Hush up! 题目讨论

CyanD1317 / Tommyr7 / wangyurzee

August 27, 2016

Problem 1. STUMBLER

给定一个简化的物件组成的 osu! 谱面，从原点出发等概率选择一个方向发出一条射线，求有且仅有一个物件在射线上的概率。

- $N_{\mathrm{C}}, N_{\mathrm{S}} \leq 50\,000$
- 精度 10^{-6}

Observations & Lemmata

- 将 $-\pi$ 和 $+\pi$ 看作首尾相接，那么一个物件影响的角度范围是连续的，且该范围不会大于等于 π。

Observations & Lemmata

- 将 $-\pi$ 和 $+\pi$ 看作首尾相接，那么一个物件影响的角度范围是连续的，且该范围不会大于等于 π。
  - Formally：如果射线 OA 与射线 OB 都与物体 U 有公共点，那么在劣角 AOB 内的任意一条射线 OC 都与物体 U 有公共点。

Observations & Lemmata

- 将 $-\pi$ 和 $+\pi$ 看作首尾相接，那么一个物件影响的角度范围是连续的，且该范围不会大于等于 π。
  - Formally：如果射线 OA 与射线 OB 都与物体 U 有公共点，那么在劣角 AOB 内的任意一条射线 OC 都与物体 U 有公共点。
  - 显然成立。

Observations & Lemmata

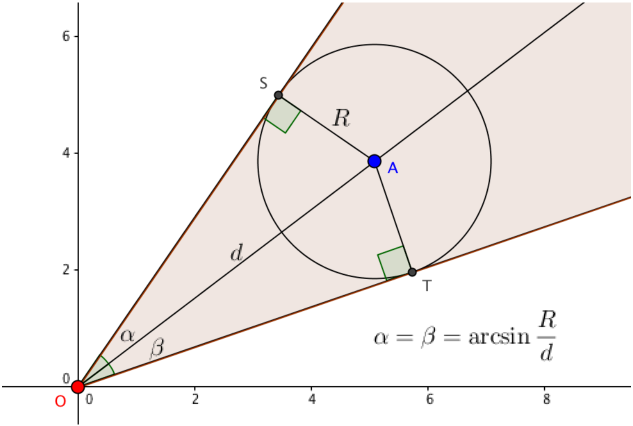
- 将 $-\pi$ 和 $+\pi$ 看作首尾相接，那么一个物件影响的角度范围是连续的，且该范围不会大于等于 π。
  - Formally：如果射线 OA 与射线 OB 都与物体 U 有公共点，那么在劣角 AOB 内的任意一条射线 OC 都与物体 U 有公共点。
  - 显然成立。
- 在前两个子任务的限制下，物件影响的角度范围没有重叠部分。

Observations & Lemmata

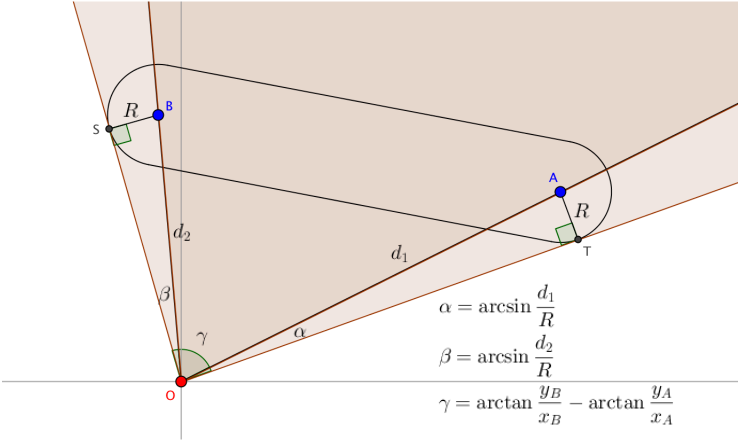
- 将 $-\pi$ 和 $+\pi$ 看作首尾相接，那么一个物件影响的角度范围是连续的，且该范围不会大于等于 π。
    - Formally：如果射线 OA 与射线 OB 都与物体 U 有公共点，那么在劣角 AOB 内的任意一条射线 OC 都与物体 U 有公共点。
    - 显然成立。
- 在前两个子任务的限制下，物件影响的角度范围没有重叠部分。
    - 计算出每个物件的影响的范围大小，相加即为答案。

Algorithm 1

子任务 1：只有圆形物件，物件影响的角度范围没有重叠部分。



子任务 2：有滑条物件，物件影响的角度范围没有重叠部分。



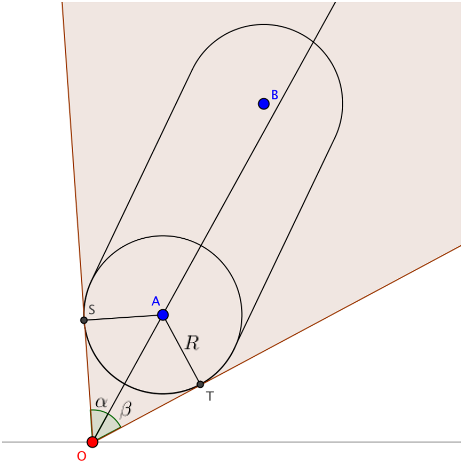
$$\alpha = \arcsin \frac{d_1}{R}$$

$$\beta = \arcsin \frac{d_2}{R}$$

$$\gamma = \arctan \frac{y_B}{x_B} - \arctan \frac{y_A}{x_A}$$

Algorithm 2

特殊情况：与上一种取 max



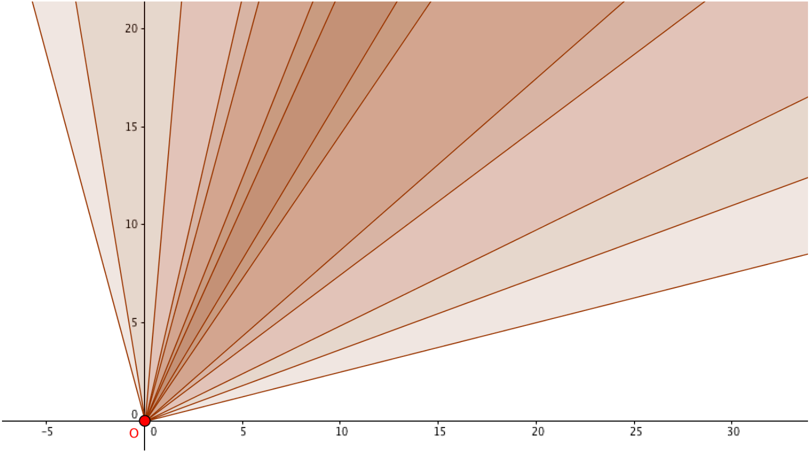
Algorithm 3

子任务 3：$N_{\mathrm{C}}, N_{\mathrm{S}} \leq 1\,000$

不会做，输出 QAQ

Algorithm 4

子任务 4：存在一条从原点出发的射线与每一个打击物件都有公共点。



Algorithm 5

子任务 3： $N_{\mathrm{C}}, N_{\mathrm{S}} \leq 1\,000$

Algorithm 5

子任务 3：$N_{\mathrm{C}}, N_{\mathrm{S}} \leq 1\,000$

- 按照上述方法计算出每个物件影响角度的区间，记录端点（线？ ←_← ）并排序

Algorithm 5

子任务 3：$N_{\mathrm{C}}, N_{\mathrm{S}} \leq 1\,000$

- 按照上述方法计算出每个物件影响角度的区间，记录端点（线？←_←）并排序
- 跨过 $\pm\pi$ 的位置拆分为两个区间

Algorithm 5

子任务 3：$N_\mathrm{C}, N_\mathrm{S} \le 1\,000$

- 按照上述方法计算出每个物件影响角度的区间，记录端点（线？$\leftarrow$_$\leftarrow$）并排序
- 跨过 $\pm\pi$ 的位置拆分为两个区间
- 枚举两个相邻端点，检查它们所夹区间是否被恰好一个物件覆盖

Algorithm 5

子任务 3：$N_{\mathrm{C}}, N_{\mathrm{S}} \le 1\,000$

- 按照上述方法计算出每个物件影响角度的区间，记录端点（线？$\leftarrow\_\leftarrow$）并排序
- 跨过 $\pm\pi$ 的位置拆分为两个区间
- 枚举两个相邻端点，检查它们所夹区间是否被恰好一个物件覆盖
- 排序 $O(N^2)$，枚举共 $O(N)$ 个区间，检查一次 $O(N)$
- 总时间复杂度 $O(N^2)$

Algorithm 6

我会快速排序！ 

Algorithm 6

我会快速排序！ 

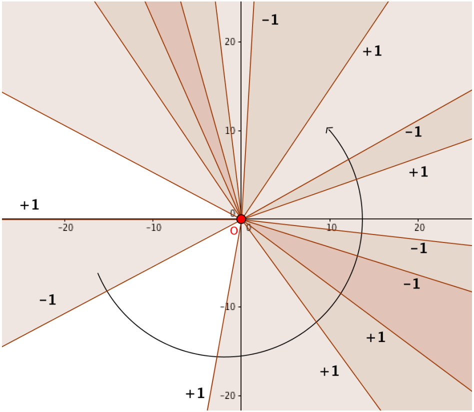
$$O(N \log N) + O(N^2) = O(N^2)$$

Algorithm 7

“枚举两个相邻端点，检查它们所夹区间是否被恰好一个物件覆盖”

优化？

Algorithm 7



把区间转化成"事件"，对事件排序并依次处理，记录上个事件的位置与当前覆盖层数，判断层数 $= 1$ 时增加答案。(常用 trick)

时间复杂度 $O(N\log N) + O(N) = O(N\log N)$

Problem 2. OBSESSED

给定一个序列，每个位置上为“空”、“面”音符与“边”音符中的一种。
进行下列操作：

- 放置“面”或“边”音符；
- 把一段连续区间内的“面”与“边”音符对换；
- 询问一段连续区间内最近一对相同音符（“面”或“边”）之间的最小距离。

$N, M \leq 300\,000$

Algorithm 1

子任务 1、2：$N \cdot M \leq 600\,000$

直接模拟即可。注意反转操作的判定

Algorithm 1 

if $A[i] = \mathrm{DON}$ **then**

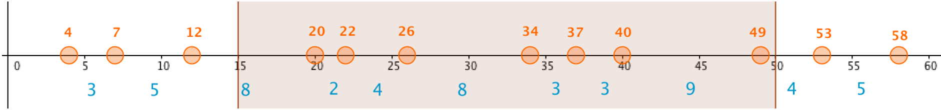
  $A[i] \leftarrow \mathrm{KAT}$

else

  $A[i] \leftarrow \mathrm{DON}$

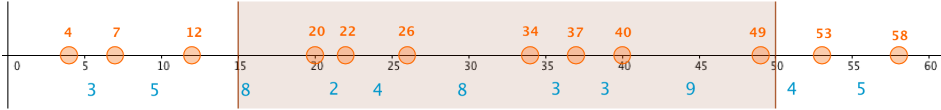
end if

子任务 3：没有“边”音符和反转操作，放置音符的位置严格单调递增



Algorithm 2

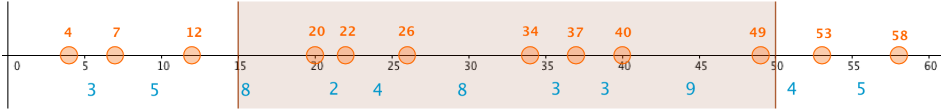
子任务 3：没有“边”音符和反转操作，放置音符的位置严格单调递增



- 找出对应的音符范围：二分查找， $O(\log N)$

Algorithm 2

子任务 3：没有“边”音符和反转操作，放置音符的位置严格单调递增



- 找出对应的音符范围：二分查找，$O(\log N)$
- 在范围内查询最小值：Range Minimum Query，线段树 $O(\log N)$

Algorithm 3

子任务 4：存在两种音符，没有反转操作

看着好像线段树的样子

Algorithm 3

对于一个线段树的节点而言，需要考虑的情况有以下三种：

- 完全在左子节点的区间中；
- 完全在右子节点的区间中；
- 跨越左右子节点区间的交界处。

Algorithm 3

对于一个线段树的节点而言，需要考虑的情况有以下三种：

- 完全在左子节点的区间中；
- 完全在右子节点的区间中；
- 跨越左右子节点区间的交界处。

为了实现两段区间信息的合并，需要在每个节点上记录......?

Algorithm 3

对于一个线段树的节点而言，需要考虑的情况有以下三种：

- 完全在左子节点的区间中；
- 完全在右子节点的区间中；
- 跨越左右子节点区间的交界处。

为了实现两段区间信息的合并，需要在每个节点上记录……?

最左/最右的鼓面/鼓边音符共 4 条信息。

另外自己内部的最优答案也要记录。

Updating Segment Tree Nodes

Algorithm 2

```
function UPDATE(node)
    if node.lch = −1 then
        return
    end if
    node.lmost_don = min(node.lch.lmost_don, node.rch.lmost_don)
    node.rmost_don = min(node.lch.rmost_don, node.rch.rmost_don)
    node.lmost_kat = min(node.lch.lmost_don, node.rch.lmost_kat)
    node.rmost_kat = min(node.lch.rmost_don, node.rch.rmost_kat)
    node.ans = min(node.lch.ans, node.rch.ans)
    node.ans = min(node.ans, node.rch.lmost_don − node.lch.rmost_don)
    node.ans = min(node.ans, node.rch.lmost_kat − node.lch.rmost_kat)
end function
```

Algorithm 3

时间复杂度 $O(M \log N)$。

Algorithm 4

子任务 5：存在两种音符和反转操作

看着好像线段树的样子

Algorithm 4

延迟标记/懒标记

每个节点除了记录上述信息外，额外记录一个布尔变量 *tag* 表示该节点下所有的音符是否被 Invert

维持 *lmost*, *rmost* 与 *tag* 同步更新（即 *lmost*, *rmost* 记录的是 *tag* 生效后的值）。访问到一个节点时，若该节点的 *tag* 为真，那么将 *tag* 下传到左右子节点并更新各自信息。

Handling Lazy Tag Propagation

Algorithm 3

```
function PushDown(node)
    if node.lch = −1 or node.tag = false then
        return
    end if
    node.tag ← false
    node.lch.tag ← not node.lch.tag
    node.rch.tag ← not node.rch.tag
    Swap(node.lch.lmost_don, node.lch.lmost_kat)
    Swap(node.lch.rmost_don, node.lch.rmost_kat)
    Swap(node.rch.lmost_don, node.rch.lmost_kat)
    Swap(node.rch.rmost_don, node.rch.rmost_kat)
end function
```

Algorithm 4

时间复杂度 $O(M \log N)$。

具体细节参见参考程序或者两段伪代码。

Problem 3. CACCEPT

~~(其实这就是上学期期末的 Hako 窝怎么会说呢)~~

交互题。有一个五个不同字母的排列，每次可以询问五个字母（可以重复），得到：

- 有多少个在答案中位置正确的字母；
- 有多少个不同的在答案中出现但位置不正确的字母。

用最少的询问次数确定字母排列。按照谜之公式给分。

Problem 3. CACCEPT

~~(其实这就是上学期期末的 Hako 窝怎么会说呢)~~

交互题。有一个五个不同字母的排列，每次可以询问五个字母（可以重复），得到：

- 有多少个在答案中位置正确的字母；
- 有多少个不同的在答案中出现但位置不正确的字母。

用最少的询问次数确定字母排列。按照谜之公式给分。

评分参数 $L = 11$ ~~知道泥萌很好奇~~

Algorithm 1

直接提交样例程序，可以卡着时限通过所有 20 组数据。
平均每组数据需要花费上千万次询问，效率得分 $E \approx 0$。

Algorithm 1

直接提交样例程序，可以卡着时限通过所有 20 组数据。
平均每组数据需要花费上千万次询问，效率得分 $E \approx 0$。

期望得分 20 分。

Algorithm 2 by wangyurzee

从“ABCDE”(随机亦可) 开始尝试对于每一位进行调整，保留返回值最大的答案。

Algorithm 2 by wangyurzee

从“ABCDE”(随机亦可) 开始尝试对于每一位进行调整，保留返回值最大的答案。

最大单次尝试次数 $5 \times 26 = 130$，实际最大单次 116、合计 2320，期望得分 25 ~30 分。

Algorithm 3 by wangyurzee

在算法二的基础上进行特别判断，如果一次调整将返回值增加了 9（完全猜对了一位）那么退出当前位的调整进入下一位。

Algorithm 3 by wangyurzee

在算法二的基础上进行特别判断，如果一次调整将返回值增加了 9（完全猜对了一位）那么退出当前位的调整进入下一位。

最大单次尝试次数仍为 130，实际最大单次 94、合计 1236，期望得分 30 ~40 分。

Algorithm 4

从 A 到 Z 分别重复五遍进行询问 (“AAAAA”、“BBBBB”......) 找出所有出现的的字母。
枚举五个字母的排列并逐次询问。

Algorithm 4

从 A 到 Z 分别重复五遍进行询问 (“AAAAA”、“BBBBB”……) 找出所有出现的的字母。
枚举五个字母的排列并逐次询问。

最大单次尝试次数 $26 + 5! = 146$， 期望得分 25 ~35 分。

Algorithm 5

在算法四的基础
上, 不枚举排列而是枚举 $\binom{5}{2} = 10$ 对元素并尝试交换, 保留返回值大的答案。

Algorithm 5

在算法四的基础
上, 不枚举排列而是枚举 $\binom{5}{2} = 10$ 对元素并尝试交换, 保留返回值大的答案。

最大单次尝试次数 $26 + \binom{5}{2} = 36$, 实际最大单次 36、合计 740, 期望得分 40 ~50 分。

Algorithm 6 by wangyurzee

在算法五的基础上改进第一部分的找字母过程。

Algorithm 6 by wangyurzee

在算法五的基础上改进第一部分的找字母过程。

每次进行形如“ABABA”的询问，其中含有的字母个数有三种情况：

- 0：直接确定 A、B 均不在答案内出现；
- 2：直接确定 A、B 均在答案内出现；
- 1：进行另一次询问“AAAAA”，确定是 A 还是 B 在答案内出现。

Algorithm 6 by wangyurzee

在算法五的基础上改进第一部分的找字母过程。

每次进行形如“ABABA”的询问，其中含有的字母个数有三种情况：

- 0：直接确定 A、B 均不在答案内出现；
- 2：直接确定 A、B 均在答案内出现；
- 1：进行另一次询问“AAAAA”，确定是 A 还是 B 在答案内出现。

最大单次尝试次数 $\frac{26}{2} + 5 + \binom{5}{2} = 28$，实际最大单次 28、合计 509，期望得分 50 ~55 分。

吐槽时间

Algorithm 7

首先我们需要知道 $L = 11$ 是哪里来的……

Algorithm 7

首先我们需要知道 $L = 11$ 是哪里来的……
（知道了不就会做了？

Algorithm 7

首先我们需要知道 $L = 11$ 是哪里来的……

(知道了不就会做了？(并不

Entropy

~~以下内容均为口胡~~

在信息论中，熵是接收的每条消息中包含的信息的平均量，可以理解为不确定性的量度。

简单的解释：有 N 个互斥事件，其中第 i 个事件 x_i 发生的概率为 $P(x_i)$，且它们是 collectively exhaustive events 即 $\sum P(x_i) = 1$，那么该体系的熵等于

$$H(X) = -\sum_i P(x_i) \log_2 P(x_i)$$

例如抛一枚硬币事件的熵为 1（提供了 1 bit 的信息），掷一次骰子事件的熵为 $-6 \cdot \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \approx 2.6$。

Entropy

$$H(X) = -\sum_i P(x_i) \log_2 P(x_i)$$

- ~~萌萌哒的~~华二气象台认为某天的降水概率是 50%，当天下雨
- ~~萌萌哒的~~华二气象台认为某天的降水概率是 99.99%，当天下雨

Entropy

$$H(X) = -\sum_i P(x_i)\log_2 P(x_i)$$

- ~~萌萌哒的~~华二气象台认为某天的降水概率是 50%，当天下雨
- ~~萌萌哒的~~华二气象台认为某天的降水概率是 99.99%，当天下雨

第一种情况：降水这一事件提供了 1 bit 信息，消除了一半的不确定性

第二种情况：降水这一事件提供了 1.47×10^{-3} bit 信息，几乎没有消除不确定性

信息来源的熵越大，一条消息包含的信息量也就越大。

Entropy

在假设每个文字出现在文本中的概率相同的情况下：

- 英文字母的熵约为 4.7（实际占用 8 bits，58.8%）
- 日文平假名的熵约为 5.64（实际占用 8 bits，70.5%）
- 汉字的熵约为 11.3（实际占用 16 bits，70.6%）

Entropy

在假设每个文字出现在文本中的概率相同的情况下：

- 英文字母的熵约为 4.7（实际占用 8 bits，58.8%）
- 日文平假名的熵约为 5.64（实际占用 8 bits，70.5%）
- 汉字的熵约为 11.3（实际占用 16 bits，70.6%）

Algorithm 7

回到本题，一次询问的结果有 00、01、……、40、41、50 共 21 种。

Algorithm 7

回到本题，一次询问的结果有 00、01、……、40、41、50 共 21 种。

第一次询问时可以将答案视为随机，因此每个结果发生的概率 = 所有五字母的排列中能产生该结果的排列数量/所有五字母的排列数量。

Algorithm 7

回到本题，一次询问的结果有 00、01、……、40、41、50 共 21 种。
第一次询问时可以将答案视为随机，因此每个结果发生的概率 = 所有五字母的排列中能产生该结果的排列数量/所有五字母的排列数量。
可以得到，第一次询问作为一个信息源，它的熵大约为 2.289。也就是说，第一次询问可以得到 2.289 bits 的信息。
事 (cai) 实 (ce) 上如果采取最优策略，每一次询问包含的信息量都可以达到 2 bits 左右。

Algorithm 7

回到本题，一次询问的结果有 00、01、……、40、41、50 共 21 种。

第一次询问时可以将答案视为随机，因此每个结果发生的概率 = 所有五字母的排列中能产生该结果的排列数量/所有五字母的排列数量。

可以得到，第一次询问作为一个信息源，它的熵大约为 2.289。也就是说，第一次询问可以得到 2.289 bits 的信息。

事 (cai) 实 (ce) 上如果采取最优策略，每一次询问包含的信息量都可以达到 2 bits 左右。

确定一个五个不重复字母的排列需要至少 $\log_2(26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22) \approx 22.912$ bits 的信息量。因此其理论下界 $L = \left\lceil \frac{22.9125}{2.289} \right\rceil = 11$。

Algorithm 7

然而这道题还是不会做……

Algorithm 7

把答案视为一个随机事件，显然我们希望每次作出的询问能消除的不确定性尽可能大。

Algorithm 7

把答案视为一个随机事件，显然我们希望每次作出的询问能消除的不确定性尽可能大。

每次询问时，首先枚举所有可能的询问共 26^5 种。

对于每一种询问，在所有 $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$ 种可能的答案计算出它的返回值，最后统计出每个返回值出现的概率，从而计算出熵（消除的不确定性大小），选择最大的即可。

Algorithm 7

把答案视为一个随机事件，显然我们希望每次作出的询问能消除的不确定性尽可能大。

每次询问时，首先枚举所有可能的询问共 26^5 种。

对于每一种询问，在所有 $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$ 种可能的答案计算出它的返回值，最后统计出每个返回值出现的概率，从而计算出熵（消除的不确定性大小），选择最大的即可。

计算量约为 $26^5 \times 26^5 \times 5^2$，期望得分 0 分。

Algorithm 8

既然样本空间辣么大，在算法七的基础上进行随机化应该可以达到不错的效果！

Algorithm 8

既然样本空间辣么大，在算法七的基础上进行随机化应该可以达到不错的效果！

维护一个列表，保存满足之前所有询问结果的可能的答案。每次询问过后，扫描列表，去除不满足本次询问结果的元素。

Algorithm 8

既然样本空间辣么大，在算法七的基础上进行随机化应该可以达到不错的效果！

维护一个列表，保存满足之前所有询问结果的可能的答案。每次询问过后，扫描列表，去除不满足本次询问结果的元素。

不枚举所有可以做出的询问，而是随机选择 C 个五个字母的排列作为下一次询问的候选。对于每个候选，随机从上述答案列表中选择 T 个，在该候选询问上得到结果，并以此近似计算出该询问带来的信息量。

选择 C 个候选中信息量最大的进行 `makeAttempt` 即可。

Algorithm 8

既然样本空间辣么大，在算法七的基础上进行随机化应该可以达到不错的效果！

维护一个列表，保存满足之前所有询问结果的可能的答案。每次询问过后，扫描列表，去除不满足本次询问结果的元素。

不枚举所有可以做出的询问，而是随机选择 C 个五个字母的排列作为下一次询问的候选。对于每个候选，随机从上述答案列表中选择 T 个，在该候选询问上得到结果，并以此近似计算出该询问带来的信息量。

选择 C 个候选中信息量最大的进行 `makeAttempt` 即可。

实现时该列表直接采用数组，取 $C = 4096, T = 768$。在这个数量级上的 C 和 T 值都能在时限内达到很好的成绩。

Algorithm 8

最坏情况未知，期望单组数据尝试次数约为 12 (每次的信息量约为 2 bit)。实际尝试不同随机种子之后能够做到最大单组数据 11 次询问。

最坏情况未知，期望单组数据尝试次数约为 12 (每次的信息量约为 2 bit)。
实际尝试不同随机种子之后能够做到最大单组数据 11 次询问。
std 都有几率不拿蟒分，所以是 Challenge Accepted 啊……

(其实原来这题的中文名的想法是「 挑战不可能 」.....)

Acknowledgements

感谢~~跳票的~~验题菌 Tommyr7 以及真·验题菌们 wangyurzee 和 zjc。
感谢 arcGravitus、某菜鸡和 TkskKurumi（被）提供名字。
题目描述中所有电子设备均为虚构，如有雷同，请务必给我来一台。
感谢金老师和 CZR 的鼎力滋瓷，以及感谢大家能来做这次~~没啥区分度的偏~~题。