分离逻辑

1 基本概念

考虑 WhileDeref 语言中有关内存地址的读写，需要新的程序逻辑推理规则。

- 断言 $P * Q$ 表示：可以将程序状态中的内存拆分成为互不相交的两部分，其一满足 P 另一个满足 Q；
- 即，程序状态 s 满足性质 $P * Q$ 当且仅当存在 s_1 与 s_2 使得：
  - s_1 满足 P，
  - s_2 满足 Q，
  - $s.\text{vars} = s_1.\text{vars} = s_2.\text{vars}$ 并且 $s.\text{mem} = s_1.\text{mem} \uplus s_2.\text{mem}$ 直和
    简写为 $s_1 \oplus s_2 \Downarrow s$，
- $P * Q$ 中的星号称为分离合取。

例如：

- `* x == m && * y == n && x != y` 可以写作 `store(x, m) * store(y, n)`，
- `* * x == 0 && * x != x` 可以写作 `exists u. store(x, u) * store(u, 0)`。

这里，我们使用 store(a, b) 表示地址 a 上存储了 b 这个值，并且仅仅拥有此内存权限。

下面是一些霍尔三元组的例子：

```
{ store(0x40, 0) }
* 0x40 = 0x80
{ store(0x40, 0x80) }
```

```
{ store(0x40, 0) * store(0x80, 0) }
* 0x40 = 0x80
{ store(0x40, 0x80) * store(0x80, 0) }
```

假设 $0 \leqslant m \leqslant 100$，

```
{ store(x, m) * store(y, n) }
* x = * x + 1
{ store(x, m + 1) * store(y, n) }
```

```
{ store(x, m) * store(y, n) }
* x = * y
{ store(x, n) * store(y, n) }
```

直观上，断言 $P * Q * R$ 表示：可以将程序状态中的内存拆分成为互不相交的三部分，分别满足 P、Q 与 R。

```
* x == n && * y == m && * z == 0 &&
x != y && y != z && z != x
```

可以写作：`store(x, n) * store(y, m) * store(z, 0)`。

```
* x == 10 && * (x + 8) == u &&
* u == 100 && * (u + 8) == 0 &&
x != u && x + 8 != u && x - 8 != u
```

可以写作：`store(x, 10) * store(x + 8, u) * store(u, 100) * store(u + 8, 0)`。
以下霍尔三元组成立：

```
{ store(x, 10) * store(x + 8, u) * store(u, n) }
* x = * * (x + 8)
{ store(x, n) * store(x + 8, u) * store(u, n) }
```

2 霍尔逻辑规则

内存赋值规则（正向）：

- 如果 P 能推出
  - e_1 能够安全求值并且求值结果为 a
  - e_2 能够安全求值并且求值结果为 b
  - $\exists u.\ \text{store}(a, u) * Q$，
- 那么 $\{P\}\ * e_1 = e_2\ \{\text{store}(a, b) * Q\}$
- 其中 a 与 b 都是与内存无关的数学式子。

变量赋值规则（正向）：

$$\{P\}\ x = e\ \{\exists x'.\ e[x \mapsto x'] = x\ \&\&\ P[x \mapsto x']\}$$

- 如果 P 能推出 e 能够安全求值并且求值结果为 a，
- 那么 $\{P\}\ x = e\ \{\exists x'.\ a[x \mapsto x'] = x\ \&\&\ P[x \mapsto x']\}$
- 其中 a 是与内存无关的数学式子。

框架规则：

- 如果 F 中不出现被 c 赋值的变量，并且 $\{P\}\ c\ \{Q\}$，
- 那么 $\{P * F\}\ c\ \{Q * F\}$

存在量词规则：

- 如果对于任意 a 都有，并且 $\{P(a)\}\ c\ \{Q\}$，
- 那么 $\{\exists a, P(a)\}\ c\ \{Q\}$

3 例子 - 交换地址上的值

```
{ store(x, m) * store(y, n) }
  t = * x;
  * x = * y;
  * y = t
{ store(x, n) * store(y, m) }
```

4 例子 - 单链表取反

下面程序描述了单链表取反的过程。

```
while (x != 0) do {
  t = x;
  x = * (x + 8);
  * (t + 8) = y;
  y = t
}
```

利用分离逻辑，我们可以定义一些新的谓词，从而简洁描述数据结构。以单链表为例：

- 可以用谓词 `sll(p)` 表示以 `p` 地址为头指针存储了一个单链表
- `sll(p)` 定义为：

  Emp是不占用任何内存空间的意思

  ```
  p == 0 && emp ||
  exists u q, store(p, u) * store(p + 8, q) * sll(q)
  ```

利用 `sll(p)` 谓词，可以如下描述单链表取反程序的内存安全性性质：

```
{ y == 0 && sll(x) }
while (x != 0) do {
  t = x;
  x = * (x + 8);
  * (t + 8) = y;
  y = t
}
{ x == 0 && sll(y) }
```

可以选用 `sll(x) * sll(y)` 作为循环不变量。
首先，前条件可以推出循环不变量。

```
    y == 0 && sll(x)
|-- y == 0 && emp * sll(x)
|-- (y == 0 && emp) * sll(x)
|-- sll(y) * sll(x)
|-- sll(x) * sll(y).
```

其次，循环体能保持循环不变量。

```
{ x != 0 && sll(x) * sll(y) }
{ exists u z, store(x, u) * store(x + 8, z) * sll(z) * sll(y) }
  // Given u z,
{ store(x, u) * store(x + 8, z) * sll(z) * sll(y) }
  t = x;
{ t == x && store(x, u) * store(x + 8, z) * sll(z) * sll(y) }
  x = * (x + 8);
{ exists x', x == z && t == x' && store(x', u) * store(x' + 8, z) * sll(z) * sll(y) }
{ x == z && store(t, u) * store(t + 8, z) * sll(z) * sll(y) }
  * (t + 8) = y;
{ x == z && store(t, u) * store(t + 8, y) * sll(z) * sll(y) }
  y = t
{ exists y', y == t && x == z && store(t, u) * store(t + 8, y') * sll(z) * sll(y') }
{ exists y', store(y, u) * store(y + 8, y') * sll(x) * sll(y') }
{ sll(x) * sll(y) }
```

最后，退出循环时后条件成立。

```
    !(x != 0) && sll(x) * sll(y)
|-- (x == 0) && sll(x) * sll(y)
|-- (x == 0) && sll(y).
```

5 例子 - 单链表的连接 1

下面程序描述了单链表的连接。

```
if (x == 0)
then {
  res = y
}
else {
  res = x;
  nx = * (x + 8);
  while (nx != 0) do {
    x = nx;
    nx = * (x + 8)
  };
  * (x + 8) = y
}
```

第一个分支

第二个分支，x不为空

```
//@ require sll(x) * sll(y)
//@ ensure sll(res)
if (x == 0)
then {
  res = y
}
else {
  res = x;
  nx = * (x + 8);
  while (nx != 0) do {
    x = nx;
    nx = * (x + 8)
  };
  * (x + 8) = y
}
```

初始条件

- 可以用谓词 `sllseg(p, q)` 表示以 `p` 地址为头指针开始到 `q` 为止是单链表中的一段

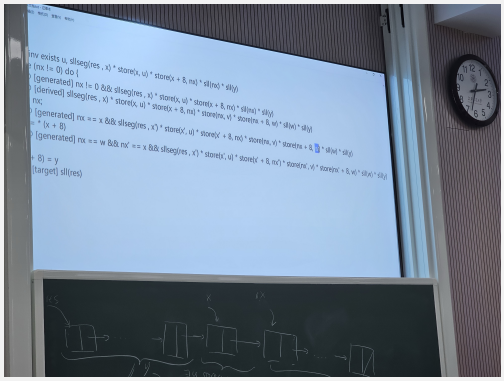
- `sllseg(p, q)` 定义为：

这一段为空， 下一个就是p或q

```
p == q && emp ||
exists u r, store(p, u) * store(p + 8, r) * sllseg(r, q)
```

```
//@ require sll(x) * sll(y)
//@ ensure sll(res)
if (x == 0)
then { res = y }
else {
  res = x;
  nx = * (x + 8);
  //@ [generated] v == nx && x == res && store(x, u) *
                   store(x + 8, v) * sll(v) * sll(y)
  //@ inv exists u, sllseg(res, x) * store(x, u) *
            store(x + 8, nx) * sll(nx) * sll(y)
  while (nx != 0) do {
    x = nx;
    nx = * (x + 8)
  };
  * (x + 8) = y
}
```

[generated] + [derived]



6 例子 - 单链表的连接 2

习题 1.

下面是用二阶指针实现的单链表连接。

Require store(head, Uninitialized) * sll(x) * sll(y)

```
* phead = x;
pt = phead;
while ( * pt != 0) {
  pt = * pt + 8;
};
* pt = y;
res = * phead
```

请证明，其满足：

```
{ exists u, store(phead, u) * sll(x) * sll(y) }
  * phead = x;
  pt = phead;
  while ( * pt != 0) {
    pt = * pt + 8;
  };
  * pt = y;
  res = * phead
{ exists u, store(phead, u) * sll(res) }
```

generated中的exist可以去掉，inv和ensure里的exist不能扔掉，因为会当后条件

证明中应当指明循环语句的循环不变量，每条赋值语句的最强后条件，以及每次使用 Consequence rule 改写前后的断言。另外，证明中可以考虑使用下面谓词：

P q 为二阶指针

- `SllSeg(p, q)` 定义为：

R + 8 是一个二阶指针

```
p == q && emp ||
exists u r, store(p, r) * store(r, u) * SllSeg(r + 8, q)
```

- `sllseg(p, q)` 定义为：

这一段为空， 下一个就是p或q

```
p == q && emp ||
exists u r, store(p, u) * store(p + 8, r) * sllseg(r, q)
```

7 例子 - 双向链表的操作