Лекция 18 от 20.02.2017
Теорема Вейерштрасса. Замкнутость тригонометрической системы.

Теорема Вейерштрасса

В прошлый раз мы сформулировали теорему Вейерштрасса:

Теорема 1. *Для всякой непрерывной на всей числовой прямой 2π-периодической функции для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что в каждой точке $x \in \mathbb{R}$*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

Для доказательства мы ввели понятие свёртки двух функций

$$f * g(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

Теперь сформулируем и докажем три леммы

Лемма 1. *Пусть $\{K_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ — неотрицательная непрерывная 2π-периодическая аппроксимативная единица, $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая непрерывная функция, $g_n(x) = f(x) * K_n(x)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall x \in \mathbb{R}\, |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Или, что то же самое, $g_n(x)$ сходятся к $f(x)$ равномерно.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как f — периодическая и непрерывная на $\mathbb{R}$, она равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$. Найдём такое $C > 0$, что $|f(x)| < C\ \forall x$. Для $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ найдём такое $\delta > 0$, что

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\delta \in (0; \pi)$. Для $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{5C\pi}$ найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N \int\limits_{-\pi}^{-\delta} K_n(t)dt + \int\limits_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt < \varepsilon_2$$

Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ и $n > N$ оценим

$$|g_n(x) - f(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt\right| \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dt + \int\limits_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(t)|K_n(t)dt + \int\limits_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt + 2C\varepsilon_2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\square$

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая непрерывная функция, а $T(x)$ — тригонометрический многочлен. Тогда $f * T(x)$ — тоже тригонометрический многочлен.*

Доказательство.

$$f * T(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x-t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\alpha_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{N}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)(\alpha_n(\cos(nx)\cos(nt) - \sin(nt)\sin(nx)) +$$

$$+\beta_n(\sin(nx)\cos(nt) + \cos(nx)\sin(nt)))dt = \frac{\widetilde{\alpha}_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big(\widetilde{\alpha}_n\cos(nx) + \widetilde{\beta}_n\sin(nx)\Big)$$

Здесь мы вынесли за знак интеграла выражения, не зависящие от t, а сами интегралы посчитали и обозначили их как константы $\widetilde{\alpha}_n$ и $\widetilde{\beta}_n$. □

Лемма 3. *Определим последовательность функций $\{K_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:*

$$K_n(t) = \frac{\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n}{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(u)}{2}\right)^n du}.$$

Тогда эта последовательность является неотрицательной 2π-периодической непрерывной аппроксимативной единицей, каждая функция которой — тригонометрический многочлен.

Доказательство. Все свойства этой последовательности как аппроксимативной единицы выглядят очевидно, но нужно проверить только, что для всякого $\delta > 0$

$$\int\limits_{-\pi}^{-\delta} K_n(t)dt + \int\limits_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Разберёмся отдельно с числителем и знаменателем. Числитель — чётная функция, поэтому оба слагаемых равны, и работать будем лишь с одним.

$$\int\limits_{\delta}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt = \begin{bmatrix} q = \frac{1+\cos(\delta)}{2} \\ q \in (0;1) \end{bmatrix} \leqslant q^n\pi.$$

Перейдём к знаменателю

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(u)}{2}\right)^n du = 2\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(u)}{2}\right)^n du = 4\int\limits_{0}^{\pi}\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^{2n} d\frac{u}{2} =$$

$$= 4\int\limits_{0}^{\pi}(\cos(y))^{2n}dy = \begin{bmatrix} \cos(y) = z \\ dy = \dfrac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} \end{bmatrix} = 4\int\limits_{0}^{1} z^{2n}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz \geqslant 4\int\limits_{0}^{1} z^{2n}dz = \frac{4}{2n+1}.$$

Итого получаем

$$\int\limits_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt \leqslant \frac{q^n\pi}{4}(2n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Из этих трёх лемм получаем сразу же теорему Вейерштрасса. Из неё же сразу несколько следствий.

Следствие 1. *Тригонометрическая система — замкнутая ОГС в* $\mathcal{R}^2[-\pi;\pi]$

Следствие 2. *Для всякой функции* $f \in \mathcal{R}^2[-\pi;\pi]$ *тригонометрический ряд Фурье сходится к* f *в* $\mathcal{R}^2[-\pi;\pi]$ *(то есть* $||f - S_N||_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$*)*

Несколько слов о равенстве Парсеваля

Вспомним формулировку равенства Парсеваля:

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2$$

Как же будет оно выглядеть в случае тригонометрической системы?

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 2\pi \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2\pi + b_n^2\pi)$$

Следствие 3.

$$\forall f \in \mathcal{R}^2[-\pi;\pi]\ \frac{1}{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

, где a_n, b_n *— коэффициенты разложения в ряд Фурье по тригонометрической системе.*

Пример 1. *Выведем формулу для суммы ряда обратных квадратов. Пусть* $f(x) = x$*. Тогда* $a_n = 0$*, ибо функция нечётная. Вычислим* b_n*:*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{-2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} xd\cos(nx) = \frac{-2}{\pi}\left(x\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} - \int\limits_{0}^{\pi}\cos(nx)dx = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}$$

Интеграл x^2 *по отрезку* $[-\pi;\pi]$ *фукнции* x^2 *равен* $\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$*. Отсюда получаем по равенству Парсеваля:*

$$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

От тригонометрических многочленов к алгебраическим

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Можно ли её так же эффективно приблизить не тригонометрическим, а просто алгебраическим многочленом? Ответ на этот вопрос положителен, и даёт его теорема ещё одна теорема названная именем Вейерштрасса:

Теорема 2 (Вейерштрасс)**.** *Для всякой непрерывной на отрезке функции* $f(x)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой многочлен* $P(x)$*, что* $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$

Введём ещё пару определений

Определение 1. *Сверткой функций f и g на $\mathbb{R}$ называется*

$$f * g(x) = \int\limits_{\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

Определение 2. *Последовательность $\{K_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ называется непрерывной неотрицательной аппроксимативной единицей, если все K_n непрерывны, неотрицательны и*

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)dt = 1.$

2. $\forall \delta > 0 \ \int\limits_{-\infty}^{-\delta} K_n(t)dt + \int\limits_{\delta}^{+\infty} K_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$