Assignment 10/24

1 Problem 1

1.1 a)

$[[\text{ if } (e) \text{ then } \{c_1\} \text{ else } \{c_2\}]].\text{err} = [[e]].\text{err} \cup \text{test\_true}([[e]]) \circ [[c_1]].\text{err} \cup \text{test\_false}([[e]]) \circ [[c_2]].\text{err}$

1.2 b)

$[[\text{if } (e) \text{ then } \{c_1\} \text{ else } \{c_2\}]].\text{inf} = \text{test\_true}([[e]]) \circ [[c_1]].\text{inf} \cup \text{test\_false}([[e]]) \circ [[c_2]].\text{inf}$

2 Problem 2

2.1 a)

自反性

因为 $(B, \leq_B)$ 是一个偏序集，所以$\forall b \in B, b \leq_B b$. 由题知，$f \leq_{A \to B} f \iff \forall a. f(a) \leq_B f(a)$，成立。

传递性

如果 $f \leq_{A \to B} g, g \leq_{A \to B} h$. 即 $\forall a \in A, f(a) \leq g(a), \forall a' \in A, g(a') \leq h(a')$. 令 $a' = a$, 则 $\forall a \in A, f(a) \leq g(a) \leq h(a)$, 由于$(B, \leq_B)$ 是一个偏序集，满足传递性。所以有 $\forall a \in A, f(a) \leq h(a)$, 即 $f \leq_{A \to B} h$. 即传递性成立。

反对称性

如果 $f \leq_{A \to B} g, g \leq_{A \to B} f$. 即 $\forall a \in A, f(a) \leq g(a), \forall a' \in A, g(a') \leq f(a')$. 令 $a' = a$, 则由于$(B, \leq_B)$ 是一个偏序集，满足反对称性。
$\forall a \in A, f(a) \leq g(a), g(a) \leq f(a)$, 所以有 $\forall a \in A, f(a) = h(a)$, 由函数的性质知，有 $f = g$. 即反对称性成立。

综上，$(A \to B, \leq_{A \to B})$ 是一个偏序集。

2.2 b)

偏序性已证，现只需证完备性。

先考虑空集：对于链 $\emptyset \in A \to B$, 要说明完备性，则首先需说明其有最小元。由于已知 B 为完备集，所以有最小元，设为 l, 那么由于 $A \to B$ 是 A 到 B 的所有函数，因而函数 $L := L(a) = l, \forall a \in A$ 属于 $A \to B$。因为对任意$f \in A \to B$，有$\forall a \in A, f(a) \leq_B l$, 所以 L 为 $A \to B$ 的最小元。($:=$ **表示"定义为"**)

非空集情况：对于任意 $S \subseteq A \to B$, 如果其中任意两个元素都可以进行大小 $(\leq_{A \to B})$ 比较，结合偏序集的传递性，即等价于:

$$\forall a \in A, f_1(a) \leq_B f_2(a) \leq_B \cdots f_i(a) \leq_B f_{i+1}(a) \leq_B \cdots$$

这里 $f_i \in S, i = 1, 2, 3, \cdots$ 可以为有穷序列，也可以是无穷序列。我们已知 $(B, \leq_B)$ 是一个完备偏序集，而 $\forall a \in A, \{f_i(a) \mid i = 1, 2, 3, \cdots\}$ 是 B 上的一条链，那么其有上确界，记为 $lub(a) \in B$. 下面我们证明 S 的上确界为:

$$F := F(a) = lub(a), \forall a \in A$$

其中 $\mathbb{1}_{(a)} = 1$ 当且仅当 $a = x$. 显然 F 是 $A \to B$ 的一个函数，所以 $F \subseteq A \to B$

首先证明其 sound.

$\forall f \in S, f \leq_{A \to B} F \iff \forall a \in A, f(a) \leq_B F(a)$. 而由定义知，$\forall a \in A, f(a) \leq_B lub(a)$. 从而成立！

再证明其 tight.

如果存在某个 $g \in A \to B$ 使得对每个 $f \in S$, 均有 $f \leq_{A \to B} g$, 则说明$\forall a \in A, g(a) \geq_B lub(a)$. 从而 $F \leq_{A \to B} g$.

2.3 c)

我们已经证明其为偏序集。

先考虑空集：对于 $\emptyset \in A \to B$, 我们首先说明其有上确界。由于已知 B 为完备格，所以也为完备集，所以有最小元，设为 l, 那么显然函数 $L := L(a) = l, \forall a \in A$ 属于 $A \to B$, 为 $A \to B$ 的最小元，即为$\emptyset$的上确界。

非空集情况：如果$(B, \leq_B)$ 为完备格，那么其 B 的任意子集 S 均有上确界. 而对于 $A \to B$ 的任意子集 S', 有 $\forall a \in A, \{f(a), f \in S'\} \subseteq B$ 有上确界记做 $lub(a)$.

事实上，只需和上题一样取

$$F := F(a) = lub(a), \forall a \in A$$

即可。和上一题类似证明:

首先证明其 sound.

$\forall f \in S, f \leq_{A\to B} F \iff \forall a \in A, f(a) \leq_B F(a)$. 而由定义知，$\forall a \in A, f(a) \leq_B lub(a)$. 从而成立！

再证明其 tight.

如果存在某个 $g \in A \to B$ 使得对每个 $f \in S$, 均有 $f \leq_{A\to B} g$, 则说明$\forall a \in A, g(a) \geq_B lub(a)$. 从而 $F \leq_{A\to B} g$.

从而得证 $A \to B$ 为完备格。

3 Problem 3

考虑集合 $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ 上的包含关系($\subseteq$)。首先，它是一个偏序集。

- 自反性: 对于任意 $a \in A, a \leqslant_A a$, 成立。
- 传递性: 对于任意 $a, b, c \in A$, 如果 $a \leqslant_A b$、$b \leqslant_A c$, 那么 $a \leqslant_A c$, 成立。
- 反对称性: 对于任意 $a, b \in A$, 如果 $a \leqslant_A b$、$b \leqslant_A a$, 那么 $a = b$, 成立。

而它是一个完备偏序集。因为其上的链 $S_1 = \{\{1\}\}, S_2 = \{\{2\}\}, S_3 = \{\emptyset\}, S_4 = \emptyset, S_5 = \{\{1\}, \emptyset\}, S_6 = \{\{2\}, \emptyset\}$ 均有上确界，然而由于 $A \subseteq A$, 但是 A 并没有上确界，因为 $\{1, 2\} \notin A$. 从而不为完备格。