Hugo Lageneste
Mathématiques - Nombres complexes

Nombres complexes

A Nombre complexe

1 Forme algébrique

(a) Définition

La forme algébrique de z est notée

$$z = a + bi$$

(b) Parties réelle et imaginaire

Les parties réelles et imaginaires de z sont a et b, notées

$$Re(z) = a \qquad Im(z) = b$$

2 Conjugué

(a) Définition

Le conjugué de z noté $\bar{z}$ est défini par $\bar{z} = a + bi$

(b) Propriétés

- $\bar{z} + z = 2Re(z)$
- $\bar{z} - z = 2iIm(z)$
- $\overline{z + z\prime} = \bar{z} + \bar{z\prime}$
- $\overline{zz\prime} = \bar{z} \times \bar{z\prime}$
- Si $z\prime$ non nul: $\overline{\left(\frac{z}{z\prime}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z\prime}}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

3 Module

(a) Définition

On appelle module de z, $|z|$ défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(b) Propriétés

- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z| = |-z|$
- $|zz\prime| = |z| \times |z|$
- Si $z\prime$ non nul: $\left|\frac{z}{z\prime}\right| = \frac{|z|}{|z\prime|}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $|z^n| = |z|^n$

4 Représentation

Soit un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$
Le point $M\,(a; b)$ a pour affixe $z = a + bi$
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a donc pour affixe z et $|z| = OM$

B Équations dans $\mathbb{C}$

1 Polynômes du second degré

Soit $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$

- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta = 0$, il y a une solution réelle
$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes

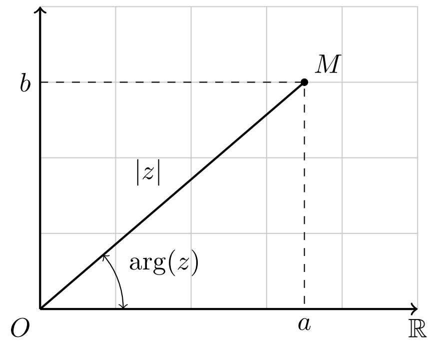
$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

C Formes trigonométriques et exponentielles

1 Argument

On note $\arg(z)$ la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$

$$\arg(z) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})[2\pi]$$



Représentation de l'angle orienté $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$

2 Forme trigonométrique

(a) Définition

Soit z d'argument θ

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

(b) Propriétés

- $\arg(zz\prime) = \arg(z) + \arg(z\prime)[2\pi]$
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(\frac{z}{z\prime}) = \arg(z) - \arg(z\prime)[2\pi]$
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$
- z est réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0[2\pi]$ ou $\arg(z) = \pi[2\pi]$
- z est imaginaire $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3 Forme exponentielle

(a) Définition

$\forall\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Soit z d'argument θ

$$z = |z|e^{i\theta}$$

(b) Propriétés

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $e^{i(\theta+\theta\prime)} = e^{i\theta}e^{i\theta\prime}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

(c) Formule d'Euler

$\forall\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

D Interprétation géométrique

1 Distance

$$AB = |z_B - z_A|$$

2 Angle

$$\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

3 Argument d'un quotient

$$(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$