Дифференциальные Уравнения
Семинарские занятия

Вадим Гринберг
по семинарам Войнова А. С.

Содержание

Семинар 1, 10 января

Общие факты

Пускай у нас имеется функция $x(t)$ (вообще говоря, вектор-функция $x = (x_1,\ \ldots,\ x_d)$) от переменной $t \in \mathbb{R}$, действующая из интервала $(a,\ b)$ (по умолчанию считаем всей числовой прямой), такая, что для переменной t, функции $x(t)$ и n её первых производных выполнено уравнение:

$$\mathsf{F}\big(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t)\big) = 0$$

— это и есть дифференциальное уравнение n-го порядка. F в данном случае, грубо говоря, «функция от $n+1$ переменной», которая неявно задаёт $x(t)$ (за точным определением — на лекцию).

Решить диффур означает найти такую функцию $x(t)$, что выполняется вышеуказанное равенство.

Тупой пример: $\dot{x}(t) = x(t)$. Функция совпадает со своей производной. Решением, очевидно, будет $x(t) = \lambda \cdot e^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

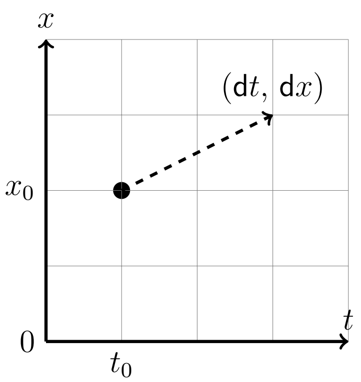
Любой диффур можно привести к удобоваримому виду:

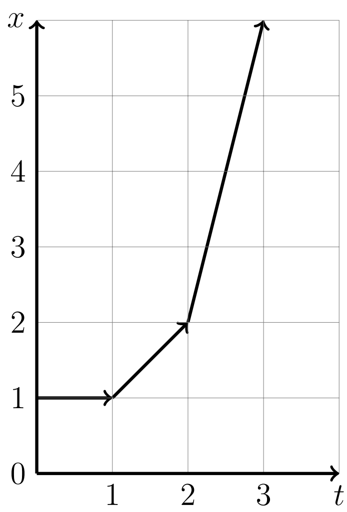
$$\dot{x}(t) = f(t,\ x)$$

где f — некая хорошая функция (доказательство на лекции). С такими диффурами мы в основном и будем иметь дело.

Разберёмся, а как вообще можно решать диффуры. Пускай у нас имеется диффур $\dot{x} = f(t,\ x)$, который мы хотим решить. Попробуем приблизить график нашей кривой $x(t)$ некоей ломаной линией. Возьмём какую-то начальную точку $(t_0,\ x_0)$, и будем смотреть на направление движения, то бишь на направление вектора $(\mathsf{d}t,\ \mathsf{d}x)$. Будем делать маленькие шаги вдоль этого направления. Тогда каждый раз, находясь в точке $(t,\ x)$, мы будем переходить в точку $(t + \mathsf{d}t,\ x + \mathsf{d}x)$.

После многих таких шагов мы получим ломаную линию, приближающую график нашей кривой $x(t)$. Эта ломаная называется **Ломаной Эйлера**.





Для удобства можно делать шаг $\mathsf{d}t$ всегда равным 1, поделив вектор направления на $\mathsf{d}t$. Тогда соответственно шаг $\mathsf{d}x$ станет $\dfrac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \dot{x} = f(t, x)$, и вектор направления в точке $(t,\ x)$ будет иметь вид $\big(1,\ f(t,\ x)\big)$.

Пример: $\dot{x} = tx$. Построим Ломаную Эйлера, стартуя из точки $(t_0,\ x_0) = (0,\ 1)$:

1. $t = 0,\ x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \big(1,\ f(t,\ x)\big) = (1,\ 0) \Rightarrow (t + \mathsf{d}t,\ x + \mathsf{d}x) = (1,\ 1)$

2. $t = 1,\, x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \big(1,\, f(t,\, x)\big) = (1,\, 1) \Rightarrow (t + \mathsf{d}t,\, x + \mathsf{d}x) = (2,\, 2)$

3. $t = 2,\, x = 2 \Rightarrow \dot{x} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \big(1,\, f(t,\, x)\big) = (1,\, 4) \Rightarrow (t + \mathsf{d}t,\, x + \mathsf{d}x) = (3,\, 6)$

4. ....

Изоклины

Определение 1. *Пусть у нас есть диффур $\dot{x} = f(t,\, x)$.*

Интегральная кривая *— график функции $x(t)$ – решения диффура. Тогда $\dot{x}$ — это угловой коэффициент интегральной кривой в точке $\big(t,\, x(t)\big)$, то бишь тангенс угла наклона касательной к $x(t)$ в данной точке.*

Изоклина *– геометрическое место точек плоскости, в которых одно и то же направление движения (направление касательных), то есть, угол наклона вектора $(\mathsf{d}t,\, \mathsf{d}x)$ один и тот же для любой точки $(t,\, x)$ изоклины. Иными словами, $\dot{x} = const$.*

Изолиния поля *– подмножество точек изоклины (являющееся линией), в которых вектор $(\mathsf{d}t,\, \mathsf{d}x)$ один и тот же для любой точки $(t,\, x)$ изолинии. То есть, вектор $(\mathsf{d}t, \mathsf{d}x) \sim \big(1, f(t,\, x)\big) = const$. Для каждой изолинии константа своя.*

Семейство изоклин определяется уравнением

$$\dot{x} = k = f(t,\, x)$$

где k – параметр. Придавая параметру k близкие значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

Для примера выше изоклинами будут являться множества $\left\{xt = k \iff x = \dfrac{k}{t},\, k \in \mathbb{R}\right\}$ — гиперболы.

Научимся находить приближённые решения диффура, строя интегральную кривую при помощи изоклин. Стоит отметить сразу же, что **нулевая изоклина** $f(t,\, x) = 0$ даёт уравнение линий, на которых могут находиться точки максимума и минимума интегральных кривых.

Для большей точности построения интегральных кривых хорошо находить ГМТ точек перегиба, исследуя вторую производную $\ddot{x}$ при помощи уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}t} + \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}x} \cdot \dot{x} = \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}t} + f(t,\, x) \cdot \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}x} = 0$$

Линия, определяемая данным уравнением, и есть возможное ГМТ точек перегиба.

Пример №1

Изоклинами найти приближённое решение диффура

$$\dot{x} = 2t - x$$

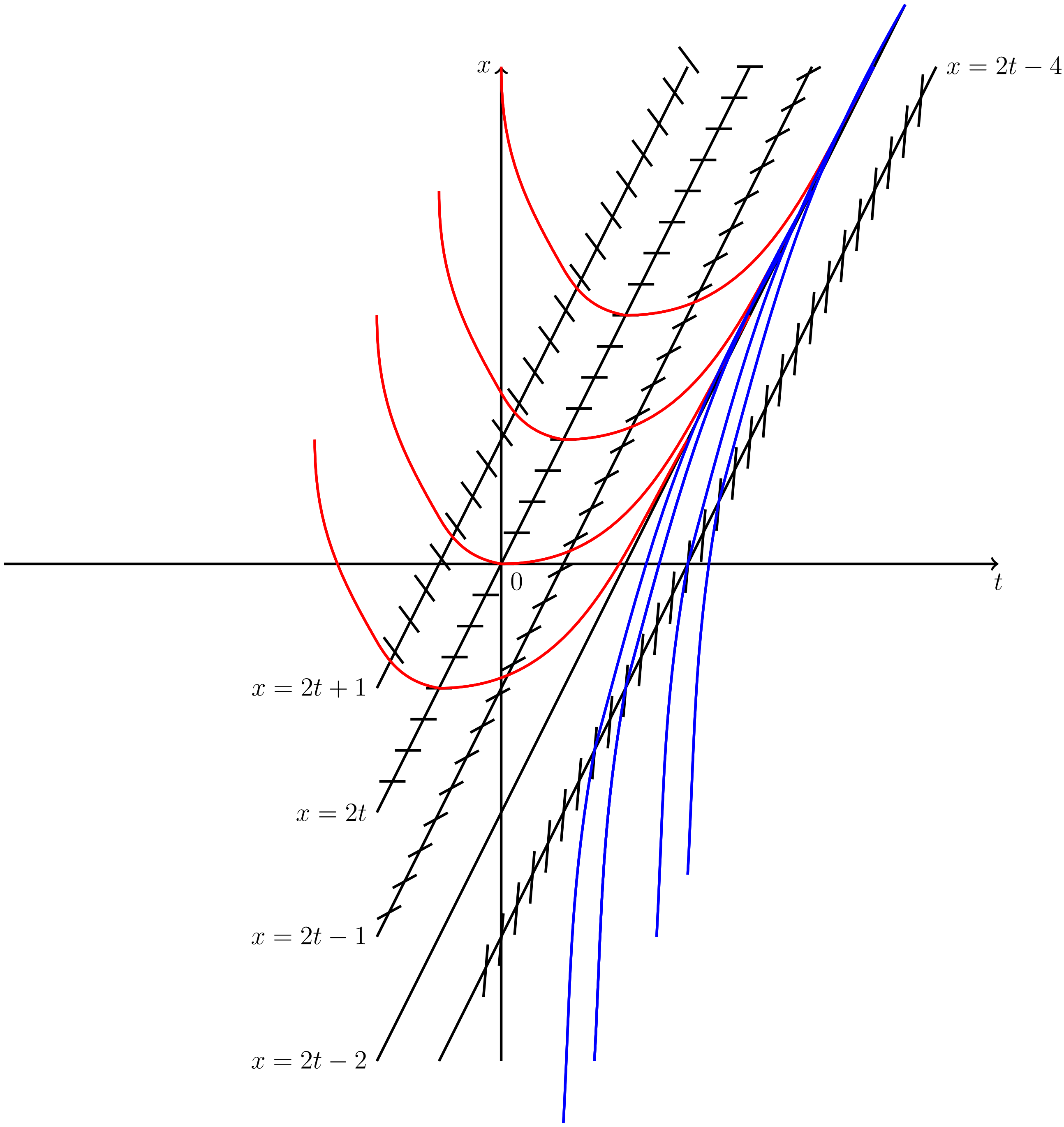
Для получения изоклин положим $\dot{x} = const = k$, откуда:

$$2t - x = k \iff x = 2t - k$$

— параллельные прямые.

Пусть $k = 0$, тогда получим изоклину $x = 2t$ — эта прямая делит плоскость на две части, в каждой из которых производная $\dot{x}$ имеет один и тот же знак — интегральные кривые, пересекая $x = 2t$, из области убывания $x(t)$ переходят в область возрастания. Отсюда получаем, что на данной прямой лежат точки минимума.

Возьмём ещё две изоклины: $x = 2t+1$, $k = -1$ и $x = 2t-1$, $k = 1$. Изобразим их на графике. Касательные, проведённые к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами $k = -1$, $k = 0$ и $k = 1$ образуют с осью абсцисс углы в 135, 0 и 45 градусов соответственно. На графике направление показано чёрточками.



Вторая производная: $\ddot{x} = 2 - \dot{x} = 2 - 2t + x$.

Рассмотрим прямую $x = 2t - 2$, на которой $\ddot{x} = 0$. Это изоклина при $k = 2$. Заметим, что в таком случае угол наклона касательной равен углу наклона самой изоклины. Значит, ни одна интегральная кривая не будет пересекать эту изоклину, но при этом они будут к ней стремиться на бесконечности.

Прямая $x = 2t - 2$ делит плоскость на две части, в одной из которых (над прямой) $\ddot{x} > 0$, а значит, интегральные кривые выпуклы вниз, а в другой $\ddot{x} < 0$, и интегральные кривые выпуклы вверх. Кроме того, поскольку точки минимума расположены над этой прямой, то интегральные кривые, проходящие ниже изоклины $x = 2t - 2$ не имеют точек экстремума.

Рассмотрим также изоклину $x = 2t - 4$, $k = 4$. В данном случае угол наклона касательной будет равен 75 градусов. При этом интегральные кривые будут также стремиться к $x = 2t - 2$, но являясь выпуклыми вверх. Тем самым мы получили другое семейство решений диффура.

На графике выше изображены интегральные кривые, приближающие $x(t)$, полученные в соответствии с проведённым исследованием. Как видим, в точках пересечения с изоклинами кривые параллельны направлению касательных в точках пересечения.

Диффуры с разделяющимися переменными

Это суть дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{a(t)}{b(x)}$$

В данном случае стоит быть осторожным и проверять вырожденные случаи ($b(x) = 0$, $a(t) = 0$, чтобы нечаянно не убить некоторые решения).

Проверив особые случаи, перемножим крест-накрест и получим:

$$b(x)\mathsf{d}x = a(t)\mathsf{d}t$$

$$\int \text{ теперь интегрируем каждую часть независимо от другой } \int$$

$$B(x) = A(t) + C \text{ — это и будет решением диффура}$$

Пример №2

$$\dot{x} = tx$$

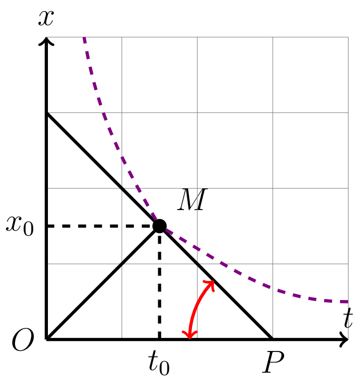
$$\dot{x} = tx = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}x}{x} = t \cdot \mathsf{d}t \Longrightarrow \int \frac{\mathsf{d}x}{x} = \int t \cdot \mathsf{d}t$$

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C \Longrightarrow |x| = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^C}_{\text{какая-то константа}} \Longrightarrow |x| = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}},\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних двух действиях мы взяли экспоненту от обеих частей и избавились от модуля.

Пример №3

Найдите кривую $x(t)$, такую, что для любой $t_0 \in \mathbb{R}$ отрезки, соединяющую точку касания $\big(t_0, x(t_0)\big)$ с точками пересечения касательной в данной точке с осями координат, будут равны.



Пусть мы касаемся нашей кривой $x(t)$ в точке (t_0, x_0) – обозначим её M. Можно заметить, что тогда OM – медиана. Отсюда следует, что координаты точек пересечения с осями абсцисс и ординат равны соответственно $(2t_0, 0)$ и $(0, 2x_0)$. Тогда тангенс угла наклона касательной $\tan\angle MPO = -\frac{2x_0}{2t_0} = -\frac{x_0}{t_0} = \dot{x}(t_0)$, так как тангенс угла наклона касательной к функции $x(t)$ в точке t_0 есть не что иное, как производная $x(t)$ – $\dot{x}(t)$ – в данной точке. Таким образом, мы получили диффур:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Решим его, тем самым найдя $x(t)$.

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} \Longrightarrow -\frac{\mathsf{d}x}{x} = \frac{\mathsf{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$-\ln|x| = \ln|t| + C \Longrightarrow \frac{1}{|x|} = |t| \cdot \lambda,\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \frac{\lambda}{t},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Пример №4

$$xt + (t+1)\cdot\dot{x} = 0$$

$$xt + (t+1)\cdot\dot{x} = 0 \Longrightarrow xt + (t+1)\cdot\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = -\frac{xt}{t+1} \Longrightarrow -\frac{\mathsf{d}x}{x} = \frac{t\cdot\mathsf{d}t}{t+1} \Longrightarrow \int = \int$$

Возьмём правый интеграл.

$$\int\frac{t\cdot\mathsf{d}t}{t+1} = \int 1 - \frac{1}{t+1}\,\mathsf{d}t = t - \ln|t+1|$$

Тогда:

$$-\ln|x| = t - \ln|t+1| + C \Longrightarrow \frac{1}{|x|} = \lambda\cdot\frac{e^t}{t+1},\ \lambda > 0 \Longrightarrow x = \lambda\cdot e^{-t}\cdot(t+1),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

n-параметрическое семейство кривых

Это система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \mathsf{F}\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \\ \mathsf{F}'\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathsf{F}^{(n)}\big(t, x(t), c_1,\ \ldots,\ c_n\big) = 0 \end{cases}$$

– всего $n+1$ уравнение, константы $c_1,\ \ldots,\ c_n$ неизвестны. Необходимо, как и раньше, найти подходящую $x(t)$.

Метод решения таков: сначала мы выражаем константы $c_1,\ \ldots, c_n$ через $t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, и потом подставляем всё в одно уравнение, тем самым получая диффур вида:

$$\mathsf{G}\big(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t)\big) = 0$$

который мы умеем решать.

Пример №5

Необходимо найти диффур, задающий множество окружностей, касающихся оси абсцисс.

Чего делать, сходу и не вдуплишь, да?) Однако, выход есть — если видим слово "окружность нужно тут же писать её уравнение.

Пускай у нас есть окружность радиуса R, касающаяся оси абсцисс в точке t_0. Тогда выполнено тождество:

$$(x-R)^2 + (t-t_0)^2 = R^2$$

В данном случае R и t_0 и есть наши неизвестные константы. Составим систему уравнений из производных:

$$\begin{cases} (x-R)^2 + (t-t_0)^2 - R^2 = 0 \\ (2x\cdot\dot{x} - 2R\cdot\dot{x}) + 2t - 2t_0 = 0 \\ 2(\dot{x})^2 + 2x\cdot\ddot{x} - 2R\cdot\ddot{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Осталось выразить R через $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ из последнего уравнения, подставить во второе и выразить t_0, после чего загнать всё в первое уравнение и получить нужный диффур.

Замена переменных

Разберём на примере. Пускай у нас есть диффур

$$\dot{x} = x - \sqrt{x}$$

Решать его в таком виде не очень приятно. Поэтому сделаем замену переменных (название – сущая формальность, так как вообще говоря мы заменяем одну функцию на другую, а не переменную):

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Тогда диффур примет вид:

$$2\dot{y} \cdot y = y^2 - y \Longrightarrow 2\dot{y} = y - 1 \Longrightarrow \frac{2\mathsf{d}y}{y-1} = \mathsf{d}t$$

— получили простое уравнение с разделяющими переменными.

Рассмотрим ещё несколько примеров замен.

Линейная замена

Пускай у нас есть диффур вида:

$$\dot{x} = f(at + bx)$$

Можно сделать замену $u = at + bx$, получив уравнение $\dot{x} = f(u)$. Решим этот диффур относительно переменной u, получив функцию $x(u)$, после чего, сделав обратную замену, выразить искомую $x(t)$.

$$u = at + bx$$
$$\mathsf{d}u = a \cdot \mathsf{d}t + b \cdot \mathsf{d}x \Longrightarrow \mathsf{d}t = \frac{\mathsf{d}u - b \cdot \mathsf{d}x}{a}$$
$$\dot{x} = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{a \cdot \mathsf{d}x}{\mathsf{d}u - b \cdot \mathsf{d}x} = f(u)$$
$$a \cdot \mathsf{d}x = f(u)\mathsf{d}u - b \cdot f(u)\mathsf{d}x \Longrightarrow \big(a + b \cdot f(u)\big)\mathsf{d}x = f(u)\mathsf{d}u$$
$$\mathsf{d}x = \frac{f(u)}{a + b \cdot f(u)}\mathsf{d}u$$

После этих махинаций всё легко решается как уравнение с разделяющими переменными.

Пример №6

$$\dot{x} = \cos(x - t)$$

Ну тут совсем толсто: $u = x - t$. В данном случае $a = -1$, $b = 1$. По формуле выше:

$$\mathsf{d}x = \frac{\cos u}{\cos u - 1}\mathsf{d}u$$

Теперь интегрируем, получаем $x(u)$ и делаем обратную замену.

Общий вид

Пускай у нас есть диффур:

$$\dot{x} = f(t,\, x)$$

Можно сделать замену $u = \varphi(t,\, x)$, получив новое уравнение (весьма удачно, если получится диффур вида $\dot{u} = f(t,\, u)$, но такое бывает далеко не всегда). Решаем его и делаем обратную замену, получая $x(t)$.

Пример №7

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x$$

Здесь можно сделать замену $u = xt$, откуда $\dot{u} = \dot{x} \cdot t + x \cdot 1$. Подставим:

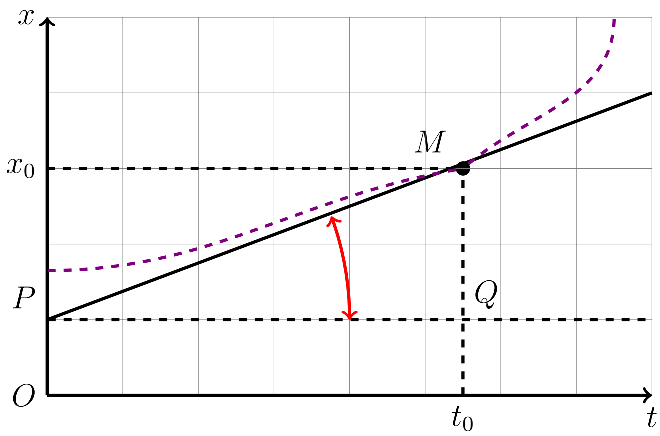
$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x \iff \dot{x} \cdot t + x = 2x^2 \cdot t^3 \Longrightarrow \dot{u} = 2u^2 \cdot t$$
$$\frac{\mathsf{d}u}{\mathsf{d}t} = 2u^2 \cdot t \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}u}{u^2} = 2t \cdot \mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$-\frac{1}{u} = t^2 + C \Longrightarrow u = -\frac{1}{t^2 + C}$$

Делаем обратную замену и выражаем $x(t)$:

$$u = xt \Longrightarrow xt = -\frac{1}{t^2 + C} \Longrightarrow x = -\frac{1}{t^3 + Ct}$$

Домашнее задание №1

Задача №1. *Найти все кривые $x(t)$, такие, что длина отрезка, соединяющего точку касания и точку пересечения касательной в данной точке с одной из осей, была постоянной.*



Решение.

Пусть длина отрезка $MP = l$. Рассмотрим треугольник MPQ – на рисунке выше. Мы знаем, что $PQ = t_0$. Известно, что $\tan \angle MPQ = \dot{x} = \dfrac{MQ}{PQ}$, откуда получаем, что

$$MQ = PQ \tan \angle MPQ = t_0 \dot{x}$$

. По условию, равенство можно продлить на всю числовую прямую, получая:

$$PQ = t \Longrightarrow MQ = t\dot{x}$$

Теперь применим Теорему Пифагора, чтобы получить дифференциальное уравнение на искомую кривую:

$$MP^2 = PQ^2 + MQ^2$$
$$l^2 = t^2 + t^2(\dot{x})^2 \Longrightarrow l^2 - t^2 = t^2(\dot{x})^2$$
$$(\dot{x})^2 = \frac{l^2 - t^2}{t^2} \Longrightarrow \dot{x} = \pm\frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}$$

Получили диффур (вообще говоря, два диффура). Будем рассматривать случай со знаком $+$, так как знак $-$ приведёт нас к почти аналогичному результату (это обговорится далее).

Итак, имеем диффур с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t} \Longrightarrow \mathsf{d}x = \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}\mathsf{d}t \Longrightarrow \int \mathsf{d}x = \int \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}\mathsf{d}t$$

Возьмём правый интеграл, сделав замену переменных.

$$\int \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t}\mathsf{d}t = \Big\{t = l \cdot \sin\beta,\ \mathsf{d}t = l \cdot \cos\beta \mathsf{d}\beta\Big\} = \int \frac{\sqrt{l^2(1 - \sin^2\beta)}}{l \cdot \sin\beta} \cdot l \cdot \cos\beta \mathsf{d}\beta =$$

$$= \int \frac{l \cdot \cos\beta \cdot \cos\beta}{\sin\beta}\mathsf{d}\beta = l \cdot \int \frac{1 - \sin^2\beta}{\sin\beta}\mathsf{d}\beta = l\left(\int \frac{\mathsf{d}\beta}{\sin\beta} - \int \sin\beta \mathsf{d}\beta\right) =$$

$$= \left\{\int \frac{\mathsf{d}\beta}{\sin\beta} = \int \frac{\mathsf{d}\beta}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \int \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathsf{d}\beta}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \int \frac{\mathsf{d}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \ln\left|\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right| + C\right\} =$$

$$l \cdot \ln\left|\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right| + l \cdot \cos(\beta) + C$$

Теперь сделаем обратную замену:

$$t = l \cdot \sin\beta \Longrightarrow \sin\beta = \frac{t}{l} \Longrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{t^2}{l^2}}$$

$$\ln\left|\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right| = \ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right| = \ln\left|\frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right| = \ln\left|\frac{l \cdot \sin\beta}{(1 + \cos\beta) \cdot l}\right| = \ln\left|\frac{t}{l \pm \sqrt{l^2 - t^2}}\right|$$

Теперь запишем полный результат интегрирования обеих частей, помня, что $\int \mathsf{d}x = x + C$:

$$x = \pm\sqrt{l^2 - t^2} + l \cdot \ln\left|\frac{t}{l \pm \sqrt{l^2 - t^2}}\right| + C$$

У нас тут есть модуль, что не очень хорошо. Кроме того, мы не рассмотрели случай с минусом. Убьём двух зайцев одним ударом, немного преобразовав ответ:

$$\pm\sqrt{l^2 - t^2} + l \cdot \ln\left|\frac{t}{l \pm \sqrt{l^2 - t^2}}\right| = \pm\sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln\left|\frac{t}{l \pm \sqrt{l^2 - t^2}}\right|^2 =$$

$$= \pm\sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln\left(\frac{t^2}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2}) \cdot (l \pm \sqrt{l^2 - t^2})}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln\left(\frac{t^2 \cdot (l \mp \sqrt{l^2 - t^2})}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2}) \cdot (l \pm \sqrt{l^2 - t^2}) \cdot (l \mp \sqrt{l^2 - t^2})}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln\left(\frac{t^2 \cdot (l \mp \sqrt{l^2 - t^2})}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2}) \cdot \left(l^2 - (l^2 - t^2)\right)}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln\left(\frac{l \mp \sqrt{l^2 - t^2}}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2})}\right)$$

Заметим, что если бы мы взяли случай с минусом, то тогда перед слагаемым с логарифмом стоял бы знак минус. Тогда, домножив на $-\frac{1}{2}$, мы бы возводили подлогарифменное выражение не в 2 степень, а в -2, соответственно абсолютно аналогичными преобразованиями получив под логарифмом такую же, но перевёрнутую дробь. Однако, и в числителе, и в знаменателе, у нас возникает по $\pm$ или $\mp$ – следовательно, рассмотрев случай с плюсом, мы уже получили все возможные варианты ответа.

Итоговый полный ответ:

$$x = \pm\sqrt{l^2 - t^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln\left(\frac{l \mp \sqrt{l^2 - t^2}}{(l \pm \sqrt{l^2 - t^2})}\right) + C$$

Осталось лишь указать, что $t \in [-l, l]$, и $x(\pm l) = C$. □

Задача №2. *Придумать диффур 1 порядка, не обладающий решением на всей прямой. То бишь, не для всех t решение $\dot{x} = f(t, x)$ должно существовать.*

Решение. $f(t, x)$ должна быть всюду определённой функцией. Поэтому достаточно взять такую $x = x(t)$ в качестве решения диффура, чтобы она не была всюду определена, при выполнении условия выше.

Пример: $\dot{x} = -x^2$. Проверим, что подходит:

$$\dot{x} = -x^2 \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}x}{x^2} = -\mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$\frac{1}{x} = t \Longrightarrow x = \frac{1}{t}$$

□

Задача №3. *Решите диффур:*

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0, \textit{начальное условие: } x(0) = 1$$

Решение.

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0 \Longrightarrow (t^2 - 1) \cdot \mathsf{d}x + 2tx^2\mathsf{d}t = 0$$
$$\frac{\mathsf{d}x}{x^2} = \frac{2t \cdot \mathsf{d}t}{1 - t^2} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\frac{1}{x} = \ln|1 - t^2| + C$$

Найдём константу:

$$x(0) = 1 \Longrightarrow 1 = \ln 1 + C \Longrightarrow C = 1$$

Итоговая кривая:

$$\frac{1}{x} = \ln|1 - t^2| + 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{\ln|1 - t^2| + 1}$$

□

Задача №4. *Изоклинами найти приближённое решение:*

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x}$$

Также изобразите изоклины на графике и покажите все различные (с точностью до топологии и асимптотики) решения (то есть, как рассмотрено выше в примере).

Решение. Уравнения изоклин:

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x} = k \Longrightarrow x = t \cdot \frac{k}{1 - k}$$

Получим прямые изменения характера роста и выпуклости, исследовав первые две производные:

$$\dot{x} = 0 = \frac{x}{t+x} \Longrightarrow x = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}(t+x) - x(1+\dot{x})}{(t+x)^2} = \frac{\dot{x}t - x}{(t+x)^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\frac{x}{t+x} \cdot t - x}{(t+x)^2} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{-x^2}{(t+x)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$\ddot{x} > 0 \Longrightarrow t + x < 0 \Longrightarrow x < -t$$

$$\ddot{x} < 0 \Longrightarrow t + x > 0 \Longrightarrow x > -t$$

Таким образом, характер роста функции меняется в нуле, а выпуклость изменяется, проходя через прямые $x = 0$, $x = -t$. На основании этого и нескольких изоклин можно построить приблизительный график кривой $x(t)$. □

Задача №5. *Придумайте (вообще говоря, найдите) диффур 1 порядка, задающий множество прямых, являющихся касательными к единичной окружности с центром в нуле.*

Решение. Уравнение касательной к окружности в точке $(t_0,\, x_0)$ — $x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1$. Таким образом, у нас есть два уравнения:

$$\begin{cases} x_0^2 + t_0^2 = 1 \\ x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1 \end{cases}$$

Будем выражать из них t_0 и x_0, чтобы остались только переменные t и x. Для этого продифференцируем второе уравнение и попреобразуем:

$$x \cdot x_0 + t \cdot t_0 = 1 \Longrightarrow \dot{x}x_0 + t_0 = 0$$

$$\dot{x}x_0 = -t_0 \text{ — здесь возведём в квадрат, запоминая знак минус — } (\dot{x})^2 x_0^2 = t_0^2$$

Из уравнения окружности мы получаем выражение на квадрат t_0:

$$x_0^2 + t_0^2 = 1 \Longrightarrow t_0^2 = 1 - x_0^2$$

— теперь подставим t_0^2 в уравнение выше:

$$(\dot{x})^2 x_0^2 = 1 - x_0^2 \Longrightarrow x_0^2\big(1 + (\dot{x})^2\big) = 1$$

$$x_0^2 = \frac{1}{1 + (\dot{x})^2} \Longrightarrow t_0^2 = 1 - x_0^2 = \frac{(\dot{x})^2}{1 + (\dot{x})^2}$$

$$x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}}, \quad t_0 = \pm\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}}$$

Осталось подставить выраженные константы в уравнение касательной и получить некоторыми преобразованиями искомый диффур:

$$\pm\frac{x}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}} \pm \frac{\dot{x}t}{\sqrt{1 + (\dot{x})^2}} = 1$$

$$\pm x \pm \dot{x}t = \sqrt{1 + (\dot{x})^2}$$

$$x^2 \pm 2\dot{x}xt + (\dot{x})^2 t^2 = 1 + (\dot{x})^2$$

$$(\dot{x})^2(t^2 - 1) \pm (2xt)\dot{x} + (x^2 - 1) = 0 \text{ — квадратное уравнение}$$

$$\dot{x} = \frac{\pm 2xt \pm \sqrt{4x^2t^2 - 4(t^2 - 1)(x^2 - 1)}}{2(t^2 - 1)}$$

$$\dot{x} = \frac{\pm xt \pm \sqrt{x^2 + t^2 - 1}}{t^2 - 1}$$

□

Семинар 2, 17 января

Специальные замены. Однородные уравнения.

Определение 2. *Функцию $g(t,\, x)$ назовём* ***однородной****, если*

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}:\ g(\lambda t,\, \lambda x) = \lambda \cdot g(t,\, x)$$

Функции $M(t,\, x)$ и $N(t,\, x)$ – ***одинаково однородны****, если*

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}:\ M(\lambda t,\, \lambda x) = \lambda \cdot M(t,\, x) \iff N(\lambda t,\, \lambda x) = \lambda \cdot N(t,\, x)$$

Определение 3. ***Однородное*** *дифференциальное уравнение – это диффур вида*

$$M(t,\, x)\mathsf{d}t + N(t,\, x)\mathsf{d}x = 0$$

где функции M и N – одинаково однородны.

Решать такие диффуры можно путём сведения к уравнению с разделяющимися переменными при помощи различных замен. О них, а также о том, как сводить иные уравнения к однородным, мы и поговорим.

Однородные уравнения: $y = \dfrac{x}{t}$

Пускай у нас имеется диффур вида:

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Оно уже однородное. Мы хотим привести его к уравнению с разделяющими переменными. Следующая замена позволит нам это сделать: $y = \dfrac{x}{t}$:

$$y = \frac{x}{t} \Longrightarrow x = y \cdot t \Longrightarrow \mathsf{d}x = y\mathsf{d}t + t\mathsf{d}y$$

– подставляем в однородное уравнение и решаем, находя $y(t)$. После этого обратная замена.

Пример №1

$$t\mathsf{d}x = (x+t)\mathsf{d}t$$

Данное уравнение уже является однородным. Преобразуем его и сделаем вышеуказанную замену (предварительно рассмотрев вырожденные случаи):

$$t\mathsf{d}x = (x+t)\mathsf{d}t \iff \mathsf{d}x = \frac{x}{t}\mathsf{d}t + \mathsf{d}t,\ y = \frac{x}{t}$$
$$(y\mathsf{d}t + t\mathsf{d}y) = (y+1)\mathsf{d}t$$
$$t\mathsf{d}y = \mathsf{d}t \Longrightarrow \mathsf{d}y = \frac{\mathsf{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

Осталось проинтегрировать, получить $y(t)$ и подставить $y = \dfrac{x}{t}$.

Пример №2

$$x^2 + \dot{x}t^2 = tx\dot{x}$$

Помня, что $\dot{x} = \dfrac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t}$, преобразуем диффур и сделаем ту же замену.

$$x^2 + \dot{x}t^2 = tx\dot{x} \iff x^2\mathsf{d}t = (tx - t^2)\mathsf{d}x,\ y = \frac{x}{t}$$
$$y^2t^2\mathsf{d}t = t^2(y-1)(y\mathsf{d}t + t\mathsf{d}y)$$
$$y^2\mathsf{d}t = y^2\mathsf{d}t + yt\mathsf{d}y - y\mathsf{d}t - t\mathsf{d}y$$
$$y\mathsf{d}t = t(y-1)\mathsf{d}y \iff \frac{\mathsf{d}t}{t} = \left(1 - \frac{1}{y}\right)\mathsf{d}y$$
$$\ln|t| = y - \ln|y| + C$$

Теперь удобно делать обратную замену:

$$\ln|yt| = y + C \iff \ln|x| = \frac{x}{t} + C$$

и преобразовать получившееся выражение до вида $x = x(t)$.

Пример №3

$$t\dot{x} = x - t\cdot\exp\left(\frac{x}{t}\right)$$

— здесь руки сами просят поделить на t ($t \neq 0$, так как иначе уравнение не определено):

$$\dot{x} = \frac{x}{t} - \exp\left(\frac{x}{t}\right),\ y = \frac{x}{t}$$
$$\frac{y\mathsf{d}t + t\mathsf{d}y}{\mathsf{d}t} = y - e^y \Longrightarrow \frac{t\mathsf{d}y}{\mathsf{d}t} = -e^y$$
$$\frac{\mathsf{d}y}{e^y} = -\frac{\mathsf{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$
$$e^{-y} = -\ln|t| + C$$

— далее обратная замена.

Однородные уравнения: дробно-линейный вид

Пускай мы имеем диффур вида:

$$\dot{x} = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right),\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Ясно, что числитель и знаменатель суть уравнения прямых на координатной плоскости. Мы можем преобразовать уравнения такого типа к только что рассмотренным $\dot{x} = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$, если перенесём систему координат в точку пересечения данных прямых.

Теперь подробнее о методе. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1t + b_1x + c_1 = 0 \\ a_2t + b_2x + c_2 = 0 \end{cases}$$

— решением данной системы будет точка пересечения двух прямых (t^*, x^*). Теперь перенесём систему координат в данную точку, произведя замену:

$$\widetilde{t} = t - t^*$$
$$\widetilde{x} = x - x^*$$

— теперь, произведя простые преобразования, получаем однородный диффур $(\dot{\widetilde{x}}) = \left(\dfrac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}}\right)$. Решив его, осталось провести обратную замену, прибавив соответствующие константы.

Здесь стоит обговорить случай, когда выражения в числителе и знаменателе задают параллельные прямые, то есть:

$$\dot{x} = f\left(\frac{at + bx + c_1}{at + bx + c_2}\right)$$

— отличаются только на свободный член, ибо $c_2 = c_1 + c$, $c \in \mathbb{R}$. В данном случае уравнение тривиально сводится к уравнению вида $\dot{x} = \widetilde{f}(at + bx)$, которое мы умеем решать, линейной заменой сводя к диффуру с разделяющимися переменными.

Пример №4

$$(x + 2)\mathsf{d}t = (2t + x - 4)\mathsf{d}x$$

Перезапишем в дробно-линейном виде:

$$\dot{x} = \frac{x + 2}{2t + x - 4}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2t + x - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x + 2 \\ \widetilde{t} = t - 3 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}\widetilde{x}}{\mathsf{d}\widetilde{t}} = \frac{\widetilde{x}}{2\widetilde{t} + \widetilde{x}}$$

— осталось решить его как уравнение с разделяющимися переменными.

Пример №5

$$\dot{x} = \frac{5t - x - 3}{3t + 2x - 7}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 5t - x - 3 = 0 \\ 3t + 2x - 7 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x - 2 \\ \widetilde{t} = t - 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}\widetilde{x}}{\mathsf{d}\widetilde{t}} = \frac{5\widetilde{t} - \widetilde{x}}{3\widetilde{t} + 2\widetilde{x}}$$

Поделим числитель и знаменатель правой части уравнения на $\widetilde{t}$ и положим $y = \dfrac{\widetilde{x}}{\widetilde{t}}$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\widetilde{t} \cdot \frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}\widetilde{t}} = \frac{5 - 4y - 2y^2}{3 + 2y}$$

Однородные уравнения: $x = y^m$

Пускай мы имеем уравнение

$$M(t,\, x)\mathsf{d}t + N(t,\, x)\mathsf{d}x = 0$$

где функции M и N – НЕ одинаково однородные. Однако, мы были бы рады привести его к таковому. В этом нам поможет замена $x = y^m$, где $m \in \mathbb{Q}$.

Идея в том, что у однородного уравнения степени каждого из слагаемых уравнения должны совпадать — тогда при домножении на константу мы сможем её спокойно вынести за функции. Поэтому сначала мы найдём степень m, после чего будем решать обычное однородное уравнение при помощи известных методов. Разберём на примерах.

Пример №6

$$2t^4 \cdot x\dot{x} + x^4 = 4t^6$$

— перепишем с дифференциалами:

$$2t^4 \cdot x\mathsf{d}x + x^4\mathsf{d}t = 4t^6\mathsf{d}t$$

Делаем замену:

$$x = y^m \Longrightarrow \mathsf{d}x = m \cdot y^{m-1}\mathsf{d}y$$

— получаем уравнение:

$$2t^4 \cdot y^m \cdot m \cdot y^{m-1}\mathsf{d}y + y^{4m}\mathsf{d}t = 4t^6\mathsf{d}t$$

Приравняем степени:

$$3 + 2m = 4m = 6 \Longrightarrow m = \frac{3}{2}$$

— теперь подставляем и решаем однородный диффур.

Пример №7

$$\dot{x} = x^2 - \frac{2}{t^2}$$

Перепишем с дифференциалами и сделаем замену $x = y^m$:

$$t^2\mathsf{d}x = x^2t^2\mathsf{d}t - 2\mathsf{d}t$$
$$x = y^m,\, \mathsf{d}x = m \cdot y^{m-1}\mathsf{d}y$$
$$m \cdot t^2 \cdot y^{m-1}\mathsf{d}y = y^{2m} \cdot t^2\mathsf{d}t - 2\mathsf{d}t$$

Ищем степень:

$$2 + m - 1 = 2m + 2 = 0 \Longrightarrow m = -1$$

Тогда:

$$-t^2 \cdot y^{-2}\mathsf{d}y = y^{-2} \cdot t^2\mathsf{d}t - 2\mathsf{d}t$$
$$-t^2\mathsf{d}y = t^2\mathsf{d}t - 2y^2\mathsf{d}t$$

Получили однородное уравнение, которое решается классически: $z = \dfrac{y}{t}$:

$$z = \frac{y}{t},\;\; y = zt,\;\; \mathsf{d}y = t\mathsf{d}z + z\mathsf{d}t$$
$$-t^2\big(t\mathsf{d}z + z\mathsf{d}t\big) = t^2\mathsf{d}t - 2z^2t^2\mathsf{d}t$$
$$-t\mathsf{d}z - z\mathsf{d}t = \mathsf{d}t - 2z^2\mathsf{d}t$$
$$t\mathsf{d}z = (2z^2 - z - 1)\mathsf{d}t$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathsf{d}t}{t} = \frac{\mathsf{d}z}{2z^2 - z - 1} \Longrightarrow \int = \int$$

— находим решение $z = z(t)$, после чего производим череду обратных замен, находя $x = x(t)$.

Домашнее задание №2

Задача №1. *Решить диффур:*

$$\dot{x} = 2 \cdot \left(\frac{x+2}{x+t-1}\right)^2$$

Решение. □

Задача №2. *Решить диффур:*

$$\dot{x} = \frac{x+2}{t+1} + \tan\left(\frac{x-2t}{t+1}\right)$$

Решение. □

Задача №3. *Решить диффур:*

$$2x + (xt^2 + 1) \cdot t\dot{x} = 0$$

Решение. □

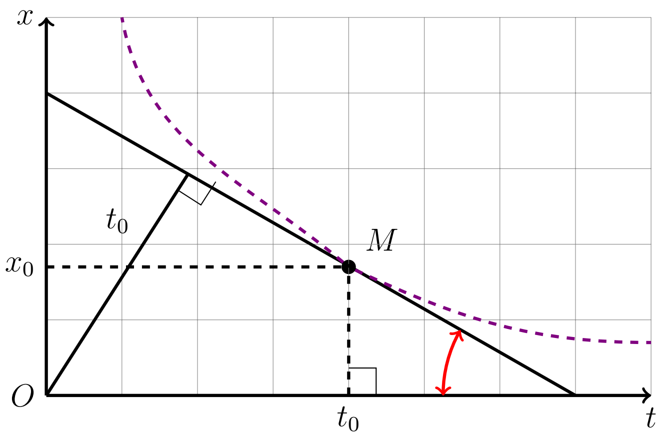
Задача №4. *Найти все такие α, β, a, $b \in \mathbb{R}$, такие, что дифференциальное уравнение*

$$\dot{x} = at^\alpha + bx^\beta$$

***сводится** к однородному.*

Решение. □

Задача №5. *Найдите все кривые $x(t)$, такие, что расстояние от начала координат до касательной к $x(t)$ в любой точке $\big(t_0,\, x(t_0)\big)$ совпадает с абсциссой данной точки (равно t_0):*



Решение. □

Семинар 3, 24 января

Линейные уравнения. Базовый случай

Линейные диффуры первого порядка имеют следующий общий вид:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Опишем 2 метода решения таких уравнений в общем виде.

Метод замены

Имеем диффур: $\dot{x} + a(t)x = b(t)$. Делаем следующую замену: $x = uv$, где $u = u(t)$, $v = v(t)$ – функции от t. Естественным образом изменяется и дифференциал:

$$\begin{cases} x = uv \\ \dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\dot{u}v + u\dot{v} + a(t)uv = b(t)$$

Сгруппируем слагаемые в левой части по u:

$$\dot{u}v + u\big(\dot{v} + a(t)v\big) = b(t)$$

Теперь приравниваем выражение в скобках к нулю, получая систему:

$$\begin{cases} \dot{v} + a(t)v = 0 \\ \dot{u}v = b(t) \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы – это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}t} + a(t)v = 0$$

$$\frac{\mathsf{d}v}{v} = -a(t)\mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|v| = -\int a(t)\mathsf{d}t \Longrightarrow v = \exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right)$$

Прошу заметить, что в данном случае константа $C = 0$ – это важно. Теперь подставляем данное выражение во второе уравнение.

$$\dot{u}\exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right) = b(t)$$

$$\mathsf{d}u = b(t)\cdot\exp\left(\int a(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$u = \int b(t)\cdot\exp\left(\int a(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}t + C$$

Осталось подставить полученные u и v, получив $x = x(t) = u\cdot v$:

$$x = u\cdot v = \left[\int b(t)\cdot\exp\left(\int a(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}t + C\right]\cdot\exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right)$$

Пример №1

$$\dot{x} + 2tx = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr)$$

Будем действовать по алгоритму.

$$\begin{cases} x = uv \\ \dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases}$$

$$\dot{u}v + u\dot{v} + 2tuv = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr) \iff \dot{u}v + u\bigl(\dot{v} + 2tv\bigr) = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr)$$

$$\begin{cases} \dot{v} + 2tv = 0 \\ \dot{u}v = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = \exp\bigl(-t^2\bigr) \\ \dot{u}\exp\bigl(-t^2\bigr) = t \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr) \end{cases}$$

$$\dot{u} = t \Longrightarrow u = \frac{t^2}{2} + Cx = uv = \left(\frac{t^2}{2} + C\right) \cdot \exp\bigl(-t^2\bigr)$$

Метод вариации произвольной постоянной

Имеем диффур: $\dot{x} + a(t)x = b(t)$. Если $b(t) := 0$, то у нас имеется однородный диффур $\dot{x} + a(t)x = 0$. Ясно, что каждое решение линейного диффура является решением однородного диффура с нулевой правой частью, смещённого на $b(t)$ – по аналогии с СЛУ из Линала, мы сначала решаем однородную СЛУ, получая общее решение, а затем смещаем на вектор значений (столбец правых частей из расширенной СЛУ). Таким образом, получаем метод:

$$\dot{x} + a(t)x = 0$$

$$\mathsf{d}x + a(t)x\mathsf{d}t = 0$$

$$\frac{\mathsf{d}x}{x} = -a(t)\mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|x| = -\int a(t)\mathsf{d}t + C \Longrightarrow x = u \cdot \exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right),\ u \in \mathbb{R}$$

Теперь сделаем вариацию постоянной (тем самым получая все возможные «сдвиги» решения однородного уравнения). Полагаем теперь, что u – не константа, а тоже некоторая функция от t: $u = u(t)$. Тогда можно сделать замену $x = x(t,\, u)$ и подставить в исходное уравнение:

$$\dot{\left[u \cdot \exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right)\right]} + a(t) \cdot u \cdot \exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right) = b(t)$$

$$\dot{u}\exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right) - u \cdot a(t) \cdot \exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right) + a(t) \cdot u \cdot \exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right) = b(t)$$

Заметим, что последние два слагаемых в левой части равны по модулю и противоположны по знаку, следовательно, их можно попросту сократить, получая диффур:

$$\dot{u}\exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right) = b(t)$$

$$\mathsf{d}u = b(t) \cdot \exp\left(\int a(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$u = \int b(t) \cdot \exp\left(\int a(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}t + C$$

Осталось подставить полученное решение u в выражение для x, чтобы получить общее решение диффура:

$$x = u \cdot \exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right) = \left[\int b(t) \cdot \exp\left(\int a(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}t + C\right] \cdot \exp\left(-\int a(t)\mathsf{d}t\right)$$

Внимательный читатель может заметить, что оба метода являются по факту одним и тем же. Однако, в зависимости от ситуации, пользоваться можно любым подходом.

Пример №2

$$t\dot{x} - 2x = 2t^4$$

Сначала решим однородное.

$$t\dot{x} = 2x$$
$$t\mathsf{d}x = 2x\mathsf{d}t \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}x}{x} = 2\frac{\mathsf{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\ln|x| = 2\ln|t| \Longrightarrow x = u \cdot t^2,\ u \in \mathbb{R}$$

Теперь сделаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{cases} x = ut^2 \\ \mathsf{d}x = \dot{u}t^2 + 2ut \end{cases}$$
$$t\left(\dot{u}t^2 + 2ut\right) - 2ut^2 = 2t^4$$
$$\dot{u}t^3 + 2ut^2 - 2ut^2 = 2t^4$$
$$\dot{u}t^3 = 2t^4 \Longrightarrow \dot{u} = 2t \Longrightarrow u = t^2 + C$$
$$x = ut^2 = (t^2 + C)t^2 = t^4 + Ct^2$$

Получили общее решение.

Пример №3

$$x = t(\dot{x} - t \cdot \cos t)$$

Приведём к «классическому» виду:

$$\dot{x}t - x = t^2 \cdot \cos t$$

Однородное:

$$\dot{x}t = x$$
$$\mathsf{d}xt \cdot t = x\mathsf{d}t$$
$$\frac{\mathsf{d}x}{x} = \frac{\mathsf{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\ln|x| = \ln|t| + C \Longrightarrow x = ut,\ u \in \mathbb{R}$$

Сделаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{cases} x = ut \\ \mathsf{d}x = \dot{u}t + u \end{cases}$$
$$(\dot{u}t + u)t - ut = t^2\cos t \Longrightarrow \dot{u}t^2 = t^2\cos t$$
$$\dot{u} = \cos t \Longrightarrow u = \sin t + C$$

Подставляем в выражение для x, чтобы получить итоговый ответ:

$$x = ut = (\sin t + C)t = t\sin t + Ct$$

Функция от x, сведение к линейному

Пускай у нас есть уравнение вида:

$$a'(x)\dot{x} + b(t) \cdot a(x) = c(t)$$

где $a = a(x)$ – функция от $\underline{x}$. Его можно свести к линейному ввиду свойств дифференциала:

$$a'(x)\dot{x} = \frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}x} \cdot \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}t}$$

Подставляем в исходное уравнение, получая диффур, линейный по $\underline{a}$:

$$\frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}t} + b(t) \cdot a = c(t)$$

Его уже можно решить приведёнными выше методами, получив решение $a = f(t)$, после чего выразить x через $a(x) = f(t)$.

«Обратное» решение: $t = t(x)$

Ранее мы рассматривали уравнения, линейные относительно переменной x и её производной. То есть мы считали, что t является независимой переменной, а x является зависимой переменной. Однако, всегда стоит иметь в виду, что возможен противоположный подход. То есть можно считать переменную x независимой переменной, а t – зависимой переменной. На практике часто встречаются задачи, в которых уравнение линейно относительно переменной t и её производной, а не x. В общем виде такое уравнение можно записать так:

$$\big(a(x)t + b(x)\big)\dot{x} = c(x)$$

Преобразуем его:

$$\big(a(x)t + b(x)\big)\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = c(x)$$
$$a(x)t + b(x) = c(x)\frac{\mathsf{d}t}{\mathsf{d}x}$$
$$c(x)\frac{\mathsf{d}t}{\mathsf{d}x} - a(x)t = b(x)$$
$$\dot{t} - \frac{a(x)}{c(x)} \cdot t = \frac{b(x)}{c(x)}$$

Теперь решаем диффур любым из рассмотренных выше методов, но для функции $t = t(x)$.

Пример №4

$$(2t + x^3)\dot{x} = x$$

Преобразуем его к диффуру от t, подставив нужные выражения в формулу выше.

$$\dot{t} - \frac{2}{x} \cdot t = x^2$$

Теперь решим методом вариации постоянной:

$$\dot{t} = \frac{2}{x} \cdot t$$
$$\frac{\mathsf{d}t}{t} = 2\frac{\mathsf{d}x}{x} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\ln|t| = 2\ln|x| + C \Longrightarrow t = ux^2,\ u \in \mathbb{R}$$

Теперь положим $u = u(x)$:

$$\begin{cases} t = ux^2 \\ \mathsf{d}t = \dot{u}x^2 + 2ux \end{cases}$$

$$\dot{u}x^2 + 2ux - 2ux = x^2 \Longrightarrow \dot{u}x^2 = x^2$$

$$\dot{u} = 1 \Longrightarrow u = x + C$$

Получаем общее решение $t = t(x)$:

$$t = ux^2 = (x + C)x^2 = x^3 + Cx$$

Уравнение Бернулли

Это дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \cdot x^m$$

Характерный признак – степень m в правой части. Стоит отметить, что при $m = 0,\ 1$ это обычное линейное уравнение, которое мы умеем решать. Более того, степень m может быть какой угодно – положительной ли, отрицательной или вообще дробью.

Как и линейное неоднородное уравнение первого порядка, уравнение Бернулли может приходить на новогодний утренник в разных костюмах:

- Волком:
$$a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t) \cdot x^m$$
- Зайчиком:
$$\dot{x} + x = c(t) \cdot x^m$$
- Или белочкой:
$$\dot{x} + a(t)x = x^m$$

Важно, чтобы всегда присутствовала Ёлочка – x^m, которая иногда может маскироваться под корень. Вокруг неё и будем водить хороводы.

Стоит также обратить внимание, что у данных уравнений при $m > 0$ всегда есть очевидное частное решение $x = 0$. Понятно, что когда просят найти частное решение диффура, на этот факт можно забить, но при нахождении общего решения терять данный случай нельзя.

Теперь обговорим метод решения. Пусть мы имеем диффур в «классическом» виде:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \cdot x^m$$

Избавимся от x в правой части уравнения, поделив всё на его степень:

$$\frac{\dot{x}}{x^m} + \frac{a(t)}{x^{m-1}} = b(t)$$

Теперь делаем хитрую (нет) замену:

$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{x^{m-1}} \\ \dot{w} = \dfrac{(1-m)\dot{x}}{x^m} \Longrightarrow \dfrac{\dot{x}}{x^m} = \dfrac{\dot{w}}{1-m} \end{cases}$$

Тогда диффур примет вид:

$$\frac{\dot w}{1-m} + a(t)w = b(t) \Longrightarrow \dot w + (1-m)\cdot a(t)w = (1-m)\cdot b(t)$$

— получили обычный линейный диффур, который только что научились решать.

Пример №5

$$\dot x = x^4 \cdot \cos t + x \cdot \tan t$$

Запомним, что $x = 0$ – решение, далее полагаем $x \neq 0$. Перепишем в «классическом» виде:

$$\dot x - x \cdot \tan t = x^4 \cdot \cos t$$

Поделим на x^4:

$$\frac{\dot x}{x^4} - \frac{\tan t}{x^3} = \cos t$$

Замена:

$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{x^3} \\ \dot w = \dfrac{(1-4)\dot x}{x^4} \Longrightarrow \dfrac{\dot x}{x^4} = -\dfrac{\dot w}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{\dot w}{3} - w \cdot \tan t = \cos t \iff \dot w + 3w \cdot \tan t = -3\cos t$$

Теперь решаем такой линейный диффур.

$$\dot w = -3w \tan t \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}w}{w} = -3\tan t \mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|w| = 3\ln|\cos t| + C \Longrightarrow w = u \cdot \cos^3 t,\ u \in \mathbb{R}$$

Делаем вариацию постоянной $u = u(t)$:

$$\begin{cases} w = u \cdot \cos^3 t \\ \dot w = \dot u \cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t \end{cases}$$

$$\dot u \cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t + 3u \cdot \cos^3 t \cdot \tan t = -3\cos t \iff$$

$$\iff \dot u \cos^3 t - 3u \cdot \sin t \cdot \cos^2 t + 3u \cdot \cos^3 t \cdot \frac{\sin t}{\cos t} = -3\cos t$$

$$\dot u \cos^3 t = -3\cos t \iff \mathsf{d}u = -\frac{3\mathsf{d}t}{\cos^2 t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$u = -3\tan t + C$$

Подставляем в выражение для w и делаем обратную замену.

$$w = u \cdot \cos^3 t = (-3\tan t + C)\cdot \cos^3 t$$

$$w = \frac{1}{x^3} \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{(-3\tan t + C)\cdot \cos^3 t}$$

Пример №6

Решить задачу Коши:

$$\dot x - \frac{2x}{t} = 2t \cdot \sqrt{x}, \qquad \text{начальное условие: } x(1) = 1$$

Так как нужно решить задачу Коши, то $x \neq 0$. Решаем стандартным для Бернулли способом:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{t} = 2t$$

$$\begin{cases} w = \sqrt{x} \\ \dot{w} = \dfrac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = 2\dot{w} \end{cases}$$

$$2\dot{w} - \frac{2w}{t} = 2t \iff \dot{w} - \frac{w}{t} = t$$

Решим заменой $w = uv$:

$$\begin{cases} w = uv \\ \dot{w} = \dot{u}v + u\dot{v} \end{cases}$$

$$\dot{u}v + u\dot{v} - \frac{uv}{t} = t \iff \dot{u}v + u\left(\dot{v} - \frac{v}{t}\right) = t$$

$$\begin{cases} \dot{v} - \dfrac{v}{t} = 0 \\ \dot{u}v = t \end{cases}$$

$$\dot{v} = \frac{v}{t} \iff \frac{\mathsf{d}v}{v} = \frac{\mathsf{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln|v| = \ln|t| \iff v = t$$

$$\dot{u}t = t \iff \dot{u} = 1 \Longrightarrow u = t + C$$

Получаем общее решение диффура от w

$$w = (t + C) \cdot t$$

Делаем обратную замену $w = \sqrt{x} \iff x = w^2$:

$$x = w^2 = \big[(t + C) \cdot t\big]^2 = (t + C)^2 \cdot t^2$$

Теперь найдём частное решение:

$$x(1) = 1 \Longrightarrow 1 = (1 + C)^2$$

— внезапно, уравнение имеет 2 корня: $C = 0$ и $C = -2$, откуда получается 2 частных решения:

$$x = t^4, \qquad x = (t - 2)^2 \cdot t^2$$

Каждое из них удовлетворяет начальному условию. Это объясняется тем, что задача Коши имеет единственное решение только при выполнении определённых условий (функция f в диффуре $\dot{x} = f(t, x)$ должна быть Липшицевой). В данном случае условие единственности нарушено, и в точке $(1,\,1)$ **пересекаются** графики кривых $x = t^4$ и $x = (t - 2)^2 \cdot t^2$.

Уравнение Риккати

Это дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{x} + a(t)x^2 + b(t)x + c(t) = 0$$

Сразу отметим, что если a, b, c – константы, то это обычное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого можно записать в виде функции $t = t(x)$:

$$t = C - \int \frac{\mathsf{d}x}{ax^2 + bx + c}$$

Методы решения данного уравнения весьма и весьма интересны.

Одно частное решение

Пускай у нас есть одно **частное** решение $x_1 = x_1(t)$ этого диффура. Тогда мы можем представить общее решение – функцию $x = x(t)$ – как сумму функций:

$$x = x_1 + z$$

где $z = z(t)$ – новая неизвестная функция. Подставим выражение для x в исходное уравнение:

$$\begin{cases} x = x_1 + z \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{z} \end{cases}$$
$$\dot{x}_1 + \dot{z} + a(t)\big(x_1^2 + 2x_1 z + z^2\big) + b(t)(x_1 + z) + c(t) = 0$$

Поскольку x_1 – решение диффура, то выполнено:

$$\dot{x}_1 + a(t)x_1^2 + b(t)x_1 + c(t) = 0$$

Таким образом, раскрыв скобки, мы можем убрать обнулившуюся часть, получая диффур:

$$\dot{z} + a(t)\big(2x_1 z + z^2\big) + b(t)z = 0$$
$$\dot{z} + a(t)z^2 + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = 0$$
$$\dot{z} + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = -a(t)z^2$$

— а это уже знакомое нам уравнение Бернулли. Помним про корень $z = 0$, стреляем в уравнение стандартной заменой:

$$\dot{z} + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = -a(t)z^2$$
$$\frac{\dot{z}}{z^2} + \frac{2a(t)x_1 + b(t)}{z} = -a(t)$$
$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{z} \\ \dot{w} = -\dfrac{\dot{x}}{x^2} \Longrightarrow \dfrac{\dot{x}}{x^m} = -\dot{w} \end{cases}$$
$$-\dot{w} + \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot w = -a(t) \iff \dot{w} - \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot w = a(t)$$

и добиваем каким-нибудь методом решения линейных диффуров.

Стоит отметить, что часто бывает более выгодна немного иная замена x:

$$x = x_1 + \frac{1}{z}$$

— это сразу же приводит наше уравнение к линейному виду:

$$\dot{z} - \big(2a(t)x_1 + b(t)\big) \cdot z = a(t)$$

Однако, в данном случае нужно дополнительно помнить про нулевое решение (так как вот таким способом мы найдём все ненулевые решения).

Пример №7

$$\dot{x} + x^2 = t^2 - 2t$$

Частное решение находится тривиально – достаточно прибавить 1 к обеим частям уравнения, чтобы его увидеть:

$$\dot{x}_1 + x_1^2 + 1 = t^2 - 2t + 1 \iff (1-t)^2 = x_1^2 + \dot{x}_1 + 1 \Longrightarrow x_1 = 1 - t$$

Делаем представление через сумму (тут удобнее инвертировать z, помня про нулевое решение):

$$\begin{cases} x = 1 - t + \dfrac{1}{z} \\ \dot{x} = -1 - \dfrac{\dot{z}}{z^2} \end{cases}$$

Тогда мы сразу получаем линейный диффур:

$$\dot{z} - \big(2 - 2t + 0\big) \cdot z = 1$$
$$\dot{z} + 2(t-1)z = 1$$

Решаем однородное:

$$\dot{z} = 2(1-t)z \iff \frac{\mathsf{d}z}{z} = 2(1-t)\mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$
$$\ln|z| = -2\frac{(1-t)^2}{2} + C \iff z = u \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big),\ u \in \mathbb{R}$$

Вариация постоянной:

$$\begin{cases} z = u \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) \\ \dot{z} = \dot{u}\exp\big(-(1-t)^2\big) + 2u \cdot (1-t) \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) \end{cases}$$
$$\dot{u}\exp\big(-(1-t)^2\big) + 2u \cdot (1-t) \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) + 2(t-1) \cdot u \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) = 1$$
$$\dot{u}\exp\big(-(1-t)^2\big) = 1 \iff \dot{u} = \exp\big((1-t)^2\big) \iff u = \int \exp\big((1-t)^2\big)$$

Осталось подставить выражение для z и получить общее решение:

$$z = u \cdot \exp\big(-(1-t)^2\big) = \exp\big(-(1-t)^2\big) \cdot \int \exp\big((1-t)^2\big)$$
$$x = 1 - t + \frac{\exp((1-t)^2)}{\displaystyle\int \exp\big((1-t)^2\big)}$$

Пример №8

$$3\dot{x} + x^2 + \frac{2}{t^2} = 0$$

Здесь частное решение находится также весьма просто:

$$-3\dot{x}_1 = x_1^2 + \frac{2}{t^2} \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{t}$$

В сумму (опять инвертируем, помня про нулевое решение):

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{z} \\ \dot{x} = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{\dot{z}}{z^2} \end{cases}$$

Теперь подставим всё в диффур от z, заменив нужные функции от t:

$$3\dot{x} + x^2 + \frac{2}{t^2} = 0 \iff \dot{x} + \frac{1}{3}x^2 + 0 \cdot x + \frac{2}{t^2} = 0$$
$$\dot{z} - \frac{2}{3t} \cdot z = \frac{1}{3}$$

Решаем как однородное:

$$\dot{z} = \frac{2}{3t}z \iff \frac{\mathsf{d}z}{z} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathsf{d}t}{t} \Longrightarrow \int = \int$$
$$\ln|z| = \frac{2}{3} \cdot \ln|t| + C \iff z = u \cdot t^{\frac{2}{3}},\ u \in \mathbb{R}$$

Варьируем:

$$\begin{cases} z = u \cdot t^{\frac{2}{3}} \\ \dot{z} = \dot{u}t^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot t^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$
$$\dot{u}t^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot u \cdot t^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3t} \cdot u \cdot t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$
$$\dot{u}t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \iff \dot{u} = \frac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}} \iff u = t^{\frac{1}{3}} + C$$

Теперь можем получить общее решение:

$$z = u \cdot t^{\frac{2}{3}} = \left(t^{\frac{1}{3}} + C\right) \cdot t^{\frac{2}{3}} = t + Ct^{\frac{2}{3}}$$
$$x = \frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t + Ct^{\frac{2}{3}}}$$

Два частных решения

Пусть теперь известны два частных решения уравнения Риккати: $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$. Мы знаем, что для первого решения выполнено тождество:

$$\dot{x}_1 + a(t)x_1^2 + b(t)x_1 + c(t) = 0$$

Проделаем то же представление:

$$\begin{cases} x = x_1 + z \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{z} \end{cases}$$
$$\dot{x}_1 + \dot{z} + a(t)\left(x_1^2 + 2x_1z + z^2\right) + b(t)(x_1 + z) + c(t) = 0$$
$$\dot{z} + \left(2a(t)x_1 + b(t)\right) \cdot z = -a(t)z^2$$

Теперь же сделаем хитрость: поделим на z и подставим вместо него $x - x_1$:

$$\frac{\dot{z}}{z} + 2a(t)x_1 + b(t) = -a(t)z$$
$$\frac{1}{x - x_1} \cdot \frac{\mathsf{d}(x - x_1)}{\mathsf{d}t} + 2a(t)x_1 + b(t) = -a(t)x + a(t)x_1$$
$$\frac{1}{x - x_1} \cdot \frac{\mathsf{d}(x - x_1)}{\mathsf{d}t} = -a(t) \cdot \left(x + x_1\right) - b(t)$$

Теперь делаем грязь: заносим дробь в левой части уравнения под дифференциал:

$$\frac{1}{x - x_1}\mathsf{d}(x - x_1) = \mathsf{d}\ln\left(x - x_1\right)$$

Тогда:

$$\frac{\mathsf{d}\ln\big(x-x_1\big)}{\mathsf{d}t} = -a(t)\cdot\big(x+x_1\big) - b(t)$$

Для второго частного решения также выполнено тождество:

$$\dot{x}_2 + a(t)x_2^2 + b(t)x_2 + c(t) = 0$$

Откуда мы аналогичным (грязным) способом получаем:

$$\frac{\mathsf{d}\ln\big(x-x_2\big)}{\mathsf{d}t} = -a(t)\cdot\big(x+x_2\big) - b(t)$$

А теперь совсем отвратительно поступим: вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathsf{d}\ln\big(x-x_1\big)}{\mathsf{d}t} = -a(t)\cdot\big(x+x_1\big) - b(t) \\ \dfrac{\mathsf{d}\ln\big(x-x_2\big)}{\mathsf{d}t} = -a(t)\cdot\big(x+x_2\big) - b(t) \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathsf{d}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2}}{\mathsf{d}t} = a(t)\cdot(x_2-x_1)$$

— но ведь это диффур с разделяющимися переменными! Из него получаем уравнение, задающее $x = x(t)$ неявно через частные решения:

$$\frac{\mathsf{d}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2}}{\mathsf{d}t} = a(t)\cdot(x_2-x_1)$$

$$\mathsf{d}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2} = a(t)\cdot(x_2-x_1)\mathsf{d}t \Longrightarrow \int = \int$$

$$\ln\frac{x-x_1}{x-x_2} + C = \int a(t)\cdot(x_2-x_1)\mathsf{d}t$$

$$\frac{x-x_1}{x-x_2} = \lambda\cdot\exp\bigg(\int a(t)\cdot(x_2-x_1)\mathsf{d}t\bigg),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Конечно, не всегда бывает возможно угадать сразу два частных решения, однако если вам так повезло, то можно захотеть выпендриться и задать ответ формулой выше.

Пример № 9

$$\dot{x} = \frac{k^2}{t^2} - x^2,\ k\in\mathbb{R}$$

Частные решения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{t} + \dfrac{k}{t^2} \\ x_2 = \dfrac{1}{t} - \dfrac{k}{t^2} \end{cases}$$

Тогда можем сразу получить общее решение:

$$\frac{x-\frac{1}{t}-\frac{k}{t^2}}{x-\frac{1}{t}+\frac{k}{t^2}} = \lambda\cdot\exp\bigg(\int -\frac{2k}{t^2}\mathsf{d}t\bigg)$$

$$\frac{xt^2-x-k}{xt^2-x+k} = \lambda\cdot\exp\bigg(\frac{2k}{x}\bigg)$$

Кому интересно, может попробовать решить этот диффур по-старинке. Авось что покрасивше выйдет. Или нет.

Домашнее задание №3

Задача №1. *Решить диффур:*

$$(tx + e^t)\mathsf{d}t - t\mathsf{d}x = 0$$

Задача №2. *Решить диффур:*

$$t\dot{x} = x - t \cdot \exp\left(\frac{x}{t}\right)$$

Задача №3. *Решить диффур:*

$$t\dot{x} - 2t^2 \cdot \sqrt{x} = 4x$$

Задача №4. *Решить диффур:*

$$t^2\dot{x} + tx + t^2x^2 = 4$$

Задача №5. *Пусть x_1, x_2 – независимые частные решения линейного диффура 1 порядка:*

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Найти общее решение (выразить через x_1 и x_2).

Common Tasks

1. Найти все гладкие функции $x(t)$ такие, что для любой точки $t_0 \in \mathbb{R}$ касательная к $x(t)$ в точке $\big(t_0,\, x(t_0)\big)$ пересекает ось абсцисс в точке $\dfrac{t_0}{2}$.

2. Найти дифференциальное уравнение первого порядка, задающее на плоскости семейство парабол $x = at^2 + bt + c$, проходящих через точку (0,1) и касающихся прямой $x = t$.

3. Решить диффур:
$$\frac{t}{x}\dot{x} = \ln x - \ln t + 1$$

4. Решить задачу Коши:
$$\dot{x} = \frac{1}{2x} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{t}\right) + \frac{x}{2t},\ \text{ начальное условие: } x(1) = 1$$

5. Решить диффур:
$$(t+1)(x\dot{x} - 1) = x^2$$

6. Решить задачу Коши:
$$\dot{x} - 2tx + x^2 = 5 - t^2, \quad \text{начальное условие: } x(0) = 0$$