

Logarithme

A Propriétés du logarithme népérien

1 Caractérisation

La fonction logarithme népérien notée \ln et définie sur \mathbb{R}^{+*} est définie par:

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$$

Le logarithme népérien est donc le réciproque de l'exponentielle

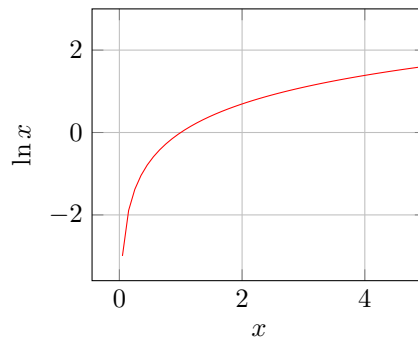
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln e^x = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln x} = x$$

2 Signe

$$\bullet \forall x \in]0; 1], \ln x \leq 0$$

$$\bullet \forall x \in [1; +\infty[, \ln x \geq 0$$



3 Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\bullet \ln xy = \ln x + \ln y$$

$$\bullet \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\bullet \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\bullet \ln x^n = n \ln x$$

$$\bullet \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

B Étude du logarithme népérien

1 Limites

(a) Limites

Aux bornes de son ensemble de définition, les limites du logarithme népérien sont:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

(b) Croissances comparées

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

2 Dérivée

(a) Dérivée de $\ln x$

$\ln x$ est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

(b) Dérivée de $\ln u$

u est une fonction dérivable et strictement positive sur I , $\ln u$ est alors dérivable sur I

$$(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

3 Logarithme décimal

(a) Définition

La fonction logarithme décimal notée \log est définie sur \mathbb{R}^{+*} est définie par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

(b) Propriétés

$\forall n \in \mathbb{N}$:

- $\log 10 = 1$
- $\log 10^n = n$