Лекция 17 от 06.02.2017
Замкнутые и полные ОГС.
Тригонометрическая система

Замкнутые и полные ортогональные системы

Пусть H — пространство со скалярным произведением, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетная ортогональная система в H. Тогда для вектора $x \in H$ можно ввести *коэффициенты Фурье*: $\hat{x}_n = \dfrac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}$ и, соответственно, *ряд Фурье*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Отметим, что этот ряд не является ни числовым, ни функциональным.

Продолжим обсуждение замкнутых ортогональных систем. Повторим определение (на этот раз сформулируем его немного иначе).

Определение 1. *Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется замкнутой, если*

$$\forall x \in H \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \exists c_1, \ldots, c_n \colon \left|\left| x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \right|\right| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута;*
2. *$\forall x \in H \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n = x$;*
3. *$\forall x \in H \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2 = ||x||^2$;*
4. *$\forall x, y \in H \ (x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \hat{y}_n ||e_n||^2$.*

Доказательство. Фактически это просто суммирование предыдущих результатов. Действительно, (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Leftrightarrow$ (3) было доказано на прошлой лекции, (2) $\Rightarrow$ (1) следует очевидным образом. Из нового: (4) $\Rightarrow$ (3) получается сразу при $y = x$, и только (3) $\Rightarrow$ (4) требует какого-то доказательства.

Заметим, что $\widehat{(x+y)}_n = \hat{x}_n + \hat{y}_n$. Тогда:

$$(x, y) = \frac{(x+y, x+y) - (x, x) - (y, y)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{x}_n + \hat{y}_n)^2 ||e_n||^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^2 ||e_n||^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{y}^2 ||e_n||^2\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \hat{y}_n ||e_n||^2.$$

Собственно, утверждение (4) тоже иногда называют *равенством Парсеваля.* $\square$

Определение 2. *Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной, если из того, что $\forall n \in \mathbb{N} \ (x, e_n) = 0$ следует, что $x = 0$, то есть существует только один вектор, ортогональный всей системе.*

Понятия *замкнутости* и *полноты* в разной литературе используются абы как и часто меняются местами. Это связано с тем, что данные термины *почти* взаимозаменяемы.

Утверждение 1. *Если ортогональная система замкнута, то она полна.*

Доказательство. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая ортогональная система, то $\forall x \in H$ $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Но если $\forall n \in N$ $(x, e_n) = 0$, то $\hat{x}_n = 0$ и, следовательно, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$. $\square$

Утверждение 2. *Если ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в полном пространстве H, то она замкнута.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из H. Рассмотрим соответствующий ряд Фурье, который в силу полноты пространства обязан куда-то сходиться: $y := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Из теоремы о единственности разложения следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\hat{x}_n = \hat{y}_n$, а значит, $(x, e_n) = (y, e_n)$. Итого, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x - y, e_n) = 0$, что верно только если $x - y = 0$, то есть $x = y$. $\square$

Упражнение 1 (Бонусная задача)**.** *Наше доказательство не пройдет в любом пространстве, но это не означает, что полнота пространства является необходимым требованием. Итак, верно ли, что если ортогональная система полна, то она замкнута?*

Пара слов о практическом применении

Допустим, мы имеем дело с черно-белым изображением (с цветным все аналогично). Фактически это функция, заданная на пространстве-прямоугольнике P, где $f(p)$ — интенсивность пикселя. Можно ввести скалярное произведение: $(f, g) = \int\limits_P fg \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Однако так как мы работаем с дискретным пиксельным пространством, интеграл можно заменить на сумму: $\sum\limits_{i,j=1}^{\dots} a_{ij} b_{ij}$, где a и b это значения пикселей.

Выберем конечную ортогональную систему $\{x_n\}_{n=1}^{N}$. Для удобства пусть она будет нормированной, то есть $||e_n|| = 1$. Тогда $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$. Известно, что $\left|\left|x - \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{x}_n e_n\right|\right|^2 = ||x||^2 - \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{x}_n^2$.

На практике мы не можем взять все коэффициенты Фурье, а только несколько из них. А глядя на равенство выше понятно, что лучше взять большие коэффициенты, чтобы уменьшить погрешность. Именно эта идея и лежит в ключе всех алгоритмов сжатия с частичной потерей данных (но это не вся идея).

Соответственно, встает вопрос: а как выбрать ортогональную систему так, чтобы как можно меньше коэффициентов Фурье были большими и как можно больше — маленькими? Тогда для такой системы большинство элементов пространства можно будет посчитать с небольшой погрешностью.

Тригонометрическая система

В математическом анализе есть два самых главных отрезка: $[0, 1]$ и $[-\pi, \pi]$. Будем работать со вторым.

Пусть $(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Функции не обязательно должны быть непрерывными, потому что на практике разрывы I рода встречаются сплошь и всюду (например, граница фона и объекта на изображении). Поэтому будем рассматривать функции $f, g \in R[-\pi, \pi]$.

Факторизуем пространство по следующему отношению эквивалентности: $f \sim g \Leftrightarrow \int\limits_{\pi}^{\pi}(f-g)^2\mathrm{d}x = 0$.

Строго говоря, можно было бы рассматривать функции, интегрируемые по Риману в несобственном смысле, но тогда и интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} fg\mathrm{d}x$ был бы несобственным, и чтобы он существовал, необходимо потребовать интегрируемость в несобственном смысле квадратов функций, так как $(f, g) \leqslant \dfrac{f^2+g^2}{2}$, что помогло бы нам ограничить интеграл. Но полученное пространство все еще не будем полным, поэтому мы не будем его рассматривать — это всего лишь полушаг к желаемому результату и оно того не стоит.

Итак, ортогональная система в таком пространстве: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$.

Посчитаем длину каждого вектора (не забыв о четности косинуса):

$$(1, 1) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1\mathrm{d}x = 2\pi;$$

$$(\sin nx, \sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} = \pi;$$

$$(\cos nx, \cos nx) = \ldots = \pi.$$

В силу традиций (а, к слову, тригонометрическая система старше интегралов), коэффициенты Фурье, связанные с $\cos nx$ и $\sin nx$ принято обозначать как a_n и b_n соответственно:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

А коэффициент Фурье при 1 очень похож на коэффициенты при $\cos nx$, поэтому его принято обозначать как $a_0/2$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1\mathrm{d}x.$$

Итого, ряд Фурье для функции f выглядит следующим образом:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Для аккуратности надо бы ставить скобки под суммой, но это и так воспринимается как единое целое.

Для тригонометрической системы есть дальше два вектора развития:

1. Доказать замкнутость или полноту. Вот только пространство неполное, так что незачем.
2. Заметить, что ряд Фурье в данном случае это обычный функциональный ряд, и для него осмысленнен вопрос, чему равно $f(1)$ и так далее. Вот этим и займемся.

Комплексная система

Если внимательно посмотреть на ряд Фурье тригонометрической системы, то можно заметить, что он степенной — точнее, к нему можно свести, используя комплексную запись все той же тригонометрической системы: $\{e^{inx}\}_{-\infty}^{+\infty}$.

В комплексном случае $(x, y) = \overline{(y, x)}$, поэтому $(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. Тогда

$$(e^{inx}, e^{inx}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{inx}}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-inx}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x = 2\pi.$$

По традиции, коэффициенты Фурье обозначают как c_n:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x.$$

Итого, комплексный ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Покажем, что это то же самое, что и ряд Фурье в обычной тригонометрической системе.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\mathrm{d}x = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2};$$
$$c_{-n} = \ldots = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}.$$

Итого:

$$c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = \left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}\right)(\cos nx + i\sin nx) + \left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}\right)(\cos nx - i\sin nx) =$$
$$= a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Двумерные пространства, натянутые на $\langle\cos nx, \sin nx\rangle$ и $\langle e^{inx}, e^{-inx}\rangle$, будут совпадать, в них равны наилучшие приближения и частичные суммы.