Дифференциальные Уравнения
Семинарские занятия

Вадим Гринберг
по семинарам Войнова А. С.

Содержание

Семинар 1, 10 января

Общие факты

Пускай у нас имеется функция $x(t)$ (вообще говоря, вектор-функция $x = (x_1,\ \ldots,\ x_d)$) от переменной $t \in \mathbb{R}$, действующая из интервала $(a,\ b)$ (по умолчанию считаем всей числовой прямой), такая, что для переменной t, функции $x(t)$ и n её первых производных выполнено уравнение:

$$\mathsf{F}\big(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t)\big) = 0$$

— это и есть дифференциальное уравнение n-го порядка. F в данном случае, грубо говоря, «функция от $n+1$ переменной», которая неявно задаёт $x(t)$ (за точным определением — на лекцию).

Решить диффур означает найти такую функцию $x(t)$, что выполняется вышеуказанное равенство.

Тупой пример: $\dot{x}(t) = x(t)$. Функция совпадает со своей производной. Решением, очевидно, будет $x(t) = \lambda \cdot e^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

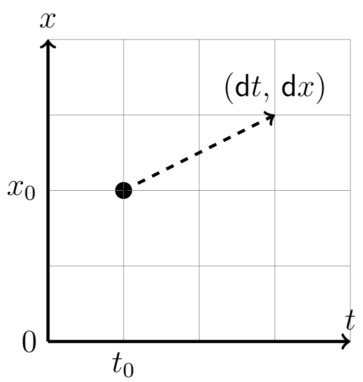
Любой диффур можно привести к удобоваримому виду:

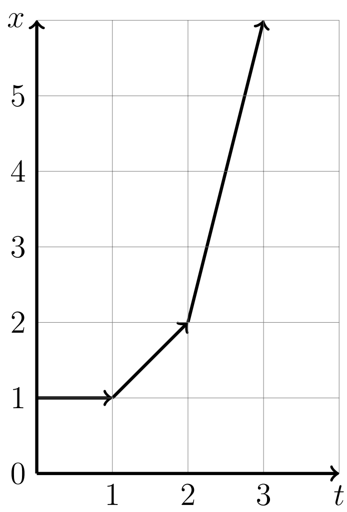
$$\dot{x}(t) = f(t,\ x)$$

где f — некая хорошая функция (доказательство на лекции). С такими диффурами мы в основном и будем иметь дело.

Разберёмся, а как вообще можно решать диффуры. Пускай у нас имеется диффур $\dot{x} = f(t,\ x)$, который мы хотим решить. Попробуем приблизить график нашей кривой $x(t)$ некоей ломаной линией. Возьмём какую-то начальную точку $(t_0,\ x_0)$, и будем смотреть на направление движения, то бишь на направление вектора $(\mathsf{d}t,\ \mathsf{d}x)$. Будем делать маленькие шаги вдоль этого направления. Тогда каждый раз, находясь в точке $(t,\ x)$, мы будем переходить в точку $(t + \mathsf{d}t,\ x + \mathsf{d}x)$.

После многих таких шагов мы получим ломаную линию, приближающую график нашей кривой $x(t)$. Эта ломаная называется **Ломаной Эйлера**.





Для удобства можно делать шаг $\mathsf{d}t$ всегда равным 1, поделив вектор направления на $\mathsf{d}t$. Тогда соответственно шаг $\mathsf{d}x$ станет $\dfrac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \dot{x} = f(t, x)$, и вектор направления в точке $(t,\ x)$ будет иметь вид $\big(1,\ f(t,\ x)\big)$.

Пример: $\dot{x} = tx$. Построим Ломаную Эйлера, стартуя из точки $(t_0,\ x_0) = (0,\ 1)$:

1. $t = 0,\ x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \big(1,\ f(t,\ x)\big) = (1,\ 0) \Rightarrow (t + \mathsf{d}t,\ x + \mathsf{d}x) = (1,\ 1)$

2. $t = 1,\, x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \big(1,\, f(t,\, x)\big) = (1,\, 1) \Rightarrow (t + \mathsf{d}t,\, x + \mathsf{d}x) = (2,\, 2)$

3. $t = 2,\, x = 2 \Rightarrow \dot{x} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \big(1,\, f(t,\, x)\big) = (1,\, 4) \Rightarrow (t + \mathsf{d}t,\, x + \mathsf{d}x) = (3,\, 6)$

4. ....

Изоклины

Определение 1. *Пусть у нас есть диффур $\dot{x} = f(t,\, x)$.*

Интегральная кривая *— график функции $x(t)$ – решения диффура. Тогда $\dot{x}$ — это угловой коэффициент интегральной кривой в точке $\big(t,\, x(t)\big)$, то бишь тангенс угла наклона касательной к $x(t)$ в данной точке.*

Изоклина *– геометрическое место точек плоскости, в которых одно и то же направление движения (направление касательных), то есть, угол наклона вектора $(\mathsf{d}t,\, \mathsf{d}x)$ один и тот же для любой точки $(t,\, x)$ изоклины. Иными словами, $\dot{x} = const$.*

Изолиния поля *– подмножество точек изоклины (являющееся линией), в которых вектор $(\mathsf{d}t,\, \mathsf{d}x)$ один и тот же для любой точки $(t,\, x)$ изолинии. То есть, вектор $(\mathsf{d}t, \mathsf{d}x) \sim \big(1, f(t,\, x)\big) = const$. Для каждой изолинии константа своя.*

Семейство изоклин определяется уравнением

$$\dot{x} = k = f(t,\, x)$$

где k – параметр. Придавая параметру k близкие значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

Для примера выше изоклинами будут являться множества $\left\{xt = k \iff x = \dfrac{k}{t},\, k \in \mathbb{R}\right\}$ — гиперболы.

Научимся находить приближённые решения диффура, строя интегральную кривую при помощи изоклин. Стоит отметить сразу же, что **нулевая изоклина** $f(t,\, x) = 0$ даёт уравнение линий, на которых могут находиться точки максимума и минимума интегральных кривых.

Для большей точности построения интегральных кривых хорошо находить ГМТ точек перегиба, исследуя вторую производную $\ddot{x}$ при помощи уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}t} + \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}x} \cdot \dot{x} = \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}t} + f(t,\, x) \cdot \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}x} = 0$$

Линия, определяемая данным уравнением, и есть возможное ГМТ точек перегиба.

Пример №1

Изоклинами найти приближённое решение диффура

$$\dot{x} = 2t - x$$

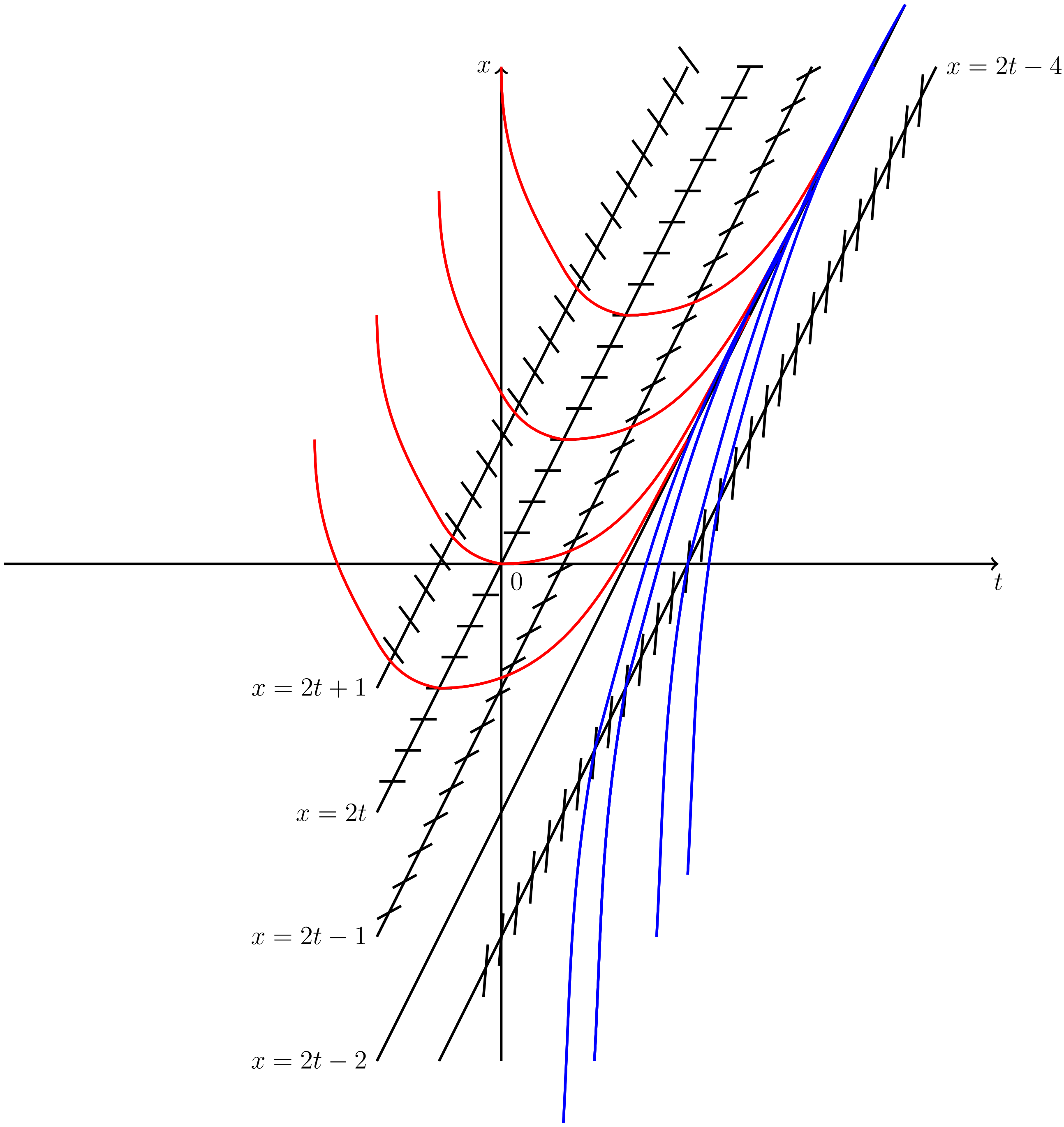
Для получения изоклин положим $\dot{x} = const = k$, откуда:

$$2t - x = k \iff x = 2t - k$$

— параллельные прямые.

Пусть $k = 0$, тогда получим изоклину $x = 2t$ — эта прямая делит плоскость на две части, в каждой из которых производная $\dot{x}$ имеет один и тот же знак — интегральные кривые, пересекая $x = 2t$, из области убывания $x(t)$ переходят в область возрастания. Отсюда получаем, что на данной прямой лежат точки минимума.

Возьмём ещё две изоклины: $x = 2t+1$, $k = -1$ и $x = 2t-1$, $k = 1$. Изобразим их на графике. Касательные, проведённые к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами $k = -1$, $k = 0$ и $k = 1$ образуют с осью абсцисс углы в 135, 0 и 45 градусов соответственно. На графике направление показано чёрточками.



Вторая производная: $\ddot{x} = 2 - \dot{x} = 2 - 2t + x$.

Рассмотрим прямую $x = 2t - 2$, на которой $\ddot{x} = 0$. Это изоклина при $k = 2$. Заметим, что в таком случае угол наклона касательной равен углу наклона самой изоклины. Значит, ни одна интегральная кривая не будет пересекать эту изоклину, но при этом они будут к ней стремиться на бесконечности.

Прямая $x = 2t - 2$ делит плоскость на две части, в одной из которых (над прямой) $\ddot{x} > 0$, а значит, интегральные кривые выпуклы вниз, а в другой $\ddot{x} < 0$, и интегральные кривые выпуклы вверх. Кроме того, поскольку точки минимума расположены над этой прямой, то интегральные кривые, проходящие ниже изоклины $x = 2t - 2$ не имеют точек экстремума.

Рассмотрим также изоклину $x = 2t - 4$, $k = 4$. В данном случае угол наклона касательной будет равен 75 градусов. При этом интегральные кривые будут также стремиться к $x = 2t - 2$, но являясь выпуклыми вверх. Тем самым мы получили другое семейство решений диффура.

На графике выше изображены интегральные кривые, приближающие $x(t)$, полученные в соответствии с проведённым исследованием. Как видим, в точках пересечения с изоклинами кривые параллельны направлению касательных в точках пересечения.

Диффуры с разделяющимися переменными

Это суть дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{a(t)}{b(x)}$$

Перемножим крест-накрест и получим:

$$b(x)\mathsf{d}x = a(t)\mathsf{d}t$$

$$\int \text{ теперь интегрируем каждую часть независимо от другой } \int$$

$$B(x) = A(t) + C \text{ — это и будет решением диффура}$$

Пример №2

$$\dot{x} = tx$$

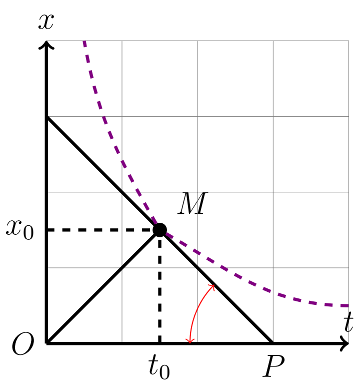
$$\dot{x} = tx = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}x}{x} = t \cdot \mathsf{d}t \Longrightarrow \int \frac{\mathsf{d}x}{x} = \int t \cdot \mathsf{d}t$$

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C \Longrightarrow |x| = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^C}_{\text{какая-то константа}} \Longrightarrow |x| = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}},\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних двух действиях мы взяли экспоненту от обеих частей и избавились от модуля.

Пример №3

Найдите кривую $x(t)$, такую, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ отрезки, соединяющую точку касания $\big(t_0,\, x(t_0)\big)$ с точками пересечения касательной в данной точке с осями координат, будут равны.



Пусть мы касаемся нашей кривой $x(t)$ в точке $(t_0,\, x_0)$ – обозначим её M. Можно заметить, что тогда OM – медиана. Отсюда следует, что координаты точек пересечения с осями абсцисс и ординат равны соответственно $(2t_0,\, 0)$ и $(0,\, 2x_0)$. Тогда тангенс угла наклона касательной $\tan\angle MPO = -\frac{2x_0}{2t_0} = -\frac{x_0}{t_0} = \dot{x}(t_0)$, так как тангенс угла наклона касательной к функции $x(t)$ в точке t_0 есть не что иное, как производная $x(t)$ – $\dot{x}(t)$ – в данной точке. Таким образом, мы получили диффур:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Решим его, тем самым найдя $x(t)$.

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} \Longrightarrow -\frac{\mathsf{d}x}{x} = \frac{\mathsf{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$-\ln|x| = \ln|t| + C \Longrightarrow \frac{1}{|x|} = |t| \cdot \lambda,\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \frac{\lambda}{t},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Пример №4

$$xt + (t+1)\cdot\dot{x} = 0$$

$$xt + (t+1)\cdot\dot{x} = 0 \Longrightarrow xt + (t+1)\cdot\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = -\frac{xt}{t+1} \Longrightarrow -\frac{\mathsf{d}x}{x} = \frac{t\cdot\mathsf{d}t}{t+1} \Longrightarrow \int = \int$$

Возьмём правый интеграл.

$$\int\frac{t\cdot\mathsf{d}t}{t+1} = \int 1 - \frac{1}{t+1}\,\mathsf{d}t = t - \ln|t+1|$$

Тогда:

$$-\ln|x| = t - \ln|t+1| + C \Longrightarrow \frac{1}{|x|} = \lambda\cdot\frac{e^t}{t+1},\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \lambda\cdot e^{-t}\cdot(t+1),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

n-параметрическое семейство кривых

Это система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \mathsf{F}\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \\ \mathsf{F}'\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathsf{F}^{(n)}\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \end{cases}$$

– всего $n+1$ уравнение, константы $c_1,\ \ldots,\ c_n$ неизвестны. Необходимо, как и раньше, найти подходящую $x(t)$.

Метод решения таков: сначала мы выражаем константы $c_1,\ \ldots, c_n$ через $t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, и потом подставляем всё в одно уравнение, тем самым получая диффур вида:

$$\mathsf{G}\big(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t)\big) = 0$$

который мы умеем решать.

Пример №5

Необходимо найти диффур, задающий множество окружностей, касающихся оси абсцисс.

Чего делать, сходу и не вдуплишь, да?) Однако, выход есть — если видим слово "окружность нужно тут же писать её уравнение.

Пускай у нас есть окружность радиуса R, касающаяся оси абсцисс в точке t_0. Тогда выполнено тождество:

$$(x-R)^2 + (t-t_0)^2 = R^2$$

В данном случае R и t_0 и есть наши неизвестные константы. Составим систему уравнений из производных:

$$\begin{cases} (x-R)^2 + (t-t_0)^2 - R^2 = 0 \\ (2x\cdot\dot{x} - 2R\cdot\dot{x}) + 2t - 2t_0 = 0 \\ 2(\dot{x})^2 + 2x\cdot\ddot{x} - 2R\cdot\ddot{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Осталось выразить R через $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ из последнего уравнения, подставить во второе и выразить t_0, после чего загнать всё в первое уравнение и получить нужный диффур.

Замена переменных

Разберём на примере. Пускай у нас есть диффур

$$\dot{x} = x - \sqrt{x}$$

Решать его в таком виде не очень приятно. Поэтому сделаем замену переменных (название – сущая формальность, так как вообще говоря мы заменяем одну функцию на другую, а не переменную):

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Тогда диффур примет вид:

$$2\dot{y} \cdot y = y^2 - y \Longrightarrow 2\dot{y} = y - 1 \Longrightarrow \frac{2\mathsf{d}y}{y-1} = \mathsf{d}t$$

— получили простое уравнение с разделяющими переменными.

Рассмотрим ещё несколько примеров замен.

Линейная замена

Пускай у нас есть диффур вида:

$$\dot{x} = f(at + bx)$$

Можно сделать замену $u = at + bx$, получив уравнение $\dot{x} = f(u)$. Решим этот диффур относительно переменной u, получив функцию $x(u)$, после чего, сделав обратную замену, выразить искомую $x(t)$.

$$u = at + bx$$
$$\mathsf{d}u = a \cdot \mathsf{d}t + b \cdot \mathsf{d}x \Longrightarrow \mathsf{d}t = \frac{\mathsf{d}u - b \cdot \mathsf{d}x}{a}$$
$$\dot{x} = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{a \cdot \mathsf{d}x}{\mathsf{d}u - b \cdot \mathsf{d}x} = f(u)$$
$$a \cdot \mathsf{d}x = f(u)\mathsf{d}u - b \cdot f(u)\mathsf{d}x \Longrightarrow \big(a + b \cdot f(u)\big)\mathsf{d}x = f(u)\mathsf{d}u$$
$$\mathsf{d}x = \frac{f(u)}{a + b \cdot f(u)}\mathsf{d}u$$

После этих махинаций всё легко решается как уравнение с разделяющими переменными.

Пример №6

$$\dot{x} = \cos(x - t)$$

Ну тут совсем толсто: $u = x - t$. В данном случае $a = -1$, $b = 1$. По формуле выше:

$$\mathsf{d}x = \frac{\cos u}{\cos u - 1}\mathsf{d}u$$

Теперь интегрируем, получаем $x(u)$ и делаем обратную замену.

Общий вид

Пускай у нас есть диффур:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Можно сделать замену $u = \varphi(t, x)$, получив новое уравнение (весьма удачно, если получится диффур вида $\dot{u} = f(t, u)$, но такое бывает далеко не всегда). Решаем его и делаем обратную замену, получая $x(t)$.

Пример №7

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x$$

Здесь можно сделать замену $u = xt$, откуда $\dot{u} = \dot{x} \cdot t + x \cdot 1$. Подставим:

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x \iff \dot{x} \cdot t + x = 2x^2 \cdot t^3 \Longrightarrow \dot{u} = 2u^2 \cdot t$$
$$\frac{\mathsf{d}u}{\mathsf{d}t} = 2u^2 \cdot t \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}u}{u^2} = 2t \cdot \mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$-\frac{1}{u} = t^2 + C \Longrightarrow u = -\frac{1}{t^2 + C}$$

Делаем обратную замену и выражаем $x(t)$:

$$u = xt \Longrightarrow xt = -\frac{1}{t^2 + C} \Longrightarrow x = -\frac{1}{t^3 + Ct}$$

Домашнее задание №1

Задача №1. *Найти все кривые $x(t)$, такие, что длина отрезка, соединяющего точку касания и точку пересечения касательной в данной точке с одной из осей, была постоянной.*

Подсказки к решению. В зависимости от того, какую ось вы выберете, получится либо $x(t)$, либо $t(x)$, оба варианта правильные.

Изобразите ситуацию на графике. Затем вспомните, что $\dot{x} = \dfrac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \tan\alpha$, где α – угол наклона касательной. Также вам понадобится Теорема Пифагора. □

Задача №2. *Придумать диффур 1 порядка, не обладающий решением на всей прямой. То бишь, не для всех t решение $\dot{x} = f(t, x)$ должно существовать.*

Подсказки к решению. Подумайте о не всюду определённых функциях. □

Задача №3. *Решите диффур:*

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0, \textit{начальное условие: } x(0) = 1$$

Задача №4. *Изоклинами найти приближённое решение:*

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x}$$

Также изобразите изоклины на графике и покажите все различные (с точностью до топологии и асимптотики) решения (то есть, как рассмотрено выше в примере).

Подсказки к решению. Проведите исследование, аналогичное **Примеру №1**. Нарисуйте изоклины и посмотрите направление касательных, проверьте выпуклость, взяв вторую производную. После этого постройте приближение кривой $x(t)$ так, чтобы ваша кривая была параллельна «чёрточкам», соответствующим той изоклине, которую вы пересекли. □

Задача №5. *Придумайте (вообще говоря, найдите) диффур 1 порядка, задающий множество прямых, являющихся касательными к единичной окружности с центром в нуле.*

Подсказки к решению. Пускай вы касаетесь в точке (t_0, x_0). Однако, координата x_0 зависит от t_0. Используйте уравнение окружности, чтобы ликвидировать эту зависимость. Ну а дальше придётся малость подумать и чутка посчитать. □

Common Tasks

1. Найти такую кривую $x(t)$, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ касательная к $x(t)$ в точке $(t_0,\ x(t_0))$ пересекает ось абсцисс в точке $\dfrac{t_0}{2}$.

2. Найти дифференциальное уравнение первого порядка, задающее на плоскости семейство парабол $x = at^2 + bt + c$, проходящих через точку (0,1) и касающихся прямой $x = t$.