

Дифференциальные Уравнения

Семинарские занятия

Вадим Гринберг
по семинарам Войнова А. С.

Содержание

1 Семинар 1, 10 января	3
1.1 Общие факты	3
1.2 Изоклины	4
1.3 Диффуры с разделяющимися переменными	6
1.4 n -параметрическое семейство кривых	7
1.5 Замена переменных	8
1.5.1 Линейная замена	8
1.5.2 Общий вид	8
1.6 Домашнее задание №1	9
2 Семинар 2, 17 января	13
2.1 Специальные замены. Однородные уравнения.	13
2.2 Однородные уравнения: $y = \frac{x}{t}$	13
2.3 Однородные уравнения: дробно-линейный вид	14
2.4 Однородные уравнения: $x = y^m$	16
2.5 Домашнее задание №2	17
3 Семинар 3, 24 января	20
3.1 Линейные уравнения. Базовый случай	20
3.1.1 Метод замены	20
3.1.2 Метод вариации произвольной постоянной	21
3.1.3 Функция от x , сведение к линейному	23
3.2 «Обратное» решение: $t = t(x)$	23
3.3 Уравнение Бернулли	24
3.4 Уравнение Риккати	26
3.4.1 Одно частное решение	27
3.4.2 Два частных решения	29
3.5 Домашнее задание №3	31
4 Семинар 4, 31 января	34
4.1 Уравнения в полных дифференциалах	34
4.2 Группировка	37
4.3 Метод интегрирующего множителя	38
4.3.1 Общая идея	39
4.3.2 Алгоритм решения	42

4.3.3 Группировка в смысле поиска интегрирующего множителя	44
4.4 Домашнее задание №4	46
5 Common Tasks	47

Семинар 1, 10 января

Общие факты

Пусть у нас имеется функция $x(t)$ (вообще говоря, вектор-функция $x = (x_1, \dots, x_d)$) от переменной $t \in \mathbb{R}$, действующая из интервала (a, b) (по умолчанию считаем всей числовой прямой), такая, что для переменной t , функции $x(t)$ и n её первых производных выполнено уравнение:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

— это и есть дифференциальное уравнение n -го порядка. F в данном случае, грубо говоря, «функция от $n + 1$ переменной», которая неявно задаёт $x(t)$ (за точным определением — на лекцию).

Решить диффур означает найти такую функцию $x(t)$, что выполняется вышеуказанное равенство.

Тупой пример: $\dot{x}(t) = x(t)$. Функция совпадает со своей производной. Решением, очевидно, будет $x(t) = \lambda \cdot e^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

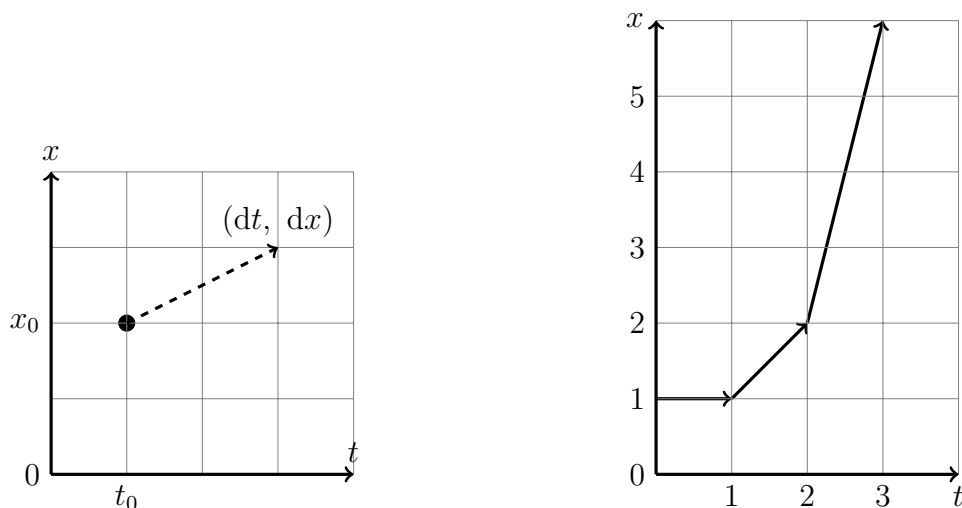
Любой диффур можно привести к удобоваримому виду:

$$\dot{x}(t) = f(t, x)$$

где f — некая хорошая функция (доказательство на лекции). С такими диффурами мы в основном и будем иметь дело.

Разберёмся, а как вообще можно решать диффуры. Пусть у нас имеется диффур $\dot{x} = f(t, x)$, который мы хотим решить. Попробуем приблизить график нашей кривой $x(t)$ некоей ломаной линией. Возьмём какую-то начальную точку (t_0, x_0) , и будем смотреть на направление движения, то бишь на направление вектора (dt, dx) . Будем делать маленькие шаги вдоль этого направления. Тогда каждый раз, находясь в точке (t, x) , мы будем переходить в точку $(t + dt, x + dx)$.

После многих таких шагов мы получим ломаную линию, приближающую график нашей кривой $x(t)$. Эта ломаная называется **Ломаной Эйлера**.



Для удобства можно делать шаг dt всегда равным 1, поделив вектор направления на dt . Тогда соответственно шаг dx станет $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x)$, и вектор направления в точке (t, x) будет иметь вид $(1, f(t, x))$.

Пример: $\dot{x} = tx$. Построим Ломаную Эйлера, стартуя из точки $(t_0, x_0) = (0, 1)$:

$$1. \ t = 0, \ x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 0) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (1, 1)$$

2. $t = 1, x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 1) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (2, 2)$
3. $t = 2, x = 2 \Rightarrow \dot{x} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 4) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (3, 6)$
4.

Изоклины

Определение 1. Пусть у нас есть диффура $\dot{x} = f(t, x)$.

Интегральная кривая — график функции $x(t)$ — решения диффура. Тогда \dot{x} — это угловой коэффициент интегральной кривой в точке $(t, x(t))$, то бишь тангенс угла наклона касательной к $x(t)$ в данной точке.

Изоклина — геометрическое место точек плоскости, в которых одно и то же направление движения (направление касательных), то есть, угол наклона вектора (dt, dx) один и тот же для любой точки (t, x) изоклины. Иными словами, $\dot{x} = \text{const}$.

Изолиния поля — подмножество точек изоклины (являющееся линией), в которых вектор (dt, dx) один и тот же для любой точки (t, x) изолинии. То есть, вектор $(dt, dx) \sim (1, f(t, x)) = \text{const}$. Для каждой изолинии константа своя.

Семейство изоклин определяется уравнением

$$\dot{x} = k = f(t, x)$$

где k — параметр. Придавая параметру k близкие значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

Для примера выше изоклинами будут являться множества $\left\{ xt = k \iff x = \frac{k}{t}, k \in \mathbb{R} \right\}$ — гиперболы.

Научимся находить приближённые решения диффура, строя интегральную кривую при помощи изоклин. Стоит отметить сразу же, что **нулевая изоклина** $f(t, x) = 0$ даёт уравнение линий, на которых могут находиться точки максимума и минимума интегральных кривых.

Для большей точности построения интегральных кривых хорошо находить ГМТ точек перегиба, исследуя вторую производную \ddot{x} при помощи уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{df}{dt} + \frac{df}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{df}{dt} + f(t, x) \cdot \frac{df}{dx} = 0$$

Линия, определяемая данным уравнением, и есть возможное ГМТ точек перегиба.

Пример №1

Изоклинами найти приближённое решение диффура

$$\dot{x} = 2t - x$$

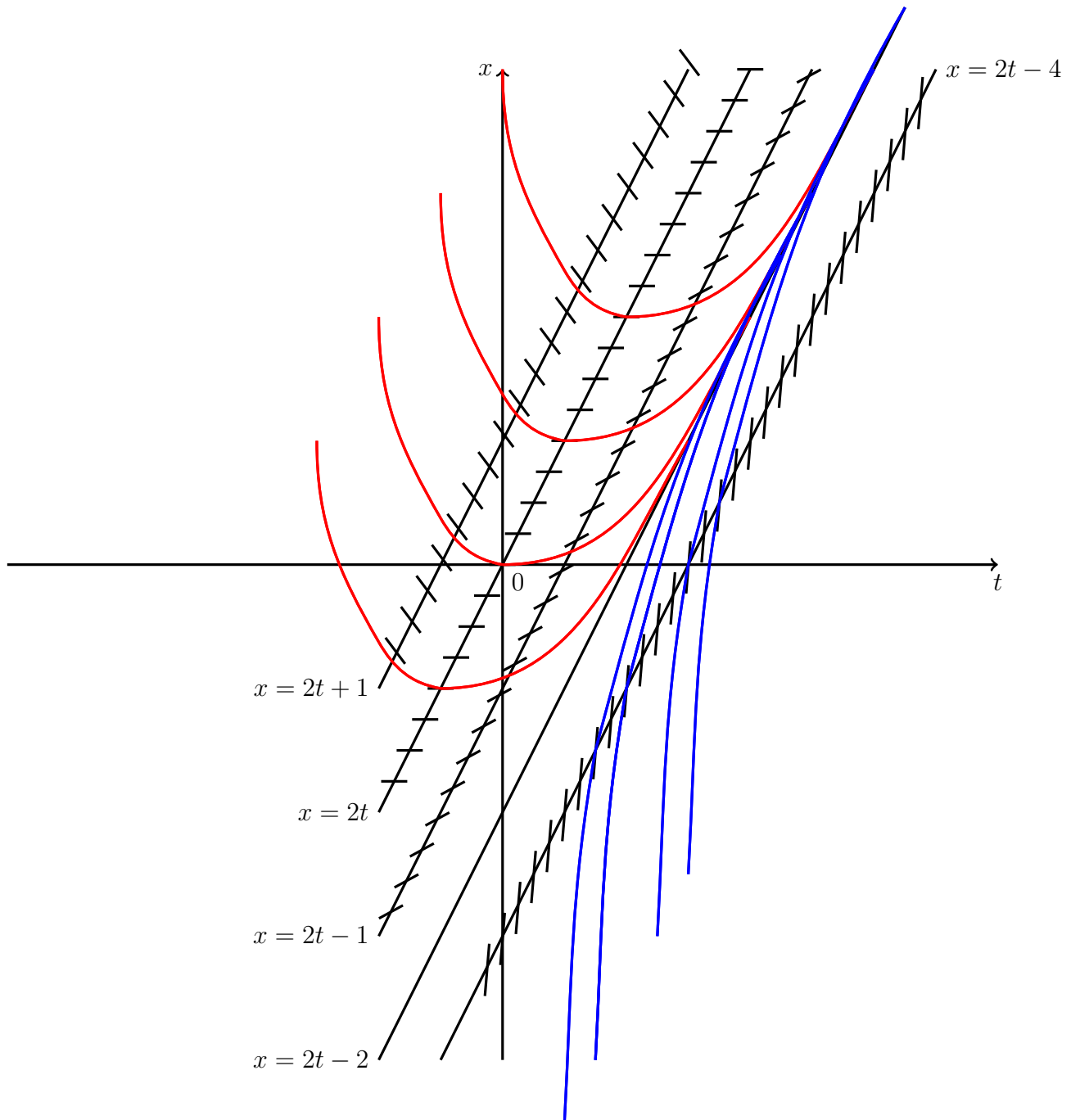
Для получения изоклин положим $\dot{x} = \text{const} = k$, откуда:

$$2t - x = k \iff x = 2t - k$$

— параллельные прямые.

Пусть $k = 0$, тогда получим изоклину $x = 2t$ — эта прямая делит плоскость на две части, в каждой из которых производная \dot{x} имеет один и тот же знак — интегральные кривые, пересекая $x = 2t$, из области убывания $x(t)$ переходят в область возрастания. Отсюда получаем, что на данной прямой лежат точки минимума.

Возьмём ещё две изоклины: $x = 2t + 1, k = -1$ и $x = 2t - 1, k = 1$. Изобразим их на графике. Касательные, проведённые к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами $k = -1, k = 0$ и $k = 1$ образуют с осью абсцисс углы в 135, 0 и 45 градусов соответственно. На графике направление показано чёрточками.



Вторая производная: $\ddot{x} = 2 - \dot{x} = 2 - 2t + x$.

Рассмотрим прямую $x = 2t - 2$, на которой $\ddot{x} = 0$. Это изоклина при $k = 2$. Заметим, что в таком случае угол наклона касательной равен углу наклона самой изоклины. Значит, ни одна интегральная кривая не будет пересекать эту изоклину, но при этом они будут к ней стремиться на бесконечности.

Прямая $x = 2t - 2$ делит плоскость на две части, в одной из которых (над прямой) $\ddot{x} > 0$, а значит, интегральные кривые выпуклы вниз, а в другой $\ddot{x} < 0$, и интегральные кривые выпуклы вверх. Кроме того, поскольку точки минимума расположены над этой прямой, то интегральные кривые, проходящие ниже изоклины $x = 2t - 2$ не имеют точек экстремума.

Рассмотрим также изоклину $x = 2t - 4$, $k = 4$. В данном случае угол наклона касательной будет равен 75 градусов. При этом интегральные кривые будут также стремиться к $x = 2t - 2$, но являясь выпуклыми вверх. Тем самым мы получили другое семейство решений диффура.

На графике выше изображены интегральные кривые, приближающие $x(t)$, полученные в соответствии с проведённым исследованием. Как видим, в точках пересечения с изоклинами кривые параллельны направлению касательных в точках пересечения.

Диффуры с разделяющимися переменными

Это суть дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{a(t)}{b(x)}$$

В данном случае стоит быть осторожным и проверять вырожденные случаи ($b(x) = 0$, $a(t) = 0$, чтобы нечаянно не убить некоторые решения).

Проверив особые случаи, перемножим крест-накрест и получим:

$$b(x) dx = a(t) dt$$

\int теперь интегрируем каждую часть независимо от другой \int

$B(x) = A(t) + C$ — это и будет решением диффура

Пример №2

$$\dot{x} = tx$$

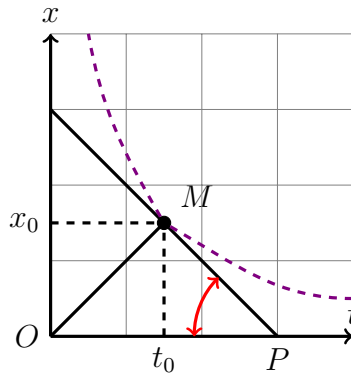
$$\dot{x} = tx = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{x} = t \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int t \cdot dt$$

$$\ln |x| = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow |x| = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^C}_{\text{какая-то константа}} \Rightarrow |x| = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda > 0 \Rightarrow x = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних двух действиях мы взяли экспоненту от обеих частей и избавились от модуля.

Пример №3

Найдите кривую $x(t)$, такую, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ отрезки, соединяющую точку касания $(t_0, x(t_0))$ с точками пересечения касательной в данной точке с осями координат, будут равны.



Пусть мы касаемся нашей кривой $x(t)$ в точке (t_0, x_0) — обозначим её M . Можно заметить, что тогда OM — медиана. Отсюда следует, что координаты точек пересечения с осями абсцисс и ординат равны соответственно $(2t_0, 0)$ и $(0, 2x_0)$. Тогда тангенс угла наклона касательной $\tan \angle MPO = -\frac{2x_0}{2t_0} = -\frac{x_0}{t_0} = \dot{x}(t_0)$, так как тангенс угла наклона касательной к функции $x(t)$ в точке t_0 есть не что иное, как производная $x(t) - \dot{x}(t)$ — в данной точке. Таким образом, мы получили диффуру:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Решим его, тем самым найдя $x(t)$.

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int = \int$$
$$-\ln |x| = \ln |t| + C \Rightarrow \frac{1}{|x|} = |t| \cdot \lambda, \lambda > 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Пример №4

$$xt + (t + 1) \cdot \dot{x} = 0 \implies xt + (t + 1) \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -\frac{xt}{t + 1} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{t \cdot dt}{t + 1} \implies \int = \int$$

Возьмём правый интеграл.

$$\int \frac{t \cdot dt}{t+1} = \int 1 - \frac{1}{t+1} dt = t - \ln|t+1|$$

Тогда:

$$-\ln|x| = t - \ln|t+1| + C \implies \frac{1}{|x|} = \lambda \cdot \frac{e^t}{t+1}, \lambda > 0 \implies x = \lambda \cdot e^{-t} \cdot (t+1), \lambda \in \mathbb{R}$$

n -параметрическое семейство кривых

Это система дифференциальных уравнений вида:

[illegible]

– всего $n + 1$ уравнение, константы c_1, \dots, c_n неизвестны. Необходимо, как и раньше, найти подходящую $x(t)$.

Метод решения таков: сначала мы выражаем константы c_1, \dots, c_n через $t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$, и потом подставляем всё в одно уравнение, тем самым получая диффур вида:

$$\mathbf{G}(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

который мы умеем решать.

Пример №5

Необходимо найти диффур, задающий множество окружностей, касающихся оси абсцисс.

Чего делать, сходу и не вдуплишь, да?) Однако, выход есть — если видим слово "окружность" нужно тут же писать её уравнение.

Пусть у нас есть окружность радиуса R , касающаяся оси абсцисс в точке t_0 . Тогда выполнено тождество:

$$(x - R)^2 + (t - t_0)^2 = R^2$$

В данном случае R и t_0 и есть наши неизвестные константы. Составим систему уравнений из производных:

$$\begin{cases} (x-R)^2 + (t-t_0)^2 - R^2 = 0 \\ (2x \cdot \dot{x} - 2R \cdot \dot{x}) + 2t - 2t_0 = 0 \\ 2(\dot{x})^2 + 2x \cdot \ddot{x} - 2R \cdot \ddot{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Осталось выразить R через \dot{x} и \ddot{x} из последнего уравнения, подставить во второе и выразить t_0 , после чего загнать всё в первое уравнение и получить нужный диффур.

Замена переменных

Разберём на примере. Пускай у нас есть диффур

$$\dot{x} = x - \sqrt{x}$$

Решать его в таком виде не очень приятно. Поэтому сделаем замену переменных (название – сущая формальность, так как вообще говоря мы заменяем одну функцию на другую, а не переменную):

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Тогда диффур примет вид:

$$2\dot{y} \cdot y = y^2 - y \implies 2\dot{y} = y - 1 \implies \frac{2 \, dy}{y - 1} = dt$$

— получили простое уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим ещё несколько примеров замен.

Линейная замена

Пускай у нас есть диффур вида:

$$\dot{x} = f(at + bx)$$

Можно сделать замену $u = at + bx$, получив уравнение $\dot{x} = f(u)$. Решим этот диффур относительно переменной u , получив функцию $x(u)$, после чего, сделав обратную замену, выразить искомую $x(t)$.

$$\begin{aligned} u &= at + bx \\ du &= a \cdot dt + b \cdot dx \implies dt = \frac{du - b \cdot dx}{a} \\ \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{a \cdot dx}{du - b \cdot dx} = f(u) \\ a \cdot dx &= f(u) du - b \cdot f(u) dx \implies (a + b \cdot f(u)) dx = f(u) du \\ dx &= \frac{f(u)}{a + b \cdot f(u)} du \end{aligned}$$

После этих махинаций всё легко решается как уравнение с разделяющимися переменными.

Пример №6

$$\dot{x} = \cos(x - t)$$

Ну тут совсем толсто: $u = x - t$. В данном случае $a = -1$, $b = 1$. По формуле выше:

$$dx = \frac{\cos u}{\cos u - 1} du$$

Теперь интегрируем, получаем $x(u)$ и делаем обратную замену.

Общий вид

Пускай у нас есть диффур:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Можно сделать замену $u = \varphi(t, x)$, получив новое уравнение (весьма удачно, если получится диффур вида $\dot{u} = f(t, u)$, но такое бывает далеко не всегда). Решаем его и делаем обратную замену, получая $x(t)$.

Пример №7

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x$$

Здесь можно сделать замену $u = xt$, откуда $\dot{u} = \dot{x} \cdot t + x \cdot 1$. Подставим:

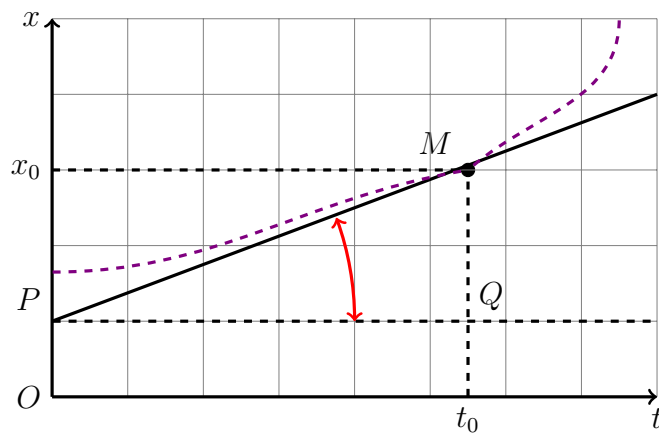
$$\begin{aligned}\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x &\iff \dot{x} \cdot t + x = 2x^2 \cdot t^3 \implies \dot{u} = 2u^2 \cdot t \\ \frac{du}{dt} = 2u^2 \cdot t &\implies \frac{du}{u^2} = 2t \cdot dt \implies \int = \int \\ -\frac{1}{u} = t^2 + C &\implies u = -\frac{1}{t^2 + C}\end{aligned}$$

Делаем обратную замену и выражаем $x(t)$:

$$u = xt \implies xt = -\frac{1}{t^2 + C} \implies x = -\frac{1}{t^3 + Ct}$$

Домашнее задание №1

Задача №1. Найти все кривые $x(t)$, такие, что длина отрезка, соединяющего точку касания и точку пересечения касательной в данной точке с одной из осей, была постоянной.



Решение.

Пусть длина отрезка $MP = l$. Рассмотрим треугольник MPQ — на рисунке выше. Мы знаем, что $PQ = t_0$. Известно, что $\tan \angle MPQ = \dot{x} = \frac{MQ}{PQ}$, откуда получаем, что

$$MQ = PQ \tan \angle MPQ = t_0 \dot{x}$$

. По условию, равенство можно продлить на всю числовую прямую, получая:

$$PQ = t \implies MQ = t \dot{x}$$

Теперь применим Теорему Пифагора, чтобы получить дифференциальное уравнение на искомую кривую:

$$\begin{aligned}MP^2 &= PQ^2 + MQ^2 \\ l^2 &= t^2 + t^2(\dot{x})^2 \implies l^2 - t^2 = t^2(\dot{x})^2 \\ (\dot{x})^2 &= \frac{l^2 - t^2}{t^2} \implies \dot{x} = \pm \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}\end{aligned}$$

Получили диффур (вообще говоря, два диффура). Будем рассматривать случай со знаком $+$, так как знак $-$ приведёт нас к почти аналогичному результату (это обговорится далее).

Итак, имеем диффур с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t} \implies dx = \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t} dt \implies \int dx = \int \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t} dt$$

Возьмём правый интеграл, сделав замену переменных.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t} dt &= \left\{ t = l \cdot \sin \beta, \quad dt = l \cdot \cos \beta d\beta \right\} = \int \frac{\sqrt{l^2(1 - \sin^2 \beta)}}{l \cdot \sin \beta} \cdot l \cdot \cos \beta d\beta = \\ &= \int \frac{l \cdot \cos \beta \cdot \cos \beta}{\sin \beta} d\beta = l \cdot \int \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin \beta} d\beta = l \left(\int \frac{d\beta}{\sin \beta} - \int \sin \beta d\beta \right) = \\ &= \left\{ \int \frac{d\beta}{\sin \beta} = \int \frac{d\beta}{2 \sin(\frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\beta}{2})} = \int \frac{\cos(\frac{\beta}{2}) d\beta}{2 \sin(\frac{\beta}{2}) \cos^2(\frac{\beta}{2})} = \int \frac{d \tan(\frac{\beta}{2})}{\tan(\frac{\beta}{2})} = \ln \left| \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \right| + C \right\} = \\ &= l \cdot \ln \left| \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \right| + l \cdot \cos(\beta) + C \end{aligned}$$

Теперь сделаем обратную замену:

$$\begin{aligned} t = l \cdot \sin \beta \implies \sin \beta = \frac{t}{l} \implies \cos \beta = \pm \sqrt{1 - \frac{t^2}{l^2}} \\ \ln \left| \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \right| = \ln \left| \frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\beta}{2})} \right| = \ln \left| \frac{2 \cdot \sin(\frac{\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\beta}{2})}{2 \cdot \cos^2(\frac{\beta}{2})} \right| = \ln \left| \frac{l \cdot \sin \beta}{(1 + \cos \beta) \cdot l} \right| = \ln \left| \frac{t}{l \pm \sqrt{l^2 - t^2}} \right| \end{aligned}$$

Теперь запишем полный результат интегрирования обеих частей, помня, что $\int dx = x + C$:

$$x = \pm \sqrt{l^2 - t^2} + l \cdot \ln \left| \frac{t}{l \pm \sqrt{l^2 - t^2}} \right| + C$$

У нас тут есть модуль, что не очень хорошо. Кроме того, мы не рассмотрели случай с минусом. Убьём двух зайцев одним ударом, немного преобразовав ответ:

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{l^2 - t^2} + l \cdot \ln \left| \frac{t}{l \pm \sqrt{l^2 - t^2}} \right| &= \pm \sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln \left| \frac{t}{l \pm \sqrt{l^2 - t^2}} \right|^2 = \\ &= \pm \sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln \left(\frac{t^2}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2}) \cdot (l \pm \sqrt{l^2 - t^2})} \right) = \\ &= \pm \sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln \left(\frac{t^2 \cdot (l \mp \sqrt{l^2 - t^2})}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2}) \cdot (l \pm \sqrt{l^2 - t^2}) \cdot (l \mp \sqrt{l^2 - t^2})} \right) = \\ &= \pm \sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln \left(\frac{t^2 \cdot (l \mp \sqrt{l^2 - t^2})}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2}) \cdot (l^2 - (l^2 - t^2))} \right) = \\ &= \pm \sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln \left(\frac{l \mp \sqrt{l^2 - t^2}}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2})} \right) \end{aligned}$$

Заметим, что если бы мы взяли случай с минусом, то тогда перед слагаемым с логарифмом стоял бы знак минус. Тогда, домножив на $-\frac{1}{2}$, мы бы возводили подлогарифменное выражение не в 2 степень, а в -2, соответственно абсолютно аналогичными преобразованиями получив под логарифмом такую же, но перевёрнутую дробь. Однако, и в числителе, и в знаменателе, у нас возникает по \pm или \mp – следовательно, рассмотрев случай с плюсом, мы уже получили все возможные варианты ответа.

Итоговый полный ответ:

$$x = \pm \sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln \left(\frac{l \mp \sqrt{l^2 - t^2}}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2})} \right) + C$$

Осталось лишь указать, что $t \in [-l, l]$, и $x(\pm l) = C$. □

Задача №2. Придумать диффуз 1 порядка, не обладающий решением на всей прямой. То бишь, не для всех t решение $\dot{x} = f(t, x)$ должно существовать.

Решение. $f(t, x)$ должна быть всюду определённой функцией. Поэтому достаточно взять такую $x = x(t)$ в качестве решения диффура, чтобы она не была всюду определена, при выполнении условия выше.

Пример: $\dot{x} = -x^2$. Проверим, что подходит:

$$\begin{aligned} \dot{x} = -x^2 &\implies \frac{dx}{x^2} = -dt \implies \int = \int \\ \frac{1}{x} = t &\implies x = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

□

Задача №3. Решите диффуз:

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0, \text{ начальное условие: } x(0) = 1$$

Решение.

$$\begin{aligned} (t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0 &\implies (t^2 - 1) \cdot dx + 2tx^2 dt = 0 \\ \frac{dx}{x^2} = \frac{2t \cdot dt}{1 - t^2} &\implies \int = \int \\ \frac{1}{x} = \ln |1 - t^2| + C \end{aligned}$$

Найдём константу:

$$x(0) = 1 \implies 1 = \ln 1 + C \implies C = 1$$

Итоговая кривая:

$$\frac{1}{x} = \ln |1 - t^2| + 1 \implies x = \frac{1}{\ln |1 - t^2| + 1}$$

□

Задача №4. Изоклинами найти приближённое решение:

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x}$$

Также изобразите изоклины на графике и покажите все различные (с точностью до топологии и асимптотики) решения (то есть, как рассмотрено выше в примере).

Решение. Уравнения изоклин:

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x} = k \implies x = t \cdot \frac{k}{1 - k}$$

Получим прямые изменения характера роста и выпуклости, исследовав первые две производные:

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 &= \frac{x}{t+x} \implies x = 0 \\ \ddot{x} &= \frac{\dot{x}(t+x) - x(1+\dot{x})}{(t+x)^2} = \frac{\dot{x}t - x}{(t+x)^2} = 0 \implies \frac{\frac{x}{t+x} \cdot t - x}{(t+x)^2} = 0 \implies \\ &\implies \frac{-x^2}{(t+x)^3} = 0 \implies x = 0 \\ \ddot{x} > 0 &\implies t+x < 0 \implies x < -t \\ \ddot{x} < 0 &\implies t+x > 0 \implies x > -t\end{aligned}$$

Таким образом, характер роста функции меняется в нуле, а выпуклость изменяется, проходя через прямые $x = 0$, $x = -t$. На основании этого и нескольких изоклин можно построить приблизительный график кривой $x(t)$. \square

Задача №5. Придумайте (вообще говоря, найдите) диффур 1 порядка, задающий множество прямых, являющихся касательными к единичной окружности с центром в нуле.

Решение. Уравнение касательной к окружности в точке (t_0, x_0) — $x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1$. Таким образом, у нас есть два уравнения:

$$\begin{cases} x_0^2 + t_0^2 = 1 \\ x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1 \end{cases}$$

Будем выражать из них t_0 и x_0 , чтобы остались только переменные t и x . Для этого продифференцируем второе уравнение и преобразуем:

$$\begin{aligned}x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1 &\implies \dot{x}x_0 + t_0 = 0 \\ \dot{x}x_0 = -t_0 &\text{ — здесь возведём в квадрат, запоминая знак минус — } (\dot{x})^2 x_0^2 = t_0^2\end{aligned}$$

Из уравнения окружности мы получаем выражение на квадрат t_0 :

$$x_0^2 + t_0^2 = 1 \implies t_0^2 = 1 - x_0^2$$

— теперь подставим t_0^2 в уравнение выше:

$$\begin{aligned}(\dot{x})^2 x_0^2 = 1 - x_0^2 &\implies x_0^2(1 + (\dot{x})^2) = 1 \\ x_0^2 &= \frac{1}{1 + (\dot{x})^2} \implies t_0^2 = 1 - x_0^2 = \frac{(\dot{x})^2}{1 + (\dot{x})^2} \\ x_0 &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}}, \quad t_0 = \pm \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}}\end{aligned}$$

Осталось подставить выраженные константы в уравнение касательной и получить некоторыми преобразованиями искомый диффур:

$$\begin{aligned}\pm \frac{x}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}} \pm \frac{\dot{x}t}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}} &= 1 \\ \pm x \pm \dot{x}t &= \sqrt{1 + (\dot{x})^2} \\ x^2 \pm 2\dot{x}xt + (\dot{x})^2 t^2 &= 1 + (\dot{x})^2 \\ (\dot{x})^2(t^2 - 1) \pm (2xt)\dot{x} + (x^2 - 1) &= 0 \text{ — квадратное уравнение} \\ \dot{x} &= \frac{\pm 2xt \pm \sqrt{4x^2 t^2 - 4(t^2 - 1)(x^2 - 1)}}{2(t^2 - 1)} \\ \dot{x} &= \frac{\pm xt \pm \sqrt{x^2 + t^2 - 1}}{t^2 - 1}\end{aligned}$$

\square

Семинар 2, 17 января

Специальные замены. Однородные уравнения.

Определение 2. Функцию $g(t, x)$ назовём *однородной*, если

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : g(\lambda t, \lambda x) = \lambda \cdot g(t, x)$$

Функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ – *одинаково однородны*, если

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : M(\lambda t, \lambda x) = \lambda \cdot M(t, x) \iff N(\lambda t, \lambda x) = \lambda \cdot N(t, x)$$

Определение 3. *Однородное дифференциальное уравнение – это диффуз вида*

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0$$

где функции M и N – одинаково однородны.

Решать такие диффуры можно путём сведения к уравнению с разделяющимися переменными при помощи различных замен. О них, а также о том, как сводить иные уравнения к однородным, мы и поговорим.

Однородные уравнения: $y = \frac{x}{t}$

Пускай у нас имеется диффуз вида:

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Оно уже однородное. Мы хотим привести его к уравнению с разделяющимися переменными. Следующая замена позволит нам это сделать: $y = \frac{x}{t}$:

$$y = \frac{x}{t} \implies x = y \cdot t \implies dx = y dt + t dy$$

– подставляем в однородное уравнение и решаем, находя $y(t)$. После этого обратная замена.

Пример №1

$$t dx = (x + t) dt$$

Данное уравнение уже является однородным. Преобразуем его и сделаем вышеуказанную замену (предварительно рассмотрев вырожденные случаи):

$$\begin{aligned} t dx &= (x + t) dt \iff dx = \frac{x}{t} dt + dt, y = \frac{x}{t} \\ (y dt + t dy) &= (y + 1) dt \\ t dy &= dt \implies dy = \frac{dt}{t} \implies \int = \int \end{aligned}$$

Осталось проинтегрировать, получить $y(t)$ и подставить $y = \frac{x}{t}$.

Пример №2

$$x^2 + \dot{x}t^2 = tx\dot{x}$$

Помня, что $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, преобразуем диффур и сделаем ту же замену.

$$\begin{aligned}x^2 + \dot{x}t^2 &= tx\dot{x} \iff x^2 dt = (tx - t^2) dx, \quad y = \frac{x}{t} \\y^2 t^2 dt &= t^2(y - 1)(y dt + t dy) \\y^2 dt &= y^2 dt + yt dy - y dt - t dy \\y dt &= t(y - 1) dy \iff \frac{dt}{t} = \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy \\ \ln |t| &= y - \ln |y| + C\end{aligned}$$

Теперь удобно делать обратную замену:

$$\ln |yt| = y + C \iff \ln |x| = \frac{x}{t} + C$$

и преобразовать получившееся выражение до вида $x = x(t)$.

Пример №3

$$t\dot{x} = x - t \cdot \exp\left(\frac{x}{t}\right)$$

— здесь руки сами просят поделить на t ($t \neq 0$, так как иначе уравнение не определено):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x}{t} - \exp\left(\frac{x}{t}\right), \quad y = \frac{x}{t} \\ \frac{y dt + t dy}{dt} &= y - e^y \implies \frac{t dy}{dt} = -e^y \\ \frac{dy}{e^y} &= -\frac{dt}{t} \implies \int = \int \\ e^{-y} &= -\ln |t| + C\end{aligned}$$

— далее обратная замена.

Однородные уравнения: дробно-линейный вид

Пускай мы имеем диффур вида:

$$\dot{x} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right), \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ясно, что числитель и знаменатель суть уравнения прямых на координатной плоскости. Мы можем преобразовать уравнения такого типа к только что рассмотренным $\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$, если перенесём систему координат в точку пересечения данных прямых.

Теперь подробнее о методе. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \end{cases}$$

— решением данной системы будет точка пересечения двух прямых (t^*, x^*) . Теперь перенесём систему координат в данную точку, произведя замену:

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t - t^* \\ \tilde{x} &= x - x^*\end{aligned}$$

— теперь, произведя простые преобразования, получаем однородный диффур $(\dot{\tilde{x}}) = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$. Решив его, осталось провести обратную замену, прибавив соответствующие константы.

Здесь стоит обговорить случай, когда выражения в числителе и знаменателе задают параллельные прямые, то есть:

$$\dot{x} = f\left(\frac{at + bx + c_1}{at + bx + c_2}\right)$$

— отличаются только на свободный член, ибо $c_2 = c_1 + c$, $c \in \mathbb{R}$. В данном случае уравнение тривиально сводится к уравнению вида $\dot{x} = \tilde{f}(at + bx)$, которое мы умеем решать, линейной заменой сводя к диффуру с разделяющимися переменными.

Пример №4

$$(x + 2) dt = (2t + x - 4) dx$$

Перезапишем в дробно-линейном виде:

$$\dot{x} = \frac{x + 2}{2t + x - 4}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2t + x - 4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + 2 \\ \tilde{t} = t - 3 \end{cases} \implies \frac{dx}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{x}}{2\tilde{t} + \tilde{x}}$$

— осталось решить его как уравнение с разделяющимися переменными.

Пример №5

$$\dot{x} = \frac{5t - x - 3}{3t + 2x - 7}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 5t - x - 3 = 0 \\ 3t + 2x - 7 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 2 \\ \tilde{t} = t - 1 \end{cases} \implies \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{5\tilde{t} - \tilde{x}}{3\tilde{t} + 2\tilde{x}}$$

Поделим числитель и знаменатель правой части уравнения на \tilde{t} и положим $y = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}}$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\tilde{t} \cdot \frac{dy}{d\tilde{t}} = \frac{5 - 4y - 2y^2}{3 + 2y}$$

Однородные уравнения: $x = y^m$

Пускай мы имеем уравнение

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0$$

где функции M и N — НЕ одинаково однородные. Однако, мы были бы рады привести его к такому. В этом нам поможет замена $x = y^m$, где $m \in \mathbb{Q}$.

Идея в том, что у однородного уравнения степени каждого из слагаемых уравнения должны совпадать — тогда при домножении на константу мы сможем её спокойно вынести за функции. Поэтому сначала мы найдём степень m , после чего будем решать обычное однородное уравнение при помощи известных методов. Разберём на примерах.

Пример №6

$$2t^4 \cdot x\dot{x} + x^4 = 4t^6$$

— перепишем с дифференциалами:

$$2t^4 \cdot x dx + x^4 dt = 4t^6 dt$$

Делаем замену:

$$x = y^m \implies dx = m \cdot y^{m-1} dy$$

— получаем уравнение:

$$2t^4 \cdot y^m \cdot m \cdot y^{m-1} dy + y^{4m} dt = 4t^6 dt$$

Приравняем степени:

$$3 + 2m = 4m = 6 \implies m = \frac{3}{2}$$

— теперь подставляем и решаем однородный диффур.

Пример №7

$$\dot{x} = x^2 - \frac{2}{t^2}$$

Перепишем с дифференциалами и сделаем замену $x = y^m$:

$$t^2 dx = x^2 t^2 dt - 2 dt$$

$$x = y^m, \quad dx = m \cdot y^{m-1} dy$$

$$m \cdot t^2 \cdot y^{m-1} dy = y^{2m} \cdot t^2 dt - 2 dt$$

Ищем степень:

$$2 + m - 1 = 2m + 2 = 0 \implies m = -1$$

Тогда:

$$-t^2 \cdot y^{-2} dy = y^{-2} \cdot t^2 dt - 2 dt$$

$$-t^2 dy = t^2 dt - 2y^2 dt$$

Получили однородное уравнение, которое решается классически: $z = \frac{y}{t}$:

$$z = \frac{y}{t}, \quad y = zt, \quad dy = t dz + z dt$$

$$-t^2(t dz + z dt) = t^2 dt - 2z^2 t^2 dt$$

$$-t dz - z dt = dt - 2z^2 dt$$

$$t dz = (2z^2 - z - 1) dt$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dz}{2z^2 - z - 1} \implies \int = \int$$

— находим решение $z = z(t)$, после чего производим череду обратных замен, находя $x = x(t)$.

Домашнее задание №2

Задача №1. Решить диффур:

$$\dot{x} = 2 \cdot \left(\frac{x+2}{x+t-1} \right)^2$$

Решение. Решим систему:

$$\begin{cases} x+2=0 \\ x+t-1=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=-2 \\ t=3 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tilde{x} = x+2 \\ \tilde{t} = t-3 \end{cases} &\implies \frac{dx}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = 2 \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}+\tilde{t}} \right)^2 \\ \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}}+1} \right)^2 \quad y = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} \\ \frac{y d\tilde{t} + \tilde{t} dy}{d\tilde{t}} &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{y+1} \right)^2 \iff y + \frac{\tilde{t} dy}{d\tilde{t}} = \frac{2y^2}{y^2+2y+1} \\ \frac{\tilde{t} dy}{d\tilde{t}} &= \frac{2y^2 - y^3 - 2y^2 - y}{y^2+2y+1} \\ \frac{(y^2+2y+1) dy}{y(y^2+1)} &= \frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}} \implies \int = \int \end{aligned}$$

Возьмём правый интеграл, разбив его в сумму:

$$\begin{aligned} \int \frac{(y^2+2y+1) dy}{y(y^2+1)} &= \int \frac{y dy}{y^2+1} + \int \frac{2 dy}{y^2+1} + \int \frac{dy}{y(y^2+1)} \\ \int \frac{y dy}{y^2+1} &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(y^2+1)}{y^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \ln|y^2+1| + C \\ \int \frac{2 dy}{y^2+1} &= 2 \arctan y + C \\ \int \frac{dy}{y(y^2+1)} &= \left\| \begin{matrix} u = y^2 \\ du = 2y dy \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u(u+1)} = \frac{1}{2} \left(\int \frac{a du}{u} + \int \frac{b du}{u+1} \right) = \\ &= \left\| \begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} \right) = \frac{1}{2} \ln|u| - \frac{1}{2} \ln|u+1| = \left\| u = y^2 \right\| = \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y^2+1| + C \\ \int \frac{(y^2+2y+1) dy}{y(y^2+1)} &= \frac{1}{2} \ln|y^2+1| + 2 \arctan y + \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y^2+1| + C = 2 \arctan y + \ln|y| + C \end{aligned}$$

Итого:

$$\begin{aligned} 2 \arctan y + \ln|y| + C &= \ln|\tilde{t}| \iff \tilde{t} = \lambda y \cdot \exp(2 \arctan y), \lambda \in \mathbb{R} \\ \left\| y = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} \right\| &\implies \tilde{t}^2 = \lambda \tilde{x} \cdot \exp\left(2 \arctan\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}}\right)\right), \lambda \in \mathbb{R} \\ \left\| \tilde{x} = x+2, \tilde{t} = t-3 \right\| &\implies (t-3)^2 = \lambda \cdot (x+2) \cdot \exp\left(2 \arctan\left(\frac{x+2}{t-3}\right)\right), \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Задача №2. Решить диффур:

$$\dot{x} = \frac{x+2}{t+1} + \tan\left(\frac{x-2t}{t+1}\right)$$

Решение. Решим систему:

$$\begin{cases} x+2=0 \\ t+1=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=-2 \\ t=-1 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tilde{x} = x+2 \\ \tilde{t} = t+1 \end{cases} &\implies \frac{dx}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} + \tan\left(\frac{\tilde{x}-2\tilde{t}}{\tilde{t}}\right) \iff \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} + \tan\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} - 2\right), y = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} \\ \frac{y d\tilde{t} + \tilde{t} dy}{d\tilde{t}} &= y + \tan(y-2) \iff \frac{\tilde{t} dy}{d\tilde{t}} = \tan(y-2) \\ \cot(y-2) dy &= \frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}} \implies \int = \int \\ \ln|\sin(y-2)| &= \ln|\tilde{t}| + C \iff \sin(y-2) = \lambda \cdot \tilde{t}, \lambda \in \mathbb{R} \\ y = 2 + \arcsin(\lambda \tilde{t}) &\iff \tilde{x} = 2\tilde{t} + \tilde{t} \arcsin(\lambda \tilde{t}) \\ x = 2t + (t+1) \arcsin(\lambda(t+1)) \end{aligned}$$

□

Задача №3. Решить диффур:

$$2x + (xt^2 + 1)t\dot{x} = 0$$

Решение. Перепишем с дифференциалами и сделаем замену $x = y^m$:

$$\begin{aligned} 2x dt + (xt^2 + 1) \cdot t dx &= 0 \iff 2x dt + xt^3 dx + t dx = 0 \\ \left\| \begin{aligned} x &= y^m \\ \dot{x} &= m \cdot y^{m-1} dy \end{aligned} \right\| &\implies 2y^m dt + y^m \cdot t^3 \cdot m \cdot y^{m-1} dy + t \cdot m \cdot y^{m-1} dy = 0 \\ \left\| \begin{aligned} m &= m+2+1+m-1=m \iff m=-2 \\ x &= \frac{1}{y^2} \end{aligned} \right\| &\implies \frac{2dt}{y^2} + \left(\frac{t^2}{y^2} + 1\right) t \cdot (-2) \cdot \frac{dy}{y^3} = 0 \\ \frac{dt}{y} &= \left(\frac{t^2}{y^2} + 1\right) \frac{t dy}{y^3}, z = \frac{y}{t} \\ \frac{dt}{z^2} &= \left(\frac{1}{z^2} + 1\right) \cdot \frac{1}{z^3} \cdot (z dt + t dz) \iff dt = \left(\frac{1}{z^2} + 1\right) dt + \left(\frac{1}{z^2} + 1\right) \cdot \frac{t dz}{z} \\ \left(1 - 1 - \frac{1}{z^2}\right) dt &= \left(\frac{1}{z^2} + 1\right) \cdot \frac{t dz}{z} \\ -\frac{dt}{t} &= \left(\frac{1}{z} + z\right) dz \implies \int = \int \\ -\log|t| + C &= \log|z| + \frac{z^2}{2} \iff \left\| \ln|z| = \ln|y| - \ln|t|, \frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2t^2} \right\| \iff \ln|y| \frac{y^2}{2t^2} + C = 0 \\ \left\| x = \frac{1}{y^2} \iff y = \frac{1}{\sqrt{x}} \right\| &\implies \ln|\sqrt{x}| + \frac{1}{2t^2 x} + C = 0 \iff \frac{1}{xt^2} = \ln|x| + C \end{aligned}$$

□

Задача №4. Найти все такие $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, такие, что дифференциальное уравнение

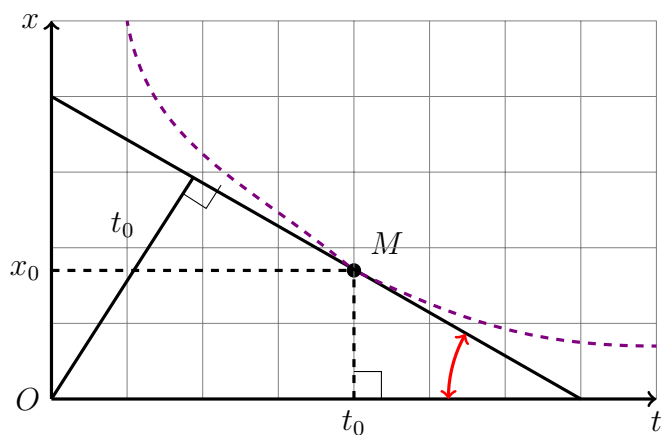
$$\dot{x} = at^\alpha + bx^\beta$$

сводится к однородному.

Решение.

□

Задача №5. Найдите все кривые $x(t)$, такие, что расстояние от начала координат до касательной к $x(t)$ в любой точке $(t_0, x(t_0))$ совпадает с абсциссой данной точки (равно t_0):



Решение.

□

Семинар 3, 24 января

Линейные уравнения. Базовый случай

Линейные диффуры первого порядка имеют следующий общий вид:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Опишем 2 метода решения таких уравнений в общем виде.

Метод замены

Имеем диффур: $\dot{x} + a(t)x = b(t)$. Делаем следующую замену: $x = uv$, где $u = u(t)$, $v = v(t)$ – функции от t . Естественным образом изменяется и дифференциал:

$$\begin{cases} x = uv \\ \dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\dot{u}v + u\dot{v} + a(t)uv = b(t)$$

Сгруппируем слагаемые в левой части по u :

$$\dot{u}v + u(\dot{v} + a(t)v) = b(t)$$

Теперь приравняем выражение в скобках к нулю, получая систему:

$$\begin{cases} \dot{v} + a(t)v = 0 \\ \dot{u}v = b(t) \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы – это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} + a(t)v &= 0 \\ \frac{dv}{v} &= -a(t) dt \implies \int = \int \\ \ln |v| &= - \int a(t) dt \implies v = \exp\left(- \int a(t) dt\right) \end{aligned}$$

Прошу заметить, что в данном случае константа $C = 0$ – это важно. Теперь подставляем данное выражение во второе уравнение.

$$\begin{aligned} \dot{u} \exp\left(- \int a(t) dt\right) &= b(t) \\ du &= b(t) \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right) dt \implies \int = \int \\ u &= \int b(t) \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right) dt \end{aligned}$$

Осталось подставить полученные u и v , получив $x = x(t) = u \cdot v$:

$$x = u \cdot v = \left[\int b(t) \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right) dt \right] \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right)$$

Пример №1

$$\dot{x} + 2tx = t \cdot \exp(-t^2)$$

Будем действовать по алгоритму.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = uv \\ \dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases} \\ \dot{u}v + u\dot{v} + 2tuv = t \cdot \exp(-t^2) & \iff \dot{u}v + u(\dot{v} + 2tv) = t \cdot \exp(-t^2) \\ \begin{cases} \dot{v} + 2tv = 0 \\ \dot{u}v = t \cdot \exp(-t^2) \end{cases} & \implies \begin{cases} v = \exp(-t^2) \\ \dot{u} \exp(-t^2) = t \cdot \exp(-t^2) \end{cases} \\ \dot{u} = t & \implies u = \frac{t^2}{2} + C \\ x = uv & = \left(\frac{t^2}{2} + C \right) \cdot \exp(-t^2) \end{aligned}$$

Метод вариации произвольной постоянной

Имеем диффур: $\dot{x} + a(t)x = b(t)$. Если $b(t) := 0$, то у нас имеется однородный диффур $\dot{x} + a(t)x = 0$. Ясно, что каждое решение линейного диффура является решением однородного диффура с нулевой правой частью, смещённого на $b(t)$ – по аналогии с СЛУ из Линала, мы сначала решаем однородную СЛУ, получая общее решение, а затем смещаем на вектор значений (столбец правых частей из расширенной СЛУ). Таким образом, получаем метод:

$$\begin{aligned} \dot{x} + a(t)x &= 0 \\ dx + a(t)x dt &= 0 \\ \frac{dx}{x} &= -a(t) dt \implies \int = \int \\ \ln |x| &= - \int a(t) dt + C \implies x = u \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right), u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Теперь сделаем вариацию постоянной (тем самым получая все возможные «сдвиги» решения однородного уравнения). Полагаем теперь, что u – не константа, а тоже некоторая функция от t : $u = u(t)$. Тогда можно сделать замену $x = x(t, u)$ и подставить в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[u \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right) \right] + a(t) \cdot u \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right) = b(t) \\ \dot{u} \exp\left(- \int a(t) dt\right) - u \cdot a(t) \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right) + a(t) \cdot u \cdot \exp\left(- \int a(t) dt\right) &= b(t) \end{aligned}$$

Заметим, что последние два слагаемых в левой части равны по модулю и противоположны по знаку, следовательно, их можно попросту сократить, получая диффур:

$$\begin{aligned} \dot{u} \exp\left(- \int a(t) dt\right) &= b(t) \\ du &= b(t) \cdot \exp\left(\int a(t) dt\right) dt \implies \int = \int \\ u &= \int b(t) \cdot \exp\left(\int a(t) dt\right) dt \end{aligned}$$

Осталось подставить полученное решение u в выражение для x , чтобы получить общее решение диффура:

$$x = u \cdot \exp\left(-\int a(t) dt\right) = \left[\int b(t) \cdot \exp\left(\int a(t) dt\right) dt\right] \cdot \exp\left(-\int a(t) dt\right)$$

Внимательный читатель может заметить, что оба метода являются по факту одним и тем же. Однако, в зависимости от ситуации, пользоваться можно любым подходом.

Пример №2

$$t\dot{x} - 2x = 2t^4$$

Сначала решим однородное.

$$\begin{aligned} t\dot{x} &= 2x \\ t dx &= 2x dt \implies \frac{dx}{x} = 2\frac{dt}{t} \implies \int = \int \\ \ln|x| &= 2\ln|t| \implies x = u \cdot t^2, u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Теперь сделаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = ut^2 \\ dx = \dot{u}t^2 + 2ut \end{cases} \\ t(\dot{u}t^2 + 2ut) - 2ut^2 &= 2t^4 \\ \dot{u}t^3 + 2ut^2 - 2ut^2 &= 2t^4 \\ \dot{u}t^3 &= 2t^4 \implies \dot{u} = 2t \implies u = t^2 + C \\ x = ut^2 &= (t^2 + C)t^2 = t^4 + Ct^2 \end{aligned}$$

Получили общее решение.

Пример №3

$$x = t(\dot{x} - t \cdot \cos t)$$

Приведём к «классическому» виду:

$$\dot{x}t - x = t^2 \cdot \cos t$$

Однородное:

$$\begin{aligned} \dot{x}t &= x \\ dx \cdot t &= x dt \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dt}{t} \implies \int = \int \\ \ln|x| &= \ln|t| + C \implies x = ut, u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Сделаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = ut \\ dx = \dot{u}t + u \end{cases} \\ (\dot{u}t + u)t - ut &= t^2 \cos t \implies \dot{u}t^2 = t^2 \cos t \\ \dot{u} &= \cos t \implies u = \sin t + C \end{aligned}$$

Подставляем в выражение для x , чтобы получить итоговый ответ:

$$x = ut = (\sin t + C)t = t \sin t + Ct$$

Функция от x , сведение к линейному

Пусть у нас есть уравнение вида:

$$a'(x)\dot{x} + b(t) \cdot a(x) = c(t)$$

где $a = a(x)$ – функция от x . Его можно свести к линейному ввиду свойств дифференциала:

$$a'(x)\dot{x} = \frac{da}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}$$

Подставляем в исходное уравнение, получая диффур, линейный по a :

$$\frac{da}{dt} + b(t) \cdot a = c(t)$$

Его уже можно решить приведёнными выше методами, получив решение $a = f(t)$, после чего выразить x через $a(x) = f(t)$.

«Обратное» решение: $t = t(x)$

Ранее мы рассматривали уравнения, линейные относительно переменной x и её производной. То есть мы считали, что t является независимой переменной, а x является зависимой переменной. Однако, всегда стоит иметь в виду, что возможен противоположный подход. То есть можно считать переменную x независимой переменной, а t – зависимой переменной. На практике часто встречаются задачи, в которых уравнение линейно относительно переменной t и её производной, а не x . В общем виде такое уравнение можно записать так:

$$(a(x)t + b(x))\dot{x} = c(x)$$

Преобразуем его:

$$(a(x)t + b(x))\frac{dx}{dt} = c(x)$$

$$a(x)t + b(x) = c(x)\frac{dt}{dx}$$

$$c(x)\frac{dt}{dx} - a(x)t = b(x)$$

$$\dot{t} - \frac{a(x)}{c(x)} \cdot t = \frac{b(x)}{c(x)}$$

Теперь решаем диффур любым из рассмотренных выше методов, но для функции $t = t(x)$.

Пример №4

$$(2t + x^3)\dot{x} = x$$

Преобразуем его к диффуру от t , подставив нужные выражения в формулу выше.

$$\dot{t} - \frac{2}{x} \cdot t = x^2$$

Теперь решим методом вариации постоянной:

$$\dot{t} = \frac{2}{x} \cdot t$$

$$\frac{dt}{t} = 2\frac{dx}{x} \implies \int = \int$$

$$\ln |t| = 2 \ln |x| + C \implies t = ux^2, u \in \mathbb{R}$$

Теперь положим $u = u(x)$:

$$\begin{cases} t = ux^2 \\ dt = \dot{u}x^2 + 2ux \end{cases}$$

$$\dot{u}x^2 + 2ux - 2ux = x^2 \implies \dot{u}x^2 = x^2$$

$$\dot{u} = 1 \implies u = x + C$$

Получаем общее решение $t = t(x)$:

$$t = ux^2 = (x + C)x^2 = x^3 + Cx^2$$

Уравнение Бернулли

Это дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \cdot x^m$$

Характерный признак – степень m в правой части. Стоит отметить, что при $m = 0, 1$ это обычное линейное уравнение, которое мы умеем решать. Более того, степень m может быть какой угодно – положительной ли, отрицательной или вообще дробью.

Как и линейное неоднородное уравнение первого порядка, уравнение Бернулли может приходить на новогодний утренник в разных костюмах:

- Волком:

$$a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t) \cdot x^m$$

- Зайчиком:

$$\dot{x} + x = c(t) \cdot x^m$$

- Или белочкой:

$$\dot{x} + a(t)x = x^m$$

Важно, чтобы всегда присутствовала Ёлочка – x^m , которая иногда может маскироваться под корень. Вокруг неё и будем водить хороводы.

Стоит также обратить внимание, что у данных уравнений при $m > 0$ всегда есть очевидное частное решение $x = 0$. Понятно, что когда просят найти частное решение диффура, на этот факт можно забыть, но при нахождении общего решения терять данный случай нельзя.

Теперь обговорим метод решения. Пусть мы имеем диффур в «классическом» виде:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \cdot x^m$$

Избавимся от x в правой части уравнения, поделив всё на его степень:

$$\frac{\dot{x}}{x^m} + \frac{a(t)}{x^{m-1}} = b(t)$$

Теперь делаем хитрую (нет) замену:

$$\begin{cases} w = \frac{1}{x^{m-1}} \\ \dot{w} = \frac{(1-m)\dot{x}}{x^m} \end{cases} \implies \frac{\dot{x}}{x^m} = \frac{\dot{w}}{1-m}$$

Тогда диффур примет вид:

$$\frac{\dot{w}}{1-m} + a(t)w = b(t) \implies \dot{w} + (1-m) \cdot a(t)w = (1-m) \cdot b(t)$$

— получили обычный линейный диффур, который только что научились решать.

Пример №5

$$\dot{x} = x^4 \cdot \cos t + x \cdot \tan t$$

Запомним, что $x = 0$ — решение, далее полагаем $x \neq 0$. Перепишем в «классическом» виде:

$$\dot{x} - x \cdot \tan t = x^4 \cdot \cos t$$

Поделим на x^4 :

$$\frac{\dot{x}}{x^4} - \frac{\tan t}{x^3} = \cos t$$

Замена:

$$\begin{cases} w = \frac{1}{x^3} \\ \dot{w} = \frac{(1-4)\dot{x}}{x^4} \implies \frac{\dot{x}}{x^4} = -\frac{\dot{w}}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{\dot{w}}{3} - w \cdot \tan t = \cos t \iff \dot{w} + 3w \cdot \tan t = -3 \cos t$$

Теперь решаем такой линейный диффур.

$$\dot{w} = -3w \tan t \implies \frac{dw}{w} = -3 \tan t dt \implies \int = \int$$

$$\ln |w| = 3 \ln |\cos t| + C \implies w = u \cdot \cos^3 t, u \in \mathbb{R}$$

Делаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{cases} w = u \cdot \cos^3 t \\ \dot{w} = \dot{u} \cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t \end{cases}$$

$$\dot{u} \cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t + 3u \cdot \cos^3 t \cdot \tan t = -3 \cos t \iff$$

$$\iff \dot{u} \cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t + 3u \cdot \cos^3 t \cdot \frac{\sin t}{\cos t} = -3 \cos t$$

$$\dot{u} \cos^3 t = -3 \cos t \iff du = -\frac{3 dt}{\cos^2 t} \implies \int = \int$$

$$u = -3 \tan t + C$$

Подставляем в выражение для w и делаем обратную замену.

$$w = u \cdot \cos^3 t = (-3 \tan t + C) \cdot \cos^3 t$$

$$w = \frac{1}{x^3} \implies x^3 = \frac{1}{(-3 \tan t + C) \cdot \cos^3 t}$$

Пример №6

Решить задачу Коши:

$$\dot{x} - \frac{2x}{t} = 2t \cdot \sqrt{x}, \quad \text{начальное условие: } x(1) = 1$$

Так как нужно решить задачу Коши, то $x \neq 0$. Решаем стандартным для Бернулли способом:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{t} &= 2t \\ \begin{cases} w = \sqrt{x} \\ \dot{w} = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} \end{cases} &\implies \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = 2\dot{w} \\ 2\dot{w} - \frac{2w}{t} &= 2t \iff \dot{w} - \frac{w}{t} = t \end{aligned}$$

Решим заменой $w = uv$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} w = uv \\ \dot{w} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases} \\ \dot{u}v + u\dot{v} - \frac{uv}{t} = t &\iff \dot{u}v + u\left(\dot{v} - \frac{v}{t}\right) = t \\ \begin{cases} \dot{v} - \frac{v}{t} = 0 \\ \dot{u}v = t \end{cases} \\ \dot{v} = \frac{v}{t} &\iff \frac{dv}{v} = \frac{dt}{t} \implies \int = \int \\ \ln|v| = \ln|t| &\iff v = t \\ \dot{u}t = t &\iff \dot{u} = 1 \implies u = t + C \end{aligned}$$

Получаем общее решение диффура от w

$$w = (t + C) \cdot t$$

Делаем обратную замену $w = \sqrt{x} \iff x = w^2$:

$$x = w^2 = [(t + C) \cdot t]^2 = (t + C)^2 \cdot t^2$$

Теперь найдём частное решение:

$$x(1) = 1 \implies 1 = (1 + C)^2$$

— внезапно, уравнение имеет 2 корня: $C = 0$ и $C = -2$, откуда получается 2 частных решения:

$$x = t^4, \quad x = (t - 2)^2 \cdot t^2$$

Каждое из них удовлетворяет начальному условию. Это объясняется тем, что задача Коши имеет единственное решение только при выполнении определённых условий (функция f в диффуре $\dot{x} = f(t, x)$ должна быть Липшицевой). В данном случае условие единственности нарушено, и в точке $(1, 1)$ **пересекаются** графики кривых $x = t^4$ и $x = (t - 2)^2 \cdot t^2$.

Уравнение Риккати

Это дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{x} + a(t)x^2 + b(t)x + c(t) = 0$$

Сразу отметим, что если a, b, c — константы, то это обычное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого можно записать в виде функции $t = t(x)$:

$$t = C - \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Методы решения данного уравнения весьма и весьма интересны.

Одно частное решение

Пусть у нас есть одно **частное** решение $x_1 = x_1(t)$ этого диффура. Тогда мы можем представить общее решение – функцию $x = x(t)$ – как сумму функций:

$$x = x_1 + z$$

где $z = z(t)$ – новая неизвестная функция. Подставим выражение для x в исходное уравнение:

$$\begin{cases} x = x_1 + z \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{z} \end{cases}$$
$$\dot{x}_1 + \dot{z} + a(t)(x_1^2 + 2x_1z + z^2) + b(t)(x_1 + z) + c(t) = 0$$

Поскольку x_1 – решение диффура, то выполнено:

$$\dot{x}_1 + a(t)x_1^2 + b(t)x_1 + c(t) = 0$$

Таким образом, раскрыв скобки, мы можем убрать обнулившуюся часть, получая диффур:

$$\begin{aligned} \dot{z} + a(t)(2x_1z + z^2) + b(t)z &= 0 \\ \dot{z} + a(t)z^2 + (2a(t)x_1 + b(t)) \cdot z &= 0 \\ \dot{z} + (2a(t)x_1 + b(t)) \cdot z &= -a(t)z^2 \end{aligned}$$

— а это уже знакомое нам уравнение Бернулли. Помним про корень $z = 0$, стреляем в уравнение стандартной заменой:

$$\begin{aligned} \dot{z} + (2a(t)x_1 + b(t)) \cdot z &= -a(t)z^2 \\ \frac{\dot{z}}{z^2} + \frac{2a(t)x_1 + b(t)}{z} &= -a(t) \\ \begin{cases} w = \frac{1}{z} \\ \dot{w} = -\frac{\dot{z}}{z^2} \implies \frac{\dot{z}}{z^2} = -\dot{w} \end{cases} \\ -\dot{w} + (2a(t)x_1 + b(t)) \cdot w &= -a(t) \iff \dot{w} - (2a(t)x_1 + b(t)) \cdot w = a(t) \end{aligned}$$

и добиваем каким-нибудь методом решения линейных диффузов.

Стоит отметить, что часто бывает более выгодно немного иная замена x :

$$x = x_1 + \frac{1}{z}$$

— это сразу же приводит наше уравнение к линейному виду:

$$\dot{z} - (2a(t)x_1 + b(t)) \cdot z = a(t)$$

Однако, в данном случае нужно дополнительно помнить про нулевое решение (так как вот таким способом мы найдём все ненулевые решения).

Пример №7

$$\dot{x} + x^2 = t^2 - 2t$$

Частное решение находится тривиально – достаточно прибавить 1 к обеим частям уравнения, чтобы его увидеть:

$$\dot{x}_1 + x_1^2 + 1 = t^2 - 2t + 1 \iff (1-t)^2 = x_1^2 + \dot{x}_1 + 1 \implies x_1 = 1-t$$

Делаем представление через сумму (тут удобнее инвертировать z , помня про нулевое решение):

$$\begin{cases} x = 1 - t + \frac{1}{z} \\ \dot{x} = -1 - \frac{\dot{z}}{z^2} \end{cases}$$

Тогда мы сразу получаем линейный диффур:

$$\begin{aligned} \dot{z} - (2 - 2t + 0) \cdot z &= 1 \\ \dot{z} + 2(t - 1)z &= 1 \end{aligned}$$

Решаем однородное:

$$\begin{aligned} \dot{z} = 2(1-t)z &\iff \frac{dz}{z} = 2(1-t)dt \implies \int = \int \\ \ln|z| = -2\frac{(1-t)^2}{2} + C &\iff z = u \cdot \exp(-(1-t)^2), u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Вариация постоянной:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} z = u \cdot \exp(-(1-t)^2) \\ \dot{z} = \dot{u} \exp(-(1-t)^2) + 2u \cdot (1-t) \cdot \exp(-(1-t)^2) \end{cases} \\ \dot{u} \exp(-(1-t)^2) + 2u \cdot (1-t) \cdot \exp(-(1-t)^2) + 2(t-1) \cdot u \cdot \exp(-(1-t)^2) &= 1 \\ \dot{u} \exp(-(1-t)^2) = 1 &\iff \dot{u} = \exp((1-t)^2) \iff u = \int \exp((1-t)^2) \end{aligned}$$

Осталось подставить выражение для z и получить общее решение:

$$\begin{aligned} z &= u \cdot \exp(-(1-t)^2) = \exp(-(1-t)^2) \cdot \int \exp((1-t)^2) \\ x &= 1 - t + \frac{\exp((1-t)^2)}{\int \exp((1-t)^2)} \end{aligned}$$

Пример №8

$$3\dot{x} + x^2 + \frac{2}{t^2} = 0$$

Здесь частное решение находится также весьма просто:

$$-3\dot{x}_1 = x_1^2 + \frac{2}{t^2} \implies x_1 = \frac{1}{t}$$

В сумму (опять инвертируем, помня про нулевое решение):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \frac{1}{z} \\ \dot{x} = -\frac{1}{t^2} - \frac{\dot{z}}{z^2} \end{cases}$$

Теперь подставим всё в диффур от z , заменив нужные функции от t :

$$3\dot{x} + x^2 + \frac{2}{t^2} = 0 \iff \dot{x} + \frac{1}{3}x^2 + 0 \cdot x + \frac{2}{t^2} = 0$$

$$\dot{z} - \frac{2}{3t} \cdot z = \frac{1}{3}$$

Решаем как однородное:

$$\dot{z} = \frac{2}{3t}z \iff \frac{dz}{z} = \frac{2}{3} \cdot \frac{dt}{t} \implies \int = \int$$

$$\ln|z| = \frac{2}{3} \cdot \ln|t| + C \iff z = u \cdot t^{\frac{2}{3}}, u \in \mathbb{R}$$

Варьируем:

$$\begin{cases} z = u \cdot t^{\frac{2}{3}} \\ \dot{z} = \dot{u}t^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot u \cdot t^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\dot{u}t^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot u \cdot t^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3t} \cdot u \cdot t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\dot{u}t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \iff \dot{u} = \frac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}} \iff u = t^{\frac{1}{3}} + C$$

Теперь можем получить общее решение:

$$z = u \cdot t^{\frac{2}{3}} = \left(t^{\frac{1}{3}} + C\right) \cdot t^{\frac{2}{3}} = t + Ct^{\frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t + Ct^{\frac{2}{3}}}$$

Два частных решения

Пусть теперь известны два частных решения уравнения Риккати: $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$. Мы знаем, что для первого решения выполнено тождество:

$$\dot{x}_1 + a(t)x_1^2 + b(t)x_1 + c(t) = 0$$

Прделаем то же представление:

$$\begin{cases} x = x_1 + z \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{z} \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 + \dot{z} + a(t)(x_1^2 + 2x_1z + z^2) + b(t)(x_1 + z) + c(t) = 0$$

$$\dot{z} + (2a(t)x_1 + b(t)) \cdot z = -a(t)z^2$$

Теперь же сделаем хитрость: поделим на z и подставим вместо него $x - x_1$:

$$\frac{\dot{z}}{z} + 2a(t)x_1 + b(t) = -a(t)z$$

$$\frac{1}{x - x_1} \cdot \frac{d(x - x_1)}{dt} + 2a(t)x_1 + b(t) = -a(t)x + a(t)x_1$$

$$\frac{1}{x - x_1} \cdot \frac{d(x - x_1)}{dt} = -a(t) \cdot (x + x_1) - b(t)$$

А сейчас начинаем колдовать: заносим дробь в левой части уравнения под дифференциал:

$$\frac{1}{x - x_1} d(x - x_1) = d \ln(x - x_1)$$

Тогда:

$$\frac{d \ln (x - x_1)}{dt} = -a(t) \cdot (x + x_1) - b(t)$$

Для второго частного решения также выполнено тождество:

$$\dot{x}_2 + a(t)x_2^2 + b(t)x_2 + c(t) = 0$$

Откуда мы аналогичным (матемагическим) способом получаем:

$$\frac{d \ln (x - x_2)}{dt} = -a(t) \cdot (x + x_2) - b(t)$$

А теперь совсем сакрально поступим: вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} \frac{d \ln (x - x_1)}{dt} = -a(t) \cdot (x + x_1) - b(t) \\ \frac{d \ln (x - x_2)}{dt} = -a(t) \cdot (x + x_2) - b(t) \end{cases} \implies \frac{d \ln \frac{x-x_1}{x-x_2}}{dt} = a(t) \cdot (x_2 - x_1)$$

— но ведь это диффур с разделяющимися переменными! Из него получаем уравнение, задающее $x = x(t)$ неявно через частные решения:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \frac{x-x_1}{x-x_2}}{dt} &= a(t) \cdot (x_2 - x_1) \\ d \ln \frac{x - x_1}{x - x_2} &= a(t) \cdot (x_2 - x_1) dt \implies \int = \int \\ \ln \frac{x - x_1}{x - x_2} + C &= \int a(t) \cdot (x_2 - x_1) dt \\ \frac{x - x_1}{x - x_2} &= \lambda \cdot \exp \left(\int a(t) \cdot (x_2 - x_1) dt \right), \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Конечно, не всегда бывает возможно угадать сразу два частных решения, однако если вам так повезло, то можно захотеть выпендриться и задать ответ формулой выше.

Пример № 9

$$\dot{x} = \frac{k^2}{t^2} - x^2, k \in \mathbb{R}$$

Частные решения:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{t} + \frac{k}{t^2} \\ x_2 = \frac{1}{t} - \frac{k}{t^2} \end{cases}$$

Тогда можем сразу получить общее решение:

$$\begin{aligned} \frac{x - \frac{1}{t} - \frac{k}{t^2}}{x - \frac{1}{t} + \frac{k}{t^2}} &= \lambda \cdot \exp \left(\int -\frac{2k}{t^2} dt \right) \\ \frac{xt^2 - x - k}{xt^2 - x + k} &= \lambda \cdot \exp \left(\frac{2k}{x} \right) \end{aligned}$$

Кому интересно, может попробовать решить этот диффур по-старинке. Авось что покрасивше выйдет. Или нет.

Домашнее задание №3

Задача №1. Решить диффур:

$$(tx + e^t) dt - t dx = 0$$

Решение.

$$\begin{aligned} tx + e^t - t\dot{x} &= 0 \\ \dot{x} - x &= \frac{e^t}{t} \\ \dot{x} = x &\iff \frac{dx}{x} = dt \implies \int = \int \\ \ln|x| = t + C &\iff x = u \cdot e^t, u \in \mathbb{R} \implies u = u(t) \\ \begin{cases} x = ue^t \\ \dot{x} = \dot{u}e^t + ue^t \end{cases} \\ \dot{u}e^t + ue^t - ue^t &= \frac{e^t}{t} \implies \dot{u}e^t = \frac{e^t}{t} \\ \dot{u} = \frac{1}{t} &\implies u = \ln|t| + C \\ x &= (\ln|t| + C) \cdot e^t \end{aligned}$$

□

Задача №2. Решить диффур:

$$t\dot{x} = x - t \cdot \exp\left(\frac{x}{t}\right)$$

Решение.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{t} - \exp\left(\frac{x}{t}\right) \\ \begin{cases} y = \frac{x}{t} \implies x = yt \\ \dot{x} = \dot{y}t + y \end{cases} \\ \dot{y}t + y &= y - e^y \iff \dot{y}t = -e^y \\ -e^{-y}\dot{y} &= \frac{dt}{t} \implies \int = \int \\ e^{-y} &= \ln|t| + C \iff t = \lambda \cdot \exp(e^{-y}), \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Далее обратная замена.

□

Задача №3. Решить диффур:

$$t\dot{x} - 2t^2 \cdot \sqrt{x} = 4x$$

Решение.

$$\begin{aligned} \dot{x} - \frac{4}{t} \cdot x &= 2t^2 \cdot \sqrt{x} \implies m = \frac{1}{2} \\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} - \frac{4}{t} \cdot \sqrt{x} &= 2t^2 \\ \begin{cases} w = \sqrt{x} \\ \dot{w} = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} \implies \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = 2\dot{w} \end{cases} \\ \dot{w} - 2\frac{w}{t} &= t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= 2\frac{w}{t} \\
\frac{dw}{w} &= 2\frac{dt}{t} \implies \int = \int \\
\ln |w| &= 2 \ln |t| + C \iff w = ut^2, u \in \mathbb{R} \implies u = u(t) \\
\begin{cases} w = ut^2 \\ \dot{w} = \dot{u}t^2 + 2ut \end{cases} \\
\dot{u}t^2 + 2ut - 2ut &= t^2 \iff \dot{u}t^2 = t^2 \\
\dot{u} &= 1 \iff u = t + C \\
w &= (t + C) \cdot t^2 = \sqrt{x} \\
x &= w^2 = (t + C)^2 \cdot t^4
\end{aligned}$$

□

Задача №4. Решить диффур:

$$t^2 \dot{x} + tx + t^2 x^2 = 4$$

Решение.

$$\begin{aligned}
\dot{x} + x^2 + \frac{x}{t} - \frac{4}{t^2} &= 0 \\
\begin{cases} x_1 = \frac{2}{t} \\ \dot{x}_1 = -\frac{2}{t^2} \end{cases} \implies -\frac{2}{t^2} + \frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^2} &= 0 \\
\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \frac{1}{z} \\ \dot{x} = -\frac{1}{t^2} - \frac{\dot{z}}{z^2} \end{cases} \implies \dot{z} - \frac{5}{t} \cdot z &= 1 \\
\dot{z} &= \frac{5}{t} \cdot z \\
\frac{dz}{z} &= 5\frac{dt}{t} \implies \int = \int \\
\ln |z| &= 5 \ln |t| + C \iff z = u \cdot t^5, u \in \mathbb{R} \implies u = u(t) \\
\begin{cases} z = ut^5 \\ \dot{z} = \dot{u}t^5 + 5ut^4 \end{cases} \\
\dot{u}t^5 + 5ut^4 - \frac{5ut^5}{t} &= 1 \iff \dot{u}t^5 = 1 \\
du &= \frac{dt}{t^5} \implies \int = \int \\
u &= -\frac{1}{4t^4} + C \\
z &= t^5 \cdot \left(-\frac{1}{4t^4} + C\right) = -\frac{t}{4} + Ct^5 \\
x &= x_1 + \frac{1}{z} = \frac{2}{t} + \frac{4}{4 \cdot Ct^5 - t}
\end{aligned}$$

□

Задача №5. Пусть x_1, x_2 – независимые частные решения линейного диффура 1 порядка:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Найти общее решение (выразить через x_1 и x_2).

Решение. Проводя манипуляции, аналогичные указанным выше для уравнения Риккати (а это оно и есть, просто многочлен при x^2 — тождественный нуль), мы получаем:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = C$$

Тут стоит отметить, что $C \neq 1$, ибо иначе x_1 и x_2 были бы зависимы.

Альтернативное решение: мы знаем, что x_1 и x_2 — оба решения данного диффура. Тогда выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 + a(t)x_1 &= b(t) \\ \dot{x}_2 + a(t)x_2 &= b(t)\end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + a(t)(x_1 - x_2) = 0$$

Следовательно, $x_1 - x_2$ (и любой подобная подобная данной функция) есть решение однородного диффура $\dot{x} + a(t)x = 0$. Тогда можем воспользоваться методом вариации постоянной:

$$\begin{aligned}x &= u \cdot (x_1 - x_2), \quad u \in \mathbb{R} \implies u = u(t) \\ \dot{x} &= \dot{u}(x_1 - x_2) + u(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ \dot{u}(x_1 - x_2) + \underbrace{u(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + a(t) \cdot u \cdot (x_1 - x_2)}_{=0} &= b(t) \\ \dot{u} &= \frac{b(t)}{x_1 - x_2}\end{aligned}$$

Можно заметить, что любое иное решение будет получаться из решения однородного уравнения сдвигом. Тогда решением будет являться многочлен:

$$C \cdot (x_1 - x_2) + x_1$$

Прямая проверка показывает, что оно совпадает с ответом выше. □

Семинар 4, 31 января

Уравнения в полных дифференциалах

Пусть есть функция $U(t, x)$ — от двух переменных. Она является собой некую кривую. Пусть она непрерывна в точке (t_0, x_0) . Сдвинемся на $(\Delta t, \Delta x)$ вдоль кривой. Новое значение функции можно записать так:

$$U(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x) = U(t_0, x_0) + U'_{t_0, x_0} \cdot (\Delta t, \Delta x) + o(\Delta t, \Delta x)$$

где

$$U'_{t_0, x_0} = \left(\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

— вектор частных производных (по факту, это вектор в сопряжённом пространстве к нашему в базисе (dt, dx)).

Можно записать полный дифференциал функции U :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx$$

Предположим теперь, что на каком-то промежутке наша функция принимает константное значение: $U(t, x) = C$. Ясно, что в таком случае производная будет равна нулю на данном промежутке, что равносильно:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx = 0$$

Обозначим $\frac{\partial U}{\partial t} = M(t, x)$, $\frac{\partial U}{\partial x} = N(t, x)$ — функции от (t, x) .

Определение 4. *Тождество*

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0$$

где M, N — функции от (t, x) , называется **уравнением в полных дифференциалах**.

Соответственно, решить уравнение в полных дифференциалах — это найти такую функцию $U(t, x)$, что $dU = M(t, x) dt + N(t, x) dx$.

Нужно отметить, что из того, что нам на вход подали диффур вышеуказанного вида (или сводящегося к нему), ещё не следует, что это уравнение в полных дифференциалах. Для этого нужно нечто большее, чем такая запись.

Утверждение 1. *Для того, чтобы уравнение*

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0$$

было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы смешанные производные были равны, то есть:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Именно поэтому, перед тем, как решать диффур, подозреваемый в бытии уравнением в полных дифференциалах, нужно сначала проверить на равенство смешанные производные.

Теперь поговорим о самом процессе решения. Существует два его варианта — теоретический и прикладной.

Суть теоретического в том, что, как нам известно, M – это частная производная функции по t , N – частная производная по x . Логично, что, так как они обе суть производные одной и той же функции, то их **первообразные** должны совпадать. Следовательно:

$$\begin{cases} \int M \, dt = \widetilde{M}(t, x) + \varphi(x) \\ \int N \, dx = \widetilde{N}(t, x) + \psi(t) \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ – функция от x , $\psi(t)$ – функция от t . Суть в том, что $\varphi(x)$ «зашита» в $\widetilde{N}(t, x)$, как и $\psi(t)$ уже находится в $\widetilde{M}(t, x)$. Поэтому, вычислив оба интеграла, легко заметить, какие части соответствуют данным функциям.

Практически же мы будем действовать несколько иначе.

Имеем уравнение:

$$M(t, x) \, dt + N(t, x) \, dx = 0$$

Первым делом берём частную производную M и интегрируем её по t (для N и x аналогично, выбор функции зависит от удобства интегрирования):

$$U = \int M(t, x) \, dt + \varphi(x)$$

— заметим, что вместо константы мы пишем функцию от x , которая при взятии производной по t обнуляется. Теперь дифференцируем полученную функцию по x :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M(t, x) \, dt \right] + \varphi'(x) = N(t, x)$$

Отсюда получаем выражение для производной $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M(t, x) \, dt \right]$$

Стоит отметить, что части с одновременно t и x в выражении выше сократятся. Теперь находим функцию $\varphi(x)$, интегрируя полученное равенство:

$$\varphi(x) = \int \left(N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M(t, x) \, dt \right] \right) dx$$

Осталось лишь подставить в выражение для U , что мы получили в самом начале:

$$U = \int M(t, x) \, dt + \varphi(x) = \int M(t, x) \, dt + \int \left(N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M(t, x) \, dt \right] \right) dx$$

Получили итоговый ответ. Формально, должна появляться ещё константа, но ввиду того, что мы на промежутке, где функция постоянна, то в качестве C можно просто записывать левую часть уравнения выше. Тогда уравнение искомой кривой имеет вид:

$$C = \int M(t, x) \, dt + \int \left(N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M(t, x) \, dt \right] \right) dx$$

Немного про интегрирование. Когда мы интегрируем частную производную, мы делаем эдакое *частное интегрирование*, считая ту переменную, по которой НЕ интегрируем, константой. Кроме того, несмотря на то, что мы берём первообразную, константа также не записывается – все константы перейдут в левую часть уравнения, составляя значение функции.

Пример №1

$$2tx \, dt + (t^2 - x^2) \, dx = 0$$

Проверим, действительно ли это УПД:

$$\begin{cases} (2tx)'_x = 2t \\ (t^2 - x^2)'_t = 2t \end{cases}$$

И правда, оно. Действуем практическим методом:

$$U = \int 2tx \, dt = xt^2 + \varphi(x)$$

$$U'_x = t^2 + \varphi'(x) = t^2 - x^2 \iff \varphi'(x) = -x^2 \implies \varphi(x) = -\frac{x^3}{3}$$

$$U = xt^2 + \varphi(x) = xt^2 - \frac{x^3}{3} = C$$

Теперь посмотрим, как решать теоретическим:

$$\begin{cases} \int 2tx \, dt = xt^2 + \varphi(x) \\ \int (t^2 - x^2) \, dx = xt^2 - \frac{x^3}{3} + \psi(t) \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi(x) = -\frac{x^3}{3} \\ \psi(t) = 0 \end{cases}$$

Обе функции φ и ψ мгновенно находятся после взятия интегралов. Конечно, этот метод существенно быстрее и изящнее (в практическом мы делаем много лишних действий), но во многих уравнениях увидеть эти составляющие может быть не так легко.

Пример №2

$$3t^2(1 + \log x) \, dt - \left(2x - \frac{t^3}{x}\right) \, dx = 0$$

Проверка:

$$\begin{cases} [3t^2(1 + \log x)]'_x = \frac{3t^2}{x} \\ -\left(2x - \frac{t^3}{x}\right)'_t = \frac{3t^2}{x} \end{cases}$$

Решаем:

$$\begin{aligned} U &= \int (3t^2 + 3t^2 \log x) \, dt = t^3 + t^3 \cdot \log x + \varphi(x) \\ U'_x &= \frac{t^3}{x} + \varphi'(x) = -2x + \frac{t^3}{x} \iff \varphi'(x) = -2x \implies \varphi(x) = -x^2 \\ U &= t^3 + t^3 \cdot \log x + \varphi(x) = t^3 + t^3 \cdot \log x - x^2 = C \end{aligned}$$

Банальный факт, но не стоит рассчитывать, что диффур, являющийся УПД, будет записан в стандартном для УПД виде.

Пример №3 Решить задачу Коши:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} = \frac{2t\dot{x}}{x^3}, \quad \text{начальное условие: } x(1) = 1$$

Перед проверкой, разумно преобразовать к классическому виду УПД:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} = \frac{2t \, dx}{x^3 \, dt} \iff \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} \right) dt = \frac{2t}{x^3} dx \iff \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} \right) dt - \frac{2t}{x^3} dx = 0$$

Проверка:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} \right)'_x = -\frac{2}{x^3} \\ \left(-\frac{2t}{x^3} \right)'_t = -\frac{2}{x^3} \end{cases}$$

Частные производные равны, значит, это УПД. Будем решать. В данном случае удобнее проинтегрировать по x :

$$\begin{aligned} U &= \int -\frac{2}{x^3} dx = \frac{t}{x^2} + \psi(t) \\ U'_t &= \frac{1}{x^2} + \psi'(t) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} \iff \psi'(t) = -\frac{2}{t} \implies \psi(t) = \log\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ U &= \frac{t}{x^2} + \psi(t) = \frac{t}{x^2} + \log\left(\frac{1}{t^2}\right) = C \end{aligned}$$

Начальное условие:

$$x(1) = 1 + \log 1 = C = 1$$

Итоговый ответ:

$$\frac{t}{x^2} + \log\left(\frac{1}{t^2}\right) = 1$$

Группировка

Этот приём относится скорее к общим методам решения диффуров, нежели конкретно к УПД. Однако, часто именно здесь он хорошо выстреливает.

Пускай имеем уравнение

$$M(t, x) \, dt + N(t, x) \, dx = 0$$

Допустим, что функция N представима в виде суммы: $N = P + Q$. Тогда дифференциал распишется по линейности:

$$M \, dt + P \, dx + Q \, dx$$

Пускай нам повезло, и существует такая функция $K = K(t, x)$, что:

$$dK = M \, dt + P \, dx$$

Тогда исходный диффур мы можем переписать так:

$$dK + Q \, dx = 0$$

Понятно, что аналогичные действия можно проделать и для функции M , также перегруппировав её по частям с N в один дифференциал. Конечно, мы рассмотрели весьма идеалистичный случай, так как зачастую вот прям в таком виде функции редко можно перегруппировать. Часто требуется дополнительно применить функцию ко всему уравнению, чтобы получился дифференциал (то бишь умножить обе части на что-то, поделить и так далее).

Этот приём бывает очень полезен, так как позволяет массу диффуров решать быстро и изящно. Стоит отметить, что по факту $dK = -Q \, dx$ – это какой-то новый диффур, который можно решить просто интегрированием обеих частей. Но законно это делать если и только

если функция справа – от одного переменного. Иначе опять придётся париться с остаточной частью φ или ψ , как выше.

Пример №4

$$x \, dt - (xt^3 + t) \, dx = 0$$

Раскроем скобки и переставим пару слагаемых:

$$x \, dt - t \, dx - xt^3 \, dx = 0$$

Два левых слагаемых так и просятся в одну функцию. Чтобы её увидеть, поделим уравнение на t^2 :

$$\frac{x \, dt - t \, dx}{t^2} - tx \, dx = 0$$

Заметим, что $\frac{x \, dt - t \, dx}{t^2}$ – это производная функции $-\frac{x}{t}$. Тогда:

$$\begin{aligned} -d\frac{x}{t} - tx \, dx &= 0, \quad y = \frac{x}{t} \implies t = \frac{x}{y} \\ \dot{y} &= -\frac{x^2}{y} \, dx \iff y \, dy = -x^2 \, dx \implies \int = \int \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^3}{3} + C \\ \frac{x^2}{2t^2} &= -\frac{x^3}{3} + C \iff x^2 = -\frac{2}{3} \cdot t^2 x^3 + C \end{aligned}$$

Пример №5

$$(t^2 + x^2 + x) \, dt - t \, dx = 0$$

Этот пример весьма похож на предыдущий:

$$\begin{aligned} (t^2 + x^2) \, dt + (x \, dt - t \, dx) &= 0 \\ \left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right) \, dt &= d\frac{x}{t}, \quad y = \frac{x}{t} \\ (1 + y^2) \, dt &= dy \iff dt = \frac{dy}{1 + y^2} \implies \int = \int \\ t &= \arctan(y) + C \iff t = \arctan\left(\frac{x}{t}\right) + C \end{aligned}$$

Ниже будут приведены гораздо более интересные применения группировки.

Метод интегрирующего множителя

Всё бы хорошо, да случаются ситуации, когда смешанные производные могут не совпасть. Интересно, но в таких ситуациях иногда можно подобрать так называемый «интегрирующий множитель». Пусть у нас есть уравнение:

$$M(t, x) \, dt + N(t, x) \, dx = 0$$

не являющееся УПД, то есть $M'_x \neq N'_t$. Тогда, если M и N таковы, что ни в какой точке рассматриваемого промежутка не обращаются в ноль одновременно:

$$\nexists (t_0, x_0) \mid M^2(t_0, x_0) + N^2(t_0, x_0) = 0$$

то существует такая функция $\mu(t, x)$, что тождество:

$$\mu(t, x) \cdot M(t, x) dt + \mu(t, x) \cdot N(t, x) dx = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах (смешанные производные соответствующих частей будут совпадать). Эта функция, $\mu(t, x)$ и называется **интегрирующим множителем**.

Поанализируем немного эту функцию. Из определения имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu N) \iff N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) \cdot \mu$$

Откуда:

$$N \cdot \frac{\partial \log \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

Такая вот штука называется **уравнением в частных производных**.

Сразу же отмечу: решить уравнение на интегрирующий множитель часто есть задача **гораздо сложнее**, нежели решить сам диффур. Поэтому, как говорят великие математики, «Решать его мы конечно не будем».

Вместо этого мы будем *угадывать* интегрирующий множитель. Благо в некоторых частных случаях это сделать относительно легко. Однако, иногда его-таки возможно найти напрямую.

Общая идея

Пускай имеем тождество

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0$$

и уравнение на интегрирующий множитель:

$$N \cdot \frac{\partial \log \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

Предположим, что интегрирующий множитель $\mu = \mu(t)$ – функция только от t . Тогда $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ и уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \log \mu}{\partial t} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)$$

В таком случае для существования интегрирующего множителя $\mu = \mu(t)$, зависящего только от t , необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения выше была функцией только от t . Тогда легко найти саму μ , решив обычный диффур с разделяющимися переменными.

Аналогично, если предположить, что интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$ – функция только от x , то $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ и уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} \right)$$

В таком случае для существования интегрирующего множителя $\mu = \mu(x)$, зависящего только от x , необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения выше была функцией только от x .

Как видите, решить уравнение на интегрирующий множитель не так уж и сложно, если попался хороший диффур. Часто в УПД нужны именно однопеременные функции. Существует ещё один интересный случай, который немногим сложнее вышеуказанных.

Имеем уравнение:

$$N \cdot \frac{\partial \log \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

Пускай интегрирующий множитель $\mu = \mu(\nu(t, x))$ — функция от одного переменного $\nu = \nu(t, x)$, который в свою очередь является функцией от t и x . Новая функция может быть, к примеру:

$$\nu = \frac{t}{x}, \nu = tx, \nu = t^2 + x^2, \nu = t + x$$

Так как интегрирующий множитель — функция от одной переменной ν , то он может быть также найден из диффура:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \nu} = \frac{\partial \log \mu}{\partial \nu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N \frac{\partial \nu}{\partial t} - M \frac{\partial \nu}{\partial x}}$$

где правая часть, как бы то странно ни было, зависит только от ν . Так мы сможем найти множитель напрямую! Разберём несколько примеров, где сначала просто поугадываем.

Пример №6

$$x \, dt + (x + \tan(t + x)) \, dx = 0$$

Проверим смешанные производные:

$$\begin{cases} (x)'_x = 1 \\ (x + \tan(t + x))'_t = \frac{1}{\cos^2(t + x)} \end{cases}$$

Давайте подумаем, какой может быть интегрирующий множитель. Внимательный читатель может заметить, что $\mu = \cos(t + x)$ нам подходит. Проверим:

$$\begin{aligned} x \cos(t + x) \, dt + (x \cos(t + x) + \sin(t + x)) \, dx &= 0 \\ \begin{cases} [x \cos(t + x)]'_x = \cos(t + x) - x \sin(t + x) \\ [x \cos(t + x) + \sin(t + x)]'_t = -x \sin(t + x) + \cos(t + x) \end{cases} \end{aligned}$$

Отлично! Теперь смешанные производные совпадают. Значит, можно решать традиционными методами. Будем интегрировать производную по t , так как она проще:

$$\begin{aligned} U &= \int x \cos(t + x) \, dt = x \sin(t + x) + \varphi(x) \\ U'_x &= \sin(t + x) + x \cos(t + x) + \varphi'(x) = x \cos(t + x) + \sin(t + x) \iff \varphi'(x) = 0 \iff \varphi(x) = 0 \\ U &= x \sin(t + x) + \varphi(x) = x \sin(t + x) = C \end{aligned}$$

Я специально написал, что функция $\varphi(x) = 0$, уже складировав её значение в итоговый ответ.

Пример №7

$$(t + x^2) \, dt - 2tx \, dx = 0$$

Проверим смешанные производные:

$$\begin{cases} (t + x^2)'_x = 2x \\ (-2tx)'_t = -2x \end{cases}$$

Вообще говоря, в данном случае можно и угадать интегрирующий множитель. Но для примера, выведем его при помощи решения диффура. Будем искать функцию только от t :

$$\begin{aligned} M &= t + x^2, \quad N = -2tx \\ \frac{\partial \log \mu}{\partial t} &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{2x + 2x}{-2tx} = -\frac{2}{t} \\ \log \mu &= -2 \log |t| \iff \mu = \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Легко и непринуждённо, почти без всякой интуиции (но вообще повезло, что тут и вправду только от t зависит). Теперь решаем УПД:

$$\begin{aligned} \frac{t + x^2}{t^2} dt - 2 \frac{tx}{t^2} dx &= 0 \\ \frac{dt}{t} + \frac{x^2 dt}{t^2} - \frac{2tx dx}{t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользуемся приёмом группировки, объединив два последних слагаемых левой части:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{t} - \frac{2tx dx - x^2 dt}{t^2} &= 0 \iff \frac{dt}{t} - d \left(\frac{x^2}{t} \right) = 0 \iff d \left(\log t - \frac{x^2}{t} \right) = 0 \\ \log t &= \frac{x^2}{t} + C \iff t = \lambda \cdot \exp \left(\frac{x^2}{t} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

В последних действиях было удобнее занести функцию под дифференциал по линейности, чтобы долго не считать диффур с разделяющимися переменными, а сразу получить ответ.

Пример №8

$$2tx \log x dt + \left(t^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 1} \right) dx = 0$$

Проверим смешанные производные:

$$\begin{cases} (2tx \log x)'_x = 2t \log x + 2t \\ \left(t^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 1} \right)'_t = 2t \end{cases}$$

Здесь так сходу его и не назовёшь. Будем опять действовать методом научного тыка, но обоснованного – положим $\mu = \mu(x)$. Тогда рассмотрим выражение, отвечающее данной функции:

$$\begin{aligned} M &= 2tx \log x, \quad N = t^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 1} \\ \frac{\partial \log \mu}{\partial x} &= \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) = \frac{2t - 2t(\log x + 1)}{2tx \log x} = -\frac{1}{x} \\ \log \mu &= -\log x \iff \mu = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Теперь решаем уравнение в полных дифференциалах:

$$\begin{aligned} \frac{2tx \log x}{x} dt + \frac{t^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 1}}{x} dx &= 0 \\ 2t \log x dt + \frac{t^2}{x} dx + x \sqrt{x^2 + 1} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь опять удобно применить группировку, объединив первое и второе слагаемое под один дифференциал.

$$\begin{aligned} d(t^2 \log x) + x\sqrt{x^2 + 1} dx &= 0 \iff d(t^2 \log x) = -x\sqrt{x^2 + 1} dx \\ t^2 \log x &= - \int x\sqrt{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 + 1} dx^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \\ t^2 \log x + \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} &= C \end{aligned}$$

Здесь опять проще схитрить, сразу же взяв интеграл от правой части, так как слева получаем чистый дифференциал. Стоит отметить, что делать так законно тогда и только тогда, когда в другой части уравнения у нас функция от **одного** переменного, поэтому и можем спокойно интегрировать. Как видим, вывести интегрирующий множитель в частных случаях довольно-таки просто.

Всё же замечу, что у нас так хорошо всё получилось лишь потому, что наше предположение оправдалось – выражения с M и N в правых частях уравнений получались от одной переменной – той, на которую мы делали ставку. Если вдруг получится опять функция от нескольких переменных, то значит, интегрирующий множитель имеет иную природу.

Алгоритм решения

Обобщим алгоритм действий на проверку диффура и поиск интегрирующего множителя:

1. Вычисляем смешанные производные $\frac{\partial M}{\partial x}$ и $\frac{\partial N}{\partial t}$, проверяем на равенство.
2. Если они не равны, то смотрим на разность:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

3. Пробуем делить её на N и на M . Если в каком-то из случаев получилась функция только от t или только x соответственно, то значит, всё хорошо, и мы нашли интегрирующий множитель (аккуратнее со знаками!).
4. Если не сработало, то пробуем применить интегрирующий множитель $\nu = \nu(t, x)$, поделив разность на $N \frac{\partial \nu}{\partial t} - M \frac{\partial \nu}{\partial x}$. Если получилась функция только от ν – успех.
5. Если не сработал ни один из вариантов выше – закрываем глаза и ждём providения.

Разберём ещё несколько примеров, чтобы закрепить методу.

Пример №9

$$(t - \cos x) dt - \sin x dx = 0$$

Работаем по алгоритму:

$$\begin{cases} (t - \cos x)'_x = \sin x \\ (-\sin x)'_t = 0 \end{cases}$$

Увы, но это не УПД. Теперь рассмотрим разность:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = \sin x$$

Хочется на что-то поделить, к примеру, на N :

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = -\frac{\sin x}{\sin x} = -1$$

– успех, ведь выражение зависит только от t (фактически, вообще ни от чего не зависит, но так как мы делили на N , то нам важна именно независимость от x – можем повыражать через t с нулевыми коэффициентами). Таким образом, мы можем найти интегрирующий множитель $\mu = \mu(t)$:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial t} = -1 \iff \log \mu = -t \implies \mu = \exp(-t)$$

Теперь решаем исходный диффур:

$$\exp(-t) \cdot (t - \cos x) dt - \exp(-t) \cdot \sin x dx = 0$$

$$U = - \int \exp(-t) \cdot \sin x dx = \exp(-t) \cdot \cos x + \psi(t)$$

$$U'_t = -\exp(-t) \cdot \cos x + \psi'(t) = \exp(-t) \cdot t - \exp(-t) \cdot \cos x$$

$$\psi'(t) = \exp(-t) \cdot t \iff \psi(t) = \int \exp(-t) \cdot t dt = -t \exp(-t) + \int \exp(-t) dt = -t \exp(-t) - \exp(-t)$$

$$U = \exp(-t) \cdot \cos x + \psi(t) = \exp(-t) \cdot \cos x - t \exp(-t) - \exp(-t) \\ \exp(-t) \cdot (\cos x - t - 1) = C$$

Пример №10

$$(tx^2 - 2x^3) dt + (3 - 2tx^2) dx = 0$$

Шаг первый:

$$\begin{cases} (tx^2 - 2x^3)'_x = -2xt - 6x^2 \\ (3 - 2tx^2)'_t = -2x^2 \end{cases}$$

Теперь вычислим разность:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = 2tx - 4x^2$$

Поделим-ка выражение на M :

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{2tx - 4x^2}{tx^2 - 2x^3} = \frac{2(tx - 2x^2)}{x(tx - 2x^2)} = \frac{2}{x}$$

— зависит только от x , поэтому интегрирующий множитель μ будет также функцией только от x . Находим его:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) = -\frac{2}{x} \\ \log \mu = -2 \log |x| \implies \mu = \pm \frac{1}{x^2}$$

Знак не имеет значения, так как обе частных производных меняют знак одновременно. Осталось умножить обе части уравнения на интегрирующий множитель. Здесь стоит сделать оговорку, ибо мы теряем таким образом решение $x = 0$ (проверьте!). Запоминаем его и решаем исходный диффур:

$$(t - 2x) dt + \left(\frac{3}{x^2} - 2t \right) dx = 0$$

$$U = \int (t - 2x) dt = \frac{t^2}{2} - 2tx + \varphi(x)$$

$$U'_x = -2t + \varphi'(x) = \frac{3}{x^2} - 2t \iff \varphi'(x) = \frac{3}{x^2} \implies \varphi(x) = -\frac{3}{x}$$

$$U = \frac{t^2}{2} - 2tx + \varphi(x) = \frac{t^2}{2} - 2tx - \frac{3}{x} = C$$

Пример №11

$$(tx + 1) dt + t^2 dx = 0$$

Проверяем:

$$\begin{cases} (tx + 1)'_x = t \\ (t^2)'_t = 2t \end{cases}$$

Далее:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = -t$$

Заметим, что деление на M и N не даст соответствующих нужных результатов. Придётся пробовать искать интегрирующий множитель как сложную функцию. Для этого нужно, чтобы для некоторой функции ν выражение $N \frac{\partial \nu}{\partial t} - M \frac{\partial \nu}{\partial x}$ было функцией желательно того же порядка, что и разность смешанных производных. Всё это нужно для того, чтобы итоговое частное двух разностей было функцией только от ν – в идеале вообще константой. Пускай мы хотим получить знаменатель такой же, как числитель – $-x$. Но тогда можно увидеть, что функция $\nu = tx$ прекрасно подходит:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial t} &= x, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = t \\ N \frac{\partial \nu}{\partial t} - M \frac{\partial \nu}{\partial x} &= t^2 \cdot x - (tx + 1) \cdot t = t^2 x - t^2 x - x = -x \end{aligned}$$

Тогда получаем:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \nu}{\partial t} - M \frac{\partial \nu}{\partial x}} = \frac{-x}{-x} = 1$$

— функция зависит только от ν (так как не зависит ни от чего). Следовательно, функция $\nu = tx$ подходит. Тогда можем найти и сам интегрирующий множитель:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial \nu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \nu}{\partial t} - M \frac{\partial \nu}{\partial x}} = 1 \iff \log \mu = \nu \implies \mu = \exp(tx)$$

Теперь можно решать и сам диффур:

$$\begin{aligned} (tx + 1) \exp(tx) dt + t^2 \exp(tx) dx &= 0 \\ U &= \int t^2 \exp(tx) dx = t^2 \int \exp(tx) dx = t^2 \cdot \frac{1}{t} \cdot \exp(tx) + \psi(t) = t \exp(tx) + \psi(t) \\ U'_t &= 1 \cdot \exp(tx) + xt \cdot \exp(tx) + \psi'(t) = tx \exp(tx) + \exp(tx) \iff \psi'(t) = 0 \implies \psi(t) = 0 \\ U &= t \exp(tx) + \psi(t) = t \exp(tx) = C \end{aligned}$$

Группировка в смысле поиска интегрирующего множителя

Если сразу найти интегрирующий множитель не удастся, то можно попытаться сгруппировать члены уравнения, находя интегрирующие множители по частям. Пусть мы имеем уравнение:

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0$$

Разобьём его на сумму слагаемых:

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = M_1 dt + N_1 dx + M_2 dt + N_2 dx + M_3 dt + N_3 dx + \dots$$

Пусть мы нашли интегрирующий множитель μ_1 для **первого** слагаемого:

$$\mu_1 M_1 dt + \mu_1 N_1 dx = dU_1$$

Умножим тогда на μ_1 всё уравнение:

$$\begin{aligned}\mu_1(M(t, x) dt + N(t, x) dx) &= \mu_1(M_1 dt + N_1 dx) + \mu_1(M_2 dt + N_2 dx) + \mu_1(M_3 dt + N_3 dx) + \dots = \\ &= dU_1 + \mu_1(M_2 dt + N_2 dx) + \mu_1(M_3 dt + N_3 dx) + \dots = 0\end{aligned}$$

Далее следует найти (будем честны: подобрать) такую функцию $\chi_1 = \chi_1(U_1)$, чтобы при умножении на неё **второе** слагаемое новой суммы стало полным дифференциалом:

$$\mu_1 \chi_1(U_1) \cdot (M_2 dt + N_2 dx) = dU_2$$

Домножим теперь всё уравнение на этот интегрирующий множитель (да-да, это именно он!). Стоит отметить, что первое слагаемое при этом останется полным дифференциалом:

$$\chi_1(U_1) dU_1 = d\left(\int \chi_1(U_1) dU_1\right) = dW_1$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\mu_1 \chi_1(U_1) \cdot (M(t, x) dt + N(t, x) dx) &= dW_1 + dU_2 + \mu_1 \chi_1(U_1) \cdot (M_3 dt + N_3 dx) + \dots = \\ &= d(W_1 + U_2) + \mu_1 \chi_1(U_1) \cdot (M_3 dt + N_3 dx) + \dots = 0\end{aligned}$$

Далее опять подбираем такой множитель $\chi_2 = \chi_2(W_1 + U_2)$, что при умножении на него следующее слагаемое станет полным дифференциалом. И так далее, пока все выражение не превратится в один огромный полный дифференциал!

Замечание: на практике так вообще не факт, что получится, но в теории вполне возможно так сделать.

Пример №12

$$2t dx + x dt + tx^2(t dx + x dt) = 0$$

Раскроем скобки, переупорядочим и поделим на tx^2 :

$$t dx + x dt + \frac{dt}{tx} + \frac{2 dx}{x^2} = 0$$

Заметим, что первые два члена составляют полный дифференциал: $t dx + x dt = d(tx)$. Подставляем:

$$d(tx) + \frac{dt}{tx} + \frac{2 dx}{x^2} = 0$$

Теперь нужно подобрать такую функцию от tx , чтобы оставшееся выражение стало полным дифференциалом. Принеся в жертву ягнёнка, мы получаем указание: поделить уравнение на tx . Конечно, мы теряем решения $x = 0$ и $t = 0$ – жертвы ягнёнка оказалось недостаточно. Уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{d(tx)}{tx} + \frac{dt}{t^2 x^2} + \frac{2 dx}{tx^3} &= 0 \\ \frac{d(tx)}{tx} - \frac{1}{x^2} d\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} d\left(\frac{1}{x^2}\right) &= 0 \\ d(\log |tx|) - d\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{x^2}\right) &= 0 \quad \text{ygap} \\ d\left(\log |tx| - \frac{1}{tx^2}\right) &= 0 \\ \log |tx| - \frac{1}{tx^2} &= C\end{aligned}$$

Красота, не правда ли?) Осталось записать итоговый ответ – полученная кривая и два мученика – $x = 0$ и $t = 0$. Замечу, что для успешного применения данного метода нужна железная воля и нерушимая вера в светлое будущее.

Домашнее задание №4

Задача №1. Решить диффур:

$$(2 - 9x^2t) \cdot t \, dt + (4x^2 - 6t^3) \cdot x \, dx = 0$$

Задача №2. Решить диффур:

$$\frac{x}{t} \, dt + (x^3 + \ln t) \, dx = 0$$

Задача №3. Решить диффур:

$$tx^2(tx + x) = 1$$

Задача №4. Решить диффур:

$$x \, dx = (t \, dx + x \, dt) \sqrt{1 + x^2}$$

Задача №5. Решить диффур:

$$(t^2 + 2xt) \, dx + (xt + 1) \, dt = 0$$

Common Tasks

1. Найти все гладкие функции $x(t)$ такие, что для любой точки $t_0 \in \mathbb{R}$ касательная к $x(t)$ в точке $(t_0, x(t_0))$ пересекает ось абсцисс в точке $\frac{t_0}{2}$.

2. Найти дифференциальное уравнение первого порядка, задающее на плоскости семейство парабол $x = at^2 + bt + c$, проходящих через точку $(0,1)$ и касающихся прямой $x = t$.

3. Решить диффур:

$$\frac{t}{x}\dot{x} = \ln x - \ln t + 1$$

4. Решить задачу Коши:

$$\dot{x} = \frac{1}{2x} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{t}\right) + \frac{x}{2t}, \quad \text{начальное условие: } x(1) = 1$$

5. Решить диффур:

$$(t+1)(x\dot{x} - 1) = x^2$$

6. Решить задачу Коши:

$$\dot{x} - 2tx + x^2 = 5 - t^2, \quad \text{начальное условие: } x(0) = 0$$

7. Решить задачу Коши:

$$\dot{x} = \frac{1+x-x^2e^t}{2xe^t-t}, \quad \text{начальное условие } x(0) = -1$$

8. Решить диффур:

$$(\sin t + x \cot t) dt + \left(\frac{x^2}{\sin t} + 1 \right) dx$$