

Exercise Sheet

10/20

1. 请回答 SimpleWhile 表达式在 64 位有符号整数运算意义下的语义理论问题。

- 【判断题】这一语义等价关系是否是一个等价关系？
- 【判断题】这一语义等价关系是否被表达式语法中的加号、减号与乘号保持？
- 证明或否定：对于任意表达式 e , $\text{constant_fold}(e) \equiv e$, 其中 $\text{constant_fold}(\cdot)$ 是常量折叠变换。
- 基于此, constant_fold 变换能否用于编译优化？请就你的结论做简要说明。

下面是表达式语法、语义与语义等价的定义：

- 语法: $E ::= N \mid V \mid E+E \mid E-E \mid E * E$
- 程序状态: $\text{state} \triangleq \text{var_name} \rightarrow \mathbb{Z}_{2^{64}}$
- 语义:
 - $\llbracket n \rrbracket = \{(s, n) \mid s \in \text{state}\}$ 如果 $-2^{63} \leq n \leq 2^{63} - 1$
 - $\llbracket n \rrbracket = \emptyset$ 如果 $-2^{63} \leq n \leq 2^{63} - 1$ 不成立
 - $\llbracket x \rrbracket = \{(s, s(x)) \mid s \in \text{state}\}$
 - $\llbracket e_1 + e_2 \rrbracket = \{(s, n_1 + n_2) \mid (s, n_1) \in \llbracket e_1 \rrbracket, (s, n_2) \in \llbracket e_2 \rrbracket, -2^{63} \leq n_1 + n_2 \leq 2^{63} - 1\}$
 - $\llbracket e_1 - e_2 \rrbracket = \{(s, n_1 - n_2) \mid (s, n_1) \in \llbracket e_1 \rrbracket, (s, n_2) \in \llbracket e_2 \rrbracket, -2^{63} \leq n_1 - n_2 \leq 2^{63} - 1\}$
 - $\llbracket e_1 * e_2 \rrbracket = \{(s, n_1 * n_2) \mid (s, n_1) \in \llbracket e_1 \rrbracket, (s, n_2) \in \llbracket e_2 \rrbracket, -2^{63} \leq n_1 * n_2 \leq 2^{63} - 1\}$
- 语义等价: 对于任意 e_1 与 e_2 , 如果 $\llbracket e_1 \rrbracket = \llbracket e_2 \rrbracket$ (即, 对于任意 n 与 s , $(n, s) \in \llbracket s_1 \rrbracket$ 当且仅当 $(n, s) \in \llbracket s_2 \rrbracket$), 我们称它们语义等价 ($e_1 \equiv e_2$)。

2. 考虑这一表达式语法树: $E ::= N \mid V \mid E+E \mid E-E \mid E * E \mid \text{read_int}()$ 。即, 除了变量、常量与三种算术运算之外, 表达式中还可能包含内置函数调用 $\text{read_int}()$ 。请定义表达式的指称语义, 假设

- 程序状态集合 $\text{state} = \text{var_name} \rightarrow \mathbb{Z}_{2^{64}}$;
- 表达式语义 $\llbracket e \rrbracket \subseteq \text{state} \times (\mathbb{Z}_{2^{64}})^* \times \mathbb{Z}_{2^{64}}$;
- 如果 s 是一个程序状态, $l \in (\mathbb{Z}_{2^{64}})^*$ 是一列 64 位整数, n 是一个 64 位整数, 那么 $(s, l, n) \in \llbracket e \rrbracket$ 表示, 在程序状态 s 上对 e 求值时如果依次通过 $\text{read_int}()$ 读入 l 中的数, 那么求值结果为 n 并且求值过程合法。