Лекция 10 от 07.11.2016
Критерий Гордона

В прошлый раз мы узнали, что такое база множества и понятие предела по базе, и теперь будем продолжать работать с этим.

Рассмотрим такую задачу Пусть X и Y — непустые множества с базами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Тогда Рассмотрим некоторую функцию $h\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}$. Пусть про неё известно, что

$$\forall x \in X\ \exists \lim_{\mathcal{D}} h(x,y) = f(x)$$
$$\forall y \in Y\ \exists \lim_{\mathcal{B}} h(x,y) = g(y)$$

Требуется узнать, равны ли пределы $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathcal{D}} g(x)$. То есть верно ли, что

$$\lim_{\mathcal{B}} \lim_{\mathcal{D}} h(x,y) = \lim_{\mathcal{D}} \lim_{\mathcal{B}} h(x,y)?$$

Возможно, некоторые скажут, что эти пределы равны всегда, но это отнюдь не так. Хороший контрпример — функция

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{Если } (x,y) \neq 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Для неё легко посчитать повторные пределы в нуле и показать, что они не равны. Действительно,

$$\lim_{y \to 0} h(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq 0 \\ -1, \text{ иначе} \end{cases}$$

Тогда легко понять, что $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} h(x,y) = 1$. Аналогично показывается и что $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} h(x,y) = -1$.

Что же поможет нам идентифицировать такие ситуации? Поможет следующая теорема

Теорема 1 (Критерий Гордона)**.** *Следующие утверждения эквивалентны (внимание: здесь используются обозначения, аналогичные введённым ранее):*

1. *Повторные пределы* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$ *и* $\lim\limits_{\mathcal{D}} g(y)$ *существуют и равны.*
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathcal{B}\colon\ \forall x \in B_\varepsilon\ \exists D \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon$

Доказательство. $[(1) \Rightarrow (2)]$ Пусть $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{D}} g(y) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$.

- $\exists B_0 \in \mathcal{B}\colon\ \forall x \in B_0\ |f(x) - A| < \varepsilon_1$
- $\exists D_0 \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_0\ |g(y) - A| < \varepsilon_1$

В качестве B_ε возьмём B_0. Тогда

$$\forall x \in B_0\ \exists \widetilde{D}_x \in \mathcal{D}\colon \forall y \in \widetilde{D}_x\ |h(x,y) - f(x)| < \varepsilon_1$$

$$\exists D_x \in \widetilde{D}_x \cap D_0$$

Тогда

$$\forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| \leqslant |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - A| + |A - g(y)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

Получили требуемое.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] Докажем для начала, что пределы есть. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$. Перепишем про ещё раз второй пункт

$$\exists B_{\varepsilon_1} \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_{\varepsilon_1}\ \exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \mathcal{D}_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon_1$$

Пусть $x_1, x_2 \in B_{\varepsilon_1}$ — произвольные.

$$\exists D_{x_1} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_{x_1}\colon\ |h(x_1,y) - g(y)| < \varepsilon_1$$
$$\exists D_{x_2} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_{x_2}\colon\ |h(x_2,y) - g(y)| < \varepsilon_1$$

По определению функции $f(x) = \lim\limits_{\mathcal{D}} h(x,y)$:

$$\exists \widetilde{D}_{x_1} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_{x_1}\colon\ |h(x_1,y) - f(x_1)| < \varepsilon_1$$
$$\exists \widetilde{D}_{x_2} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_{x_2}\colon\ |h(x_2,y) - f(x_2)| < \varepsilon_1$$

Возьмём произвольное $y \in D_{x_1} \cap D_{x_2} \cap \widetilde{D}_{x_1} \cap \widetilde{D}_{x_2}$. Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - h(x_1,y)| + |h(x_1,y) - g(y)| + |g(y) - h(x_2,y)| + |h(x_2,y) - f(x_2)| <$$
$$< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

Следовательно, по критерию Коши $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$. Докажем, что $\exists \lim\limits_{\mathcal{D}} g(y) = A$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Найдём $B_0 \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B_0\ |f(x) - A| < \varepsilon/3$. Найдём такое $B_{\varepsilon/3} \in \mathcal{B}$ что

$$\forall x \in B_{\varepsilon/3}\ \exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon/3$$

Зафиксируем $x \in B_0 \cap B_{\varepsilon/3}$. Заметим, что

$$\exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon/3$$
$$\exists \widetilde{D}_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_x\ |h(x,y) - f(x)| < \varepsilon/3$$

$$\exists D \in \mathcal{D},\ D \subset D_x \cap \widetilde{D}_x\colon\ \forall y \in D$$
$$|g(y) - A| \leqslant |g(y) - h(x,y)| + |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - A| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Получили требуемое. □

Теорема 2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$. x_0 — его предельная точка (конечная или бесконечная). Пусть*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{X \ni x \to x_0} f_n(x) = a_n$$

а также $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$

Доказательство. Так как $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Для существования предела необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \delta(x_0) \cap X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Применяя критерий Гордона, получаем требуемое $\square$

Следствие 1. *Пусть I — невырожденный промежуток на $\mathbb{R}$ и для последовательности функций $f_n(x)$ известно, что $f_n(x) \in C(I)$ и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f(x)$ Тогда $f(x) \in C(I)$.*