Лекция 16 от 30.01.2017 Метрические и нормированные пространства (продолжение), ряды Фурье

Коэффициенты Фурье

Вспомним основной результат предыдущей лекции. Пусть H — пространство со скалярным произведением, $\{e_n\}_{n=1}^N$ — ортогональная система, $x \in H$. Тогда если $c_1, \ldots, c_N$ — коэффициенты из $\mathbb{R}$, то

$$\left|\left|x - \sum_{n=1}^N c_n e_n\right|\right|^2 = ||x||^2 + \sum_{n=1}^N \left(c_n ||e_n|| - \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}||e_n||\right)^2 - \sum_{n=1}^N \left(\frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}\right)^2 (e_n, e_n).$$

Определение 1. *Коэффициентами Фурье, соответствующими вектору x и элементу ортогональной системы $\{e_n\}_{n=1}^N$, называются числа $\hat{x}_n = \dfrac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}$.*

Принимая это определение во внимание, исходное равенство переписывается в более красивом виде:

$$\left|\left|x - \sum_{n=1}^N c_n e_n\right|\right|^2 = ||x||^2 + ||e_n||^2 \sum_{n=1}^N (c_n - \hat{x}_n)^2 - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n^2 \, ||e_n||^2 .$$

Утверждение 1 (очевидное). *Для любых коэффициентов $c_1, \ldots, c_N$*

$$\left|\left|x - \sum_{n=1}^N c_n e_n\right|\right| \geqslant \left|\left|x - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n e_n\right|\right|$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $c_n = \hat{x}_n$.

Это равенство действительно очевидно, учитывая, что в переписанном выражении (которое, кстати, неотрицательно) у нас лишь второе (также неотрицательное) слагаемое правой части зависит от c_n. Минимум достигается, если оно равно нулю. Отметим важное свойство: *коэффициент c_n не зависит от c_i для $i \neq n$.*

Утверждение 2 (Тождество Бесселя).

$$\left|\left|x - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n e_n\right|\right| = ||x|| - \sum_{n=1}^N \hat{x}_n^2 \, ||e_n||$$

Следствие 1 (Неравенство Бесселя).

$$\sum_{n=1}^N \hat{x}_n^2 e_n \leqslant ||x||^2$$

Пространство l^2

Отступим в сторону. Пусть l^2 — множество всех числовых последовательностей, сумма квадратов элементов которых конечна. Заметим, что это множество будет являться линейным пространством, поскольку

$$\forall\{b_n\}_{n=1}^{\infty},\, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2,\, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 a_n^2 = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \Leftrightarrow \{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} = (a_n + b_n)^2 < \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n^2 + 2b_n^2) < \infty \Leftrightarrow \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2.$$

Обозначив $\overline{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, $\overline{b} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, мы можем ввести скалярное произведение следующим образом:

Определение 2. *Для пространства l^2,*

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$
$$||\overline{a}|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}.$$

Сходимость в номированных пространствах

Отойдем еще на шаг в сторону. Пусть $(L, ||\cdot||)$ — нормированное пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ее элементов. В таком случае, говоря о сходимости таких последовательностей, можно ввести те же формулировки, что и в случае числовых последовательностей.

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x, если*

$$||x_n - x|| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

При помощи неравенства треугольника можно также установить и арифметические свойства пределов, например предел суммы.

Утверждение 3. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к y. Тогда $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\to} x + y$.*

Доказательство. Воспользуемся неравенством треугольника:

$$0 \leqslant ||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leqslant ||x_n - x|| + ||y_n - y|| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

Ряды из элементов вводятся абсолютно так же, как и числовые ряды, рассмотренные нами ранее (абсолютная сходимость определяется как сходимость ряда из норм элементов).

Ряды Фурье

Теперь, когда мы ввели понятие сходимости в нормированных пространствах, будем двигаться дальше, к рядам Фурье. Вернемся к рассмотрению исходного пространства H со скалярным произведением, в котором мы уже ввели понятие коэффициентов Фурье.

Определение 4. *Ряд* $\sum\limits_{n}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ *называется рядом Фурье (разложением в ряд Фурье) по ортогональной системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Из этого определения не следует, что ряд Фурье вообще сходится.

Утверждение 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$;
2. $||x||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2$ *(равенство Парсеваля).*

Доказательство. Прямое следствие тождества Бесселя. □

Утверждение 5 (Единственность разложения)**.** *Пусть* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— ортогональная система и* $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ *для некоторых коэффициентов* c_i. *Тогда* $\hat{x}_i = c_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Зафиксируем $n_0 \in \mathbb{N}$, пусть $N > n_0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n + \underbrace{r_N}_{\to 0 \text{ при } N \to \infty}.$$

Далее запишем, чему равно $\hat{x}_{n_0}$:

$$\hat{x}_{n_0} = \frac{(x, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} c_n e_n, e_{n_0}\right) + (r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = \frac{c_{n_0}(e_{n_0}, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} + \frac{(r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})} = c_{n_0} + \frac{(r_N, e_{n_0})}{(e_{n_0}, e_{n_0})}.$$

Второе слагаемое стремится к нулю. Устремив $N \to \infty$, получим требуемое. □

Заметим, что если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональная система, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ удовлетворяет условию Коши тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 ||e_n||^2$ сходится.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m > N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n \right|\right| < \varepsilon.$$

Действительно,

$$\left(\sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n, \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n \right) = \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n^2 ||e_n||^2.$$

И увидим, что искомому условию Коши удовлетворяет и желаемый ряд.

Следствие 2. *Если пространство со скалярным произведением полно, то все ряды Фурье в нем сходятся.*

Доказательство. Из неравенства Бесселя получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2 < \infty$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ удовлетворяет условию Коши, а с учетом полноты $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ сходится. □

Итак, в полных нормированных пространствах ряды Фурье сходятся, но отнюдь не всегда они сходятся куда надо.

Определение 5. *Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута, если*

$$\forall x \in H, \forall \varepsilon > 0 \ \exists e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_K}, c_1, c_2, \dots, c_K \Rightarrow \left|\left| x - \sum_{k=1}^{K} c_k e_{n_k} \right|\right| < \varepsilon$$

Утверждение 6. *Если ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута, то $\forall x \in H$ $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое K_0 и коэффициенты $c_1, \dots, c_{K_0}$, что $\left|\left| x - \sum\limits_{n=1}^{K_0} c_n e_n \right|\right| < \varepsilon$. Тогда

$$\forall N > K_0 \ \left|\left| x - \sum_{n=1}^{N} \hat{x}_n e_n \right|\right| \leqslant \left|\left| x - \sum_{k=1}^{K_0} c_k e_k \right|\right|.$$

□