка на остаток:

$$|r_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n\right| \leqslant b_{N+1}.$$

Аналогичным образом оценим знак остатка.

Снова вынесем за скобки знак $(-1)^{N+1}$ (но на этот раз его не убьет модуль), и сгруппируем слагаемые вторым способом:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n = (-1)^{N+1}\big((b_{N+1}-b_{N+2})+(b_{N+3}-b_{N+4})+\ldots\big).$$

Здесь уже нет никаких проблем с последним слагаемым, так что вся скобка имеет положительный знак. А значит, $r_N$ имеет знак $(-1)^{N+1}$. Что нам и требовалось. □

# Лекция 04 от 26.09.2016 Признаки сходимости знакопеременных рядов и перестановки ряда

## Снова признаки сходимости знакопеременных рядов

В прошлый раз мы с вами сформулировали и доказали признак Лейбница. Будем пользоваться в этот раз слабой его формулировкой:

**Признак 12.** *Пусть последовательность* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *монотонно убывает к нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ *сходится.*

Оказывается, этот признак является частным случаем более общего признака, который мы сейчас сформулируем и докажем.

**Признак 13** (Признак Дирихле)**.** *Пусть частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ограничены (то есть* $\exists C > 0$ *такое, что* $\forall n\ |A_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| < C$*), а* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится (отметим, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может влёгкую расходиться).*

Подставляя сюда вместо $a_n$ последовательность $a_n = (-1)^n$ (частичные суммы равны $1, 0, 1, 0, \ldots$ и ограничены), получаем формулировку первого утверждения.

**Замечание 1.** *В признаке Лейбница дополнительно к утверждению о сходимости ряда присутствует оценка остатка, которой в признаке Дирихле нет.*

*Доказательство.* Для доказательства мы применим трюк, подобный интегрированию по частям, именуемый в дискретном случае *преобразованием Абеля* («название умнее, чем само преобразование» © лектор).

Рассмотрим случай $b_n \searrow 0$ (случай $b_n \nearrow 0$ — аналогично).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n \geqslant N\ b_n < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Возьмём $m > N$, произвольное $p \in \mathbb{N}$ и оценим сумму $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n\right|$.

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} (A_n - A_{n-1})\, b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m+1}^{m+p} A_{n-1} b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m}^{m+p-1} A_n b_{n+1} =$$

$$= A_{m+p} b_{m+p} - A_m b_{m+1} + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right).$$

Следовательно, используя монотонное убывание $b_n$:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n\right| \leqslant |A_{m+p}b_{m+p}| + |A_m b_{m+1}| + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |A_n||b_n - b_{n+1}| <$$

$$< C\frac{\varepsilon}{4C} + C\frac{\varepsilon}{4C} + C\sum_{n=m+1}^{m+p-1}(b_n - b_{n+1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+2} + b_{m+2} - b_{m+3} + \ldots - b_{m+p}) = \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{\varepsilon}{4C} < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. □

**Пример 1.** *Попробуем поисследовать на сходимость какой-нибудь ряд, хороший пример — ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\alpha}{n}$, *при* $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ *или такой же с синусом. Пусть* $a_n = \cos n\alpha$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. *Исследуем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *на ограниченность частичных сумм:*

$$|A_n| = \frac{|\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha| \cdot |\sin(\alpha/2)|}{|\sin(\alpha/2)|} =$$

$$= \left|\frac{-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2} - \ldots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2|\sin\frac{\alpha}{2}|}\right| =$$

$$= \frac{\left|-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \leqslant \frac{2}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

*Тогда тут применим признак Дирихле и ряд сходится. Теперь покажем его условную сходимость, то есть тот факт, что ряд из модулей расходится.*

$$\frac{|\cos n\alpha|}{n} \geqslant \frac{(\cos n\alpha)^2}{n} = \frac{\cos 2n\alpha + 1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{n}}_{\text{ряд сход.}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{ряд расх.}}\right)$$

Сформулируем и докажем ещё один признак.

**Признак 14** (Признак Абеля)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— монотонная ограниченная последовательность. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

*Доказательство.* Последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а значит ограничена. Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, а значит имеет предел $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. То есть последовательность $b_n$ представима в виде $B + \beta_n$, где $\beta_n$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(B + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

Первое слагаемое сходится по условию (умножение на константу ничего не меняет), а второе по признаку Дирихле. □

# Перестановки ряда

**Определение 1.** *Пусть* $\sigma$ — *биекция (перестановка)* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. *Тогда говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *является перестановкой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сформулируем две теоремы, которые докажем в следующий раз.

**Теорема 1** (Коши)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, и его сумма равна* $A$. *Тогда любая его перестановка также сходится абсолютно, и ее сумма равна* $A$.

**Теорема 2** (Римана)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда:*

1. *для любого* $A \in \mathbb{R}$ *найдётся такая перестановка* $\sigma$, *что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;
2. *существует такая перестановка* $\sigma$, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $+\infty$;
3. *существует такая перестановка* $\sigma$, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $-\infty$;
4. *существует такая перестановка* $\sigma$, *что для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *последовательность частичных сумм предела не имеет.*

# Лекция 05 от 03.10.2016
# Перестановки рядов и произведения рядов

## Основные теоремы о перестановках рядов

Напомним основное для этой лекции определение.

**Определение 1.** *Пусть $\sigma$ — биекция (перестановка) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ является перестановкой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

**Теорема 1** (Коши)**.** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна $A$. Тогда любая его перестановка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ также сходится абсолютно, и её сумма равна $A$.*

*Доказательство абсолютной сходимости:* Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ абсолютно сходится. Обозначим $A_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Возьмём произвольное $N \in \mathbb{N}$ и покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant A_+$ (тогда возрастающая последовательность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ограничена и ряд сходится).

Определим $M := \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$. Тогда очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{M} |a_n|$, так как правая сумма содержит в себе и все слагаемые левой суммы. Но из этого неизбежно следует и $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant A_+$, потому что любая частичная сумма $\sum\limits_{n=1}^{M} |a_n|$ ряда с неотрицательными слагаемыми не больше всей его суммы. Соответственно, частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ограничены, откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. □

*Доказательство сходимости к тому же значению:* Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится к $A$. Пусть есть некоторое $\varepsilon > 0$. Возьмём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (Тогда $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n - A\right| = \left|\sum\limits_{N+1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

Обозначим $M := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2) \ldots \sigma^{-1}(N)\}$.

Тогда для любого $\tilde{M} > M$:

$$\left|\sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - A\right| \leqslant \left|\sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - A\right| <$$

$$< \left|\sum_{\substack{m=1\ldots\tilde{M}\\ \sigma(m)>N}}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{\substack{m=1\ldots\tilde{M}\\ \sigma(m)>N}}^{\tilde{M}} |a_{\sigma(m)}| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{\max\{\sigma(1)\ldots\sigma(N)\}} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Теперь пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. В нём бесконечно много положительных слагаемых и бесконечно много отрицательных, так как иначе он сходился бы абсолютно. Через $\{p_n\}$ обозначим последовательность всех неотрицательных слагаемых, а через $\{q_n\}$, соответственно, отрицательных.

Раз $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\{a_n\}$ — сходящаяся к нулю последовательность, а значит и $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ тоже сходятся к нулю. При этом несложно понять, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ — расходятся, так как если бы оба этих ряда сходились, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился бы абсолютно, а если бы один из них сходился, а другой — расходился, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ бы расходился.

**Теорема 2** (Римана)**.** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда:*

1. *для любого $A \in \mathbb{R}$ найдётся такая перестановка $\sigma$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;*
2. *существует такая перестановка $\sigma$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $+\infty$;*
3. *существует такая перестановка $\sigma$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $-\infty$;*
4. *существует такая перестановка $\sigma$, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ последовательность частичных сумм не имеет ни конечного ни бесконечного предела.*

*Доказательство.*

1. Возьмём произвольное $A \in \mathbb{R}$.
   Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > A$.
   Найдём наименьшее $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \cdots + q_{\tilde{k}_1} < A$.
   Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}+q_1+q_2+\cdots+q_{\tilde{k}_1}+p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_2} > A$.
   И так далее. Существование требуемых $k_j$ и $\tilde{k}_j$ следует из расходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. А в силу того, что $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ сходятся к нулю, построение выше и даст перестановку ряда, сумма которого равна $A$.

В остальных пунктах всё вполне аналогично.

2. Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > 1$.

   Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > 2$

   Найдём наименьшее $k_3 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} + q_2 + p_{k_2+1} + \dots + p_{k_3} > 3$

   И так далее. Построение выше и даст перестановку ряда, расходящуюся к к $+\infty$.

3. Аналогично предыдущему.

4. Аналогично предыдущим, например, доводя сумму последовательно до 1, -1, 2, -2, 3, -3 и так далее.

$\square$

# Произведение числовых рядов

Произведение пары конечных сумм записывается вполне естественным и понятным образом:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \sum_{m=1}^{M} b_m = (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_m) = \sum_{n,m=1}^{N,\ M} a_n b_m.$$

С бесконечными суммами всё менее понятно. Казалось бы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m,$$

однако объект в правой части равенства мы не определяли.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\iddots$ |
| $b_4$ | 16 | 15 | 14 | 13 | … |
| $b_3$ | 9 | 8 | 7 | 12 | … |
| $b_2$ | 4 | 3 | 6 | 11 | … |
| $b_1$ | 1 | 2 | 5 | 10 | … |
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | … |

Рис. 1: Нумерация по квадратам

Но по крайней мере множество пар индексов $(n, m)$ счетно, а значит и множество слагаемых в сумме счётно, то есть его можно занумеровать и таким образом превратить произведение рядов в обычный ряд. Вопрос лишь в том, как именно это сделать.

**Теорема 3** (Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = B$*, причём оба ряда абсолютно сходятся. Тогда ряд из произведений* $a_n b_m$*, занумерованных в любом порядке, сходится абсолютно и его сумма равна* $A \cdot B$*.*

*Доказательство.* По недавно доказанной теореме Коши о перестановках абсолютно сходящегося ряда нам достаточно доказать, что хотя бы при какой-то одной нумерации ряд из произведений абсолютно сходится к $A \cdot B$.

Будем использовать довольно очевидный способ нумерации, вполне достаточно описываемый картинкой слева, обычно называемый «нумерация по квадратам». Обозначим $A_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $B_+ := \sum\limits_{m=1}^{\infty} |b_m|$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ — ряд из произведений, занумерованный выбранным нами способом. Тогда последовательность частичных сумм ряда из модулей $c_k$ ограничена

$$\sum_{k=1}^{K} |c_k| \leqslant \sum_{k=1}^{K^2} |c_k| = \left(\sum_{n=1}^{K} |a_n|\right)\left(\sum_{m=1}^{K} |b_m|\right) \leqslant A_+ \cdot B_+,$$

то есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно. Сумму этого ряда посчитать теперь совсем несложно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K^2} c_k = \lim_{K\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{K} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{K} b_m\right) = A \cdot B$$

$\square$

Если хоть один из рядов не сходится абсолютно, такое утверждение уже, вообще говоря, неверно. Так что для всех остальных случаев важно договориться о нумерации. Один из часто встречающихся удобных способов нумерации, который в дальнейшем будет подразумеваться по умолчанию — это так называемая «нумерация по треугольникам» или «произведение Коши».

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | 15 | $\iddots$ | | | |
| $b_4$ | 10 | 14 | $\iddots$ | | |
| $b_3$ | 6 | 9 | 13 | $\iddots$ | |
| $b_2$ | 3 | 5 | 8 | 12 | $\iddots$ |
| $b_1$ | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 |
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $\ldots$ |

Рис. 2: Нумерация по треугольникам

**Определение 2.** *Для рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ *их произведением называется ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$*, где* $c_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j}$.

Для примера, $c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$, $c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$.

**Теорема 4** (Мертенса)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = B$*, причём хотя бы один из рядов сходится абсолютно. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j}\right) = AB$.

Доказательство этой теоремы опустим (хотя оно и не является сложным).

# Лекция 06 от 10.10.2016
# Бесконечные произведения

## Основные понятия и определения

Итак, бесконечные произведения. Попытаемся применить к ним тот же подход, что и к рядам.

**Определение 1.** *Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ненулевых действительных чисел. Бесконечным произведением называется выражение $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, записываемое также как $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Частичным произведением называется величина $P_N = a_1 \ldots a_N$.*

**Определение 2.** *Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к числу $A \neq 0$, если последовательность частичных произведений $P_N$ сходится к $A$ при $N \to \infty$.*

**Определение 3.** *Бесконечное произведение сходится, если существует такое $A \neq 0$, к которому это произведение сходится.*

**Утверждение 1.** *Добавление/удаление/изменение конечного числа множителей не влияет на сходимость/расходимость бесконечного произведения.*

Здесь важно понимать, что это возможно только потому, что мы запретили последовательности содержать нулевые элементы.

**Утверждение 2** (Необходимое условие сходимости)**.** *Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 1$.*

*Доказательство.* Пусть $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Тогда $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \to \dfrac{A}{A} = 1$. □

Здесь становится видно, почему $A = 0$ — это плохо. Именно поэтому мы запретили сходимость к нулю, когда давали соответствующие определения.

Раз сходиться к нулю нельзя, то определим это несколько иначе.

**Определение 4.** *Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится к нулю, если $P_N \to 0$ при $N \to \infty$.*

*Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится к $+\infty$, если $P_N \to +\infty$ при $N \to \infty$.*

## Связь с числовыми рядами, исследование сходимости

Конечно, можно было бы потратить несколько лекций на то, чтобы заново доказать все те признаки, которые мы уже разобрали для рядов. Но гораздо легче просто свести задачу к предыдущей.

При изучении сходимости бесконечных произведений достаточно ограничиться случаем, когда $a_n \to 1$. Тогда можно считать, что начиная с некоторого места все члены последовательности строго положительны. А так как удаление конечного числа начальных членов на факт сходимости или расходимости не влияет, достаточно изучить бесконечные произведения только с положительными членами.

**Утверждение 3.** *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

*Доказательство.* Заметим, что $S_N = \ln P_N$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = A > 0$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln A$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ сходится.

И наоборот, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n = S$, то есть $S_N \to S$, то тогда $P_N = e^{S_n} \to e^S \neq 0$, то есть бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. $\square$

Отсюда становится понятным, почему логично определять стремление бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ к нулю как расходимость — это соответствует случаю, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ расходится к $-\infty$.

Также получаем несколько халявных следствий.

**Утверждение 4.** *Пусть все* $\alpha_n \geqslant 0$ *или все* $\alpha_n \in (-1, 0]$. *Тогда бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

*Доказательство.* Если $\alpha_n$ не стремится к нулю, то и $1 + \alpha_n$ не стремится к единице. Тогда и ряд, и бесконечное произведение расходятся, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

Теперь пусть $\alpha_n \to 0$. Тогда сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$. И так как он знакопостоянный, то по соответствующему признаку сравнения этот ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд из эквивалентных членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. $\square$

**Утверждение 5.** *Пусть* $\alpha_n > -1$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *сходится. Тогда бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$.

*Доказательство.* Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, то $\alpha_n \to 0$. Аналогично предыдущему доказательству, достаточно исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$.

Разложим его члены по формуле Тейлора, получив $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n - \dfrac{\alpha_n^2}{2} + o(\alpha_n^2)\right)$, а это уже равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(1+o(1))$. Начиная с некоторого номера, ряд станет знакопостоянным, то есть можно применить все тот же признак сравнения. Что и приводит нас с исследованию сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$. $\square$

Фактически мы доказали два необходимых и достаточных условия сходимости. Теперь рассмотрим просто достаточное.

**Утверждение 6.** *Пусть* $\alpha_n > -1$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ *сходится, то сходится и бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$.

*Доказательство.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+\alpha_n)| \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n) \text{ сходится} \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n) \text{ сходится.}$$

□

Если ввести соответствующее определение, то на бесконечные произведения можно будет распространить теорему о перестановке множителей (слагаемых) и ее влиянии на сходимость.

**Определение 5.** *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно/условно, если абсолютно/условно сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

# Применение

Теперь, окончательно убедившись, что изучение бесконечных произведений можно свести к изучению рядов, самое время задаться вопросом — а зачем они нужны?

Оказывается, они могут быть удобным инструментом при доказательствах. Приведем несколько примеров.

**Утверждение 7.** *Пусть* $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ *и* $S_n = a_1 + \ldots a_n$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ *расходится.*

*Доказательство.* Достаточно доказать расходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{S_n}\right)$:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{S_n}\right) = \prod_{n=2}^{\infty}\frac{S_n-a_n}{S_n} = \prod_{n=2}^{\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n},$$
$$P_n = \frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S_2}{S_3}\ldots\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_1}{S_n} \to 0.$$

□

Отсюда в частности следует, что нет самого маленького расходящегося ряда.

Теперь докажем почти формулу Стирлинга.

**Утверждение 8.** *Пусть* $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$.

*Доказательство.* Представим элемент $a_n$ в следующем виде:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1 / \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

Тогда сходимость к положительной константе последовательности $\{a_n\}$ равносильна сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Посчитаем, чему равен член этого произведения:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! e^n (n+1)^{n+1+1/2}}{(n+1)! e^{n+1} n^{n+1/2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} / e.$$

Перейдем к рассмотрению ряда из логарифмов:

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = [\text{ф-ла Тейлора}] =$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Получили, что такой ряд будет сходиться. Следовательно, существует положительный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

□

# Лекция 07 от 17.10.2016
# Функциональные последовательности и ряды

## Поточечная и равномерная сходимость

Начиная с этой лекции, будем говорить о функциональных последовательностях и рядах.

Пусть $X$ — произвольное множество точек, а $\{f(x)\}_n^\infty$ — последовательность функций, определённых на $X$ или на его подмножестве.

**Определение 1.** *Будем говорить, что $f_n(x)$ сходится поточечно к $f(x)$ на $X$, если*

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Обозначение 1.** $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$.

Почему такое определение не совсем удобно для нас? Сходимость в каждой точке может быть своя, произвольная, а хотелось бы, чтобы свойства функций $f_n$ и $f$ были похожи. Приведем пример, когда это не выполняется.

**Пример 1.** *Если $f_n(x) = x^n$, $X = [0;1]$, то*

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{[0;1]} \begin{cases} 0,\ x < 1 \\ 1,\ x = 1 \end{cases}.$$

То есть бывает так, что все функции последовательности непрерывны на отрезке и стремятся к разрывной функции.

Для устранения этого недостатка введём другое определение сходимости функциональной последовательности.

**Определение 2.** *Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x)$ равномерно на множестве $X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Обозначение 2.** $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

Из определений сразу очевидно следует утверждение.

**Утверждение 1.** *Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$.*

А что, если нам даны последовательность $f_n(x)$, функция $f(x)$ и множество $X$, то как нам понять, сходится ли $f_n(x)$ к $f(x)$ равномерно?

Существует мощный способ. Обозначим $r_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.

**Утверждение 2** (Супремум-критерий)**.** $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x) \Leftrightarrow r_n \to 0$.

*Доказательство.*
**Необходимость**. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\Rightarrow r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

То есть $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

**Достаточность**.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ r_n < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$\square$

Для приведённого выше примера $f_n(x) = x^n$:

**Утверждение 3.**

1. $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{[0;1)} 0$.
2. $x^n \underset{n\to\infty}{\overset{[0;1)}{\not\rightrightarrows}} 0$.

*Доказательство.* $r_n = \sup\limits_{x\in[0;1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0$. $\square$

Есть ещё одна подобного рода последовательность.

$$f_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

В любой точке значение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$, то есть $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} e^x$, но $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\not\rightrightarrows}} e^x$. Однако, как легко показать, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{(-C;C)}{\rightrightarrows}} e^x$ для всякого $C > 0$. Эта последовательность ещё всплывёт в нашем курсе.

**Утверждение 4.** *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *то*

1. $f_n(x) + g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x) + g(x)$,
2. $\alpha f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \alpha f(x)$.

*Доказательство.* Докажем пункт 1, второй доказывается аналогично. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\colon\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\colon\ \forall x \in X\ |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N\ \forall x \in X$:

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Получили требуемое. $\square$

**Утверждение 5.** *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $g(x)$ *ограничена на множестве* $X$*, то* $f_n(x)g(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)g(x)$*.*

*Доказательство.* $\exists C > 0\colon\ \forall x \in X\ |g(x)| < C$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/C$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N$, $\forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$. Тогда
$\forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| < C\varepsilon_1 = \varepsilon$. □

**Замечание 1.** *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$*,* $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x)$ *и* $f(x)$*,* $g(x)$ *ограничены на множестве* $X$*, то* $f_n(x)g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)g(x)$*.*

**Замечание 2.** *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $f(x)$ *отделена от нуля (т.е. существует такое* $\alpha > 0$*, что для любого элемента множества* $X$ $|f(x)| \geqslant \alpha$*), то* $\dfrac{1}{f_n(x)} \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \dfrac{1}{f(x)}$*.*

Доказательство этих фактов остаётся в качестве управжнения. **Указание**. Рассмотреть
$\dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f} = (f - f_n)\dfrac{1}{f_n \cdot f}$.

# Геометрический смысл равномерной сходимости

Несложно понять, что если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то для всякого $\varepsilon > 0$, начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ все графики функций $f_n(x)$ окажутся в $\varepsilon$-коридоре графика функции $f(x)$.

# Критерий Коши равномерной сходимости

**Теорема 1** (Критерий Коши равномерной сходимости)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$ *(равномерно сходится куда-то);*
2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на* $X$*:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n,m > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* **1** $\Leftarrow$ **2**. Заметим, что для всякого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Тогда $\forall x \in X\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n,m > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1.$$

Зафиксировав $n$ перейдём к пределу при $m \to \infty$, получим, что $\forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon$. Получили требуемое.

**1** $\Rightarrow$ **2**. Пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$ , что $\forall n > N\ \forall x \in X$ верно $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall n,m > N\ \forall x \in X$ выполнено

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

□

# Функциональные ряды

Перейдём к рассмотрению функциональных рядов. Тут все определения и теоремы переносятся с обычных рядов с заменой числовых последовательностей на функциональные.

**Определение 3.** *Будем говорить, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на множестве* $X$*, если последовательность его частичных сумм* $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на множестве* $X$.

Отсюда же можно сформулировать ряд утверждений, которые по сути мы уже доказали.

**Утверждение 6.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \tilde{S}(x)$. *Тогда их почленная сумма* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x) + \tilde{S}(x)$.

**Утверждение 7.** *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \alpha S(x).$$

**Утверждение 8.** *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$, *а* $g(x)$ *ограничена на* $X$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x)S(x).$$

Ну и конечно, мы не обойдёмся без критерия Коши.

**Утверждение 9** (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)**.** *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$ *(опять же, сходится куда-то).*
2. *Выполняется условие Коши*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X\ \left|\sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(x)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда же нахаляву получаем утверждение.

**Утверждение 10** (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда)**.** *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$, *то* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$.

# Лекция 08 от 31.10.2016
# Функциональные ряды. Признаки сходимости

Довольно естественно желание понимать, когда ряд сходится, а когда нет. Для числовых рядов мы рассмотрели большое количество разнообразных признаков сходимости. Аналогично, изучим несколько признаков равномерной сходимости функциональных рядов.

## Признак Вейерштрасса

**Признак 15** (Признак Вейерштрасса). *Пусть существует последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *такая, что* $\forall n \in N$ *и для любого* $x \in X$ *выполняется неравенство* $|f_n(x)| \leqslant a_n$*, и кроме того, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* $X$*, и* $\forall x \in X$ *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно.*

*Доказательство.* Вторая часть прямо следует из доказанных в самом начале семестра признаков сравнения. Осталось доказать равномерную сходимость.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Из критерия Коши для числовых рядов следует, что $\exists N \in \mathbb{N}$ : $\forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{n+1}^{n+p} a_n < \varepsilon$.

Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ :

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{m+1}^{m+p} |f_n(x)| \leqslant \sum_{m+1}^{m+p} a_m < \varepsilon.$$

То есть по критерию Коши для функциональных рядов наш ряд равномерно сходится. □

## Примеры рядов, которые не ловятся п. Вейерштрасса

А существует ли равномерно сходящийся ряд, который не ловится признаком Вейерштрасса? Конечно. Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad X = \{-1\}.$$

Если хочется, чтобы ряд был неотрицательный, можно пойти на хитрость. Возьмем последовательность $\{f_n\}$ такую, что

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x = n; \\ 0, & x \neq n. \end{cases}$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ будет сходиться равномерно на $(0, +\infty)$, но не будет подпадать под условие признака Вейерширасса.

Подобный подход можно распространить на непрерывные функции $f_n(x)$ — например, они могут задавать равнобедренные треугольники, стоящие на оси $OX$, с непересекающимися основаниями и постепенно убывающей высотой (например, то же $1/n$).

Хотя классическими примерами, конечно же, являются следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

# Признак Дирихле

**Признак 16** (Признак Дирихле)**.** *Если выполняются следующие условия:*

1. *последовательность частичных сумм* $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x)$ *равномерно ограничена на* $X$*, то есть* $\exists C > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : \left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)\right| < C$*;*
2. *последовательность функций* $\{b_n(x)\}$ *монотонна для любого* $x \in X$ *и равномерно сходится к нулю на* $X$ *при* $n \to \infty$*,*

*то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно на* $X$*.*

*Доказательство.* Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4C}$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall x \in X : \ |b_n(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X :$

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)b_n(x)\right| = \left|A_{m+p}(x)b_{m+p}(x) - A_m(x)b_{m+1}(x) + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x))\right| <$$

$$< C\varepsilon_1 + C\varepsilon_1 + C\sum_{n=m+1}^{m+p-1} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + C\,|b_{m+1}(x) - b_{m+p}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2C\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon.$$

Здесь мы воспользовались преобразованием Абеля (см. лекцию 4), а также тем, что последовательность $b_n(x)$ монотонна, поэтому в последней сумме все модули раскроются с одинаковым знаком. □

# Признак Абеля

**Признак 17** (Признак Абеля)**.** *Если выполняются следующие условия:*

1. *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномерно сходится на* $X$*;*
2. *последовательность функций* $\{b_n(x)\}$ *равномерно ограничена на* $X$ *и монотонна* $\forall x \in X$*,*

*то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно на* $X$*.*

*Доказательство.* Доказать так же, как в случае числовых рядов, не получится. Действительно, если разложить функции $b_n$ как $b_n(x) = b(x) + e_n(x)$, то последовательность $\{e_n(x)\}$ не обязательно равномерно сходится к нулю. Например, при $b_n(x) = x^n$ на множестве $X = \{0, 1\}$.

Доказательство, естественно, очень похоже на доказательство предыдущего признака.

Так как $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена, то $\exists C > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X\ |b_n(x)| < C$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4C}$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)\right| < \varepsilon_1$.

Положим для $n > N : \tilde{A}_n(x) = a_{N+1}(x) + \dots + a_n(x)$, $\tilde{A}_N(x) = 0$.

Очевидно, что $\forall n \geqslant N, \forall x \in X : |\tilde{A}_n(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X :$

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)b_n(x)\right| = \left|\sum_{n=m+1}^{m+p} (\tilde{A}_n(x) - \tilde{A}_{n-1}(x))b_n(x)\right| =$$
$$= \left|\tilde{A}_{m+p}(x)b_{m+p}(x) - \tilde{A}_m(x)b_{m+1}(x) + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} \tilde{A}_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x))\right| <$$
$$< C\varepsilon_1 + C\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_1 \left|b_{m+1}(x) - b_{m+p}(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2C\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon.$$

□

Рассмотрим один из классических примеров, который мы упоминали в начале лекции.

**Пример 1.** $\forall \alpha > 0$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ *равномерно сходится на* $X = (\alpha, 2\pi - \alpha)$.

*Доказательство.* Здесь применим признак Дирихле. Действительно, пусть $a_n(x) = \sin nx$, а $b_n(x) = 1/n$. Тогда $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} < \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ и можно взять $C := \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. А с $b_n(x)$ все очевидно. □

С другой стороны:

**Пример 2.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ *не сходится равномерно на* $X = (0, 2\pi)$.

*Доказательство.* Здесь признак Дирихле уже не применим. Докажем отсутствие равномерной сходимости через отрицание критерия Коши.

Возьмем $\varepsilon = 1/100$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$ зафиксируем $m = N + 1$, $p = m$, $x = \pi/4m$. Получаем:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{\sin nx}{n}\right| \geqslant \frac{m\sqrt{2}/2}{2m} \geqslant \varepsilon.$$

□

# Лекция 09 от 07.11.2016
# Предел по базе

Все пределы, которые раньше возникали в нашем курсе — это частные случаи предела по базе.

## Что это такое?

Пусть $X$ — произвольное непустое множество.

**Определение 1.** *Система подмножеств $\mathcal{B}$ множества $X$ называется базой, если*

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$;
2. $\forall B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ \ B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

**Замечание 1.** *В классическом понимании символ $\subset$ означает строгое включение, однако в современной математике это также может означать равенство множеств, и мы будем пользоваться именно этим значением. Если хотят подчеркнуть, что множества не равны, то пишут $\subsetneq$.*

Пусть функция $f$ определена на $X$ или части $X$ и принимает действительные значения (впрочем, действительность не принципиальна).

**Определение 2.** *Число $A$ называют пределом функции $f$ по базе $\mathcal{B}$, если*

0. $\exists B \in \mathcal{B} : f$ *определена на* $B$;
1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B} : \forall x \in B\ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Вообще говоря, нулевое условие можно опустить, так как оно следует из первого, но исторически сложилось, что его все-таки пишут — на практике гораздо удобней сначала проверить, определена ли функция хоть где-то.

**Пример 1.**

- $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. *Тогда* $B_n \cap B_m = B_{\max(n,m)}$. *Такая база задает предел числовой последовательности.*
- $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$, $B_\delta = (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. *Такая база задает двусторонний предел функции при* $x \to 0$. *Аналогично можно задать односторонние пределы.*
- *Пусть зафиксирован отрезок* $[a, b]$ *и* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

  *Пусть $X$ — множество всех отмеченных разбиений $[a, b]$ (то есть это разбиения с зафиксированной точкой на каждом отрезке). Тогда базой Римана называется база $\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$, где $B_\delta$ это совокупность всех отмеченных разбиений с диаметром меньше $\delta$. Соответственно, интеграл Римана является пределом по этой базе интегральных сумм Римана, рассматриваемых как функция от отмеченных разбиений при фиксированной функции $f$:*

$$\sigma(f, (\tau, \xi)) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|\Delta_j|.$$

## Ключевые свойства

Пусть $\mathcal{B}$ — база $X$.

**Утверждение 1.** *Если* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A_1$ *и* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A_2$, *то* $A_1 = A_2$.

*Доказательство.* Пусть $A_1 \neq A_2$. Положим $\varepsilon = \frac{|A_1 - A_2|}{2}$. Тогда:

$$\exists B_1 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_1 \; |f(x) - A_1| < \varepsilon;$$
$$\exists B_2 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_2 \; |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Тогда существует $B_3 \in \mathcal{B}$ такой, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Для него будет верно, что

$$\forall x \in B_3 : \; |A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \leqslant |A_1 - f(x)| + |A_2 - f(x)| < 2\varepsilon = |A_1 - A_2|.$$

При этом важно понимать, что $B_3 \neq \varnothing$, просто по определению.

Получили противоречие. □

Давно знакомое всем доказательство, но зато оно показывает, почему база определена именно так.

**Утверждение 2.** *Пусть* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$, $\lim\limits_{\mathcal{B}} g(x) = B$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

1. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f + g) = A + B$;
2. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(fg) = AB$;
3. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(\alpha f) = \alpha A$;
4. $\lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f}{g} = \dfrac{A}{B}$, *если* $B \neq 0$.

*Доказательство.* Это тоже почти школьный материал, так что докажем только один пункт. Пусть это будет последний.

Немного преобразуем:

$$\frac{f}{g} - \frac{A}{B} = \frac{Bf - Ag}{gB} = \frac{Bf - BA + BA - Ag}{gB} = \frac{B(f - A) + A(B - g)}{gB}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \min\left(\dfrac{\varepsilon B^2}{100(|A| + |B|) + 1}; \dfrac{|B|}{2}\right)$. Найдем такие $B_1$, $B_2 \in \mathcal{B}$, что:

$$\forall x \in B_1 : |f(x) - A| < \varepsilon_1;$$
$$\forall x \in B_2 : |g(x) - B| < \varepsilon_1.$$

Найдем такое $B_3 \in \mathcal{B}$, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Тогда для всех $x \in B_3$ верно, что:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| \leqslant \frac{|B|\varepsilon_1 + |A|\varepsilon_1}{B^2/2} = \varepsilon_1 \frac{2(|A| + |B|)}{B^2} < \varepsilon.$$

□

**Утверждение 3.** *Если существует предел* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f$ *и функция* $f$ *неотрицательна хотя бы на одном элементе* $B$ *базы* $\mathcal{B}$*, то* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f \geqslant 0$.

*Доказательство.* Пусть $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A < 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ существует такой $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$, что $\forall x \in \widetilde{B}: \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Но существует $x \in B \cap \widetilde{B}$, и тогда для него одновременно будет верно, что $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) \leqslant \frac{A}{2} < 0$. Противоречие. □

**Следствие 1.** *Пусть* $f \geqslant g$ *на некотором элементе* $B \in \mathcal{B}$ *и существуют пределы* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$ *и* $\lim\limits_{\mathcal{B}} g = \widetilde{A}$*. Тогда* $A \geqslant \widetilde{A}$.

*Доказательство.* $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f - g) = A - \widetilde{A}$ и одновременно, $(f - g) \geqslant 0$ на $B$. □

Пусть $\mathcal{B}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$ — базы на $X$.

**Утверждение 4.** *Пусть* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$ *и для каждого элемента* $B \in \mathcal{B}$ *существует элемент* $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ *такой, что* $\widetilde{B} \subset B$*. Тогда* $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{B}}} f = A$.

*Доказательство.* Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем $B \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B : |f(x) - A| < \varepsilon$. Теперь найдем $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ такое, что $\widetilde{B} \subset B$. Тогда $\forall x \in \widetilde{B} : |f(x) - A| < \varepsilon$. Получили по определению предела, что $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{B}}} f = A$. □

Фактически это обобщение утверждения, что любая подпоследовательность сходится туда же, куда и вся последовательность, и что если есть предел, то есть и оба односторонних предела, и они все равны.

Ну а где есть предел, там есть и критерий Коши!

## Критерий Коши

**Определение 3.** *Функция* $f$ *удовлетворяет условию Коши по базе* $\mathcal{B}$*, если:*

0. $\exists B_0 \in \mathcal{B} : f$ *определена на* $B_0$;
1. $\forall \varepsilon > 0 : \exists B \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in B \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$.

**Теорема 1** (Критерий Коши)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *существует предел* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f$*;*
2. *функция* $f$ *удовлетворяет условию Коши по базе* $\mathcal{B}$.

*Доказательство.* Напоминаем, что мы пока определили только конечные пределы по базе.

(1) $\Rightarrow$ (2). Доказываем как обычно, через $\varepsilon/2$ и прочее.

(2) $\Rightarrow$ (1). Построим последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$:

$$\begin{aligned}
\text{для } \varepsilon = 1, \ &\exists B_1 \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in B_1 \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1;\\
\text{для } \varepsilon = 1/2, \ &\exists \widetilde{B_2} \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in \widetilde{B_2} \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/2,\\
&\exists B_2 \subset B_1 \cap \widetilde{B_2} : \ \text{тогда } \forall x, \widetilde{x} \in B_2 \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/2;\\
\text{для } \varepsilon = 1/3, \ &\exists \widetilde{B_3} \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in \widetilde{B_3} \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/3,\\
&\exists B_3 \subset B_2 \cap \widetilde{B_3} : \ \text{тогда } \forall x, \widetilde{x} \in B_3 \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/3;\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Для каждого элемента $B_n$ выберем точку $x_n \in B_n$. Заметим, что $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, : \ \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \forall n, m > N \ |f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Это верно, так как $x_n \in B_n \subset B_N$ и аналогично для $x_m$.

Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |f(x_n) - A| < \varepsilon/2.$$

При этом, существует такое $n > N$, что $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Значит,

$$\forall x \in B_n \in \mathcal{B} : |f(x) - A| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$

# Лекция 10 от 14.11.2016
# Предел по базе. Перестановка пределов

В прошлый раз мы узнали, что такое база множества и понятие предела по базе, и теперь будем продолжать работать с этим.

## Проблема равенства двойного предела

Рассмотрим такую задачу

**Задача 1.** *Пусть $X$ и $Y$ — непустые множества с базами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Рассмотрим некоторую функцию $h\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}$. Пусть про неё известно, что*

$$\forall x \in X\ \exists \lim_{\mathcal{D}} h(x,y) = f(x)$$
$$\forall y \in Y\ \exists \lim_{\mathcal{B}} h(x,y) = g(y)$$

*Требуется узнать, равны ли пределы $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathcal{D}} g(x)$. То есть верно ли, что*

$$\lim_{\mathcal{B}} \lim_{\mathcal{D}} h(x,y) = \lim_{\mathcal{D}} \lim_{\mathcal{B}} h(x,y)?$$

Возможно, некоторые скажут, что эти пределы равны всегда, но это отнюдь не так. Хороший контрпример — функция

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для неё легко посчитать повторные пределы в нуле и показать, что они не равны. Действительно,

$$\lim_{y \to 0} h(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0; \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда легко понять, что $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y \to 0} h(x,y) = 1$. Аналогично показывается, что $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x \to 0} h(x,y) = -1$.

Что же поможет нам идентифицировать такие ситуации?

## Критерий Гордона

**Теорема 1** (Критерий Гордона)**.** *Следующие утверждения эквивалентны (внимание: здесь используются обозначения, аналогичные введённым ранее):*

1. *повторные пределы $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathcal{D}} g(y)$ существуют и равны;*
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathcal{B}\colon\ \forall x \in B_\varepsilon\ \exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon.$

*Доказательство.*

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Пусть $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{D}} g(y) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$. Тогда:

- $\exists B_0 \in \mathcal{B}\colon\ \forall x \in B_0\ |f(x) - A| < \varepsilon_1$;
- $\exists D_0 \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_0\ |g(y) - A| < \varepsilon_1$.

В качестве $B_\varepsilon$ возьмём $B_0$. Тогда

$$\forall x \in B_0\ \exists \widetilde{D}_x \in \mathcal{D}\colon \forall y \in \widetilde{D}_x\ |h(x,y) - f(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\exists D_x \in \widetilde{D}_x \cap D_0.$$

Тогда

$$\forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| \leqslant |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - A| + |A - g(y)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Получили требуемое.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] Докажем для начала, что пределы есть. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$. Перепишем условие второго пункта:

$$\exists B_{\varepsilon_1} \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_{\varepsilon_1}\ \exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon_1.$$

Пусть $x_1, x_2 \in B_{\varepsilon_1}$ — произвольные. Рассмотрим следующие элементы:

$$\exists D_{x_1} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_{x_1}\colon\ |h(x_1,y) - g(y)| < \varepsilon_1;$$
$$\exists D_{x_2} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_{x_2}\colon\ |h(x_2, y) - g(y)| < \varepsilon_1;$$
$$\exists \widetilde{D}_{x_1} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_{x_1}\colon\ |h(x_1,y) - f(x_1)| < \varepsilon_1;$$
$$\exists \widetilde{D}_{x_2} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_{x_2}\colon\ |h(x_2,y) - f(x_2)| < \varepsilon_1.$$

Возьмём произвольное $y \in D_{x_1} \cap D_{x_2} \cap \widetilde{D}_{x_1} \cap \widetilde{D}_{x_2}$. Тогда:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - h(x_1, y)| + |h(x_1, y) - g(y)| + |g(y) - h(x_2, y)| + |h(x_2, y) - f(x_2)| <$$
$$< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) =: A$. Докажем, что $\exists \lim\limits_{\mathcal{D}} g(y) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём $B_0 \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B_0\ |f(x) - A| < \varepsilon/3$. Найдём такое $B_{\varepsilon/3} \in \mathcal{B}$, что:

$$\forall x \in B_{\varepsilon/3}\ \exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon/3.$$

Зафиксируем $x \in B_0 \cap B_{\varepsilon/3}$. Рассмотрим следующие элементы:

$$\exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon/3;$$
$$\exists \widetilde{D}_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_x\ |h(x,y) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Тогда $\exists D \in \mathcal{D}:\ D \subset D_x \cap \widetilde{D}_x$ и $\forall y \in D$:

$$|g(y) - A| \leqslant |g(y) - h(x,y)| + |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - A| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Получили требуемое. $\square$

# Следствия

**Теорема 2.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $x_0$ — его предельная точка (конечная или бесконечная). Пусть*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{X \ni x \to x_0} f_n(x) = a_n,$$

*а также $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$.*

*Доказательство.* Так как $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Для существования и равенства пределов необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \delta(x_0) \cap X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Применяя критерий Гордона, получаем требуемое. □

**Следствие 1.** *Пусть $I$ — невырожденный промежуток на $\mathbb{R}$ и для последовательности функций $f_n(x)$ известно, что $f_n(x) \in C(I)$ и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f(x)$ Тогда $f(x) \in C(I)$.*

# Лекция 11 от 21.11.2016 Функциональные последовательности. Интегрирование и дифференцирование.

## Частные случаи двойных пределов

Повторим и немного продолжим результаты прошлой лекции.

**Утверждение 1.** *Пусть $\mathcal{B}$ — база на $X$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_n(x) = a_n$, и при этом $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} f(x).$$

Отметим, что равномерная сходимость это удобное, но завышенное требование.

**Следствие 1.** *Пусть $\mathcal{B}$ — база на $X$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_n(x) = a_n$, и при этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} S(x)$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} S(x).$$

*То есть при наличии равномерной сходимости порядок этих действий не важен.*

Это действительно следствие предыдущего утверждения, потому что

$$S(x) \leftleftarrows S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) \underset{\mathcal{B}}{\to} a_1 + \ldots + a_n.$$

**Следствие 2.** *Пусть $I$ — невырожденный промежуток на $\mathbb{R}$ и $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in C(I)$ и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(I)$.*

**Следствие 3.** *Пусть $I$ — невырожденный промежуток на $\mathbb{R}$ и $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in C(I)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} S(x)$. Тогда $S(x) \in C(I)$.*

## Связь с интегрированием

Вспомним, что интеграл Римана это тоже предел по базе.

**Утверждение 2.** *Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in R[a,b]$, то есть интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда $f(x) \in R[a,b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Можно сказать, это теорема о перестановке интеграла и предельного перехода.

Перед тем как приступить к доказательству, задумаемся: а может быть, требование равномерной сходимости это слишком строго? Однако поточечной явно не хватает. Подтвердим это несколькими примерами.

- Пронумеруем все рациональные числа: $r_1, r_2, \ldots$, и определим функции следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

  Поточечно это будет сходиться к функции Дирихле, каждая отдельная функция $f_n$ интегрируема, а вот $\{f_n\}$ — нет.

- 

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/n); \\ 1/x, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

  По отдельности все функции интегрируемы, а поточечно это будет стремится к

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- Функция $f_n(x)$ задает равнобедренный треугольник с основанием на оси $OX$ от 0 до $1/n$ и высотой $2n$. Тогда каждый интеграл равен 1, а поточечно $f_n$ стремятся к нулю. То есть все существует, но равенства нет.

Итого, поточечной сходимости явно недостаточно. Но честно говоря, равномерной сходимости действительно хватает с избытком, но об этом как-нибудь потом.

Теперь приступим к доказательству.

*Доказательство.* Покажем, что это частный случай теоремы о перестановке пределов.

Пусть $X = \{(\tau, \xi)\}$ — это множество всех отмеченных разбиений $[a, b]$ (то есть таких, на каждом отрезке которого зафиксирована произвольная точка $\xi_i$), $\sigma_n(\tau, \xi)$ — значение интегральной суммы Римана для функции $f_n(x)$, соответствующее отмеченному разбиению $(\tau, \xi)$. Тогда $\{\sigma_n(\tau, \xi)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, определенных на $X$. Также обозначим за $\sigma(\tau, \xi)$ интегральную сумму Римана для функции $f(x)$.

Докажем, что $\sigma_n(\tau, \xi) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \sigma(\tau, \xi)$. Действительно, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in [a, b]: \ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Тогда $\forall n > N$ и $\forall (\tau, \xi) \in X$ ($M$ — количество отрезков в разбиении $\tau$, $\Delta_m$ — длина $m$-ого отрезка):

$$|\sigma(\tau, \xi) - \sigma_n(\tau, \xi)| = \left| \sum_{m=1}^{M} f_n(\xi_m)\Delta_m - \sum_{m=1}^{M} f(\xi_m)\Delta_m \right| \leqslant \sum_{m=1}^{M} |(f_n(\xi_m) - f(\xi_m))\Delta_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{m=1}^{M} \Delta_m = \varepsilon.$$

Получается, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}} \sigma_n(\tau, \xi) = \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ (здесь $\mathcal{B}$ — база Римана).

Вспомним, что $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \sigma$, а значит, по теореме о перестановке двух пределов, существуют и равны пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} \sigma(\tau, \xi) = \int\limits_a^b f(x)dx$. □

**Следствие 4.** *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in R[a,b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$. *Тогда* $S(x) \in R[a,b]$ *и*

$$\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

# Связь с дифференцированием

**Утверждение 3.** *Пусть* $I$ *— невырожденный промежуток на* $\mathbb{R}$ *и* $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in C^1(I)$ *(то есть непрерывно дифференцируема),* $\exists x_0 \in I$ *такое, что* $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится, и при этом* $f_n'(x) \overset{I}{\rightrightarrows} g(x)$. *Тогда* $f_n(x) \overset{I}{\to} f(x)$ *(поточечно!), причем на каждом ограниченном подмножестве* $I$ *сходимость будет равномерной,* $f(x) \in C^1(I)$ *и* $f'(x) = g(x)$ *на* $I$.

Что это вообще означает? Фактически это похоже на перестановку пределов:

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

*Доказательство.* Вообще говоря, это сразу следует из прошлого утверждения и формулы Ньютона–Лейбница. Но распишем.

Заметим, что $\forall x \in I$: $f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t$. При этом $f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \alpha$ (так как вообще не зависит от $x$), а $f_n'(t) \overset{I}{\rightrightarrows} g(t)$.

Получается, что $f_n(x)$ поточечно на $I$ сходится к $\alpha + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t = f(x)$. При этом очевидно $f(x) \in D(I)$ (т.е. дифференцируема) и $f'(x) = g(x)$. Итого, $f(x) \in C^1(I)$.

Осталось показать равномерную сходимость на ограниченном подмножестве $I$.

Для любого $E$ — ограниченного подмножества $I$ — верно, что $\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$. Действительно, в силу ограниченности $E$, $\exists C > 0\ \forall x \in E:\ |x_0 - x| < C$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall t \in E:\ |f_n'(t) - g(t)| < \varepsilon/C$. Значит, $\forall n > N$ и $\forall x \in E$:

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon/C|x_0 - x| < \varepsilon.$$

В первом переходе модуль появился, потому что мы не знаем взаимное расположение точек $x_0$ и $x$. $\square$

Можно доказать более общее утверждение, которое отличается от предыдущего заменой $C^1(I)$ на $D(I)$, то есть достаточно того, что функции дифференцируемы. Но мы этим заниматься не будем.

А нужно ли нам, чтобы существовала такая точка $x_0$? Конечно! Пусть, например, $f_n(x) = n$. Тогда в каждой точке расходимость к бесконечности. А с другой стороны, $f_n'(x) = 0$ и последовательность производных сходится.

# Лекция 12 от 28.11.2016
# Степенные ряды

## Основные определения и свойства

**Определение 1.** *Степенной ряд — это функциональный ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, *где* $\{c_n\}$ *— последовательность коэффициентов, а* $x_0 \in \mathbb{R}$ *— центр ряда.*

Отметим, что ряд начинается с $n = 0$. Это будет важно в дальнейшем, давая возможность представлять рядами функции, в нуле (точнее, в $x_0$) не равные нулю.

В процессе всех дальнейших рассуждений в рамках этой лекции будем полагать, что $x_0 = 0$. Это не умаляет общности, так как фактически это сдвиг по оси (иными словами, замена переменной).

**Теорема 1** (Абеля I). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* $x_1$. *Тогда* $\forall x: \ |x| < |x_1|$ *этот ряд сходится абсолютно. Более того,* $\forall x_2 \in (0, |x_1|)$ *сходимость на* $[-x_2, x_2]$ *— равномерная.*

*Доказательство.* Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится, то его члены стремятся к нулю, а значит, $\exists C \ \forall n \in \mathbb{N}: \ |c_n x_1^n| < C$.

Тогда $\forall x: \ |x| < |x_1|$ верно, что

$$|c_n x^n| \leqslant |c_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant C\left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Вместе с тем, несложно заметить, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C\left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$ сходится как геометрическая прогрессия с $q = |x/x_1| < 1$, а значит, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится абсолютно.

Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся признаком Вейерштрасса:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [-x_2; x_2]: \ |c_n x^n| \leqslant C\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant C\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится равномерно на $[-x_2; x_2]$. $\square$

**Определение 2.** *Радиусом сходимости* $R$ *степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *называется точная верхняя грань множества модулей точек, в которых ряд сходится.*

**Определение 3.** *Интервал* $(-R, R)$ *называется интервалом сходимости степенного ряда.*

**Следствие 1.** *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится абсолютно в каждой точке интервала сходимости, расходится в каждой точке* $x \notin [-R, R]$, *и более того,* $\forall r \in (0, R)$ *сходимость на* $[-r, r]$ *равномерная.*

*Доказательство.* Для $x \notin [-R, R]$ — следует из определения радиуса сходимости.

Пусть теперь $x \in (-R, R)$. Так как $|x|$ меньше точной верхней грани множества модулей точек сходимости, то существует такая точка $x_1$, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится, и при этом $|x_1| > |x|$. Аналогично для равномерной сходимости на $[-r, r]$ при $r \in (0, R)$.

Теперь осталось просто воспользоваться теоремой Абеля. □

## Нахождение радиуса сходимости

Факт существования у рядов радиуса сходимости — это прекрасно, но хотелось бы уметь его находить.

**Теорема 2** (Формула Коши–Адамара). *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *— степенной ряд. Тогда радиус сходимости этого ряда* $R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ *(полагая при* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$*, что* $R = 0$ *и при* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$*, что* $R = \infty$ *).*

*Доказательство.* Заметим, что если $b_n \to b$, $b \geqslant 0$, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = b \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Вспомним радикальный признак Коши: пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = A$, тогда если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ сходится, а если $A > 1$, то расходится. Но вместе с тем, $\sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|c_n|}$.

Следовательно, если $|x| < 1/ \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = R$, то ряд сходится, а если $|x| > R$ — расходится. □

Зная эту формулу, можно легко придумать ряд с любым радиусом сходимости.

**Утверждение 1.** *Пусть существует предел* $\lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = A$*. Тогда радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *равен* $\frac{1}{A}$.

*Доказательство.* Для $x \neq 0$ рассмотрим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = A|x|$. Тогда, по признаку Д'Аламбера, если $A|x| < 1$, то ряд сходится, а если $A|x| > 1$, то расходится. □

## Поведение в концах интервала сходимости

В концах интервала сходимости может происходить разное. Простые примеры:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ — радиус сходимости равен 1, при $x = \pm 1$ ряд расходится.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ — радиус сходимости равен 1, при $x = 1$ ряд расходится, при $x = -1$ ряд сходится условно.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ — радиус сходимости равен 1, при $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно.

**Теорема 3** (Абеля II). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* $x_1$*. Тогда он равномерно сходится на отрезке с концами* $0$ *и* $x_1$*.*

*Доказательство.* Рассмотрим $x$ из отрезка с концами 0 и $x_1$. Представим исходный ряд в уже знакомом нам виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$.

Посмотрим на члены этого ряда как на произведение. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится (и не зависит от $x$), а последовательность $\{|x/x_1|^n\}$ либо монотонно убывает к нулю, либо постоянна (когда $x = 1x_1$), и ограничена единицей. Следовательно, по признаку Абеля ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$ равномерно сходится, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ равномерно сходится на $[0, x_1]$. $\square$

**Следствие 2.** *Сумма степенного ряда непрерывна на всём множестве сходимости.*

*Доказательство.* Согласно первой теореме Абеля, ряд равномерно сходится на $[-r,r] \subset (-R, R)$, однако про весь интервал это точно утверждать нельзя, так как на интервале $(-R, R)$ ряд может сходиться и неравномерно. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Выберем такое $r$, что $|x_0| < r < R$. Так как $x_0$ — внутренняя точка отрезка $[-r, r]$ и на $[-r, r]$ ряд сходится равномерно, то, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, сумма ряда является непрерывной функцией на $[-r,r]$, включая точку $x_0$. Таким образом, сумма ряда непрерывна во всех точках интервала $(-R, R)$.

Однако, множество сходимости может включать в себя точки $\pm R$. В этом случае нам поможет вторая теорема Абеля. Согласно ей, если $R$ входит в множество сходимости, то ряд сходится равномерно на отрезке $[0, R]$ (аналогично для $-R$ и $[-R, 0]$). А значит, по всё той же теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, сумма ряда непрерывна и в точках $\pm R$, если множество сходимости их в себя включает. $\square$

**Следствие 3.** *Степенной ряд сходится равномерно на каждом отрезке, лежащем в его множестве сходимости.*

# Лекция 13 от 12.12.2016
# Ряды Тейлора

## Дифференцирование степенных рядов

В предыдущей лекции мы говорили о таком понятии, как степенные ряды. Продолжим.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, но для удобства сдвинем его центр, точку $x_0$, в нуль, получив тем самым ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Рассмотрим к этому ряду другой ряд, составленный из производных исходного ряда (впредь будем его именовать «новым» рядом). Он будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n.$$

**Утверждение 1.** *Радиус сходимости нового ряда и исходного совпадают.*

*Доказательство.* Радиус сходимости нового ряда совпадает с радиусом сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^n$, так как мы просто умножаем на фиксированное число $x$. Тогда по формуле Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|n}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

А это и есть исходный радиус. □

Выведем отсюда следствие, которое назовём теоремой.

**Теорема 1.** *Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ дифференцируема и её производная равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$.*

*Доказательство.* Возьмём произвольную точку $x$ из интервала сходимости. Найдём $\delta > 0$ такое, что $[x-\delta, x+\delta]$ лежит в интервале сходимости и используем теорему о почленном дифференцировании функциональных рядов. □

**Следствие 1.** *Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема, и её $k$-я производная совпадает с суммой ряда из $k$-х производных.*

**Следствие 2.** *Сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд, и внутри интервала сходимости является первообразной суммы исходного ряда.*

Из равномерной сходимости степенного ряда на каждом отрезке множества сходимости можно вывести следующее:

**Следствие 3.** *Пусть $[a,b]$ лежит в множестве сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Тогда*

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

# Функции, представимые как сумма степенного ряда

Из следствия 1 сразу следует утверждение:

**Утверждение 2.** *Пусть $I$ — невырожденный промежуток. Если функция $f$ представима в виде суммы степенного ряда, то она бесконечно дифференцируема.*

Покажем теперь, что функция не может представляться разными степенными рядами. Действительно, будем поочерёдно дифференцировать левую и правую части нашего равенства функции и её степенного ряда (считаем, что радиус сходимости не нулевой):

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n;$$

$$S'(0) = c_1, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1};$$

$$S''(0) = c_2 \cdot 2!, \qquad S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2};$$

$$\dots$$

$$S^{(k)}(0) = c_k \cdot k!, \qquad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

$$\dots$$

Отсюда сразу следует, что **если функция представима в виде степенного ряда на некотором множестве, то этот ряд совпадает с её рядом Тейлора**.

При этом не любая бесконечно дифференцируемая функция представима степенными рядом. Вспомним пример Коши — бесконечно дифференцируемая функция, которая представима в ряд Тейлора лишь в точке 0:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

**Следствие 4.** *Если суммы степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{c_n} x^n$ совпадают в некоторой окрестности нуля, то эти ряды совпадают.*

*Доказательство.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{c_n} x^n.$$

А в силу единственности разложения на невырожденном промежутке получим требуемое.

$$c_n = \widetilde{c_n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

□

**Замечание 1.** *Совпадение в окрестности нуля тут можно заменить на совпадение в точках $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$:*

$$c_0 = S(0) = \lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{S}(x_n) = \widetilde{S}(0) = \widetilde{c_0}.$$

*Теперь вычитаем $c_0$ и делим на $x$. Тогда равенство останется. И так далее.*

# Представимость в виде ряда Тейлора

**Теорема 2.** *Пусть $I$ — невырожденный промежуток и $f \in C^\infty(I)$, $x_0 \in I$. Также пусть известно, что $\exists A, B > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(n)}(x)| \leqslant A \cdot B^n$. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x)$$

*на промежутке $I$. Иными словами, функция представима своим рядом Тейлора.*

Перед доказательством заметим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{C^n}{n!}$ сходится по признаку Д'Аламбера для всякого положительного $C$, откуда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C^n}{n!} = 0$.

*Доказательство.* Запишем разность частичной суммы ряда и значения функции, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)(x - x_0)^{N+1}}{(N+1)!} \right| \leqslant \frac{AB^{N+1}|x - x_0|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Теперь рассмотрим, как получаются классические разложения в ряд Тейлора.

1. $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Ограничивая производные константой 1, получим требуемое:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

2. $e^x$. Пусть $A > 0$ — произвольное число. Тогда на промежутке $(-A, A)$ ряд сходится, если мы применим ограничение производных как $e^A$.

3. $\ln(1+x)$. «Если делать в лоб, с ним всё грустно»©Лектор. Можно воспользоваться вспомогательным рядом:

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \ldots$$

который сходится на $(-1, 1)$ как геометрическая прогрессия, а затем почленно проинтегрировать, получив

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

Из непрерывности равенство с интервала $(-1, 1)$ можно продолжить на полуотрезок $(-1, 1]$.

# Лекция 14 от 17.01.2017 Метрические, нормированные и евклидовы пространства

## Метрические пространства

**Определение 1.** *Метрическое пространство это упорядоченная пара $(M, \rho)$, где $M$ — непустое множество, а $\rho\colon\ M \times M \to \mathbb{R}$ — функция, называемая метрикой, которая удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $\forall x, y \in M\ \ \rho(x, y) \geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in M\ \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\forall x, y, z \in M\ \ \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

**Пример 1.** *Дискретная метрика («метрика ленивого человека»):*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Часто, когда говорят о метрических пространствах, называют только множество $M$, считая, что метрика подразумевается.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек метрического пространства $M$.

**Определение 2.** $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $x \in M$, *если* $\rho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *или, что эквивалентно,*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

**Утверждение 1.** *Если* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *и* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{x}$, *то* $x = \widetilde{x}$.

*Доказательство.* Вспомним, что $\rho(x, \widetilde{x}) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, \widetilde{x})$. Тогда при $n \to \infty$ получаем, что $0 \leqslant \rho(x, \widetilde{x}) \leqslant 0$, то есть $\rho(x, \widetilde{x}) = 0$, что и означает их равенство. $\square$

В силу определения метрики, никаких арифметических свойств предела тут не может быть («это как складывать или делить стулья»).

А вот признак Коши есть.

**Определение 3.** *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства называется фундаментальной (последовательностью Коши, удовлетворяющей условию Коши), если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N\ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Хочется сказать как обычно: последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальная. Но вот проблема — это неверное утверждение. Несложный контрпример: $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $x_n = 1/n$. Эта последовательность вроде как должна сходиться к нулю, вот только его нет в нашем пространстве, так что в итоге последовательность не сходится.

Но признак Коши крайне важная вещь, без него ломается куча теорем, поэтому хочется его все-таки иметь. Для этого наложим дополнительное требование на наши метрические пространства.

**Определение 4.** *Метрическое пространство называется полным, если в нем каждая последовательность Коши имеет предел.*

**Теорема 1** (Критерий Коши)**.** *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек полного метрического пространства сходится тогда и только тогда, когда эта последовательность фундаментальна.*

*Доказательство.* В одну сторону доказывается как всегда, через $\varepsilon/2$, а во вторую прямо следует из определения полного метрического пространства. □

**Замечание 1.** *Шутки ради. Из теоремы Бэра можно получить следствие, которое с точки зрения русского языка звучит прекрасно: полное пространство не может быть тощим.*

## Шары в метрическом пространстве

В метрическом пространстве естественным образом возникают фигуры.

**Определение 5.**

1. *Открытый шар:* $B_r(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) < r\}$.
2. *Закрытый шар:* $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) \leqslant r\}$.

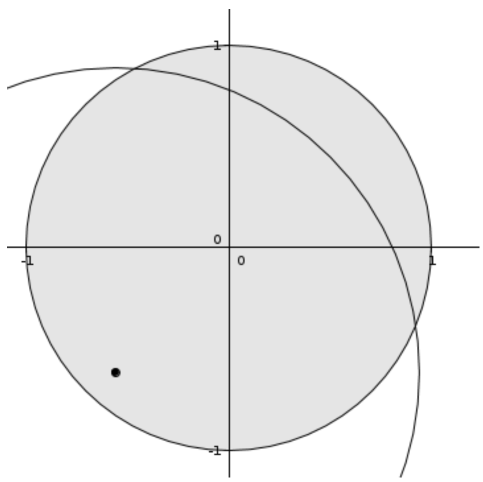
Вообще говоря, эти шары совершенно не обязательно должны быть как-то похожи на шары в привычном нам понимании. В качестве иллюстрации приведем два примера.

**Пример 2.** *Пусть* $M = \mathbb{N}$. *Рассмотрим две метрики:* $\rho(m, n) = 1 + \dfrac{1}{\min(n, m)}$ *и* $\widetilde{\rho}(m, n) = 1 + \dfrac{1}{\max(n, m)}$, *если* $n \neq m$, *иначе 0. Это действительно метрики, как несложно убедиться.*

*Рассмотрим закрытый шар* $\overline{B}_{1+1/n}(n)$. *В метрике* $\rho$ *он задает множество* $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$, *а в метрике* $\widetilde{\rho}$ *— все* $\mathbb{N}$.

**Пример 3.** *А может ли шар большего радиуса строго включаться в шар меньшего радиуса? Да, причем это даже довольно несложно нарисовать.*

*Пусть* $M$ *это шар единичного радиуса в пространстве* $\mathbb{R}^2$. *Возьмем точку, близкую к окружности, и построим шар радиуса* $1.5$ *с центром в этой точке. Он не влезет полностью в наше пространство, за счет чего мы и получим строгое включение его в шар меньшего радиуса.*




*Заштрихованная часть соответствует множеству* $M$

# Нормированные пространства

Все это конечно замечательно, но хочется, чтобы метрика как-то согласовывалась с пространством, а то как-то неинтересно.

**Определение 6.** *Нормированное пространство это упорядоченная пара $(L, ||.||)$, где $L$ — линейное пространство, а $||.|| : \ L \to \mathbb{R}$ — функция, называется нормой, которая удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $\forall x \in L \ ||x|| \geqslant 0$, *причем* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in L \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$;
3. $\forall x, y \in L \ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

**Утверждение 2.** *Норма порождает метрику $\rho(x, y) = ||x - y||$. Это действительно метрика, как несложно убедиться, и по умолчанию нормированные пространства рассматриваются как метрические с данной метрикой.*

**Замечание 2.** *Обратное неверно: не любая метрика порождена какой-то нормой! Например, дискретная метрика.*

И да, нормированные пространства тоже бывают неполными. Здесь, правда, уже не найдется очевидного примера, потому что так просто из линейного пространства одну точку не выколоть. Так что пока верьте на слово.

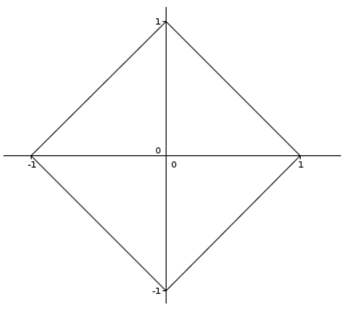
**Определение 7.** *Полные нормированные пространства называются Банаховыми.*

Нормы бывают какими угодно. Например, в классической декартовой системе, где $v = (x, y)$, обычно рассматривают следующие метрики:

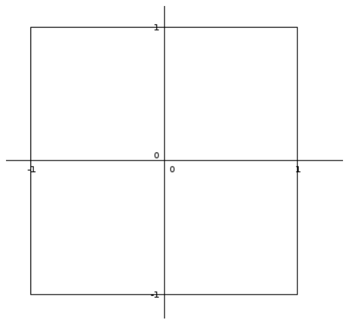
- $||v|| = ||v||_1 = |x| + |y|$ — манхэттенская норма, $l_1$–норма;
- $||v|| = ||v||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ — $l_2$–норма;
- $||v|| = ||v||_\infty = \max(|x|, |y|)$ — «бесконечная норма».

Вообще говоря, это частные случаи $p$–норм: $||v||_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. Но на практике $p$–нормы, где $p > 2$, не встречаются (за исключением «бесконечной нормы»).

Ниже приведено, как выглядят единичные шары в разных нормах.




Манхэттенская норма




Бесконечная норма

**Упражнение 1** (Бонусная задача)**.** *Рассмотрим плоскость, $\mathbb{R}^2$. Константу $\pi$ можно воспринимать как половину длины единичной окружности: $\pi = l/2$. Но вообще говоря, в зависимости от выбранной нормы, единичная окружность имеет разный вид и, соответственно, длину. Например, в нормированном пространстве с бесконечной нормой $l = 8$, и тогда $\pi = 4$. Как мы видим, константа $\pi$ разная для разных нормированных пространств над множеством $\mathbb{R}^2$.*

*Доказать, что для любой нормы на плоскости $3 \leqslant \pi \leqslant 4$, причем оценка не улучшаема.*

# Евклидовы пространства

Норма тоже не сама по себе, она порождена скалярным произведением.

**Определение 8.** *Евклидово пространство это упорядоченная пара $(L, (.,.))$, где $L$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$, а $(.,.): L \times L \to \mathbb{R}$ — функция, называемая скалярным произведением, которая удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $\forall x \in L$ $(x, x) \geqslant 0$, *причем* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x, y \in L$ $(x, y) = (y, x)$;
3. $\forall x_1, x_2, y \in L$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$.

*Иными словами, это билинейная положительно определенная функция.*

**Пример 4.** $L = C[a, b]$, $(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ — *бесконечномерное евклидово пространство.*

**Теорема 2** (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** *Пусть $(L, (.,.))$ — евклидово пространство. Тогда $\forall x, y \in L$ верно, что $|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ линейно зависимы.*

Доказательство будет на следующей лекции.

**Утверждение 3.** *Скалярное произведение задает норму $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Несложно убедиться, что это действительно норма.*

# Лекция 16 от 30.01.2017 Метрические и нормированные пространства (продолжение), ряды Фурье

## Коэффициенты Фурье

Вспомним основной результат предыдущей лекции. Пусть $H$ — пространство со скалярным произведением, $\{e_n\}_{n=1}^N$ — ортогональная система, $x \in H$. Тогда если $c_1, \ldots, c_N$ — коэффициенты из $\mathbb{R}$, то

$$\left|\left|x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\right|\right|^2 = ||x||^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(c_n ||e_n|| - \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} ||e_n||\right)^2 - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}\right)^2 (e_n, e_n)$$

**Определение 1.** *Коэффициентами Фурье, соответствующими вектору $x$ и элементу ортогональной системы $\{e_n\}_{n=1}^N$, называются числа $\hat{x}_n = \dfrac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}$*

Принимая это определение во внимание,исходное равенство переписывается в более красивом виде

$$\left|\left|x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\right|\right|^2 = ||x||^2 + ||e_n||^2 \sum_{n=1}^{N} (c_n - \hat{x}_n)^2 - \sum_{n=1}^{N} \hat{x}_n^2 \, ||e_n||^2$$

**Утверждение 1** (очевидное)**.** *Для любых коэффициентов $c_1, \ldots, c_N$*

$$\left|\left|x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\right|\right| \geqslant \left|\left|x - \sum_{n=1}^{N} \hat{x}_n e_n\right|\right|$$

*причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $c_n = \hat{x}_n$.*

Это равенство действительно очевидно, учитывая, что в переписанном выражении (которое, кстати, неотрицательно) у нас лишь второе (также неотрицательное) слагаемое правой части зависит от $c_n$. Минимум достигается, если оно равно нулю. Отметим важное свойство: *коэффициент $c_n$ не зависит от $c_i$ для $i \neq n$.*

**Утверждение 2** (Тождество Бесселя)**.**

$$\left|\left|x - \sum_{n=1}^{N} \hat{x}_n e_n\right|\right| = ||x|| - \sum_{n=1}^{N} \hat{x}_n^2 \, ||e_n||$$

**Следствие 1** (Неравенство Бесселя)**.** $\sum\limits_{n=1}^{N} \hat{x}_n^2 e_n \leqslant ||x||^2$

# Пространство $l^2$

Отступим в сторону. Пусть $l^2$ — множество всех числовых последовательностей, сумма квадратов элементов которых конечна. Заметим, что это множество будет являться линейным пространством, поскольку

$$\forall\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n^2 = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \Leftrightarrow \{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} = (a_n + b_n)^2 < \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n^2 + 2b_n^2) < \infty \Leftrightarrow \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$$

Обозначим $\overline{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \lambda^2$, $\overline{b} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, мы можем ввести скалярное произведение следующим образом

**Определение 2.** *Для пространства $l^2$,*

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$
$$||\overline{a}|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$

# Сходимость в номированных пространствах

Отойдем еще на шаг в сторону. Пусть $(L, ||\cdot||)$ — нормированное пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ее элементов. В таком случае, говоря о сходимости таких последовательностей, можно ввести те же формулировки, что и в случае числовых последовательностей.

**Определение 3.** *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $x$, если*

$$||x_n - x|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

При помощи неравенства треугольника можно также установить и арифметические свойства пределов, например предел суммы.

**Утверждение 3.** *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $x$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $y$. Тогда $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\to} x + y$*

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством треугольника:

$$0 \leqslant ||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leqslant ||x_n - x|| + ||y_n - y|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

□

Ряды для из элементов вводятся абсолютно так же, как и числовые ряды, рассмотренные нами ранее (абсолютная сходимость определяется как сходимость ряда из норм элементов).

# Ряды Фурье

Теперь когда мы ввели понятие сходимости в нормированных пространствах, будем двигаться дальше, к рядам Фурье. Вернемся к рассмотрению исходного пространства $H$ со скалярным произведением, в котором мы уже ввели понятие коэффициентов Фурье.

**Определение 4.** *Ряд* $\sum\limits_{n}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ *называется рядом Фурье (разложением в ряд Фурье) по ортогональной системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Из этого определения не следует, что ряд Фурье вообще сходится.

**Утверждение 4.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$.
2. $||x||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2$ *(равенство Парсеваля).*

*Доказательство.* Прямое следствие тождества Бесселя. □

**Утверждение 5** (Единственность разложения)**.** *Пусть* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— ортогональная система и* $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, *для некторых коэффициентов* $c_i$. *Тогда* $\hat{x}_i = c_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

*Доказательство.* Зафиксируем $n_0 \in \mathbb{N}$, пусть $N > n_0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n + \underbrace{r_N}_{\to 0,\ N \to \infty}$$

Далее запишем, чему равно $\hat{x}_{n_0}$

$$\hat{x}_{n_0} = \frac{(x, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} c_n e_n, e_{n_0}\right) + (r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = \frac{c_{n_0}(e_{n_0}, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} + \frac{(r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = c_{n_0} + \frac{(r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})}$$

Второе слагаемое стремится к нулю. Устремим $N \to \infty$, получим требуемое. □

Заметим, что если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональная система, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ удовлетворяет условию Коши тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 ||e_n||^2$ сходится.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m > N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n\right|\right| < \varepsilon$$

Действительно,

$$\left(\sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n, \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n\right) = \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n^2 ||e_n||^2$$

И увидим, что искомому условию Коши удовлетворяет и желаемый ряд.

**Следствие 2.** *Если пространство со скалярным произведением полно, то все ряды Фурье там сходятся.*

*Доказательство.* Из неравенства Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2 < \infty$ следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ удовлетворяет условию Коши, а с учетом полноты $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ сходится. □

Итак, в полных нормированных пространствах ряды Фурье сходятся, но отнюдь не всегда они сходятся куда надо.

**Определение 5.** *Ортогональная система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *замкнута, если*

$$\forall x \in H, \forall \varepsilon > 0 \; \exists e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_K}, c_1, c_2, \dots, c_K \Rightarrow \left|\left| x - \sum_{k=1}^{K} c_k e_{n_k} \right|\right| < \varepsilon$$

**Утверждение 6.** *Если ортогональая система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *замкнута, то* $\forall x \in H \; x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$

*Доказательство.* Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое $K_0$ и коэффициенты $c_1, \dots, c_{K_0}$, что $\left|\left| x - \sum\limits_{n=1}^{K_0} c_n e_n \right|\right| < \varepsilon$. Тогда

$$\forall N > K_0 \; \left|\left| x - \sum_{n=1}^{N} \hat{x}_n e_n \right|\right| \leqslant \left|\left| x - \sum_{k=1}^{K_0} c_k e_k \right|\right|$$

□

# Лекция 17 от 06.02.2017
# Замкнутые и полные ОГС.
# Тригонометрическая система

## Замкнутые и полные ортогональные системы

Пусть $H$ — пространство со скалярным произведением, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетная ортогональная система в $H$. Тогда для вектора $x \in H$ можно ввести *коэффициенты Фурье*: $\hat{x}_n = \dfrac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}$ и, соответственно, *ряд Фурье*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Отметим, что этот ряд не является ни числовым, ни функциональным.

Продолжим обсуждение замкнутых ортогональных систем. Повторим определение (на этот раз сформулируем его немного иначе).

**Определение 1.** *Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называемся замкнутой, если*

$$\forall x \in H\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists c_1, \ldots, c_n \colon ||x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n|| < \varepsilon.$$

**Теорема 1.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута;*
2. $\forall x \in H\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n = x$*;*
3. $\forall x \in H\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2 = ||x||^2$*;*
4. $\forall x, y \in H\ (x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \hat{y}_n ||e_n||^2$.

*Доказательство.* Фактически это просто суммирование предыдущих результатов. Действительно, (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Leftrightarrow$ (3) было доказано на прошлой лекции, (2) $\Rightarrow$ (1) следует очевидным образом. Из нового: (4) $\Rightarrow$ (3) получается сразу при $y = x$, и только (3) $\Rightarrow$ (4) требует какого-то доказательства.

Заметим, что $\widehat{(x+y)}_n = \hat{x}_n + \hat{y}_n$. Тогда:

$$(x, y) = \frac{(x+y, x+y) - (x, x) - (y, y)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{x}_n + \hat{y}_n)^2 ||e_n||^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{y}^2 ||e_n||^2\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \hat{y}_n ||e_n||^2.$$

Собственно, утверждение (4) тоже иногда называют *равенством Парсеваля.* □

**Определение 2.** *Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной, если из того, что $\forall n \in \mathbb{N}\ (x, e_n) = 0$ следует, что $x = 0$, то есть существует только один вектор, ортогональный всей системе.*

Понятия *замкнутости* и *полноты* в разной литературе используются абы как и часто меняются местами. Это связано с тем, что данные термины *почти* взаимозаменяемы.

**Утверждение 1.** *Если ортогональная система замкнута, то она полна.*

*Доказательство.* Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая ортогональная система, то $\forall x \in H$ $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Но если $\forall n \in N$ $(x, e_n) = 0$, то $\hat{x}_n = 0$ и, следовательно, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$. □

**Утверждение 2.** *Если ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в полном пространстве $H$, то она замкнута.*

*Доказательство.* Пусть $x$ — произвольный элемент из $H$. Рассмотрим соответствующий ряд Фурье, который в силу полноты пространства обязан куда-то сходиться: $y := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Из теоремы о единственности разложения следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\hat{x}_n = \hat{y}_n$, а значит, $(x, e_n) = (y, e_n)$. Итого, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x - y, e_n) = 0$, что верно только если $x - y = 0$, то есть $x = y$. □

**Упражнение 1** (Бонусная задача)**.** *Наше доказательство не пройдет в любом пространстве, но это не означает, что полнота пространства является необходимым требованием. Итак, верно ли, что если ортогональная система полна, то она замкнута?*

# Пара слов о практическом применении

Допустим, мы имеем дело с черно-белой изображения (с цветными все аналогично). Фактически это функция, заданная на пространстве-прямоугольнике $P$, где $f(p)$ — интенсивность пикселя. Можно ввести скалярное произведение: $(f, g) = \int\limits_P fg \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Однако так как мы работаем с дискретным пиксельным пространством, интеграл можно заменить на сумму: $\sum i, j = 1^{\cdots} a_{ij} b_{ij}$, где $a$ и $b$ это значения пикселей.

Выберем конечную ортогональную систему $x_{n n=1}^{N}$. Для удобства пусть она будет нормированной, то есть $||e_n|| = 1$. Тогда $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Известно, что $||x - \sum\limits_{n=1}^{N} ||\hat{x}_n e_n||^2 = ||x||^2 - \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{x}_n^2$.

На практике мы не можем все коэффициенты Фурье, а только несколько из них. А глядя на равенство выше понятно, что лучше взять большие коэффициенты, чтобы уменьшить погрешность. Именно эта идея и лежит в ключе всех алгоритмов сжатия с частичной потерей данных (но эт не вся идея).

Соответственно, встает вопрос: а как выбрать ортогональную систему так, чтобы как можно меньше коэффициентов Фурье были большими и как можно больше — маленькими? Тогда для такой системы большинство элементов пространства можно будет посчитать с небольшой погрешностью.

# Тригонометрическая система

В математическом анализе есть два самых главных отрезка: $[0, 1]$ и $[-\pi, \pi]$. Будем работать со вторым.

Пусть $(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Функции не обязательно должны быть непрерывными, потому что на практике разрывы I рода встречаются сплошь и всюду (например, граница фона и объекта на изображении). Поэтому будем рассматривать функции $f, g \in R[\pi, \pi]$.

Факторизуем пространство по следующему отношению эквивалентности: $f \equiv g \Leftrightarrow \int\limits_{\pi}^{\pi}(f-g)^2\mathrm{d}x = 0$.

Строго говоря, можно было рассматривать функции, интегрируемые по Риману в несобственном смысле, но тогда и интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} fg\mathrm{d}x$ будет несобственным, и чтобы он существовал, необходимо потребовать интегрируемость в несобственном смысле квадратов функций, так как $(f, g) \leqslant \dfrac{f^2+g^2}{2}$, что помогло бы нам ограничить интеграл. Но полученное пространство все еще не будем полным, поэтому мы не будем его рассматривать — это всего лишь полушаг к желаемому результату и оно того не стоит.

Итак, ортогональная система в таком пространстве: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$.

Посчитаем длину каждого вектора (не забыв о четности косинуса):

$$(1,1) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1\mathrm{d}x = 2\pi;$$

$$(\sin nx, \sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} = \pi;$$

$$(\cos nx, \cos nx) = \ldots = \pi.$$

В силу традиций (а, к слову, тригонометрическая система старше интегралов), коэффициенты Фурье, связанные с $\cos nx$ и $\sin nx$ принято обозначать как $a_n$ и $b_n$ соответственно:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

А коэффициент Фурье при 1 очень похож на коэффициенты при $\cos nx$, поэтому его принято обозначать как $a_0/2$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1\mathrm{d}x.$$

Итого, ряд Фурье для функции $f$ выглядит следующим образом:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Для аккуратности надо бы ставить скобки под суммой, но это и так воспринимается как единое целое.

Для тригонометрической системы есть дальше два вектора развития:

1. Доказать замкнутость или полноту. Вот только пространство неполное, так что незачем;
2. Заметить, что ряд Фурье в данном случае это обычный функциональный ряд, и для него осмысленнен вопрос, чему равно $f(1)$ и так далее. Вот этим и займемся.

# Комплексная система

Если внимательно посмотреть на ряд Фурье тригонометрической системы, то можно заметить, что он степенной — точнее, к нему можно свести, используя комплексную запись все той же тригонометрической системы: $\{e^{inx}\}_{-\infty}^{+\infty}$.

В комплексном случае $(x, y) = \overline{y, x}$, поэтому $(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. Тогда

$$(e^{inx}, e^{inx}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{inx}}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-inx}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x = 2\pi.$$

По традиции, коэффициенты Фурье обозначают как $c_n$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x.$$

Итого, комплексный ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Покажем, что это то же самое, что и ряд Фурье в обычной тригонометрической системе.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\mathrm{d}x = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}; \\ c_{-n} &= \ldots = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}. \end{aligned}$$

Итого:

$$\begin{aligned} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = \left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}\right)(\cos nx + i\sin nx) + \left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}\right)(\cos nx - i\sin nx) = \\ = a_n\cos nx + b_n\sin nx. \end{aligned}$$

Двумерные пространства, натянутые на $\langle\cos nx, \sin nx\rangle$ и $\langle e^{inx}, e^{-inx}\rangle$, будут совпадать, в них совпадают наилучшие приближения и частичные суммы.