Дифференциальные Уравнения
Семинарские занятия

Вадим Гринберг
по семинарам Войнова А. С.

Содержание

Семинар 1, 10 января

Общие факты

Пускай у нас имеется функция $x(t)$ (вообще говоря, вектор-функция $x = (x_1,\ \ldots,\ x_d)$) от переменной $t \in \mathbb{R}$, действующая из интервала $(a,\ b)$ (по умолчанию считаем всей числовой прямой), такая, что для переменной t, функции $x(t)$ и n её первых производных выполнено уравнение:

$$\mathsf{F}\big(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t)\big) = 0$$

— это и есть дифференциальное уравнение n-го порядка. F в данном случае, грубо говоря, «функция от $n+1$ переменной», которая неявно задаёт $x(t)$ (за точным определением — на лекцию).

Решить диффур означает найти такую функцию $x(t)$, что выполняется вышеуказанное равенство.

Тупой пример: $\dot{x}(t) = x(t)$. Функция совпадает со своей производной. Решением, очевидно, будет $x(t) = \lambda \cdot e^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

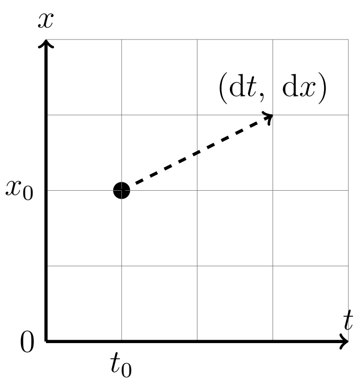
Любой диффур можно привести к удобоваримому виду:

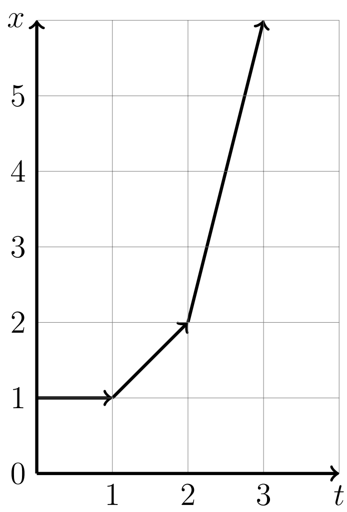
$$\dot{x}(t) = f(t,\ x)$$

где f — некая хорошая функция (доказательство на лекции). С такими диффурами мы в основном и будем иметь дело.

Разберёмся, а как вообще можно решать диффуры. Пускай у нас имеется диффур $\dot{x} = f(t,\ x)$, который мы хотим решить. Попробуем приблизить график нашей кривой $x(t)$ некоей ломаной линией. Возьмём какую-то начальную точку $(t_0,\ x_0)$, и будем смотреть на направление движения, то бишь на направление вектора $(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x)$. Будем делать маленькие шаги вдоль этого направления. Тогда каждый раз, находясь в точке $(t,\ x)$, мы будем переходить в точку $(t + \mathrm{d}t,\ x + \mathrm{d}x)$.

После многих таких шагов мы получим ломаную линию, приближающую график нашей кривой $x(t)$. Эта ломаная называется **Ломаной Эйлера**.





Для удобства можно делать шаг $\mathrm{d}t$ всегда равным 1, поделив вектор направления на $\mathrm{d}t$. Тогда соответственно шаг $\mathrm{d}x$ станет $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = f(t, x)$, и вектор направления в точке $(t,\ x)$ будет иметь вид $\big(1,\ f(t,\ x)\big)$.

Пример: $\dot{x} = tx$. Построим Ломаную Эйлера, стартуя из точки $(t_0,\ x_0) = (0,\ 1)$:

1. $t = 0,\ x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \big(1,\ f(t,\ x)\big) = (1,\ 0) \Rightarrow (t + \mathrm{d}t,\ x + \mathrm{d}x) = (1,\ 1)$

2. $t = 1,\, x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \big(1,\, f(t,\, x)\big) = (1,\, 1) \Rightarrow (t + \mathrm{d}t,\, x + \mathrm{d}x) = (2,\, 2)$
3. $t = 2,\, x = 2 \Rightarrow \dot{x} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \big(1,\, f(t,\, x)\big) = (1,\, 4) \Rightarrow (t + \mathrm{d}t,\, x + \mathrm{d}x) = (3,\, 6)$
4. ....

Изоклины

Определение 1. *Пусть у нас есть диффур $\dot{x} = f(t,\, x)$.*

Интегральная кривая *— график функции $x(t)$ – решения диффура. Тогда $\dot{x}$ — это угловой коэффициент интегральной кривой в точке $\big(t,\, x(t)\big)$, то бишь тангенс угла наклона касательной к $x(t)$ в данной точке.*

Изоклина *– геометрическое место точек плоскости, в которых одно и то же направление движения (направление касательных), то есть, угол наклона вектора $(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x)$ один и тот же для любой точки $(t,\, x)$ изоклины. Иными словами, $\dot{x} = const$.*

Изолиния поля *– подмножество точек изоклины (являющееся линией), в которых вектор $(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x)$ один и тот же для любой точки $(t,\, x)$ изолинии. То есть, вектор $(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) \sim \big(1, f(t,\, x)\big) = const$. Для каждой изолинии константа своя.*

Семейство изоклин определяется уравнением

$$\dot{x} = k = f(t,\, x)$$

где k – параметр. Придавая параметру k близкие значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

Для примера выше изоклинами будут являться множества $\left\{xt = k \iff x = \dfrac{k}{t},\, k \in \mathbb{R}\right\}$ — гиперболы.

Научимся находить приближённые решения диффура, строя интегральную кривую при помощи изоклин. Стоит отметить сразу же, что **нулевая изоклина** $f(t,\, x) = 0$ даёт уравнение линий, на которых могут находиться точки максимума и минимума интегральных кривых.

Для большей точности построения интегральных кривых хорошо находить ГМТ точек перегиба, исследуя вторую производную $\ddot{x}$ при помощи уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot \dot{x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f(t,\, x) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$$

Линия, определяемая данным уравнением, и есть возможное ГМТ точек перегиба.

Пример №1

Изоклинами найти приближённое решение диффура

$$\dot{x} = 2t - x$$

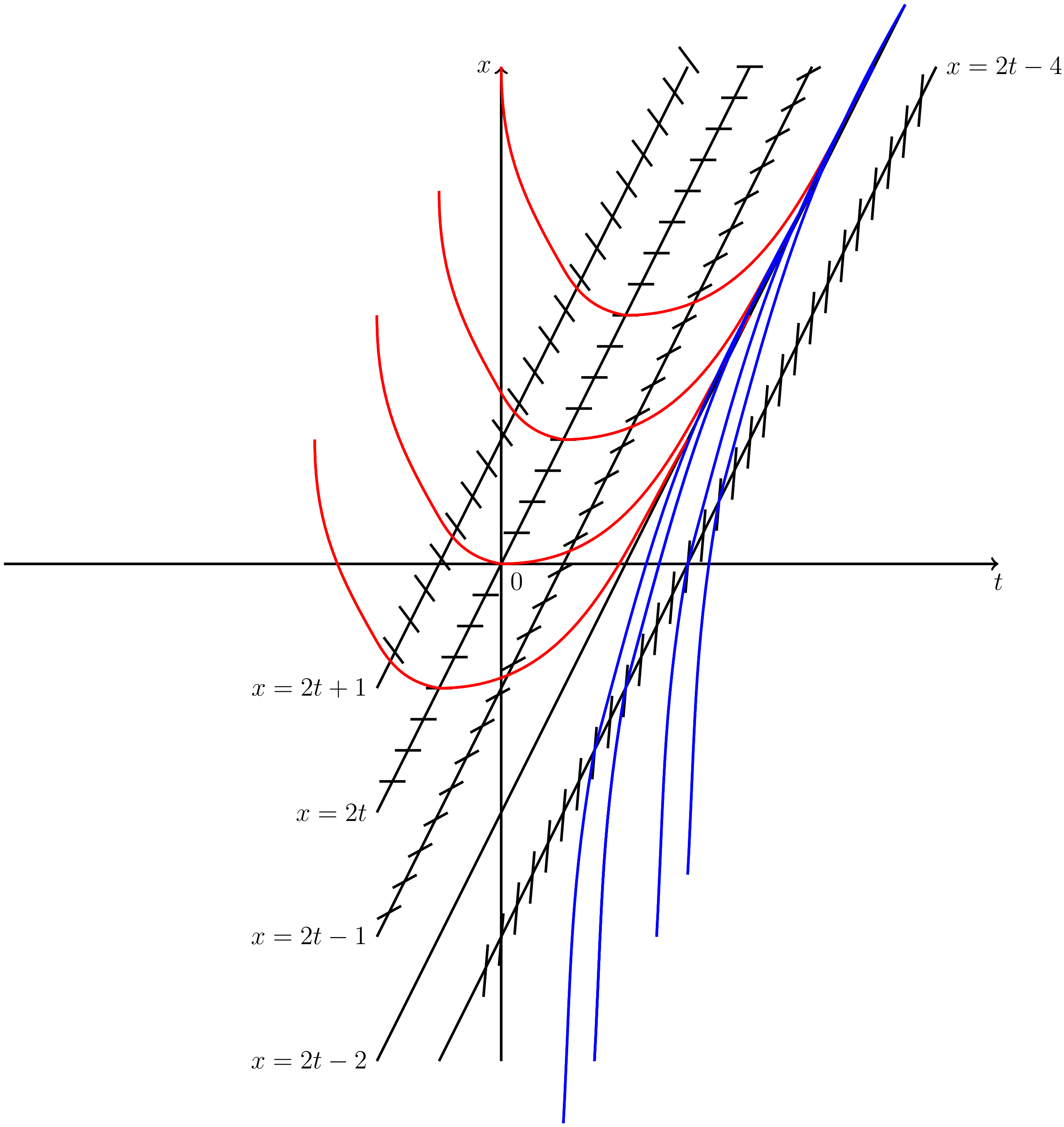
Для получения изоклин положим $\dot{x} = const = k$, откуда:

$$2t - x = k \iff x = 2t - k$$

— параллельные прямые.

Пусть $k = 0$, тогда получим изоклину $x = 2t$ — эта прямая делит плоскость на две части, в каждой из которых производная $\dot{x}$ имеет один и тот же знак — интегральные кривые, пересекая $x = 2t$, из области убывания $x(t)$ переходят в область возрастания. Отсюда получаем, что на данной прямой лежат точки минимума.

Возьмём ещё две изоклины: $x = 2t+1$, $k = -1$ и $x = 2t-1$, $k = 1$. Изобразим их на графике. Касательные, проведённые к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами $k = -1$, $k = 0$ и $k = 1$ образуют с осью абсцисс углы в 135, 0 и 45 градусов соответственно. На графике направление показано чёрточками.



Вторая производная: $\ddot{x} = 2 - \dot{x} = 2 - 2t + x$.

Рассмотрим прямую $x = 2t - 2$, на которой $\ddot{x} = 0$. Это изоклина при $k = 2$. Заметим, что в таком случае угол наклона касательной равен углу наклона самой изоклины. Значит, ни одна интегральная кривая не будет пересекать эту изоклину, но при этом они будут к ней стремиться на бесконечности.

Прямая $x = 2t - 2$ делит плоскость на две части, в одной из которых (над прямой) $\ddot{x} > 0$, а значит, интегральные кривые выпуклы вниз, а в другой $\ddot{x} < 0$, и интегральные кривые выпуклы вверх. Кроме того, поскольку точки минимума расположены над этой прямой, то интегральные кривые, проходящие ниже изоклины $x = 2t - 2$ не имеют точек экстремума.

Рассмотрим также изоклину $x = 2t - 4$, $k = 4$. В данном случае угол наклона касательной будет равен 75 градусов. При этом интегральные кривые будут также стремиться к $x = 2t - 2$, но являясь выпуклыми вверх. Тем самым мы получили другое семейство решений диффура.

На графике выше изображены интегральные кривые, приближающие $x(t)$, полученные в соответствии с проведённым исследованием. Как видим, в точках пересечения с изоклинами кривые параллельны направлению касательных в точках пересечения.

Диффуры с разделяющимися переменными

Это суть дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{a(t)}{b(x)}$$

В данном случае стоит быть осторожным и проверять вырожденные случаи ($b(x) = 0$, $a(t) = 0$, чтобы нечаянно не убить некоторые решения).

Проверив особые случаи, перемножим крест-накрест и получим:

$$b(x)\,\mathrm{d}x = a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int \text{ теперь интегрируем каждую часть независимо от другой } \int$$

$$B(x) = A(t) + C \text{ — это и будет решением диффура}$$

Пример №2

$$\dot{x} = tx$$

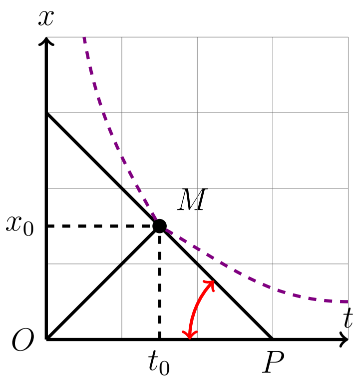
$$\dot{x} = tx = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = t \cdot \mathrm{d}t \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int t \cdot \mathrm{d}t$$

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C \Longrightarrow |x| = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^C}_{\text{какая-то константа}} \Longrightarrow |x| = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}},\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних двух действиях мы взяли экспоненту от обеих частей и избавились от модуля.

Пример №3

Найдите кривую $x(t)$, такую, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ отрезки, соединяющую точку касания $\big(t_0, x(t_0)\big)$ с точками пересечения касательной в данной точке с осями координат, будут равны.



Пусть мы касаемся нашей кривой $x(t)$ в точке (t_0, x_0) – обозначим её M. Можно заметить, что тогда OM – медиана. Отсюда следует, что координаты точек пересечения с осями абсцисс и ординат равны соответственно $(2t_0, 0)$ и $(0, 2x_0)$. Тогда тангенс угла наклона касательной $\tan\angle MPO = -\dfrac{2x_0}{2t_0} = -\dfrac{x_0}{t_0} = \dot{x}(t_0)$, так как тангенс угла наклона касательной к функции $x(t)$ в точке t_0 есть не что иное, как производная $x(t)$ – $\dot{x}(t)$ – в данной точке. Таким образом, мы получили диффур:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Решим его, тем самым найдя $x(t)$.

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow -\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$-\ln|x| = \ln|t| + C \Longrightarrow \frac{1}{|x|} = |t| \cdot \lambda,\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \frac{\lambda}{t},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Пример №4

$$xt + (t+1)\cdot\dot{x} = 0$$

$$xt + (t+1)\cdot\dot{x} = 0 \Longrightarrow xt + (t+1)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{xt}{t+1} \Longrightarrow -\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{t\cdot\mathrm{d}t}{t+1} \Longrightarrow \int = \int$$

Возьмём правый интеграл.

$$\int \frac{t\cdot\mathrm{d}t}{t+1} = \int 1 - \frac{1}{t+1}\ \mathrm{d}t = t - \ln|t+1|$$

Тогда:

$$-\ln|x| = t - \ln|t+1| + C \Longrightarrow \frac{1}{|x|} = \lambda\cdot\frac{e^t}{t+1},\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \lambda\cdot e^{-t}\cdot(t+1),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

n-параметрическое семейство кривых

Это система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \mathsf{F}\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \\ \mathsf{F}'\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathsf{F}^{(n)}\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \end{cases}$$

– всего $n+1$ уравнение, константы $c_1,\ \ldots,\ c_n$ неизвестны. Необходимо, как и раньше, найти подходящую $x(t)$.

Метод решения таков: сначала мы выражаем константы $c_1,\ \ldots, c_n$ через $t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, и потом подставляем всё в одно уравнение, тем самым получая диффур вида:

$$\mathsf{G}\big(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t)\big) = 0$$

который мы умеем решать.

Пример №5

Необходимо найти диффур, задающий множество окружностей, касающихся оси абсцисс.

Чего делать, сходу и не вдуплишь, да?) Однако, выход есть — если видим слово "окружность нужно тут же писать её уравнение.

Пускай у нас есть окружность радиуса R, касающаяся оси абсцисс в точке t_0. Тогда выполнено тождество:

$$(x-R)^2 + (t-t_0)^2 = R^2$$

В данном случае R и t_0 и есть наши неизвестные константы. Составим систему уравнений из производных:

$$\begin{cases} (x-R)^2 + (t-t_0)^2 - R^2 = 0 \\ (2x\cdot\dot{x} - 2R\cdot\dot{x}) + 2t - 2t_0 = 0 \\ 2(\dot{x})^2 + 2x\cdot\ddot{x} - 2R\cdot\ddot{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Осталось выразить R через $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ из последнего уравнения, подставить во второе и выразить t_0, после чего загнать всё в первое уравнение и получить нужный диффур.

Замена переменных

Разберём на примере. Пускай у нас есть диффур

$$\dot{x} = x - \sqrt{x}$$

Решать его в таком виде не очень приятно. Поэтому сделаем замену переменных (название – сущая формальность, так как вообще говоря мы заменяем одну функцию на другую, а не переменную):

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Тогда диффур примет вид:

$$2\dot{y} \cdot y = y^2 - y \Longrightarrow 2\dot{y} = y - 1 \Longrightarrow \frac{2\,\mathrm{d}y}{y-1} = \mathrm{d}t$$

— получили простое уравнение с разделяющими переменными.

Рассмотрим ещё несколько примеров замен.

Линейная замена

Пускай у нас есть диффур вида:

$$\dot{x} = f(at + bx)$$

Можно сделать замену $u = at + bx$, получив уравнение $\dot{x} = f(u)$. Решим этот диффур относительно переменной u, получив функцию $x(u)$, после чего, сделав обратную замену, выразить искомую $x(t)$.

$$u = at + bx$$

$$\mathrm{d}u = a \cdot \mathrm{d}t + b \cdot \mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u - b \cdot \mathrm{d}x}{a}$$

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{a \cdot \mathrm{d}x}{\mathrm{d}u - b \cdot \mathrm{d}x} = f(u)$$

$$a \cdot \mathrm{d}x = f(u)\,\mathrm{d}u - b \cdot f(u)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \big(a + b \cdot f(u)\big)\,\mathrm{d}x = f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}x = \frac{f(u)}{a + b \cdot f(u)}\,\mathrm{d}u$$

После этих махинаций всё легко решается как уравнение с разделяющими переменными.

Пример №6

$$\dot{x} = \cos(x - t)$$

Ну тут совсем толсто: $u = x - t$. В данном случае $a = -1$, $b = 1$. По формуле выше:

$$\mathrm{d}x = \frac{\cos u}{\cos u - 1}\,\mathrm{d}u$$

Теперь интегрируем, получаем $x(u)$ и делаем обратную замену.

Общий вид

Пускай у нас есть диффур:

$$\dot{x} = f(t,\, x)$$

Можно сделать замену $u = \varphi(t,\, x)$, получив новое уравнение (весьма удачно, если получится диффур вида $\dot{u} = f(t,\, u)$, но такое бывает далеко не всегда). Решаем его и делаем обратную замену, получая $x(t)$.

Пример №7

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x$$

Здесь можно сделать замену $u = xt$, откуда $\dot{u} = \dot{x} \cdot t + x \cdot 1$. Подставим:

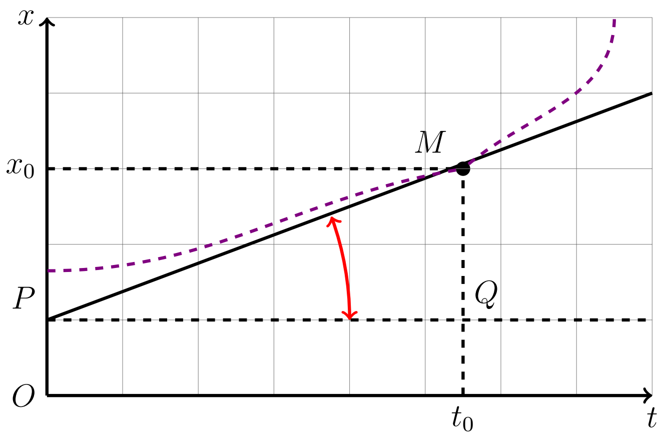
$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x \iff \dot{x} \cdot t + x = 2x^2 \cdot t^3 \Longrightarrow \dot{u} = 2u^2 \cdot t$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2u^2 \cdot t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 2t \cdot \mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$-\frac{1}{u} = t^2 + C \Longrightarrow u = -\frac{1}{t^2 + C}$$

Делаем обратную замену и выражаем $x(t)$:

$$u = xt \Longrightarrow xt = -\frac{1}{t^2 + C} \Longrightarrow x = -\frac{1}{t^3 + Ct}$$

Домашнее задание №1

Задача №1. *Найти все кривые $x(t)$, такие, что длина отрезка, соединяющего точку касания и точку пересечения касательной в данной точке с одной из осей, была постоянной.*



Решение.

Пусть длина отрезка $MP = l$. Рассмотрим треугольник MPQ – на рисунке выше. Мы знаем, что $PQ = t_0$. Известно, что $\tan \angle MPQ = \dot{x} = \dfrac{MQ}{PQ}$, откуда получаем, что

$$MQ = PQ \tan \angle MPQ = t_0 \dot{x}$$

. По условию, равенство можно продлить на всю числовую прямую, получая:

$$PQ = t \Longrightarrow MQ = t\dot{x}$$

Теперь применим Теорему Пифагора, чтобы получить дифференциальное уравнение на искомую кривую:

$$MP^2 = PQ^2 + MQ^2$$
$$l^2 = t^2 + t^2(\dot{x})^2 \Longrightarrow l^2 - t^2 = t^2(\dot{x})^2$$
$$(\dot{x})^2 = \frac{l^2 - t^2}{t^2} \Longrightarrow \dot{x} = \pm\frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}$$

Получили диффур (вообще говоря, два диффура). Будем рассматривать случай со знаком $+$, так как знак $-$ приведёт нас к почти аналогичному результату (это обговорится далее).

Итак, имеем диффур с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t} \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int \mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Возьмём правый интеграл, сделав замену переменных.

$$\int \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = \Big\{t = l\cdot\sin\beta,\ \mathrm{d}t = l\cdot\cos\beta\,\mathrm{d}\beta\Big\} = \int \frac{\sqrt{l^2(1-\sin^2\beta)}}{l\cdot\sin\beta}\cdot l\cdot\cos\beta\,\mathrm{d}\beta =$$

$$= \int \frac{l\cdot\cos\beta\cdot\cos\beta}{\sin\beta}\,\mathrm{d}\beta = l\cdot\int\frac{1-\sin^2\beta}{\sin\beta}\,\mathrm{d}\beta = l\left(\int\frac{\mathrm{d}\beta}{\sin\beta} - \int\sin\beta\,\mathrm{d}\beta\right) =$$

$$= \left\{\int\frac{\mathrm{d}\beta}{\sin\beta} = \int\frac{\mathrm{d}\beta}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \int\frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{d}\beta}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \int\frac{\mathrm{d}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \ln\left|\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right| + C\right\} =$$

$$l\cdot\ln\left|\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right| + l\cdot\cos(\beta) + C$$

Теперь сделаем обратную замену:

$$t = l\cdot\sin\beta \Longrightarrow \sin\beta = \frac{t}{l} \Longrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{1-\frac{t^2}{l^2}}$$

$$\ln\left|\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right| = \ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right| = \ln\left|\frac{2\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\cdot\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right| = \ln\left|\frac{l\cdot\sin\beta}{(1+\cos\beta)\cdot l}\right| = \ln\left|\frac{t}{l\pm\sqrt{l^2-t^2}}\right|$$

Теперь запишем полный результат интегрирования обеих частей, помня, что $\int \mathrm{d}x = x + C$:

$$x = \pm\sqrt{l^2-t^2} + l\cdot\ln\left|\frac{t}{l\pm\sqrt{l^2-t^2}}\right| + C$$

У нас тут есть модуль, что не очень хорошо. Кроме того, мы не рассмотрели случай с минусом. Убьём двух зайцев одним ударом, немного преобразовав ответ:

$$\pm\sqrt{l^2-t^2} + l\cdot\ln\left|\frac{t}{l\pm\sqrt{l^2-t^2}}\right| = \pm\sqrt{l^2-t^2} + \frac{l}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{l\pm\sqrt{l^2-t^2}}\right|^2 =$$

$$= \pm\sqrt{l^2-t^2} + \frac{l}{2}\cdot\ln\left(\frac{t^2}{(l\pm\sqrt{l^2-t^2})\cdot(l\pm\sqrt{l^2-t^2})}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{l^2-t^2} + \frac{l}{2}\cdot\ln\left(\frac{t^2\cdot(l\mp\sqrt{l^2-t^2})}{(l\pm\sqrt{l^2-t^2})\cdot(l\pm\sqrt{l^2-t^2})\cdot(l\mp\sqrt{l^2-t^2})}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{l^2-t^2} + \frac{l}{2}\cdot\ln\left(\frac{t^2\cdot(l\mp\sqrt{l^2-t^2})}{(l\pm\sqrt{l^2-t^2})\cdot\left(l^2-(l^2-t^2)\right)}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{l^2-t^2} + \frac{l}{2}\cdot\ln\left(\frac{l\mp\sqrt{l^2-t^2}}{(l\pm\sqrt{l^2-t^2})}\right)$$

Заметим, что если бы мы взяли случай с минусом, то тогда перед слагаемым с логарифмом стоял бы знак минус. Тогда, домножив на $-\frac{1}{2}$, мы бы возводили подлогарифменное выражение не в 2 степень, а в -2, соответственно абсолютно аналогичными преобразованиями получив под логарифмом такую же, но перевёрнутую дробь. Однако, и в числителе, и в знаменателе, у нас возникает по $\pm$ или $\mp$ – следовательно, рассмотрев случай с плюсом, мы уже получили все возможные варианты ответа.

Итоговый полный ответ:

$$x = \pm\sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln\left(\frac{l \mp \sqrt{l^2 - t^2}}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2})}\right) + C$$

Осталось лишь указать, что $t \in [-l,\, l]$, и $x(\pm l) = C$. □

Задача №2. *Придумать диффур 1 порядка, не обладающий решением на всей прямой. То бишь, не для всех t решение $\dot{x} = f(t,\, x)$ должно существовать.*

Решение. $f(t, x)$ должна быть всюду определённой функцией. Поэтому достаточно взять такую $x = x(t)$ в качестве решения диффура, чтобы она не была всюду определена, при выполнении условия выше.

Пример: $\dot{x} = -x^2$. Проверим, что подходит:

$$\dot{x} = -x^2 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$\frac{1}{x} = t \Longrightarrow x = \frac{1}{t}$$

□

Задача №3. *Решите диффур:*

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0, \textit{начальное условие: } x(0) = 1$$

Решение.

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0 \Longrightarrow (t^2 - 1) \cdot \mathrm{d}x + 2tx^2\,\mathrm{d}t = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{2t \cdot \mathrm{d}t}{1 - t^2} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\frac{1}{x} = \ln|1 - t^2| + C$$

Найдём константу:

$$x(0) = 1 \Longrightarrow 1 = \ln 1 + C \Longrightarrow C = 1$$

Итоговая кривая:

$$\frac{1}{x} = \ln|1 - t^2| + 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{\ln|1 - t^2| + 1}$$

□

Задача №4. *Изоклинами найти приближённое решение:*

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x}$$

Также изобразите изоклины на графике и покажите все различные (с точностью до топологии и асимптотики) решения (то есть, как рассмотрено выше в примере).

Решение. Уравнения изоклин:

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x} = k \Longrightarrow x = t \cdot \frac{k}{1 - k}$$

Получим прямые изменения характера роста и выпуклости, исследовав первые две производные:

$$\dot{x} = 0 = \frac{x}{t+x} \Longrightarrow x = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}(t+x) - x(1+\dot{x})}{(t+x)^2} = \frac{\dot{x}t - x}{(t+x)^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\frac{x}{t+x} \cdot t - x}{(t+x)^2} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{-x^2}{(t+x)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$\ddot{x} > 0 \Longrightarrow t + x < 0 \Longrightarrow x < -t$$

$$\ddot{x} < 0 \Longrightarrow t + x > 0 \Longrightarrow x > -t$$

Таким образом, характер роста функции меняется в нуле, а выпуклость изменяется, проходя через прямые $x = 0$, $x = -t$. На основании этого и нескольких изоклин можно построить приблизительный график кривой $x(t)$. □

Задача №5. *Придумайте (вообще говоря, найдите) диффур 1 порядка, задающий множество прямых, являющихся касательными к единичной окружности с центром в нуле.*

Решение. Уравнение касательной к окружности в точке $(t_0,\ x_0)$ — $x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1$. Таким образом, у нас есть два уравнения:

$$\begin{cases} x_0^2 + t_0^2 = 1 \\ x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1 \end{cases}$$

Будем выражать из них t_0 и x_0, чтобы остались только переменные t и x. Для этого продифференцируем второе уравнение и попреобразуем:

$$x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1 \Longrightarrow \dot{x}x_0 + t_0 = 0$$

$$\dot{x}x_0 = -t_0 \text{ — здесь возведём в квадрат, запоминая знак минус — } (\dot{x})^2 x_0^2 = t_0^2$$

Из уравнения окружности мы получаем выражение на квадрат t_0:

$$x_0^2 + t_0^2 = 1 \Longrightarrow t_0^2 = 1 - x_0^2$$

— теперь подставим t_0^2 в уравнение выше:

$$(\dot{x})^2 x_0^2 = 1 - x_0^2 \Longrightarrow x_0^2\big(1 + (\dot{x})^2\big) = 1$$

$$x_0^2 = \frac{1}{1 + (\dot{x})^2} \Longrightarrow t_0^2 = 1 - x_0^2 = \frac{(\dot{x})^2}{1 + (\dot{x})^2}$$

$$x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}}, \quad t_0 = \pm\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}}$$

Осталось подставить выраженные константы в уравнение касательной и получить некоторыми преобразованиями искомый диффур:

$$\pm\frac{x}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}} \pm \frac{\dot{x}t}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}} = 1$$

$$\pm x \pm \dot{x}t = \sqrt{1 + (\dot{x})^2}$$

$$x^2 \pm 2\dot{x}xt + (\dot{x})^2 t^2 = 1 + (\dot{x})^2$$

$$(\dot{x})^2(t^2 - 1) \pm (2xt)\dot{x} + (x^2 - 1) = 0 \text{ — квадратное уравнение}$$

$$\dot{x} = \frac{\pm 2xt \pm \sqrt{4x^2t^2 - 4(t^2 - 1)(x^2 - 1)}}{2(t^2 - 1)}$$

$$\dot{x} = \frac{\pm xt \pm \sqrt{x^2 + t^2 - 1}}{t^2 - 1}$$

□

Семинар 2, 17 января

Специальные замены. Однородные уравнения.

Определение 2. *Функцию $g(t,\, x)$ назовём **однородной**, если*

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}:\ g(\lambda t,\, \lambda x) = \lambda \cdot g(t,\, x)$$

*Функции $M(t,\, x)$ и $N(t,\, x)$ – **одинаково однородны**, если*

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}:\ M(\lambda t,\, \lambda x) = \lambda \cdot M(t,\, x) \iff N(\lambda t,\, \lambda x) = \lambda \cdot N(t,\, x)$$

Определение 3. ***Однородное** дифференциальное уравнение – это диффур вида*

$$M(t,\, x)\,\mathrm{d}t + N(t,\, x)\,\mathrm{d}x = 0$$

где функции M и N – одинаково однородны.

Решать такие диффуры можно путём сведения к уравнению с разделяющимися переменными при помощи различных замен. О них, а также о том, как сводить иные уравнения к однородным, мы и поговорим.

Однородные уравнения: $y = \dfrac{x}{t}$

Пускай у нас имеется диффур вида:

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Оно уже однородное. Мы хотим привести его к уравнению с разделяющими переменными. Следующая замена позволит нам это сделать: $y = \dfrac{x}{t}$:

$$y = \frac{x}{t} \Longrightarrow x = y \cdot t \Longrightarrow \mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}y$$

– подставляем в однородное уравнение и решаем, находя $y(t)$. После этого обратная замена.

Пример №1

$$t\,\mathrm{d}x = (x+t)\,\mathrm{d}t$$

Данное уравнение уже является однородным. Преобразуем его и сделаем вышеуказанную замену (предварительно рассмотрев вырожденные случаи):

$$t\,\mathrm{d}x = (x+t)\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}x = \frac{x}{t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}t,\ y = \frac{x}{t}$$
$$(y\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}y) = (y+1)\,\mathrm{d}t$$
$$t\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

Осталось проинтегрировать, получить $y(t)$ и подставить $y = \dfrac{x}{t}$.

Пример №2

$$x^2 + \dot{x}t^2 = tx\dot{x}$$

Помня, что $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, преобразуем диффур и сделаем ту же замену.

$$x^2 + \dot{x}t^2 = tx\dot{x} \iff x^2\,\mathrm{d}t = (tx - t^2)\,\mathrm{d}x,\ y = \frac{x}{t}$$
$$y^2t^2\,\mathrm{d}t = t^2(y-1)(y\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}y)$$
$$y^2\,\mathrm{d}t = y^2\,\mathrm{d}t + yt\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}y$$
$$y\,\mathrm{d}t = t(y-1)\,\mathrm{d}y \iff \frac{\mathrm{d}t}{t} = \left(1 - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$$
$$\ln|t| = y - \ln|y| + C$$

Теперь удобно делать обратную замену:

$$\ln|yt| = y + C \iff \ln|x| = \frac{x}{t} + C$$

и преобразовать получившееся выражение до вида $x = x(t)$.

Пример №3

$$t\dot{x} = x - t\cdot\exp\left(\frac{x}{t}\right)$$

— здесь руки сами просят поделить на t ($t \neq 0$, так как иначе уравнение не определено):

$$\dot{x} = \frac{x}{t} - \exp\left(\frac{x}{t}\right),\ y = \frac{x}{t}$$
$$\frac{y\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y - e^y \Longrightarrow \frac{t\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -e^y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{e^y} = -\frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$
$$e^{-y} = -\ln|t| + C$$

— далее обратная замена.

Однородные уравнения: дробно-линейный вид

Пускай мы имеем диффур вида:

$$\dot{x} = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right),\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ясно, что числитель и знаменатель суть уравнения прямых на координатной плоскости. Мы можем преобразовать уравнения такого типа к только что рассмотренным $\dot{x} = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$, если перенесём систему координат в точку пересечения данных прямых.

Теперь подробнее о методе. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1t + b_1x + c_1 = 0 \\ a_2t + b_2x + c_2 = 0 \end{cases}$$

— решением данной системы будет точка пересечения двух прямых $(t^*,\ x^*)$. Теперь перенесём систему координат в данную точку, произведя замену:

$$\widetilde{t} = t - t^*$$
$$\widetilde{x} = x - x^*$$

— теперь, произведя простые преобразования, получаем однородный диффур $(\dot{\widetilde{x}}) = \left(\frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}}\right)$. Решив его, осталось провести обратную замену, прибавив соответствующие константы.

Здесь стоит обговорить случай, когда выражения в числителе и знаменателе задают параллельные прямые, то есть:

$$\dot{x} = f\left(\frac{at + bx + c_1}{at + bx + c_2}\right)$$

— отличаются только на свободный член, ибо $c_2 = c_1 + c$, $c \in \mathbb{R}$. В данном случае уравнение тривиально сводится к уравнению вида $\dot{x} = \widetilde{f}(at + bx)$, которое мы умеем решать, линейной заменой сводя к диффуру с разделяющимися переменными.

Пример №4

$$(x + 2)\,\mathrm{d}t = (2t + x - 4)\,\mathrm{d}x$$

Перезапишем в дробно-линейном виде:

$$\dot{x} = \frac{x + 2}{2t + x - 4}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2t + x - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x + 2 \\ \widetilde{t} = t - 3 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \frac{\widetilde{x}}{2\widetilde{t} + \widetilde{x}}$$

— осталось решить его как уравнение с разделяющимися переменными.

Пример №5

$$\dot{x} = \frac{5t - x - 3}{3t + 2x - 7}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 5t - x - 3 = 0 \\ 3t + 2x - 7 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x - 2 \\ \widetilde{t} = t - 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \frac{5\widetilde{t} - \widetilde{x}}{3\widetilde{t} + 2\widetilde{x}}$$

Поделим числитель и знаменатель правой части уравнения на $\widetilde{t}$ и положим $y = \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}}$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\widetilde{t} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \frac{5 - 4y - 2y^2}{3 + 2y}$$

Однородные уравнения: $x = y^m$

Пускай мы имеем уравнение

$$M(t,\, x)\,\mathrm{d}t + N(t,\, x)\,\mathrm{d}x = 0$$

где функции M и N – НЕ одинаково однородные. Однако, мы были бы рады привести его к таковому. В этом нам поможет замена $x = y^m$, где $m \in \mathbb{Q}$.

Идея в том, что у однородного уравнения степени каждого из слагаемых уравнения должны совпадать — тогда при домножении на константу мы сможем её спокойно вынести за функции. Поэтому сначала мы найдём степень m, после чего будем решать обычное однородное уравнение при помощи известных методов. Разберём на примерах.

Пример №6

$$2t^4 \cdot x\dot{x} + x^4 = 4t^6$$

— перепишем с дифференциалами:

$$2t^4 \cdot x\,\mathrm{d}x + x^4\,\mathrm{d}t = 4t^6\,\mathrm{d}t$$

Делаем замену:

$$x = y^m \Longrightarrow \mathrm{d}x = m \cdot y^{m-1}\,\mathrm{d}y$$

— получаем уравнение:

$$2t^4 \cdot y^m \cdot m \cdot y^{m-1}\,\mathrm{d}y + y^{4m}\,\mathrm{d}t = 4t^6\,\mathrm{d}t$$

Приравняем степени:

$$3 + 2m = 4m = 6 \Longrightarrow m = \frac{3}{2}$$

— теперь подставляем и решаем однородный диффур.

Пример №7

$$\dot{x} = x^2 - \frac{2}{t^2}$$

Перепишем с дифференциалами и сделаем замену $x = y^m$:

$$t^2\,\mathrm{d}x = x^2t^2\,\mathrm{d}t - 2\,\mathrm{d}t$$
$$x = y^m,\ \mathrm{d}x = m \cdot y^{m-1}\,\mathrm{d}y$$
$$m \cdot t^2 \cdot y^{m-1}\,\mathrm{d}y = y^{2m} \cdot t^2\,\mathrm{d}t - 2\,\mathrm{d}t$$

Ищем степень:

$$2 + m - 1 = 2m + 2 = 0 \Longrightarrow m = -1$$

Тогда:

$$-t^2 \cdot y^{-2}\,\mathrm{d}y = y^{-2} \cdot t^2\,\mathrm{d}t - 2\,\mathrm{d}t$$
$$-t^2\,\mathrm{d}y = t^2\,\mathrm{d}t - 2y^2\,\mathrm{d}t$$

Получили однородное уравнение, которое решается классически: $z = \dfrac{y}{t}$:

$$z = \frac{y}{t},\ \ y = zt,\quad \mathrm{d}y = t\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}t$$
$$-t^2\big(t\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}t\big) = t^2\,\mathrm{d}t - 2z^2t^2\,\mathrm{d}t$$
$$-t\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t - 2z^2\,\mathrm{d}t$$
$$t\,\mathrm{d}z = (2z^2 - z - 1)\,\mathrm{d}t$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}z}{2z^2 - z - 1} \Longrightarrow \int = \int$$

— находим решение $z = z(t)$, после чего производим череду обратных замен, находя $x = x(t)$.

Домашнее задание №2

Задача №1. *Решить диффур:*

$$\dot{x} = 2 \cdot \left(\frac{x+2}{x+t-1}\right)^2$$

Решение. Решим систему:

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + t - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x + 2 \\ \widetilde{t} = t - 3 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = 2\left(\frac{\widetilde{x}}{\widetilde{x} + \widetilde{t}}\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}} + 1}\right)^2 \quad y = \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}}$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}\widetilde{t} + \widetilde{t}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^2 \iff y + \frac{\widetilde{t}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \frac{2y^2}{y^2 + 2y + 1}$$

$$\frac{\widetilde{t}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \frac{2y^2 - y^3 - 2y^2 - y}{y^2 + 2y + 1}$$

$$\frac{(y^2 + 2y + 1)\,\mathrm{d}y}{y(y^2+1)} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{t}}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

Возьмём правый интеграл, разбив его в сумму:

$$\int \frac{(y^2 + 2y + 1)\,\mathrm{d}y}{y(y^2+1)} = \int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2+1} + \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{y^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}y}{y(y^2+1)}$$

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\mathrm{d}(y^2+1)}{y^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \ln|y^2+1| + C$$

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = 2\arctan y + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y^2+1)} = \left\|\begin{matrix} u = y^2 \\ \mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{a\,\mathrm{d}u}{u} + \int \frac{b\,\mathrm{d}u}{u+1}\right) =$$

$$= \left\|\begin{matrix} a = 1 \\ b = -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u+1}\right) = \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{2}\ln|u+1| = \left\|u = y^2\right\| = \ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + C$$

$$\int \frac{(y^2+2y+1)\,\mathrm{d}y}{y(y^2+1)} = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + 2\arctan y + \ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + C = 2\arctan y + \ln|y| + C$$

Итого:

$$2\arctan y + \ln|y| + C = \ln|\widetilde{t}| \iff \widetilde{t} = \lambda y \cdot \exp(2\arctan y),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\left\|y = \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}}\right\| \Longrightarrow \widetilde{t}^2 = \lambda\widetilde{x} \cdot \exp\left(2\arctan\left(\frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}}\right)\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\left\|\widetilde{x} = x + 2,\ \widetilde{t} = t - 3\right\| \Longrightarrow (t-3)^2 = \lambda \cdot (x+2) \cdot \exp\left(2\arctan\left(\frac{x+2}{t-3}\right)\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$\square$

Задача №2. *Решить диффур:*

$$\dot{x} = \frac{x+2}{t+1} + \tan\left(\frac{x-2t}{t+1}\right)$$

Решение. Решим систему:

$$\begin{cases} x+2=0 \\ t+1=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ t=-1 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x+2 \\ \widetilde{t} = t+1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}} + \tan\left(\frac{\widetilde{x}-2\widetilde{t}}{\widetilde{t}}\right) \iff \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}} + \tan\left(\frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}} - 2\right),\ y = \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}}$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}\widetilde{t} + \widetilde{t}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = y + \tan(y-2) \iff \frac{\widetilde{t}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \tan(y-2)$$

$$\cot(y-2)\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}\widetilde{t}}{\widetilde{t}} \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|\sin(y-2)| = \ln|\widetilde{t}| + C \iff \sin(y-2) = \lambda\cdot\widetilde{t},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

$$y = 2 + \arcsin\left(\lambda\widetilde{t}\right) \iff \widetilde{x} = 2\widetilde{t} + \widetilde{t}\arcsin\left(\lambda\widetilde{t}\right)$$

$$x = 2t + (t+1)\arcsin(\lambda(t+1))$$

$\square$

Задача №3. *Решить диффур:*

$$2x + (xt^2+1)t\dot{x} = 0$$

Решение. Перепишем с дифференциалами и сделаем замену $x = y^m$:

$$2x\,\mathrm{d}t + (xt^2+1)\cdot t\,\mathrm{d}x = 0 \iff 2x\,\mathrm{d}t + xt^3\,\mathrm{d}x + t\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\left\|\begin{matrix} x = y^m \\ \dot{x} = m\cdot y^{m-1}\,\mathrm{d}y \end{matrix}\right\| \Longrightarrow 2y^m\,\mathrm{d}t + y^m\cdot t^3\cdot m\cdot y^{m-1}\,\mathrm{d}y + t\cdot m\cdot y^{m-1}\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\left\|\begin{matrix} m = m+2+1+m-1 = m \iff m=-2 \\ x = \dfrac{1}{y^2} \end{matrix}\right\| \Longrightarrow \frac{2\,\mathrm{d}t}{y^2} + \left(\frac{t^2}{y^2}+1\right)t\cdot(-2)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{y^3} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{y} = \left(\frac{t^2}{y^2}+1\right)\frac{t\,\mathrm{d}y}{y^3},\ z = \frac{y}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{z^2} = \left(\frac{1}{z^2}+1\right)\cdot\frac{1}{z^3}\cdot(z\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}z) \iff \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{z^2}+1\right)\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{z^2}+1\right)\cdot\frac{t\,\mathrm{d}z}{z}$$

$$\left(1-1-\frac{1}{z^2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{z^2}+1\right)\cdot\frac{t\,\mathrm{d}z}{z}$$

$$-\frac{\mathrm{d}t}{t} = \left(\frac{1}{z}+z\right)\mathrm{d}z \Longrightarrow \int = \int$$

$$-\log|t| + C = \log|z| + \frac{z^2}{2} \iff \left\|\ln|z| = \ln|y| - \ln|t|,\ \frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2t^2}\right\| \iff \ln|y|\frac{y^2}{2t^2} + C = 0$$

$$\left\|x = \frac{1}{y^2} \iff y = \frac{1}{\sqrt{x}}\right\| \Longrightarrow \ln|\sqrt{x}| + \frac{1}{2t^2x} + C = 0 \iff \frac{1}{xt^2} = \ln|x| + C$$

$\square$

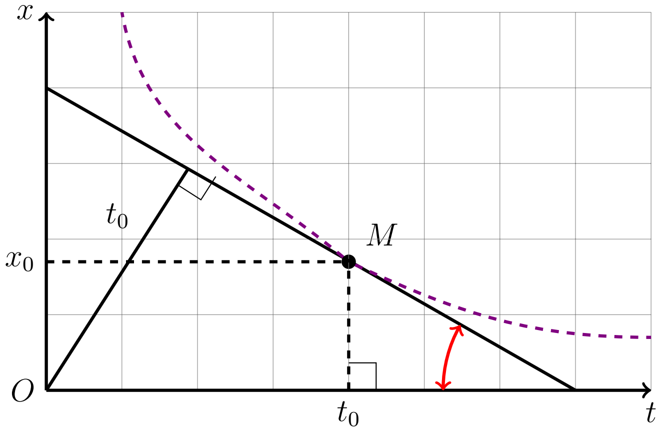
Задача №4. *Найти все такие* α, β, a, $b \in \mathbb{R}$, *такие, что дифференциальное уравнение*

$$\dot{x} = at^{\alpha} + bx^{\beta}$$

сводится *к однородному.*

Решение. $\square$

Задача №5. *Найдите все кривые* $x(t)$, *такие, что расстояние от начала координат до касательной к* $x(t)$ *в любой точке* $\big(t_0,\, x(t_0)\big)$ *совпадает с абсциссой данной точки (равно* t_0*):*



Решение. $\square$

Семинар 3, 24 января

Линейные уравнения. Базовый случай

Линейные диффуры первого порядка имеют следующий общий вид:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Опишем 2 метода решения таких уравнений в общем виде.

Метод замены

Имеем диффур: $\dot{x} + a(t)x = b(t)$. Делаем следующую замену: $x = uv$, где $u = u(t)$, $v = v(t)$ – функции от t. Естественным образом изменяется и дифференциал:

$$\begin{cases} x = uv \\ \dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\dot{u}v + u\dot{v} + a(t)uv = b(t)$$

Сгруппируем слагаемые в левой части по u:

$$\dot{u}v + u\big(\dot{v} + a(t)v\big) = b(t)$$

Теперь приравниваем выражение в скобках к нулю, получая систему:

$$\begin{cases} \dot{v} + a(t)v = 0 \\ \dot{u}v = b(t) \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы – это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + a(t)v = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -a(t)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|v| = -\int a(t)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow v = \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Прошу заметить, что в данном случае константа $C = 0$ – это важно. Теперь подставляем данное выражение во второе уравнение.

$$\dot{u}\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) = b(t)$$

$$\mathrm{d}u = b(t)\cdot\exp\left(\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$u = \int b(t)\cdot\exp\left(\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t$$

Осталось подставить полученные u и v, получив $x = x(t) = u\cdot v$:

$$x = u\cdot v = \left[\int b(t)\cdot\exp\left(\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\right]\cdot\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Пример №1

$$\dot{x} + 2tx = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr)$$

Будем действовать по алгоритму.

$$\begin{cases} x = uv \\ \dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases}$$

$$\dot{u}v + u\dot{v} + 2tuv = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr) \iff \dot{u}v + u\bigl(\dot{v} + 2tv\bigr) = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr)$$

$$\begin{cases} \dot{v} + 2tv = 0 \\ \dot{u}v = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = \exp\bigl(-t^2\bigr) \\ \dot{u}\exp\bigl(-t^2\bigr) = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr) \end{cases}$$

$$\dot{u} = t \Longrightarrow u = \frac{t^2}{2} + C$$

$$x = uv = \left(\frac{t^2}{2} + C\right) \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr)$$

Метод вариации произвольной постоянной

Имеем диффур: $\dot{x} + a(t)x = b(t)$. Если $b(t) := 0$, то у нас имеется однородный диффур $\dot{x} + a(t)x = 0$. Ясно, что каждое решение линейного диффура является решением однородного диффура с нулевой правой частью, смещённого на $b(t)$ – по аналогии с СЛУ из Линала, мы сначала решаем однородную СЛУ, получая общее решение, а затем смещаем на вектор значений (столбец правых частей из расширенной СЛУ). Таким образом, получаем метод:

$$\dot{x} + a(t)x = 0$$

$$\mathrm{d}x + a(t)x\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -a(t)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|x| = -\int a(t)\,\mathrm{d}t + C \Longrightarrow x = u \cdot \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right),\ u \in \mathbb{R}$$

Теперь сделаем вариацию постоянной (тем самым получая все возможные «сдвиги» решения однородного уравнения). Полагаем теперь, что u – не константа, а тоже некоторая функция от t: $u = u(t)$. Тогда можно сделать замену $x = x(t, u)$ и подставить в исходное уравнение:

$$\dot{\left[u \cdot \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]} + a(t) \cdot u \cdot \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) = b(t)$$

$$\dot{u}\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) - u \cdot a(t) \cdot \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) + a(t) \cdot u \cdot \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) = b(t)$$

Заметим, что последние два слагаемых в левой части равны по модулю и противоположны по знаку, следовательно, их можно попросту сократить, получая диффур:

$$\dot{u}\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) = b(t)$$

$$\mathrm{d}u = b(t) \cdot \exp\left(\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$u = \int b(t) \cdot \exp\left(\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t$$

Осталось подставить полученное решение u в выражение для x, чтобы получить общее решение диффура:

$$x = u \cdot \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) = \left[\int b(t) \cdot \exp\left(\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\right] \cdot \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Внимательный читатель может заметить, что оба метода являются по факту одним и тем же. Однако, в зависимости от ситуации, пользоваться можно любым подходом.

Пример №2

$$t\dot{x} - 2x = 2t^4$$

Сначала решим однородное.

$$t\dot{x} = 2x$$

$$t\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|x| = 2\ln|t| \Longrightarrow x = u \cdot t^2,\ u \in \mathbb{R}$$

Теперь сделаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{cases} x = ut^2 \\ \mathrm{d}x = \dot{u}t^2 + 2ut \end{cases}$$

$$t\left(\dot{u}t^2 + 2ut\right) - 2ut^2 = 2t^4$$

$$\dot{u}t^3 + 2ut^2 - 2ut^2 = 2t^4$$

$$\dot{u}t^3 = 2t^4 \Longrightarrow \dot{u} = 2t \Longrightarrow u = t^2 + C$$

$$x = ut^2 = (t^2 + C)t^2 = t^4 + Ct^2$$

Получили общее решение.

Пример №3

$$x = t(\dot{x} - t \cdot \cos t)$$

Приведём к «классическому» виду:

$$\dot{x}t - x = t^2 \cdot \cos t$$

Однородное:

$$\dot{x}t = x$$

$$\mathrm{d}xt \cdot t = x\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|x| = \ln|t| + C \Longrightarrow x = ut,\ u \in \mathbb{R}$$

Сделаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{cases} x = ut \\ \mathrm{d}x = \dot{u}t + u \end{cases}$$

$$(\dot{u}t + u)t - ut = t^2 \cos t \Longrightarrow \dot{u}t^2 = t^2 \cos t$$

$$\dot{u} = \cos t \Longrightarrow u = \sin t + C$$

Подставляем в выражение для x, чтобы получить итоговый ответ:

$$x = ut = (\sin t + C)t = t\sin t + Ct$$

Функция от x, сведение к линейному

Пускай у нас есть уравнение вида:

$$a'(x)\dot{x} + b(t) \cdot a(x) = c(t)$$

где $a = a(x)$ – функция от $\underline{x}$. Его можно свести к линейному ввиду свойств дифференциала:

$$a'(x)\dot{x} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

Подставляем в исходное уравнение, получая диффур, линейный по $\underline{a}$:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + b(t) \cdot a = c(t)$$

Его уже можно решить приведёнными выше методами, получив решение $a = f(t)$, после чего выразить x через $a(x) = f(t)$.

«Обратное» решение: $t = t(x)$

Ранее мы рассматривали уравнения, линейные относительно переменной x и её производной. То есть мы считали, что t является независимой переменной, а x является зависимой переменной. Однако, всегда стоит иметь в виду, что возможен противоположный подход. То есть можно считать переменную x независимой переменной, а t – зависимой переменной. На практике часто встречаются задачи, в которых уравнение линейно относительно переменной t и её производной, а не x. В общем виде такое уравнение можно записать так:

$$\big(a(x)t + b(x)\big)\dot{x} = c(x)$$

Преобразуем его:

$$\big(a(x)t + b(x)\big)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c(x)$$
$$a(x)t + b(x) = c(x)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$
$$c(x)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - a(x)t = b(x)$$
$$\dot{t} - \frac{a(x)}{c(x)} \cdot t = \frac{b(x)}{c(x)}$$

Теперь решаем диффур любым из рассмотренных выше методов, но для функции $t = t(x)$.

Пример №4

$$(2t + x^3)\dot{x} = x$$

Преобразуем его к диффуру от t, подставив нужные выражения в формулу выше.

$$\dot{t} - \frac{2}{x} \cdot t = x^2$$

Теперь решим методом вариации постоянной:

$$\dot{t} = \frac{2}{x} \cdot t$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\ln|t| = 2\ln|x| + C \Longrightarrow t = ux^2,\ u \in \mathbb{R}$$

Теперь положим $u = u(x)$:

$$\begin{cases} t = ux^2 \\ \mathrm{d}t = \dot{u}x^2 + 2ux \end{cases}$$

$$\dot{u}x^2 + 2ux - 2ux = x^2 \Longrightarrow \dot{u}x^2 = x^2$$

$$\dot{u} = 1 \Longrightarrow u = x + C$$

Получаем общее решение $t = t(x)$:

$$t = ux^2 = (x + C)x^2 = x^3 + Cx^2$$

Уравнение Бернулли

Это дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \cdot x^m$$

Характерный признак – степень m в правой части. Стоит отметить, что при $m = 0, 1$ это обычное линейное уравнение, которое мы умеем решать. Более того, степень m может быть какой угодно – положительной ли, отрицательной или вообще дробью.

Как и линейное неоднородное уравнение первого порядка, уравнение Бернулли может приходить на новогодний утренник в разных костюмах:

- Волком:
$$a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t) \cdot x^m$$
- Зайчиком:
$$\dot{x} + x = c(t) \cdot x^m$$
- Или белочкой:
$$\dot{x} + a(t)x = x^m$$

Важно, чтобы всегда присутствовала Ёлочка – x^m, которая иногда может маскироваться под корень. Вокруг неё и будем водить хороводы.

Стоит также обратить внимание, что у данных уравнений при $m > 0$ всегда есть очевидное частное решение $x = 0$. Понятно, что когда просят найти частное решение диффура, на этот факт можно забить, но при нахождении общего решения терять данный случай нельзя.

Теперь обговорим метод решения. Пусть мы имеем диффур в «классическом» виде:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \cdot x^m$$

Избавимся от x в правой части уравнения, поделив всё на его степень:

$$\frac{\dot{x}}{x^m} + \frac{a(t)}{x^{m-1}} = b(t)$$

Теперь делаем хитрую (нет) замену:

$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{x^{m-1}} \\ \dot{w} = \dfrac{(1-m)\dot{x}}{x^m} \Longrightarrow \dfrac{\dot{x}}{x^m} = \dfrac{\dot{w}}{1-m} \end{cases}$$

Тогда диффур примет вид:

$$\frac{\dot{w}}{1-m} + a(t)w = b(t) \Longrightarrow \dot{w} + (1-m)\cdot a(t)w = (1-m)\cdot b(t)$$

— получили обычный линейный диффур, который только что научились решать.

Пример №5

$$\dot{x} = x^4 \cdot \cos t + x \cdot \tan t$$

Запомним, что $x = 0$ – решение, далее полагаем $x \neq 0$. Перепишем в «классическом» виде:

$$\dot{x} - x \cdot \tan t = x^4 \cdot \cos t$$

Поделим на x^4:

$$\frac{\dot{x}}{x^4} - \frac{\tan t}{x^3} = \cos t$$

Замена:

$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{x^3} \\ \dot{w} = \dfrac{(1-4)\dot{x}}{x^4} \Longrightarrow \dfrac{\dot{x}}{x^4} = -\dfrac{\dot{w}}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{\dot{w}}{3} - w \cdot \tan t = \cos t \iff \dot{w} + 3w \cdot \tan t = -3\cos t$$

Теперь решаем такой линейный диффур.

$$\dot{w} = -3w \tan t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}w}{w} = -3\tan t\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|w| = 3\ln|\cos t| + C \Longrightarrow w = u \cdot \cos^3 t,\ u \in \mathbb{R}$$

Делаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{cases} w = u \cdot \cos^3 t \\ \dot{w} = \dot{u}\cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t \end{cases}$$

$$\dot{u}\cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t + 3u \cdot \cos^3 t \cdot \tan t = -3\cos t \iff$$

$$\iff \dot{u}\cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t + 3u \cdot \cos^3 t \cdot \frac{\sin t}{\cos t} = -3\cos t$$

$$\dot{u}\cos^3 t = -3\cos t \iff \mathrm{d}u = -\frac{3\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$u = -3\tan t + C$$

Подставляем в выражение для w и делаем обратную замену.

$$w = u \cdot \cos^3 t = (-3\tan t + C)\cdot \cos^3 t$$

$$w = \frac{1}{x^3} \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{(-3\tan t + C)\cdot \cos^3 t}$$

Пример №6

Решить задачу Коши:

$$\dot{x} - \frac{2x}{t} = 2t \cdot \sqrt{x}, \qquad \text{начальное условие: } x(1) = 1$$

Так как нужно решить задачу Коши, то $x \neq 0$. Решаем стандартным для Бернулли способом:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{t} = 2t$$

$$\begin{cases} w = \sqrt{x} \\ \dot{w} = \dfrac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = 2\dot{w} \end{cases}$$

$$2\dot{w} - \frac{2w}{t} = 2t \iff \dot{w} - \frac{w}{t} = t$$

Решим заменой $w = uv$:

$$\begin{cases} w = uv \\ \dot{w} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases}$$

$$\dot{u}v + u\dot{v} - \frac{uv}{t} = t \iff \dot{u}v + u\left(\dot{v} - \frac{v}{t}\right) = t$$

$$\begin{cases} \dot{v} - \dfrac{v}{t} = 0 \\ \dot{u}v = t \end{cases}$$

$$\dot{v} = \frac{v}{t} \iff \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|v| = \ln|t| \iff v = t$$

$$\dot{u}t = t \iff \dot{u} = 1 \Longrightarrow u = t + C$$

Получаем общее решение диффура от w

$$w = (t + C) \cdot t$$

Делаем обратную замену $w = \sqrt{x} \iff x = w^2$:

$$x = w^2 = \big[(t + C) \cdot t\big]^2 = (t + C)^2 \cdot t^2$$

Теперь найдём частное решение:

$$x(1) = 1 \Longrightarrow 1 = (1 + C)^2$$

— внезапно, уравнение имеет 2 корня: $C = 0$ и $C = -2$, откуда получается 2 частных решения:

$$x = t^4, \qquad x = (t - 2)^2 \cdot t^2$$

Каждое из них удовлетворяет начальному условию. Это объясняется тем, что задача Коши имеет единственное решение только при выполнении определённых условий (функция f в диффуре $\dot{x} = f(t, x)$ должна быть Липшицевой). В данном случае условие единственности нарушено, и в точке $(1,\, 1)$ **пересекаются** графики кривых $x = t^4$ и $x = (t - 2)^2 \cdot t^2$.

Уравнение Риккати

Это дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{x} + a(t)x^2 + b(t)x + c(t) = 0$$

Сразу отметим, что если a, b, c – константы, то это обычное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого можно записать в виде функции $t = t(x)$:

$$t = C - \int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c}$$

Методы решения данного уравнения весьма и весьма интересны.

Одно частное решение

Пускай у нас есть одно **частное** решение $x_1 = x_1(t)$ этого диффура. Тогда мы можем представить общее решение – функцию $x = x(t)$ – как сумму функций:

$$x = x_1 + z$$

где $z = z(t)$ – новая неизвестная функция. Подставим выражение для x в исходное уравнение:

$$\begin{cases} x = x_1 + z \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{z} \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 + \dot{z} + a(t)\big(x_1^2 + 2x_1 z + z^2\big) + b(t)(x_1 + z) + c(t) = 0$$

Поскольку x_1 – решение диффура, то выполнено:

$$\dot{x}_1 + a(t)x_1^2 + b(t)x_1 + c(t) = 0$$

Таким образом, раскрыв скобки, мы можем убрать обнулившуюся часть, получая диффур:

$$\dot{z} + a(t)\big(2x_1 z + z^2\big) + b(t)z = 0$$
$$\dot{z} + a(t)z^2 + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = 0$$
$$\dot{z} + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = -a(t)z^2$$

— а это уже знакомое нам уравнение Бернулли. Помним про корень $z = 0$, стреляем в уравнение стандартной заменой:

$$\dot{z} + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = -a(t)z^2$$
$$\frac{\dot{z}}{z^2} + \frac{2a(t)x_1 + b(t)}{z} = -a(t)$$
$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{z} \\ \dot{w} = -\dfrac{\dot{z}}{z^2} \Longrightarrow \dfrac{\dot{z}}{z^2} = -\dot{w} \end{cases}$$
$$-\dot{w} + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot w = -a(t) \iff \dot{w} - \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot w = a(t)$$

и добиваем каким-нибудь методом решения линейных диффуров.

Стоит отметить, что часто бывает более выгодна немного иная замена x:

$$x = x_1 + \frac{1}{z}$$

— это сразу же приводит наше уравнение к линейному виду:

$$\dot{z} - \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = a(t)$$

Однако, в данном случае нужно дополнительно помнить про нулевое решение (так как вот таким способом мы найдём все ненулевые решения).

Пример №7

$$\dot{x} + x^2 = t^2 - 2t$$

Частное решение находится тривиально – достаточно прибавить 1 к обеим частям уравнения, чтобы его увидеть:

$$\dot{x}_1 + x_1^2 + 1 = t^2 - 2t + 1 \iff (1-t)^2 = x_1^2 + \dot{x}_1 + 1 \Longrightarrow x_1 = 1 - t$$

Делаем представление через сумму (тут удобнее инвертировать z, помня про нулевое решение):

$$\begin{cases} x = 1 - t + \dfrac{1}{z} \\ \dot{x} = -1 - \dfrac{\dot{z}}{z^2} \end{cases}$$

Тогда мы сразу получаем линейный диффур:

$$\dot{z} - \big(2 - 2t + 0\big) \cdot z = 1$$
$$\dot{z} + 2(t-1)z = 1$$

Решаем однородное:

$$\dot{z} = 2(1-t)z \iff \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2(1-t)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$\ln|z| = -2\frac{(1-t)^2}{2} + C \iff z = u \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big),\ u \in \mathbb{R}$$

Вариация постоянной:

$$\begin{cases} z = u \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) \\ \dot{z} = \dot{u}\exp\big(-(1-t)^2\big) + 2u \cdot (1-t) \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) \end{cases}$$
$$\dot{u}\exp\big(-(1-t)^2\big) + 2u \cdot (1-t) \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) + 2(t-1) \cdot u \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) = 1$$
$$\dot{u}\exp\big(-(1-t)^2\big) = 1 \iff \dot{u} = \exp\big((1-t)^2\big) \iff u = \int \exp\big((1-t)^2\big)$$

Осталось подставить выражение для z и получить общее решение:

$$z = u \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) = \exp\big(-(1-t)^2\big) \cdot \int \exp\big((1-t)^2\big)$$
$$x = 1 - t + \frac{\exp((1-t)^2)}{\displaystyle\int \exp\big((1-t)^2\big)}$$

Пример №8

$$3\dot{x} + x^2 + \frac{2}{t^2} = 0$$

Здесь частное решение находится также весьма просто:

$$-3\dot{x}_1 = x_1^2 + \frac{2}{t^2} \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{t}$$

В сумму (опять инвертируем, помня про нулевое решение):

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{z} \\ \dot{x} = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{\dot{z}}{z^2} \end{cases}$$

Теперь подставим всё в диффур от z, заменив нужные функции от t:

$$3\dot{x} + x^2 + \frac{2}{t^2} = 0 \iff \dot{x} + \frac{1}{3}x^2 + 0 \cdot x + \frac{2}{t^2} = 0$$
$$\dot{z} - \frac{2}{3t} \cdot z = \frac{1}{3}$$

Решаем как однородное:

$$\dot{z} = \frac{2}{3t}z \iff \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} \implies \int = \int$$
$$\ln|z| = \frac{2}{3} \cdot \ln|t| + C \iff z = u \cdot t^{\frac{2}{3}},\, u \in \mathbb{R}$$

Варьируем:

$$\begin{cases} z = u \cdot t^{\frac{2}{3}} \\ \dot{z} = \dot{u}t^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot t^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$
$$\dot{u}t^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot u \cdot t^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3t} \cdot u \cdot t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$
$$\dot{u}t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \iff \dot{u} = \frac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}} \iff u = t^{\frac{1}{3}} + C$$

Теперь можем получить общее решение:

$$z = u \cdot t^{\frac{2}{3}} = \left(t^{\frac{1}{3}} + C\right) \cdot t^{\frac{2}{3}} = t + Ct^{\frac{2}{3}}$$
$$x = \frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t + Ct^{\frac{2}{3}}}$$

Два частных решения

Пусть теперь известны два частных решения уравнения Риккати: $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$.

Мы знаем, что для первого решения выполнено тождество:

$$\dot{x}_1 + a(t)x_1^2 + b(t)x_1 + c(t) = 0$$

Проделаем то же представление:

$$\begin{cases} x = x_1 + z \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{z} \end{cases}$$
$$\dot{x}_1 + \dot{z} + a(t)\big(x_1^2 + 2x_1z + z^2\big) + b(t)(x_1 + z) + c(t) = 0$$
$$\dot{z} + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = -a(t)z^2$$

Теперь же сделаем хитрость: поделим на z и подставим вместо него $x - x_1$:

$$\frac{\dot{z}}{z} + 2a(t)x_1 + b(t) = -a(t)z$$
$$\frac{1}{x - x_1} \cdot \frac{\mathrm{d}(x - x_1)}{\mathrm{d}t} + 2a(t)x_1 + b(t) = -a(t)x + a(t)x_1$$
$$\frac{1}{x - x_1} \cdot \frac{\mathrm{d}(x - x_1)}{\mathrm{d}t} = -a(t) \cdot \big(x + x_1\big) - b(t)$$

А сейчас начинаем колдовать: заносим дробь в левой части уравнения под дифференциал:

$$\frac{1}{x - x_1}\,\mathrm{d}(x - x_1) = \mathrm{d}\ln\big(x - x_1\big)$$

Тогда:

$$\frac{\mathrm{d}\ln\big(x-x_1\big)}{\mathrm{d}t} = -a(t)\cdot\big(x+x_1\big) - b(t)$$

Для второго частного решения также выполнено тождество:

$$\dot{x}_2 + a(t)x_2^2 + b(t)x_2 + c(t) = 0$$

Откуда мы аналогичным (математическим) способом получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\ln\big(x-x_2\big)}{\mathrm{d}t} = -a(t)\cdot\big(x+x_2\big) - b(t)$$

А теперь совсем сакрально поступим: вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\ln\big(x-x_1\big)}{\mathrm{d}t} = -a(t)\cdot\big(x+x_1\big) - b(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\ln\big(x-x_2\big)}{\mathrm{d}t} = -a(t)\cdot\big(x+x_2\big) - b(t) \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2}}{\mathrm{d}t} = a(t)\cdot(x_2-x_1)$$

— но ведь это диффур с разделяющимися переменными! Из него получаем уравнение, задающее $x = x(t)$ неявно через частные решения:

$$\frac{\mathrm{d}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2}}{\mathrm{d}t} = a(t)\cdot(x_2-x_1)$$

$$\mathrm{d}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2} = a(t)\cdot(x_2-x_1)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln\frac{x-x_1}{x-x_2} + C = \int a(t)\cdot(x_2-x_1)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{x-x_1}{x-x_2} = \lambda\cdot\exp\bigg(\int a(t)\cdot(x_2-x_1)\,\mathrm{d}t\bigg),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Конечно, не всегда бывает возможно угадать сразу два частных решения, однако если вам так повезло, то можно захотеть выпендриться и задать ответ формулой выше.

Пример № 9

$$\dot{x} = \frac{k^2}{t^2} - x^2,\ k\in\mathbb{R}$$

Частные решения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{t} + \dfrac{k}{t^2} \\ x_2 = \dfrac{1}{t} - \dfrac{k}{t^2} \end{cases}$$

Тогда можем сразу получить общее решение:

$$\frac{x-\frac{1}{t}-\frac{k}{t^2}}{x-\frac{1}{t}+\frac{k}{t^2}} = \lambda\cdot\exp\bigg(\int -\frac{2k}{t^2}\,\mathrm{d}t\bigg)$$

$$\frac{xt^2-x-k}{xt^2-x+k} = \lambda\cdot\exp\bigg(\frac{2k}{x}\bigg)$$

Кому интересно, может попробовать решить этот диффур по-старинке. Авось что покрасивше выйдет. Или нет.

Домашнее задание №3

Задача №1. *Решить диффур:*

$$(tx + e^t)\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x = 0$$

Решение.

$$tx + e^t - t\dot{x} = 0$$

$$\dot{x} - x = \frac{e^t}{t}$$

$$\dot{x} = x \iff \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|x| = t + C \iff x = u \cdot e^t,\ u \in \mathbb{R} \Longrightarrow u = u(t)$$

$$\begin{cases} x = ue^t \\ \dot{x} = \dot{u}e^t + ue^t \end{cases}$$

$$\dot{u}e^t + ue^t - ue^t = \frac{e^t}{t} \Longrightarrow \dot{u}e^t = \frac{e^t}{t}$$

$$\dot{u} = \frac{1}{t} \Longrightarrow u = \ln|t| + C$$

$$x = (\ln|t| + C) \cdot e^t$$

□

Задача №2. *Решить диффур:*

$$t\dot{x} = x - t \cdot \exp\left(\frac{x}{t}\right)$$

Решение.

$$\dot{x} = \frac{x}{t} - \exp\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{t} \Longrightarrow x = yt \\ \dot{x} = \dot{y}t + y \end{cases}$$

$$\dot{y}t + y = y - e^y \iff \dot{y}t = -e^y$$

$$-e^{-y}\dot{y} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$e^{-y} = \ln|t| + C \iff t = \lambda \cdot \exp\bigl(e^{-y}\bigr),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Далее обратная замена. □

Задача №3. *Решить диффур:*

$$t\dot{x} - 2t^2 \cdot \sqrt{x} = 4x$$

Решение.

$$\dot{x} - \frac{4}{t} \cdot x = 2t^2 \cdot \sqrt{x} \Longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} - \frac{4}{t} \cdot \sqrt{x} = 2t^2$$

$$\begin{cases} w = \sqrt{x} \\ \dot{w} = \dfrac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = 2\dot{w} \end{cases}$$

$$\dot{w} - 2\frac{w}{t} = t^2$$

$$\dot{w} = 2\frac{w}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = 2\frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|w| = 2\ln|t| + C \iff w = ut^2,\ u \in \mathbb{R} \Longrightarrow u = u(t)$$

$$\begin{cases} w = ut^2 \\ \dot{w} = \dot{u}t^2 + 2ut \end{cases}$$

$$\dot{u}t^2 + 2ut - 2ut = t^2 \iff \dot{u}t^2 = t^2$$

$$\dot{u} = 1 \iff u = t + C$$

$$w = (t + C) \cdot t^2 = \sqrt{x}$$

$$x = w^2 = (t + C)^2 \cdot t^4$$

□

Задача №4. *Решить диффур:*

$$t^2\dot{x} + tx + t^2x^2 = 4$$

Решение.

$$\dot{x} + x^2 + \frac{x}{t} - \frac{4}{t^2} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{t} \\ \dot{x}_1 = -\dfrac{2}{t^2} \end{cases} \Longrightarrow -\frac{2}{t^2} + \frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^2} = 0$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{z} \\ \dot{x} = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{\dot{z}}{z^2} \end{cases} \Longrightarrow \dot{z} - \frac{5}{t} \cdot z = 1$$

$$\dot{z} = \frac{5}{t} \cdot z$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = 5\frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|z| = 5\ln|t| + C \iff z = u \cdot t^5,\ u \in \mathbb{R} \Longrightarrow u = u(t)$$

$$\begin{cases} z = ut^5 \\ \dot{z} = \dot{u}t^5 + 5ut^4 \end{cases}$$

$$\dot{u}t^5 + 5ut^4 - \frac{5ut^5}{t} = 1 \iff \dot{u}t^5 = 1$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t^5} \Longrightarrow \int = \int$$

$$u = -\frac{1}{4t^4} + C$$

$$z = t^5 \cdot \left(-\frac{1}{4t^4} + C\right) = -\frac{t}{4} + Ct^5$$

$$x = x_1 + \frac{1}{z} = \frac{2}{t} + \frac{4}{4 \cdot Ct^5 - t}$$

□

Задача №5. *Пусть x_1, x_2 – независимые частные решения линейного диффура 1 порядка:*

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Найти общее решение (выразить через x_1 и x_2).

Решение. Проводя манипуляции, аналогичные указанным выше для уравнения Риккати (а это оно и есть, просто многочлен при x^2 — тождественный нуль), мы получаем:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = C$$

Тут стоит отметить, что $C \neq 1$, ибо иначе x_1 и x_2 были бы зависимы.

Альтернативное решение: мы знаем, что x_1 и x_2 – оба решения данного диффура. Тогда выполнены соотношения:

$$\dot{x}_1 + a(t)x_1 = b(t)$$
$$\dot{x}_2 + a(t)x_2 = b(t)$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$(x_1 \dot{-} x_2) + a(t)(x_1 - x_2) = 0$$

Следовательно, $x_1 - x_2$ (и любой подобная подобная данной функция) есть решение однородного диффура $\dot{x} + a(t) = 0$. Тогда можем воспользоваться методом вариации постоянной:

$$x = u \cdot (x_1 - x_2),\ u \in \mathbb{R} \Longrightarrow u = u(t)$$
$$\dot{x} = \dot{u}(x_1 - x_2) + u(x_1 \dot{-} x_2)$$
$$\dot{u}(x_1 - x_2) + \underbrace{u(x_1 \dot{-} x_2) + a(t) \cdot u \cdot (x_1 - x_2)}_{=0} = b(t)$$
$$\dot{u} = \frac{b(t)}{x_1 - x_2}$$

Можно заметить, что любое иное решение будет получаться из решения однородного уравнения сдвигом. Тогда решением будет являться многочлен:

$$C \cdot (x_1 - x_2) + x_1$$

Прямая проверка показывает, что оно совпадает с ответом выше. □

Семинар 4, 31 января

Уравнения в полных дифференциалах

Пускай есть функция $U(t,\ x)$ – от двух переменных. Она являет собой некую кривую. Пускай она непрерывна в точке $(t_0,\ x_0)$. Сдвинемся на $(\triangle t,\ \triangle x)$ вдоль кривой. Новое значение функции можно записать так:

$$U(t_0 + \triangle t,\ x_0 + \triangle x) = U(t_0,\ x_0) + U'_{t_0,\ x_0} \cdot (\triangle t,\ \triangle x) + \overline{o}(\triangle t,\ \triangle x)$$

где

$$U'_{t_0,\ x_0} = \left(\frac{\partial U}{\partial t},\ \frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

— вектор частных производных (по факту, это вектор в сопряжённом пространстве к нашему в базисе $\big(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x\big)$).

Можно записать полный дифференциал функции U:

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \mathrm{d}t + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x$$

Предположим теперь, что на каком-то промежутке наша функция принимает константное значение: $U(t,\ x) = C$. Ясно, что в таком случае производная будет равна нулю на данном промежутке, что равносильно:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cdot \mathrm{d}t + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x = 0$$

Обозначим $\dfrac{\partial U}{\partial t} = M(t,\ x)$, $\dfrac{\partial U}{\partial x} = N(t,\ x)$ — функции от $(t,\ x)$.

Определение 4. *Тождество*

$$M(t,\ x)\,\mathrm{d}t + N(t,\ x)\,\mathrm{d}x = 0$$

где M, N – функции от $(t,\ x)$, называется ***уравнением в полных дифференциалах****.*

Соответственно, решить уравнение в полных дифференциалах — это найти такую функцию $U(t,\ x)$, что $\mathrm{d}U = M(t,\ x)\,\mathrm{d}t + N(t,\ x)\,\mathrm{d}x$.

Нужно отметить, что из того, что нам на вход подали диффур вышеуказанного вида (или сводящегося к нему), ещё не следует, что это уравнение в полных дифференциалах. Для этого нужно нечто большее, чем такая запись.

Утверждение 1. *Для того, чтобы уравнение*

$$M(t,\ x)\,\mathrm{d}t + N(t,\ x)\,\mathrm{d}x = 0$$

было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы смешанные производные были равны, то есть:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Именно поэтому, перед тем, как решать диффур, подозреваемый в бытии уравнением в полных дифференциалах, нужно сначала проверить на равенство смешанные производные.

Теперь поговорим о самом процессе решения. Существует два его варианта – теоретический и прикладной.

Суть теоретического в том, что, как нам известно, M – это частная производная функции по t, N – частная производная по x. Логично, что, так как они обе суть производные одной и той же функции, то их **первообразные** должны совпадать. Следовательно:

$$\begin{cases} \displaystyle\int M \, \mathrm{d}t = \widetilde{M}(t,\, x) + \varphi(x) \\ \displaystyle\int N \, \mathrm{d}x = \widetilde{N}(t,\, x) + \psi(t) \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ – функция от x, $\psi(t)$ – функция от t. Суть в том, что $\varphi(x)$ «зашита» в $\widetilde{N}(t,\, x)$, как и $\psi(t)$ уже находится в $\widetilde{M}(t,\, x)$. Поэтому, вычислив оба интеграла, легко заметить, какие части соответствуют данным функциям.

Практически же мы будем действовать несколько иначе.

Имеем уравнение:

$$M(t,\, x) \, \mathrm{d}t + N(t,\, x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Первым делом берём частную производную M и интегрируем её по t (для N и x аналогично, выбор функции зависит от удобства интегрирования):

$$U = \int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t + \varphi(x)$$

— заметим, что вместо константы мы пишем функцию от x, которая при взятии производной по t обнуляется. Теперь дифференцируем полученную функцию по x:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ds \int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t\right] + \varphi'(x) = N(t,\, x)$$

Отсюда получаем выражение для производной $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = N(t,\, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ds \int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t\right]$$

Стоит отметить, что части с одновременно t и x в выражении выше сократятся. Теперь находим функцию $\varphi(x)$, интегрируя полученное равенство:

$$\varphi(x) = \int \left(N(t,\, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t\right]\right) \mathrm{d}x$$

Осталось лишь подставить в выражение для U, что мы получили в самом начале:

$$U = \int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t + \varphi(x) = \int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t + \int \left(N(t,\, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t\right]\right) \mathrm{d}x$$

Получили итоговый ответ. Формально, должна появляться ещё константа, но ввиду того, что мы на промежутке, где функция постоянна, то в качестве C можно просто записывать левую часть уравения выше. Тогда уравнение искомой кривой имеет вид:

$$C = \int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t + \int \left(N(t,\, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M(t,\, x) \, \mathrm{d}t\right]\right) \mathrm{d}x$$

Немного про интегрирование. Когда мы интегрируем частную производную, мы делаем эдакое *частное интегрирование*, считая ту переменную, по которой НЕ интегрируем, константой. Кроме того, несмотря на то, что мы берём первообразную, константа также не записывается – все константы перейдут в левую часть уравнения, составляя значение функции.

Пример №1

$$2tx\,\mathrm{d}t + (t^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 0$$

Проверим, действительно ли это УПД:

$$\begin{cases} (2tx)'_x = 2t \\ (t^2 - x^2)'_t = 2t \end{cases}$$

И правда, оно. Действуем практическим методом:

$$U = \int 2xt\,\mathrm{d}t = xt^2 + \varphi(x)$$

$$U'_x = t^2 + \varphi'(x) = t^2 - x^2 \iff \varphi'(x) = -x^2 \Longrightarrow \varphi(x) = -\frac{x^3}{3}$$

$$U = xt^2 + \varphi(x) = xt^2 - \frac{x^3}{3} = C$$

Теперь посмотрим, как решать теоретическим:

$$\begin{cases} \displaystyle\int 2tx\,\mathrm{d}t = xt^2 + \varphi(x) \\ \displaystyle\int (t^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = xt^2 - \frac{x^3}{3} + \psi(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = -\dfrac{x^3}{3} \\ \psi(t) = 0 \end{cases}$$

Обе функции φ и ψ мгновенно находятся после взятия интегралов. Конечно, этот метод существенно быстрее и изящнее (в практическом мы делаем много лишних действий), но во многих уравнениях увидеть эти составляющие может быть не так легко.

Пример №2

$$3t^2(1 + \log x)\,\mathrm{d}t - \left(2x - \frac{t^3}{x}\right)\mathrm{d}x = 0$$

Проверка:

$$\begin{cases} \left[3t^2(1 + \log x)\right]'_x = \dfrac{3t^2}{x} \\ -\left(2x - \dfrac{t^3}{x}\right)'_t = \dfrac{3t^2}{x} \end{cases}$$

Решаем:

$$U = \int \left(3t^2 + 3t^2 \log x\right)\mathrm{d}t = t^3 + t^3 \cdot \log x + \varphi(x)$$

$$U'_x = \frac{t^3}{x} + \varphi'(x) = -2x + \frac{t^3}{x} \iff \varphi'(x) = -2x \Longrightarrow \varphi(x) = -x^2$$

$$U = t^3 + t^3 \cdot \log x + \varphi(x) = t^3 + t^3 \cdot \log x - x^2 = C$$

Банальный факт, но не стоит рассчитывать, что диффур, являющийся УПД, будет записан в стандартном для УПД виде.

Пример №3 Решить задачу Коши:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} = \frac{2t\dot{x}}{x^3}, \text{ начальное условие: } x(1) = 1$$

Перед проверкой, разумно преобразовать к классическому виду УПД:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} = \frac{2t\,\mathrm{d}x}{x^3\,\mathrm{d}t} \iff \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{2t}{x^3}\,\mathrm{d}x \iff \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t - \frac{2t}{x^3}\,\mathrm{d}x = 0$$

Проверка:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{t}\right)'_x = -\dfrac{2}{x^3} \\ \left(-\dfrac{2t}{x^3}\right)'_t = -\dfrac{2}{x^3} \end{cases}$$

Частные производные равны, значит, это УПД. Будем решать. В данном случае удобнее проинтегрировать по x:

$$U = \int -\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{x^2} + \psi(t)$$

$$U'_t = \frac{1}{x^2} + \psi'(t) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{t} \iff \psi'(t) = -\frac{2}{t} \Longrightarrow \psi(t) = \log\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$U = \frac{t}{x^2} + \psi(t) = \frac{t}{x^2} + \log\left(\frac{1}{t^2}\right) = C$$

Начальное условие:

$$x(1) = 1 + \log 1 = C = 1$$

Итоговый ответ:

$$\frac{t}{x^2} + \log\left(\frac{1}{t^2}\right) = 1$$

Группировка

Этот приём относится скорее к общим методам решения диффуров, нежели конкретно к УПД. Однако, часто именно здесь он хорошо выстреливает.

Пускай имеем уравнение

$$M(t,\,x)\,\mathrm{d}t + N(t,\,x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Допустим, что функция N представима в виде суммы: $N = P + Q$. Тогда дифференциал распишется по линейности:

$$M\,\mathrm{d}t + P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}x$$

Пускай нам повезло, и существует такая функция $K = K(t,\,x)$, что:

$$\mathrm{d}K = M\,\mathrm{d}t + P\,\mathrm{d}x$$

Тогда исходный диффур мы можем переписать так:

$$\mathrm{d}K + Q\,\mathrm{d}x = 0$$

Понятно, что аналогичные действия можно проделать и для функции M, также перегруппировав её по частям с N в один дифференциал. Конечно, мы рассмотрели весьма идеалистичный случай, так как зачастую вот прям в таком виде функции редко можно перегруппировать. Часто требуется дополнительно применить функцию ко всему уравнению, чтобы получился дифференциал (то бишь умножить обе части на что-то, поделить и так далее).

Этот приём бывает очень полезен, так как позволяет массу диффуров решать быстро и изящно. Стоит отметить, что по факту $\mathrm{d}K = -Q\,\mathrm{d}x$ – это какой-то новый диффур, который можно решить просто интегрированием обеих частей. Но законно это делать если и только если функция справа – от одного переменного. Иначе опять придётся париться с остаточной частью φ или ψ, как выше.

Пример №4

$$x\,\mathrm{d}t - (xt^3 + t)\,\mathrm{d}x = 0$$

Раскроем скобки и переставим пару слагаемых:

$$x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x - xt^3\,\mathrm{d}x = 0$$

Два левых слагаемых так и просятся в одну функцию. Чтобы её увидеть, поделим уравнение на t^2:

$$\frac{x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x}{t^2} - tx\,\mathrm{d}x = 0$$

Заметим, что $\dfrac{x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x}{t^2}$ – это производная функции $-\dfrac{x}{t}$. Тогда:

$$-\,\mathrm{d}\frac{x}{t} - tx\,\mathrm{d}x = 0,\ y = \frac{x}{t} \Longrightarrow t = \frac{x}{y}$$

$$\dot{y} = -\frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}x \iff y\,\mathrm{d}y = -x^2\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int = \int$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^3}{3} + C$$

$$\frac{x^2}{2t^2} = -\frac{x^3}{3} + C \iff x^2 = -\frac{2}{3}\cdot t^2x^3 + C$$

Пример №5

$$(t^2 + x^2 + x)\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x = 0$$

Этот пример весьма похож на предыдущий:

$$(t^2 + x^2)\,\mathrm{d}t + (x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x) = 0$$

$$\left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\frac{x}{t},\ y = \frac{x}{t}$$

$$(1 + y^2)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}y \iff \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} \Longrightarrow \int = \int$$

$$t = \arctan(y) + C \iff t = \arctan\left(\frac{x}{t}\right) + C$$

Ниже будут приведены гораздо более интересные применения группировки.

Метод интегрирующего множителя

Всё бы хорошо, да случаются ситуации, когда смешанные производные могут не совпасть. Интересно, но в таких ситуациях иногда можно подобрать так называемый «интегрирующий множитель». Пусть у нас есть уравнение:

$$M(t,\,x)\,\mathrm{d}t + N(t,\,x)\,\mathrm{d}x = 0$$

не являющееся УПД, то есть $M'_x \neq N'_t$. Тогда, если M и N таковы, что ни в какой точке рассматриваемого промежутка не обращаются в ноль одновременно:

$$\nexists\ (t_0,\,x_0) \mid M^2(t_0,\,x_0) + N^2(t,\,x) = 0$$

то существует такая функция $\mu(t,\,x)$, что тождество:

$$\mu(t,\,x)\cdot M(t,\,x)\,\mathrm{d}t+\mu(t,\,x)\cdot N(t,\,x)\,\mathrm{d}x=0$$

является уравнением в полных дифференциалах (смешанные производные соответствующих частей будут совпадать). Эта функция, $\mu(t,\,x)$ и называется **интегрирующим множителем**.

Поанализируем немного эту функцию. Из определения имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial y}(\mu N)\iff N\cdot\frac{\partial\mu}{\partial t}-M\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}=\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\cdot\mu$$

Откуда:

$$N\cdot\frac{\partial\log\mu}{\partial t}-M\cdot\frac{\partial\log\mu}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}$$

Такая вот штука называется **уравнением в частных производных**.

Сразу же отмечу: решить уравнение на интегрирующий множитель часто есть задача **гораздо сложнее**, нежели решить сам диффур. Поэтому, как говорят великие математики, «Решать его мы конечно не будем».

Вместо этого мы будем *угадывать* интегрирующий множитель. Благо в некоторых частных случаях это сделать относительно легко. Однако, иногда его-таки возможно найти напрямую.

Общая идея

Пускай имеем тождество

$$M(t,\,x)\,\mathrm{d}t+N(t,\,x)\,\mathrm{d}x=0$$

и уравнение на интегрирующий множитель:

$$N\cdot\frac{\partial\log\mu}{\partial t}-M\cdot\frac{\partial\log\mu}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}$$

Предположим, что интегрирующий множитель $\mu=\mu(t)$ – функция только от t. Тогда $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=0$ и уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial t}=\frac{\partial\log\mu}{\partial t}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)$$

В таком случае для существования интегрирующего множителя $\mu=\mu(t)$, зависящего только от t, необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения выше была функцией только от t. Тогда легко найти саму μ, решив обычный диффур с разделяющимися переменными.

Аналогично, если предположить, что интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$ – функция только от x, то $\dfrac{\partial\mu}{\partial t}=0$ и уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\log\mu}{\partial x}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

В таком случае для существования интегрирующего множителя $\mu=\mu(x)$, зависящего только от x, необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения выше была функцией только от x.

Как видите, решить уравнение на интегрирующий множитель не так уж и сложно, если попался хороший диффур. Часто в УПД нужны именно однопеременные функции. Существует ещё один интересный случай, который немногим сложнее вышеуказанных.

Имеем уравнение:

$$N \cdot \frac{\partial \log \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

Пускай интегрирующий множитель $\mu = \mu\big(\nu(t,\, x)\big)$ — функция от одного переменного $\nu = \nu(t,\, x)$, который в свою очередь является функцией от t и x. Новая функция может быть, к примеру:

$$\nu = \frac{t}{x},\; \nu = tx,\; \nu = t^2 + x^2,\; \nu = t + x$$

Так как интегрирующий множитель – функция от одной переменной ν, то он может быть также найден из диффура:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \nu} = \frac{\partial \log \mu}{\partial \nu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N \frac{\partial \nu}{\partial t} - M \frac{\partial \nu}{\partial x}}$$

где правая часть, как бы то странно ни было, зависит только от ν. Так мы сможем найти множитель напрямую! Разберём несколько примеров, где сначала просто поугадываем.

Пример №6

$$x \,\mathrm{d}t + \big(x + \tan(t + x)\big) \,\mathrm{d}x = 0$$

Проверим смешанные производные:

$$\begin{cases} (x)'_x = 1 \\ \big(x + \tan(t + x)\big)'_t = \dfrac{1}{\cos^2(t + x)} \end{cases}$$

Давайте подумаем, какой может быть интегрирующий множитель. Внимательный читатель может заметить, что $\mu = \cos(t + x)$ нам подходит. Проверим:

$$x\cos(t + x) \,\mathrm{d}t + \big(x\cos(t + x) + \sin(t + x)\big) \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{cases} \big[x\cos(t + x)\big]'_x = \cos(t + x) - x\sin(t + x) \\ \big[x\cos(t + x) + \sin(t + x)\big]'_t = -x\sin(t + x) + \cos(t + x) \end{cases}$$

Отлично! Теперь смешанные производные совпадают. Значит, можно решать традиционными методами. Будем интегрировать производную по t, так как она проще:

$$U = \int x\cos(t + x) \,\mathrm{d}t = x\sin(t + x) + \varphi(x)$$

$$U'_x = \sin(t + x) + x\cos(t + x) + \varphi'(x) = x\cos(t + x) + \sin(t + x) \iff \varphi'(x) = 0 \iff \varphi(x) = 0$$

$$U = x\sin(t + x) + \varphi(x) = x\sin(t + x) = C$$

Я специально написал, что функция $\varphi(x) = 0$, уже складировав её значение в итоговый ответ.

Пример №7

$$(t + x^2) \,\mathrm{d}t - 2tx \,\mathrm{d}x = 0$$

Проверим смешанные производные:

$$\begin{cases} (t + x^2)'_x = 2x \\ (-2tx)'_t = -2x \end{cases}$$

Вообще говоря, в данном случае можно и угадать интегрирующий множитель. Но для примера, выведем его при помощи решения диффура. Будем искать функцию только от t:

$$M = t + x^2,\ N = -2tx$$
$$\frac{\partial \log \mu}{\partial t} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = \frac{2x + 2x}{-2tx} = -\frac{2}{t}$$
$$\log \mu = -2 \log |t| \iff \mu = \frac{1}{t^2}$$

Легко и непринуждённо, почти без всякой интуиции (но вообще повезло, что тут и вправду только от t зависит). Теперь решаем УПД:

$$\frac{t + x^2}{t^2}\,\mathrm{d}t - 2\frac{tx}{t^2}\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t^2} - \frac{2tx\,\mathrm{d}x}{t^2} = 0$$

Здесь мы воспользуемся приёмом группировки, объединив два последних слагаемых левой части:

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{2tx\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}t}{t^2} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}t}{t} - \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{t}\right) = 0 \iff \mathrm{d}\left(\log t - \frac{x^2}{t}\right) = 0$$
$$\log t = \frac{x^2}{t} + C \iff t = \lambda \cdot \exp\left(\frac{x^2}{t}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних действиях было удобнее занести функцию под дифференциал по линейности, чтобы долго не считать диффур с разделяющимися переменными, а сразу получить ответ.

Пример №8

$$2tx \log x\,\mathrm{d}t + \left(t^2 + x^2\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 0$$

Проверим смешанные производные:

$$\begin{cases} (2tx \log x)'_x = 2t \log x + 2t \\ \left(t^2 + x^2\sqrt{x^2+1}\right)'_t = 2t \end{cases}$$

Здесь так сходу его и не назовёшь. Будем опять действовать методом научного тыка, но обоснованного – положим $\mu = \mu(x)$. Тогда рассмотрим выражение, отвечающее данной функции:

$$M = 2tx \log x,\ N = t^2 + x^2\sqrt{x^2+1}$$
$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = \frac{2t - 2t(\log x + 1)}{2tx \log x} = -\frac{1}{x}$$
$$\log \mu = -\log x \iff \mu = \frac{1}{x}$$

Теперь решаем уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{2tx \log x}{x}\,\mathrm{d}t + \frac{t^2 + x^2\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$
$$2t \log x\,\mathrm{d}t \frac{t^2}{x}\,\mathrm{d}x + x\sqrt{x^2+1} = 0$$

Здесь опять удобно применить группировку, объединив первое и второе слагаемое под один дифференциал.

$$\mathrm{d}(t^2 \log x) + x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0 \iff \mathrm{d}(t^2 \log x) = -x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$t^2 \log x = -\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x^2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$t^2 \log x + \frac{1}{3}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = C$$

Здесь опять проще схитрить, сразу же взяв интеграл от правой части, так как слева получаем чистый дифференциал. Стоит отметить, что делать так законно тогда и только тогда, когда в другой части уравнения у нас функция от **одного** переменного, поэтому и можем спокойно интегрировать. Как видим, вывести интегрирующий множитель в частных случаях довольно-таки просто.

Всё же замечу, что у нас так хорошо всё получилось лишь потому, что наше предположение оправдалось – выражения с M и N в правых частях уравнений получались от одной переменной – той, на которую мы делали ставку. Если вдруг получится опять функция от нескольких переменных, то значит, интегрирующий множитель имеет иную природу.

Алгоритм решения

Обобщим алгоритм действий на проверку диффура и поиск интегрирующего множителя:

1. Вычисляем смешанные производные $\dfrac{\partial M}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial t}$, проверяем на равенство.
2. Если они не равны, то смотрим на разность:
$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}$$
3. Пробуем делить её на N и на M. Если в каком-то из случаев получилась функция только от t или только x соответственно, то значит, всё хорошо, и мы нашли интегрирующий множитель (аккуратнее со знаками!).
4. Если не сработало, то пробуем применить интегрирующий множитель $\nu = \nu(t, x)$, поделив разность на $N\dfrac{\partial \nu}{\partial t} - M\dfrac{\partial \nu}{\partial x}$. Если получилась функция только от ν – успех.
5. Если не сработал ни один из вариантов выше – закрываем глаза и ждём провидения.

Разберём ещё несколько примеров, чтобы закрепить методу.

Пример №9

$$(t - \cos x)\,\mathrm{d}t - \sin x\,\mathrm{d}x = 0$$

Работаем по алгоритму:

$$\begin{cases} (t-\cos x)'_x = \sin x \\ (-\sin x)'_t = 0 \end{cases}$$

Увы, но это не УПД. Теперь рассмотрим разность:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = \sin x$$

Хочется на что-то поделить, к примеру, на N:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = -\frac{\sin x}{\sin x} = -1$$

– успех, ведь выражение зависит только от t (фактически, вообще ни от чего не зависит, но так как мы делили на N, то нам важна именно независимость от x – можем повыражать через t с нулевыми коэффициентами). Таким образом, мы можем найти интегрирующий множитель $\mu = \mu(t)$:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial t} = -1 \iff \log \mu = -t \Longrightarrow \mu = \exp(-t)$$

Теперь решаем исходный диффур:

$$\exp(-t) \cdot (t - \cos x)\,\mathrm{d}t - \exp(-t) \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = 0$$

$$U = -\int \exp(-t) \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \exp(-t) \cdot \cos x + \psi(t)$$

$$U'_t = -\exp(-t) \cdot \cos x + \psi'(t) = \exp(-t) \cdot t - \exp(-t) \cdot \cos x$$

$$\psi'(t) = \exp(-t) \cdot t \iff \psi(t) = \int \exp(-t) \cdot t\,\mathrm{d}t = -t\exp(-t) + \int \exp(-t)\,\mathrm{d}t = -t\exp(-t) - \exp(-t)$$

$$U = \exp(-t) \cdot \cos x + \psi(t) = \exp(-t) \cdot \cos x - t\exp(-t) - \exp(-t)$$

$$\exp(-t) \cdot (\cos x - t - 1) = C$$

Пример №10

$$(tx^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}t + (3 - 2tx^2)\,\mathrm{d}x = 0$$

Шаг первый:

$$\begin{cases} (tx^2 - 2x^3)'_x = -2xt - 6x^2 \\ \left(3 - 2tx^2\right)'_t = -2x^2 \end{cases}$$

Теперь вычислим разность:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = 2tx - 4x^2$$

Поделим-ка выражение на M:

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = \frac{2tx - 4x^2}{tx^2 - 2x^3} = \frac{2(tx - 2x^2)}{x(tx - 2x^2)} = \frac{2}{x}$$

— зависит только от x, поэтому интегрирующий множитель μ будет также функцией только от x. Находим его:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = -\frac{2}{x}$$

$$\log \mu = -2\log|x| \Longrightarrow \mu = \pm\frac{1}{x^2}$$

Знак не имеет значения, так как обе частных производных меняют знак одновременно. Осталось умножить обе части уравнения на интегрирующий множитель. Здесь стоит сделать оговорку, ибо мы теряем таким образом решение $x = 0$ (проверьте!). Запоминаем его и решаем исходный диффур:

$$(t - 2x)\,\mathrm{d}t + \left(\frac{3}{x^2} - 2t\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$U = \int (t - 2x)\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - 2tx + \varphi(x)$$

$$U'_x = -2t + \varphi'(x) = \frac{3}{x^2} - 2t \iff \varphi'(x) = \frac{3}{x^2} \Longrightarrow \varphi(x) = -\frac{3}{x}$$

$$U = \frac{t^2}{2} - 2tx + \varphi(x) = \frac{t^2}{2} - 2tx - \frac{3}{x} = C$$

Пример №11

$$(tx+1)\,\mathrm{d}t + t^2\,\mathrm{d}x = 0$$

Проверяем:

$$\begin{cases} (tx+1)'_x = t \\ \left(t^2\right)'_t = 2t \end{cases}$$

Далее:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = -t$$

Заметим, что деление на M и N не даст соответствующих нужных результатов. Придётся пробовать искать интегрирующий множитель как сложную функцию. Для этого нужно, чтобы для некоторой функции ν выражение $N\dfrac{\partial \nu}{\partial t} - M\dfrac{\partial \nu}{\partial x}$ было функцией желательно того же порядка, что и разность смешанных производных. Всё это нужно для того, чтобы итоговое частное двух разностей было функцией только от ν – в идеале вообще константой. Пускай мы хотим получить знаменатель такой же, как числитель – $-x$. Но тогда можно увидеть, что функция $\nu = tx$ прекрасно подходит:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = x,\ \frac{\partial \nu}{\partial x} = t$$

$$N\frac{\partial \nu}{\partial t} - M\frac{\partial \nu}{\partial x} = t^2 \cdot x - (tx+1)\cdot t = t^2x - t^2x - x = -x$$

Тогда получаем:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N\frac{\partial \nu}{\partial t} - M\frac{\partial \nu}{\partial x}} = \frac{-x}{-x} = 1$$

— функция зависит только от ν (так как не зависит ни от чего). Следовательно, функция $\nu = tx$ подходит. Тогда можем найти и сам интегрирующий множитель:

$$\frac{\partial \log\mu}{\partial \nu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N\frac{\partial \nu}{\partial t} - M\frac{\partial \nu}{\partial x}} = 1 \iff \log\mu = \nu \Longrightarrow \mu = \exp(tx)$$

Теперь можно решать и сам диффур:

$$(tx+1)\exp(tx)\,\mathrm{d}t + t^2\exp(tx)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$U = \int t^2\exp(tx)\,\mathrm{d}x = t^2\int \exp(tx)\,\mathrm{d}x = t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\exp(tx) + \psi(t) = t\exp(tx) + \psi(t)$$

$$U'_t = 1\cdot\exp(tx) + xt\cdot\exp(tx) + \psi'(t) = tx\exp(tx) + \exp(tx) \iff \psi'(t) = 0 \Longrightarrow \psi(t) = 0$$

$$U = t\exp(tx) + \psi(t) = t\exp(tx) = C$$

Группировка в смысле поиска интегрирующего множителя

Если сразу найти интегрирующий множитель не удается, то можно попытаться сгруппировать члены уравнения, находя интегрирующие множители по частям. Пусть мы имеем уравнение:

$$M(t,\,x)\,\mathrm{d}t + N(t,\,x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Разобьём его на сумму слагаемых:

$$M(t,\,x)\,\mathrm{d}t + N(t,\,x)\,\mathrm{d}x = M_1\,\mathrm{d}t + N_1\,\mathrm{d}x + M_2\,\mathrm{d}t + N_2\,\mathrm{d}x + M_3\,\mathrm{d}t + N_3\,\mathrm{d}x + \ldots$$

Пусть мы нашли интегрирующий множитель μ_1 для **первого** слагаемого:

$$\mu_1 M_1\,\mathrm{d}t + \mu_1 N_1\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}U_1$$

Умножим тогда на μ_1 всё уравнение:

$$\mu_1\big(M(t,\,x)\,\mathrm{d}t + N(t,\,x)\,\mathrm{d}x\big) = \mu_1\big(M_1\,\mathrm{d}t + N_1\,\mathrm{d}x\big) + \mu_1\big(M_2\,\mathrm{d}t + N_2\,\mathrm{d}x\big) + \mu_1\big(M_3\,\mathrm{d}t + N_3\,\mathrm{d}x\big) + \ldots =$$
$$= \mathrm{d}U_1 + \mu_1\big(M_2\,\mathrm{d}t + N_2\,\mathrm{d}x\big) + \mu_1\big(M_3\,\mathrm{d}t + N_3\,\mathrm{d}x\big) + \ldots = 0$$

Далее следует найти (будем честны: подобрать) такую функцию $\chi_1 = \chi_1(U_1)$, чтобы при умножении на неё **второе** слагаемое новой суммы стало полным дифференциалом:

$$\mu_1\chi_1(U_1)\cdot\big(M_2\,\mathrm{d}t + N_2\,\mathrm{d}x\big) = \mathrm{d}U_2$$

Домножим теперь всё уравнение на этот интегрирующий множитель (да-да, это именно он!). Стоит отметить, что первое слагаемое при этом останется полным дифференциалом:

$$\chi_1(U_1)\,\mathrm{d}U_1 = \mathrm{d}\left(\int \chi_1(U_1)\,\mathrm{d}U_1\right) = \mathrm{d}W_1$$

Тогда:

$$\mu_1\chi_1(U_1)\cdot\big(M(t,\,x)\,\mathrm{d}t + N(t,\,x)\,\mathrm{d}x\big) = \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}U_2 + \mu_1\chi_1(U_1)\cdot\big(M_3\,\mathrm{d}t + N_3\,\mathrm{d}x\big) + \ldots =$$
$$= \mathrm{d}(W_1 + U_2) + \mu_1\chi_1(U_1)\cdot\big(M_3\,\mathrm{d}t + N_3\,\mathrm{d}x\big) + \ldots = 0$$

Далее опять подбираем такой множитель $\chi_2 = \chi_2(W_1 + U_2)$, что при умножении на него следующее слагаемое станет полным дифференциалом. И так далее, пока все выражение не превратится в один огромный полный дифференциал!

Замечание: на практике вообще не факт, что реально получится, но в теории вполне возможно так сделать.

Пример №12

$$2t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t + tx^2(t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t) = 0$$

Раскроем скобки, переупорядочим и поделим на tx^2:

$$t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}t}{tx} + \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2} = 0$$

Заметим, что первые два члена составляют полный дифференциал: $t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(tx)$. Подставляем:

$$\mathrm{d}(tx) + \frac{\mathrm{d}t}{tx} + \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2} = 0$$

Теперь нужно подобрать такую функцию от tx, чтобы оставшееся выражение стало полным дифференциалом. Принеся в жертву ягнёнка, мы получаем указание: поделить уравнение на tx. Конечно, мы теряем решения $x = 0$ и $t = 0$ – жертвы ягнёнка оказалось недостаточно. Уравнение принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}(tx)}{tx} + \frac{\mathrm{d}t}{t^2x^2} + \frac{2\,\mathrm{d}x}{tx^3} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}(tx)}{tx} - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$
$$\mathrm{d}(\log|tx|) - \mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x^2}\right) = 0 \qquad \textit{угар}$$
$$\mathrm{d}\left(\log|tx| - \frac{1}{tx^2}\right) = 0$$
$$\log|tx| - \frac{1}{tx^2} = C$$

Красота, не правда ли?) Осталось записать итоговый ответ – полученная кривая и два мученика – $x = 0$ и $t = 0$. Замечу, что для успешного применения данного метода нужна железная воля и нерушимая вера в светлое будущее.

Домашнее задание №4

Задача №1. *Решить диффур:*

$$(2 - 9x^2t) \cdot t\,\mathrm{d}t + (4x^2 - 6t^3) \cdot x\,\mathrm{d}x = 0$$

Задача №2. *Решить диффур:*

$$\frac{x}{t}\,\mathrm{d}t + (x^3 + \ln t)\,\mathrm{d}x = 0$$

Задача №3. *Решить диффур:*

$$tx^2\big(t\dot{x} + x\big) = 1$$

Задача №4. *Решить диффур:*

$$x\,\mathrm{d}x = (t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t)\sqrt{1 + x^2}$$

Задача №5. *Решить диффур:*

$$(t^2 + 2xt)\,\mathrm{d}x + (xt + 1)\,\mathrm{d}t = 0$$

Семинар 5, 7 февраля

Уравнения, не разрешённые относительно производной $\dot{x}$

Мы уже умеем решать уравнения вида $\dot{x} = f(t,\, x)$. Пусть теперь мы не можем выразить $\dot{x}$ явно через t и x. В таком случае мы получаем уравнение вида

$$F(t,\, x,\, \dot{x}) = 0$$

где F — непрерывная функция. Это уравнение называется **уравнением первого порядка, не разрешённым относительно производной**. Стоит отметить, что о единственности решения говорить уже трудно.

Основной метод решения таких уравнений — это метод введения параметра. Он позволит нам найти общее решение диффура. Часто после подобного много чего может посокращаться, но просто зачёркивать лишние множители мы не должны. Часто существует несколько особых решений ($x = C$ и подобные), которые также необходимо учитывать.

$t = f(x,\, \dot{x})$

В данном случае переменная t выражается явно через x и производную $\dot{x}$. Введём параметр $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ и подставим в уравнение. Продифференцируем уравнение по x с обеих сторон:

$$t = f(x,\, \dot{x}) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x,\, p)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

Так как $p = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, то $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{p}$ откуда:

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \iff \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{p}\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \mathrm{d}p = 0$$

Получили явное дифференциальное уравнение $G(x,\, p)$, общее решение которого можем найти. Получаем решение $x = \varphi(p)$ – какая-то функция от параметра, после чего подставляем полученный x в исходное уравнение, чтобы выразить t через параметр. В итоге решение определяется системой двух уравнений:

$$\begin{cases} G(x,\, p) = 0 \Longrightarrow x = \varphi(p) \\ t = f(x,\, p) = f\big(\varphi(p),\, p\big) \end{cases}$$

Важно! p — это независимый параметр, а не чья-то производная! Нельзя его ассоциировать с $\dot{x}$ во время решения!

Пример №1

$$\dot{x} = \exp\left(\frac{t\dot{x}}{x}\right)$$

Как видим, здесь весьма затруднительно получить $\dot{x}$ явно. Будем выражать t через x и $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \exp\left(\frac{t\dot{x}}{x}\right) \iff \log\dot{x} = \frac{t\dot{x}}{x} \iff t = \frac{x\log\dot{x}}{\dot{x}}$$

Делаем параметризацию $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ и подставляем, после чего дифференцируем обе части уравнения.

$$t = \frac{x\log p}{p} \Longrightarrow \partial = \partial$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{p} = \frac{\log p}{p}\,\mathrm{d}x + x \cdot \frac{1 - \log p}{p^2}\,\mathrm{d}p$$

$$\mathrm{d}x = \log p \,\mathrm{d}x + x \cdot \frac{(1 - \log p)}{p}\,\mathrm{d}p$$
$$(1 - \log p)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{p} \cdot (1 - \log p)\,\mathrm{d}p = 0$$
$$(1 - \log p) \cdot \left(\mathrm{d}x - \frac{x}{p}\,\mathrm{d}p\right) = 0$$

Заметим, что особым решением будет являться решение уравнения $(1 - \log p) = 0$. Решим его, выразив параметр и подставив в исходный диффур:

$$\log p = 1 \iff p = e$$
$$p = \exp\left(\frac{t \cdot p}{x}\right) \Longrightarrow e = \exp\left(\frac{t \cdot e}{x}\right) \iff 1 = \frac{t \cdot e}{x} \iff x = e \cdot t$$

Теперь получим оставшееся решение:

$$\mathrm{d}x = \frac{x}{p}\,\mathrm{d}p$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{p}\,\mathrm{d}p \Longrightarrow \int = \int$$
$$\log |x| = \log |p| + C$$
$$x = \lambda \cdot p,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$t = \frac{x \log p}{p} \Longrightarrow t = \frac{\lambda p \log p}{p} = \lambda \log p$$

Таким образом, мы получили общее решение диффура и одно частное:

$$\begin{cases} x = \lambda \cdot p,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ t = \lambda \log p \end{cases} \qquad x = e \cdot t$$

$x = f(t,\ \dot{x})$

Здесь похоже — x явно зависит от t и $\dot{x}$. Опять вводим параметр $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, подставляем и дифференцируем теперь уже по t:

$$x = f(t,\ \dot{x}) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(t,\ p)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

Так как $p = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, то $\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t$ откуда:

$$p = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \iff \left(\frac{\partial f}{\partial t} - p\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \mathrm{d}p = 0$$

Получили явное дифференциальное уравнение $G(t,\ p)$, общее решение которого можем найти. Получаем решение $t = \psi(p)$ – какая-то функция от параметра, после чего подставляем полученный t в исходное уравнение, чтобы выразить x через параметр. В итоге решение определяется системой двух уравнений:

$$\begin{cases} G(t,\ p) = 0 \Longrightarrow t = \psi(p) \\ x = f(t,\ p) = f\big(\psi(p),\ p\big) \end{cases}$$

В некоторых случаях параметр p бывает возможно исключить из системы, и общее решение будет записываться в явной форме: $x = f(t)$ или $t = f(x)$.

Пример № 2

$$5x + (\dot{x})^2 = t(t + \dot{x})$$

Можем сразу выразить x через t и $\dot{x}$:

$$5x = t^2 + t\dot{x} - (\dot{x})^2$$

Делаем параметризацию $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ и подставляем, после чего дифференцируем обе части уравнения.

$$\begin{gathered}
5x = t^2 + tp - p^2 \Longrightarrow \partial = \partial \\
5\dot{x} = 5 \cdot p\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t + p\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}p - 2p\,\mathrm{d}p \\
4 \cdot p\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t + (t - 2p)\,\mathrm{d}p \\
2\big(t - 2p\big)\,\mathrm{d}t + (t - 2p)\,\mathrm{d}p = 0 \\
\big(t - 2p\big) \cdot (2\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}p) = 0
\end{gathered}$$

Опять есть особое решение, заключённое в первой скобке. Решим данное уравнение и подставим результат в исходное:

$$\begin{gathered}
t = 2p \iff t = \frac{p}{2} \\
5x = \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{2} - p^2 = -\frac{p^2}{4} \iff x = -\frac{p^2}{20}
\end{gathered}$$

Теперь разберём вторую скобку:

$$\begin{gathered}
2\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}p \Longrightarrow \int = \int \\
2t = -p + C \iff t = -\frac{p}{2} + 2C \\
5x = t^2 + tp - p^2 \Longrightarrow 5x = \frac{p^2}{4} - 2pC + 4C^2 + 2pC - \frac{p^2}{2} + p^2 \\
5x = \frac{3p^2}{4} + 4C^2 \iff x = \frac{3p^2}{20} + \frac{4C^2}{5},\ C \in \mathbb{R}
\end{gathered}$$

Таким образом, получили 2 решения — особое и общее:

$$\begin{cases} t = \dfrac{p}{2} \\ x = -\dfrac{p^2}{20} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -\dfrac{p}{2} + 2C \\ x = \dfrac{3p^2}{20} + \dfrac{4C^2}{5},\ C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Пример №3

$$2x = 2t^2 + 4t\dot{x} + (\dot{x})^2$$

В данном случае можем выразить x явно. Как и раньше, делаем параметризацию $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, подставляем и берём производную от обеих частей уравнения:

$$\begin{gathered}
x = t^2 + 2tp + \frac{p^2}{2} \Longrightarrow \partial = \partial \\
\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t + 2t\,\mathrm{d}p + 2p\,\mathrm{d}t + p\,\mathrm{d}p \\
2t\,\mathrm{d}t + 2t\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}t + p\,\mathrm{d}p = 0 \iff (2t + p)\,\mathrm{d}t + (2t + p)\,\mathrm{d}p = 0 \\
(2t + p) \cdot (\mathrm{d}t + \mathrm{d}p) = 0
\end{gathered}$$

Необходимо разобрать два случая. Первое решение имеет вид:

$$2t + p = 0 \iff t = -\frac{p}{2}$$
$$x = \frac{p^2}{4} - p^2 + \frac{p^2}{2} = -\frac{p^2}{4}$$

В данном случае удобно исключить p из решения, так как x выражается через t:

$$t = -\frac{p}{2} \iff t^2 = \frac{p^2}{4} = -x \iff x = -t^2$$

Получили особое решение. Теперь рассмотрим вторую скобку:

$$\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}p \Longrightarrow \int = \int$$
$$t = -p + C$$

Подставляем в исходный диффур и получаем выражение для p:

$$x = (C-p)^2 + 2p \cdot (C-p) + \frac{p^2}{2}$$
$$x = C^2 - 2pC + p^2 + 2pC - 2p^2 + \frac{p^2}{2} = C^2 - \frac{p^2}{2}$$

Мы опять можем исключить параметр p и получить явную функцию $x = x(t)$:

$$p = C - t \Longrightarrow x = C^2 - \frac{p^2}{2} = C^2 - \frac{(C-t)^2}{2}$$

Таким образом, имеем общее решение и особое решение, оба в явной форме:

$$x = -t^2 \qquad x = C^2 - \frac{(C-t)^2}{2}$$

$t = f(\dot{x})$ и $x = f(\dot{x})$

Если нам повезло, и уравнение не содержит одну из переменных вообще, то общее решение получить совсем просто. Делаем ту же параметризацию, $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Тогда:

$$t = f(\dot{x}) \Longrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p$$
$$x = f(\dot{x}) \Longrightarrow \mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t = p \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p$$

Отсюда мы можем получить общее решение простым интегрированием:

$$\begin{cases} t = \displaystyle\int \frac{1}{p} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p \\ x = f(p) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int p \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p \\ t = f(p) \end{cases}$$

Пример № 4

$$x = (\dot{x})^2 + 2(\dot{x})^3$$

Как видим, в данном случае нет переменной t. Делаем параметризацию $p = \dot{x}$ и подставляем:

$$p = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow x = p^2 + 2p^3 \Longrightarrow \partial = \partial$$
$$\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t = (2p + 6p^2)\,\mathrm{d}p,\ p = 0 \text{ — решение, тогда } x = \text{ решение}$$
$$\mathrm{d}t = (2 + 6p)\,\mathrm{d}p \iff t = 2p + 3p^2 + C$$
$$\begin{cases} x = p^2 + 2p^3 \\ t = 2p + 3p^2 + C \end{cases}$$

Таким образом, получили общее решение через параметр, а также одно особое решение – $x = C$.

Пример № 5

$$9(\dot{x})^2 - 4t = 0$$

Теперь нет переменной x. Делаем параметризацию $p = \dot{x}$ и подставляем:

$$p = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow t = \frac{9}{4} \cdot p^2 \Longrightarrow \partial = \partial$$
$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{p} = \frac{9}{2} \cdot p\,\mathrm{d}p \iff \mathrm{d}x = \frac{9}{2} \cdot p^2\,\mathrm{d}p \Longrightarrow \int = \int$$
$$x = \frac{9}{2} \cdot \frac{p^3}{3} + C = \frac{3}{2} \cdot p^3 + C$$

Получили общее решение:

$$\begin{cases} t = \frac{9}{4} \cdot p^2 \\ x = \frac{3}{2} \cdot p^3 + C \end{cases}$$

Иногда бывает полезно исключить p из системы уравнений – в данном случае это можно проделать:

$$p^2 = \frac{4}{9} \cdot t \iff p = \pm\frac{2}{3}\sqrt{t}$$
$$x = \frac{3}{2} \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{t}\right)^3 + C = \pm\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{27} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C = \pm\frac{4}{9} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C$$

Получили изящную кривую без параметра:

$$x = \pm\frac{4}{9} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C$$

Замечу, что не всегда параметризация может производиться лишь $\dot{x} = p$. Иногда бывает полезно параметризовать целую функцию $g(t, \dot{x})$ или $g(x, \dot{x})$, чтобы решить диффур. Правила игры при этом всё те же.

Пример № 6

$$x = \frac{\dot{x}}{t} + \frac{t}{\dot{x}}$$

Можно конечно было бы сразу же рубануть классическую параметризацию, но гораздо лучше будет параметризовывать на $\dot{x}$, а $\frac{\dot{x}}{t}$:

$$\frac{\dot{x}}{t} = \frac{\mathrm{d}x}{t\,\mathrm{d}t} = p$$
$$x = p + \frac{1}{p} \Longrightarrow \partial = \partial$$
$$\mathrm{d}x = pt\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}p}{p^2}$$
$$t\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^3}\right)\mathrm{d}p \Longrightarrow \int = \int$$
$$\frac{t^2}{2} = \log|p| + \frac{1}{2p^2} + C$$

Получили итоговое решение:

$$\begin{cases} t^2 = 2\log|p| + \dfrac{1}{p^2} + 2C \\ x = p + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнение Лагранжа – это дифференциальное уравнение, имеющее следующий вид:

$$A(\dot{x})x + B(\dot{x})t + C(\dot{x}) = 0$$

Данные уравнения можно решить уже известным нам методом: выражаем x явно, получая следующий диффур:

$$x = t\varphi(\dot{x}) + \psi(\dot{x})$$

Параметризируем $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ и берём производные:

$$x = t\varphi(p) + \psi(p) \Longrightarrow \partial = \partial$$
$$\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t = \varphi(p)\,\mathrm{d}t + t\cdot\varphi'(p)\,\mathrm{d}p + \psi'(p)\,\mathrm{d}p$$
$$\big(\varphi(p) - p\big)\,\mathrm{d}t + t\cdot\varphi'(p)\,\mathrm{d}p + \psi'(p)\,\mathrm{d}p = 0$$
$$\dot{t} + t\cdot\frac{\varphi'(p)}{\big(\varphi(p) - p\big)} + \frac{\psi'(p)}{\big(\varphi(p) - p\big)} = 0$$

Получили **линейное** дифференциальное уравнение по $t = t(p)$, которое мы уже умеем решать. Тогда, если решением будет $t = g(p)$, то итоговым общим решением будет:

$$\begin{cases} t = g(p) \\ x = g(p)\cdot\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

Всё бы хорошо, да мы сделали серьёзное допущение — мы смогли получить линейный диффур только исходя из предположения, что $p \neq \varphi(p)$. Поэтому случай $p = \varphi(p)$ нужно разобрать отдельно. Тогда, если решением этого уравнения на p будет $p = C$ — какая-то константа, то получаем особое решение:

$$x = t\cdot\varphi(C) + \psi(C)$$

— прямая линия.

Пример №7

$$x = 2t\dot{x} + \log\dot{x}$$

Уравнение уже в удобной форме. Полагаем $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ и дифференцируем:

$$x = 2tp + \log p \Longrightarrow \partial = \partial$$
$$\dot{x} = p\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}p + 2p\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}p}{p} \iff p\,\mathrm{d}t + 2t\,\mathrm{d}p + \frac{\mathrm{d}p}{p} = 0$$
$$p\dot{t} + 2t + \frac{1}{p} = 0 \iff \dot{t} + \frac{2}{p} \cdot t + \frac{1}{p^2} = 0$$

Получили линейный диффур. Решаем его классически — методом вариации произвольной постоянной. Решаем однородное:

$$\dot{t} = -\frac{2}{p} \cdot t \iff \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{2\,\mathrm{d}p}{p} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\log|t| = -2\log|p| + C \iff t = u \cdot \frac{1}{p^2},\ u \in \mathbb{R}$$

Делаем вариацию постоянной:

$$\begin{cases} t = u \cdot \dfrac{1}{p^2} \\ \dot{t} = \dot{u} \cdot \dfrac{1}{p^2} - 2u \cdot \dfrac{1}{p^3} \end{cases}$$
$$\dot{u} \cdot \frac{1}{p^2} - 2u \cdot \frac{1}{p^3} + \frac{2}{p} \cdot u \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} = 0 \iff \dot{u} \cdot \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{p^2}$$
$$\dot{u} = -1 \iff \mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}p \iff u = -p + C$$
$$t = u \cdot \frac{1}{p^2} = (C - p) \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Осталось подставить в исходный диффур и выразить x через p:

$$t = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$$
$$x = 2tp + \log p = 2p \cdot \left(\frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}\right) + \log p = 2 \cdot \left(\frac{C}{p} - 1\right) + \log p$$

Получили общее решение диффура:

$$\begin{cases} t = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{1}{p} \\ x = \log p + \dfrac{2C}{p} - 2 \end{cases}$$

Помимо Лагранжа, существую дифференциальные **уравнения Клеро**, имеющие следующий вид:

$$x = t\dot{x} + \psi(\dot{x})$$

Метод решения абсолютно тот же, что и для уравнений Лагранжа — параметризация и дифференцирование:

$$p = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$x = tp + \psi(p) \Longrightarrow \partial = \partial$$
$$\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}t + \psi'(p)\,\mathrm{d}p \iff \big(t + \psi'(p)\big)\,\mathrm{d}p = 0$$

Заметим, что уравнение Клеро будет всегда иметь случай $\mathrm{d}p = 0$ и как следствие общее решение будет выражаться так:

$$\mathrm{d}p = 0 \iff p = C$$
$$x = tp + \psi(p) = Ct + \psi(C)$$

Причём это верно для любого уравнения Клеро. Особым решением будет результат исключения параметра p из системы уравнений:

$$\begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = tp + \psi(p) = \psi(p) - p \cdot \psi'(p) \end{cases}$$

Пример №8

$$x = t\dot{x} - (\dot{x})^2$$

Это уравнение Клеро. Делаем параметризацию, дифференцируем и группируем аргументы:

$$p = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$x = tp - p^2 \Longrightarrow \partial = \partial$$
$$\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}t - 2p\,\mathrm{d}p \iff (2p - t)\,\mathrm{d}p = 0$$

Разбираем первый, общий случай:

$$\mathrm{d}p = 0 \iff p = C$$
$$x = Ct - C^2$$

Второй, особый:

$$t = 2p$$
$$x = tp - p^2 = 2p^2 - p^2 = p^2$$

Исключаем параметр p:

$$t = 2p \iff p = \frac{t}{2} \Longrightarrow x = \frac{t^2}{4}$$

Итоговый ответ:

$$x = Ct - C^2 \qquad x = \frac{t^2}{4}$$

Пример №9

$$2(\dot{x})^2(x - t\dot{x}) = 1$$

Раскроем скоби и приведём подобные, чтобы увидеть уравнение Клеро:

$$2(\dot{x})^2 x - 2(\dot{x})^3 t - 1 = 0 \iff x = t\dot{x} + \frac{1}{2(\dot{x})^2}$$

Осталось решить классической параметризацией.

$$p = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow x = tp + \frac{1}{2p^2} \Longrightarrow \partial = \partial$$
$$\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}p}{p^3} \iff \left(t - \frac{1}{p^3}\right)\mathrm{d}p = 0$$

Имеем два случая. Первый:

$$\mathrm{d}p = 0 \iff p = C$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем класс кривых:

$$x = tp + \frac{1}{2p^2} \qquad p = C$$
$$x = Ct + \frac{1}{2C^2}$$

Разберём второй случай:

$$t = \frac{1}{p^3}$$
$$x = tp + \frac{1}{2p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^2} = \frac{3}{2p^2}$$

Исключим параметр p:

$$p^3 = \frac{1}{t} \iff p = t^{-\frac{1}{3}} \Longrightarrow x = \frac{3}{2p^2} = \frac{3}{2} \cdot t^{\frac{2}{3}}$$

Особое решение диффура. Итоговый ответ:

$$x = \frac{3}{2} \cdot t^{\frac{2}{3}} \qquad x = Ct + \frac{1}{2C^2}$$

Домашнее задание №5

Задача №1. *Решить диффур:*

$$t = \dot{x}\sqrt{(\dot{x})^2 + 1}$$

Задача №2. *Решить диффур:*

$$x = \log\bigl(1 + (\dot{x})^2\bigr)$$

Задача №3. *Решить диффур:*

$$x = t\dot{x} - t^2(\dot{x})^3$$

Задача №4. *Решить диффур:*

$$2t\dot{x} - x = \log \dot{x}$$

Задача №5. *Решить диффур:*

$$2t\dot{x} - x = \dot{x}\log(x\dot{x})$$

Семинар 6, 14 февраля

Уравнения, допускающие понижение порядка

Вспомним, как в общем виде выглядит диффур n-го порядка:

$$F\big(t,\, x,\, \dot{x},\ \ldots,\, x^{(n)}\big) = 0$$

Данное уравнение называется **допускающим понижение порядка**, если путём некоторых преобразований или замен его можно свести к диффуру первого порядка: $G(t,\, x,\, \dot{x}) = 0$. Существует несколько способов работать с данными уравнениями, преимущественно они относятся к хитроумным заменам и наблюдениям.

Повторное интегрирование

Самый простой метод. Рассмотрим диффур вида

$$x^{(n)} = f(t)$$

где $x^{(n)}$ — производная n-го порядка, а правая часть зависит только от t (возможно, константа).

Данное дифференциальное уравнение решается последовательным интегрированием правой части. Причём интегрировать придется ровно n раз. Тогда получаем такое решение:

$$x = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x)\, \underbrace{\mathrm{d}x \ldots \mathrm{d}x}_{n} + C_1 \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \cdot \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} \cdot t + C_n$$

Здесь даже и разбираться нечего, простое интегрирование. Полезно бывает группировать слагаемые в диффурах и получать вот такие выражения. Часто повторное интегрирование применяется при рассмотрении нескольких случаев.

Нет x

Рассмотрим диффур, в котором нет в явном виде (то бишь вообще не видно даже) искомой функции x и, возможно, её производных до порядка $k-1$ включительно. То есть, имеем уравнение:

$$F\left(t,\, x^{(k)},\, x^{(k+1)},\ \ldots,\, x^{(n)}\right)$$

Понижать порядок будем так: делаем замену $y = y(t) = x^{(k)}$ и соответственно изменяем все производные старших порядков, получая диффур:

$$F\left(t,\, y,\, \dot{y},\ \ldots,\, y^{(n-k)}\right)$$

Теперь жить станет (ненамного) полегче. Важно помнить, что y — это функция от t, и что в этом уравнении обязательно должна быть переменная t.

Теперь решаем полученный диффур (возможно, применяя ещё несколько методов понижения порядка, или же просто развлекаясь), получая некое решение $y = f(t,\, C_1,\ \ldots,\, C_{n-k})$. Вспоминаем, что $y = x^{(k)}$, и у нас возникает ещё один диффур:

$$x^{(k)} = f(t,\, C_1,\ \ldots,\, C_{n-k})$$

Ну а этот зверь берётся простым повторным интегрированием (собственно, ключевая цель повторного интегрирования именно вот в этом — подсобить другим методам).

Пример №1

$$\ddot{x}\sqrt{t} = (\dot{x})^2$$

В данном диффуре отсутствует функция x. Делаем замену $\dot{x} = y$, тогда уравнение примет вид:

$$\dot{y}\sqrt{t} = y^2$$

Простое уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\dot{y}\sqrt{t} = y^2 \iff \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x}} \Longrightarrow \int = \int$$

$$-\frac{1}{y} = 2\sqrt{t} + C_1 \iff y = -\frac{1}{2\sqrt{t} + C_1}$$

Теперь вспомним, что $y = \dot{x}$, и ещё раз интегрируем, чтобы получить решение:

$$y = \dot{x} = -\frac{1}{2\sqrt{t} + C_1} \iff x = -\int \frac{1}{2\sqrt{t} + C_1}$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{t} + C_1} = \left\|\begin{matrix} t = q^2 \\ \mathrm{d}t = 2q\,\mathrm{d}q \end{matrix}\right\| = \int \frac{2q\,\mathrm{d}q}{2q + C_1} = \int \left(1 - \frac{C_1}{2q + C_1}\right)\mathrm{d}q = q + \frac{C_1}{2} \cdot \log|2q + C_1| + C_2$$

$$q = \sqrt{t} \Longrightarrow x = -\sqrt{t} + \frac{C_1}{2} \cdot \log|2\sqrt{t} + C_1| + C_2$$

Получили итоговое общее решение:

$$x = -\sqrt{t} + \frac{C_1}{2} \cdot \log|2\sqrt{t} + C_1| + C_2$$

Пример №2

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t+1} = 9(t+1)$$

В данном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная x. Заменим первую производную $\dot{x}$ на функцию $y = y(t)$:

$$y = \dot{x} \qquad \ddot{x} = \dot{y}$$

$$\dot{y} + \frac{y}{t+1} = 9(t+1)$$

Получили обычный линейный диффур. Решаем его методом вариации постоянной:

$$\dot{y} = -\frac{y}{t+1} \iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}t}{t+1} \Longrightarrow \int = \int$$

$$\log|y| = -\log|t+1| + C \iff y = \frac{u}{t+1},\ u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{t+1} \\ \dot{y} = \dfrac{\dot{u}}{t+1} - \dfrac{u}{(t+1)^2} \end{cases}$$

$$\frac{\dot{u}}{t+1} - \frac{u}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1} \cdot \frac{u}{t+1} = 9(t+1)$$

$$\frac{\dot{u}}{t+1} = 9(t+1) \iff \mathrm{d}u = 9(t+1)^2\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$u = 3(t+1)^3 + C_1$$

$$y = \frac{u}{t+1} = \frac{3(t+1)^3 + C_1}{t+1} = 3(t+1)^2 + \frac{C_1}{t+1}$$

Отлично! Мы нашли y. Вспоминаем, что $y = \dot{x}$, делаем обратную замену и интегрируем:

$$\dot{x} = 3(t+1)^2 + \frac{C_1}{t+1} \Longrightarrow \int = \int$$
$$x = (t+1)^3 + C_1 \cdot \log|t+1| + C_2$$

Это и есть итоговый ответ.

Пример №3

$$(1 + \sin t)\dddot{x} = \ddot{x}\cos t$$

В данном уравнении третьего порядка нет в явном виде не только функции x, но и её первой производной $\dot{x}$. Поэтому заменяем на $y = y(t)$ её младшего брата – вторую производную:

$$\ddot{x} = y \qquad \dddot{x} = \dot{y}$$

Подставляем, получая диффур с разделяющимися переменными, который с лёгкостью решаем:

$$(1 + \sin t)\dot{y} = y\cos t \iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1 + \sin t} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\log|y| = \log|1 + \sin t| + C_1 \iff y = \lambda \cdot (1 + \sin t)$$

Делаем обратную замену $y = \ddot{x}$. Увы, но чтобы получить ответ, придётся повторно проинтегрировать аж 2 раза:

$$\ddot{x} = \lambda \cdot (1 + \sin t) \Longrightarrow \int = \int$$
$$\mathrm{d}x = \lambda \cdot (t - \cos t) + C_2 \Longrightarrow \int = \int$$
$$x = \lambda \cdot \left(\frac{t^2}{2} - \sin t\right) + C_2 \cdot t + C_3$$

Нашли искомую кривую.

Нет t

Существует также вид диффуров, в которых в явном виде нет переменной t. Вообще ни разу. То бишь выглядит уравнение так:

$$F\left(x,\, \dot{x},\, \ddot{x},\, \ldots,\, x^{(n)}\right) = 0$$

Здесь также можно понизить порядок, однако, замена будет более хитрой. Первую производную $\dot{x}$ заменяем на некоторую неизвестную функцию $p = p(x)$ – <u>от переменной x</u>, то есть это сложная функция. В таком случае все производные старших порядков выражаются через производные новой функции p по x:

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p$$
$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p\dot{p}$$
$$\dddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p^2\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2} + p\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2 = p^2\ddot{p} + p(\dot{p})^2$$

И так далее. Подставив все эти выражения вместо производных соответствующих порядков, получаем диффур $n-1$-го порядка:

$$G\left(x,\, p,\, \dot{p},\, \ldots,\, p^{(n-1)}\right) = 0$$

Решаем его, находя функцию $p = g(x)$, после чего делаем обратную замену $p = \dot{x}$ и решаем обычный диффур первого порядка, которые мы давно покорили.

Пример №4

$$2x\ddot{x} = (\dot{x})^2 + 1$$

Как видим, t ни слуху, ни духу. Проворачиваем вышеуказанную замену и решаем диффур первого порядка:

$$\dot{x} = p \qquad \ddot{x} = p\ddot{p}$$
$$2xp\ddot{p} = p^2 + 1 \iff \frac{p\,\mathrm{d}p}{p^2+1} = \frac{\mathrm{d}x}{2x} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\log|p^2 + 1 = \log|x| + C \iff p^2 + 1 = \lambda x \iff p^2 = \lambda x - 1$$

Теперь подставляем $p = \dot{x}$ и находим кривую $x = x(t)$:

$$(\dot{x})^2 = \lambda x - 1 \iff \dot{x} = \pm\sqrt{\lambda x - 1} \iff \pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda x - 1}} = \mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$\pm\sqrt{\lambda x - 1} = \frac{\lambda}{2}\cdot t + C$$

Получили общий интеграл нашей кривой.

Пример №5

$$x\ddot{x} = (\dot{x})^2 - (\dot{x})^3$$

Понизим степень, сделав замену $\dot{x} = p(x)$:

$$\dot{x} = p \qquad \ddot{x} = p\ddot{p}$$
$$xp\dot{p} = p^2 - p^3$$

Здесь хочется сократить на p. Это можно сделать, но при этом нужно обработать случай, когда $p = 0$. В таком случае $\dot{x} = 0 \iff x = C$ — особое решение.

$$x\dot{p} = p - p^2 \iff \frac{\mathrm{d}p}{p(1-p)} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \iff \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\log|p| - \log|1-p| = \log|x| + C \iff \log\left|\frac{p}{1-p}\right| = \log|x| + C$$
$$\frac{p}{1-p} = \lambda x$$

Обратная замена $p = \dot{x}$:

$$\frac{\dot{x}}{1-\dot{x}} = \lambda x \iff \dot{x} = \lambda x - \lambda x\dot{x}$$
$$\dot{x}(1 + \lambda x) = \lambda x \iff \frac{1+\lambda x}{x}\,\mathrm{d}x = \lambda\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$\log|x| + \lambda x = \lambda t + C$$

Тогда итоговым ответом будет пара решений:

$$x = C \qquad \log|x| + \lambda x = \lambda t + C$$

Пример №6

$$\dddot{x}(\dot{x})^2 = (\ddot{x})^3$$

Выглядит устрашающе, не правда ли? Но ничего, решить этот диффур нам поможет ставшая уже классической замена $\dot{x} = p(x)$. Понизим степень уравнения:

$$\dot{x} = p \qquad \ddot{x} = p\dot{p} \qquad \dddot{x} = p^2\ddot{p} + p(\dot{p})^2$$
$$\big(p^2\ddot{p} + p(\dot{p})^2\big)p^2 = \big(p\dot{p}\big)^3 = p^3(\dot{p})^3$$

Можем сократить на p^3, обработав случай $p = 0$. Тогда $x = C$ – особое решение. Продолжаем решать дальше:

$$p\ddot{p} + (\dot{p})^2 = (\dot{p})^3$$

Заметим, что у нас пропала переменная x. А p — это функция от x. То есть, мы опять получили диффур, допускающий понижение порядка, в котором нет независимой переменной x (относительно данного уравнения). Поэтому мы ещё раз понижаем степень при помощи той же самой замены:

$$\dot{p} = q \qquad \ddot{p} = q\dot{q}$$
$$pq\dot{q} + q^2 = q^3$$

Можем теперь сократить на q. При этом нужно рассмотреть случай $q = 0$:

$$q = \dot{p} = 0 \iff p = C_1$$
$$p = \dot{x} = C_1 \iff x = C_1 \cdot t + C_2$$

Второе особое решение. Осталось дорешать полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$p\dot{q} + q = q^2 \iff \dot{q} = \frac{q(q-1)}{p} \iff \frac{\mathrm{d}q}{q(q-1)} = \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}\right)\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}p}{p} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\log|q-1| - \log|q| = \log|p| + C \iff \log\left|\frac{q-1}{q}\right| = \log|p| + C \iff \frac{q-1}{q} = \lambda p$$

Начинаем разворачивать этот запутанный клубок. Первая обратная замена: $q = \dot{p}$.

$$\frac{\dot{p}-1}{\dot{p}} = \lambda p \iff \dot{p} - 1 = \lambda p\dot{p}$$
$$\dot{p}(1 - \lambda p) = 1 \iff (1 - \lambda p)\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}x \Longrightarrow \int = \int$$
$$p - \frac{\lambda p^2}{2} = x + C$$

Теперь делаем обратную замену: $p = \dot{x}$.

$$\dot{x} - \frac{\lambda(\dot{x})^2}{2} = x + C$$

И что с этим делать? $\dot{x}$ не выражается явно через t и x. Однако, мы ведь уже умеем работать с такими уравнениями, верно?) Нужно ввести параметр $p = \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Так что, как не иронично, но мы распутали слегка больше, чем на самом деле было необходимо. Делаем параметризацию, выражаем x – тут это удобно – и дифференцируем.

$$p - \frac{\lambda p^2}{2} = x + C_1 \iff x = p - \frac{\lambda p^2}{2} - {}_1 \Longrightarrow \partial = \partial$$

$$\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}p - \lambda p\,\mathrm{d}p \iff (1-\lambda p)\,\mathrm{d}p = p\,\mathrm{d}t \iff \frac{1-\lambda p}{p}\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$t = \log|p| - \lambda p + C_2$$

Решили-таки. Итоговым ответом будет одно общее решение и два особых:

$$\begin{cases} x = p - \dfrac{\lambda p^2}{2} - C_1 \\ t = \log|p| - \lambda p + C_2 \end{cases} \qquad x = C \qquad x = C_1 \cdot t + C_2$$

Отмечу, что константа C_1 в общем решении фиксирована для x, так как пришла из другого диффура, и никак не связана с C_2.

Кривизна траектории

Теперь применим наши методы для решения более-менее прикладных задач. Пускай у нас есть некая гладкая кривая (то есть гладкая покоординатно) $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ – некоторое отображение. Пускай $\gamma = \gamma(t)$ – функция от параметра t. Можно ввести понятие **репараметризации** — когда вместо t мы подставляем некоторую функцию $t(\tau)$ — грубо говоря, если до этого мы двигались по кривой с одной и той же скоростью, то теперь мы то замедляемся, то ускоряемся. Тогда $\gamma\big(\tau(t)\big) \sim \widetilde{\gamma}(\tau)$ — уже кривая от параметра τ. Пускай теперь мы хотим двигаться по кривой так, чтобы пройденное время было равно пройденному расстоянию. Для этого нужна особая параметризация, именуемая **натуральной**.

Определение 5. ***Натуральная параметризация*** *— это такая параметризация $s = s(t)$ кривой $\gamma = \gamma(t)$, что для $\gamma(s)$ выполнено: $|\dot{\gamma}| = 1$.*

Пусть $s = s(t)$ — натуральная параметризация. Тогда ввести её, исходя из определения, можно так:

$$s(t) = \int\limits_0^t |\dot{\gamma}|\,\mathrm{d}\tau$$

Рассмотрим производную $\dot{\gamma}$ подробнее. Заметим, что:

$$|\dot{\gamma}| = \langle \dot{\gamma},\, \dot{\gamma} \rangle$$

— по определению модуля. Рассмотрим теперь производную скалярного произведения, которая определяется так:

$$\big(\langle a,\, b\rangle\big)' = \langle \dot{a},\, b\rangle + \langle a,\, \dot{b}\rangle$$

Тогда:

$$0 = (1)' = \big(\langle \dot{\gamma},\, \dot{\gamma}\rangle\big)' = 2\langle \dot{\gamma},\, \ddot{\gamma}\rangle \iff \dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$$

Введём ещё несколько определений.

Определение 6. ***Кривизна*** *кривой $\gamma(s)$, где s — натуральная параметризация, называется*

$$k = |\ddot{\gamma}(s)|$$

Радиусом кривизны *при этом называется величина*

$$R = \frac{1}{k}$$

Так как $\dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$, то фактически вектор скорости ($\dot{\gamma}$) перпендикулярен вектору ускорения ($\ddot{\gamma}$) — иными словами, у нас имеется только центростремительное ускорение. Отсюда и возникает необходимость понятия кривизны траектории — она фактически характеризует скорость вращения касательной в точке.

Мы в $\mathbb{R}^2$. Возьмём векторы $\varepsilon_1 \parallel \dot{\gamma}$, $\varepsilon_2 \parallel \ddot{\gamma}$, $|\varepsilon_1| = 1 = |\varepsilon_2|$ — так как $\dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$, то они являются базисными. Ясно, что в таком случае первую производную кривой γ можно выразить так:

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \varepsilon_1 = |\dot{\gamma}| \cdot \varepsilon_1$$

Попробуем теперь сделать также со второй производной:

$$\ddot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(|\dot{\gamma}| \cdot \varepsilon_1\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \varepsilon_1 + \left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \frac{\mathrm{d}\varepsilon_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \varepsilon_1 + \left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \frac{\mathrm{d}\varepsilon_1}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \varepsilon_1 + \left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \left(k \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \varepsilon_1 + \left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right|^2 \cdot k \cdot \varepsilon_2 = \ddot{\gamma}$$

Домножив всё на $\dot{\gamma}$ векторно, получаем:

$$\big[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}\big] = |\dot{\gamma}|^3 \cdot k$$

За валидность сего результата не отвечаю. Таким образом, мы смогли выразить k через первую и вторую производные явно (при этом стоит помнить, что $k = |\ddot{\gamma}|$ только при натуральной параметризации). Отсюда получаем непростую формулу для кривизны:

$$k = \frac{|\ddot{\gamma}|}{\Big[1 + \big(\dot{\gamma}\big)^2\Big]^{\frac{3}{2}}}$$

Пример №7

Найти все кривые $x(t)$, такие, что радиус кривизны для любой точки графика обратно пропорционален косинусу угла между касательной и осью абсцисс, то есть:

$$R = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Для решения задачи понадобится немного вспомнить тригонометрию. Мы знаем, что:

$$R^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1 \Longrightarrow R^2 = \tan^2\alpha + 1$$

Но ведь тангент угла наклона касательной (то есть угла между касательной и осью абсцисс) это по определению производная $\dot{x}$! Следовательно, получаем соотношение:

$$R^2 = (\dot{x})^2 + 1$$

Так как $R = \dfrac{1}{k}$, то можно подставить выражение для k через первые две производные кривой, тем самым получив диффур второго порядка:

$$\frac{1}{(\dot{x})^2+1} = \frac{(\ddot{x})^2}{\left[1+\left(\dot{x}\right)^2\right]^3}$$

Будем его решать:

$$\frac{1}{(\dot{x})^2+1} = \frac{(\ddot{x})^2}{\left[1+\left(\dot{x}\right)^2\right]^3} \iff 1 = \frac{(\ddot{x})^2}{\left[1+\left(\dot{x}\right)^2\right]^2} \iff 1 = \frac{\ddot{x}}{1+(\dot{x})^2}$$

В уравнении в явном виде отсутствует сама функция $x = x(t)$, поэтому необходимо применить замену $p = \dot{x}$.

$$\begin{gathered}
\dot{x} = p \qquad \ddot{x} = p\dot{p} \\
1 = \frac{p\dot{p}}{1+p^2} \iff \mathrm{d}x = \frac{p\,\mathrm{d}p}{1+p^2} \implies \int = \int \\
x = \frac{1}{2}\log|1+p^2| + C \iff e^x = \lambda\sqrt{1+p^2} \\
e^{2x} = \lambda^2\bigl(1+p^2\bigr) \iff p = \pm\sqrt{\lambda^2 e^{2x}-1}
\end{gathered}$$

Осталось сделать обратную замену $\dot{x} = p$ и решить диффур с разделяющимися переменными:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\lambda^2 e^{2x}-1} \iff \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda^2 e^{2x}-1}} = \pm\,\mathrm{d}t \implies \int = \int$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda^2 e^{2x}-1}} = \left\|\begin{matrix} u = 2x \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\lambda^2 e^{u}-1}} = \left\|\begin{matrix} v = e^u \\ \mathrm{d}v = e^u\,\mathrm{d}u = v\,\mathrm{d}u \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v\sqrt{\lambda^2 v-1}} =$$

$$= \left\|\begin{matrix} w = \lambda^2 v - 1 \\ \mathrm{d}w = \lambda^2\,\mathrm{d}v \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}w}{(w+1)\sqrt{w}} = \left\|\begin{matrix} y = \sqrt{w} \\ \mathrm{d}y = \dfrac{1}{2\sqrt{w}} \end{matrix}\right\| = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \arctan y + C =$$

$$= \arctan\bigl(\sqrt{w}\bigr) + 1 = \arctan\Bigl(\sqrt{\lambda^2 v-1}\Bigr) + 1 = \arctan\Bigl(\sqrt{\lambda^2 e^u-1}\Bigr) + 1 =$$

$$= \arctan\Bigl(\sqrt{\lambda^2 e^{2x}-1}\Bigr) + 1 = \pm t$$

Таким образом, все возможные кривые, такие, что радиус кривизны для любой точки графика обратно пропорционален косинусу угла между касательной и осью абсцисс, задаются уравнением:

$$\pm t = \arctan\Bigl(\sqrt{\lambda^2 e^{2x}-1}\Bigr) + 1$$

Домашнее задание №6

Задача №1. *Решить диффур:*

$$(\ddot{x})^2 = (\dot{x})^2 + 1$$

Задача №2. *Решить диффур:*

$$\ddot{x} = e^x$$

Задача №3. *Решить диффур:*

$$(\dot{x})^2 + 2x\ddot{x} = 0$$

Задача №4. *Решить диффур:*

$$t\dddot{x} = \ddot{x} - t\ddot{x}$$

Задача №5. *Решить диффур:*

$$x\ddot{x} + x = (\dot{x})^2$$

Семинар 7, 28 февраля

Понижение порядка (продолжение)

Однородные диффуры старших порядков

Обобщённо однородные уравнения

Домашнее задание №7

Common Tasks

1. Найти все гладкие функции $x(t)$ такие, что для любой точки $t_0 \in \mathbb{R}$ касательная к $x(t)$ в точке $\big(t_0,\, x(t_0)\big)$ пересекает ось абсцисс в точке $\dfrac{t_0}{2}$.

2. Найти дифференциальное уравнение первого порядка, задающее на плоскости семейство парабол $x = at^2 + bt + c$, проходящих через точку (0,1) и касающихся прямой $x = t$.

3. Решить диффур:
$$\frac{t}{x}\dot{x} = \ln x - \ln t + 1$$

4. Решить задачу Коши:
$$\dot{x} = \frac{1}{2x} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{t}\right) + \frac{x}{2t}, \text{ начальное условие: } x(1) = 1$$

5. Решить диффур:
$$(t+1)(x\dot{x} - 1) = x^2$$

6. Решить задачу Коши:
$$\dot{x} - 2tx + x^2 = 5 - t^2, \quad \text{начальное условие: } x(0) = 0$$

7. Решить задачу Коши:
$$\dot{x} = \frac{1 + x - x^2 e^t}{2xe^t - t}, \quad \text{начальное условие } x(0) = -1$$

8. Решить диффур:
$$(\sin t + x \cot t)\,\mathrm{d}t + \left(\frac{x^2}{\sin t} + 1\right)\mathrm{d}x$$