

# Assignment 1013

## 1 Problem 1

$$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in \text{var\_name}, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in \text{var\_name}, s_1(y) = s_2(y))\}$$

## 2 Problem 2

### 2.1 a)

$$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in \text{var\_name}, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in \text{var\_name}, s_1(y) = s_2(y))\}$$

### 2.2 b)

结合上课所学的结论知道，其唯一不动点为：

$$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in \text{var\_name}, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in \text{var\_name}, s_1(y) = s_2(y))\}$$

## 3 Problem 3

方便区分，记这里的偏序关系为  $\leq_{\mathbb{N}}$

偏序集：

- 自反性成立：  $\forall a \in N, a \leq_{\mathbb{N}} a (a = a)$
- 反对称成立：  $\forall a, b \in N, a \leq_{\mathbb{N}} b (a = b), b \leq_{\mathbb{N}} a (b = a) \Rightarrow a \leq_{\mathbb{N}} b (a = b)$
- 传递性成立：  $\forall a, b, c \in N, a \leq_{\mathbb{N}} b (a = b), b \leq_{\mathbb{N}} c (b = c) \Rightarrow a \leq_{\mathbb{N}} c (a = c)$

为偏序集。

完备性：

对于任意  $S \subseteq \mathbb{N}$ ，如果  $S$  中任意两个元素之间可以大小比较，即相等的话，那  $S$  中仅含一个元素，记为  $a$ 。那么显然  $\text{lub}(S) = a$ 。于是有  $a \leq_{\mathbb{N}} \text{lub}(S)$

如果某个  $b \in \mathbb{N}, s.t. \forall a' \in S, a' \leq_{\mathbb{N}} b (a' = b)$ ，那么显然  $b = a$ ，即  $\text{lub}(S) \leq_{\mathbb{N}} b$

综上所述， $(\mathbb{N}, =)$  是一个完备偏序集。

## 4 Problem 4

偏序集满足：

- 自反性成立：  $\forall a \in A, a \subseteq a$
- 反对称成立：  $\forall a, b \in A, a \subseteq b, b \subseteq a \Rightarrow a = b$
- 传递性成立：  $\forall a, b, c \in A, a \subseteq b, b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c$

为偏序集。

完备性不成立：

对于任意  $S \subseteq A$ ，如果其中任意元素都可以进行比较，并不能推出其有上确界。

比如考虑链  $S = \{\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, n\}, \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}, \dots\}$ ，并没有上确界。实际上， $S$  中并不存在一个元素是如下的形式： $\{1, 2, 3, \dots, \infty\}$ ，即在  $S$  中，并不存在无穷子集。如果我们记  $S$  中第  $i$  个元素是  $S(i) = \{1, 2, 3, 4, \dots, i\}$ ，那么  $\lim_{i \rightarrow \infty} S(i)$  的话就是  $\mathbb{N}$ ，即  $S$  的上确界  $\bigcup S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S(i) = \mathbb{N}$ 。然而，根据偏序关系的定义，上确界需要在集合  $A$  中，而  $A$  仅包含  $\mathbb{N}$  的有穷子集，这就说明了  $S$  并没有上确界。

所以不是完备偏序集。

## 5 Problem 5

由课程中已知结论， $(\mathbb{N}, D)$  是一个完备偏序集。

5.1 若 $m = 0$

则对于任意  $a, b \in \mathbb{N}$ , 若  $a|b$ , 有  $F(a) = gcd(a, 0) = a, F(b) = gcd(b, 0) = b$ , 而  $a|b$ , 所以满足单调性。

5.2 若 $m \neq 0$

对于任意  $a, b \in \mathbb{N}_+$ , 若  $a|b$ , 设  $b = ak, k \in \mathbb{N}$ , 则  $gcd(b, m) = gcd(ak, m)$ 。由质因数分解定理可知,  $gcd(a, m)$  是  $ak, m$  的公约数。而公约数整除最大公约数, 即  $F(a)|F(b)$ 。

当 $b = 0$  时, 也有 $F(a)|F(0) = 0$

综上所述,  $F(n)$  为  $(\mathbb{N}, D)$  上的单调函数。

6 Problem 6

由课程中已知结论,  $(\mathbb{N}, D)$  是一个完备偏序集。

6.1 若 $m = 0$

**单调:** 则对于任意  $a, b \in \mathbb{N}$ , 若  $a|b$ , 有  $F(a) = lcm(a, 0) = 0, F(b) = lcm(b, 0) = 0$ , 而  $0|0$ , 所以满足单调性。

**连续:** 而对任意一条链  $S$ , 有  $lub(F(S)) = lub(0) = 0 = F(lub(S))$ , 所以连续性满足。

6.2 若 $m \neq 0$

**单调:** 对于任意  $a, b \in \mathbb{N}_+$ , 若  $a|b$ , 设  $b = ak, k \in \mathbb{N}$ , 则  $lcm(b, m) = lcm(ak, m) = \frac{akm}{gcd(ak, m)}$ 。而

$$\begin{aligned} lcm(a, m) | \frac{akm}{gcd(ak, m)} &\iff \frac{am}{gcd(a, m)} | \frac{akm}{gcd(ak, m)} \\ \iff \exists d \in \mathbb{N}_+, s.t. \quad amd \cdot gcd(ak, m) &= akm \cdot gcd(a, m) \\ \iff \exists d \in \mathbb{N}_+, s.t. \quad d \cdot gcd(ak, m) &= gcd(ak, mk) \\ \iff gcd(ak, m) | gcd(ak, mk) \end{aligned}$$

而  $gcd(ak, m)$  是  $ak, mk$  的公约数, 整除其最大公约数, 即  $F(a)|F(b)$ 。

若  $b = 0$ , 则  $F(a)|F(0) = 0$ , 所以  $F(n)$  为  $(\mathbb{N}, D)$  上的单调函数。

**连续:** 而对任意一条链  $S$ :

1. 链  $S$  无穷, 由课上结论, 知  $lub(S) = 0$ . 结合单调性, 知 $F(S)$  也为无穷链, 于是得 $lub(F(S)) = 0$ , 所以  $F(lub(S)) = 0 = lub(F(S))$
2. 链  $S$  有限. 那么  $lub(S)$  为 $S$  的最小公倍数。结合  $F$  的单调性, 知 $F(S)$ 为有穷链,  $lub(F(S))$  为  $F(S)$  的最小公倍数。

$$F(lub(S)) \geq F(s), \forall s \in S$$

所以  $F(lub(S))$  是  $F(S)$  的一个上界。而由上确界定义知,

$$lub(F(S)) \leq F(lub(S))$$

另一方面, 由于偏序关系为整除,  $lub(S)$  其实就是  $S$  中最大的元素。即  $lub(S) \in S$ , 由上确界是上界知:

$$lub(F(S)) \geq F(lub(S))$$

综上所述,  $lub(F(S)) = F(lub(S))$

7 Problem 7

7.1 完备偏序集

为偏序集

- 自反性成立:
  - 对于  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有  $n \leq_A n$
  - 对于  $\omega$ , 有  $\omega \leq_A \omega$
  - 对于  $\omega + 1$ , 有  $\omega + 1 \leq_A \omega + 1$
- 传递性成立:
  - 对于  $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$ , 若  $n \leq_A m, m \leq_A k$ , 成立  $n \leq_A k$ , 因为  $(n \leq m \leq k)$
  - 对于  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , 若  $n \leq_A m, m \leq_A \omega$ , 成立  $n \leq_A \omega$
  - 对于  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , 若  $n \leq_A m, m \leq_A \omega + 1$ , 成立  $n \leq_A \omega + 1$

- 对于  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 若  $n \leq_A \omega$ ,  $\omega \leq_A \omega + 1$ , 成立  $n \leq_A \omega + 1$
- 反对称性成立:
  - 对于  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , 若  $n \leq_A m$ ,  $m \leq_A n$ , 则有  $m \leq n, n \leq m$ , 从而  $m = n$
  - 对于  $\forall a \in A$ , 若  $a \leq_A \omega$ ,  $\omega \leq_A a$ , 则有  $a = \omega$
  - 对于  $\forall a \in A$ , 若  $a \leq_A \omega + 1$ ,  $\omega + 1 \leq_A a$ , 则有  $a = \omega + 1$

#### 完备性成立

对于任意链  $S \subseteq A$ :

- 若  $S \subseteq N$ , 则  $\text{lub}(S) = \max(S)$ , 这里  $\max$  即由普通的整数大小比较关系确定。
- 若  $S = \{\omega\} \cup S', S' \subseteq N$ , 则  $\text{lub}(S) = \omega$
- 若  $\omega + 1 \in S, S \subseteq A$ , 则  $\text{lub}(S) = \omega + 1$

综上,  $(A, \leq_A)$  是一个完备偏序集。

## 7.2 单调函数但不是连续函数

已知  $(A, \leq_A)$  是一个完备偏序集,

#### **succ** 单调性成立

- 对于  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , 若  $n \leq_A m$ , 则有  $\text{succ}(n) = n + 1 \leq m + 1 = \text{succ}(m)$ , 也即  $\text{succ}(n) \leq_A \text{succ}(m)$
- 对于  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有(若)  $n \leq_A \omega$  且  $\text{succ}(n) = n + 1 \leq_A \text{succ}(\omega) = \omega + 1$
- 对于  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有(若)  $n \leq_A \omega + 1$  且  $\text{succ}(n) = n + 1 \leq_A \text{succ}(\omega + 1) = \omega + 1$
- $\omega \leq_A \omega \rightarrow \text{succ}(\omega) = \omega + 1 \leq_A \omega + 1 = \text{succ}(\omega)$
- $\omega \leq_A \omega + 1 \rightarrow \text{succ}(\omega) = \omega + 1 \leq_A \omega + 1 = \text{succ}(\omega + 1)$
- $\omega + 1 \leq_A \omega + 1 \rightarrow \text{succ}(\omega + 1) = \omega + 1 \leq_A \omega + 1 = \text{succ}(\omega + 1)$

#### **succ**连续性不成立

对于一条链  $S = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ . 有  $\text{lub}(S) = \omega, \text{succ}(\text{lub}(S)) = \omega + 1$ . 但是  $\text{lub}(\text{succ}(S)) = \omega$ . 所以连续性不成立。

## 7.3 Bot不是不动点

$$\text{succ}(\text{lub}(\perp, \text{succ}(\perp), \text{succ}(\text{succ}(\perp)), \dots)) = \text{succ}(\omega) = \omega + 1$$

然而,

$$\text{lub}(\perp, \text{succ}(\perp), \text{succ}(\text{succ}(\perp)), \dots) = \omega$$

所以  $\text{lub}(\perp, \text{succ}(\perp), \text{succ}(\text{succ}(\perp)), \dots)$  不是 **succ** 的不动点。