Logarithme

A Propriétés du logarithme népérien

1 Caractérisation

La fonction logarithme népérien notée ln et définie sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ est définie par:

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$$

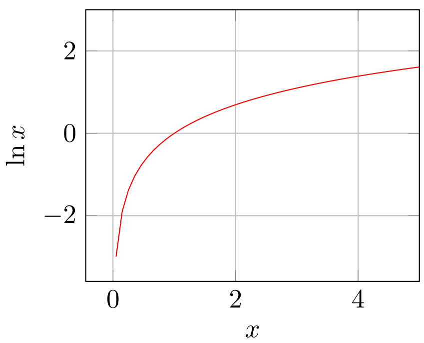
Le logarithme népérien est donc le réciproque de l'exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln e^x = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln x} = x$$

2 Signe

- $\forall x \in]0;1]$, $\ln x \leqslant 0$
- $\forall x \in [1;+\infty[$, $\ln x \geqslant 0$



3 Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$:

- $\ln xy = \ln x + \ln y$
- $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln x^n = n \ln x$
- $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

B Étude du logarithme népérien

1 Limites

(a) Limites

Aux bornes de son ensemble de définition, les limites du logarithme népérien sont:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

(b) Croissances comparées

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

2 Dérivée

(a) Dérivée de $\ln x$

$\ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\ln\prime x = \frac{1}{x}$$

(b) Dérivée de $\ln u$

u est une fonction dérivable et strictement positive sur I, $\ln u$ est alors dérivable sur I

$$\forall x \in I, (\ln u)\prime(x) = \frac{u\prime(x)}{u(x)}$$

3 Logarithme décimal

(a) Définition

La fonction logarithme décimal est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ est définie par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

(b) Propriétés

$\forall n \in \mathbb{N}$:

- $\log 10 = 1$
- $\log 10^n = n$