

# 指称语义

## 1 简单表达式的指称语义

指称语义是一种定义程序行为的方式。在极简的 SimpleWhile 语言中，整数类型表达式中只有整数常量、变量、加法、减法与乘法运算。

```
EI ::= N | V | EI + EI | EI - EI | EI * EI
```

我们约定其中整数变量的值、整数运算的结果都是没有范围限制的。基于这一约定，我们可以如下定义表达式  $e$  在程序状态  $st$  上的值。

首先定义程序状态集合：

$$\text{state} \triangleq \text{var\_name} \rightarrow \mathbb{Z}$$

```
Definition state: Type := var_name -> Z.
```

- $\llbracket n \rrbracket(s) = n$
- $\llbracket x \rrbracket(s) = s(x)$
- $\llbracket e_1 + e_2 \rrbracket(s) = \llbracket e_1 \rrbracket(s) + \llbracket e_2 \rrbracket(s)$
- $\llbracket e_1 - e_2 \rrbracket(s) = \llbracket e_1 \rrbracket(s) - \llbracket e_2 \rrbracket(s)$
- $\llbracket e_1 * e_2 \rrbracket(s) = \llbracket e_1 \rrbracket(s) * \llbracket e_2 \rrbracket(s)$

其中  $s \in \text{state}$ 。

下面使用 Coq 递归函数定义整数类型表达式的行为。

```
Fixpoint eval_expr_int (e: expr_int) (s: state) : Z :=
  match e with
  | EConst n => n
  | EVar X   => s X
  | EAdd e1 e2 => eval_expr_int e1 s + eval_expr_int e2 s
  | ESub e1 e2 => eval_expr_int e1 s - eval_expr_int e2 s
  | EMul e1 e2 => eval_expr_int e1 s * eval_expr_int e2 s
  end.
```

下面是两个具体的例子。

```
Example eval_example1: forall (s: state),
  s "x" = 1 ->
  s "y" = 2 ->
  eval_expr_int ["x" + "y"] s = 3.
Proof. intros. simpl. rewrite H, H0. reflexivity. Qed.
```

```

Example eval_example2: forall (s: state),
  s "x" = 1 ->
  s "y" = 2 ->
  eval_expr_int ["x" * "y" + 1] s = 3.
Proof. intros. simpl. rewrite H, H0. reflexivity. Qed.

```

## 2 行为等价

基于整数类型表达式的语义定义 `eval_expr_int`，我们可以定义整数类型表达式之间的行为等价（亦称语义等价）：两个表达式 `e1` 与 `e2` 是等价的当且仅当它们在任何程序状态上的求值结果都相同。

$$e_1 \equiv e_2 \quad \text{iff.} \quad \forall s. \llbracket e_1 \rrbracket(s) = \llbracket e_2 \rrbracket(s)$$

```

Definition expr_int_equiv (e1 e2: expr_int): Prop :=
  forall st, eval_expr_int e1 st = eval_expr_int e2 st.

```

```

Notation "e1 '~=' e2" := (expr_int_equiv e1 e2)
  (at level 69, no associativity).

```

下面是一些表达式语义等价的例子。

**Example 1.**  $x * 2 \equiv x + x$

证明. 对于任意程序状态  $s$ ,  $\llbracket x * 2 \rrbracket(s) = s(x) * 2 = s(x) + s(x) = \llbracket x + x \rrbracket(s)$ . □

```

Example expr_int_equiv_sample:
  ["x" + "x"] ~== ["x" * 2].

```

```

Proof.
  intros.
  unfold expr_int_equiv.

```

上面的 `unfold` 指令表示展开一项定义，一般用于非递归的定义。

```

intros.
simpl.
lia.
Qed.

Lemma zero_plus_equiv: forall (a: expr_int),
  [[0 + a]] ==~ a.
(* 证明详见Coq源代码。 *)

Lemma plus_zero_equiv: forall (a: expr_int),
  [[a + 0]] ==~ a.
(* 证明详见Coq源代码。 *)

Lemma minus_zero_equiv: forall (a: expr_int),
  [[a - 0]] ==~ a.
(* 证明详见Coq源代码。 *)

Lemma zero_mult_equiv: forall (a: expr_int),
  [[0 * a]] ==~ 0.
(* 证明详见Coq源代码。 *)

Lemma mult_zero_equiv: forall (a: expr_int),
  [[a * 0]] ==~ 0.
(* 证明详见Coq源代码。 *)

Lemma const_plus_const: forall n m: Z,
  [[EConst n + EConst m]] ==~ EConst (n + m).
(* 证明详见Coq源代码。 *)

Lemma const_minus_const: forall n m: Z,
  [[EConst n - EConst m]] ==~ EConst (n - m).
(* 证明详见Coq源代码。 *)

Lemma const_mult_const: forall n m: Z,
  [[EConst n * EConst m]] ==~ EConst (n * m).
(* 证明详见Coq源代码。 *)

```

下面定义一种简单的语法变换——常量折叠——并证明其保持语义等价性。所谓常量折叠指的是将只包含常量而不包含变量的表达式替换成为这个表达式的值。

```

Fixpoint fold_constants (e : expr_int) : expr_int :=
  match e with
  | EConst n    => EConst n
  | EVar x      => EVar x
  | EAdd e1 e2  =>
    match fold_constants e1, fold_constants e2 with
    | EConst n1, EConst n2 => EConst (n1 + n2)
    | _, _ => EAdd (fold_constants e1) (fold_constants e2)
    end
  | ESub e1 e2  =>
    match fold_constants e1, fold_constants e2 with
    | EConst n1, EConst n2 => EConst (n1 - n2)
    | _, _ => ESub (fold_constants e1) (fold_constants e2)
    end
  | EMul e1 e2  =>
    match fold_constants e1, fold_constants e2 with
    | EConst n1, EConst n2 => EConst (n1 * n2)
    | _, _ => EMul (fold_constants e1) (fold_constants e2)
    end
  end
end.

```

这里我们可以看到，Coq 中 `match` 的使用是非常灵活的。(1) 我们不仅可以对一个变量的值做分类讨论，还可以对一个复杂的 Coq 式子的取值做分类讨论；(2) 我们可以对多个值同时做分类讨论；(3) 我们可以用下划线表示 `match` 的缺省情况。下面是两个例子：

```
Example fold_constants_ex1:
  fold_constants [[(1 + 2) * "k"]] = [[3 * "k"]].
Proof. intros. reflexivity. Qed.
```

注意，根据我们的定义，`fold_constants` 并不会将 `0 + "y"` 中的 `0` 消去。

```
Example fold_expr_int_ex2 :
  fold_constants ["x" - ((0 * 6) + "y")] = ["x" - (0 + "y")].
Proof. intros. reflexivity. Qed.
```

下面我们在 Coq 中证明，`fold_constants` 保持表达式行为不变。

```
Theorem fold_constants_sound : forall a,
  fold_constants a == a.
Proof.
  unfold expr_int_equiv. intros.
  induction a.
```

常量的情况

```
+ simpl.
  reflexivity.
```

变量的情况

```
+ simpl.
  reflexivity.
```

加号的情况

```
+ simpl.
  destruct (fold_constants a1), (fold_constants a2);
  rewrite <- IHa1, <- IHa2;
  reflexivity.
```

减号的情况

```
+ simpl.
  destruct (fold_constants a1), (fold_constants a2);
  rewrite <- IHa1, <- IHa2;
  reflexivity.
```

乘号的情况

```
+ simpl.
  destruct (fold_constants a1), (fold_constants a2);
  rewrite <- IHa1, <- IHa2;
  reflexivity.
Qed.
```

### 3 利用高阶函数定义指称语义

```
Definition add_sem (D1 D2: state -> Z) (s: state): Z :=  
  D1 s + D2 s.
```

```
Definition sub_sem (D1 D2: state -> Z) (s: state): Z :=  
  D1 s - D2 s.
```

```
Definition mul_sem (D1 D2: state -> Z) (s: state): Z :=  
  D1 s * D2 s.
```

下面是用于类型查询的 `Check` 指令。

```
Check add_sem.
```

可以看到 `add_sem` 的类型是 `(state -> Z) -> (state -> Z) -> state -> Z`，这既可以被看做一个三元函数，也可以被看做一个二元函数，即函数之间的二元函数。

基于上面高阶函数，可以重新定义表达式的指称语义。

```
Definition const_sem (n: Z) (s: state): Z := n.  
Definition var_sem (X: var_name) (s: state): Z := s X.
```

```
Fixpoint eval_expr_int (e: expr_int): state -> Z :=  
  match e with  
  | EConst n =>  
    const_sem n  
  | EVar X =>  
    var_sem X  
  | EAdd e1 e2 =>  
    add_sem (eval_expr_int e1) (eval_expr_int e2)  
  | ESub e1 e2 =>  
    sub_sem (eval_expr_int e1) (eval_expr_int e2)  
  | EMul e1 e2 =>  
    mul_sem (eval_expr_int e1) (eval_expr_int e2)  
end.
```

### 4 布尔表达式语义

对于任意布尔表达式  $e$ ，我们规定它的语义  $\llbracket e \rrbracket$  是一个程序状态到真值的函数，表示表达式  $e$  在各个程序状态上的求值结果。

- $\llbracket \text{TRUE} \rrbracket (s) = \mathbf{T}$
- $\llbracket \text{FALSE} \rrbracket (s) = \mathbf{F}$
- $\llbracket e_1 < e_2 \rrbracket (s)$  为真当且仅当  $\llbracket e_1 \rrbracket (s) < \llbracket e_2 \rrbracket (s)$
- $\llbracket e_1 \&\&e_2 \rrbracket (s) = \llbracket e_1 \rrbracket (s) \text{ and } \llbracket e_2 \rrbracket (s)$
- $\llbracket !e_1 \rrbracket (s) = \text{not } \llbracket e_1 \rrbracket (s)$

在 Coq 中可以如下定义：

```
Definition true_sem (s: state): bool := true.
```

```
Definition false_sem (s: state): bool := false.
```

```
Definition lt_sem (D1 D2: state -> Z) s: bool :=
  Z.ltb (D1 s) (D2 s).
```

```
Definition and_sem (D1 D2: state -> bool) s: bool :=
  andb (D1 s) (D2 s).
```

```
Definition not_sem (D: state -> bool) s: bool :=
  negb (D s).
```

```
Fixpoint eval_expr_bool (e: expr_bool): state -> bool :=
  match e with
  | ETrue =>
    true_sem
  | EFalse =>
    false_sem
  | ELt e1 e2 =>
    lt_sem (eval_expr_int e1) (eval_expr_int e2)
  | EAnd e1 e2 =>
    and_sem (eval_expr_bool e1) (eval_expr_bool e2)
  | ENot e1 =>
    not_sem (eval_expr_bool e1)
  end.
```

## 5 程序语句的语义

如果c不终止，那么不合法。

$(s_1, s_2) \in \llbracket c \rrbracket$  当且仅当从  $s_1$  状态开始执行程序  $c$  会以程序状态  $s_2$  终止。

### 5.1 赋值语句的语义

旧状态上S1的结果

其他变量的值不变。

$\llbracket x = e \rrbracket = \{(s_1, s_2) \mid s_2(x) = \llbracket e \rrbracket(s_1), \text{for any } y \in \text{var\_name, if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\}$

### 5.2 空语句的语义

$\llbracket \text{SKIP} \rrbracket = \{(s_1, s_2) \mid s_1 = s_2\}$

### 5.3 顺序执行语句的语义

$\llbracket c_1; c_2 \rrbracket = \llbracket c_1 \rrbracket \circ \llbracket c_2 \rrbracket = \{(s_1, s_3) \mid (s_1, s_2) \in \llbracket c_1 \rrbracket, (s_2, s_3) \in \llbracket c_2 \rrbracket\}$

### 5.4 条件分支语句的语义

$\llbracket \text{if } (e) \text{ then } \{c_1\} \text{ else } \{c_2\} \rrbracket = (\{(s_1, s_2) \mid \llbracket e \rrbracket(s_1) = \mathbf{T} \} \cap \llbracket c_1 \rrbracket) \cup (\{(s_1, s_2) \mid \llbracket e \rrbracket(s_1) = \mathbf{F} \} \cap \llbracket c_2 \rrbracket)$

这又可以改写为:

$\llbracket \text{if } (e) \text{ then } \{c_1\} \text{ else } \{c_2\} \rrbracket = \text{test\_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c_1 \rrbracket \cup \text{test\_false}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c_2 \rrbracket$

其中,

$\text{test\_true}(F) = \{(s_1, s_2) \mid F(s_1) = \mathbf{T}, s_1 = s_2\}$

$$\text{test\_false}(F) = \{(s_1, s_2) \mid F(s_1) = \mathbf{F}, s_1 = s_2\}$$

## 5.5 循环语句的语义

不能用循环语句的行为定义循环语句

定义方式一：

$$\text{iter}_0(X, R) = \text{test\_false}(X)$$

$$\text{iter}_{n+1}(X, R) = \text{test\_true}(X) \circ R \circ \text{iter}_n(X, R)$$

$$\llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{c\} \rrbracket = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{iter}_n(\llbracket e \rrbracket, \llbracket c \rrbracket)$$

定义方式二：

$$\text{iter}_{<0}(X, R) = \emptyset$$

$$\text{iter}_{<n+1}(X, R) = \text{test\_true}(X) \circ R \circ \text{iter}_{<n}(X, R) \cup \text{test\_false}(X)$$

$$\llbracket \text{while } (e) \text{ do } \{c\} \rrbracket = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{iter}_{<n}(\llbracket e \rrbracket, \llbracket c \rrbracket)$$

## 6 Coq 中的集合与关系

在 Coq 中往往使用  $X: A \rightarrow \text{Prop}$  来表示某类型  $A$  中元素构成的集合  $X$ 。字面上看，这里的  $A \rightarrow \text{Prop}$  表示  $X$  是一个从  $A$  中元素到命题的映射，这也相当于说  $X$  是一个关于  $A$  中元素性质。对于每个  $A$  中元素  $a$  而言， $a$  符合该性质  $X$  等价于  $a$  对应的命题  $X a$  为真，又等价于  $a$  是集合  $X$  的元素。

类似的， $R: A \rightarrow B \rightarrow \text{Prop}$  也用来表示  $A$  与  $B$  中元素之间的二元关系。

本课程提供的 SetsClass 库中提供了有关集合的一系列定义。例如：

- 空集：用  $\emptyset$  或者一堆方括号表示，定义为 `Sets.empty`；
- 单元集：用一对方括号表示，定义为 `Sets.singleton`；
- 并集：用  $\cup$  表示，定义为 `Sets.union`；
- 交集：用  $\cap$  表示，定义为 `Sets.intersect`；
- 一系列集合的并：用  $\bigcup$  表示，定义为 `Sets.omega_union`；
- 一系列集合的交：用  $\bigcap$  表示，定义为 `Sets.omega_intersect`；
- 集合相等：用  $=$  表示，定义为 `Sets.equiv`；
- 元素与集合关系：用  $\in$  表示，定义为 `Sets.In`；
- 子集关系：用  $\subseteq$  表示，定义为 `Sets.included`；
- 二元关系的连接：用  $\circ$  表示，定义为 `Rels.concat`；
- 等同关系：定义为 `Rels.id`；
- 测试关系：定义为 `Rels.test`。

在 CoqIDE 中，你可以利用 CoqIDE 对于 unicode 的支持打出特殊字符：

- 首先，在打出特殊字符的 latex 表示法；
- 再按 shift+ 空格键；
- latex 表示法就自动转化为了相应的特殊字符。

例如，如果你需要打出符号  $\in$ ，请先在输入框中输入 `\in`，当光标紧跟在 `n` 这个字符之后的时候，按 shift+ 空格键即可。例如，下面是两个关于集合的命题：

```
Check forall A (X: A -> Prop), X ∪ ∅ == X.

Check forall A B (X Y: A -> B -> Prop), X ∪ Y ⊆ X.
```

由于集合以及集合间的运算是基于 Coq 中的命题进行定义的，集合相关性质的证明也可以规约为与命题有关的逻辑证明。例如，我们想要证明，交集运算具有交换律：

```

Lemma Sets_intersect_comm: forall A (X Y: A -> Prop),
  X ∩ Y == Y ∩ X.
Proof.
  intros.

```

下面一条命令 `sets_unfold` 是 SetsClass 库提供的自动证明指令，它可以将有关集合的性质转化为有关命题的性质。

```
sets_unfold.
```

原本要证明的关于交集的性质现在就转化为了：`forall a : A, X a ∧ Y a <-> Y a ∧ X a` 其中 `forall` 就是逻辑中『任意』的意思；`∧` 之前我们已经了解，它表示『并且』的意思；`<->` 表示『当且仅当』的意思；`X a` 可以念做性质 `X` 对于 `a` 成立，也可以理解为 `a` 是集合 `X` 的元素。

我们稍后再来完成相关性质的证明。在 Coq 中，要放弃当前的证明，可以用下面的 `Abort` 指令。

```
Abort.
```

下面是一条关于并集运算的性质。

```

Lemma Sets_included_union1: forall A (X Y: A -> Prop),
  X ⊆ X ∪ Y.
Proof.
  intros.
  sets_unfold.

```

经过转化，要证明的结论是：`forall a : A, X a -> X a ∨ Y a`。这里，`∨` 表示『或者』；`->` 表示推出，也可以念做『如果... 那么...』。

```
Abort.
```

下面是一条关于二元运算的性质。

```

Lemma Rels_concat_assoc: forall A (X Y Z: A -> A -> Prop),
  (X ∘ Y) ∘ Z == X ∘ (Y ∘ Z).
Proof.
  intros.
  rels_unfold.

```

关于二元关系的性质，要使用 `rels_unfold` 展开成为基于逻辑的定义。

```
Abort.
```

SetsClass 库中提供了一系列有关集合运算的性质的证明。未来大家在证明中既可以使用 `sets_unfold` 与 `rels_unfold` 将关于集合运算的命题转化为关于逻辑的命题，也可以直接使用下面这些性质完成证明。



```

Sets_equiv_Sets_included:
  forall x y, x == y <-> x ⊆ y /\ y ⊆ x;
Sets_empty_included:
  forall x, ∅ ⊆ x;
Sets_included_full:
  forall x, x ⊆ Sets.full;
Sets_intersect_included1:
  forall x y, x ∩ y ⊆ x;
Sets_intersect_included2:
  forall x y, x ∩ y ⊆ y;
Sets_included_intersect:
  forall x y z, x ⊆ y -> x ⊆ z -> x ⊆ y ∩ z;
Sets_included_union1:
  forall x y, x ⊆ x ∪ y;
Sets_included_union2:
  forall x y, y ⊆ x ∪ y;
Sets_union_included_strong2:
  forall x y z u,
    x ∩ u ⊆ z -> y ∩ u ⊆ z -> (x ∪ y) ∩ u ⊆ z;

```

```

Sets_included_omega_union:
  forall xs n, xs n ⊆ ⋃ xs;
Sets_omega_union_included:
  forall xs y, (forall n, xs n ⊆ y) -> ⋃ xs ⊆ y;
Sets_omega_intersect_included:
  forall xs n, ⋂ xs ⊆ xs n;
Sets_included_omega_intersect:
  forall xs y, (forall n : nat, y ⊆ xs n) -> y ⊆ ⋂ xs;

```

```

Rels_concat_union_distr_r:
  forall x1 x2 y,
    (x1 ∪ x2) ∘ y == (x1 ∘ y) ∪ (x2 ∘ y);
Rels_concat_union_distr_l:
  forall x y1 y2,
    x ∘ (y1 ∪ y2) == (x ∘ y1) ∪ (x ∘ y2);
Rels_concat_mono:
  forall x1 x2,
    x1 ⊆ x2 ->
    forall y1 y2,
      y1 ⊆ y2 ->
      x1 ∘ y1 ⊆ x2 ∘ y2;
Rels_concat_assoc:
  forall x y z,
    (x ∘ y) ∘ z == x ∘ (y ∘ z);

```

## 7 在 Coq 中定义程序语句的语义

下面在 Coq 中写出程序语句的指称语义。

```

Definition skip_sem: state -> state -> Prop :=
  Rels.id.

```

```

Definition asgn_sem
  (X: var_name)
  (D: state -> Z)
  (st1 st2: state): Prop :=
  st2 X = D st1 /\
  forall Y, X <> Y -> st2 Y = st1 Y.

```

```

Definition seq_sem
  (D1 D2: state -> state -> Prop):
  state -> state -> Prop :=
  D1 ∘ D2.

```

```

Definition test_true
  (D: state -> bool):
  state -> state -> Prop :=
  Rels.test (fun st => D st = true).

```

```

Definition test_false
  (D: state -> bool):
  state -> state -> Prop :=
  Rels.test (fun st => D st = false).

```

```

Definition if_sem
  (D0: state -> bool)
  (D1 D2: state -> state -> Prop):
  state -> state -> Prop :=
  (test_true D0 ∘ D1) ∪ (test_false D0 ∘ D2).

```

```

Fixpoint iter_n
  (D0: state -> bool)
  (D1: state -> state -> Prop)
  (n: nat):
  state -> state -> Prop :=
  match n with
  | 0 => test_false D0
  | S n0 => test_true D0 ∘ D1 ∘ iter_n D0 D1 n0
  end.

```

```

Definition while_sem
  (D0: state -> bool)
  (D1: state -> state -> Prop):
  state -> state -> Prop :=
  ⋃ (iter_n D0 D1).

```

```

Fixpoint iter_lt_n
  (D0: state -> bool)
  (D1: state -> state -> Prop)
  (n: nat):
state -> state -> Prop :=
match n with
| 0 =>  $\emptyset$ 
| S n0 =>
  (test_true D0  $\circ$  D1  $\circ$  iter_lt_n D0 D1 n0)  $\cup$ 
  (test_false D0)
end.

```

```

Definition while_sem
  (D0: state -> bool)
  (D1: state -> state -> Prop):
state -> state -> Prop :=
 $\bigcup$  (iter_lt_n D0 D1).

```

下面是程序语句指称语义的递归定义。

```

Fixpoint eval_com (c: com): state -> state -> Prop :=
match c with
| CSkip =>
  skip_sem
| CAsgn X e =>
  asgn_sem X (eval_expr_int e)
| CSeq c1 c2 =>
  seq_sem (eval_com c1) (eval_com c2)
| CIf e c1 c2 =>
  if_sem (eval_expr_bool e) (eval_com c1) (eval_com c2)
| CWhile e c1 =>
  while_sem (eval_expr_bool e) (eval_com c1)
end.

```