Алгоритмы и структуры данных

Конспекты лекций основного потока

Лектор: С. А. Объедков

Орлов Никита, Евсеев Борис, Рубачев Иван

НИУ ВШЭ, 2017

Лекция 1. Асимптотика, простые алгоритмы

Пусть перед нами стоит задача: найти в некотором массиве медиану. Техническое задание выглядит так: на вход программе подается массив A, на выходе хотим получить одну из медиан, неважно какую.

Напомним определение медианы m:

$$m \in A = \begin{cases} |\{a \in A \mid a < m\}| \leqslant \frac{|A|}{2} \\ |\{a \in A \mid a > m\}| \leqslant \frac{|A|}{2} \end{cases}$$

Словами: медиана это такое число, что оно не больше половины элементов, но и не меньше половины элементов.

Легко видеть, что разных медиан в массиве может быть не больше двух, в зависимости от четности числа элементов.

Есть несколько способов решить эту задачу. Приведем несколько из них:

Алгоритм 1 Алгоритм поиска медианы

Ввод: Массив A
Вывод: Медиана m массива A

function MEDIAN(A)
    $n := len(A)$
    for $i := 0$ *to* $(n-1)$ **do**
        $l := 0$
        $g := 0$
        for $j := 0$ *to* $(n-1)$ **do**
            if $A[j] < A[i]$ **then**
                $l := l + 1$
            else if $A[j] > A[i]$ **then**
                $g := g + 1$
        if $l \leqslant n/2$ **and** $g \leqslant n/2$ **then**
            return $A[i]$

Посмотрим еще на один способ:

Алгоритм 2 Примитивный алгоритм поиска медианы

Ввод: Массив A
Вывод: Медиана m массива A

function MEDIAN(A)
    $n := len(A)$
    $B := sorted(A)$
    return $B[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$

На первый взгляд это сложный подход, так как мы должны отсортировать массив и пока не знаем, как это сделать.

Итак, у нас есть как минимум два способа найти медиану. Возникает абсолютно естественное желание как-нибудь выяснить, какой лучше. Оказывается, в программировании можно провести сразу несколько таких оценок по разным критериям. Два главных ресурса, которые потребляют алгоритмы, это процессорное время и память вычислительного устройства.

Определение 1.1. Время (измеренное в некой абстрактной единице), необходимое алгоритму для завершения своей работы, называется *временем работы алгоритма* и обозначается как $T(n)$, где n - длина входных данных.

Время работы можно считать в разных единицах, например в *секундах*, если реализация алгоритма и исполнитель фиксированы, или в *элементарных операциях*, если речь идет про машину Тьюринга.

Различают несколько оценок времени работы:

1. *Худший случай* - максимально возможное $T(n)$ на входе длины n. Чаще всего используется на практике, так как дает верхнюю оценку времени работы алгоритма.
2. *Средний случай* - математическое ожидание $T(n)$ на входе длины n. Используется на практике реже, чем худший случай, в силу частой неопределенности вероятностного пространства для вычисления матожидания.
3. *Лучший случай* - минимально возможное $T(n)$ на входе длины n. На практике не используется, так как к любому сколько угодно неэффективному алгоритму можно приписать проверку на оптимальность входных данных и выдать ответ быстрее, чем средний или худший случай. Например, в задаче про поиск медианы можно проверять, отсортирован ли массив, и, если он не отсортирован, честно запускать поиск.

Для всего зоопарка алгоритмов существует инструмент их анализа - *асимптотический анализ*. Это методология, в которой время работы и занимаемая память алгоритма ставятся в соответствие классу функций.

Для начала дадим несколько определений.

Определение 1.2. О-большим $g(n)$ функции $f(n)$ называют такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$\underline{\underline{O}}(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_2 > 0, n_0 > 0 \ \forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)\}$$

Иными словами, запись $O(g(n)) = f(n)$ означает, что $f(n)$ растет не быстрее, чем $g(n)$.

Определение 1.3. о-малым $g(n)$ функции $f(n)$ называют такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$\overline{\overline{o}}(g(n)) = \{f(n) | \forall c_2 > 0 \exists n_0 > 0 : \forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant f(n) < c_2 g(n)\}$$

Определение 1.4. Ω-большим $g(n)$ функции $f(n)$ называют такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$\Omega(g(n)) = f(n) \leftrightarrow g(n) = \underline{\underline{O}}(f(n))$$

Определение 1.5. ω-малым $g(n)$ функции $f(n)$ называют такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$\omega(g(n)) = f(n) \leftrightarrow g(n) = \overline{\overline{o}}(f(n))$$

Определение 1.6. $\Theta(g(n))$ функции $f(n)$ называется такое множество функций, которые удовлетворяют условию

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \ \forall n \geqslant n_0 : \ 0 \leqslant c_1 \cdot g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 \cdot g(n)\}$$

Иными словами, $\Theta(g(n))$ растет примерно также, как и $f(n)$.

В нашем курсе мы часто будем писать что-то похожее на

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Такая запись с точки зрения математики некорректна, но мы будем понимать знак равенства как

$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

Например:

$$4n^2 + 12n + 12 = \Theta(n^2)$$

$$c_1 = 1,\ c_2 = 16,\ n_0 = 2$$

$$\forall n \geqslant n_0 :\ 0 \leqslant n^2 \leqslant 4n^2 + 12n + 12 \leqslant 16n^2$$

В общем случае верно следующее:

Лемма 1.7. *Если многочлен $p(n)$ представим в виде*

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i,\ d = deg(p),\ a_d > 0,$$

то

$$p(n) = \Theta(n^d)$$

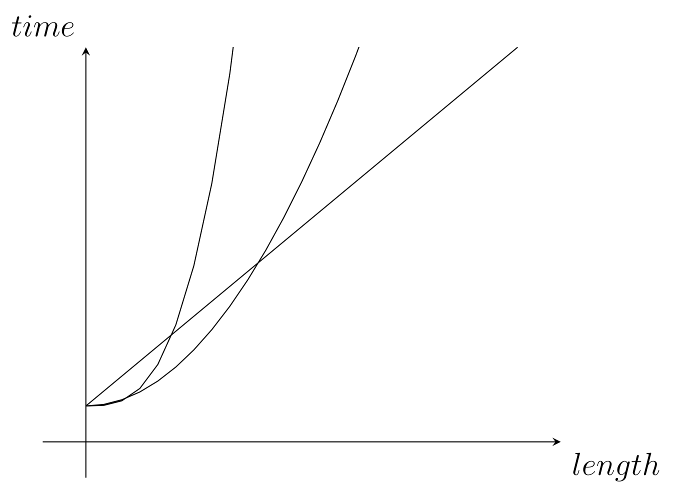
Замечание 1.8. Обычно функцию, описывающую время работы или память, занимаемую алгоритмом, называют *оценкой времени работы или памяти* алгоритма.

Замечание 1.9. По соглашению мы рассматриваем *асимптотически неотрицательные* функции, то есть такие, что

$$\exists n_0\ \forall n > n_0 :\ f(n) > 0$$

Теперь поймем, что скрывается за классами функций Θ.

Пусть есть классы $\Theta(n)$, $\Theta(n^2)$, $\Theta(n^3)$. Для некоторых алгоритмов существует *оценка* принадлежащая одному из этих классов. Помня про константу, можно сказать, что на достаточно большом объеме данных алгоритм с меньшей оценкой будет работать в среднем быстрее. Это ключевая мысль асимптотического анализа. Представить ее можно, построив графики неких линейной, квадратичной и кубической функций.



Для теоретического анализа сложности алгоритма берутся достаточно большие числа, но нужно понимать, что на практике может оказаться так, что входные данные могут быть меньше, чем n_0

Теперь получив матаппарат, оценим время работы алгоритмов поиска медианы.

Замечание 1.10. Будем считать, что элементарные арифметические операции, операции присваивания, копирования и тому подобные выполняются за $\Theta(1)$.

Первый алгоритм:

1. Лучший случай: медиана на первом месте. Тогда алгоритм выполнит одну итерацию внешнего цикла, n итераций внутреннего цикла и завершит работу. Сложность: $\Theta(1 \cdot n) = \Theta(n)$. Такая сложность считается достаточно хорошей.

2. Худший случай: медиана на последнем месте. Тогда алгоритм выполнит $n-1$ итерацию внешнего цикла, на каждой итерации произойдет n итераций внутреннего цикла. Сложность: $\Theta(n^2 - n) = \Theta(n^2)$.

Доказательство корректности заключается в том, что алгоритм *реализует* определение медианы. В таком случае он корректен, пока нет ошибок на уровне написания кода, что выходит за рамки курса.

Второй алгоритм:

Второй алгоритм сложнее для оценки. Операция взятия элемента выполняется за $\Theta(1)$. Остается сортировка, которую можно выполнить разными способами за разное время.

Давайте возьмем простой алгоритм сортировки и оценим его сложность.

Алгоритм 3 Сортировка вставками

Ввод: Массив A с заданным на нем порядком меньше.
Вывод: Отсортированный по возрастанию массив A.

```
function INSERTION_SORT(A)
    for i := 1 to (n − 1) do
        k = A[i]
        for j := i − 1 to 0 do
            if k < A[j] then
                A[j + 1] = A[j]
            else
                break
        A[j] = k
    return A
```

Словами: смотрим каждый i элемент и ищем его место среди первых $i-1$ элементов.

Для начала докажем корректность алгоритма. Для этого будем использовать *инвариант* - свойство математического объекта, которое не меняется после преобразования объекта.

Доказательство. Пусть есть неупорядоченный пронумерованный набор A элементов с заданным на них порядком меньше, и мы исполняем над ним алгоритм. Инвариант: элементы $A[0], \ldots, A[i]$ являются перестановкой исходных элементов в правильном порядке.

Докажем по индукции. База $i = 0$ верна. Пусть инвариант верен для i шага. Тогда смотрим $e = A[i+1]$ элемент. Мы начинаем перебирать все элементы среди первых i до тех пор, пока операция сравнения на "меньше" не вернет ложь. Это означает, что мы в отсортированном массиве нашли элемент под номером $k-1$, который меньше e:

$$A[k-1] \leqslant e \;\&\&\; A[k] > A[k-1] \;\&\&\; e < A[k]$$

$$A[k-1] < e < A[k]$$

[:|||:]

Из доказательства корректности инварианта прямо следует доказательство корректности алгоритма.

Теперь можно оценить время работы сортировки вставками:

1. Лучший случай: массив уже отсортирован. Но тогда внешний цикл совершит n итераций, на каждой из которых произойдет одно сравнение. Сложность получилась $\Theta(n)$.

2. Худший случай: массив отсортирован в обратном порядке. Тогда на каждой итерации число шагов внутреннего цикла будет уменьшаться на 1. Значит

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \Theta(n^2)$$