# Logarithme

#### Propriétés du logarithme népérien $\mathbf{A}$

#### 1 Caractérisation

La fonction logarithme népérien notée l<br/>n et définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  est définie par:

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$$

Le logarithme népérien est donc le réciproque de l'exponentielle

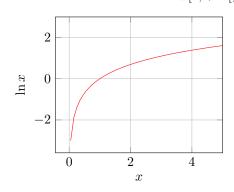
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln e^x = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln x} = x$$

## Signe

•  $\forall x \in ]0;1], \ln x \leq 0$ 

•  $\forall x \in [1; +\infty[, \ln x \geqslant 0]$ 



# Propriétés

 $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ :

• 
$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

• 
$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$
 •  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ 

• 
$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

 $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}$ :

• 
$$\ln x^n = n \ln x$$

• 
$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

# Étude du logarithme népérien

#### Limites

#### (a) Limites

Aux bornes de son ensemble de définition, les limites du logarithme népérien sont:

$$\bullet \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

### (b) Croissances comparées

$$\bullet \ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

1

## 2 Dérivée

### (a) Dérivée de $\ln x$

 $\ln x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$\ln \prime x = \frac{1}{x}$$

#### (b) Dérivée de $\ln u$

u est une fonction dérivable et strictement positive sur  $I,\,\ln u$  est alors dérivable sur I

$$(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

### 3 Logarithme décimal

#### (a) Définition

La fonction logarithme décimal notée log est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  est définie par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

### (b) Propriétés

 $\forall n \in \mathbb{N}:$ 

• 
$$\log 10 = 1$$

• 
$$\log 10^n = n$$