

# Дифференциальные Уравнения

## Семинарские занятия

Вадим Гринберг  
по семинарам Войнова А. С.

### Содержание

<b>1 Семинар 1, 10 января</b>	<b>2</b>
1.1 Общие факты . . . . .	2
1.2 Изоклины . . . . .	3
1.3 Диффуры с разделяющимися переменными . . . . .	5
1.4 $n$ -параметрическое семейство кривых . . . . .	6
1.5 Замена переменных . . . . .	7
1.5.1 Линейная замена . . . . .	7
1.5.2 Общий вид . . . . .	7
1.6 Домашнее задание №1 . . . . .	8
<b>2 Семинар 2, 17 января</b>	<b>9</b>
2.1 Специальные замены. Однородные уравнения. . . . .	9
2.2 Однородные уравнения: $y = \frac{x}{t}$ . . . . .	9
2.3 Однородные уравнения: дробно-линейный вид . . . . .	10
2.4 Однородные уравнения: $x = y^m$ . . . . .	12
2.5 Домашнее задание №2 . . . . .	13
<b>3 Common Tasks</b>	<b>14</b>

# Семинар 1, 10 января

## Общие факты

Пусть у нас имеется функция  $x(t)$  (вообще говоря, вектор-функция  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ) от переменной  $t \in \mathbb{R}$ , действующая из интервала  $(a, b)$  (по умолчанию считаем всей числовой прямой), такая, что для переменной  $t$ , функции  $x(t)$  и  $n$  её первых производных выполнено уравнение:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

— это и есть дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка.  $F$  в данном случае, грубо говоря, «функция от  $n + 1$  переменной», которая неявно задаёт  $x(t)$  (за точным определением — на лекцию).

**Решить диффур** означает найти такую функцию  $x(t)$ , что выполняется вышеуказанное равенство.

Тупой пример:  $\dot{x}(t) = x(t)$ . Функция совпадает со своей производной. Решением, очевидно, будет  $x(t) = \lambda \cdot e^t$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

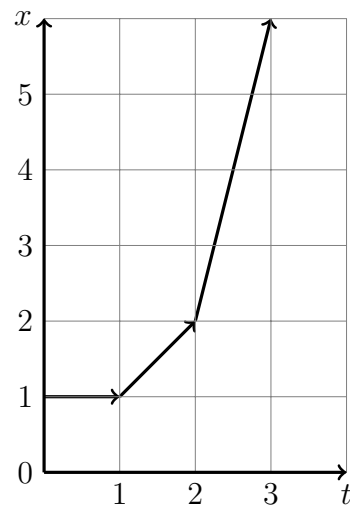
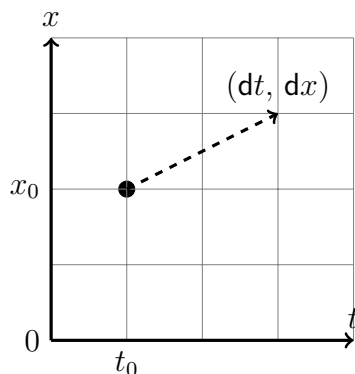
Любой диффур можно привести к удобоваримому виду:

$$\dot{x}(t) = f(t, x)$$

где  $f$  — некая хорошая функция (доказательство на лекции). С такими диффурами мы в основном и будем иметь дело.

Разберёмся, а как вообще можно решать диффуры. Пусть у нас имеется диффур  $\dot{x} = f(t, x)$ , который мы хотим решить. Попробуем приблизить график нашей кривой  $x(t)$  некоей ломаной линией. Возьмём какую-то начальную точку  $(t_0, x_0)$ , и будем смотреть на направление движения, то бишь на направление вектора  $(dt, dx)$ . Будем делать маленькие шаги вдоль этого направления. Тогда каждый раз, находясь в точке  $(t, x)$ , мы будем переходить в точку  $(t + dt, x + dx)$ .

После многих таких шагов мы получим ломаную линию, приближающую график нашей кривой  $x(t)$ . Эта ломаная называется **Ломаной Эйлера**.



Для удобства можно делать шаг  $dt$  всегда равным 1, поделив вектор направления на  $dt$ . Тогда соответственно шаг  $dx$  станет  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x)$ , и вектор направления в точке  $(t, x)$  будет иметь вид  $(1, f(t, x))$ .

Пример:  $\dot{x} = tx$ . Построим Ломаную Эйлера, стартуя из точки  $(t_0, x_0) = (0, 1)$ :

$$1. \ t = 0, \ x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 0) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (1, 1)$$

2.  $t = 1, x = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 1) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (2, 2)$
3.  $t = 2, x = 2 \Rightarrow \dot{x} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow (1, f(t, x)) = (1, 4) \Rightarrow (t + dt, x + dx) = (3, 6)$
4. ....

## Изоклины

**Определение 1.** Пусть у нас есть диффура  $\dot{x} = f(t, x)$ .

**Интегральная кривая** — график функции  $x(t)$  — решения диффура. Тогда  $\dot{x}$  — это угловой коэффициент интегральной кривой в точке  $(t, x(t))$ , то бишь тангенс угла наклона касательной к  $x(t)$  в данной точке.

**Изоклина** — геометрическое место точек плоскости, в которых одно и то же направление движения (направление касательных), то есть, угол наклона вектора  $(dt, dx)$  один и тот же для любой точки  $(t, x)$  изоклины. Иными словами,  $\dot{x} = \text{const}$ .

**Изолиния поля** — подмножество точек изоклины (являющееся линией), в которых вектор  $(dt, dx)$  один и тот же для любой точки  $(t, x)$  изолинии. То есть, вектор  $(dt, dx) \sim (1, f(t, x)) = \text{const}$ . Для каждой изолинии константа своя.

Семейство изоклин определяется уравнением

$$\dot{x} = k = f(t, x)$$

где  $k$  — параметр. Придавая параметру  $k$  близкие значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

Для примера выше изоклинами будут являться множества  $\left\{ xt = k \iff x = \frac{k}{t}, k \in \mathbb{R} \right\}$  — гиперболы.

Научимся находить приближённые решения диффура, строя интегральную кривую при помощи изоклин. Стоит отметить сразу же, что **нулевая изоклина**  $f(t, x) = 0$  даёт уравнение линий, на которых могут находиться точки максимума и минимума интегральных кривых.

Для большей точности построения интегральных кривых хорошо находить ГМТ точек перегиба, исследуя вторую производную  $\ddot{x}$  при помощи уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{df}{dt} + \frac{df}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{df}{dt} + f(t, x) \cdot \frac{df}{dx} = 0$$

Линия, определяемая данным уравнением, и есть возможное ГМТ точек перегиба.

### Пример №1

Изоклинами найти приближённое решение диффура

$$\dot{x} = 2t - x$$

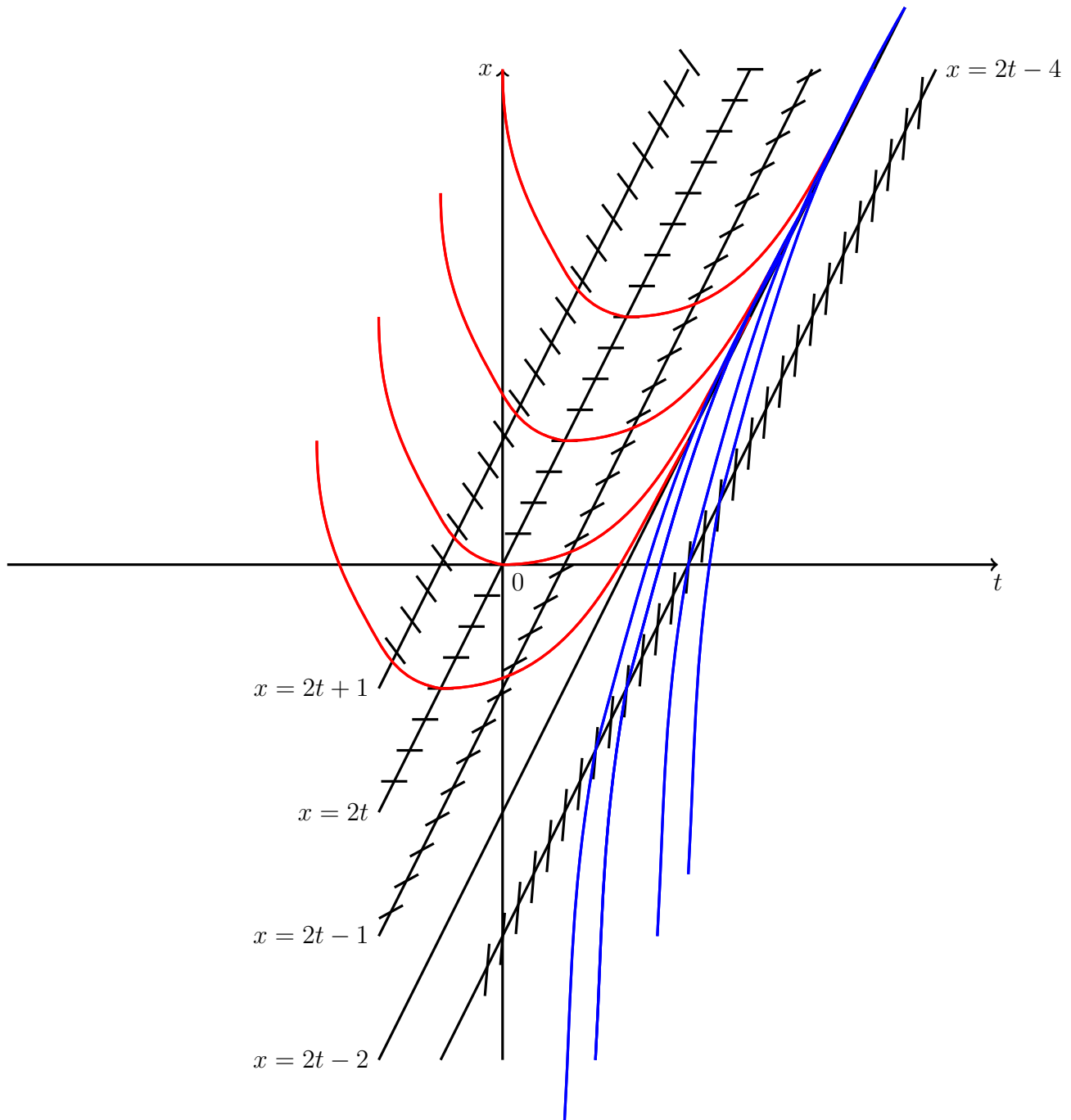
Для получения изоклин положим  $\dot{x} = \text{const} = k$ , откуда:

$$2t - x = k \iff x = 2t - k$$

— параллельные прямые.

Пусть  $k = 0$ , тогда получим изоклину  $x = 2t$  — эта прямая делит плоскость на две части, в каждой из которых производная  $\dot{x}$  имеет один и тот же знак — интегральные кривые, пересекая  $x = 2t$ , из области убывания  $x(t)$  переходят в область возрастания. Отсюда получаем, что на данной прямой лежат точки минимума.

Возьмём ещё две изоклины:  $x = 2t + 1, k = -1$  и  $x = 2t - 1, k = 1$ . Изобразим их на графике. Касательные, проведённые к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами  $k = -1, k = 0$  и  $k = 1$  образуют с осью абсцисс углы в 135, 0 и 45 градусов соответственно. На графике направление показано чёрточками.



Вторая производная:  $\ddot{x} = 2 - \dot{x} = 2 - 2t + x$ .

Рассмотрим прямую  $x = 2t - 2$ , на которой  $\ddot{x} = 0$ . Это изоклина при  $k = 2$ . Заметим, что в таком случае угол наклона касательной равен углу наклона самой изоклины. Значит, ни одна интегральная кривая не будет пересекать эту изоклину, но при этом они будут к ней стремиться на бесконечности.

Прямая  $x = 2t - 2$  делит плоскость на две части, в одной из которых (над прямой)  $\ddot{x} > 0$ , а значит, интегральные кривые выпуклы вниз, а в другой  $\ddot{x} < 0$ , и интегральные кривые выпуклы вверх. Кроме того, поскольку точки минимума расположены над этой прямой, то интегральные кривые, проходящие ниже изоклины  $x = 2t - 2$  не имеют точек экстремума.

Рассмотрим также изоклину  $x = 2t - 4$ ,  $k = 4$ . В данном случае угол наклона касательной будет равен 75 градусов. При этом интегральные кривые будут также стремиться к  $x = 2t - 2$ , но являясь выпуклыми вверх. Тем самым мы получили другое семейство решений диффура.

На графике выше изображены интегральные кривые, приближающие  $x(t)$ , полученные в соответствии с проведённым исследованием. Как видим, в точках пересечения с изоклинами кривые параллельны направлению касательных в точках пересечения.

## Диффуры с разделяющимися переменными

Это суть дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{a(t)}{b(x)}$$

В данном случае стоит быть осторожным и проверять вырожденные случаи ( $b(x) = 0$ ,  $a(t) = 0$ , чтобы нечаянно не убить некоторые решения).

Проверив особые случаи, перемножим крест-накрест и получим:

$$b(x)dx = a(t)dt$$

$\int$  теперь интегрируем каждую часть независимо от другой  $\int$

$B(x) = A(t) + C$  — это и будет решением диффура

### Пример №2

$$\dot{x} = tx$$

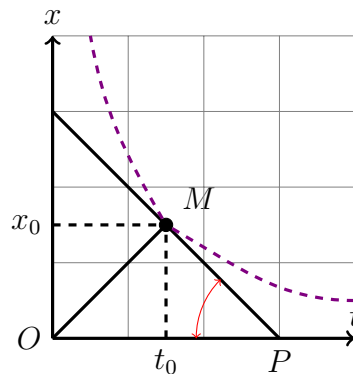
$$\dot{x} = tx = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{x} = t \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int t \cdot dt$$

$$\ln |x| = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow |x| = e^{\frac{t^2}{2} + C} = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^C}_{\text{какая-то константа}} \Rightarrow |x| = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda > 0 \Rightarrow x = \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

В последних двух действиях мы взяли экспоненту от обеих частей и избавились от модуля.

### Пример №3

Найдите кривую  $x(t)$ , такую, что для любой  $t_0 \in \mathbb{R}$  отрезки, соединяющую точку касания  $(t_0, x(t_0))$  с точками пересечения касательной в данной точке с осями координат, будут равны.



Пусть мы касаемся нашей кривой  $x(t)$  в точке  $(t_0, x_0)$  — обозначим её  $M$ . Можно заметить, что тогда  $OM$  — медиана. Отсюда следует, что координаты точек пересечения с осями абсцисс и ординат равны соответственно  $(2t_0, 0)$  и  $(0, 2x_0)$ . Тогда тангенс угла наклона касательной  $\tan \angle MPO = -\frac{2x_0}{2t_0} = -\frac{x_0}{t_0} = \dot{x}(t_0)$ , так как тангенс угла наклона касательной к функции  $x(t)$  в точке  $t_0$  есть не что иное, как производная  $x(t) - \dot{x}(t)$  — в данной точке. Таким образом, мы получили диффуры:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Решим его, тем самым найдя  $x(t)$ .

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int = \int$$
$$-\ln |x| = \ln |t| + C \Rightarrow \frac{1}{|x|} = |t| \cdot \lambda, \lambda > 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R}$$

### Пример №4

$$xt + (t+1) \cdot \dot{x} = 0 \implies xt + (t+1) \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -\frac{xt}{t+1} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{t \cdot dt}{t+1} \implies \int = \int$$

Возьмём правый интеграл.

$$\int \frac{t \cdot dt}{t+1} = \int 1 - \frac{1}{t+1} dt = t - \ln |t+1|$$

Тогда:

$$-\ln|x| = t - \ln|t+1| + C \implies \frac{1}{|x|} = \lambda \cdot \frac{e^t}{t+1}, \lambda > 0 \implies x = \lambda \cdot e^{-t} \cdot (t+1), \lambda \in \mathbb{R}$$

# $n$ -параметрическое семейство кривых

Это система дифференциальных уравнений вида:

[illegible]

– всего  $n + 1$  уравнение, константы  $c_1, \dots, c_n$  неизвестны. Необходимо, как и раньше, найти подходящую  $x(t)$ .

Метод решения таков: сначала мы выражаем константы  $c_1, \dots, c_n$  через  $t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ , и потом подставляем всё в одно уравнение, тем самым получая диффур вида:

$$G(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

который мы умеем решать.

### Пример №5

Необходимо найти диффур, задающий множество окружностей, касающихся оси абсцисс.

Чего делать, сходу и не вдуплишь, да?) Однако, выход есть — если видим слово "окружность" нужно тут же писать её уравнение.

Пусть у нас есть окружность радиуса  $R$ , касающаяся оси абсцисс в точке  $t_0$ . Тогда выполнено тождество:

$$(x - R)^2 + (t - t_0)^2 = R^2$$

В данном случае  $R$  и  $t_0$  и есть наши неизвестные константы. Составим систему уравнений из производных:

$$\begin{cases} (x-R)^2 + (t-t_0)^2 - R^2 = 0 \\ (2x \cdot \dot{x} - 2R \cdot \dot{x}) + 2t - 2t_0 = 0 \\ 2(\dot{x})^2 + 2x \cdot \ddot{x} - 2R \cdot \ddot{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

Осталось выразить  $R$  через  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  из последнего уравнения, подставить во второе и выразить  $t_0$ , после чего загнать всё в первое уравнение и получить нужный диффур.

## Замена переменных

Разберём на примере. Пускай у нас есть диффур

$$\dot{x} = x - \sqrt{x}$$

Решать его в таком виде не очень приятно. Поэтому сделаем замену переменных (название – сущая формальность, так как вообще говоря мы заменяем одну функцию на другую, а не переменную):

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

Тогда диффур примет вид:

$$2\dot{y} \cdot y = y^2 - y \implies 2\dot{y} = y - 1 \implies \frac{2dy}{y-1} = dt$$

— получили простое уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим ещё несколько примеров замен.

### Линейная замена

Пускай у нас есть диффур вида:

$$\dot{x} = f(at + bx)$$

Можно сделать замену  $u = at + bx$ , получив уравнение  $\dot{x} = f(u)$ . Решим этот диффур относительно переменной  $u$ , получив функцию  $x(u)$ , после чего, сделав обратную замену, выразить искомую  $x(t)$ .

$$\begin{aligned} u &= at + bx \\ du &= a \cdot dt + b \cdot dx \implies dt = \frac{du - b \cdot dx}{a} \\ \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{a \cdot dx}{du - b \cdot dx} = f(u) \\ a \cdot dx &= f(u)du - b \cdot f(u)dx \implies (a + b \cdot f(u))dx = f(u)du \\ dx &= \frac{f(u)}{a + b \cdot f(u)} du \end{aligned}$$

После этих махинаций всё легко решается как уравнение с разделяющимися переменными.

#### Пример №6

$$\dot{x} = \cos(x - t)$$

Ну тут совсем толсто:  $u = x - t$ . В данном случае  $a = -1$ ,  $b = 1$ . По формуле выше:

$$dx = \frac{\cos u}{\cos u - 1} du$$

Теперь интегрируем, получаем  $x(u)$  и делаем обратную замену.

### Общий вид

Пускай у нас есть диффур:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Можно сделать замену  $u = \varphi(t, x)$ , получив новое уравнение (весьма удачно, если получится диффур вида  $\dot{u} = f(t, u)$ , но такое бывает далеко не всегда). Решаем его и делаем обратную замену, получая  $x(t)$ .

### Пример №7

$$\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x$$

Здесь можно сделать замену  $u = xt$ , откуда  $\dot{u} = \dot{x} \cdot t + x \cdot 1$ . Подставим:

$$\begin{aligned}\dot{x} \cdot t = 2x^2 \cdot t^3 - x &\iff \dot{x} \cdot t + x = 2x^2 \cdot t^3 \implies \dot{u} = 2u^2 \cdot t \\ \frac{du}{dt} = 2u^2 \cdot t &\implies \frac{du}{u^2} = 2t \cdot dt \implies \int = \int \\ -\frac{1}{u} = t^2 + C &\implies u = -\frac{1}{t^2 + C}\end{aligned}$$

Делаем обратную замену и выражаем  $x(t)$ :

$$u = xt \implies xt = -\frac{1}{t^2 + C} \implies x = -\frac{1}{t^3 + Ct}$$

### Домашнее задание №1

**Задача №1.** Найти все кривые  $x(t)$ , такие, что длина отрезка, соединяющего точку касания и точку пересечения касательной в данной точке с одной из осей, была постоянной.

Решение.

□

**Задача №2.** Придумать диффур 1 порядка, не обладающий решением на всей прямой. То бишь, не для всех  $t$  решение  $\dot{x} = f(t, x)$  должно существовать.

Решение.

□

**Задача №3.** Решите диффур:

$$(t^2 - 1) \cdot \dot{x} + 2tx^2 = 0, \text{ начальное условие: } x(0) = 1$$

Решение.

□

**Задача №4.** Изоклинами найти приближённое решение:

$$\dot{x} = \frac{x}{t + x}$$

Также изобразите изоклины на графике и покажите все различные (с точностью до топологии и асимптотики) решения (то есть, как рассмотрено выше в примере).

Решение.

□

**Задача №5.** Придумайте (вообще говоря, найдите) диффур 1 порядка, задающий множество прямых, являющихся касательными к единичной окружности с центром в нуле.

Решение.

□



## Семинар 2, 17 января

### Специальные замены. Однородные уравнения.

**Определение 2.** Функцию  $g(t, x)$  назовём **однородной**, если

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : g(\lambda t, \lambda x) = \lambda \cdot g(t, x)$$

Функции  $M(t, x)$  и  $N(t, x)$  – **одинаково однородны**, если

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : M(\lambda t, \lambda x) = \lambda \cdot M(t, x) \iff N(\lambda t, \lambda x) = \lambda \cdot N(t, x)$$

**Определение 3.** **Однородное дифференциальное уравнение** – это диффуз вида

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$$

где функции  $M$  и  $N$  – одинаково однородны.

Решать такие диффуры можно путём сведения к уравнению с разделяющимися переменными при помощи различных замен. О них, а также о том, как сводить иные уравнения к однородным, мы и поговорим.

**Однородные уравнения:**  $y = \frac{x}{t}$

Пускай у нас имеется диффуз вида:

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Оно уже однородное. Мы хотим привести его к уравнению с разделяющимися переменными. Следующая замена позволит нам это сделать:  $y = \frac{x}{t}$ :

$$y = \frac{x}{t} \implies x = y \cdot t \implies dx = ydt + tdy$$

– подставляем в однородное уравнение и решаем, находя  $y(t)$ . После этого обратная замена.

#### Пример №1

$$tdx = (x + t)dt$$

Данное уравнение уже является однородным. Преобразуем его и сделаем вышеуказанную замену (предварительно рассмотрев вырожденные случаи):

$$\begin{aligned} tdx = (x + t)dt &\iff dx = \frac{x}{t} + dt, y = \frac{x}{t} \\ (ydt + tdy) &= (y + 1)dt \\ tdy = dt &\implies dy = \frac{dt}{t} \implies \int = \int \end{aligned}$$

Осталось проинтегрировать, получить  $y(t)$  и подставить  $y = \frac{x}{t}$ .

#### Пример №2

$$x^2 + \dot{x}t^2 = tx\dot{x}$$

Помня, что  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , преобразуем диффур и сделаем ту же замену.

$$\begin{aligned}x^2 + \dot{x}t^2 &= tx\dot{x} \iff x^2 dt = (tx - t^2)dx, \quad y = \frac{x}{t} \\y^2 t^2 dt &= t^2(y - 1)(ydt + tdy) \\y^2 dt &= y^2 dt + ytdy - ydt - tdy \\ydt &= t(y - 1)dy \iff \frac{dt}{t} = \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy \\ \ln |t| &= y - \ln |y| + C\end{aligned}$$

Теперь удобно делать обратную замену:

$$\ln |yt| = y + C \iff \ln |x| = \frac{x}{t} + C$$

и преобразовать получившееся выражение до вида  $x = x(t)$ .

### Пример №3

$$t\dot{x} = x - t \cdot \exp\left(\frac{x}{t}\right)$$

— здесь руки сами просят поделить на  $t$  ( $t \neq 0$ , так как иначе уравнение не определено):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x}{t} - \exp\left(\frac{x}{t}\right), \quad y = \frac{x}{t} \\ \frac{ydt + tdy}{dt} &= y - e^y \implies \frac{tdy}{dt} = -e^y \\ \frac{dy}{e^y} &= -\frac{dt}{t} \implies \int = \int \\ e^{-y} &= -\ln |t| + C\end{aligned}$$

— далее обратная замена.

## Однородные уравнения: дробно-линейный вид

Пускай мы имеем диффур вида:

$$\dot{x} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right), \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ясно, что числитель и знаменатель суть уравнения прямых на координатной плоскости. Мы можем преобразовать уравнения такого типа к только что рассмотренным  $\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$ , если перенесём систему координат в точку пересечения данных прямых.

Теперь подробнее о методе. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \end{cases}$$

— решением данной системы будет точка пересечения двух прямых  $(t^*, x^*)$ . Теперь перенесём систему координат в данную точку, произведя замену:

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t - t^* \\ \tilde{x} &= x - x^*\end{aligned}$$

— теперь, произведя простые преобразования, получаем однородный диффур  $(\dot{\tilde{x}}) = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$ . Решив его, осталось провести обратную замену, прибавив соответствующие константы.

Здесь стоит обговорить случай, когда выражения в числителе и знаменателе задают параллельные прямые, то есть:

$$\dot{x} = f\left(\frac{at + bx + c_1}{at + bx + c_2}\right)$$

— отличаются только на свободный член, ибо  $c_2 = c_1 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . В данном случае уравнение тривиально сводится к уравнению вида  $\dot{x} = \tilde{f}(at + bx)$ , которое мы умеем решать, линейной заменой сводя к диффуру с разделяющимися переменными.

#### Пример №4

$$(x + 2)dt = (2t + x - 4)dx$$

Перезапишем в дробно-линейном виде:

$$\dot{x} = \frac{x + 2}{2t + x - 4}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2t + x - 4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + 2 \\ \tilde{t} = t - 3 \end{cases} \implies \frac{dx}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{x}}{2\tilde{t} + \tilde{x}}$$

— осталось решить его как уравнение с разделяющимися переменными.

#### Пример №5

$$\dot{x} = \frac{5t - x - 3}{3t + 2x - 7}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 5t - x - 3 = 0 \\ 3t + 2x - 7 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Делаем замену, получая однородное уравнение:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 2 \\ \tilde{t} = t - 1 \end{cases} \implies \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{5\tilde{t} - \tilde{x}}{3\tilde{t} + 2\tilde{x}}$$

Поделим числитель и знаменатель правой части уравнения на  $\tilde{t}$  и положим  $y = \frac{\tilde{t}}{\tilde{x}}$ . Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\tilde{t} \cdot \frac{dy}{d\tilde{t}} = \frac{5 - 4y - 2y^2}{3 + 2y}$$

## Однородные уравнения: $x = y^m$

Пускай мы имеем уравнение

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$$

где функции  $M$  и  $N$  — НЕ одинаково однородные. Однако, мы были бы рады привести его к такому. В этом нам поможет замена  $x = y^m$ , где  $m \in \mathbb{Q}$ .

Идея в том, что у однородного уравнения степени каждого из слагаемых уравнения должны совпадать — тогда при домножении на константу мы сможем её спокойно вынести за функции. Поэтому сначала мы найдём степень  $m$ , после чего будем решать обычное однородное уравнение при помощи известных методов. Разберём на примерах.

### Пример №6

$$2t^4 \cdot x\dot{x} + x^4 = 4t^6$$

— перепишем с дифференциалами:

$$2t^4 \cdot xdx + x^4dt = 4t^6dt$$

Делаем замену:

$$x = y^m \implies dx = m \cdot y^{m-1}dy$$

— получаем уравнение:

$$2t^4 \cdot y^m \cdot m \cdot y^{m-1}dy + y^{4m}dt = 4t^6dt$$

Приравняем степени:

$$3 + 2m = 4m = 6 \implies m = \frac{3}{2}$$

— теперь подставляем и решаем однородный диффур.

### Пример №7

$$\dot{x} = x^2 - \frac{2}{t^2}$$

Перепишем с дифференциалами и сделаем замену  $x = y^m$ :

$$t^2dx = x^2t^2dt - 2dt$$

$$x = y^m, dx = m \cdot y^{m-1}dy$$

$$m \cdot t^2 \cdot y^{m-1}dy = y^{2m} \cdot t^2dt - 2dt$$

Ищем степень:

$$2 + m - 1 = 2m + 2 = 0 \implies m = -1$$

Тогда:

$$-t^2 \cdot y^{-2}dy = y^{-2} \cdot t^2dt - 2dt$$

$$-t^2dy = t^2dt - 2y^2dt$$

Получили однородное уравнение, которое решается классически:  $z = \frac{y}{t}$ :

$$z = \frac{y}{t}, y = zt, dy = t dz + z dt$$

$$-t^2(t dz + z dt) = t^2dt - 2z^2t^2dt$$

$$-tdz - zdt = dt - 2z^2dt$$

$$tdz = (2z^2 - z - 1)dt$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dz}{2z^2 - z - 1} \Rightarrow \int = \int$$

— находим решение  $z = z(t)$ , после чего производим череду обратных замен, находя  $x = x(t)$ .

## Домашнее задание №2

**Задача №1.** Решить диффур:

$$\dot{x} = 2 \cdot \left( \frac{x+2}{x+t-1} \right)^2$$

**Задача №2.** Решить диффур:

$$\dot{x} = \frac{x+2}{t+1} + \tan\left(\frac{x-2t}{t+1}\right)$$

**Задача №3.** Решить диффур:

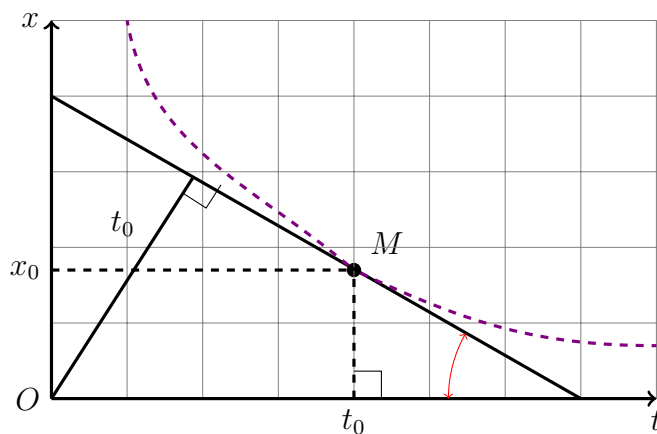
$$2x + (xt^2 + 1) \cdot t\dot{x}$$

**Задача №4.** Найти все такие  $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$ , такие, что дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = at^\alpha + bx^\beta$$

*сводится к линейному.*

**Задача №5.** Найдите все кривые  $x(t)$ , такие, что расстояние от начала координат до касательной к  $x(t)$  в любой точке  $(t_0, x(t_0))$  совпадает с абсциссой данной точки (равно  $t_0$ ):



## Common Tasks

1. Найти такую кривую  $x(t)$ , что для любой  $t_0 \in \mathbb{R}$  касательная к  $x(t)$  в точке  $(t_0, x(t_0))$  пересекает ось абсцисс в точке  $\frac{t_0}{2}$ .
2. Найти дифференциальное уравнение первого порядка, задающее на плоскости семейство парабол  $x = at^2 + bt + c$ , проходящих через точку  $(0,1)$  и касающихся прямой  $x = t$ .

3. Решить диффур:

$$\frac{t}{x}\dot{x} = \ln x - \ln t + 1$$

4. Решить задачу Коши:

$$\dot{x} = \frac{1}{2x} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{t}\right) + \frac{x}{2t}, \quad \text{начальное условие: } x(1) = 1$$