

Дифференциальные Уравнения

Семинарские занятия

Вадим Гринберг
по семинарам Войнова А. С.

Содержание

1 Семинар 1, 10 января	2
1.1 Общие факты	2
1.2 Изоклины	3
1.3 Диффуры с разделяющимися переменными	5
1.4 n -параметрическое семейство кривых	6
1.5 Замена переменных	7
1.5.1 Линейная замена	7
1.5.2 Общий вид	7
1.6 Домашнее задание №1	8
2 Семинар 2, 17 января	9
2.1 Однородные уравнения: $y = \frac{x}{t}$	9
2.2 Однородные уравнения: дробно-линейная замена	9
2.3 Однородные уравнения: $x = y^m$	9
2.4 Домашнее задание №2	9
3 Common Tasks	10

Семинар 1, 10 января

Общие факты

Пусть у нас имеется функция $x(t)$ (вообще говоря, вектор-функция $x = (x_1, \dots, x_d)$) от переменной $t \in \mathbb{R}$, действующая из интервала (a, b) (по умолчанию считаем всей числовой прямой), такая, что для переменной t , функции $x(t)$ и n её первых производных выполнено уравнение:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

— это и есть дифференциальное уравнение n -го порядка. F в данном случае, грубо говоря, «функция от $n + 1$ переменной», которая неявно задаёт $x(t)$ (за точным определением — на лекцию).

Решить диффур означает найти такую функцию $x(t)$, что выполняется вышеуказанное равенство.

Тупой пример: $\dot{x}(t) = x(t)$. Функция совпадает со своей производной. Решением, очевидно, будет $x(t) = \lambda \cdot e^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

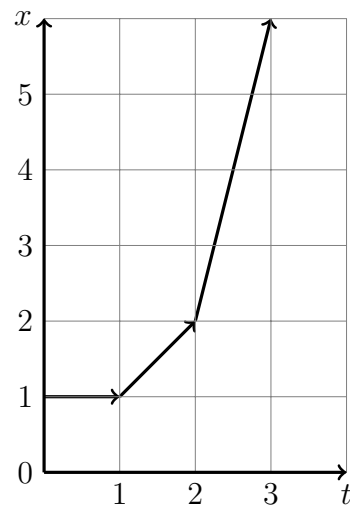
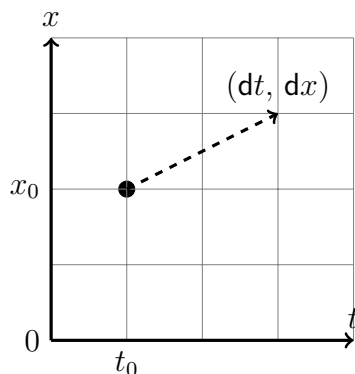
Любой диффур можно привести к удобоваримому виду:

$$\dot{x}(t) = f(t, x)$$

где f — некая хорошая функция (доказательство на лекции). С такими диффурами мы в основном и будем иметь дело.

Разберёмся, а как вообще можно решать диффуры. Пусть у нас имеется диффур $\dot{x} = f(t, x)$, который мы хотим решить. Попробуем приблизить график нашей кривой $x(t)$ некоей ломаной линией. Возьмём какую-то начальную точку (t_0, x_0) , и будем смотреть на направление движения, то бишь на направление вектора (dt, dx) . Будем делать маленькие шаги вдоль этого направления. Тогда каждый раз, находясь в точке (t, x) , мы будем переходить в точку $(t + dt, x + dx)$.

После многих таких шагов мы получим ломаную линию, приближающую график нашей кривой $x(t)$. Эта ломаная называется **Ломаной Эйлера**.



Для удобства можно делать шаг dt всегда равным 1, поделив вектор направления на dt . Тогда соответственно шаг dx станет $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x)$, и вектор направления в точке (t, x) будет иметь вид $(1, f(t, x))$.

Пример: $\dot{x} = tx$. Построим Ломаную Эйлера, стартуя из точки $(t_0, x_0) = (0, 1)$:

$$1. \ t = 0, \ x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 0) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (1, 1)$$

2. $t = 1, x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 1) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (2, 2)$
3. $t = 2, x = 2 \Rightarrow \dot{x} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 4) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (3, 6)$
4.

Изоклины

Определение 1. Пусть у нас есть диффура $\dot{x} = f(t, x)$.

Интегральная кривая — график функции $x(t)$ — решения диффура. Тогда \dot{x} — это угловой коэффициент интегральной кривой в точке $(t, x(t))$, то бишь тангенс угла наклона касательной к $x(t)$ в данной точке.

Изоклина — геометрическое место точек плоскости, в которых одно и то же направление движения (направление касательных), то есть, угол наклона вектора (dt, dx) один и тот же для любой точки (t, x) изоклины. Иными словами, $\dot{x} = \text{const}$.

Изолиния поля — подмножество точек изоклины (являющееся линией), в которых вектор (dt, dx) один и тот же для любой точки (t, x) изолинии. То есть, вектор $(dt, dx) \sim (1, f(t, x)) = \text{const}$. Для каждой изолинии константа своя.

Семейство изоклин определяется уравнением

$$\dot{x} = k = f(t, x)$$

где k — параметр. Придавая параметру k близкие значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

Для примера выше изоклинами будут являться множества $\left\{ xt = k \iff x = \frac{k}{t}, k \in \mathbb{R} \right\}$ — гиперболы.

Научимся находить приближённые решения диффура, строя интегральную кривую при помощи изоклин. Стоит отметить сразу же, что **нулевая изоклина** $f(t, x) = 0$ даёт уравнение линий, на которых могут находиться точки максимума и минимума интегральных кривых.

Для большей точности построения интегральных кривых хорошо находить ГМТ точек перегиба, исследуя вторую производную \ddot{x} при помощи уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{df}{dt} + \frac{df}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{df}{dt} + f(t, x) \cdot \frac{df}{dx} = 0$$

Линия, определяемая данным уравнением, и есть возможное ГМТ точек перегиба.

Пример №1

Изоклинами найти приближённое решение диффура

$$\dot{x} = 2t - x$$

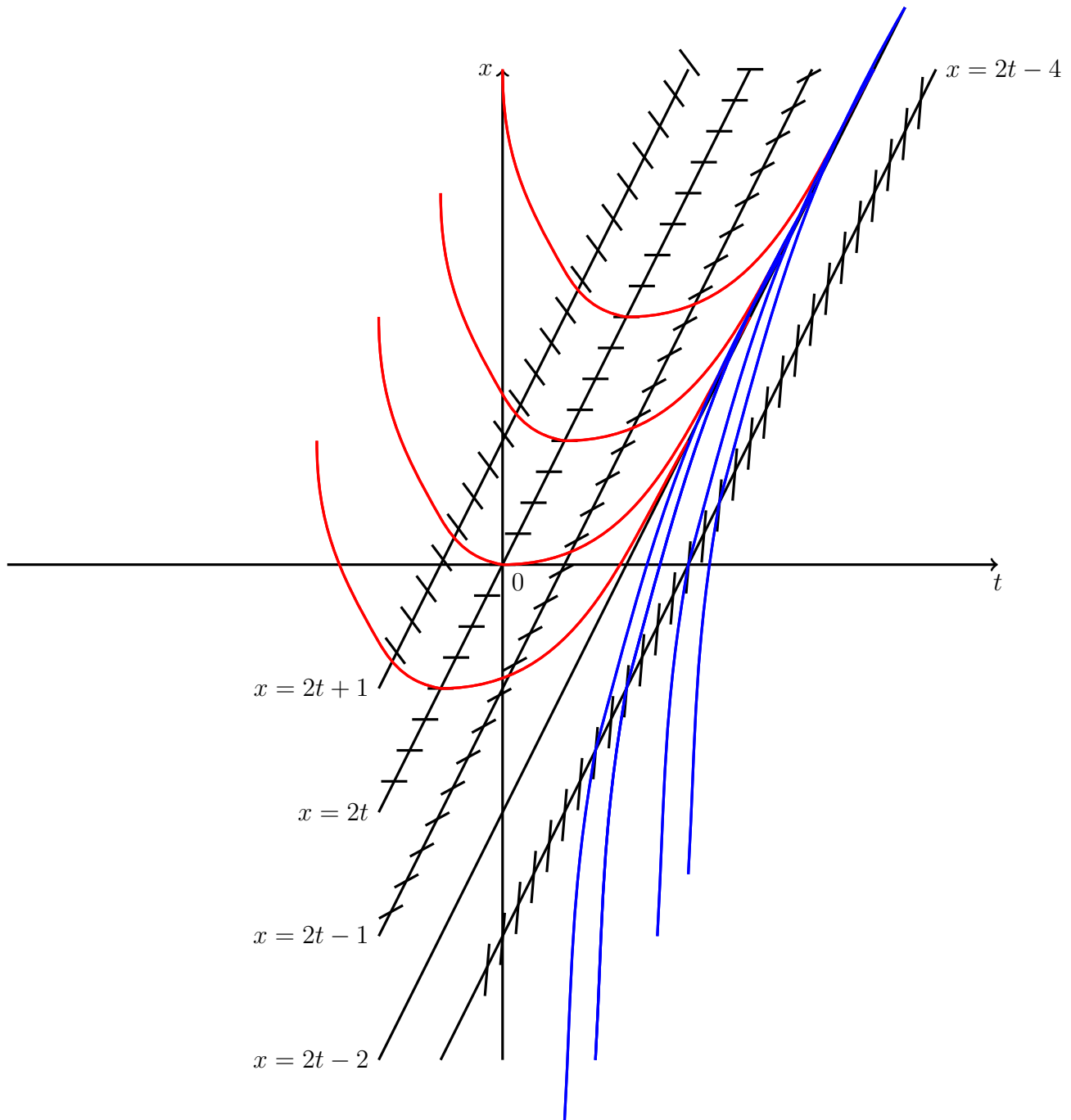
Для получения изоклин положим $\dot{x} = \text{const} = k$, откуда:

$$2t - x = k \iff x = 2t - k$$

— параллельные прямые.

Пусть $k = 0$, тогда получим изоклину $x = 2t$ — эта прямая делит плоскость на две части, в каждой из которых производная \dot{x} имеет один и тот же знак — интегральные кривые, пересекая $x = 2t$, из области убывания $x(t)$ переходят в область возрастания. Отсюда получаем, что на данной прямой лежат точки минимума.

Возьмём ещё две изоклины: $x = 2t + 1, k = -1$ и $x = 2t - 1, k = 1$. Изобразим их на графике. Касательные, проведённые к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами $k = -1, k = 0$ и $k = 1$ образуют с осью абсцисс углы в 135, 0 и 45 градусов соответственно. На графике направление показано чёрточками.



Вторая производная: $\ddot{x} = 2 - \dot{x} = 2 - 2t + x$.

Рассмотрим прямую $x = 2t - 2$, на которой $\ddot{x} = 0$. Это изоклина при $k = 2$. Заметим, что в таком случае угол наклона касательной равен углу наклона самой изоклины. Значит, ни одна интегральная кривая не будет пересекать эту изоклину, но при этом они будут к ней стремиться на бесконечности.

Прямая $x = 2t - 2$ делит плоскость на две части, в одной из которых (над прямой) $\ddot{x} > 0$, а значит, интегральные кривые выпуклы вниз, а в другой $\ddot{x} < 0$, и интегральные кривые выпуклы вверх. Кроме того, поскольку точки минимума расположены над этой прямой, то интегральные кривые, проходящие ниже изоклины $x = 2t - 2$ не имеют точек экстремума.

Рассмотрим также изоклину $x = 2t - 4$, $k = 4$. В данном случае угол наклона касательной будет равен 75 градусов. При этом интегральные кривые будут также стремиться к $x = 2t - 2$, но являясь выпуклыми вверх. Тем самым мы получили другое семейство решений диффура.

На графике выше изображены интегральные кривые, приближающие $x(t)$, полученные в соответствии с проведённым исследованием. Как видим, в точках пересечения с изоклинами кривые параллельны направлению касательных в точках пересечения.

Диффуры с разделяющимися переменными

Это суть дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{a(t)}{b(x)}$$

Перемножим крест-накрест и получим:

$$b(x)dx = a(t)dt$$

\int теперь интегрируем каждую часть независимо от другой \int

$B(x) = A(t) + C$ — это и будет решением диффура

Пример №2

$$\dot{x} = tx$$

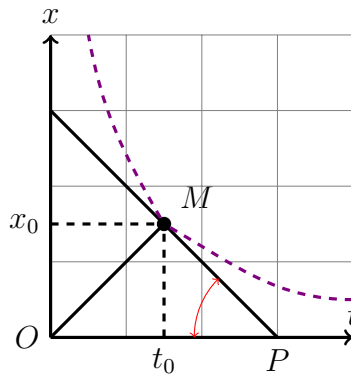
$$\dot{x} = tx = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{x} = t \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int t \cdot dt$$

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow |x| = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^C}_{\text{какая-то константа}} \Rightarrow |x| = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda > 0 \Rightarrow x = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних двух действиях мы взяли экспоненту от обеих частей и избавились от модуля.

Пример №3

Найдите кривую $x(t)$, такую, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ отрезки, соединяющую точку касания $(t_0, x(t_0))$ с точками пересечения касательной в данной точке с осями координат, будут равны.



Пусть мы касаемся нашей кривой $x(t)$ в точке (t_0, x_0) — обозначим её M . Можно заметить, что тогда OM — медиана. Отсюда следует, что координаты точек пересечения с осями абсцисс и ординат равны соответственно $(2t_0, 0)$ и $(0, 2x_0)$. Тогда тангенс угла наклона касательной $\tan \angle MPO = -\frac{2x_0}{2t_0} = -\frac{x_0}{t_0} = \dot{x}(t_0)$, так как тангенс угла наклона касательной к функции $x(t)$ в точке t_0 есть не что иное, как производная $x(t) - \dot{x}(t)$ — в данной точке. Таким образом, мы получили диффуры:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Решим его, тем самым найдя $x(t)$.

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int = \int$$
$$-\ln|x| = \ln|t| + C \Rightarrow \frac{1}{|x|} = |t| \cdot \lambda, \lambda > 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Пример №4

$$xt + (t + 1) \cdot \dot{x} = 0 \implies xt + (t + 1) \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -\frac{xt}{t + 1} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{t \cdot dt}{t + 1} \implies \int = \int$$

Возьмём правый интеграл.

$$\int \frac{t \cdot dt}{t+1} = \int 1 - \frac{1}{t+1} dt = t - \ln |t+1|$$

Тогда:

$$-\ln|x| = t - \ln|t+1| + C \implies \frac{1}{|x|} = \lambda \cdot \frac{e^t}{t+1}, \lambda > 0 \implies x = \lambda \cdot e^{-t} \cdot (t+1), \lambda \in \mathbb{R}$$

n -параметрическое семейство кривых

Это система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} F(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \\ F'(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ F^{(n)}(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \end{cases}$$

– всего $n + 1$ уравнение, константы c_1, \dots, c_n неизвестны. Необходимо, как и раньше, найти подходящую $x(t)$.

Метод решения таков: сначала мы выражаем константы c_1, \dots, c_n через $t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$, и потом подставляем всё в одно уравнение, тем самым получая диффур вида:

$$G(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

который мы умеем решать.

Пример №5

Необходимо найти диффур, задающий множество окружностей, касающихся оси абсцисс.

Чего делать, сходу и не вдуплишь, да?) Однако, выход есть — если видим слово "окружность" нужно тут же писать её уравнение.

Пусть у нас есть окружность радиуса R , касающаяся оси абсцисс в точке t_0 . Тогда выполнено тождество:

$$(x - R)^2 + (t - t_0)^2 = R^2$$

В данном случае R и t_0 и есть наши неизвестные константы. Составим систему уравнений из производных:

$$\begin{cases} (x-R)^2 + (t-t_0)^2 - R^2 = 0 \\ (2x \cdot \dot{x} - 2R \cdot \dot{x}) + 2t - 2t_0 = 0 \\ 2(\dot{x})^2 + 2x \cdot \ddot{x} - 2R \cdot \ddot{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Осталось выразить R через \dot{x} и \ddot{x} из последнего уравнения, подставить во второе и выразить t_0 , после чего загнать всё в первое уравнение и получить нужный диффур.

Замена переменных

Разберём на примере. Пускай у нас есть диффур

$$\dot{x} = x - \sqrt{x}$$

Решать его в таком виде не очень приятно. Поэтому сделаем замену переменных (название – сущая формальность, так как вообще говоря мы заменяем одну функцию на другую, а не переменную):

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Тогда диффур примет вид:

$$2\dot{y} \cdot y = y^2 - y \implies 2\dot{y} = y - 1 \implies \frac{2dy}{y-1} = dt$$

— получили простое уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим ещё несколько примеров замен.

Линейная замена

Пускай у нас есть диффур вида:

$$\dot{x} = f(at + bx)$$

Можно сделать замену $u = at + bx$, получив уравнение $\dot{x} = f(u)$. Решим этот диффур относительно переменной u , получив функцию $x(u)$, после чего, сделав обратную замену, выразить искомую $x(t)$.

$$\begin{aligned} u &= at + bx \\ du &= a \cdot dt + b \cdot dx \implies dt = \frac{du - b \cdot dx}{a} \\ \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{a \cdot dx}{du - b \cdot dx} = f(u) \\ a \cdot dx &= f(u)du - b \cdot f(u)dx \implies (a + b \cdot f(u))dx = f(u)du \\ dx &= \frac{f(u)}{a + b \cdot f(u)}du \end{aligned}$$

После этих махинаций всё легко решается как уравнение с разделяющимися переменными.

Пример №6

$$\dot{x} = \cos(x - t)$$

Ну тут совсем толсто: $u = x - t$. В данном случае $a = -1$, $b = 1$. По формуле выше:

$$dx = \frac{\cos u}{\cos u - 1} du$$

Теперь интегрируем, получаем $x(u)$ и делаем обратную замену.

Общий вид

Пускай у нас есть диффур:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Можно сделать замену $u = \varphi(t, x)$, получив новое уравнение (весьма удачно, если получится диффур вида $\dot{u} = f(t, u)$, но такое бывает далеко не всегда). Решаем его и делаем обратную замену, получая $x(t)$.

Пример №7

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x$$

Здесь можно сделать замену $u = xt$, откуда $\dot{u} = \dot{x} \cdot t + x \cdot 1$. Подставим:

$$\begin{aligned}\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x &\iff \dot{x} \cdot t + x = 2x^2 \cdot t^3 \implies \dot{u} = 2u^2 \cdot t \\ \frac{du}{dt} = 2u^2 \cdot t &\implies \frac{du}{u^2} = 2t \cdot dt \implies \int = \int \\ -\frac{1}{u} = t^2 + C &\implies u = -\frac{1}{t^2 + C}\end{aligned}$$

Делаем обратную замену и выражаем $x(t)$:

$$u = xt \implies xt = -\frac{1}{t^2 + C} \implies x = -\frac{1}{t^3 + Ct}$$

Домашнее задание №1

Задача №1. Найти все кривые $x(t)$, такие, что длина отрезка, соединяющего точку касания и точку пересечения касательной в данной точке с одной из осей, была постоянной.

Решение.

□

Задача №2. Придумать диффур 1 порядка, не обладающий решением на всей прямой. То бишь, не для всех t решение $\dot{x} = f(t, x)$ должно существовать.

Решение.

□

Задача №3. Решите диффур:

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0, \text{ начальное условие: } x(0) = 1$$

Решение.

□

Задача №4. Изоклинами найти приближённое решение:

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x}$$

Также изобразите изоклины на графике и покажите все различные (с точностью до топологии и асимптотики) решения (то есть, как рассмотрено выше в примере).

Решение.

□

Задача №5. Придумайте (вообще говоря, найдите) диффур 1 порядка, задающий множество прямых, являющихся касательными к единичной окружности с центром в нуле.

Решение.

□

Семинар 2, 17 января

Однородные уравнения: $y = \frac{x}{t}$

Однородные уравнения: дробно-линейная замена

Однородные уравнения: $x = y^m$

Домашнее задание №2

Задача №1. Решить диффур:

$$\dot{x} = 2 \cdot \left(\frac{x+2}{x+t-1} \right)^2$$

Задача №2. Решить диффур:

$$\dot{x} = \frac{x+2}{t+1} + \tan\left(\frac{x-2t}{t+1}\right)$$

Задача №3. Решить диффур:

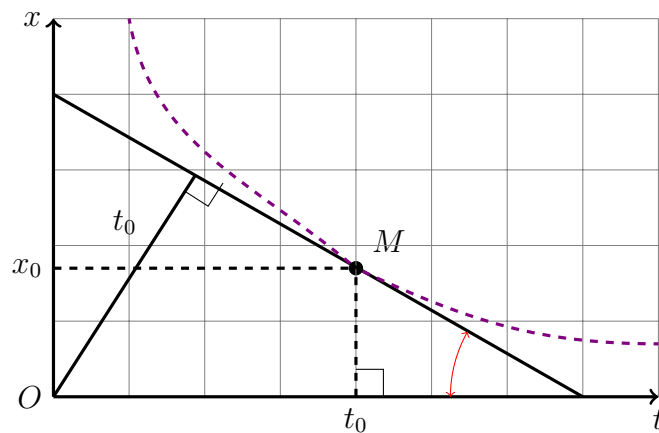
$$2x + (xt^2 + 1) \cdot t\dot{x}$$

Задача №4. Найти все такие $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, такие, что дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = at^\alpha + bx^\beta$$

сводится к линейному.

Задача №5. Найдите все кривые $x(t)$, такие, что расстояние от начала координат до касательной к $x(t)$ в любой точке $(t_0, x(t_0))$ совпадает с абсциссой данной точки (равно t_0):



Common Tasks

1. Найти такую кривую $x(t)$, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ касательная к $x(t)$ в точке $(t_0, x(t_0))$ пересекает ось абсцисс в точке $\frac{t_0}{2}$.
2. Найти дифференциальное уравнение первого порядка, задающее на плоскости семейство парабол $x = at^2 + bt + c$, проходящих через точку $(0,1)$ и касающихся прямой $x = t$.

3. Решить диффур:

$$\frac{t}{x}\dot{x} = \ln x - \ln t + 1$$

4. Решить задачу Коши:

$$\dot{x} = \frac{1}{2x} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{t}\right) + \frac{x}{2t}, \quad \text{начальное условие: } x(1) = 1$$