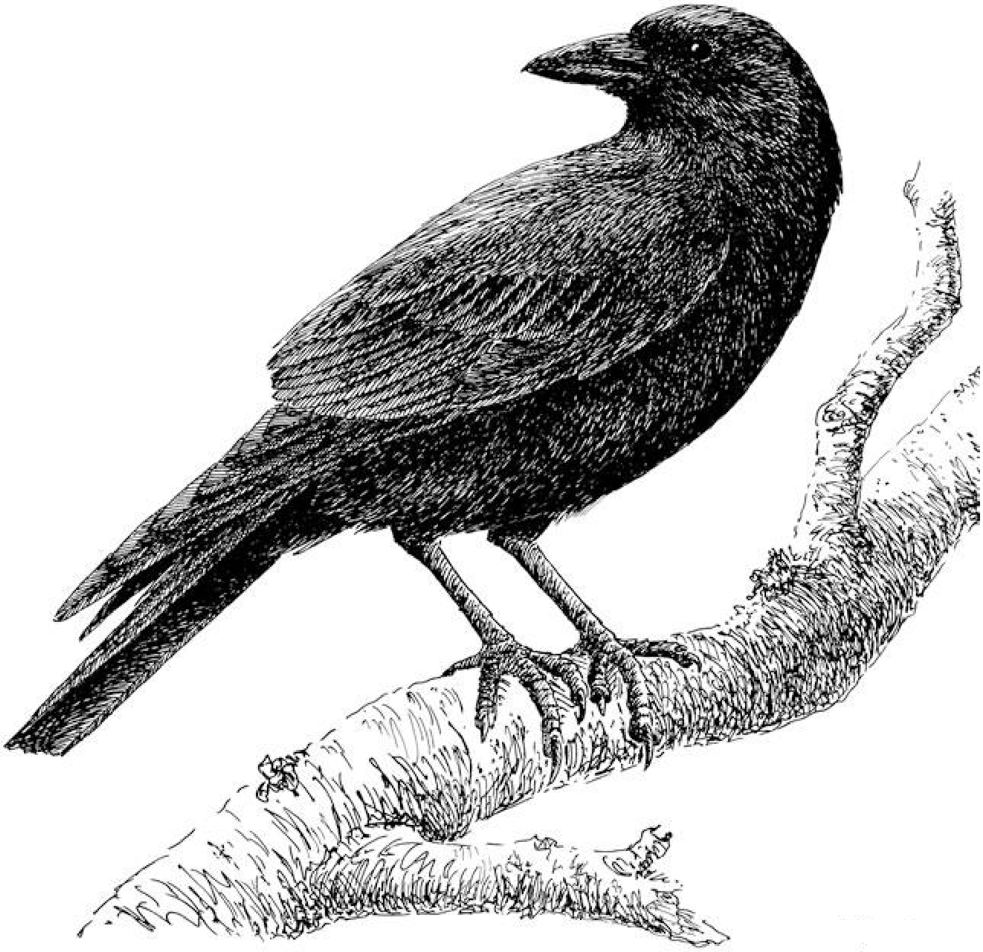


Теория вероятностей

Конспекты лекций и семинаров

Лектор: Д.А. Шабанов

Конспекты вели Денис Беляков, Никита Попов и Алексей Хачиянц

НИУ ВШЭ, 2016-2017

Оглавление

Глава 1

Дополнительные главы теории вероятностей

1.1 Лекция от 24.01.2017

> «На прошлой лекции Дмитрий Александрович запнулся, на этой посмотрел записи. Ну всё, действительно сложный ТеорВер начался.»
>
> Один из слушателей

1.1.1 Случайные процессы

Определение 1. Пусть есть множество T (неформально оно обозначает время). Набор случайных величин $\{x_t, t \in T\}$ будем называть *случайным процессом.*

Примечание. То, что написано в определении, на самом деле, называется *случайной функцией*, но для определенности оставим определение в таком же виде, потому что в основном будем использовать $T \subseteq \mathbb{R}$, что уже действительно является случайным процессом по определению во многих учебниках.

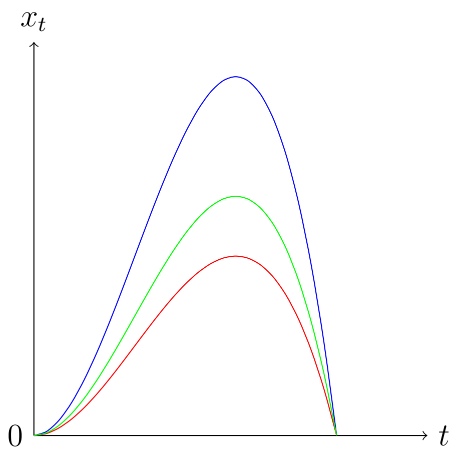
Определение 2. Классифицируем случайные процессы:

- если $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ — случайный процесс с дискретным временем.
- если $T = [a, b], \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ — случайный процесс с непрерывным временем.
- если $T \subseteq \mathbb{R}^d, d > 1$, тогда случайный процесс будет случайным полем.

Сейчас уделим больше внимания дискретным процессам. Будем считать, что у нас задана тройка Колмогорова $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и все $x_t : \Omega \to \mathbb{R}$.

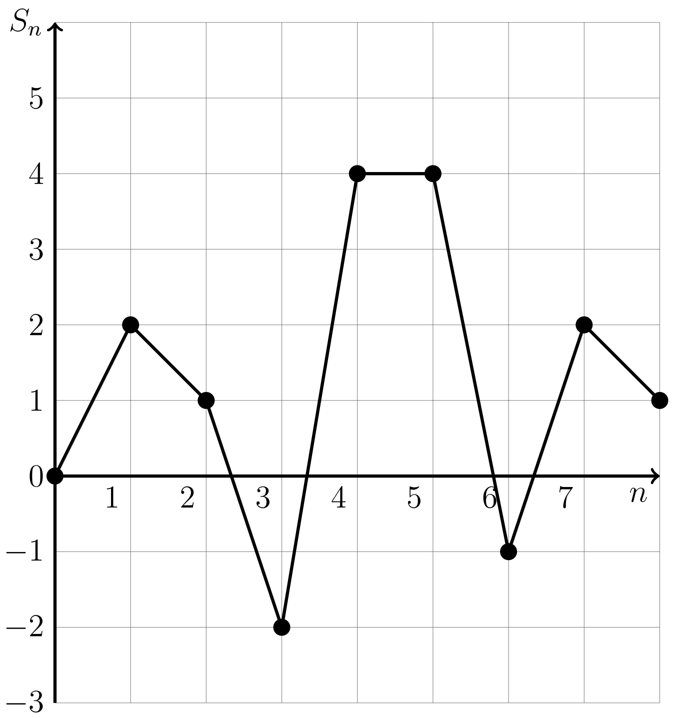
Определение 3. Для фиксированного $\omega_0 \in \Omega$ функция $\tilde{x}_t(t) = x_t(\omega_0), t \in T$ является *траекторией* (или *реализацией*) случайного процесса.

Пример. $x_t = f(t)\xi$, где $f(t)$ — какая-то функция, ξ — случайная величина. Приведем пример траекторий для некоторых ω_0.



1.1.2 Случайные блуждания

Определение 4. Пусть $\{\xi_n, \in \mathbb{N}\}$ — независимые случайные величины. Определим $S_0 = 0$, а $S_n = \xi_1 + \ldots \xi_n, n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называют *случайным блужданием.*



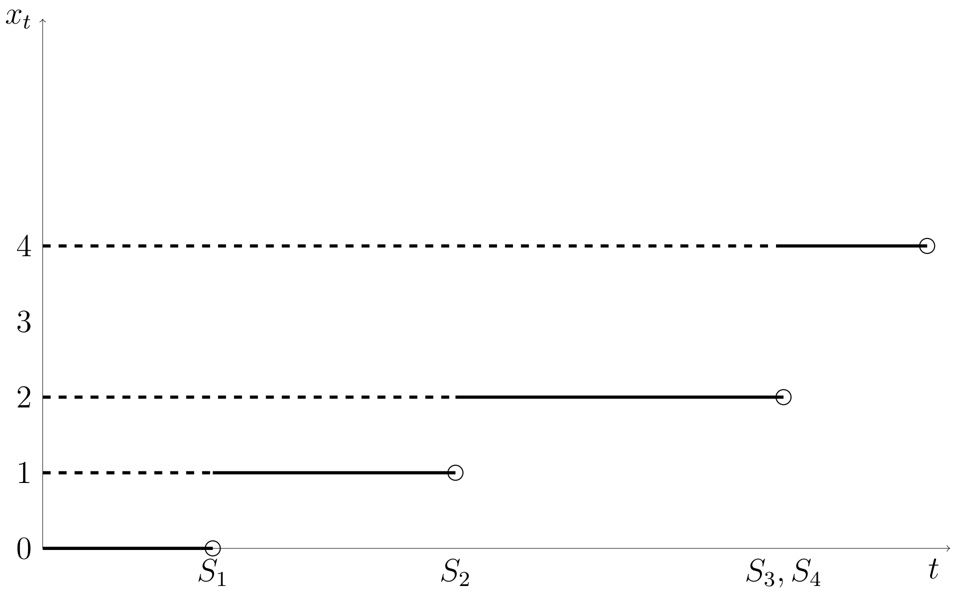
Пример. Физической моделью, соответствующую случайному блужданию, могут являться прыжки кузнечика.

1.1.3 Процесс восстановления

Определение 5. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Положим $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \ldots \xi_n, n \in \mathbb{N}$, а также для каждого $t \geqslant 0$ рассмотрим такие случайные величины: $x_t = \max\{n : S_n \leqslant t\}$ (если максимума не существует, положим $x_t = +\infty$).

Процесс $(x_t, t \geqslant 0)$ называется *процессом восстановления* для случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$.

График можно описать как-то так для какого-то ω_0:



Где возможны склеивания, как в S_3, S_4 — это лишь означает, что $\xi_4 = 0$.

Пример. Физической моделью, соответствующую процессу восстановления, может служить процесс горения лампочки, где ξ_n — общее время горения n-ой лампочки, а x_t тогда будет количеством поменянных лампочек до времени t.

Пара бы уже что-то доказать. Действительно, покажем, что мы не можем часто убегать в бесконечность. На самом деле, такие ситуации очень плохи в реальной жизни. Происходит «перенасыщение» чего-то. В примере с лампочкой, мы можем менять бесконечное число лампочек за время ноль. Такая ситуация очень плоха, поэтому, чтобы успокоиться, докажем следующее утверждение:

Теорема 1. *Процесс восстановления конечен с вероятностью один, если* $\mathsf{P}(\xi_i = 0) < 1$.

Доказательство. Пусть $t > 0$ фиксировано. $\mathsf{P}(x_t = +\infty) = \mathsf{P}(\forall n : S_n \leqslant t)$.

Заметим, что $S_n \leqslant S_{n+1}$ из-за неотрицательности ξ_{n+1}.

Выпишем тривиальное равенство пределов:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}(S_n \leqslant t) = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{t}{n}\right)$$

Есть 2 случая:

- $\mathsf{E}[\xi_i]$ конечно и равно $A > 0$ (больше нуля, так как $\mathsf{P}(\xi_i = 0) < 1$). Тогда по закону больших чисел имеем, что $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} A$ (на самом деле мы немного лукавим, потому что в основном курсе эта теорема была доказана с использованием, что все моменты до четвёртого конечны, но ЗБЧ работает и при конечности средней величины).

  Тогда продолжим равенство пределов:

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{t}{n}\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{A}{2}\right)$$

Действительно, с какого-то момента $\frac{t}{n} < \frac{A}{2}$, так как $A > 0$. Далее, из закона больших чисел получаем:

$$= \lim_{n \to +\infty} \mathsf{P}\left(A \leqslant \frac{A}{2}\right) = 0.$$

Последнее равенство идёт из-за неотрицательности A.

Поэтому $\mathsf{P}(x_t = +\infty) = 0$ в этом случае.

- $\mathsf{E}[\xi_i] = +\infty$.

  Рассмотрим $\hat{\xi}_i = \min(\xi_i, 1) \leqslant \xi_i$. Откуда сразу получаем, что $\hat{S}_n = \hat{\xi}_1 + \ldots + \hat{\xi}_n \leqslant S_n$.

  Заметим, что $\mathsf{E}\left[\hat{S}_n\right]$ конечно, так как матожидание каждого из $\hat{\xi}_i$ конечно (так как $\hat{\xi}_i \leqslant 1$).

  А значит, что $\mathsf{P}(S_n \leqslant t) \leqslant \mathsf{P}\left(\hat{S}_n \leqslant t\right)$ (так как $S_n \geqslant \hat{S}_n$, а значит, что $\hat{S}_n$ принимает меньшие значения).

  Но мы уже всё доказали для конечного матожидания $\hat{\xi}_i$, поэтому получаем, что $\mathsf{P}\left(\hat{S}_n \leqslant t\right) \to 0$, откуда и $\mathsf{P}(S_n \leqslant t) \to 0$, что нам и требуется.

$\square$

Приведём более мощный пример, обобщим эту модель.

Пример. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, притом независимы с $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Пусть $(x_t, t > 0)$ — процесс восстановления, то есть $x_t = \max\{n : \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant t\}$.

Для $y_0, c > 0 \in \mathbb{R}$ введём

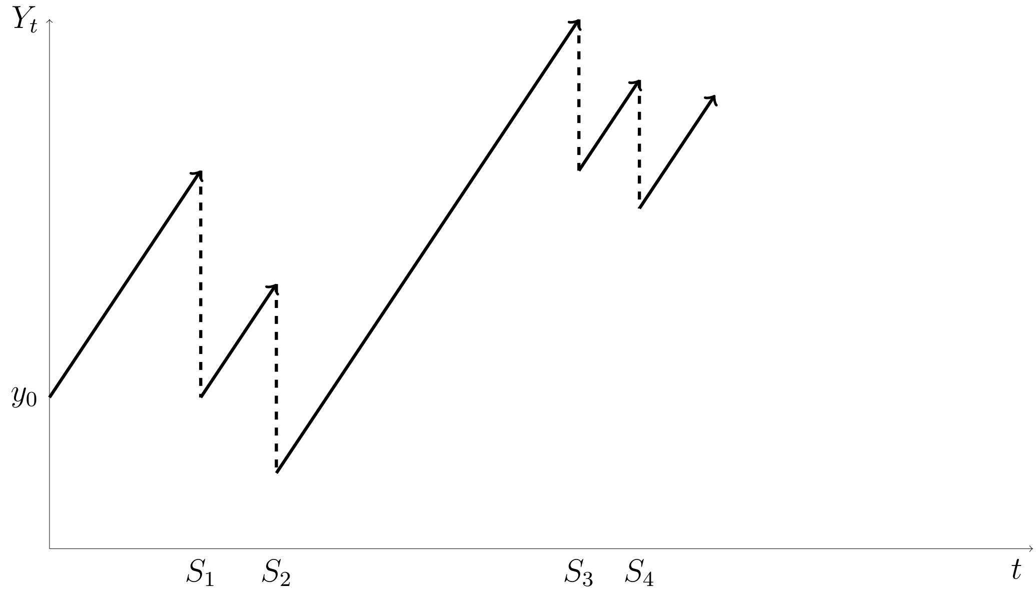
$$Y_t = y_0 + ct - \sum_{k=1}^{x_t} \eta_k$$

Эту модель называют моделью страхования Спарре-Андресена. Поясним, что значит каждая введенная переменная/величина.

- y_0 — начальный капитал.
- c — скорость поступления страховых взносов. Для простоты считают, поступление линейно, что примерно одинаково «бьются» машины в любое время года.
- η_k — размер выплаты с номером k.
- ξ_k — время между $k-1$-й и k-й выплатой.
- x_t — количество выплат к моменту времени t.
- $\sum\limits_{k=1}^{x_t} \eta_k$ — общий объём выплат по времени.
- И понятно, что тогда Y_t — текущий капитал.

В будущем, когда в нашем курсе мы затронем мартингалы, мы сможем понять и оценить, какова вероятность, что компания разорится.

Ясно, что тогда график капитала от времени будет выглядеть примерно таким образом:



1.1.4 Простые случайные блуждания

Определение 6. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что для какого-то $p \in [0, 1]$

$$\mathsf{P}(\xi_n = 1) = p, \mathsf{P}(\xi_n = -1) = 1 - p = q$$

Положим $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \ldots \xi_n, n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называют *простым случайным блужданием на прямой.*

Смысл этого определения в том, что на каждом шаге мы выбираем с какими-то вероятностями в какую сторону пойти.

Понятное дело, что этим можно не ограничиваться и, например, ходить в 4 разные стороны на плоскости. Но давайте пока разберёмся с одномерным случаем.

Определение 7. Если $p = q = \frac{1}{2}$, то говорят, что случайное блуждание симметрично.

Примечание. Не лишним будет упомянуть, что в данном случае $\mathsf{E}[S_n] = (p - q)n$. Действительно, ответ можно легко получить, если раскрыть по линейности, и воспользоваться совершенно ясным фактом, который получается из определения, что $\mathsf{E}[\xi_i] = p - q$.

Перед нами возникают достаточно интересные вопросы:

1. Какова вероятность вернуться в ноль после ненулевого количества шагов?
2. Какое среднее время мы проведем в нуле? То есть сколько в среднем раз мы окажемся в нуле при достаточно больших n.
3. Геометрия траекторий. То есть то, как выглядит график, какие существуют зависимости. Нашей кульминацией на этот вопрос будет закон повторного логарифма, который показывает, насколько далеко в среднем мы можем отходить от нуля.

Будем на все эти вопросы отвечать. Каждый из них — отдельная история, поэтому будем отвечать постепенно.

1.1.5 Возвращение в ноль в простом случайном блуждании

Легко понять, что нас интересует $\mathsf{P}(\exists\, n > 0 : S_n = 0)$.

Попробуем найти $\mathsf{P}(S_n = x)$. Во-первых, ясно, что n и x должны быть одной четности, так как иначе мы не сможем из нуля прийти в x. Также, нужно, чтобы $n \geqslant |x|$, иначе мы просто не дойдём до x, но скомпенсируем в будущем это тем, что $\binom{n}{k} = 0$ при $k > n$.

Пусть мы сделали k шагов вправо и $n - k$ шагов влево. Под шагами подразумевается $+1$ и -1 соответственно. Тогда ясно, что $k = \frac{n+x}{2}$, так как должно выполняться равенство $k - n + k = x$.

Поэтому получаем, что нам надо выбрать k ходов, ответ для данной вероятности:

$$\mathsf{P}(S_n = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} I\{n + x \text{ чётно}\}$$

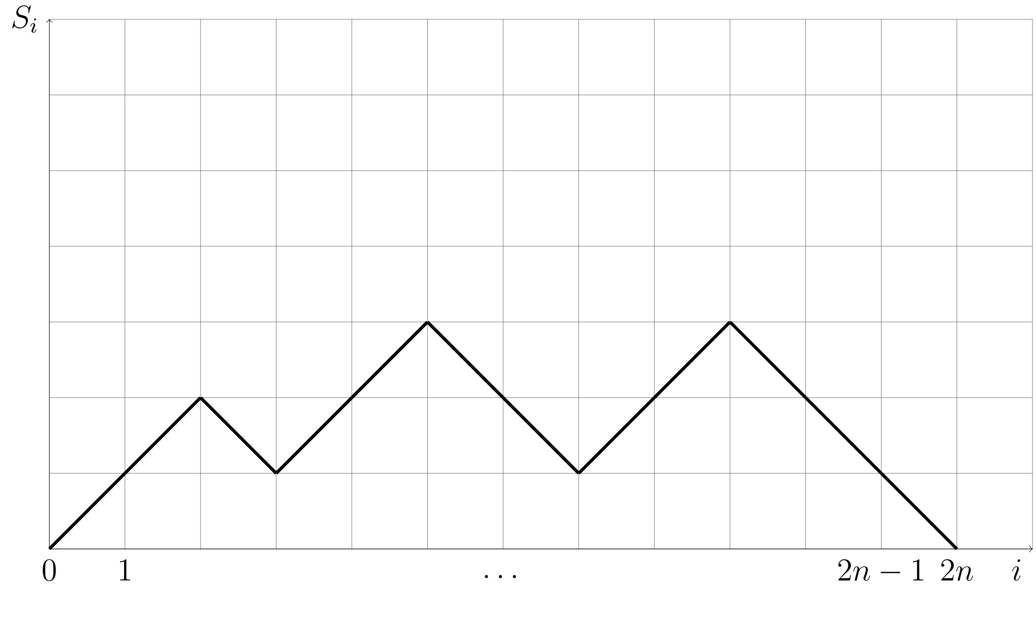
Но этого мало. Мы не сможем как-то легко посчитать вероятность существования n, что $S_n = 0$.

Поэтому давайте поймём, когда впервые достигнем нуля. Ясное дело, что нуля можно достигнуть только на четных ходах. Поэтому давайте посчитаем такую вероятность:

$$\mathsf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0)$$

Заметим, что все $S_1, \ldots, S_{2n-1}$ либо одновременно больше нуля, либо все одновременно меньше нуля, так как из-за дискретной непрерывности, если есть S_i, S_j разных знаков, то найдётся между ними ноль, что противоречит тому, что мы ищем. Так как нам надо сделать n ходов вправо и влево, эти случаи ничем не отличаются. Посчитаем вероятность, когда все $S_i > 0, i \in [2n-1]$.

Посмотрим на траектории, которые у нас могут получиться:



Теперь мы хотим посчитать все такие пути.

Обозначим через ε_i — выбор ± 1 на i-ом шаге. Тогда путь подходит тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i > 0, k \in [2n-1]$.

Обозначим количество таких путей через $\tilde{C}_n$.

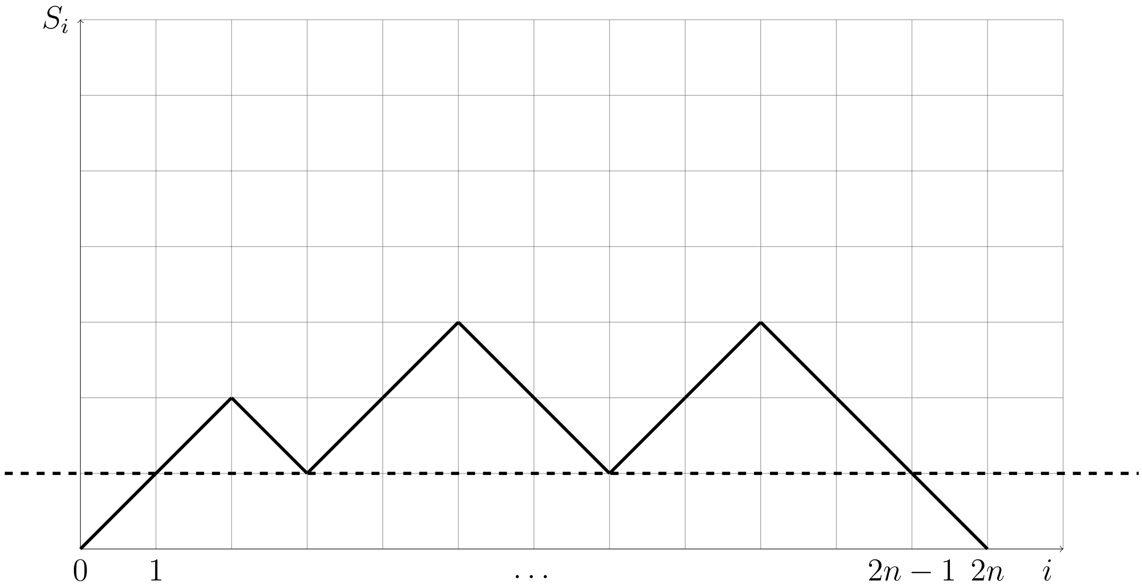
А теперь вспомним, что числа Каталана задаются практически так же. Те, кто ходил на курс дискретной математики, помнят, что есть соответствие между числами Каталана и количеством путей, отвечающим свойствам: $\sum\limits_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i \geqslant 0, k \in [2n-1]$.

Обозначим количество таких путей через C_n.

Лемма. $\tilde{C}_{n+1} = C_n$.

Доказательство. Рассмотрим любой путь, соответствующий $\tilde{C}_{n+1}$. Заметим, что первые и последние шаги обязательно $+1$ и -1 соответственно. Поэтому, при «поднятии» оси Oi на единицу мы получим, что перед нами путь из C_n, действительно, это так, так как префиксные суммы уменьшились на один и не стали отрицательными, а сумма по-прежнему сохранилась нулевая.

В другую сторону доказывается аналогично. См. иллюстрацию.



□

Получается, что

$$\mathsf{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0) = C_{n-1}(pq)^n$$

И соответственно:

$$\mathsf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = 2C_{n-1}(pq)^n$$

Внимательный читатель заметит, что чтобы посчитать самую исходную вероятность, надо просто сложить все такие выше по всем $n \in \mathbb{N}$. О том, как такие вещи складывать (в частности о характеристических функциях), мы поговорим в следующей лекции.

1.2 Лекция от 31.01.2017

1.2.1 Числа Каталана. Реккурентное соотношение. Производящая функция

Лемма. *Обозначим $C_0 = 1$, тогда имеет место следующее равенство:*

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

Доказательство. Будем опять рассуждать в терминах положительной траектории (см. рис с предыдущей лекции).

Пусть $2k > 0$ первый момент, когда наша траектория придёт в ноль. Действительно, такой момент найдётся, потому что в момент времени $2n$ мы придём в ноль.

Тогда от 0 до $2k$ положительная траектория, от $2k$ до $2n$ неотрицательная, поэтому всего таких путей $\tilde{C}_k C_{n-k}$. Чтобы получить все траектории, надо сложить все такие вещи по всем $k = 1, \ldots, n$, поэтому мы получим, что имеет место равенство по последней лемме из предыдущей лекции и тем, что $C_0 = 1$:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k C_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k} = \text{«замена } j = k-1\text{»} = \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-1-j}$$

□

Определение 8. Для последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ производящей функцией называется $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Ряд может расходится на некоторых x и тогда мы просто рассматриваем ряд формально, на них можно ввести операции сложения и прочие операции.

Заметим, что $C_n \leqslant 2^{2n}$, потому что всего путей не больше 2^{2n}, на самом деле их меньше аж примерно в $n^{3/2}$ раза, но это нам нужно для того, чтобы производящая функция чисел Каталана была такова, что при $|x| < \frac{1}{4}$ ряд сходился. Как мы потом увидим, он будет сходится и при $|x| = \frac{1}{4}$.

Сейчас мы будем рассматривать только $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ при $|x| < \frac{1}{4}$.

Теорема 2. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

Доказательство.

$$f^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right) x^n.$$

Внимательный читатель заметит, что мы в скобках в точности получили реккурентное соотношение для чисел Каталана для C_{n+1}. Поэтому это равно:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} x^n = \frac{f(x) - 1}{x}.$$

Где последнее равенство возникает из-за того, что $C_0 = 1$.

Откуда мы получаем квадратное уравнение относительно $f(x)$.

$$x f^2(x) - f(x) + 1 = 0.$$

Решая уравнение, получим, что

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Но мы знаем, что $f(0) = 1$, поэтому с плюсом не подходит, так как предел будет не тот. Откуда единственный подходящий вариант будет

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

□

Заметим, что и при $\frac{1}{4}$ мы получим конечное число, поэтому по непрерывности можно сказать, что и в $x = \frac{1}{4}$ ряд сходится.

1.2.2 Вероятность возвращения

Теорема 3. *Случайное блуждание возвратно с вероятностью* $1 - |p-q|$.

Доказательство. Заметим, что подставить pq в производящую функцию можно, так как $pq \leqslant \frac{1}{4}$.

$$\mathsf{P}(\exists n : S_n = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2C_{n-1}(pq)^n = 2pq \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (pq)^n = 2pq \frac{1}{2pq}(1 - \sqrt{1-4pq}) = \text{«так как } 1 = (p+q)^2\text{»} =$$
$$= 1 - \sqrt{(p-q)^2} = 1 - |p-q|$$

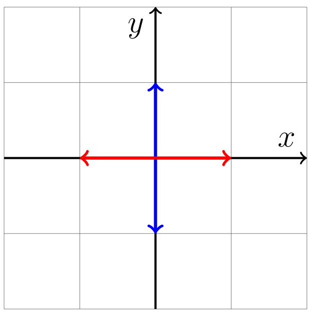
□

Примечание. Если $p = q = \frac{1}{2}$, то случайное блуждание возвратно с вероятностью один.

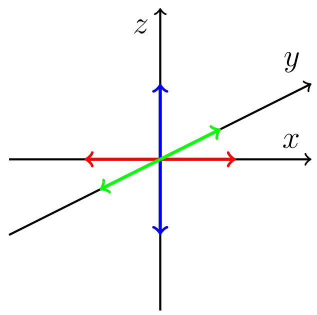
1.2.3 Многомерный случай

Абстрактно поговорим о многомерном случае. То есть мы находимся в $\mathbb{Z}^d, d > 1$.

На плоскости мы можем идти в 4 разные стороны с равными вероятностями. Как ни странно, вероятность возвращения в ноль в данном случае будет тоже равна один.



В трёхмерном случае не всё так однозначно. У нас есть шесть направлений. И в данном случае вероятность возвращения будет строго меньше единицы. С этим разобраться мы предложим читателю в будущих задачах.



На самом деле всё это зависит от $\mathsf{P}(S_{2n}=0)$. При $d=1$ и $p=q=\frac{1}{2}$ получим, что $\mathsf{P}(S_{2n}=0)=\binom{2n}{n}4^{-n}\approx\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, ряд расходится.

При $d=2$ будет $\Theta\left(\frac{1}{n}\right)$, что тоже расходится, с каждой новой размерностью добавляется этот самый $\sqrt{n}$ в знаменателе, поэтому с $d=3$ ряд будет сходящимся. Это была подсказка на будущие задачи, ничего тут мы пока не доказывали.

1.2.4 Числа Каталана через биномиальные коэффициенты

Вспомним некоторые факты про ряд Тейлора, а именно, что

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,$$

где $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Поэтому давайте преобразуем ряд для $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_nx^n$.

$$\sqrt{1-4x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}x^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n=$$

Вынесем 1/2 из каждой дроби, везде поменяем знак, получим, что это домножится на $(-1)^{n-1}$, что совместно с $(-4x)^n$ даст знак минус, в скобках останется $(2n-3)!!$:

$$=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^nx^n(2n-3)!!}{2^nn!}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^nx^n(2n-3)!!}{n!}=$$

Домножим на $n!$ и разделим на него, а также домножим на $2n-1$ и опять же разделим. Воспользуемся тем, что $(2n)!=(2n-1)!!n!\cdot 2^n$:

$$=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!x^n}{n!n!}\frac{1}{2n-1}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{2n-1}$$

Откуда:

$$f(x)=\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2n+1}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}x^n$$

В последнем равенстве можно убедиться непосредственно.

Откуда получаем $C_k=\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$.

Примечание. $\mathsf{P}(S_1\neq0,\dots,S_{2n-1}\neq0,S_{2n}=0)=2C_{n-1}(pq)^n=\binom{2n}{n}(pq)^n\frac{1}{2n-1}$ — распределение первого момента в нуле.

1.2.5 Математическое ожидание первого момента возвращения в ноль

Определение 9. $X = \min(2n : S_{2n} = 0)$.

Теорема 4. $\mathsf{E}[X] = +\infty$.

Доказательство. Если $p \neq q$, тогда $\mathsf{P}(x = +\infty) > 0$, поэтому матожидание уже точно бесконечность.

Если $p = q = \frac{1}{2}$, тогда $\mathsf{E}[X] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}(X = 2n) \cdot (2n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{2n}{2n-1} \frac{1}{4^n} = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, что расходится □

Получается, что да, в ноль мы вернемся, но очень не скоро и бесконечно долго будем ходить вне. Вот такой вот парадокс. Перейдём к следующему пункту.

1.2.6 Среднее время в нуле

Оказывается, что в нуле мы будем находится не так мало. За n шагов примерно $\sqrt{n}$ раз мы будем в нуле. Это по большей мере связано с тем, что нули расположены рядом, то есть есть большая вероятность, что если мы пришли в ноль, то через малое количество шагов окажемся опять там.

Определение 10. Будем рассматривать симметричное простое случайное блуждание. Тогда $L_n = \left|k : k \in \overline{0, \ldots, n}, S_k = 0\right|$.

Хотим понять, какая асимптотика у $\mathsf{E}[L_n]$.

Лемма. $\mathsf{E}[L_n] = \mathsf{E}[|S_{n+1}|]$

Доказательство. Распишем $|S_{n+1}|$:

$$|S_{n+1}| = \begin{cases} 1, \text{если } |S_n| = 0 \\ S_n + \xi_{n+1}, \text{если } S_n > 0 \\ -S_n - \xi_{n+1}, \text{если } S_n < 0 \end{cases}$$

Действительно, при положительном S_n мы не поменяем знак, поэтому надо лишь добавить то, что мы выбирали на следующем ходу, при отрицательном S_n аналогично, а если $S_n = 0$, то в любом случае модуль равен единице.

Запишем $|S_{n+1}|$ через индикаторы:

$$|S_{n+1}| = I\{|S_n| = 0\} + (S_n + \xi_{n+1})I\{S_n > 0\} - (S_n + \xi_{n+1})I\{S_n < 0\}$$

Заметим, что $S_n I\{S_n > 0\} - S_n I\{S_n < 0\} = |S_n|$ (в этом легко убедиться, проверив несколько случаев). Поэтому, введя функцию знака, можно утверждать, что:

$$|S_{n+1}| = I\{|S_n| = 0\} + |S_n| + \xi_{n+1}\mathrm{sgn}(S_n)$$

Будем раскрывать рекурсивно, откуда получим:

$$|S_{n+1}| = \sum_{k=0}^{n} I\{|S_k| = 0\} + |S_0| + \sum_{k=0}^{n} \xi_{k+1}\mathrm{sgn}(S_k)$$

Заметим, что $L_n = \sum\limits_{k=0}^{n} I\{|S_k| = 0\}$, поэтому давайте запишем под знаком матожидания с использованием, что $\mathsf{E}[|S_0|] = 0$.

$$\mathsf{E}[|S_{n+1}|] = \mathsf{E}[L_n] + \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}[\xi_{k+1}\mathrm{sgn}(S_k)]$$

Но величины ξ_{k+1} и $\mathrm{sgn}(S_k)$ независимы, так как нет пересечений по ходам, поэтому это распадается в произведение матожиданий.

Ну и финальный аккорд состоит в том, что $\mathsf{E}[\xi_{k+1}] = 0$, поэтому мы доказали равенство. □

Про асимптотику поговорим в следующей лекции.

1.3 Лекция от 07.02.2017

1.3.1 Среднее время в нуле

Вспомним, что по ЦПТ и тем фактом, что среднее ξ_i равно нулю и дисперсия равна единице мы имеем следующее:

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1)$$

По теореме о наследовании сходимости можно заключить, что

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} |\mathcal{N}(0,1)|$$

А теперь мы хотим осознать, а как ведет себя среднее левой части. Заметим, что просто матожидание мы не можем взять, так как функция $f(x) = x$ не ограничена и эквивалентным определением сходимости по распределению напрямую воспользоваться нельзя. Поэтому нужны более сильные знания о поведений случайных величин.

Определение 11. Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ называется равномерно интегрируемой, если

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}[|\xi_n| I\{|\xi_n| \geqslant c\}] = 0$$

Поясним определение.

Если у случайной величины есть плотность, то фактически мы говорим, что

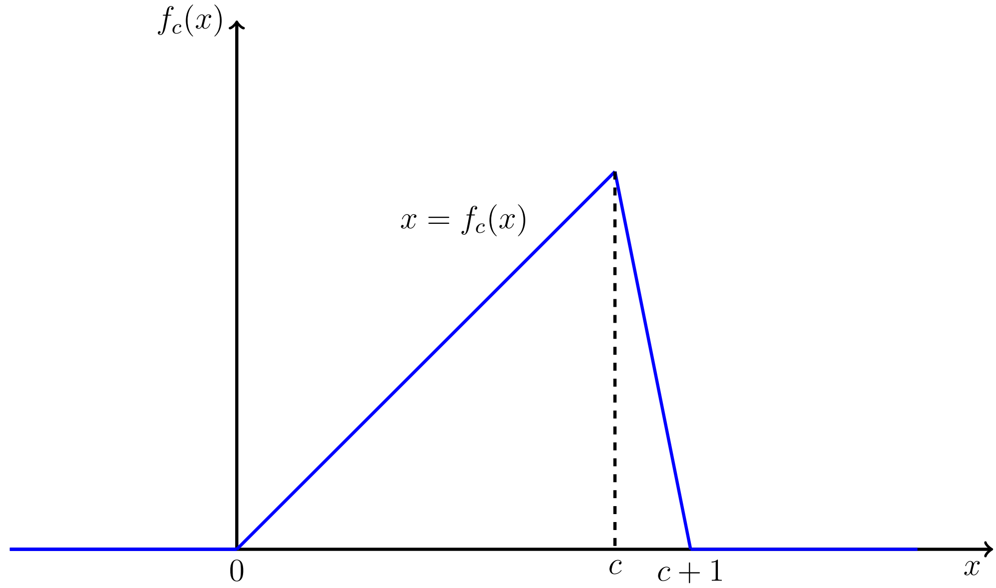
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{|x|\geqslant c} |x| p_{\xi_n}(x) dx \to 0$$

То есть модуль среднего на бесконечности в обе стороны близок к нулю.

Теорема 5. *Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \xi, \xi_n \geqslant 0$ — все величины с конечным матожиданием, тогда $\mathsf{E}[\xi_n] \to \mathsf{E}[\xi]$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема.*

Доказательство. Докажем в одну сторону, в другую оставим в качестве домашней задачи.

Пусть последовательность равномерно интегрируема. Тогда для $c > 0$ рассмотрим функцию $f_c(x)$:



То есть до 0 эта функция тождественно ноль, потом ведет себя так же, как и аргумент до c, потом резко убывает и снова становится нулем. Мы вводим такую функцию, чтобы приблизить $f(x) = x$, но ограниченным образом.

Заметим, что $f_c(x)$ непрерывна и ограничена. Оценим $|\,\mathsf{E}[\xi_n] - \mathsf{E}[\xi]|$. Добавим и вычтем каждое из двух выражений под модулем $\mathsf{E}[f_c(\xi_n)], \mathsf{E}[f_c(\xi)]$ и воспользуемся неравенством треугольника:

$$|\,\mathsf{E}[\xi_n] - \mathsf{E}[\xi]| \leqslant |\,\mathsf{E}[\xi_n] - \mathsf{E}[f_c(\xi_n)]| + |\,\mathsf{E}[\xi] - \mathsf{E}[f_c(\xi)]| + |\,\mathsf{E}[f_c(\xi_n)] - \mathsf{E}[f_c(\xi)]|$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Первое слагаемое не больше $\mathsf{E}[\xi_n I\{\xi_n \geqslant c\}]$, так как при $\xi_n \leqslant c$, величины просто совпадают, от c до $c+1$ будет какой-то остаток, не больший, чем $\mathsf{E}[\xi_n I\{c \leqslant \xi_n \leqslant c+1\}]$, а дальше уже просто $\mathsf{E}[f_c(\xi_n)]$ не даёт никакого вклада. Откуда $\mathsf{E}[\xi_n I\{\xi_n \geqslant c\}] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $c > c_0(\varepsilon)$. Эта оценка работает по условию теоремы при всех n.

Второе слагаемое для всех $c > c_1(\varepsilon)$ тоже не больше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, так как мы приближаем $f_c(x)$ положительную функцию (и при $c \to +\infty$ $f_c(x) \to x$) и матожидание конечно, то с какого-то момента разность станет очень маленькой.

Третье слагаемое стремится к нулю с ростом n из-за эквивалентного определения сходимости по распределению.

Поэтому получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \varlimsup_{n \to +\infty} |\,\mathsf{E}[\xi_n] - \mathsf{E}[\xi]| \leqslant \varepsilon$$

Откуда есть предел и равен он нулю, что и требовалось доказать. □

Но теперь, чтобы наконец-то понять асимптотику среднего в нуле, давайте поймём, какие условия «полегче» нужно наложить, чтобы последовательность была равномерно интегрируемой. Это можно сделать из следующей леммы:

Лемма. *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность случайных величин. Если для всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено, что* $\mathsf{E}[\xi_n^2] \leqslant C < +\infty$*, тогда последовательность равномерно интегрируема.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем t_0 такое, что $t_0 > \frac{C}{\varepsilon}$. Тогда для любого $t > t_0$ и любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{E}[|\xi_n| I\{|\xi_n| \geqslant t\}] \leqslant \mathsf{E}\left[\frac{\xi_n^2}{t} I\{|\xi_n| \geqslant t\}\right] \leqslant \frac{C}{t} \leqslant \frac{C}{t_0} < \varepsilon$$

Значит предел есть и равен нулю. □

Теперь сформулируем основную теорему:

Теорема 6.

$$\mathsf{E}[L_n] \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Доказательство. По последней лемме из прошлой лекции имеем $\mathsf{E}[L_n] = \mathsf{E}[|S_{n+1}|]$.

А также мы выяснили, что

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} |\mathcal{N}(0,1)|$$

Посмотрим на второй момент левой части и вспомним, что среднее у S_n равно нулю:

$$\mathsf{E}\left[\frac{S_n^2}{n}\right] = \frac{\mathsf{D}[S_n]}{n} = 1$$

Последнее равенство следует из того, что дисперсия независимых величин равна сумме дисперсий.

Получаем, что второй момент всегда ограничен единицей, значит по теореме 5 мы получаем, что

$$\mathsf{E}\left[\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right] \to \mathsf{E}[|\mathcal{N}(0,1)|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Где последнее равенство легко проверяется интегрированием (см одно из ДЗ обычного курса).

Получаем, что $\mathsf{E}[L_n] \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ □

1.3.2 Геометрия траекторий. Закон повторного логарифма

Начнём сразу с теоремы, потом будем пояснять её смысл и постепенно доказывать.

Теорема 7 (Закон повторного логарифма)**.** *Пусть* $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ *— простое симметричное случайное блуждание.*

Тогда

$$\mathsf{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = 1\right) = 1$$

Выведем маленькое следствие из этого:

Примечание. Докажем, что из ЗПЛ следует следующий факт:

$$\mathsf{P}\left(\varliminf_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=-1\right)=1$$

Ну это легко понять, если заменить $S_n=-X_n$ и надо лишь осознать, что $\{X_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ тоже случайное блуждание, но это совершенно ясно из определения.

Давайте будем пояснять смысл.

Закон повторного логарифма занимает промежуточное положение между законом больших чисел и центральной предельной теоремой. Мы знаем, что

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathsf{P}}0,\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathcal{N}(0,1)$$

Центральная предельная теорема утверждает, что суммы S_n с делителем $\sqrt{n}$ сходятся к стандартному нормальному распределению, и эта последовательность сумм не сходится к какой-либо конкретной величине ни по вероятности, ни почти наверное, а бесконечно блуждает.

Таким образом величина $S_n/\sqrt{2n\ln\ln n}$ будет к любой точке отрезка $[-1,1]$ бесконечное число раз приближаться сколь угодно близко почти наверное.

Так же ЗПЛ означает, что с вероятностью один график блуждания лежит между $(1+\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$ и $-(1+\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$ для любого $\varepsilon>0$ и бесконечное число раз выходит за пределы $(1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$ и $-(1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$.

Вспомним лемму Бореля-Кантеля, а сам ЗПЛ докажем на следующей лекции.

Определение 12. Пусть $\{A_n, n\in\mathbb{N}\}$ – события. Тогда событием $\{A_n$ беск. число$\}$ (или $\{A_n$ б. ч.$\}$) называют $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup\limits_{m\geqslant n}A_m\right)$. Событие состоит в том, что произошло бесконечное число событий.

Теорема 8 (Лемма Бореля-Кантелли)**.** *Пусть* $\{A_n, n\in\mathbb{N}\}$.

1) Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathsf{P}(A_n)$ *сходится, тогда* $\mathsf{P}(\{A_n$ *б. ч.*$\})=0$.

2) Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathsf{P}(A_n)$ *расходится и* A_n *независимые величины, тогда* $\mathsf{P}(\{A_n$ *б. ч.*$\})=1$.

Доказательство. 1)

$$\mathsf{P}(\{A_n\text{ б. ч.}\})=\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{m\geqslant n}A_m\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathsf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n}A_m\right)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sum_{m\geqslant n}\mathsf{P}(A_m)=0$$

Последнее равенство верно, так как остаток сходящего ряда стремится к нулю.

2) Тут уже напрямую не получится, надо провести более тонкий анализ:

$$\mathsf{P}(\{A_n\text{ б. ч.}\})=\lim_{n\to+\infty}\mathsf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n}A_m\right)=1-\lim_{n\to+\infty}\mathsf{P}\left(\bigcap_{m\geqslant n}\overline{A_m}\right)=$$

Хочется воспользоваться независимостью, но в данном случае надо применять один трюк, чтобы это стало возможным. Поставим повторный предел:

$$= 1 - \lim_{n\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{m=n}^{N} \overline{A_m}\right) =$$

Вот теперь уже можно пользоваться независимостью событий (а значит и их дополнений).

$$1 - \lim_{n\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \prod_{m=n}^{N} (1 - \mathsf{P}(A_m))$$

Применим неравенство, что $1 - x \leqslant e^{-x}$ и поэтому можно написать, что

$$1 - \lim_{n\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \prod_{m=n}^{N} (1 - \mathsf{P}(A_m)) \geqslant 1 - \lim_{n\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} e^{-\sum\limits_{m=n}^{N} \mathsf{P}(A_m)}$$

Но остаток расходящегося ряда стремится к $+\infty$, поэтому имеем равенство

$$= 1 - \lim_{n\to+\infty} e^{-\infty} = 1$$

$\square$

1.4 Лекция от 14.02.2017

1.4.1 Закон повторного логарифма

В этой лекции докажем этот закон и поймём, что обычной техникой оценивания через ЦПТ и некоторые другие теоремы вообще не работают.

Вспомним, что мы хотим глобально. Введем 2 события для произвольного $\varepsilon > 0$:

$$A_n = \{S_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}\}, B_n = \{S_n \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}\}$$

Чтобы доказать утверждение теоремы, надо показать, что

$$\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = 0; \mathsf{P}(\{B_n \text{ б.ч.}\}) = 1$$

1.4.2 Следствие из ЦПТ и теоремы Берри-Эссеена

Если вспомнить ЦПТ и теорему Берри-Эссеена, тогда (учитывая, что третий момент конечен и $\mathsf{E}[\xi_1] = 0, \mathsf{D}[\xi_1] = 1$) получаем, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_n - n\,\mathsf{E}[\xi_1]}{\sqrt{n\,\mathsf{D}[\xi_1]}} < x\right) - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(x) \right| \leqslant \frac{1}{2} \frac{\mathsf{E}[|\xi_1 - \mathsf{E}[\xi_1]|^3]}{\sqrt{n}\,\mathsf{D}[\xi_1]^{3/2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Докажем одну лемму, которая нам в будущем пригодится, а именно она относительно неплохо оценивает функцию распределения нормального стандартного распределения:

Лемма. *При всех достаточно больших x (скажем, $x > 1$) выполняется*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x+1)^2}{2}} \leqslant 1 - \Phi(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Доказательство. Оценить снизу совсем просто. Действительно, интеграл убывает экспоненциально, поэтому основная его часть концентрируется около x:

$$\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \geqslant \int\limits_{x}^{x+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x+1)^2}{2}}$$

Где последнее неравенство следует из того, что функция под интегралом не меньше, чем написанная в выражении. По-другому можно воспользоваться теоремой о среднем и показать оценку уже напрямую.

Оценить сверху немного сложнее. Заметим, что при $x > 1$ будет выполнено следующее неравенство для всех $y > x$:

$$y - \frac{y^2}{2} < x - \frac{x^2}{2}$$

В этом легко убедиться, так как у этого квадратного сравнения будут корни $y_1 = x, y_2 = 2 - x$, но при $x > 1$ будет выполнено $y_1 > y_2$, а мы знаем, что $y > x$, поэтому действительно парабола будет принимать положительное значение.

А теперь давайте оценивать интеграл с помощью сравнений функций и обычного интегрирования:

$$\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{y-\frac{y^2}{2}-y}\, dy \leqslant e^{x-\frac{x^2}{2}} \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

□

Из теоремы Берри-Эссеена можно даже написать равенство (запихать остаток в О-большое) для $\mathsf{P}(S_n \geqslant t)$ при подстановке $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$:

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant t) = 1 - \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Воспользуемся доказанным неравенством, получим, что:

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant t) = e^{-\frac{t^2}{2n}(1+o(1))} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Мы знаем, что при $t = \sqrt{2n \ln\ln n}$ следует, что $x = \frac{t}{\sqrt{n}} > 1$, поэтому неравенством мы корректно воспользовались, а в $o(1)$ запихали всё ненужное.

Теперь подставим наше t

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant t) \sim \frac{1}{(\ln n)^{1+o(1)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Но если мы хотим воспользоваться леммой Бореля-Кантелли, нам надо или чтобы события были независимы, или чтобы ряд сходился. Но у нас тут ряд логарифмов! А события очевидно все зависимы. Ряд расходится, какую там степень бы не написать. Да даже больше — остаток расходится! Плохо, нужна другая техника, чтобы доказать ЗПЛ.

1.4.3 Доказательство ЗПЛ

Следующая лемма показывает, насколько максимально мы можем уйти. Точнее связь между всеми предыдущими значениями блуждания и последнего.

Теорема 9. *Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимые одинаково распределенные случайные величины с симметричным распределением (то есть $\xi_k \overset{d}{=} -\xi_k$), а $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда $\forall a > 0$:*

$$\mathsf{P}\left(\max_{k \leqslant n} S_k \geqslant a\right) \leqslant 2\,\mathsf{P}(S_n \leqslant a)$$

Доказательство. Давайте введем все нужные события:

$$A = \{\max_{k \leqslant n} S_k \geqslant a\}$$

Понятное дело, что без A не обойтись, если мы хотим доказать теорему. Аналогично не обойтись без B:

$$B = \{S_n \geqslant a\}$$

А теперь давайте попытаемся представить A в виде дизъюнктного объединения какихто событий. Для этого часто в теории вероятностей вводят события первых моментов:

$$A_k = \{S_1 < a, \ldots, S_{k-1} < a, S_k \geqslant a\}$$

Действительно, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, так как A_k не пересекаются и образуют всё A.

Также давайте поймём следующее включение:

$$A_k \cap \{S_n - S_k \geqslant 0\} \subseteq A_k \cap B$$

Действительно, если уж $S_k \geqslant a$, то если $S_n \geqslant S_k$, тогда и $S_n \geqslant a$, то есть все события слева включены в правое. Но чем же хорошо это включение? Да тем, что слева независимые события, так как A_k никак не зависит от $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$. Это нам пригодится.

Ура, у нас уже есть какие-то включения, давайте уже что-то оценивать. Будем аккуратно расписывать наши неравенства:

$$\mathsf{P}(B) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B \cap A_k)$$

Действительно, мы просто пересекаем событие B с непересекающимися между собой A_k. По включению выше мы получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B \cap A_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k \cap \{S_n - S_k \geqslant 0\})$$

Из-за независимости событий получаем равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k \cap \{S_n - S_k \geqslant 0\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k)\,\mathsf{P}(\{S_n - S_k \geqslant 0\})$$

Но вторая вероятность не меньше $\frac{1}{2}$ из-за симметричности распределения и тем, что ещё может достигаться равенство. Поэтому последнее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k)\,\mathsf{P}(\{S_n - S_k \geqslant 0\}) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k) = \frac{1}{2}\,\mathsf{P}(A)$$

Где последнее равенство из-за дизъюнктности объедения A_k. □

Сейчас мы имеем весь арсенал, чтобы доказать ЗПЛ.

Доказательство. Сначала докажем, что $\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = 0$. Для этого введем некоторые обозначения при фиксированном $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon \in (0,1] \\ \lambda = 1+\varepsilon \\ n_k = \lambda^k \\ k_0 : k \geqslant k_0, \text{ что } \ln\ln k > 1 \\ C_k = \bigcup\limits_{\substack{n > n_{k-1},\\ n \leqslant n_k}} A_k \end{cases}$$

Несложно понять, что $\{A_n \text{ б.ч.}\}$ совпадает с $\{C_k \text{ б.ч.}\}$.

Будем считать $\mathsf{P}(C_k)$:

$$\mathsf{P}(C_k) \leqslant \mathsf{P}\Big(\max_{n \leqslant n_k} S_n \geqslant \lambda\sqrt{2n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}}\Big)$$

Действительно, мы смотрим, что хотя бы один до n_k (знак $\leqslant$ из-за того, что есть ещё целые числа от $1,\ldots,n_{k-1}$) больше нужного значения. По теореме 9 мы получаем, что

$$\mathsf{P}(C_k) \leqslant 2\,\mathsf{P}\Big(S_{\lfloor n_k \rfloor} \geqslant \lambda\sqrt{2n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}}\Big)$$

А теперь вспомним оценку нашего интеграла (да, тут она уже сработает):

$$2\,\mathsf{P}\Big(S_{\lfloor n_k \rfloor} \geqslant \lambda\sqrt{2n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}}\Big) \leqslant 2\exp\left(\frac{-\lambda^2 2n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}}{2\lfloor n_k \rfloor}(1+o(1))\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n_k}}\right)$$

Также заметим, что $\frac{n_{k-1}}{\lfloor n_k \rfloor} = \frac{1}{\lambda}(1+o(1))$, поэтому это можно внести под то о-малое. А $\ln\ln n_{k-1} = \ln k + o(1)$.

Поэтому это всё эквивалентно:

$$= 2\exp\left((-\lambda\ln k)(1+o(1))\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}^k}\right) = 2k^{-(1+\varepsilon)(1+o(1))} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}^k}\right)$$

Что несомненно сходится. По лемме Бореля-Кантелли получаем, что как раз вероятность $\mathsf{P}(C_k) \leqslant 2k^{-(1+\varepsilon)(1+o(1))} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}^k}\right)$, поэтому ряд из $\mathsf{P}(C_k)$ будет сходиться, поэтому и $\mathsf{P}(\{C_k \text{ б.ч.}\}) = 0$, и $\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = 0$.

Для второго подпункта введём свои обозначения при фиксированном $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} n_k = N^k, \ N \in \mathbb{N} \text{ мы определим чуть позднее} \\ \lambda = 1 - \varepsilon \\ \varepsilon \in (0,1) \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность $\{-S_n, n \in \mathbb{N}\}$. По пункту один мы выяснили, что $D_k = \{-S_{n_k} \leqslant 2\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\}$ происходит с вероятностью один конечное число раз.

Поэтому давайте выпишем событие B_{n_k}. Если мы докажем для какой-то подпоследовательности, что вероятность бесконечного числа равна единице, то тогда понятно, что и для всей последовательности оно будет с вероятностью один.

$$Q_k = \{S_{n_k} \geqslant \lambda\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\} = \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geqslant \lambda\sqrt{2n_k \ln\ln n_k} - S_{n_{k-1}}\} \supseteq \\ \supseteq \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geqslant \lambda\sqrt{2n_k \ln\ln n_k} + 2\sqrt{2n_{k-1} \ln\ln n_{k-1}}\}$$

Где последнее включение следует как раз из-за того, что с вероятностью один мы с какого-то момента имеем корректное неравенство. И если мы докажем для последнего события, что оно бесконечное число раз выполняется с вероятностью один, то автоматически докажем теорему.

Заметим, что

$$\lambda\sqrt{2n_k \ln\ln n_k} + 2\sqrt{2n_{k-1} \ln\ln n_{k-1}} \leqslant \lambda\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{N\lambda^2}}\right) = \lambda'\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}$$

Где $\lambda' \in (\lambda, 1)$. Такое λ' можно подобрать, если взять N очень большое. Поэтому усилим оценку и будем доказывать, что будет вероятность один у б.ч. у события

$$\{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geqslant \lambda'\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\}$$

Заметим, что все Q_k независимы, так как не пересекаются по ξ_i, значит уже есть вера в то, что можно воспользоваться леммой Бореля-Кантелли.

Обозначим за $Y_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$. Тогда

$$\mathsf{P}(Q_k) \geqslant \mathsf{P}\Big(Y_k \geqslant \lambda'\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\Big) = \exp\left(\frac{-\lambda'^2 2n_k \ln\ln n_k}{2(n_k - n_{k-1})}(1 + o(1))\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}^k}\right) =$$

А теперь давайте всё подряд оценивать. $\ln\ln n_k = \ln k + \ln\ln N = \ln k + o(1)$ при достаточно больших k (N зависит только от ε).

$$= \exp\left(\frac{-\lambda'^2 \ln k}{1 - \frac{1}{N}}(1 + o(1))\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}^k}\right) =$$

А теперь давайте поймём, что $\frac{\lambda'^2}{1-\frac{1}{N}} < 1$ можно сделать. Действительно, при $N \to +\infty$ следует, что $\lambda' \downarrow \lambda$, а значит при увеличении N выражение стремится к числу, меньшему единице, значит с какого-то момента будет меньше единицы. Отлично! Пусть $\frac{\lambda'^2}{1-\frac{1}{N}} = \delta < 1$. Тогда получаем:

$$= k^{-(1-\delta)(1+o(1))} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}^k}\right)$$

Что расходится, как сумма сходящегося и рассходящегося рядов. События независимы, поэтому по лемме Бореля-Кантелли вероятность б.ч. равна единице. □

Закон повторного логарифма, конечно, работает и при других ограничениях на ξ_i. Но нам хватило, как мы считаем, и для случайного блуждания. Оставим общий ЗПЛ без доказательства.

Теорема 10. *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *независимые одинаково распределенные случайные величины со средним ноль и положительной дисперсией* σ^2. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{2n\sigma^2 \ln\ln n}} = 1\right) = 1$$

На этом со случайным блужданием мы заканчиваем.

1.4.4 Ветвящиеся случайные процессы

1.4.5 Физическая модель

Физическая модель у этих процессов достаточно естественная. Сначала есть один человек. С какой-то вероятностью он порождает потомков. Потом каждый потомок независимо от остальных с тем же распределением порождает ещё несколько. Все предыдущие поколения умирают. Так повторяется либо пока не останется ни одного потомка, либо бесконечно. Можно считать, что так мы смотрим, вымрет ли род когда-нибудь, насколько долго он будет жить и насколько он будет широким.

1.4.6 Математическая модель

Определение 13. Пусть ξ — случайная величина со значениями в $\mathbb{Z}_+$ (называемый *законом размножения*). Пусть $\xi_k^{(n)}$ одинаково распределенные случайные величины с распределением, как у ξ.

Тогда введём X_n — число частиц в n-ом поколении. Тогда $X_0 = 1$, а $X_n = \sum\limits_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}$. Фактически, $\xi_k^{(n)}$ отвечает за число потомков k-ой частицы в $n-1$-ом поколении.

Такой процесс называется *процессом Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц* ξ.

Ясно, что нас интересуют изначально вопрос о вырождении, то есть $\mathsf{P}(\exists n : X_n = 0)$. Анонсируем сразу ответ, на следующей лекции докажем

$$\text{Если } \mathsf{E}[\xi] \leqslant 1, \text{ тогда } \mathsf{P}(\exists n : X_n = 0) = 1, \text{ кроме случая } \xi = 1.$$

$$\text{Если } \mathsf{E}[\xi] > 1, \text{ тогда } \mathsf{P}(\exists n : X_n = 0) < 1.$$

1.5 Лекция от 14.02.2017

1.5.1 Производящая функция случайной величины

Несколько лекций назад мы познакомились с производящей функцией последовательности. А теперь давайте введём понятия для произвольной случайной величины:

Определение 14. *Производящей функцией* случайной величины ξ называют функцию $\varphi_\xi(z) = \mathsf{E}\big[z^\xi\big]$ при $z \geqslant 0$.

Начнём сразу говорить о каких-то не очень сложных и одновременно важных свойствах.

1. $\varphi_\xi(1) = 1$. Тривиально.

2. $\varphi'_\xi(1) = \mathsf{E}[\xi]$. ???

3. Если ξ, η независимы, тогда
$$\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z) \cdot \varphi_\eta(z).$$
Тривиально следует из свойств матожидания.

4. Если $\xi \in \mathbb{Z}_+$, тогда
$$\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \, \mathsf{P}(\xi = k).$$
Очень простое и понятное свойство. Этот ряд сходится абсолютно при $|z| \leqslant 1$, так как сумма ограничена суммой вероятностей. Можно заметить, что для дискретной величины свойство 2 доказывается очень легко.

5. При $|z| < 1$ дискретную характеристическую функцию можно дифференцировать бесконечное число раз, так как по формуле Коши-Адамара радиус сходимости останется тот же. При $|z| = 1$ непонятно что будет происходить, так как ряд $k\,\mathsf{P}(\xi = k)$ может уже расходиться.

6. В дискретной случайной величине $\varphi_\xi(0) = \mathsf{P}(\xi = 0)$, если k раз продифференцировать и подставить $z = 0$, понятно, что получим
$$\mathsf{P}(\xi = k) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\varphi_\xi(z)$$

Как ни странно, именно производящие функции помогают получить результаты в случайных дискретных процессах.

1.5.2 Вероятность вырождения

Перед тем, как доказывать сразу окончательный результат, докажем несколько лемм.

Лемма (О зависимости X_n и X_{n-1})**.** *Пусть X_n — ветвящийся случайный процесс с законом размножения частиц ξ.*

Тогда $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_{X_{n-1}}(\varphi_\xi(z))$.

Доказательство.

$$\varphi_{X_n}(z) = \mathsf{E}\big[z^{X_n}\big] = \mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}}\right]$$

Заметим, что X_{n-1} принимает какое-то значение дискретное значение, поэтому если ввести случайную величину $\eta = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} I\{X_{n-1} = m\}$, то $\eta = 1$ всегда. Поэтому продолжим равенство:

$$\mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}}\right] = \mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}} \sum_{m=0}^{+\infty} I\{X_{n-1} = m\}\right] = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}} I\{X_{n-1} = m\}\right]$$

Заметим, что X_{n-1} зависит только от $\xi_k^{(\ell)}$, где $\ell \leqslant n-1$, а k — любое, поэтому можно продолжить равенство с использованием независимости случайных величин (и ещё вместо X_{n-1} подставим m):

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)}} I\{X_{n-1} = m\}\right] = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)}}\right] \mathsf{P}(X_{n-1} = m) =$$

Заметим, что $\mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)}}\right] = (\varphi_\xi(z))^m$ из-за свойства 3 производящих функций и независимости величин $\xi_k^{(n)}$. Откуда получаем:

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (\varphi_\xi(z))^m \, \mathsf{P}(X_{n-1} = m) = \varphi_{X_{n-1}}(\varphi_\xi(z))$$

$\square$

Следствие. *Воспользуемся тем, что $X_0 = 1$, тогда рекурсивно получим:*

$$\varphi_{X_n}(z) = \underbrace{\varphi_\xi(\ldots(\varphi_\xi(z))\ldots)}_{n\ \text{раз}}$$

Откуда получаем (если внимательно приглядеться к результату леммы), что $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(z))$.

Введем обозначение $q = \mathsf{P}(X_n = 0)$. Тогда сформулируем следующую лемму:

Лемма. *$q_n \leqslant q_{n+1}$ и $q = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n$, где q — вероятность вырождения процесса.*

Доказательство. Первое неравенство совершенно тривиально, так как $\{X_n = 0\} \subseteq \{X_{n+1} = 0\}$, так как если $X_n = 0$, то уж и $X_{n+1} = 0$.

$\{\exists n : X_n = 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} X_n$. В силу непрерывности вероятности получаем, что

$$q = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}(X_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} q_n$$

$\square$

Теорема 11. *Если q — вероятность вырождения, тогда $q = \varphi_\xi(q)$.*

Доказательство. $q_n = \mathsf{P}(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0)$ (см. свойство 6). По следствию из леммы о зависимости X_n и X_{n-1} получаем, что

$$q_n = \mathsf{P}(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(0)).$$

Заметим, что у $\varphi_{X_n}(0)$ существует предел, так как по лемме выше у q_n существует предел, поэтому устремим $n \to +\infty$, откуда

$$q = \varphi_\xi(q), \text{ что и требовалось доказать.}$$

□

Мы уже получили хороший аппарат для нахождения q. Но заметим, что $q = 1$ всегда подходит, но иногда вероятность вырождения меньше единицы. Так вот, следующая теорема утверждает, что таких q не больше двух и если их два, то надо брать наименьшее.

Теорема 12 (О вероятности вырождения)**.** *Пусть $\mathsf{P}(\xi = 1) < 1$ и $\mu = \mathsf{E}[\xi]$ (μ необязательно конечно).*

1) Если $\mu \leqslant 1$, тогда $z = \varphi_\xi(z)$ имеет ровно одно решение — единица;

2) Если $\mu > 1$, тогда $z = \varphi_\xi(z)$ имеет один корень z_0 на $[0, 1)$ и $q = z_0$.

Доказательство. Рассмотрим два случая в порядке их очереди.

1) Если $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1$, тогда утверждение очевидно. Пусть $\mathsf{P}(\xi = 0) < 1$. Рассмотрим производную $\varphi'_\xi(z)$.

$$\varphi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} kz^{k-1}\,\mathsf{P}(\xi = k)$$

Поэтому из формулы можно заключить, что $\varphi'_\xi(z) \nearrow$ с ростом $z > 0$, так как $\mathsf{P}(\xi = 0) <$ 1.

Поэтому имеем по свойству 1 и формуле конечных приращений, что ($z < 1$):

$$1 - \varphi_\xi(z) = \varphi_\xi(1) - \varphi_\xi(z) = \varphi'_\xi(\theta)(1 - z)$$

Где $\theta \in (0, z)$. Но производная строго возрастающая функция, как мы показали выше, поэтому:

$$\varphi'_\xi(\theta)(1 - z) < \varphi'_\xi(1)(1 - z) = \mu(1 - z) \leqslant (1 - z)$$

Откуда $1 - \varphi_\xi(z) < 1 - z$, откуда $z < \varphi_\xi(z)$ для всех $z \in [0, 1)$.

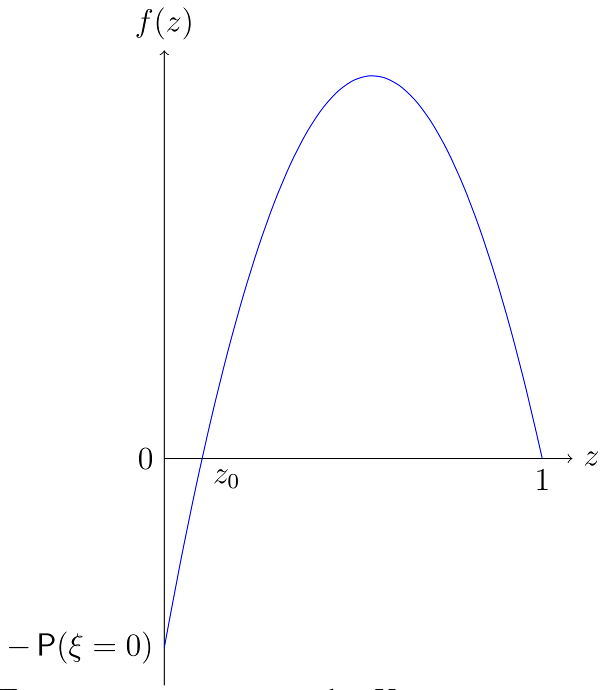
2) Заметим, что существует $k \geqslant 2$, что $\mathsf{P}(\xi = k) > 0$, иначе матожидание было бы не больше единицы. Поэтому $\varphi''_\xi(z) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)z^{k-2}\,\mathsf{P}(\xi = k)$ строго положительная функция.

Введем функцию $f(z) = z - \varphi_\xi(z)$. Тогда $f'(z) = 1 - \varphi'_\xi(z)$.

Заметим, что $f'(0) = 1 - \varphi'_\xi(0) = 1 - \mathsf{P}(\xi = 1) > 0$ (по условию). А $f'(1) = 1 - \mu < 0$.

Получаем, что производная у f сначала возрастает, потом убывает, так как $\varphi'_\xi(0)$ строго возрастающая функция. $f(1) = 0$ по свойству 1 производящих функций.

$f(0) = -\varphi_\xi(0) = -\mathsf{P}(\xi = 0)$, откуда давайте поймём, что мы начинаем из неположительного значения, возрастаем, а потом в единице приходим в ноль — тут будет строго один корень на $[0, 1)$ из-за непрерывности и поведения функции.



Рассмотрим 2 случая:
1) $\mathsf{P}(\xi = 0) = 0$. Очевидно, что тогда вероятность вырождения равна нулю, так как каждый представитель будет иметь хотя бы одного потомка.
2) $\mathsf{P}(\xi = 0) > 0$, тогда обозначим этот корень за z_0.
Несложно заметить, что $z - \varphi_\xi(z) < 0$ только при $0 \leqslant z < z_0$. Остался последний вопрос про то, какое q надо всё же выбрать.
Вообще, как мы выше показали, $q_n - q_{n+1} \leqslant 0$. Но давайте в этом случае покажем строгое неравенство.
Поймём, что

$$q_{n+1} = q_n + \sum_{m=1}^{+\infty} \mathsf{P}(X_n = m)(\mathsf{P}(\xi = 0))^m$$

То есть мы хотим, чтобы X_n приняло какое-то значение и чтобы на следующем шаге все представители остались без потомков. Хотя бы при одном $m > 0$ мы точно знаем, что $\mathsf{P}(X_n = m) > 0$ (так как $\mathsf{P}(\xi > 0) > 0$, так как иначе матожидание было бы меньше единицы) и $\mathsf{P}(\xi = 0) > 0$. Откуда действительно строгое неравенство.

Вспомним, что $\varphi_\xi(q_n) = q_{n+1}$, поэтому для всех n выполняется, что $q_n - \varphi_\xi(q_n) < 0$, значит все $q_n \in [0, z_0)$. Устремляем n к бесконечности и получаем, что $q \in [0, z_0]$, а только в z_0 функция обращается в ноль. $\square$

Но в большинстве случаев это q найти невозможно. Следующий пример покажет, что даже в пуассоновском распределении будет трансцендентное уравнение.

Пример. Пусть $\xi \sim \mathrm{Pois}(c)$. Тогда

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \mathsf{P}(\xi = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(zc)^k}{k!} e^{-c} = e^{c(z-1)}$$

Откуда надо найти $q = e^{c(q-1)}$. Введем $p = 1 - q$ — вероятность невырождения:

$$e^{-pc} + p = 1$$

Если $c < 1$, тогда будет ровно один корень, а при $c \geqslant 1$ будет уже два корня (оставим это утверждение для доказательства исходя только из функции, как упражнение читателю).

Немного обозначим терминологию.

Определение 15. Будем классифицировать случайные процессы в зависимости от среднего значения закона размножения.

- Если $\mu < 1$, тогда случайный процесс называют *докритическим.*
- Если $\mu = 1$, тогда случайный процесс называют *критическим.*
- Если $\mu > 1$, тогда случайный процесс называют *надкритическим.*

В первых двух случаях мы доказали, что $\mathsf{P}(X_n = 0) \to 1$, то есть фактически $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$. Следующую теорему мы оставим без доказательства, но она показывает, как растет количество потомков на уровне n.

Теорема 13 (О надкритическом случае)**.** *Пусть* $\mu > 1$, $\mathsf{D}[\xi] = \sigma^2 < +\infty$ *и* $W_n = \frac{X_n}{\mu^n}$, *тогда существует такая случайная величина* W, *что выполняются четыре утверждения:*

$$1)\ W_n \xrightarrow{п.н.} W;$$

$$2)\ W_n \xrightarrow{L^2} W;$$

$$3)\ \mathsf{P}(W = 0) = q;$$

$$4)\ \mathsf{E}[W] = 1, \mathsf{D}[W] = \frac{\sigma^2}{\mu^2 - \mu}.$$

1.5.3 Общее число частиц после n-го хода

Теперь будем оценивать количество частиц/экземпляров до момента времени n. Введем случайную величину $Y_n = 1 + X_1 + \ldots + X_n$. Ясно, что Y_n как раз и отвечает за это самое количество.

Лемма (О зависимости Y_n и Y_{n-1})**.**

$$\varphi_{Y_n}(z) = z \cdot \varphi_\xi(\varphi_{Y_{n-1}}(z))$$

Доказательство. Аналогично распишем, как и в лемме о зависимости X_n и X_{n-1}.

$$\varphi_{Y_n}(z) = \mathsf{E}\big[z^{Y_n}\big] = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathsf{E}\big[z^{Y_n} I\{X_1 = m\}\big]$$

То есть посмотрим, на сколько мы в первый раз разбились. Пусть A_i — количество всего потомков у i-й частицы после первого хода. Заметим, что $A_i \stackrel{d}{=} Y_{n-1}$, так как мы убрали первый уровень.

Это разбиение нам на руку, так как A_i независимы в совокупности, а также независимы с X_1.

$$Y_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} A_k I\{X_1 = m\}$$

Откуда мы получаем, что

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \mathsf{E}\big[z^{Y_n} I\{X_1 = m\}\big] = z \sum_{m=0}^{+\infty} \mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{m} A_k}\right] \mathsf{P}(X_1 = m)$$

Легко видеть, что $z^{A_k} = \varphi_{Y_{n-1}}(z)$, так как мы только пользовались распределением. Поэтому подставим по свойству 3 производящих функций:

$$z \sum_{m=0}^{+\infty} \mathsf{E}\left[z^{\sum\limits_{k=1}^{m} A_k}\right] \mathsf{P}(X_1 = m) = z \sum_{m=0}^{+\infty} (\varphi_{Y_{n-1}}(z))^m \, \mathsf{P}(X_1 = m) = z\varphi_\xi(\varphi_{Y_{n-1}}(z))$$

Последнее равенство следует из того, что $\xi \stackrel{d}{=} X_1$. $\square$