贺鑫(计算机科学与技术系研究生)，学号: MG1833027

Problem1

(a): 为了使得结果为实数，$8a-1 \geq 0$，得：$a \geq \frac{1}{8}$.

(b): 当$a=\frac{1}{8}$时，Equation 1的值为1.

(c): 当$a=\frac{1}{2}$时，仍然是peculiar value.此时Equation 1的值仍为1.当a等于$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{2}$时，Equation 1的值均为1，我认为可能Equation 1的值在$a \geq \frac{1}{8}$取值范围内恒等于1.

(d): 暂时想通过对函数进行更多的**采样**，得到更多“数据”，以便寻找Equation 1数值特征。当$a=\frac{3}{4}$时，将Matlab代码运行得到的结果为：$1.21825+0.12600i$.

(e): 当$a=\frac{3}{4}$时，Matlab运行结果出现**复数**的原因是因为Matlab在处理数据时，默认将数据当做复数进行处理。在开方时，Matlab处理时会有多个解的复数问题。我们可以使用`nthroot()`函数去求得开方的实数解，从而避免出现复数解的问题。

(f): 令$f(a)=\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$，求证$f(a)\equiv 1. \quad \forall a \geq \frac{1}{8}$.

为了书写方便，我们令$\lambda=\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}$，$u=\sqrt[3]{a+\lambda}$，$v=\sqrt[3]{a-\lambda}$.

易知：$u^3+v^3=2a\ldots(1)$

$u^3v^3=-(-8a^3+12a^2-6a+1)/27\ldots(2)$.

我们构造关于t的一元三次方程：$t^3+pt+q=0$.

此时$\exists u\in R, v\in R$，使得$t=u+v$. 我们有：$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$.

令$3uv+p=0$，可得：

$u^3+v^3=-q\ldots(3)$

$u^3v^3=-(p^3)/27\ldots(4)$

易知：$q=-2a, p^3=8a^3-12a^2+6a-1$. 可得：$p=-1+2a=-1-q$.

可知：$t=u+v$是方程$t^3+pt-1-p=0$的根。

易知，当$t=1$时，方程成立。所以$t=1$方程的一个根。接下来只需要证明，方程只有一个实根，即可证明$u+v=1$成立。

令$\mu(t)=t^3+pt-p-1$.

$\mu^{'}=3t^2+p$，当$a>\frac{1}{8}$时，$p>-\frac{3}{4}$.易知$\mu(t)$在$t=-\frac{1}{2}$时取得极大值。且$\mu(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}p-\frac{9}{8}<0$.所以$\mu(t)$只有一个实根成立，而$u$和$v$均为实数，所以$u+v=1$成立。

P.S. 此证明参考wiki-Cardano's method: https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_function#Cardano's_method

(g): 当$a=2$时，Equation[1] 即为$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.易知值为1.

(h): 在上面证明式子的值为1的过程中就使用了Cardano’s method。

Problem 2

1. $p(x)=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}|\sum|^{-\frac{1}{2}}exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\sum^{-1}(x-\mu))$.
2. $\ln p(x)=-\frac{d}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(|\sum|)-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\sum^{-1}(x-\mu)$.
3. 由于$\sum$为$d\times d$的实对称半正定矩阵，所以$\sum^{-1}$也为对称矩阵。根据Matrix CookBook公式(86)可知：
   $\frac{\partial \ln p(x)}{\partial \mu}=-2*(-\frac{1}{2}\sum^{-1}(x-\mu))=\sum^{-1}(x-\mu)$.
4. $\frac{\partial \ln p(x)}{\partial \sum^{-1}}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \ln(|\sum|))}{\sum^{-1}}-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^T\sum^{-1}(x-\mu)}{\partial \sum^{-1}}=\frac{1}{2}|\sum|^{-1}|\sum|\sum^T+\frac{1}{2}\sum^T(x-\mu)(x-\mu)^T\sum^T=\frac{1}{2}\sum^T+\frac{1}{2}\sum^T(x-\mu)(x-\mu)^T\sum^T$
   此处用到Matrix CookBook中的第(62)和(61)条公式。

Problem 3

证明：对于随机变量$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$，以及任何实数t，我们有$(t\mathbf{X}-\mathbf{Y})^2\geq 0$，即$E[(t\mathbf{X}-\mathbf{Y})^2]\geq 0$.

得：$t^2E(\mathbf{X}^2)-2tE(\mathbf{XY})+E(\mathbf{Y}^2)\geq 0$对于任意的$t\in R$恒成立，得$\Delta=(2E(\mathbf{XY}))^2-4E(\mathbf{X}^2)E(\mathbf{Y}^2)\geq 0$.

所以：$(E[\mathbf{XY}])^2 \leq E[\mathbf{X}^2]E[\mathbf{Y}^2]$。

Problem 4

1. $Cov(X) = E[(X - E(X)(X - E(X))^T)] = E[XX^T] - E[X]E[X]^T$.
2. $Cov(X + \mu, Y + \mu) = E[(X + \mu - E(X + \mu))(Y + \mu - E(Y + \mu))] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = Cov(X, Y)$
3. 我们构造函数：$h(t) = E[(X - E(X))t + (Y - E(Y))]^2$.

   展开得$h(t) = Var(X)t^2 + 2Cov(X, Y)t + Var(Y)$，由于$h(t) \geq 0$,

   所以$2Cov(X, Y)^2 - 4Var(X)Var(Y) \leq 0$，得$|\rho_{X,Y}| = |\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}| \leq 1$.

Problem 5

1. $E[X] = \frac{1}{3}. Var[X] = \frac{1}{9}$.
2. 由于随机变量X取值非负，所以我们可以使用Markov不等式得到$Pr(X \geq 1) \leq \frac{E[X]}{1} = \frac{1}{3}$.
3. 我们可以使用Chebyshe不等式：$Pr(X - \frac{1}{3} \geq 2 * \frac{1}{3}) \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.
4. $Pr(X \geq 1) = Pr(X \geq E[X] + \frac{2}{3}) \leq \frac{Var(X)}{Var(X) + (\frac{2}{3})^2} = \frac{1}{5}$.
5. $\int_1^\infty Pr(x)dx = \int_1^\infty 3e^{-3x}dx = e^{-3} \approx 0.05$.
6. 当我们易知的信息越多，如：最初马尔科夫不等式中我们只使用了随机变量取值非负的信息，chebyshe不等式中我们只利用了均值和方差的信息而没有使用取值非负的信息，到单边chebyshe使用了均值、方差以及取值非负的信息，使得对随机变量取值估计越来越准确。对变量不确定性的估计体现了我们队变量信息的掌握程度，当我们完全了解变量的分布之后，我们可以准确地计算出变量在区间内取值的概率。