

Дифференциальные Уравнения

Семинарские занятия

Вадим Гринберг
по семинарам Войнова А. С.

Содержание

1 Семинар 1, 10 января	2
1.1 Общие факты	2
1.2 Диффуры с разделяющимися переменными	3
1.3 n -параметрическое семейство кривых	4
1.4 Замена переменных	5
1.4.1 Линейная замена	5
1.4.2 Общий вид	6
1.5 Домашнее задание №1	6
2 Common Tasks	7

Семинар 1, 10 января

Общие факты

Пусть у нас имеется функция $x(t)$ (вообще говоря, вектор-функция $x = (x_1, \dots, x_d)$) от переменной $t \in \mathbb{R}$, действующая из интервала (a, b) (по умолчанию считаем всей числовой прямой), такая, что для переменной t , функции $x(t)$ и n её первых производных выполнено уравнение:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

— это и есть дифференциальное уравнение n -го порядка. F в данном случае, грубо говоря, «функция от $n + 1$ переменной», которая неявно задаёт $x(t)$ (за точным определением — на лекцию).

Решить диффур означает найти такую функцию $x(t)$, что выполняется вышеуказанное равенство.

Тупой пример: $\dot{x}(t) = x(t)$. Функция совпадает со своей производной. Решением, очевидно, будет $x(t) = \lambda \cdot e^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

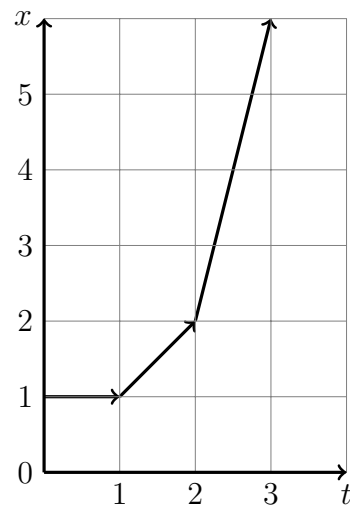
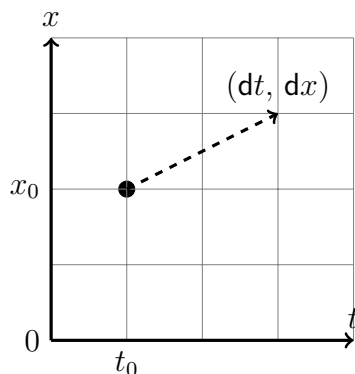
Любой диффур можно привести к удобоваримому виду:

$$\dot{x}(t) = f(t, x)$$

где f — некая хорошая функция (доказательство на лекции). С такими диффурами мы в основном и будем иметь дело.

Разберёмся, а как вообще можно решать диффуры. Пусть у нас имеется диффур $\dot{x} = f(t, x)$, который мы хотим решить. Попробуем приблизить график нашей кривой $x(t)$ некоей ломаной линией. Возьмём какую-то начальную точку (t_0, x_0) , и будем смотреть на направление движения, то бишь на направление вектора (dt, dx) . Будем делать маленькие шаги вдоль этого направления. Тогда каждый раз, находясь в точке (t, x) , мы будем переходить в точку $(t + dt, x + dx)$.

После многих таких шагов мы получим ломаную линию, приближающую график нашей кривой $x(t)$. Эта ломаная называется **Ломаной Эйлера**.



Для удобства можно делать шаг dt всегда равным 1, поделив вектор направления на dt . Тогда соответственно шаг dx станет $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x)$, и вектор направления в точке (t, x) будет иметь вид $(1, f(t, x))$.

Пример: $\dot{x} = tx$. Построим Ломаную Эйлера, стартуя из точки $(t_0, x_0) = (0, 1)$:

$$1. \ t = 0, \ x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 0) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (1, 1)$$

$$2. \quad t = 1, x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 1) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (2, 2)$$

$$3. \quad t = 2, x = 2 \Rightarrow \dot{x} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 4) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (3, 6)$$

4.

Определение 1. Пусть у нас есть диффуз $\dot{x} = f(t, x)$.

Изоклина – геометрическое место точек плоскости, в которых одно и то же направление движения, то есть, угол наклона вектора (dt, dx) один и тот же для любой точки (t, x) изоклины. Стоит отметить, что это определение работает только для диффузов 1 порядка.

Изолиния поля – подмножество точек изоклины (являющееся линией), в которых вектор (dt, dx) один и тот же для любой точки (t, x) изолинии. То есть, вектор $(dt, dx) \sim (1, f(t, x)) = const$, откуда тут же следует $f(t, x) = const$. Для каждой изолинии константа своя.

Для примера выше изоклиной будет являться множество $\left\{ xt = k \iff x = \frac{k}{t}, k \in \mathbb{R} \right\}$ – гиперболы.

Диффуры с разделяющимися переменными

Это суть дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{a(t)}{b(x)}$$

Перемножим крест-накрест и получим:

$$b(x)dx = a(t)dt$$

\int теперь интегрируем каждую часть независимо от другой \int

$B(x) = A(t) + C$ – это и будет решением диффура

Пример №1

$$\dot{x} = tx$$

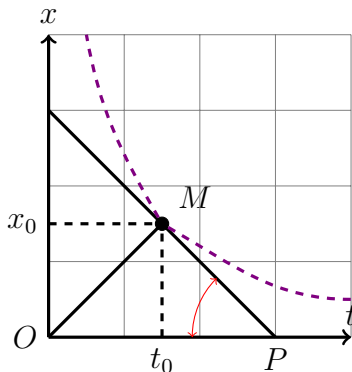
$$\dot{x} = tx = \frac{dx}{dt} \implies \frac{dx}{x} = t \cdot dt \implies \int \frac{dx}{x} = \int t \cdot dt$$

$$\ln |x| = \frac{t^2}{2} + C \implies |x| = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^C}_{\text{какая-то константа}} \implies |x| = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda > 0 \implies x = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних двух действиях мы взяли экспоненту от обеих частей и избавились от модуля.

Пример №2

Найдите кривую $x(t)$, такую, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ отрезки, соединяющую точку касания $(t_0, x(t_0))$ с точками пересечения касательной в данной точке с осями координат, будут равны.



$\tan \angle MPO = -\frac{2x_0}{2t_0} = -\frac{x_0}{t_0} = \dot{x}(t_0)$, так как тангенс угла наклона касательной к функции $x(t)$ в точке t_0 есть не что иное, как производная $x(t) - \dot{x}(t)$ – в данной точке. Таким образом, мы получили диффур:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Решим его, тем самым найдя $x(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \implies \int = \int \\ -\ln|x| &= \ln|t| + C \implies \frac{1}{|x|} = |t| \cdot \lambda, \lambda > 0 \implies x = \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Пример №3

$$xt + (t+1) \cdot \dot{x} = 0 \implies xt + (t+1) \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -\frac{xt}{t+1} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{t \cdot dt}{t+1} \implies \int = \int$$

Возьмём правый интеграл.

$$\int \frac{t \cdot dt}{t+1} = \int 1 - \frac{1}{t+1} dt = t - \ln |t+1|$$

Тогда:

$$-\ln|x| = t - \ln|t+1| + C \implies \frac{1}{|x|} = \lambda \cdot e^{\frac{t}{t+1}}, \lambda > 0 \implies x = \lambda \cdot e^{-\frac{t}{t+1}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

n -параметрическое семейство кривых

Это система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} F(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \\ F'(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ F^{(n)}(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \end{cases}$$

– всего $n + 1$ уравнение, константы c_1, \dots, c_n неизвестны. Необходимо, как и раньше, найти подходящую $x(t)$.

Метод решения таков: сначала мы выражаем константы c_1, \dots, c_n через $t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$, и потом подставляем всё в одно уравнение, тем самым получая диффур вида:

$$G(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

который мы умеем решать.

Пример №4

Необходимо найти диффур, задающий множество окружностей, касающихся оси абсцисс.

Чего делать, сходу и не вдуплишь, да?) Однако, выход есть — если видим слово "окружность нужно тут же писать её уравнение.

Пусть у нас есть окружность радиуса R , касающаяся оси абсцисс в точке t_0 . Тогда выполнено тождество:

$$(x - R)^2 + (t - t_0)^2 = R^2$$

В данном случае R и t_0 и есть наши неизвестные константы. Составим систему уравнений из производных:

$$\begin{cases} (x - R)^2 + (t - t_0)^2 - R^2 = 0 \\ (2x \cdot \dot{x} - 2R \cdot \dot{x}) + 2t - 2t_0 = 0 \\ 2(\dot{x})^2 + 2x \cdot \ddot{x} - 2R \cdot \ddot{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Осталось выразить R через \dot{x} и \ddot{x} из последнего уравнения, подставить во второе и выразить t_0 , после чего загнать всё в первое уравнение и получить нужный диффур.

Замена переменных

Разберём на примере. Пусть у нас есть диффур

$$\dot{x} = x - \sqrt{x}$$

Решать его в таком виде не очень приятно. Поэтому сделаем замену переменных (название — сущая формальность, так как вообще говоря мы заменяем одну функцию на другую, а не переменную):

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Тогда диффур примет вид:

$$2\dot{y} \cdot y = y^2 - y \implies 2\dot{y} = y - 1 \implies \frac{2dy}{y-1} = dt$$

— получили простое уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим ещё несколько примеров замен.

Линейная замена

Пусть у нас есть диффур вида:

$$\dot{x} = f(at + bx)$$

Можно сделать замену $u = at + bx$, получив уравнение $\dot{x} = f(u)$. Решим этот диффур относительно переменной u , получив функцию $x(u)$, после чего, сделав обратную замену, выразить искомую $x(t)$.

$$u = at + bx$$

$$du = a \cdot dt + b \cdot dx \implies dt = \frac{du - b \cdot dx}{a}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{a \cdot dx}{du - b \cdot dx} = f(u)$$

$$a \cdot dx = f(u)du - b \cdot f(u)dx \implies (a + b \cdot f(u))dx = f(u)du$$

$$dx = \frac{f(u)}{a + b \cdot f(u)} du$$

После этих махинаций всё легко решается как уравнение с разделяющимися переменными.

Пример №5

$$\dot{x} \cos(x - t)$$

Ну тут совсем толсто: $u = x - t$. В данном случае $a = -1$, $b = 1$. По формуле выше:

$$dx = \frac{\cos u}{\cos u - 1} du$$

Теперь интегрируем, получаем $x(u)$ и делаем обратную замену.

Общий вид

Пусть у нас есть диффур:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Можно сделать замену $u = \varphi(t, x)$, получив новое уравнение $\dot{u} = f(t, u)$. Решаем его и делаем обратную замену, получая $x(t)$.

Пример №6

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x$$

Здесь можно сделать замену $u = xt$, откуда $du = \dot{x} \cdot t + x \cdot 1$. Подставим:

$$\begin{aligned}\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x &\iff \dot{x} \cdot t + x = 2x^2 \cdot t^3 \implies \dot{u} = 2u^2 \cdot t \\ \frac{du}{dt} = 2u^2 \cdot t &\implies \frac{du}{u^2} = 2t \cdot dt \implies \int = \int \\ -\frac{1}{u} = t^2 + C &\implies u = -\frac{1}{t^2 + C}\end{aligned}$$

Делаем обратную замену и выражаем $x(t)$:

$$u = xt \implies xt = -\frac{1}{t^2 + C} \implies x = -\frac{1}{t^3 + Ct}$$

Домашнее задание №1

Задача №1. Найти все кривые $x(t)$, такие, что длина отрезка, соединяющего точку касания и точку пересечения касательной в данной точке с одной из осей, была постоянной.

Подсказки к решению. В зависимости от того, какую ось вы выберете, получится либо $x(t)$, либо $t(x)$, оба варианта правильные.

Изобразите ситуацию на графике. Затем вспомните, что $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \tan \alpha$, где α – угол наклона касательной. Также вам понадобится Теорема Пифагора. \square

Задача №2. Придумать диффур 1 порядка, не обладающий решением на всей прямой. То бишь, не для всех t решение $\dot{x} = f(t, x)$ должно существовать.

Подсказки к решению. Подумайте о не всюду определённых функциях. \square

Задача №3. Решите диффур:

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0, \text{ начальное условие: } x(0) = 1$$

Задача №4. Изоклинами найти приближённое решение:

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x}$$

Также изобразите изоклины на графике и покажите все различные (с точностью до топологии и асимптотики) решения.

Задача №5. Придумайте (вообще говоря, найдите) диффур 1 порядка, задающий множество прямых, являющихся касательными к единичной окружности с центром в нуле.

Подсказки к решению. Пусть вы касаетесь в точке (t_0, x_0) . Однако, координата x_0 зависит от t_0 . Используйте уравнение окружности, чтобы ликвидировать эту зависимость. Ну а дальше придётся малость подумать и чутка посчитать. \square

Common Tasks

1. Найти такую кривую $x(t)$, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ касательная к $x(t)$ в точке $(t_0, x(t_0))$ пересекает ось абсцисс в точке $\frac{t_0}{2}$.
2. Найти диффур 1 порядка, задающий на плоскости параболы, проходящие через точку $(0, 1)$ и касающиеся прямой $x = t$.