

# Дифференциальные Уравнения

## Семинарские занятия

Вадим Гринберг  
по семинарам Войнова А. С.

### Содержание

<b>1 Семинар 1, 10 января</b>	<b>2</b>
1.1 Общие факты . . . . .	2
1.2 Диффуры с разделяющимися переменными . . . . .	3
1.3 $n$ -параметрическое семейство кривых . . . . .	4
1.4 Замена переменных . . . . .	5
1.4.1 Линейная замена . . . . .	5
1.4.2 Общий вид . . . . .	6
1.5 Домашнее задание №1 . . . . .	6
<b>2 Common Tasks</b>	<b>7</b>

# Семинар 1, 10 января

## Общие факты

Пусть у нас имеется функция  $x(t)$  (вообще говоря, вектор-функция  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ) от переменной  $t \in \mathbb{R}$ , действующая из интервала  $(a, b)$  (по умолчанию считаем всей числовой прямой), такая, что для переменной  $t$ , функции  $x(t)$  и  $n$  её первых производных выполнено уравнение:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

— это и есть дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка.  $F$  в данном случае, грубо говоря, «функция от  $n + 1$  переменной», которая неявно задаёт  $x(t)$  (за точным определением — на лекцию).

**Решить диффур** означает найти такую функцию  $x(t)$ , что выполняется вышеуказанное равенство.

Тупой пример:  $\dot{x}(t) = x(t)$ . Функция совпадает со своей производной. Решением, очевидно, будет  $x(t) = \lambda \cdot e^t$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

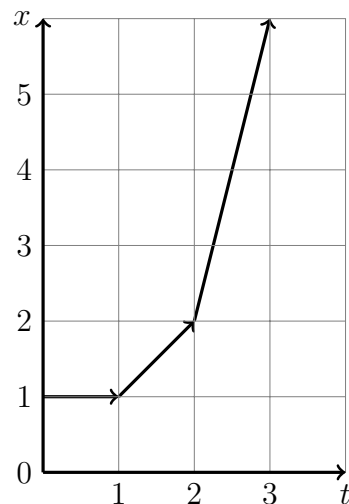
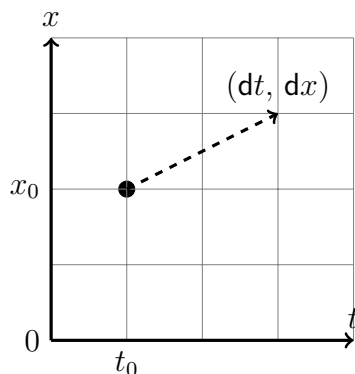
Любой диффур можно привести к удобоваримому виду:

$$\dot{x}(t) = f(t, x)$$

где  $f$  — некая хорошая функция (доказательство на лекции). С такими диффурами мы в основном и будем иметь дело.

Разберёмся, а как вообще можно решать диффуры. Пусть у нас имеется диффур  $\dot{x} = f(t, x)$ , который мы хотим решить. Попробуем приблизить график нашей кривой  $x(t)$  некоей ломаной линией. Возьмём какую-то начальную точку  $(t_0, x_0)$ , и будем смотреть на направление движения, то бишь на направление вектора  $(dt, dx)$ . Будем делать маленькие шаги вдоль этого направления. Тогда каждый раз, находясь в точке  $(t, x)$ , мы будем переходить в точку  $(t + dt, x + dx)$ .

После многих таких шагов мы получим ломаную линию, приближающую график нашей кривой  $x(t)$ . Эта ломаная называется **Ломаной Эйлера**.



Для удобства можно делать шаг  $dt$  всегда равным 1, поделив вектор направления на  $dt$ . Тогда соответственно шаг  $dx$  станет  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x)$ , и вектор направления в точке  $(t, x)$  будет иметь вид  $(1, f(t, x))$ .

Пример:  $\dot{x} = tx$ . Построим Ломаную Эйлера, стартуя из точки  $(t_0, x_0) = (0, 1)$ :

$$1. \ t = 0, \ x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 0) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (1, 1)$$

$$2. t = 1, x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 1) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (2, 2)$$

$$3. t = 2, x = 2 \Rightarrow \dot{x} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 4) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (3, 6)$$

4. ....

**Определение 1.** Пусть у нас есть диффуз  $\dot{x} = f(t, x)$ .

**Изоклина** – геометрическое место точек плоскости, в которых одно и то же направление движения, то есть, угол наклона вектора  $(dt, dx)$  один и тот же для любой точки  $(t, x)$  изоклины. Стоит отметить, что это определение работает только для диффузов 1 порядка.

**Изолиния поля** – подмножество точек изоклины (являющееся линией), в которых вектор  $(dt, dx)$  один и тот же для любой точки  $(t, x)$  изолинии. То есть, вектор  $(dt, dx) \sim (1, f(t, x)) = const$ , откуда тут же следует  $f(t, x) = const$ . Для каждой изолинии константа своя.

Для примера выше изоклиной будет являться множество  $\left\{ xt = k \iff x = \frac{k}{t}, k \in \mathbb{R} \right\}$  – гиперболы.

## Диффуры с разделяющимися переменными

Это суть дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{a(t)}{b(x)}$$

Перемножим крест-накрест и получим:

$$b(x)dx = a(t)dt$$

$\int$  теперь интегрируем каждую часть независимо от другой  $\int$

$B(x) = A(t) + C$  — это и будет решением диффура

### Пример №1

$$\dot{x} = tx$$

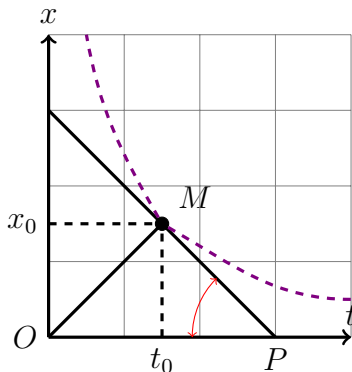
$$\dot{x} = tx = \frac{dx}{dt} \implies \frac{dx}{x} = t \cdot dt \implies \int \frac{dx}{x} = \int t \cdot dt$$

$$\ln |x| = \frac{t^2}{2} + C \implies |x| = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^C}_{\text{какая-то константа}} \implies |x| = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda > 0 \implies x = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних двух действиях мы взяли экспоненту от обеих частей и избавились от модуля.

### Пример №2

Найдите кривую  $x(t)$ , такую, что для любой  $t_0 \in \mathbb{R}$  отрезки, соединяющую точку касания  $(t_0, x(t_0))$  с точками пересечения касательной в данной точке с осями координат, будут равны.



$\tan \angle MPO = -\frac{2x_0}{2t_0} = -\frac{x_0}{t_0} = \dot{x}(t_0)$ , так как тангенс угла наклона касательной к функции  $x(t)$  в точке  $t_0$  есть не что иное, как производная  $x(t) - \dot{x}(t)$  – в данной точке. Таким образом, мы получили диффур:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Решим его, тем самым найдя  $x(t)$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \implies \int = \int \\ -\ln|x| &= \ln|t| + C \implies \frac{1}{|x|} = |t| \cdot \lambda, \lambda > 0 \implies x = \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### Пример №3

$$xt + (t+1) \cdot \dot{x} = 0 \implies xt + (t+1) \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -\frac{xt}{t+1} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{t \cdot dt}{t+1} \implies \int = \int$$

Возьмём правый интеграл.

$$\int \frac{t \cdot dt}{t+1} = \int 1 - \frac{1}{t+1} dt = t - \ln |t+1|$$

Тогда:

$$-\ln|x| = t - \ln|t+1| + C \implies \frac{1}{|x|} = \lambda \cdot e^{\frac{t}{t+1}}, \lambda > 0 \implies x = \lambda \cdot e^{-\frac{t}{t+1}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

## $n$ -параметрическое семейство кривых

Это система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} F(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \\ F'(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ F^{(n)}(t, x(t), c_1, \dots, c_n) = 0 \end{cases}$$

– всего  $n + 1$  уравнение, константы  $c_1, \dots, c_n$  неизвестны. Необходимо, как и раньше, найти подходящую  $x(t)$ .

Метод решения таков: сначала мы выражаем константы  $c_1, \dots, c_n$  через  $t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ , и потом подставляем всё в одно уравнение, тем самым получая диффур вида:

$$G(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

который мы умеем решать.

### Пример №4

Необходимо найти диффур, задающий множество окружностей, касающихся оси абсцисс.

Чего делать, сходу и не вдуплишь, да?) Однако, выход есть — если видим слово "окружность" нужно тут же писать её уравнение.

Пусть у нас есть окружность радиуса  $R$ , касающаяся оси абсцисс в точке  $t_0$ . Тогда выполнено тождество:

$$(x - R)^2 + (t - t_0)^2 = R^2$$

В данном случае  $R$  и  $t_0$  и есть наши неизвестные константы. Составим систему уравнений из производных:

$$\begin{cases} (x - R)^2 + (t - t_0)^2 - R^2 = 0 \\ (2x \cdot \dot{x} - 2R \cdot \dot{x}) + 2t - 2t_0 = 0 \\ 2(\dot{x})^2 + 2x \cdot \ddot{x} - 2R \cdot \ddot{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Осталось выразить  $R$  через  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  из последнего уравнения, подставить во второе и выразить  $t_0$ , после чего загнать всё в первое уравнение и получить нужный диффур.

## Замена переменных

Разберём на примере. Пусть у нас есть диффур

$$\dot{x} = x - \sqrt{x}$$

Решать его в таком виде не очень приятно. Поэтому сделаем замену переменных (название — сущая формальность, так как вообще говоря мы заменяем одну функцию на другую, а не переменную):

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Тогда диффур примет вид:

$$2\dot{y} \cdot y = y^2 - y \implies 2\dot{y} = y - 1 \implies \frac{2dy}{y-1} = dt$$

— получили простое уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим ещё несколько примеров замен.

## Линейная замена

Пусть у нас есть диффур вида:

$$\dot{x} = f(at + bx)$$

Можно сделать замену  $u = at + bx$ , получив уравнение  $\dot{x} = f(u)$ . Решим этот диффур относительно переменной  $u$ , получив функцию  $x(u)$ , после чего, сделав обратную замену, выразить искомую  $x(t)$ .

$$u = at + bx$$

$$du = a \cdot dt + b \cdot dx \implies dt = \frac{du - b \cdot dx}{a}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{a \cdot dx}{du - b \cdot dx} = f(u)$$

$$a \cdot dx = f(u)du - b \cdot f(u)dx \implies (a + b \cdot f(u))dx = f(u)du$$

$$dx = \frac{f(u)}{a + b \cdot f(u)} du$$

После этих махинаций всё легко решается как уравнение с разделяющимися переменными.

### Пример №5

$$\dot{x} \cos(x - t)$$

Ну тут совсем толсто:  $u = x - t$ . В данном случае  $a = -1$ ,  $b = 1$ . По формуле выше:

$$dx = \frac{\cos u}{\cos u - 1} du$$

Теперь интегрируем, получаем  $x(u)$  и делаем обратную замену.

## Общий вид

Пускай у нас есть диффур:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Можно сделать замену  $u = \varphi(t, x)$ , получив новое уравнение (весьма удачно, если получится диффур вида  $\dot{u} = f(t, u)$ , но такое бывает далеко не всегда). Решаем его и делаем обратную замену, получая  $x(t)$ .

### Пример №6

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x$$

Здесь можно сделать замену  $u = xt$ , откуда  $du = \dot{x} \cdot t + x \cdot 1$ . Подставим:

$$\begin{aligned}\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x &\iff \dot{x} \cdot t + x = 2x^2 \cdot t^3 \implies \dot{u} = 2u^2 \cdot t \\ \frac{du}{dt} = 2u^2 \cdot t &\implies \frac{du}{u^2} = 2t \cdot dt \implies \int = \int \\ -\frac{1}{u} = t^2 + C &\implies u = -\frac{1}{t^2 + C}\end{aligned}$$

Делаем обратную замену и выражаем  $x(t)$ :

$$u = xt \implies xt = -\frac{1}{t^2 + C} \implies x = -\frac{1}{t^3 + Ct}$$

## Домашнее задание №1

**Задача №1.** Найти все кривые  $x(t)$ , такие, что длина отрезка, соединяющего точку касания и точку пересечения касательной в данной точке с одной из осей, была постоянной.

*Подсказки к решению.* В зависимости от того, какую ось вы выберете, получится либо  $x(t)$ , либо  $t(x)$ , оба варианта правильные.

Изобразите ситуацию на графике. Затем вспомните, что  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \tan \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона касательной. Также вам понадобится Теорема Пифагора.  $\square$

**Задача №2.** Придумать диффур 1 порядка, не обладающий решением на всей прямой. То бишь, не для всех  $t$  решение  $\dot{x} = f(t, x)$  должно существовать.

*Подсказки к решению.* Подумайте о не всюду определённых функциях.  $\square$

**Задача №3.** Решите диффур:

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0, \text{ начальное условие: } x(0) = 1$$

**Задача №4.** Изоклинами найти приближённое решение:

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x}$$

Также изобразите изоклины на графике и покажите все различные (с точностью до топологии и асимптотики) решения.

**Задача №5.** Придумайте (вообще говоря, найдите) диффур 1 порядка, задающий множество прямых, являющихся касательными к единичной окружности с центром в нуле.

*Подсказки к решению.* Пускай вы касаетесь в точке  $(t_0, x_0)$ . Однако, координата  $x_0$  зависит от  $t_0$ . Используйте уравнение окружности, чтобы ликвидировать эту зависимость. Ну а дальше придётся малость подумать и чутка посчитать.  $\square$

## Common Tasks

1. Найти такую кривую  $x(t)$ , что для любой  $t_0 \in \mathbb{R}$  касательная к  $x(t)$  в точке  $(t_0, x(t_0))$  пересекает ось абсцисс в точке  $\frac{t_0}{2}$ .
2. Найти диффур 1 порядка, задающий на плоскости параболы, проходящие через точку  $(0, 1)$  и касающиеся прямой  $x = t$ .