Assignment 1013

1 Problem 1

$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in var\_name, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in var\_name, s_1(y) = s_2(y))\}$

2 Problem 2

2.1 a)

$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in var\_name, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in var\_name, s_1(y) = s_2(y))\}$

2.2 b)

结合上课所学的结论知道，其唯一不动点为:

$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in var\_name, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in var\_name, s_1(y) = s_2(y))\}$

3 Problem 3

以示区分，记这里的偏序关系为 $\leq_{\mathbb{N}}$ $(=)$

偏序集:

- 自反性成立：$\forall a \in N, a \leq_{\mathbb{N}} a(a = a)$
- 反对称成立: $\forall a, b \in N, a \leq_{\mathbb{N}} b(a = b), b \leq_{\mathbb{N}} a(b = a) \Rightarrow a \leq_{\mathbb{N}} b(a = b)$
- 传递性成立：$\forall a, b, c \in N, a \leq_{\mathbb{N}} b(a = b), b \leq_{\mathbb{N}} c(b = c) \Rightarrow a \leq_{\mathbb{N}} c(a = c)$

为偏序集.

完备性:

对于链 $S = \emptyset$, 假设其存在上确界 $lub(\emptyset) \in \mathbb{N}$, 根据完备性的定义, 如果某个 $b \in \mathbb{N}$ 满足 $\forall a \in S, a \leq_{\mathbb{N}} b(a = b)$, 那么$lub(\emptyset) \leq_{\mathbb{N}} b$ $(b = lub(\emptyset))$, 即 b 为一个上界。

然而，由于 $S = \emptyset$，$\mathbb{N}$ 中任意一个元素 b 都满足 $\forall a \in S, a = b(a \leq_{\mathbb{N}} b)$ 的条件，即 $\mathbb{N}$ 中元素均为 S 的上界。由$\forall b \in \mathbb{N}, b = lub(\emptyset)$, 从而 $lub(\emptyset)$ 有多个不等的值，矛盾!

综上所述，$(\mathbb{N}, =)$ 不是一个完备偏序集。

4 Problem 4

偏序集满足:

- 自反性成立：$\forall a \in A, a \subseteq a$
- 反对称成立: $\forall a, b \in A, a \subseteq b, b \subseteq a \Rightarrow a = b$
- 传递性成立: $\forall a, b, c \in A, a \subseteq b, b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c$

为偏序集。

完备性不成立:

对于任意 $S \subseteq A$, 如果其中任意元素都可以进行比较，并不能推出其有上确界。

比如考虑链 $S = \{\{1\}, \{1, 2\}\ldots, \{1, 2, 3, \cdots, n\}, \{1, 2, 3, \cdots, n, n+1\}, \cdots\}$, 并没有上确界。实际上，$S$ 中并不存在一个元素是如下的形式：$\{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$，即在 S 中，并不存在无穷子集。如果我们记 S 中第 i 个元素是 $S(i) = \{1, 2, 3, 4, \ldots, i\}$, 那么 $lim_{i \to \infty} S(i)$ 的话就是 $\mathbb{N}$，即 S 的上确界 $\bigcup S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S(i) = \mathbb{N}$. 然而，根据偏序关系的定义，上确界需要在集合 A 中，而 A 仅包含 $\mathbb{N}$ 的有穷子集，这就说明了 S 并没有上确界。

所以不是完备偏序集。

5 Problem 5

由课程中已知结论，$(\mathbb{N}, D)$ 是一个完备偏序集。

5.1 若$m = 0$

则对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 若$a|b$, 有 $F(a) = gcd(a, 0) = a, F(b) = gcd(b, 0) = b$, 而 $a|b$, 所以满足单调性。

5.2 若$m \neq 0$

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}_+$, 若$a|b$, 设$b = ak, k \in N$, 则 $gcd(b, m) = gcd(ak, m)$ 。由质因数分解定理可知， $gcd(a, m)$ 是 ak, m 的公约数。而公约数整除最大公约数，即 $F(a)|F(b)$.

当$b = 0$ 时，也有$F(a)|F(0) = 0$

综上所述，$F(n)$ 为 $(\mathbb{N}, D)$ 上的单调函数。

6 Problem 6

由课程中已知结论，$(\mathbb{N}, D)$ 是一个完备偏序集。

6.1 若$m = 0$

单调： 则对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 若$a|b$, 有 $F(a) = lcm(a, 0) = 0, F(b) = lcm(b, 0) = 0$, 而 $0|0$, 所以满足单调性。

连续： 而对任意一条链 S, 有 $lub(F(S)) = lub(0) = 0 = F(lub(S))$, 所以连续性满足。

6.2 若$m \neq 0$

单调： 对于任意 $a, b \in \mathbb{N}_+$, 若$a|b$, 设$b = ak, k \in N$, 则 $lcm(b, m) = lcm(ak, m) = \frac{akm}{gcd(ak,m)}$. 而

$$\begin{aligned}
lcm(a, m) | \frac{akm}{gcd(ak, m)} &\iff \frac{am}{gcd(a, m)} | \frac{akm}{gcd(ak, m)} \\
&\iff \exists d \in N_+, s.t. \quad amd \cdot gcd(ak, m) = akm \cdot gcd(a, m) \\
&\iff \exists d \in N_+, s.t. \quad d \cdot gcd(ak, m) = gcd(ak, mk) \\
&\iff gcd(ak, m) \mid gcd(ak, mk)
\end{aligned}$$

而 $gcd(ak, m)$ 是 ak, mk 的公约数，整除其最大公约数，即 $F(a)|F(b)$.

若 $b = 0$, 则 $F(a)|F(0) = 0$, 所以 $F(n)$ 为 $(\mathbb{N}, D)$ 上的单调函数。

连续： 而对任意一条链 S：

1. 链 S 无穷，由课上结论，知 $lub(S) = 0$. 结合单调性，知$F(S)$ 也为无穷链，于是得$lub(F(S)) = 0$，所以 $F(lub(S)) = 0 = lub(F(S))$
2. 链 S 有限. 那么 $lub(S)$ 为S 的最小公倍数。结合 F 的单调性，知$F(S)$为有穷链，$lub(F(S))$ 为 $F(S)$ 的最小公倍数.

   $$F(lub(S)) \geq F(s), \forall s \in S$$

   所以 $F(lub(S))$ 是 $F(S)$ 的一个上界。而由上确界定义知，

   $$lub(F(S)) \leq F(lub(S))$$

   另一方面，由于偏序关系为整除，$lub(S)$ 其实就是 S 中最大的元素。即 $lub(S) \in S$, 由上确界是上界知：

   $$lub(F(S)) \geq F(lub(S))$$

   综上所述，$lub(F(S)) = F(lub(S))$

7 Problem 7

7.1 完备偏序集

为偏序集

- 自反性成立：
  - 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $n \leq_A n$
  - 对于 ω, 有 $\omega \leq_A \omega$
  - 对于 $\omega + 1$, 有 $\omega + 1 \leq_A \omega + 1$
- 传递性成立：
  - 对于 $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m$, $m \leq_A k$, 成立 $n \leq_A k$, 因为 $(n \leq m \leq k)$
  - 对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m$, $m \leq_A \omega$, 成立 $n \leq_A \omega$
  - 对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m$, $m \leq_A \omega + 1$, 成立 $n \leq_A \omega + 1$

- 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A \omega$, $\omega \leq_A \omega+1$, 成立 $n \leq_A \omega+1$

- 反对称性成立:
  - 对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m$, $m \leq_A n$, 则有 $m \leq n, n \leq m$, 从而 $m = n$
  - 对于 $\forall a \in A$, 若 $a \leq_A \omega$, $\omega \leq_A a$, 则有$a = \omega$
  - 对于 $\forall a \in A$, 若 $a \leq_A \omega+1$, $\omega+1 \leq_A a$, 则有$a = \omega+1$

完备性成立

对于任意链 $S \subseteq A$:

- 若 $S \subseteq N$,
  - 若 S 有限，则 $lub(S) = max(S)$，这里 max 即由普通的整数大小比较关系确定。
  - 若 S 无限, 则由于 S 为集合，不存在重复元素，那么其元素必然不断递增，从而其 $lub(S) = \omega$
- 若 $S = \{\omega\} \cup S', S' \subseteq N$, 则 $lub(S) = \omega$
- 若 $\omega+1 \in S, S \subseteq A$, 则 $lub(S) = \omega+1$

综上，$(A, \leq_A)$ 是一个完备偏序集。

7.2 单调函数但不是连续函数

已知 $(A, \leq_A)$ 是一个完备偏序集，

`succ` 单调性成立

- 对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m$, 则有 $succ(n) = n+1 \leq m+1 = succ(m)$ ，也即 $succ(n) \leq_A succ(m)$
- 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有(若) $n \leq_A \omega$ 且 $succ(n) = n+1 \leq_A succ(\omega) = \omega+1$
- 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有(若) $n \leq_A \omega+1$ 且 $succ(n) = n+1 \leq_A succ(\omega+1) = \omega+1$
- $\omega \leq_A \omega \to succ(\omega) = \omega+1 \leq_A \omega+1 = succ(\omega)$
- $\omega \leq_A \omega+1 \to succ(\omega) = \omega+1 \leq_A \omega+1 = succ(\omega+1)$
- $\omega+1 \leq_A \omega+1 \to succ(\omega+1) = \omega+1 \leq_A \omega+1 = succ(\omega+1)$

succ连续性不成立

对于一条链 $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$. 有$lub(S) = \omega, succ(lub(S)) = w+1$. 但是 $lub(succ(S)) = \omega$. 所以连续性不成立。

7.3 Bot不是不动点

$$succ(lub(\perp, succ(\perp), succ(succ(\perp)), \ldots)) = succ(\omega) = \omega+1$$

然而，

$$lub(\perp, succ(\perp), succ(succ(\perp)), \ldots) = \omega$$

所以 $lub(\perp, succ(\perp), succ(succ(\perp)), \ldots)$ 不是 `succ` 的不动点。