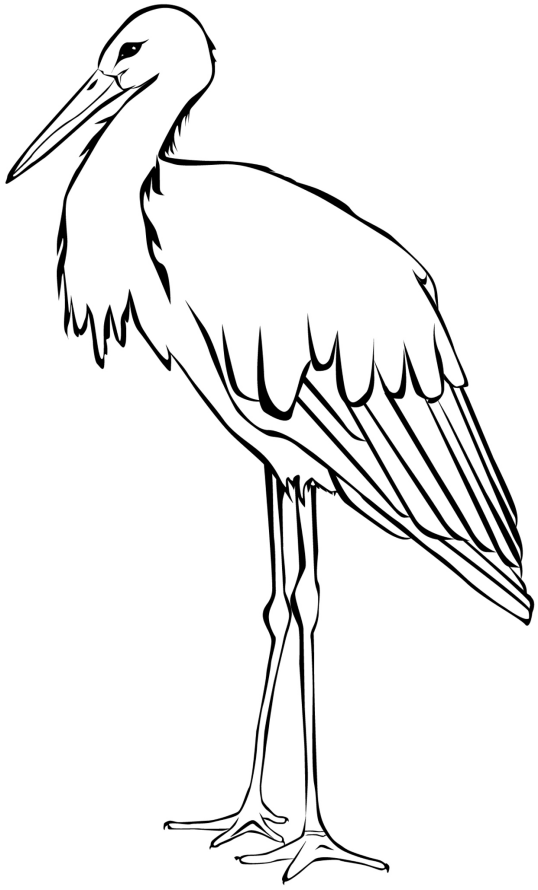


Алгоритмы и структуры данных

Конспекты лекций основного потока

Лектор: С. А. Объедков

Орлов Никита, Евсеев Борис, Рубачев Иван

НИУ ВШЭ, 2017

Содержание

Лекция 1. Асимптотика, простые алгоритмы, сортировка вставками

Пусть перед нами стоит задача: найти в некотором массиве медиану. Техническое задание выглядит так: на вход программе подается массив A, на выходе хотим получить одну из медиан, неважно какую.

Напомним определение медианы m:

$$m \in A = \begin{cases} |\{a \in A \mid a < m\}| \leqslant \frac{|A|}{2} \\ |\{a \in A \mid a > m\}| \leqslant \frac{|A|}{2} \end{cases}$$

Словами: медиана это такое число, что оно не больше половины элементов, но и не меньше половины элементов.

Легко видеть, что разных медиан в массиве может быть не больше двух, в зависимости от четности числа элементов.

Есть несколько способов решить эту задачу. Приведем несколько из них:

Алгоритм 1 Алгоритм поиска медианы

Ввод: Массив A
Вывод: Медиана m массива A

```
1: function MEDIAN(A)
2:     n := len(A)
3:     for i := 0 to (n − 1) do
4:         l := 0
5:         g := 0
6:         for j := 0 to (n − 1) do
7:             if A[j] < A[i] then
8:                 l := l + 1
9:             else if A[j] > A[i] then
10:                g := g + 1
11:        if l ⩽ n/2 and g ⩽ n/2 then
12:            return A[i]
```

Посмотрим еще на один способ:

Алгоритм 2 Примитивный алгоритм поиска медианы

Ввод: Массив A
Вывод: Медиана m массива A

```
1: function MEDIAN(A)
2:     n := len(A)
3:     B := sorted(A)
4:     return B[⌊n/2⌋]
```

На первый взгляд это сложный подход, так как мы должны отсортировать массив и пока не знаем, как это сделать.

Асимптотика

Итак, у нас есть как минимум два способа найти медиану. Возникает абсолютно естественное желание как-нибудь выяснить, какой лучше. Оказывается, в программировании можно провести сразу несколько таких оценок по разным критериям. Два главных ресурса, которые потребляют алгоритмы, это процессорное время и память вычислительного устройства.

Определение 1.1. Время (измеренное в некой абстрактной единице), необходимое алгоритму для завершения своей работы, называется *временем работы алгоритма* и обозначается как $T(n)$, где n - длина входных данных.

Время работы можно считать в разных единицах, например в *секундах*, если реализация алгоритма и исполнитель фиксированы, или в *элементарных операциях*, если речь идет про машину Тьюринга.

Различают несколько оценок времени работы:

1. *Худший случай* - максимально возможное $T(n)$ на входе длины n. Чаще всего используется на практике, так как дает верхнюю оценку времени работы алгоритма.
2. *Средний случай* - математическое ожидание $T(n)$ на входе длины n. Используется на практике реже, чем худший случай, в силу частой неопределенности вероятностного пространства для вычисления матожидания.
3. *Лучший случай* - минимально возможное $T(n)$ на входе длины n. На практике не используется, так как к любому сколько угодно неэффективному алгоритму можно приписать проверку на оптимальность входных данных и выдать ответ быстрее, чем средний или худший случай. Например, в задаче про поиск медианы можно проверять, отсортирован ли массив, и, если он не отсортирован, честно запускать поиск.

Для всего зоопарка алгоритмов существует инструмент их анализа - *асимптотический анализ*. Это методология, в которой время работы и занимаемая память алгоритма ставятся в соответствие классу функций.

Для начала дадим несколько определений.

Определение 1.2. O-большим от $g(n)$ называют такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$\underline{\underline{O}}(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_2 > 0, n_0 > 0 \ \forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)\}$$

Иными словами, запись $f(n) \in O(g(n))$ означает, что $f(n)$ растет не быстрее, чем $g(n)$.

Определение 1.3. o-малым от $g(n)$ называют такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$\overline{\overline{o}}(g(n)) = \{f(n) | \forall c_2 > 0 \exists n_0 > 0 : \forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant f(n) < c_2 g(n)\}$$

Определение 1.4. Ω-большим от $g(n)$ называют такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \leftrightarrow g(n) = \underline{\underline{O}}(f(n))$$

Определение 1.5. ω-малым от $g(n)$ называют такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$f(n) \in \omega(g(n)) \leftrightarrow g(n) = \overline{\overline{o}}(f(n))$$

Определение 1.6. $\Theta(g(n))$ называется такое множество функций, которое удовлетворяет условию

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \ \forall n \geqslant n_0 : \ 0 \leqslant c_1 \cdot g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 \cdot g(n)\}$$

Иными словами, $\Theta(g(n))$ растет примерно также, как и $f(n)$.

В нашем курсе мы часто будем писать что-то похожее на

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Такая запись с точки зрения математики некорректна, но мы будем понимать знак равенства как

$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

Например:

$$4n^2 + 12n + 12 = \Theta(n^2)$$

$$c_1 = 1, \ c_2 = 16, \ n_0 = 2$$

$$\forall n \geqslant n_0 : \ 0 \leqslant n^2 \leqslant 4n^2 + 12n + 12 \leqslant 16n^2$$

В общем случае верно следующее:

Лемма 1.7. *Если многочлен $p(n)$ представим в виде*

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i, \ d = \deg(p), \ a_d > 0,$$

то

$$p(n) = \Theta(n^d)$$

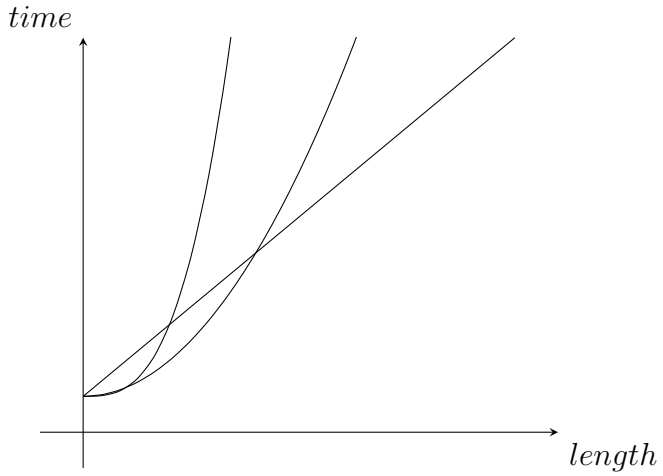
Замечание 1.8. Обычно функцию, описывающую время работы или память, занимаемую алгоритмом, называют *оценкой времени работы или памяти* алгоритма.

Замечание 1.9. По соглашению мы рассматриваем *асимптотически неотрицательные* функции, то есть такие, что

$$\exists n_0 \ \forall n > n_0 : \ f(n) \geqslant 0$$

Теперь поймем, что скрывается за классами функций Θ.

Пусть есть классы $\Theta(n)$, $\Theta(n^2)$, $\Theta(n^3)$. Для некоторых алгоритмов существует *оценка*, принадлежащая одному из этих классов. Помня про константу, можно сказать, что на достаточно большом объеме данных алгоритм с меньшей оценкой будет работать в среднем быстрее. Это ключевая мысль асимптотического анализа. Представить ее можно, построив графики неких линейной, квадратичной и кубической функций.



Для теоретического анализа сложности алгоритма берутся достаточно большие числа, но нужно понимать, что на практике может оказаться так, что входные данные могут быть меньше, чем n_0

Теперь получив матаппарат, оценим время работы алгоритмов поиска медианы.

Замечание 1.10. Будем считать, что элементарные арифметические операции, операции присваивания, копирования и тому подобные выполняются за $\Theta(1)$, иначе говоря, время их выполнения константо.

Первый алгоритм:

1. Лучший случай: медиана на первом месте. Тогда алгоритм выполнит одну итерацию внешнего цикла, n итераций внутреннего цикла, каждая из которых занимает константное время, и завершит работу. Сложность: $\Theta(1 \cdot n) = \Theta(n)$. Такая сложность считается достаточно хорошей.

2. Худший случай: медиана на последнем месте. Тогда алгоритм выполнит n итераций внешнего цикла, на каждой итерации произойдет n итераций внутреннего цикла. Сложность: $\Theta(n^2 - n) = \Theta(n^2)$.

Доказательство корректности заключается в том, что алгоритм *реализует* определение медианы. В таком случае он корректен, пока нет ошибок на уровне написания кода.

Второй алгоритм:

Второй алгоритм сложнее для оценки, так как мы не знаем, как сортируем массив. Операция взятия элемента выполняется за $\Theta(1)$. Остается сортировка, которую можно выполнить разными способами за разное время.

Сортировка вставками

Давайте возьмем простой алгоритм сортировки и оценим его сложность.

Алгоритм 3 Сортировка вставками

Ввод: Массив A с заданным на нем порядком $<$.

Вывод: Отсортированный по возрастанию массив A.

```
1: function INSERTION_SORT(A)
2:     n := len(A)
3:     for i := 1 to (n − 1) do
4:         k := A[i]
5:         for j := i − 1 to 0 do
6:             if k < A[j] then
7:                 A[j + 1] := A[j]
8:             else
9:                 break
10:        A[j + 1] := k
11:    return A
```

Словами: смотрим каждый i элемент и ищем его место среди первых $i-1$ элементов.

Для начала докажем корректность алгоритма. Для этого будем использовать *инвариант* - свойство математического объекта, которое не меняется после преобразования объекта.

Теорема 1.11. *Пусть есть неупорядоченный пронумерованный набор A элементов с заданным на них порядком меньше, и мы исполняем над ним алгоритм. Инвариант: элементы $A[0], \ldots, A[i-1]$ являются перестановкой исходных элементов в правильном порядке.*

Доказательство. Докажем по индукции. База $i = 1$ верна. Пусть инвариант верен для $i-1$ шага. Тогда смотрим $k = A[i]$ элемент.

Возможны 3 случая:

1. k - самый большой среди первых i элементов. Тогда алгоритм пропустит эту итерацию и перейдет к следующему.

2. k - самый маленький среди первых i элементов. Тогда алгоритм передвинет его в начало, пройдя весь цикл.

3. В противном случае, мы начинаем перебирать все элементы среди первых i до тех пор, пока операция сравнения на "меньше" не вернет ложь. Это означает, что мы в отсортированном массиве нашли элемент под номером j, который меньше либо равен k:

$$A[j] \leqslant k \ \leqslant \ A[j+1]$$

   Тогда мы сдвигаем элементы с $j+1$ до i на одну позицию вправо, и на $j+1$ место ставим k.

$$A[j] \leqslant k = A[j+1] < A[j+2]$$

   Все элементы с 0 по j позицию меньше либо равны k, а элементы с $j+2$ по i позицию они больше k.

[:|||:]

Из доказательства корректности инварианта прямо следует доказательство корректности алгоритма: когда алгоритм закончит свою работу, $i = n$, а значит инвариант верен для n элементов, а значит массив отсортирован.

Теперь можно оценить время работы сортировки вставками:

1. Лучший случай: массив уже отсортирован. Но тогда внешний цикл совершит $n-1$ итерацию, на каждой из которых произойдет одно сравнение. Сложность получилась $\Theta(n)$.

2. Худший случай: массив отсортирован в обратном порядке. Тогда на каждой итерации число шагов внутреннего цикла будет уменьшаться на 1. Значит

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \Theta(n^2)$$

Лекция 2. Merge sort, Binary search, рекуррентные соотношения

Лекция будет дополнена примерами решения рекуррентных соотношений без основной теоремы, а так же доказательством теоремы. Текущая версия вычитана лектором.

Поговорим еще немного про сортировки. Сортировка вставками имеет квадратичную сложность, что не оптимально. Есть более быстрые алгоритмы, один из них называется *сортировкой слиянием.*

Сортировка слиянием

Суть сортировки достаточно проста: если у нас есть две отсортированные последовательности, мы можем их объединить в одну отсортированную, а последовательность длины один уже отсортирована, а значит мы можем разбить наш массив на блоки одинаковой длины, и рекурсивно отсортировать.

Опишем функцию слияния двух массивов разной длины.

Алгоритм 4 Функция слияния отсортированных массивов

Ввод: Отсортированные массивы A, B.
Вывод: Отсортированный массив C

```
1:  function MERGE(A, B)
2:      i := 0
3:      j := 0
4:      vector C
5:      while i < len(A) and j < len(B) do
6:          if A[i] ⩽ B[j] then
7:              C.push_back(A[i])
8:              i := i + 1
9:          else
10:             C.push_back(B[i])
11:             j := j + 1
12:     C := C + A[i : len(A)] + B[j : len(B)]
13:     return C
```

Доказательство корректности. На входе отсортированные массивы. На каждой итерации цикла выбирается наименьший из еще не выбранных элементов. **[:|||:]**

Время работы. Алгоритм смотрит на каждый элемент каждого массива, тогда его сложность получается $\Theta(len(A) + len(B))$. **[:|||:]**

Теперь сам алгоритм сортировки слиянием:

Алгоритм 5 Merge Sort

Ввод: Массив A

Вывод: Отсортированный массив C

```
1: function MERGE_SORT(A)
2:     if len(A) < 2 then
3:         return A
4:     else
5:         n := len(A)
6:         A_1 := merge_sort(A[0 : n/2])
7:         A_2 := merge_sort(A[n/2 : n])
8:         return merge(A_1, A_2)
```

Замечание 2.1. Сортировку слиянием можно написать разными способами. Например, изначально разбить массив на куски длиной 10, каждую из них отсортировать вставками, а потом уже последовательно слить в один отсортированный массив.

Доказательство корректности. Пока корректна функция *merge*, весь алгоритм корректен, так как вся задача разбивается на меньшие подзадачи, а рекурсия остановится на массивах размера 1. **[:|||:]**

Время работы. Время работы данного алгоритма $T(n) = \Theta(n \cdot \log(n))$: У нас $\log(n)$ - глубина рекурсии, а на каждом шаге мы пройдемся в сумме по всему массиву.

[:|||:]

Время работы сортировки слиянием можно записать и по-другому, с помощью *рекуррентной формулы*. В нашем случае она будет иметь вид

$$T(n) = \begin{cases} c, & n = 1; \\ 2T(\frac{n}{2}) + O(n), & n > 1; \end{cases}$$

где $2T(\frac{n}{2})$ - сложность рекурсивных вызовов, $O(n)$ - сложность слияния. Для таких соотношений хочется получить правило их раскрытия в явную формулу. О таком преобразовании говорит *основная теорема о рекуррентных соотношениях*.

Основная теорема

Теорема 2.2. *Пусть у нас есть рекуррентное соотношение, записанное в виде*

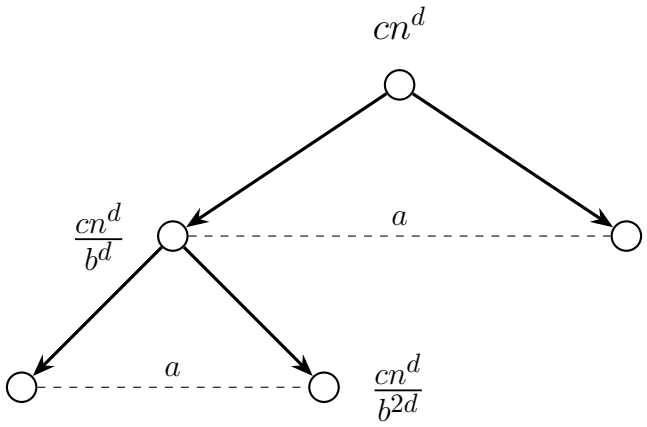
$$T(n) \leqslant \begin{cases} c, & n = 2 \\ aT(\frac{n}{b}) + cn^d, & n > 2 \end{cases}$$

Тогда его можно представить в следующем виде:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log(n)), & a = b^d \\ O(n^d), & a < b^d \\ O(n^{\log_b(a)}), & a > b^d \end{cases}$$

TODO: *Доказательство*

Доказательство. Рассмотрим алгоритм, который нашу задачу делит на каждом шаге на b подзадач.



На каждом уровне мы делим задачу на a подзадач, размер каждой отличается от другого уровня в b раз.

[:|||:]

Binary Search

Теперь давайте разберем другой рекуррентный алгоритм - *бинарный поиск*. Это алгоритм ищет в отсортированном элементе некоторый элемент и возвращает его индекс.

Алгоритм 6 Binary Search

Ввод: Отсортированный массив A, элемент x
Вывод: Индекс элемента e если он есть в массиве, -1 в противном случае.

```
1:  function BINARY_SEARCH(A, x)
2:      b := 0
3:      e := len(A)
4:      while b < e do
5:          m = round((b+e)/2)
6:          if A[m] == x then
7:              return m
8:          else if A[m] < x then
9:              b := m + 1
10:         else
11:             e := m
12:     return -1
```

Словами: смотрим в середину, сравниваем, сдвигаем границы поиска в сторону, где элемент может быть, повторяем пока не нашли или пока $b! = e$.

Время работы. Формула времени нашего алгоритма:

$$T(n) = \begin{cases} c, & n = 2 \\ T(\frac{n}{2}) + c, & n > 2 \end{cases}$$

По основной теореме

$$a = 1,\ b = 2,\ d = 0$$
$$T(n) = O(\log(n))$$

[:|||:]

Лекция 3. Quick sort, оптимальность сортировки слиянием

CAUTION! RECURTION IS HERE!

В стратегии *разделяй и властвуй*, которая используется во многих алгоритмах обработки данных, есть 3 четко выделяемые фазы.

1. *Деление*. Задача размера n делится на несколько меньших подзадач, подобных исходной.
2. *Решение*. Каждая из подзадач рекурсивно решается тем же алгоритмом. При этом важно, чтобы рекурсия остановилась на элементарном размере подзадачи. Под элементарным подразумевается, что такую подзадачу можно решить за константное время.
3. *Слияние*. Полученные результаты сливаются в одно общее решение.

На примере Merge Sort'а это выглядит следующим образом:

Деление	$A_1 = A[: \frac{n}{2}]$ $A_2 = A[\frac{n}{2} :]$
Решение	$A'_1 = mergesort(A_1)$ $A'_2 = mergesort(A_2)$
Слияние	**return** $merge(A_1, A_2)$

С ним все просто и понятно. Поделили - решили - объединили. Но существуют и другие алгоритмы сортировки. Один из самых знаменитых из них - *Quick Sort*.

QuickSort

Идея алгоритма в чем-то схожа с сортировкой слиянием: мы делим массив на две половины специальным образом и применяем алгоритм к каждой из частей рекурсивно. Главное отличие - алгоритм не имеет отдельной процедуры слияния и тратит всего $O(1)$ памяти, вместо совершенно нерационального потребления Merge Sort'ом.

Делить задачу мы будем следующим образом: возьмем *опорный* элемент $p \in A$, и приведем массив в следующее состояние:

$$\begin{array}{cccccccc} & & A_1 & & & & A_2 & \\ [& A[i_0] & \dots & A[i_k] & p & A[i_{kh+1}] & \dots & A[i_n] \ ] \\ & & \leqslant p & & & & > p & \end{array}$$

Словами: делим массив на части, в каждой из которых все элементы либо больше или равны опорного, либо меньше него.

Затем рекурсивно запускаем алгоритм от A_1 и A_2, пока не дойдем до задачи размера 1. Утверждается, что когда рекурсия остановится, задача будет решена, и массив A будет отсортирован.

Этот алгоритм полностью зависит от процедуры выбора опорного элемента. В идеальном случае надо брать медиану на каждом шаге, тогда мы будем делить массив ровно на две части, и время работы $T(n)$ будет выражаться так:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = \Theta(n \log n)$$

В конце стоит $O(n)$, потому что нам нужно во время перемещения элементов посмотреть хотя бы на каждый из них.

Но если мы хотим сделать так, чтобы такая асимптотика достигалась постоянно, нужно искать медиану, а это как минимум $O(n)$, если повезет, но асимптотика тогда увеличится. Нерационально.

Самая главная часть в алгоритме называется *Partition*, именно она ответственна за разделение массива. Приведем псевдокод оптимальной по памяти версии, которая сортирует inline.

Алгоритм 7 Partition

Ввод: Массив A, границы разделяемой части l, r.

```
1: function PARTITION(A, l, r)
2:     i := l
3:     for j := l + 1 to r do
4:         if A[j] ⩽ A[l] then
5:             i += 1
6:             swap(A[i], A[j])
7:         else
8:             continue
9:     swap(A[l], A[i])
```

Эта версия алгоритма за опорный элемент берет левую границу интервала. Получается такой переход:

$$[A[0] \ \ldots \ A[l] \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \qquad\qquad A[r] \ \ldots \ A[n]]$$

$$[A[0] \ \ldots \ A[i_0] \ \ldots \ A[i_{\frac{k}{2}}] \ A[l] \ A[i_{\frac{k}{2}+1}] \ \ldots \ A[i_k] \ A[r] \ \ldots \ A[n]]$$

Время работы. Посчитаем для худшего случая - когда наш массив отсортирован в обратном порядке, значит операция Partition будет вызываться от массивов, каждый раз размером на 1 меньше. Получается

$$T(n) = T(n-1) + O(n) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) = O(n^2)$$

В лучшем случае время будет как у Merge Sort'a - $O(n \log n)$ **[:|||:]**

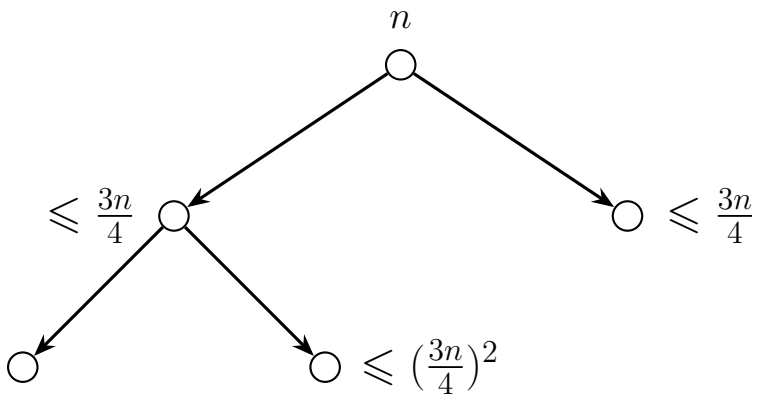
Этот алгоритм есть пример тех алгоритмов, для которых лучше рассматривать время в среднем случае.

Определение 3.1. Назовем элемент *центральным*, если в отсортированном массиве он больше первой четверти элементов и меньше последней четверти элементов.

Такой элемент оказывается очень удобным, так как его можно брать за опорный, причем он гарантированно разобьет массив на непустые части. Искать такой элемент можно *детерминированно*, или точно вычитывать по какому-то алгоритму, но сложность такого выбора будет $O(n)$. Мы же будем использовать *вероятностный* подход, или брать случайный элемент в массиве.

С этого момента Quick Sort становится *рандомизированным* алгоритмом, так как на одном и том же входе шаги алгоритма неизвестны заранее. При этом становится легко считать его сложность

Время работы. Построим дерево исполнения алгоритма для случая, когда он разбивает задачи на подзадачи меньшие, чем $\frac{3}{4}$.



На j подзадачу тратится время $O((\frac{3}{4})^j n)$, на j подзадач - $O((\frac{4}{3})^{j+1})$. В итоге получаем, что среднее время на все подзадачи

$$T(n) = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^j n\right) \cdot O\left(\left(\frac{4}{3}\right)^j\right)$$

Прологарифмируем и получим, что

$$T(n) = O(n \log n)$$

[:|||:]

На практике обычно Quick Sort работает быстрее, чем Merge Sort, несмотря на одинаковую асимптотику. Связано это с тем, что QS сортирует на месте, в исходном массиве, MS тратит время на работу с памятью, так как ему нужно еще $O(n)$ памяти.

Замечание 3.2. При реализации алгоритма Partition можно вместе с границами передавать опорный элемент, переписав тело цикла. Получим процедуру, которая будет делить в интервале массив на две части, которые меньше и больше опорного.

Оптимальность сортировки слиянием

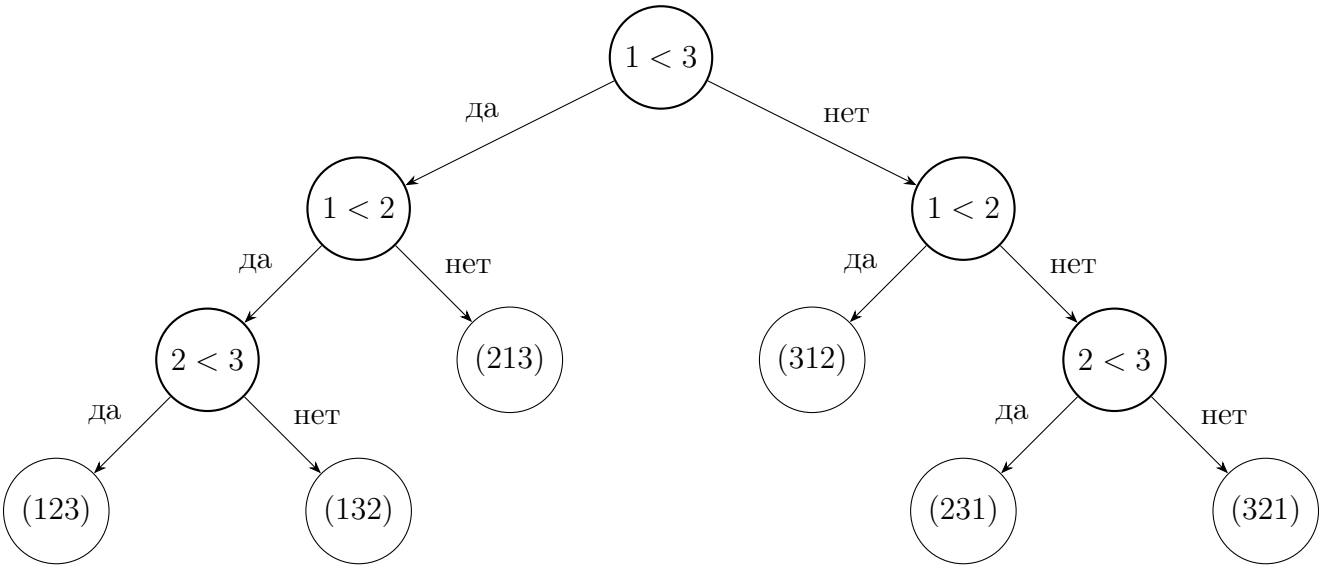
Утверждается, что время работы сортировки слиянием асимптотически самое маленькое.

Теорема 3.3. *Нельзя отсортировать массив быстрее, чем за $O(n \log n)$, если разрешено использовать только сравнение элементов и их перемещение.*

Доказательство. Рассмотрим массив A. Пусть ответом на задачу будет такая подстановка σ, что после ее применения массив окажется отсортирован.

Рассмотрим *дерево решений* некоторого абстрактного алгоритма сортировки. Пусть вершиной будет операция сравнения, ребром - ее исход, а листом - искомая перестановка. Такое дерево можно построить для каждого алгоритма.

Покажем пример такого дерева для сортировки массива длины 3:



Временем работы всего алгоритма будет высота этого дерева h. Число листьев – $n!$.

$$n! \leqslant 2^h$$

$$\log_2 n! \leqslant h$$

$$h \geqslant \log_2 n! \geqslant \log_2 \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \log_2(n) - 1 = \Omega(n \log n).$$

[:|||:]

ss[../book.tex]subfiles

Лекция 4. Алгоритмы стратегии «разделяй и властвуй»

Это черновик лекции, окончательный релиз будет как только вычитаю у лектора.

Стратегия «разделяй и властвуй» используется в еще некоторых полезных алгоритмах. Относительно простым является алгоритм быстрого возведения в степень.

Возведение в степень

Для начала приведем тривиальный алгоритм

Алгоритм 8 Возведение в степень

Ввод: Числа $x, y \in Z$.
Вывод: Число x^y.

```
1: function POWER(x, y)
2:     z := 1
3:     for i := 1 to y do
4:         z := z * x
5:     return z
```

Время работы. Так как ответ на задачу имеет экспоненциальный ответ, то и сложность будет по крайней мере экспоненциальная. Если смотреть точнее, то получится $T(n) = O(n^2 10^n)$, где n - число цифр в записи числа. **[:|||:]**

Алгоритм невероятно медленен, так как он выполнит честно каждое умножение, но есть способ вычислить степень быстрее. Для этого мы воспользуемся свойством степеней, а именно:

$$x^n = \begin{cases} x^{2^{\frac{n}{2}}}, & n = 2k \\ x \cdot x^{n-1}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Отсюда мы получаем рекуррентное соотношение для построения алгоритма, причем сделаем маленькую оптимизацию – будем вычислять ответ по какому-то модулю p. На практике арифметика работы с целыми числами в компьютере сама по себе модульная: при переполнении типа данных мы начнем с нуля. Псевдокод будет выглядеть так:

Алгоритм 9 Бинарное возведение в степень

Ввод: Числа $x, y, p \in Z$.

Вывод: Число $x^y mod p$.

```
1: function POWER(x, y, p)
2:     if y == 0 then
3:         return 1
4:     else
5:         t := power2(x, y/2, p)
6:         if y mod 2 == 0 then
7:             return t^2 mod p
8:         else
9:             return t^2 · x mod p
```

Время работы. При использовании этой оптимизации мы получили асимптотику $T(n) = O(n \log n)$: выполняем $\log n$ умножений n раз. **[:|||:]**

Вычисление медианы

Вернемся к самому нашему первому алгоритму. Вычисление медианы является частным случаем другой задачи - выбора k-ой порядковой статистики, поэтому логичнее решить более общую задачу.

Алгоритм 10 Рандомизированный алгоритм выбора к-ой порядковой статистики

Ввод: Массив A, порядок k.

Вывод: .

```
1: function SELECT(A, k)
2:     choose p
3:     i = Partition(A, p)
4:     if i == k then
5:         return b[i]
6:     else if i < k then
7:         return Select(A, k - i)
8:     else
9:         return Select(A, k)
```

Словами: выбираем случайный элемент p, запускаем Partition. Если попали в цель, то все хорошо, иначе же отправляем алгоритм в ту часть, где элемент заведомо будет.

Все хорошо, но такой алгоритм дает в худшем случае асимптотику $O(n^2)$ из-за случайности выбора p. Посчитаем сколько времени потребуется алгоритму при таком случайном выборе.

Определение 4.1. Назовем текущий рекурсивный шаг алгоритма j-фазой, если для некоторого j обрабатываемая часть массива n' имеет размер

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{j+1} \cdot n < n' \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{j} \cdot n$$

Для подсчета сложности будем использовать факт, что в данном алгоритме время, проведенное в одной j фазе в среднем равно двум. Это понятно на уровне интуиции, ибо если нам не повезло с первого раза попасть в нужную половину, со второго раза мы попадем с большей вероятностью.

Отсюда получаем время работы:

$$\mathbb{E}(T(n)) \leqslant \mathbb{E}\left(\sum_{0}^{\log_{\frac{4n}{3}}} 2c\left(\frac{3}{4}\right)^{j} n\right) = 8cn$$

Получили линейное время в среднем случае. Для улучшения асимптотики алгоритм можно переписать, сделав выбор опорного элемента детерминированным.

Алгоритм 11 Детерменированный алгоритм выбора к-ой порядковой статистики

Ввод: Массив A, порядок k.

Вывод: .

```
1: function DSELECT(A, k)
2:     a_1 = A[0:5], a_2 = A[5:10], ...
3:     sort(a_1, ..., a_n)
4:     m_1 = a_1[2], ...,
5:     p = dselect((m_1, ...,), n/10)
6:     i = Partition(A, p)
7:     if i == k then
8:         return b[i]
9:     else if i < k then
10:        return Select(A, k - i)
11:    else
12:        return Select(A, k)
```

Суть этого алгоритма в том, что опорный элемент выбирается более-менее близко к медианному элементу, а значит и сложность будет линейная. На практике же на этот выбор тратится уйма времени, так что быстрее работает рандомизированный алгоритм.