Лекция 14 от 17.01.2017
Метрические, нормированные и евклидовы пространства

Метрические пространства

Определение 1. *Метрическое пространство это упорядоченная пара (M, ρ), где M — непустое множество, а $\rho\colon\ M \times M \to \mathbb{R}$ — функция, называемая метрикой, которая удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $\forall x, y \in M\ \ \rho(x, y) \geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in M\ \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\forall x, y, z \in M\ \ \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Пример 1. *Дискретная метрика («метрика ленивого человека»):*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Часто, когда говорят о метрических пространствах, называют только множество M, считая, что метрика подразумевается.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек метрического пространства M.

Определение 2. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $x \in M$, *если* $\rho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *или, что эквивалентно,*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Утверждение 1. *Если* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *и* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{x}$, *то* $x = \widetilde{x}$.

Доказательство. Вспомним, что $\rho(x, \widetilde{x}) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, \widetilde{x})$. Тогда при $n \to \infty$ получаем, что $0 \leqslant \rho(x, \widetilde{x}) \leqslant 0$, то есть $\rho(x, \widetilde{x}) = 0$, что и означает их равенство. $\square$

В силу определения метрики, никаких арифметических свойств предела тут не может быть («это как складывать или делить стулья»).

А вот признак Коши есть.

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства называется фундаментальной (последовательностью Коши, удовлетворяющей условию Коши), если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N\ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Хочется сказать как обычно: последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальная. Но вот проблема — это неверное утверждение. Несложный контрпример: $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $x_n = 1/n$. Эта последовательность вроде как должна сходиться к нулю, вот только его нет в нашем пространстве, так что в итоге последовательность не сходится.

Но признак Коши крайне важная вещь, без него ломается куча теорем, поэтому хочется его все-таки иметь. Для этого наложим дополнительное требование на наши метрические пространства.

Определение 4. *Метрическое пространство называется полным, если в нем каждая последовательность Коши имеет предел.*

Теорема 1 (Критерий Коши)**.** *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек полного метрического пространства сходится тогда и только тогда, когда эта последовательность фундаментальна.*

Доказательство. В одну сторону доказывается как всегда, через $\varepsilon/2$, а во вторую прямо следует из определения полного метрического пространства. □

Замечание 1. *Шутки ради. Из теоремы Бэра можно получить следствие, которое с точки зрения русского языка звучит прекрасно: полное пространство не может быть тощим.*

Шары в метрическом пространстве

В метрическом пространстве естественным образом возникают фигуры.

Определение 5.

1. *Открытый шар:* $B_r(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) < r\}$.
2. *Закрытый шар:* $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) \leqslant r\}$.

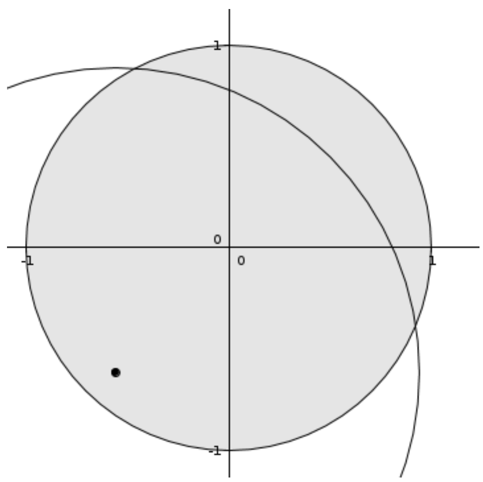
Вообще говоря, эти шары совершенно не обязательно должны быть как-то похожи на шары в привычном нам понимании. В качестве иллюстрации приведем два примера.

Пример 2. *Пусть* $M = \mathbb{N}$. *Рассмотрим две метрики:* $\rho(m, n) = 1 + \dfrac{1}{\min(n, m)}$ *и* $\widetilde{\rho}(m, n) = 1 + \dfrac{1}{\max(n, m)}$, *если* $n \neq m$, *иначе 0. Это действительно метрики, как несложно убедиться.*

Рассмотрим закрытый шар $\overline{B}_{1+1/n}(n)$. *В метрике* ρ *он задает множество* $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$, *а в метрике* $\widetilde{\rho}$ *— все* $\mathbb{N}$.

Пример 3. *А может ли шар большего радиуса строго включаться в шар меньшего радиуса? Да, причем это даже довольно несложно нарисовать.*

Пусть M *это шар единичного радиуса в пространстве* $\mathbb{R}^2$. *Возьмем точку, близкую к окружности, и построим шар радиуса 1.5 с центром в этой точке. Он не влезет полностью в наше пространство, за счет чего мы и получим строгое включение его в шар меньшего радиуса.*



Заштрихованная часть соответствует множеству M

Нормированные пространства

Все это конечно замечательно, но хочется, чтобы метрика как-то согласовывалась с пространством, а то как-то неинтересно.

Определение 6. *Нормированное пространство это упорядоченная пара $(L, ||.||)$, где L — линейное пространство, а $||.|| : \ L \to \mathbb{R}$ — функция, называется нормой, которая удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $\forall x \in L \ ||x|| \geqslant 0$, *причем* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in L \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$;
3. $\forall x, y \in L \ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Утверждение 2. *Норма порождает метрику $\rho(x, y) = ||x - y||$. Это действительно метрика, как несложно убедиться, и по умолчанию нормированные пространства рассматриваются как метрические с данной метрикой.*

Замечание 2. *Обратное неверно: не любая метрика порождена какой-то нормой! Например, дискретная метрика.*

И да, нормированные пространства тоже бывают неполными. Здесь, правда, уже не найдется очевидного примера, потому что так просто из линейного пространства одну точку не выколоть. Так что пока верьте на слово.

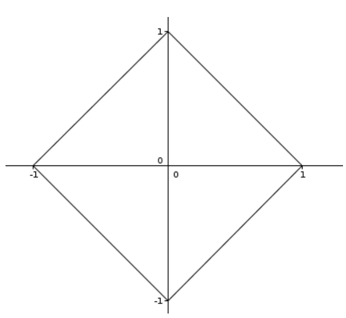
Определение 7. *Полные нормированные пространства называются Банаховыми.*

Нормы бывают какими угодно. Например, в классической декартовой системе, где $v = (x, y)$, обычно рассматривают следующие метрики:

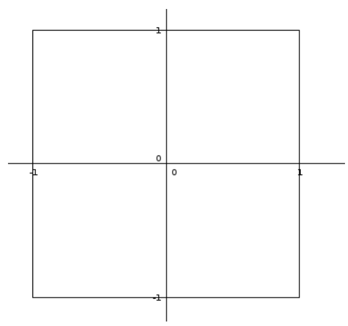
- $||v|| = ||v||_1 = |x| + |y|$ — манхэттенская норма, l_1–норма;
- $||v|| = ||v||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ — l_2–норма;
- $||v|| = ||v||_\infty = \max(|x|, |y|)$ — «бесконечная норма».

Вообще говоря, это частные случаи p–норм: $||v||_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. Но на практике p–нормы, где $p > 2$, не встречаются (за исключением «бесконечной нормы»).

Ниже приведено, как выглядят единичные шары в разных нормах.



Манхэттенская норма



Бесконечная норма

Упражнение 1 (Бонусная задача)**.** *Рассмотрим плоскость, $\mathbb{R}^2$. Константу π можно воспринимать как половину длины единичной окружности: $\pi = l/2$. Но вообще говоря, в зависимости от выбранной нормы, единичная окружность имеет разный вид и, соответственно, длину. Например, в нормированном пространстве с бесконечной нормой $l = 8$, и тогда $\pi = 4$. Как мы видим, константа π разная для разных нормированных пространств над множеством $\mathbb{R}^2$.*

Доказать, что для любой нормы на плоскости $3 \leqslant \pi \leqslant 4$, причем оценка не улучшаема.

Евклидовы пространства

Норма тоже не сама по себе, она порождена скалярным произведением.

Определение 8. *Евклидово пространство это упорядоченная пара $(L, (.,.))$, где L — линейное пространство над $\mathbb{R}$, а $(.,.): \ L \times L \to \mathbb{R}$ — функция, называемая скалярным произведением, которая удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $\forall x \in L \ (x, x) \geqslant 0$, *причем* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x, y \in L \ (x, y) = (y, x)$;
3. $\forall x_1, x_2, y \in L, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$.

Иными словами, это билинейная положительно определенная функция.

Пример 4. $L = C[a, b]$, $(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x$ — *бесконечномерное евклидово пространство.*

Теорема 2 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** *Пусть $(L, (.,.))$ — евклидово пространство. Тогда $\forall x, y \in L$ верно, что $|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.*

Доказательство будет на следующей лекции.

Утверждение 3. *Скалярное произведение задает норму $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Несложно убедиться, что это действительно норма.*