2.3.2 DDC 方式による読み出し原理

アップ・コンバートとダウン・コンバートを含むフィード信号の合成・分離と、MKID との共振による信号の状態変化を図 2.5 に模式する。図 2.4 の I/Q ミキサー（I/Q Mix）は、構成要素に分解すると、2 つの混合器とハイブリッド・カプラーからなる。

分配器（Div）と混合器（Mix）、ハイブリッド・カプラー（Hyb）、MKID、ローパス・フィルター（LPF）は、理想的な素子であるとして次のように定義する。

Div: 分配器は、信号のエネルギー E を $1/n$ に等分配する。

$$\mathrm{Div}(E, n) \overset{\equiv}{\cancel{:=}} \frac{E}{n} \tag{2.1}$$

Mix: 混合器は、2 つの信号 S_1 と S_2 を混合（乗算）する。

$$\mathrm{Mix}(S_1, S_2) \overset{\equiv}{\cancel{:=}} S_1 S_2 \tag{2.2}$$

Hyb, Hyb^{-1}: ハイブリッド・カプラーは、2 つの入力信号 $S_1(\theta_1)$、$S_2(\theta_2)$ に対し、位相を保存したもの（0 回転）と位相を $\pi/2$ 回転したものを合成（和算）する（Hyb）。逆に、1 つの入力信号 $S_{12}(\theta_1, \theta_2)$ に対し、位相を保存したものと位相を $-\pi/2$ 回転したものに分解する（Hyb^{-1}）。

$$\mathrm{Hyb}\left(S_1(\theta_1), S_1(\theta_2)\right) \overset{\equiv}{\cancel{:=}} S_1(\theta_1) + S_2\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.3}$$

$$\mathrm{Hyb}^{-1}\left(S_{12}(\theta_1, \theta_2)\right) \overset{\equiv}{\cancel{:=}} \begin{cases} S_1(\theta_1) \\ S_2\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{2.4}$$

MKID: MKID は、ある信号の振幅 A と位相 θ に対して次のような変換をする。

$$A \to A', \quad \theta \to \theta + \phi \tag{2.5}$$

LPF: LPF は、ある信号 $S(t) = \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i t}$ に対し、周波数 ω_c より大きい項をゼロにする。

$$\mathrm{LPF}(S(t), \omega_\mathrm{c}) \overset{\equiv}{\cancel{:=}} \sum_{\omega_i < \omega_\mathrm{c}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i t} \tag{2.6}$$

これらの素子を使って、DDC 方式による、N 個の MKID の多重読み出しを考える。簡単のために、DAC から出力する信号は 1 に規格化し、個々の MKID の共振周波数を f_i（$= \omega_i/2\pi$）、LO の周波数を f_LO（$= \omega_\mathrm{LO}/2\pi$）とする。

アップ・コンバート

DAC の出力信号 $S_1(t)$、$S_2(t)$ は、次のように書ける。

$$\begin{aligned} S_1(t) &\overset{\equiv}{\cancel{:=}} \sum_{i=1}^{N} \cos\omega_i t, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \\ S_2(t) &\overset{\equiv}{\cancel{:=}} \sum_{i=1}^{N} \sin\omega_i t, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Div で分配した、LO 信号 $S_3(t) = A\cos\omega_{\mathrm{LO}}t$ と DAC の出力信号 $S_1(t)$、$S_2(t)$ を Mix で混合し、それらの信号をそれぞれ、$S_{13}(t)$、$S_{23}(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} S_{13}(t) &\overset{\equiv}{\cancel{:=}} \mathrm{Mix}(S_1(t), S_3(t)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A}{2}\left\{\cos(\omega_i + \omega_{\mathrm{LO}})t - \cos(\omega_i - \omega_{\mathrm{LO}})t\right\} \\ S_{23}(t) &\overset{\equiv}{\cancel{:=}} \mathrm{Mix}(S_2(t), S_3(t)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A}{2}\left\{\sin(\omega_i + \omega_{\mathrm{LO}})t + \sin(\omega_i - \omega_{\mathrm{LO}})t\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。混合後の信号 $S_{13}(t)$、$S_{23}(t)$ を Hyb で合成し、フィード信号 $S_{\mathrm{feed}}(t)$ にする。

$$S_{\mathrm{feed}}(t) \overset{\equiv}{\cancel{:=}} \mathrm{Hyb}\left(S_{13}(t), S_{23}(t)\right) = \sum_{i=1}^{N} A\cos(\omega_i + \omega_{\mathrm{LO}})t \tag{2.9}$$

MKID による変調

フィード信号 $S_{\mathrm{feed}}(t)$ は、MKID により以下の変換を受ける。

$$S_{\mathrm{feed}(t)} \rightarrow S'_{\mathrm{feed}}(t) = \sum_{i=1}^{N} A'_i\left[\cos(\omega_i + \omega_{\mathrm{LO}})t + \phi_i\right] \tag{2.10}$$

ダウン・コンバート

MKID により変換されたフィード信号 $S'_{\mathrm{feed}}(t)$ は、Hyb^{-1} によって分解される。

$$\mathrm{Hyb}^{-1}\left(S'_{\mathrm{feed}}(t)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} A'_i\cos\left[(\omega_i + \omega_{\mathrm{LO}})t + \phi_i\right] \overset{\equiv}{\cancel{=:}} S'_1(t) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} A'_i\sin\left[(\omega_i + \omega_{\mathrm{LO}})t + \phi_i\right] \overset{\equiv}{\cancel{=:}} S'_2(t) \end{cases} \tag{2.11}$$

分解した信号 $S'_1(t)$、$S'_2(t)$ は、再度 Mix で LO 信号 $S_3(t)$ と混合し、$S'_{13}(t)$ と $S'_{23}(t)$ を ADC に入力する。

$$\begin{aligned} S'_{13}(t) &\overset{\equiv}{\cancel{:=}} \mathrm{Mix}(S'_1(t), S_3(t)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A''_i}{2}\left\{\cos(\omega_i t + \phi_i) + \cos\left[(\omega_i + 2\omega_{\mathrm{LO}})t + \phi_i\right]\right\} \\ S'_{23}(t) &\overset{\equiv}{\cancel{:=}} \mathrm{Mix}(S'_2(t), S_3(t)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A''_i}{2}\left\{\sin(\omega_i t + \phi_i) + \sin\left[(\omega_i + 2\omega_{\mathrm{LO}})t + \phi_i\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

ここで、$A''_i \overset{\equiv}{\cancel{:=}} A'_i A$ とした。