Suites

A Etude

1 Majorée, minorée, bornée

Dire que (u_n) est majorée (resp. minorée) par un réel M (resp. m) c'est $u_n \leqslant M$ et $m \leqslant u_n$.
Dire que (u_n) est bornée, c'est dire qu'elle est à la fois majorée et minorée.

$$m \leqslant u_n \leqslant M$$

2 Arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique: $u_n = u_0 + nr$.
La somme des termes est

$$S = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

3 Géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique: $u_n = u_0 \times q^n$.
La somme des termes est

$$S = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

B Limites

1 Étude

Une limite de suite ne peut être étudiée qu'en $+\infty$.
Une suite est convergente si et seulement si elle admet une limite finie, elle est forcément bornée.
Ainsi, une suite est divergente si et seulement si elle admet une limite infinie.

2 Suite géométrique

Soit un réel q:

$$\text{Si } -1 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$
$$\text{Si } 1 < q \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$
$$\text{Si } q \leqslant -1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = \varnothing$$
$$\text{Si } q = 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = 1$$

3 Calcul de limites

Soit (u_n) et (v_n)

(a) Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$L\prime$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$L + L\prime$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Indéterminée

(*b*) Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$L\prime$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$L \times L\prime$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Indéterminée

(*c*) Quotient si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$L\neq 0$	$-\infty$ ou $-\infty$	$L\prime>0$	$L\prime<0$	$L\prime>0$	$L\prime<0$	$-\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L\prime}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Indéterminée

(*d*) Quotient si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Indéterminée

C Comparaison

1 Théorème des gendarmes/d'encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n)

Si

- $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
- (u_n) et (w_n) convergent toutes deux vers L

Alors (v_n) converge vers L

D Raisonnement par récurrence

1 Initialisation

On vérifie si la propriété est vraie au premier rang p.

2 Hérédité

On vérifie si cette propriété est vraie pour un certain rang k.

3 Conclusion

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel à partir de p.