I Notion de nombre complexe

A La forme algébrique

DÉFINITION **Nombre complexe**

On appelle nombre complexe tout élément de la forme $x+iy$ où *x* et *y* sont des réels et *i* un élément vérifiant $i^2=-1$.

THÉORÈME **Forme algébrique**

L'écriture $z=x+iy$ (où *x* et *y* sont des réels) est appelée forme algébrique de *z*. Elle est unique.

DÉFINITION **Parties réelle et imaginaire**

Soit un nombre complexe $z=x+iy$ (où x et y sont réels) :

- On appelle partie réelle de z, notée $\text{Re}\left(z\right)$, le réel x.
- On appelle partie imaginaire de z, notée $\text{Im}\left(z\right)$, le réel y.

THÉORÈME **Nombres égaux**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

PROPRIÉTÉ

- Le nombre z est réel si et seulement si $\text{Im}\left(z\right)=0$.
- Le nombre z est imaginaire pur si et seulement si $\text{Re}\left(z\right)=0$.

B Le conjugué

DÉFINITION **Conjugué**

Soit un nombre complexe sous forme algébrique $z=x+iy$.
On appelle conjugué de *z*, noté $\overline{z}$, le complexe :

$$x-iy$$

PROPRIÉTÉ

Soient z et z' deux nombres complexes tels que $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$.

- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z+\overline{z}=2\text{Re}\left(z\right)$
- $z-\overline{z}=2i\,\text{Im}\left(z\right)$
- z est réel $\Leftrightarrow$ $z=\overline{z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z=-\overline{z}$
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$
- Si z' non nul : $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- Pour tout entier relatif n (avec $z\neq 0$ si $n<0$) : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$

C Le module

DÉFINITION **Module**

Soit un nombre complexe $z=x+iy$.
On appelle module de *z*, noté $\left|z\right|$, le réel :

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

PROPRIÉTÉ

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $z\overline{z} = |z|^2$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|z| = |-z|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- Si z' non nul : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Pour tout entier n : $|z^n| = |z|^n$

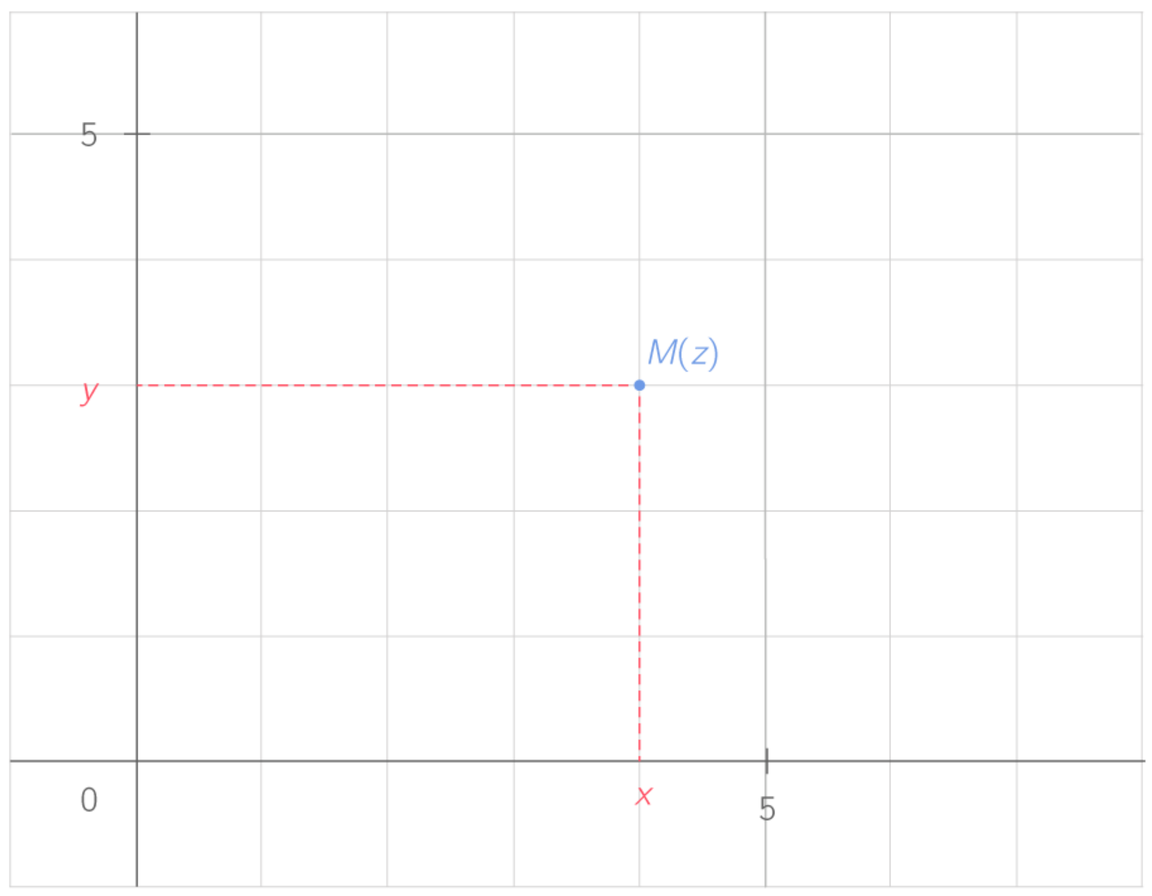
D La représentation analytique

THÉORÈME Affixe

Soit un repère orthonormal direct du plan $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$.

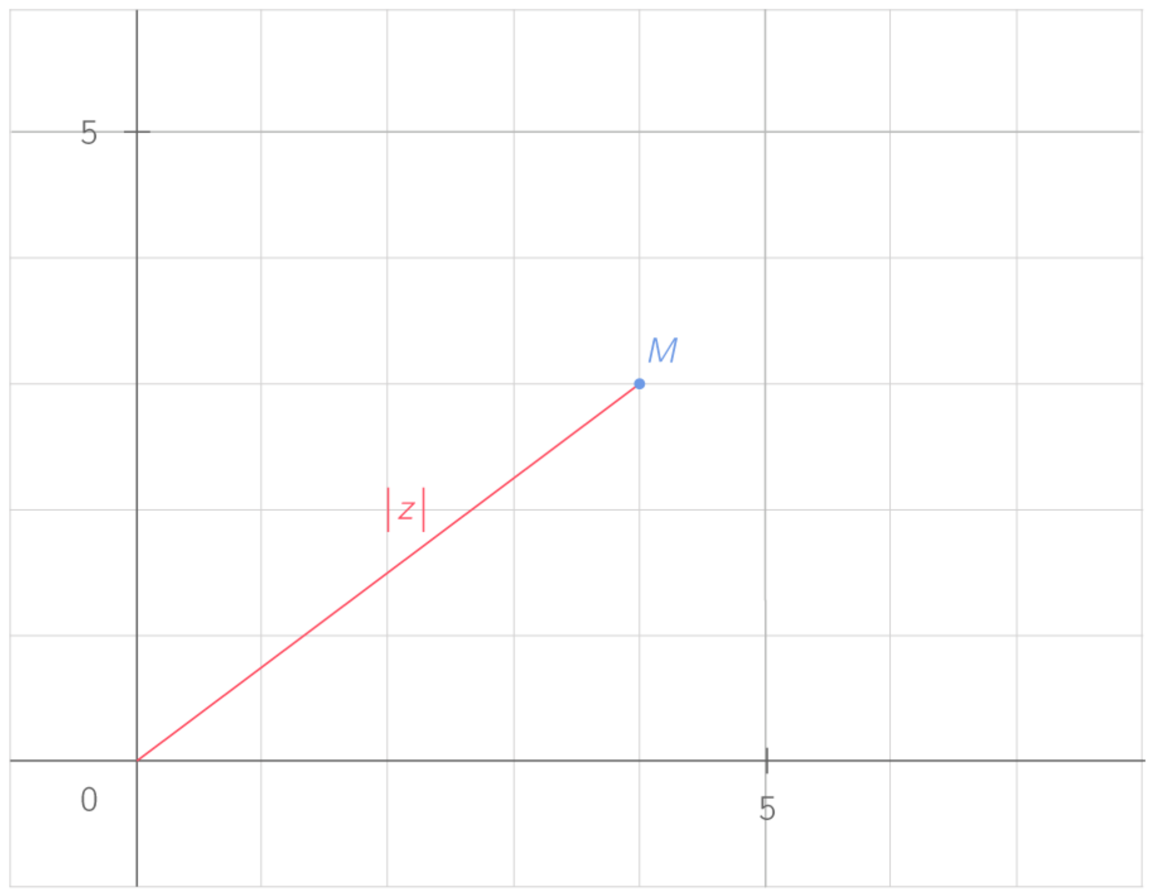
À tout point M de coordonnées $(x;y)$ on associe le nombre complexe $z = x+iy$:

- Le nombre complexe z est appelé affixe du point M (et du vecteur $\overrightarrow{OM}$).
- Le point M est appelé image du nombre complexe z. On définit ainsi le plan complexe.



PROPRIÉTÉ

Le module $|z|$ du nombre complexe *z*, affixe du point *M*, est égal à la distance *OM*.



PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont égaux si, et seulement s'ils ont même affixe.

ASTUCE

On peut se servir de la propriété précédente pour :

- Déterminer l'affixe d'un point D pour qu'un quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme, connaissant les affixes des points A, B et C.
- Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment.

II Les équations dans $\mathbb{C}$

ASTUCE

Les équations du premier degré d'inconnue *z* à coefficients réels se résolvent dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$.

ASTUCE

Les équations du premier degré faisant intervenir un nombre complexe *z* et son conjugué $\overline{z}$ se résolvent en remplaçant *z* et $\overline{z}$ par leurs formes algébriques.

THÉORÈME Équations du second degré

Soit une équation du second degré à coefficients réels du type az^2+bz+c, avec $a\neq 0$.

- Si $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions réelles :

$$z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, cette équation admet une solution (double) réelle :

$$z_0=\dfrac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, cette équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ASTUCE

Dans le cas où $\Delta < 0$, on aurait pu écrire :

$$z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

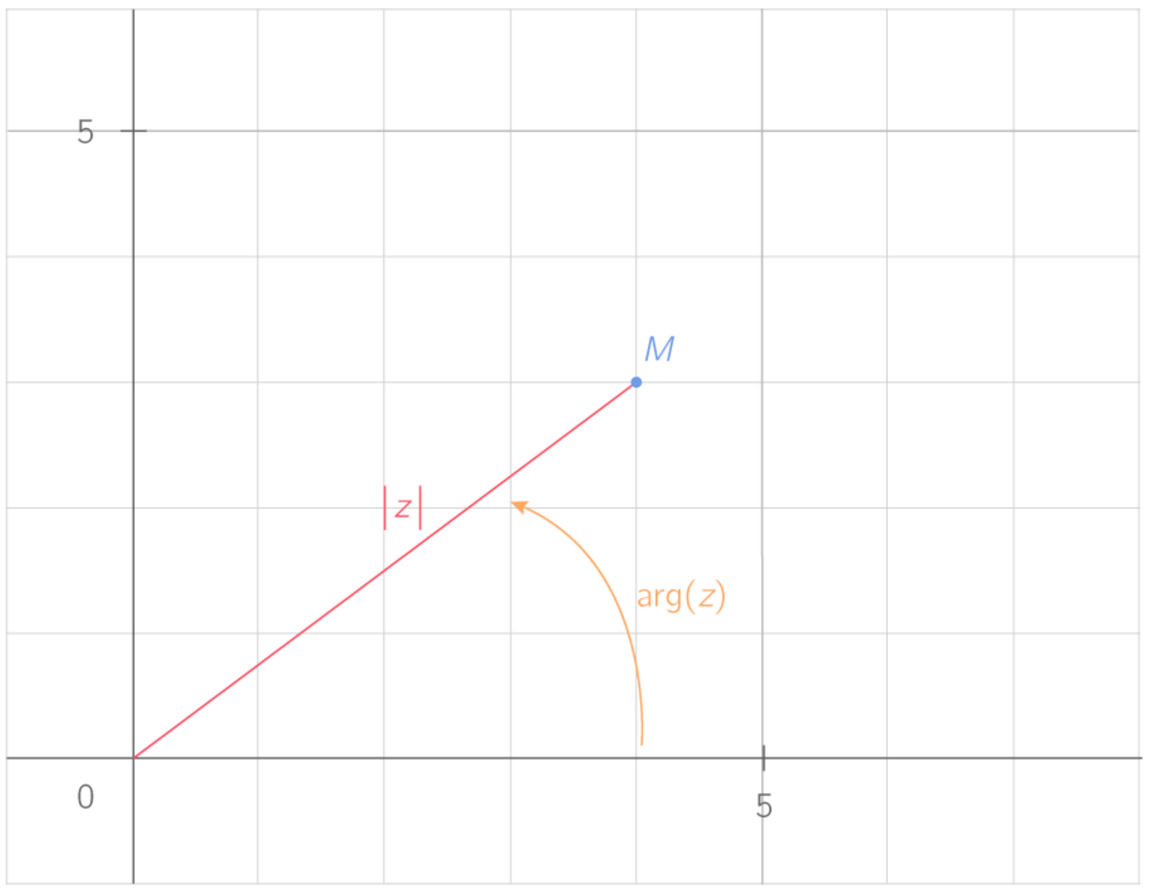
III Les formes trigonométriques et exponentielles

A La forme trigonométrique

DÉFINITION Argument

On appelle argument de *z*, noté $\arg\left(z\right)$ la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}\right)$:

$$\arg\left(z\right)=\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$$



THÉORÈME **Forme trigonométrique**

Soit un nombre complexe z non nul d'argument θ.

Alors $z = |z| \left(\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right)$.

$|z| \left(\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right)$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.

Réciproquement, si $z = r\left(\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right)$, avec $r > 0$ et θ réel quelconque, alors :

$$|z| = r$$
$$\arg\left(z\right) = \theta \left[2\pi\right]$$

PROPRIÉTÉ

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ et de forme algébrique $x + iy$, avec x et y réels. Alors :

$$x = |z| \cos\left(\theta\right) \text{ et } y = |z| \sin\left(\theta\right)$$

ASTUCE

Autrement dit :

$$\cos\left(\theta\right) = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin\left(\theta\right) = \frac{y}{|z|}$$

PROPRIÉTÉ

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg\left(zz'\right) = \arg\left(z\right) + \arg\left(z'\right) \left[2\pi\right]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg\left(z\right) \left[2\pi\right]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z\right) - \arg\left(z'\right) \left[2\pi\right]$
- Pour tout entier naturel n : $\arg\left(z^n\right) = n\arg\left(z\right) \left[2\pi\right]$
- z est réel $\Leftrightarrow$ $\arg\left(z\right) = 0 \left[2\pi\right]$ ou $\arg\left(z\right) = \pi \left[2\pi\right]$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\arg\left(z\right) = \dfrac{\pi}{2} \left[2\pi\right]$ ou $\arg\left(z\right) = -\dfrac{\pi}{2} \left[2\pi\right]$

B La forme exponentielle

DÉFINITION **Exponentielle complexe**

Pour tout réel θ, on pose :

$$e^{i\theta} = \cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)$$

THÉORÈME **Forme exponentielle**

Soit un nombre complexe *z* non nul d'argument θ.

Alors $z = |z|e^{i\theta}$.

$|z|e^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle du nombre complexe *z*.
Réciproquement, si $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et θ réel quelconque, alors :

$$|z| = r$$
$$arg\left(z\right) = \theta\left[2\pi\right]$$

PROPRIÉTÉ

Soient θ et θ' deux réels.

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $e^{i\left(\theta+\theta'\right)} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- Pour tout entier relatif n : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ (Cette formule s'appelle "formule de Moivre".)

PROPRIÉTÉ

Formule d'Euler

Soit θ un réel. Alors :

$\cos\left(\theta\right) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\left(\theta\right) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

ASTUCE

Ces formules permettent de linéariser $\left[\cos\left(\theta\right)\right]^n$ (ou $\left[\sin\left(\theta\right)\right]^n$) où *n* est un entier naturel et θ un réel quelconque, c'est-à-dire écrire $\left[\cos\left(\theta\right)\right]^n$ (ou $\left[\sin\left(\theta\right)\right]^n$) en fonction de $\cos\left(\theta\right)$, $\sin\left(\theta\right)$, $\cos\left(2\theta\right)$, $\sin\left(2\theta\right)$, ..., $\cos\left(n\theta\right)$ et $\sin\left(n\theta\right)$.

C L'interprétation géométrique

THÉORÈME **Distance**

Soient *A* et *B* deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

$$AB = |z_B - z_A|$$

PROPRIÉTÉ

Soient *A* et *B* deux points d'affixes respectives *a* et *b*.

L'ensemble des points *M* (d'affixe *z*) du plan complexe vérifiant $|z-a| = |z-b|$ est la médiatrice du segment $\left[AB\right]$.

ASTUCE

Autrement dit, si *A*, *B* et *M* sont des points du plan complexe d'affixes respectives *a*, *b* et *z*. Alors *M* appartient à la médiatrice du segment $\left[AB\right]$ si, et seulement si, $|z-a| = |z-b|$.

PROPRIÉTÉ

Soit Ω (d'affixe ω) un point du plan complexe et *r* un réel positif.

L'ensemble des points *M* (d'affixe *z*) tels que $|z-\omega| = r$ est le cercle de centre Ω et de rayon *r*.

ASTUCE

Autrement dit, si Ω (d'affixe *w*) est un point du plan complexe et *r* un réel positif, alors un point *M* d'affixe *z* appartient au cercle de centre Ω et de rayon *r* si, et seulement si, $|z-\omega| = r$.

ASTUCE

Soit Ω (d'affixe *w*) un point du plan complexe et *r* un réel positif.

L'ensemble des points *M* (d'affixe *z*) tels que $\left|z-\omega\right| < r$ est le disque ouvert de centre Ω et de rayon *r*.

L'ensemble des points *M* (d'affixe *z*) tels que $\left|z-\omega\right| > r$ est le plan entier privé du disque de centre Ω et de rayon *r*.

THÉORÈME **Angle**

Soient *A* et *B* deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

$$\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right)\,[2\pi]$$

THÉORÈME **Argument d'un quotient (1)**

Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 :

$$\left(\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2}\right) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\,[2\pi]$$

THÉORÈME **Argument d'un quotient (2)**

Soient *A*, *B* et *C* trois points distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\,[2\pi]$$