Bézier 曲線による空間曲線の近似

@Hyrodium

2016 年 1 月 24 日

1　問題

4 つの制御点 $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を持つ 3 次 Bézier 曲線 $\boldsymbol{a}(t), (t \in [0,1])$ (図 1) は次の式で表される.

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_0 - 3(\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{a}_1)t + 3(\boldsymbol{a}_0 - 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)t^2 - (\boldsymbol{a}_0 - 3\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3)t^3 \quad (1)$$

この Bézier 曲線を用いて空間曲線 $\boldsymbol{x}(t), (t \in [0,1])$ を近似しよう. 方針は「Bézier 曲線による平面曲線の近似」とほぼ同じであるから, これを読む前に先にそちらを参照されたい.

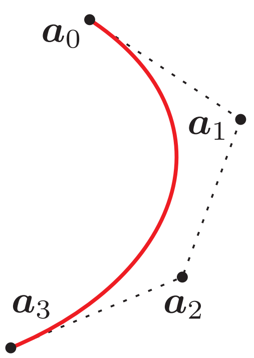

図 1　Bézier 曲線

2　解法

まずは曲線の両端 $(t = 0, 1)$ を一致させるために

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{x}(0), \quad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}(1) = \boldsymbol{x}(1) \tag{2}$$

とする. 次に両端での向きを一致させるために実数 $k > 0, l > 0$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_0 = k\dot{\boldsymbol{x}}(0), \quad \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_2 = l\dot{\boldsymbol{x}}(1) \tag{3}$$

とする. ただし $\dot{}$ は t による微分である. よって

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}(0) + k\dot{\boldsymbol{x}}(0), \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{x}(1) - l\dot{\boldsymbol{x}}(1) \tag{4}$$

である. $\delta = |\boldsymbol{a}(1/2) - \boldsymbol{x}(1/2)|$ を最小にする k, l を求めよう. 平面曲線であれば $\delta = 0$ となったが, ここでは空間曲線を扱うので $\delta = 0$ とは限らない. 「Bézier 曲線による平面曲線の近似」で示したように

$$\boldsymbol{a}(1/2) = \frac{\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{x}(1)}{2} + \frac{3k}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(0) - \frac{3l}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(1) \tag{5}$$

である. よって $\boldsymbol{x} = {}^t(x \quad y \quad z), X = x(0) + x(1) - 2x(1/2), Y = y(0) + y(1) - 2y(1/2), Z = z(0) + z(1) - 2z(1/2), \boldsymbol{X} = {}^t(X \quad Y \quad Z)$ とおいて

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \left|\frac{\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{x}(1)}{2} + \frac{3k}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(0) - \frac{3l}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(1) - \boldsymbol{x}(1/2)\right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{X} + \frac{3k}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(0) - \frac{3l}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{X} + \frac{3k}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(0) - \frac{3l}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\right) \end{aligned} \tag{6}$$

である．δ が最小となるとき, δ^2 も最小になるから

$$\frac{\partial(\delta^2)}{\partial k} = \frac{3}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{X}+\frac{3k}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(0)-\frac{3l}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\right)=\frac{3}{8}\left(\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\boldsymbol{X}+\frac{3k}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0)-\frac{3l}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\right)=0 \quad (7)$$

である．よって

$$-\frac{3}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0)k+\frac{3}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)l=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{x}(0) \quad (8)$$

を得る．同様に

$$\frac{\partial(\delta^2)}{\partial(-l)} = \frac{3}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{X}+\frac{3k}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(0)-\frac{3l}{8}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\right)=\frac{3}{8}\left(\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\boldsymbol{X}+\frac{3k}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0)-\frac{3l}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\right)=0 \quad (9)$$

より

$$-\frac{3}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0)k+\frac{3}{4}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)l=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{x}(1) \quad (10)$$

である．式 (8), (10) を行列表示すると次のようになる．

$$\frac{3}{4}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0) & \dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0) & \dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k\\ l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^t\dot{\boldsymbol{x}}(0)\\ {}^t\dot{\boldsymbol{x}}(1)\end{pmatrix}\boldsymbol{X} \quad (11)$$

ここで

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0) & \dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0) & \dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^t\dot{\boldsymbol{x}}(0)\\ {}^t\dot{\boldsymbol{x}}(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(0) & \dot{\boldsymbol{x}}(1)\end{pmatrix} \quad (12)$$

であるから「Bézier 曲線による平面曲線の近似」と同様に簡単になるかと思いきや, $\begin{pmatrix}{}^t\dot{\boldsymbol{x}}(0)\\ {}^t\dot{\boldsymbol{x}}(1)\end{pmatrix}$ が正方行列で無いから逆行列が存在せず, 消去できない．諦めて式 (11) より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-k\\ l\end{pmatrix}&=\frac{4}{3}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0) & \dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0) & \dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}{}^t\dot{\boldsymbol{x}}(0)\\ {}^t\dot{\boldsymbol{x}}(1)\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ &=\frac{4}{3}\frac{\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1) & -\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\\ -\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0) & \dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\boldsymbol{X}\\ \dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\boldsymbol{X}\end{pmatrix}}{\left(\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0)\right)\left(\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\right)-\left(\dot{\boldsymbol{x}}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(1)\right)\left(\dot{\boldsymbol{x}}(1)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(0)\right)}\end{aligned} \quad (13)$$

である．