

Assignment 1013

1 Problem 1

$$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in \text{var_name}, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in \text{var_name}, s_1(y) = s_2(y))\}$$

2 Problem 2

2.1 a)

$$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in \text{var_name}, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in \text{var_name}, s_1(y) = s_2(y))\}$$

2.2 b)

结合上课所学的结论知道，其唯一不动点为：

$$[[c]] = \{(s_1, s_2) \mid s_1(x) > 0, s_2(x) = 0, \text{for any } y \in \text{var_name}, \text{if } x \neq y, s_1(y) = s_2(y)\} \cup \{(s_1, s_2) \mid (s_1(x) \leq 0, \text{for any } y \in \text{var_name}, s_1(y) = s_2(y))\}$$

3 Problem 3

以示区分，记这里的偏序关系为 $\leq_{\mathbb{N}}$ (=)

偏序集：

- 自反性成立： $\forall a \in N, a \leq_{\mathbb{N}} a (a = a)$
- 反对称成立： $\forall a, b \in N, a \leq_{\mathbb{N}} b (a = b), b \leq_{\mathbb{N}} a (b = a) \Rightarrow a \leq_{\mathbb{N}} b (a = b)$
- 传递性成立： $\forall a, b, c \in N, a \leq_{\mathbb{N}} b (a = b), b \leq_{\mathbb{N}} c (b = c) \Rightarrow a \leq_{\mathbb{N}} c (a = c)$

为偏序集。

完备性：

对于链 $S = \emptyset$ ，假设其存在上确界 $\text{lub}(\emptyset) \in \mathbb{N}$ ，根据完备性的定义，如果某个 $b \in \mathbb{N}$ 满足 $\forall a \in S, a \leq_{\mathbb{N}} b (a = b)$ ，那么 $\text{lub}(\emptyset) \leq_{\mathbb{N}} b (b = \text{lub}(\emptyset))$ ，即 b 为一个上界。

然而，由于 $S = \emptyset$ ， \mathbb{N} 中任意一个元素 b 都满足 $\forall a \in S, a = b (a \leq_{\mathbb{N}} b)$ 的条件，即 \mathbb{N} 中元素均为 S 的上界。由 $\forall b \in \mathbb{N}, b = \text{lub}(\emptyset)$ ，从而 $\text{lub}(\emptyset)$ 有多个不等的值，矛盾！

综上所述， $(\mathbb{N}, =)$ 不是一个完备偏序集。

4 Problem 4

偏序集满足：

- 自反性成立： $\forall a \in A, a \subseteq a$
- 反对称成立： $\forall a, b \in A, a \subseteq b, b \subseteq a \Rightarrow a = b$
- 传递性成立： $\forall a, b, c \in A, a \subseteq b, b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c$

为偏序集。

完备性不成立：

对于任意 $S \subseteq A$ ，如果其中任意元素都可以进行比较，并不能推出其有上确界。

比如考虑链 $S = \{\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, n\}, \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}, \dots\}$ ，并没有上确界。实际上， S 中并不存在一个元素是如下的形式： $\{1, 2, 3, \dots, \infty\}$ ，即在 S 中，并不存在无穷子集。如果我们记 S 中第 i 个元素是 $S(i) = \{1, 2, 3, 4, \dots, i\}$ ，那么 $\lim_{i \rightarrow \infty} S(i)$ 的话就是 \mathbb{N} ，即 S 的上确界 $\bigcup S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S(i) = \mathbb{N}$ 。然而，根据偏序关系的定义，上确界需要在集合 A 中，而 A 仅包含 \mathbb{N} 的有穷子集，这就说明了 S 并没有上确界。

所以不是完备偏序集。

5 Problem 5

由课程中已知结论， (\mathbb{N}, D) 是一个完备偏序集。

5.1 若 $m = 0$

则对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 若 $a|b$, 有 $F(a) = \gcd(a, 0) = a, F(b) = \gcd(b, 0) = b$, 而 $a|b$, 所以满足单调性。

5.2 若 $m \neq 0$

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}_+$, 若 $a|b$, 设 $b = ak, k \in \mathbb{N}$, 则 $\gcd(b, m) = \gcd(ak, m)$ 。由质因数分解定理可知, $\gcd(a, m)$ 是 ak, m 的公约数。而公约数整除最大公约数, 即 $F(a)|F(b)$ 。

当 $b = 0$ 时, 也有 $F(a)|F(0) = 0$

综上所述, $F(n)$ 为 (\mathbb{N}, D) 上的单调函数。

6 Problem 6

由课程中已知结论, (\mathbb{N}, D) 是一个完备偏序集。

6.1 若 $m = 0$

单调: 则对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 若 $a|b$, 有 $F(a) = \text{lcm}(a, 0) = 0, F(b) = \text{lcm}(b, 0) = 0$, 而 $0|0$, 所以满足单调性。

连续: 而对任意一条链 S , 有 $\text{lub}(F(S)) = \text{lub}(0) = 0 = F(\text{lub}(S))$, 所以连续性满足。

6.2 若 $m \neq 0$

单调: 对于任意 $a, b \in \mathbb{N}_+$, 若 $a|b$, 设 $b = ak, k \in \mathbb{N}$, 则 $\text{lcm}(b, m) = \text{lcm}(ak, m) = \frac{akm}{\gcd(ak, m)}$ 。而

$$\begin{aligned} \text{lcm}(a, m) | \frac{akm}{\gcd(ak, m)} &\iff \frac{am}{\gcd(a, m)} | \frac{akm}{\gcd(ak, m)} \\ \iff \exists d \in \mathbb{N}_+, s.t. \quad amd \cdot \gcd(ak, m) &= akm \cdot \gcd(a, m) \\ \iff \exists d \in \mathbb{N}_+, s.t. \quad d \cdot \gcd(ak, m) &= \gcd(ak, mk) \\ \iff \gcd(ak, m) | \gcd(ak, mk) \end{aligned}$$

而 $\gcd(ak, m)$ 是 ak, mk 的公约数, 整除其最大公约数, 即 $F(a)|F(b)$ 。

若 $b = 0$, 则 $F(a)|F(0) = 0$, 所以 $F(n)$ 为 (\mathbb{N}, D) 上的单调函数。

连续: 而对任意一条链 S :

1. 链 S 无穷, 由课上结论, 知 $\text{lub}(S) = 0$. 结合单调性, 知 $F(S)$ 也为无穷链, 于是得 $\text{lub}(F(S)) = 0$, 所以 $F(\text{lub}(S)) = 0 = \text{lub}(F(S))$
2. 链 S 有限. 那么 $\text{lub}(S)$ 为 S 的最小公倍数。结合 F 的单调性, 知 $F(S)$ 为有穷链, $\text{lub}(F(S))$ 为 $F(S)$ 的最小公倍数。

$$F(\text{lub}(S)) \geq F(s), \forall s \in S$$

所以 $F(\text{lub}(S))$ 是 $F(S)$ 的一个上界。而由上确界定义知,

$$\text{lub}(F(S)) \leq F(\text{lub}(S))$$

另一方面, 由于偏序关系为整除, $\text{lub}(S)$ 其实就是 S 中最大的元素。即 $\text{lub}(S) \in S$, 由上确界是上界知:

$$\text{lub}(F(S)) \geq F(\text{lub}(S))$$

综上所述, $\text{lub}(F(S)) = F(\text{lub}(S))$

7 Problem 7

7.1 完备偏序集

为偏序集

- 自反性成立:
 - 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $n \leq_A n$
 - 对于 ω , 有 $\omega \leq_A \omega$
 - 对于 $\omega + 1$, 有 $\omega + 1 \leq_A \omega + 1$
- 传递性成立:
 - 对于 $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m, m \leq_A k$, 成立 $n \leq_A k$, 因为 $(n \leq m \leq k)$
 - 对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m, m \leq_A \omega$, 成立 $n \leq_A \omega$
 - 对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m, m \leq_A \omega + 1$, 成立 $n \leq_A \omega + 1$

- 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A \omega$, $\omega \leq_A \omega + 1$, 成立 $n \leq_A \omega + 1$
- 反对称性成立:
 - 对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m$, $m \leq_A n$, 则有 $m \leq n, n \leq m$, 从而 $m = n$
 - 对于 $\forall a \in A$, 若 $a \leq_A \omega$, $\omega \leq_A a$, 则有 $a = \omega$
 - 对于 $\forall a \in A$, 若 $a \leq_A \omega + 1$, $\omega + 1 \leq_A a$, 则有 $a = \omega + 1$

完备性成立

对于任意链 $S \subseteq A$:

- 若 $S \subseteq \mathbb{N}$,
 - 若 S 有限, 则 $\text{lub}(S) = \max(S)$, 这里 \max 即由普通的整数大小比较关系确定。
 - 若 S 无限, 则由于 S 为集合, 不存在重复元素, 那么其元素必然不断递增, 从而其 $\text{lub}(S) = \omega$
- 若 $S = \{\omega\} \cup S', S' \subseteq \mathbb{N}$, 则 $\text{lub}(S) = \omega$
- 若 $\omega + 1 \in S, S \subseteq A$, 则 $\text{lub}(S) = \omega + 1$

综上, (A, \leq_A) 是一个完备偏序集。

7.2 单调函数但不是连续函数

已知 (A, \leq_A) 是一个完备偏序集,

succ 单调性成立

- 对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 若 $n \leq_A m$, 则有 $\text{succ}(n) = n + 1 \leq m + 1 = \text{succ}(m)$, 也即 $\text{succ}(n) \leq_A \text{succ}(m)$
- 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有(若) $n \leq_A \omega$ 且 $\text{succ}(n) = n + 1 \leq_A \text{succ}(\omega) = \omega + 1$
- 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有(若) $n \leq_A \omega + 1$ 且 $\text{succ}(n) = n + 1 \leq_A \text{succ}(\omega + 1) = \omega + 1$
- $\omega \leq_A \omega \rightarrow \text{succ}(\omega) = \omega + 1 \leq_A \omega + 1 = \text{succ}(\omega)$
- $\omega \leq_A \omega + 1 \rightarrow \text{succ}(\omega) = \omega + 1 \leq_A \omega + 1 = \text{succ}(\omega + 1)$
- $\omega + 1 \leq_A \omega + 1 \rightarrow \text{succ}(\omega + 1) = \omega + 1 \leq_A \omega + 1 = \text{succ}(\omega + 1)$

succ连续性不成立

对于一条链 $S = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. 有 $\text{lub}(S) = \omega$, $\text{succ}(\text{lub}(S)) = \omega + 1$. 但是 $\text{lub}(\text{succ}(S)) = \omega$. 所以连续性不成立。

7.3 Bot不是不动点

$$\text{succ}(\text{lub}(\perp, \text{succ}(\perp), \text{succ}(\text{succ}(\perp)), \dots)) = \text{succ}(\omega) = \omega + 1$$

然而,

$$\text{lub}(\perp, \text{succ}(\perp), \text{succ}(\text{succ}(\perp)), \dots) = \omega$$

所以 $\text{lub}(\perp, \text{succ}(\perp), \text{succ}(\text{succ}(\perp)), \dots)$ 不是 **succ** 的不动点。