

Теоремы и определения

Definition: Высказывания и n-местные предикаты

Высказывание - это упрощённая модель повествования предложения, такая что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, но не одновременно
 n-местный предикат (n-арный предикат) - это выражение, которое превращается в высказывание, если в нём заменить x_1, x_2, \dots, x_n на подходящие имена, где x_1, x_2, \dots, x_n - переменные в предикате

Definition: Логические операции

- | | |
|------------------|--|
| Отрицание: | • $\neg A$ (также обозначают \bar{A}) означает "не A" |
| Логическое и: | • $A \wedge B$ означает "верно A и верно B" |
| Логическое или: | • $A \vee B$ означает "верно A, или верно B, или верны A и B вместе" |
| Исключающее или: | • $A \oplus B$ означает "верно ровно одно из высказываний A, B" |
| Импликация: | • $A \implies B$ означает "если верно A, то верно B" |
| Эквивалентность: | • $A \iff B$ означает "A верно тогда и только тогда, когда верно B" |

Note

Пусть $A \implies B$

Если A верно, то B тоже верно, но если A ложно, то B может быть и истинным, и ложным

Пусть $A \iff B$

Если A ложно, то ложно B. Если B верно, то верно A

Note

Логические операции можно выражать через другие логические операции, например,
 $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$

Definition: Кванторы

Квантор всеобщности обозначается как \forall и означает "для любого"

Квантор существования обозначается как \exists и означает "существует"

Квантор единственности обозначается как $!$ и означает "единственный, такой что ..."

Example

- | | |
|-----------------|--|
| Всеобщность: | • $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x)$ означает
"Для любого x из \mathbb{R} выполняется предикат $\phi(x)$ " |
| Существование: | • $\exists x (x \in \mathbb{Q} \implies \psi(x))$ означает
"Существует x, такой что если x из \mathbb{Q} , то выполняется предикат $\psi(x)$ " |
| Единственность: | • $\forall n \in \mathbb{N} \exists! k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \leq n < 2^{k+1}$ означает
"Для любого натурального числа существует и единственно такое целое неотрицательное число k, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$ " |

Note

На практике квантор единственности часто используется вместе с квантором существования т.е. часто используют связку $\exists!$, "существует и единственно"

Note

Вместо " $\neg \exists$ " пишут " \nexists "

Claim Правило обращения кванторов

При обращении кванторов квантор существования меняется на квантор всеобщности, квантор всеобщности меняется на квантор существования, а утверждение под кванторами меняется на противоположное

Example

Пусть дано высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m_1 \in \mathbb{Z} \exists m_2 > m_1 \forall q \in \mathbb{Q} : |m_1| > n \wedge \neg \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Тогда отрицание к этому высказыванию будет:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m_1 \in \mathbb{Z} \forall m_2 > m_1 \exists q \in \mathbb{Q} : |m_1| \leq n \vee \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Claim Метод математической индукции

Пусть есть предикат $\phi(n)$, который выполняется или не выполняется при различных $n \in \mathbb{N}$. Тогда, если $\exists k \in \mathbb{N} : \phi(k)$ и $\forall n \geq k : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$, то по методу математической индукции получаем $\forall n \geq k : \phi(n)$

Этапы доказательства:

- | | |
|-------------------------|---|
| База индукции: | • Проверка истинности $\phi(k)$ |
| Предположение индукции: | • Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k$ верно $\phi(n)$ |
| Шаг индукции: | • Докажем, что $\phi(n+1)$, используя предположение индукции |
| Вывод: | • $\forall n \geq k : \phi(n)$ |

Theorem Неравенство Бернулли

Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq -1$, то $(1+x)^n \geq 1+nx$

Proof:

Докажем неравенство при помощи метода математической индукции

1. База индукции:

$$\text{Пусть } n = 1 \implies (1+x)^1 = 1+x \geq 1+x$$

2. Предположение индукции:

$$\text{Пусть для некоторого } n \geq 1 \text{ верно, что } (1+x)^n \geq 1+nx$$

3. Шаг индукции: Рассмотрим неравенство, подставив в него $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$$

$$1+x \geq 0 \implies (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x) = 1+nx+x+n \cdot x^2 \geq 1+nx+x = 1+n(x+1)$$

$$\text{Следовательно, } (1+x)^{n+1} \geq 1+n(x+1)$$

4. Обозначим доказываемое высказывание как предикат $\phi(n)$, тогда получаем:

$$\phi(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$$

Тогда по принципу математической индукции $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n)$

■

Definition: Перестановки, размещения и сочетания

Пусть дано множество из n элементов

- Если все элементы попарно различны (т.е. при решении задачи мы считаем, что два любых элемента множества различны), то количество попарно различных перестановок этого множества обозначается как P_n и равно $n!$

Пусть зафиксировано $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что $k \leq n$, тогда:

- Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k -элементное подмножество данного множества, считая, что элементы попарно различны, обозначается как A_n^k и равно $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k -элементное подмножество данного множества, считая, элементы равны, обозначается как C_n^k и равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Theorem Бином Ньютона

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ (формально, перед равенством необходимо написать $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$)

Proof:

Докажем это утверждение при помощи метода математической индукции

1. База индукции: $n = 1 \implies (a + b)^n = a + b = \sum_{k=0}^1 C_n^k a^k b^{n-k}$

2. Предположение индукции: пусть для некоторого $n \geq 1 : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

3. Рассмотрим равенство и докажем, что оно верно при подстановке $n + 1$:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \\ &= a \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + C_{n+1}^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

4. Получили:

Равенство верно при $n = 1$, а из верности равенства для n следует верность равенства для $n + 1$ (при $n \geq 1$), тогда по методу математической индукции получим, что равенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$

■

Definition: Числовая последовательность

Числовая последовательность - это счётно бесконечный проиндексированный набор чисел

Definition: Ограниченная сверху числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n < C$

Definition: Ограниченная снизу числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n > -C$

Definition: Ограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$

Note

Числовая последовательность ограничена \iff она ограничена сверху и ограничена снизу

Definition: Неограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется неограниченной, если она не является ограниченной, то есть $\forall C > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$

Definition: Отделимая от нуля числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется отделимой от нуля, если $\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| > \epsilon$

Definition: Эпсилон окрестность

Эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$ и обозначается $U_\epsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Эпсилон окрестность точки x_0 "

Example

$$U_1(\pi) = (\pi - 1; \pi + 1) \\ U_\epsilon(e) = (0; 2e)$$

Definition: Проколотаая эпсилон окрестность

Проколотаая эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$ и обозначается $\dot{U}_\epsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Проколотаая эпсилон окрестность точки x_0 "

Example

$$\dot{U}_1(e) = (e - 1; e + 1) \setminus \{e\} = (e - 1; e) \cup (e; e + 1)$$

Definition: Сходящаяся числовая последовательность

Числовая последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел при $n \rightarrow +\infty$, т.е. ч.п. $\{a_n\}$ называется сходящейся, если $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, то есть по определению

$$\exists A \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall n > N : |a_n - A| < \epsilon$$

Note

Сходящаяся ч.п. является ограниченной

Note

Неравенство $|a_n - A| < \epsilon$ равносильно тому, что $a_n \in U_\epsilon(A)$

Definition: Бесконечно большая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если она стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞ при $n \rightarrow +\infty$, т.е.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : a_n > M$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : a_n < -M$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : |a_n| > M$

Definition: Бесконечно малая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если она стремится к 0 при $n \rightarrow +\infty$, т.е.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall n > N : |a_n| < \epsilon$$

Note

Связи числовых последовательностей:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Note

Если ч.п. сходится или является б.б., то предел единственный

Proposition Докажите по определению, что

(ограниченная ч.п.) + (ограниченная ч.п.) = ограниченная ч.п.

б.м. + б.м. = б.м.

б.м. · (ограниченная ч.п.) = б.м.

$\frac{\text{отделимая от нуля ч.п.}}{\text{ограниченная ч.п.}} = \text{ограничена ч.п.}$

Proposition Приведите пример, когда

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = отделимая от нуля ч.п.

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = б.м.

б.б. + б.б. = б.б.

б.б. + б.б. = б.м.

б.б. + б.б. = (ограниченная ч.п.)

б.б. + б.б. = (отделимая от нуля ч.п.)

Theorem Теорема: свойство предельного перехода в неравенствах

$$(\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c_n > A) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C) \implies C \geq A$$

Proof:

1. Распишем, что дано, по определению:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |c_n - C| < \epsilon$$

$$\text{Это равносильно } \forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : C - \epsilon < c_n < C + \epsilon$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c_n > A$$

2. Для любого ϵ рассмотрим $M(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N) + 1$

$$\text{Тогда } \forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N) + 1 \forall n > M : (C - \epsilon < c_n < C + \epsilon \wedge c_n > A)$$

$$\text{Следовательно, } \forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon) \forall n > M : C + \epsilon > A$$

$$\text{Выражение под кванторами не зависит от } M \text{ и } n \implies \forall \epsilon > 0 : C + \epsilon > A$$

3. Предположим от противного, что $C < A$

$$\text{Положим } \epsilon := \frac{A - C}{2} > 0 \implies C + \epsilon = C + \frac{A - C}{2} = \frac{A + C}{2} < A$$

$$\text{Получили, что } \exists \epsilon > 0 : C + \epsilon < A \implies \textcircled{\text{W}} \implies \text{предположение, что } C < A, \text{ неверно} \implies C \geq A$$

■

Theorem Теорема о зажатой последовательности (о 2 миллионерах / 2 полицейских / гамбургерах)

$$\left. \begin{array}{l} a_n, b_n, c_n - \text{числовые последовательности} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = X \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = X \\ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \leq c_n \leq b_n \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = X$$

Proof:

Докажем для случая, когда $X \in \mathbb{R}$. При $X \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ доказательство проводится аналогично

1. Распишем по определению пределы.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : X - \epsilon < a_n < X + \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n > N_2(\epsilon) : X - \epsilon < b_n < X + \epsilon$$

Рассмотрим $N_3(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon), N)$, тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_3(\epsilon) \forall n > N_3(\epsilon) : X - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < X + \epsilon$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists N_3(\epsilon) \forall n > N_3(\epsilon) : X - \epsilon < c_n < X + \epsilon$$

■

Theorem Теорема о свойстве предела б.м. ч.п.

если $a \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n - \text{б.м. ч.п.}$$

Proof:

” \implies ”

Распишем по определению, что дано:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

Обозначим ч.п. $\alpha_n = a_n - a$, тогда $a_n = a + \alpha_n$

Тогда: $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |\alpha_n| < \epsilon$

Доказали, что $a_n = a + \alpha_n$, где α_n - б.м. ч.п.

” \Leftarrow ”

Распишем то, что α_n - б.м., по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |\alpha_n| < \epsilon$$

По условию $a_n = a + \alpha_n$, тогда $a_n - a = \alpha_n$, подставим в выражение под кванторами:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

Доказали по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

■

Definition: Монотонность ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$

Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$

Ч.п. $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$

Ч.п. $\{a_n\}$ называется невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

Claim Аксиома непрерывности действительных чисел (принцип полноты)

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ B \subseteq \mathbb{R} \\ B \neq \emptyset \\ \forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \end{array} \right\} \implies \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

Definition: Ограниченное сверху множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq C$

Definition: Ограниченное снизу множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq C$

Definition: Ограниченное множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным, если $\exists C > 0 \forall a \in A : |a| \leq C$

Definition: Определение верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$. Тогда верхней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \leq c$

Definition: Определение нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$. Тогда нижней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \geq c$

Definition: Определение точной верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$. Тогда точной верхней гранью множества A называют наименьший элемента множества всех верхних граней множества A и обозначают $\sup A$

Definition: Определение точной нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$. Тогда точной нижней гранью множества A называют наибольший элемента множества всех нижней граней множества A и обозначают $\inf A$

Note

Вообще говоря, наименьший и наибольший элементы множества не всегда существуют. Например, у множества $(0; 1)$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, при этом $\sup(0; 1) = 1 \notin (0; 1)$, $\inf(0; 1) = 0 \notin (0; 1)$

Theorem Теорема о существовании точной грани множества

Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ограничено сверху, то $\exists \sup A$

Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ограничено снизу, то $\exists \inf A$

Proof: Докажем для верхней грани, для нижней грани доказательство аналогично

$$A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge (\exists C > 0 \forall a \in A \Rightarrow a < C) \Rightarrow \exists \sup A$$

1. Обозначим $S_A = \{c \in \mathbb{R} | \forall a \in A \Rightarrow a \leq c\} \neq \emptyset$ - множество верхних граней

Это множество не пусто, т.к. A ограничено по условию, т.е. $\exists c > 0 \forall a \in A \Rightarrow a \leq c$

2. По построению множества A и S_A удовлетворяют аксиоме непрерывности

действительных чисел, тогда $\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall c \in S_A \Rightarrow a \leq b \leq c$

Но из $b \leq c \Rightarrow b \in S_A$, при этом $(\forall c \in S_A \Rightarrow b \leq c)$, следовательно, b является наименьшим элементом множества верхних граней множества A , т.е. по определению точной верхней грани $b = \sup A$

■

Theorem Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ч.п.)

Если ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится

Если ч.п. $\{a_n\}$ невозрастает и ограничена снизу, то она сходится

Proof: Докажем для неубывающей ч.п., для невозрастающей ч.п. доказательство аналогично

1. Обозначим множество значений ч.п. $A = \{a_n\}$

Т.к. a_n - числовая последовательность, то множество A счётно или конечно (т.е. существует инъекция между A и $\mathbb{N}, A \lesssim \mathbb{N}$)

Также $A \neq \emptyset$ и множество A ограничено сверху \Rightarrow по теореме о существовании точной верхней грани $\exists \sup A = a$

2. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, т.е. $\forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

a_n неубывает и ограничена сверху $a \Rightarrow |a_n - a| = a - a_n$, тогда

$$|a_n - a| < \epsilon \iff a - a_n < \epsilon \iff a_n > a - \epsilon$$

Т.к. последовательность a_n неубывает, то следующие 2 высказывания равносильны:

$$\forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : a_n > a - \epsilon \quad (\#)$$

$\forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) : a_N > a - \epsilon$ (*)

3. Докажем второе высказывание (*) методом от противного.

Предположим, что $\exists \epsilon_0 \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a - \epsilon_0$

Тогда число $a - \epsilon_0$ - верхняя грань множества A , но a само является точной

верхней гранью, но $a - \epsilon_0 < a \implies \perp \implies$ неверно предположение, что

высказывание (*) неверно \implies высказывание (#) верно ■

Definition: Число e

Рассмотрим ч.п. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его e

Proof: 1. Докажем, что a_n ограничена сверху числом 3

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\ &= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

2. Докажем, что a_n - возрастающая ч.п.

Рассмотрим a_{n+1}

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Т.к. $\forall m \in \{1, \dots, n\} 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$, то

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > a_n$$

3. $\{a_n\}$ ограничена сверху и возрастает $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ ■

Definition: Подпоследовательность

Пусть дана ч.п. $\{a_n\}$, тогда подпоследовательностью называется ч.п., полученная *последовательным* выбором некоторых членов исходной ч.п. и обозначается $\{a_{n_k}\}$

Note

Если $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность ч.п. $\{a_n\}$, то $\forall k \in \mathbb{N} : n_k \geq k$

Definition: Частичный предел

Частичный предел ч.п. $\{a_n\}$ - число, являющееся пределом какой-либо сходящейся подпоследовательности данной последовательности $\{a_n\}$

Definition: Верхний предел ч.п.

Верхним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup\{a_n\}_{n \geq k}$$

Definition: Нижний предел ч.п.

Нижним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf\{a_n\}_{n \geq k}$$

Definition: Предельная точка ч.п.

Предельной точкой ч.п. $\{a_n\}$ называется число a , такое что в любой окрестности точки a находится бесконечно много членов ч.п. $\{a_n\}$

Theorem Определение предельной точки ч.п. эквивалентно определению частичного предела ч.п.

Proof:

1. a - частичный предел $\implies a$ - предельная точка $\{a_n\}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

\iff

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$$

Следовательно, $\forall \epsilon$ в $U_\epsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$

2. a - предельная точка $\{a_n\} \implies a$ - ч.п. $\{a_n\}$

По определению предельной точки $\forall \epsilon$ в $U_\epsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$

Предъявим ч.п. $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$, такую что $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

$$\text{Обозначим } \epsilon_k = \frac{1}{k}$$

Рассмотрим ϵ_1 , в $U_{\epsilon_1}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, выберем какой-то член a_{n_1}

Рассмотрим ϵ_2 , в $U_{\epsilon_2}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in U_{\epsilon_2}(a)$

Рассмотрим ϵ_k , в $U_{\epsilon_k}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} \in U_{\epsilon_k}(a)$

Таким образом, построена ч.п. $\{a_{n_k}\}$, такая что $\forall k \in \mathbb{N} : a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k} \implies$

\implies по теореме о зажатой последовательности $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

■

Note

Свойства частичных пределов ч.п.

$$\{a_n\} \text{ сходится } \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{\text{множества предельных точек } \{a_n\}\}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{\text{множества предельных точек } \{a_n\}\}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ - частичные пределы

Theorem Система вложенных отрезков

Системой вложенных отрезков называют счётно бесконечное множество отрезков, каждый из

которых содержит следующий отрезок как подмножество
Обозначение: $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subseteq I_k$

Example

Рассмотрим $S = \{[1 - \frac{1}{k}; 2 + \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$, тогда

$$S = \{[0; 3], [0.5; 2.5], [\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}], \dots\}$$

Рассмотрим $S = \{[\pi; \pi - \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$, тогда

$$S = \{[\pi; \pi - 1], [\pi; \pi - \frac{1}{4}], [\pi; \pi - \frac{1}{27}], \dots\}$$

Theorem Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной ч.п. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Proof:

По определению ограниченной ч.п. $\exists C \forall n \in \mathbb{N} |a_n| < C$

Построим искомую подпоследовательность при помощи системы вложенных отрезков

$I_1 = [-C; C]$, $\forall n \in \mathbb{N} a_n \in I_1$, выберем какой-то член ч.п. $a_{n_1} \in I_1$

Т.к. $\{a_n\}$ - ч.п., то в какой-то половине точно есть бесконечно много членов $\{a_n\}$

Выберем эту половину и обозначим I_2 , выберем в нём какой-то член ч.п. $a_{n_2} \in I_2$

Пусть построен I_k и a_{n_k} . Делим I_k пополам и выбираем половину,

в которой бесконечно много членов $\{a_n\}$, обозначим эту половину как I_{k+1}

и выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$

Построили последовательность $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k; d_k]$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{b_k\}$ неубывает и ограничена сверху C

$$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_k = b, b \geq b_k$$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{d_k\}$ невозрастает и ограничена снизу $-C$

$$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} d_k = d, d \leq d_k$$

При этом $|d_k - b_k| = \frac{2 \cdot C}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$

ADDPROOF[$d \geq b$](пока что см. консультацию 2)

$$d - b \leq d_k - b_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty \implies d \leq b \implies d = b$$

■

Definition: Фундаментальная ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n, m > N(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$$

Theorem Критерий сходимости ч.п. по Коши

Ч.п. $\{a_n\}$ сходится $\iff \{a_n\}$ - Фундаментальная ч.п.

Proof:

” \implies ”

Распишем, что дано: $\exists A \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1 : |a_n - A| < \epsilon$

Хотим доказать: $\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \epsilon$

$$|a_n - a_m| < \epsilon \iff |a_n - a + a - a_m| < \epsilon \iff |a_n - a| + |a - a_m| < \epsilon \iff |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon$$

Положим $N_2(\epsilon) := N_1(\frac{\epsilon}{2}) \implies$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon \implies$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \epsilon$$

” \impliedby ”

Распишем, что дано: $\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$

Покажем, что $\{a_n\}$ ограничена: положим $\epsilon = 1 \implies$

$$\exists N_2(1) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < 1 \implies$$

$$\exists N_2(1) \forall n > N_2 : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1 \implies$$

$$\exists N_2(1) \forall n > N_2 : a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$$

Положим $C := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_2(1)}|, |a_{N_2(1)+1}|) + 1 \implies$

$$\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq C$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists a \in \mathbb{R} \exists \{a_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$

Перепишем, что дано:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_3(\epsilon) \forall k > N_3(\epsilon) : |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

Распишем, что хотим доказать:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

$$|a_n - a| < \epsilon \iff |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < \epsilon \iff |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

Т.к. при выборе членов в подпоследовательности $n_k \geq k$, то при $k > N_3(\epsilon) \implies n_k > N_3(\epsilon)$

Положим $N_1(\epsilon) = \max(N_2(\frac{\epsilon}{2}), N_3(\frac{\epsilon}{2})) \implies$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon \implies$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

■

Definition: Постоянная Эйлера

Рассмотрим ч.п. $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его γ

Proof:

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$$

γ_n убывает

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} (1 - (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)) = \\ &= \frac{1}{n+1} (1 - \ln\left((1 + \frac{1}{n})^{n+1}\right)) \end{aligned}$$

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ сходится к e и убывает. Докажем убывание

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right) \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{(n+1)(n^2 + 3n + 1)}{n^3 + 4n^2 + 4n} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1 \end{aligned}$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} (1 - \ln b_n)$$

$$b_n \text{ убывает к } e \implies b_n > e \implies \ln b_n > 1 \implies \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$$

Докажем ограниченность γ_n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \implies n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \implies \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n} > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln(n+1) - \ln n - \ln n = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

■

Definition: Определение предела функции по Коши

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Note

При этом $\dot{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty)$, $\dot{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta)$, $\dot{U}_\delta(\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$

Definition: Определение предела функции по Гейне

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : (x_n \neq x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A)$$

Definition: Односторонний предел функции

Левосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \rightarrow x_0$ слева, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Правосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \rightarrow x_0$ справа, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Theorem Свойство предела функции при $x \rightarrow x_0, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ где } A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Proof:

” \implies ”

Дано: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

Тогда:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

” \impliedby ”

Дано:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta_1) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_2; x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

Положим $\delta(\epsilon) = \min(\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon))$, тогда:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subseteq (x_0 - \delta_2; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta_1) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

■

Definition: Бесконечные пределы

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$

Definition: Бесконечно малая функция

Функция называется б.м. при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$

Функция называется б.м. при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Функция называется б.м. при $x \rightarrow -\infty$, если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Definition: Бесконечно большая функция

Функция называется б.б. при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$

Функция называется б.б. при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

Функция называется б.б. при $x \rightarrow -\infty$, если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

Definition: Ограниченная функция

Функция называется ограниченной при $x \rightarrow x_0$, если $\exists \delta > 0 \exists C > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| < C$

Definition: отделимая от нуля функция

Функция называется отделимой от нуля при $x \rightarrow x_0$, если $\exists \delta > 0 \exists \epsilon_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > \epsilon_0$

Note

Связь функций при $x \rightarrow x_0$, где x - аргумент обеих функций, x_0 - число, которому стремится аргумент обеих функций:

- $\frac{1}{\text{б.ф.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.ф.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Definition: Асимптоты

Вертикальная асимптота: • Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой

для графика функции $y = f(x)$, если
 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$

Горизонтальная асимптота: Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ на $\pm\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

Вообще говоря, горизонтальные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными

Наклонная асимптота: Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (kx + b) = 0$$

Вообще говоря, наклонные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными

Theorem Признак наклонной асимптоты

Прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty \iff$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b \end{cases}$$

Proof:

” \implies ”

1. Распишем определение наклонной асимптоты: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (kx + b) = 0$

Вынесем b из предела: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$

$f(x) - kx - b$ - б.м. при $x \rightarrow +\infty$

Т.к. $x \rightarrow +\infty$, то можно поделить на x :

$$\frac{f(x)}{x} - k = \frac{b}{x} + \frac{\text{б.м.}}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty \\ \frac{\text{б.м.}}{x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \implies \frac{f(x)}{x} - k \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

” \longleftarrow ”

Т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (kx + b) = 0$

Definition: O - символика

о-малое: • $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$
 О-большое: • $f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - ограниченная при $x \rightarrow x_0$

Theorem Теорема о пределе сложной функции

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Proof:

Распишем, что дано, по определению:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1(\epsilon) \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\epsilon)}(x_0) : |f(x) - y_0| < \epsilon \quad (1)$$

$$\forall \lambda > 0 \exists \delta_2(\lambda) \forall y \in \dot{U}_{\delta_2(\lambda)}(y_0) : |g(y) - g(y_0)| < \lambda \quad (2)$$

Распишем, что хотим доказать:

$$\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta(\eta) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$$

Положим $\delta_3(\eta) = \delta_1(\delta_2(\eta))$, тогда :

$$x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) \iff x \in \dot{U}_{\delta_1(\delta_2(\eta))}(x_0) \implies \text{по (1)} |f(x) - y_0| < \delta_2(\eta)$$

$$|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta) \iff f(x) \in U_{\delta_2(\eta)}(y_0)$$

По (2) знаем, что если $f(x) \in U_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Если $f(x) = y_0$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Иначе, если $f(x) \neq y_0 \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Получили: $\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta_1(\delta_2(\eta)) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Definition: Непрерывность функции в точке

Функция называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Clarification

Если x_0 - граница области определения, то рассматривается односторонний предел

Definition: Непрерывность функции на множестве

Функция называется непрерывной на множестве E , если она непрерывна в каждой точке множества E

При нахождении опечаток просьба написать https://t.me/i8088_t, на момент компиляции ник в тг: vova kormilitsyn