

**HSE FCS SE**  
**Calculus-1 2023-2024**

Lecturer: Ivan Erlikh

ver. 1.6.8

# Contents

<b>1</b>	<b>Используемые обозначения</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Логические операции</b>	<b>6</b>
2.1	Высказывания, предикаты и кванторы	6
2.1.1	Определения	6
2.1.2	Правило обращения кванторов	7
2.2	Метод математической индукции	7
2.3	Неравенство Бернулли	8
2.4	Перестановки, размещения, сочетания	8
2.5	Бином Ньютона	9
<b>3</b>	<b>Определения и свойства числовых последовательностей</b>	<b>10</b>
3.1	Определения	10
3.1.1	Числовая последовательность	10
3.1.2	Определения монотонных числовых последовательностей	10
3.1.3	Ограниченная ч.п.	10
3.1.4	Неограниченная ч.п.	11
3.1.5	Отделимая от нуля ч.п.	11
3.1.6	Сходящаяся ч.п.	11
3.1.7	Эпсилон окрестность	12
3.1.8	Бесконечно большая ч.п.	13
3.1.9	Бесконечно малая ч.п.	13
3.2	Связи числовых последовательностей	13
3.3	Арифметика предела ч.п.	14
3.4	Теоремы	14
3.4.1	Теорема о предельном переходе в неравенствах	14
3.4.2	Теорема о зажатой последовательности	15
3.4.3	Свойство предела б.м. ч.п.	15
<b>4</b>	<b>Элементы теории множеств</b>	<b>16</b>
4.1	Аксиома непрерывности	16
4.2	Определения ограниченных множеств	16
4.3	Определения граней множества	16
4.4	Теорема о существовании точной грани множества	17
<b>5</b>	<b>Теорема Вейерштрасса и число <math>\epsilon</math></b>	<b>18</b>
5.1	Теорема Вейерштрасса	18
5.2	Число Эйлера	19
<b>6</b>	<b>Определения и свойства подпоследовательности и частичного предела</b>	<b>20</b>
6.1	Определение подпоследовательности	20
6.2	Частичные пределы и предельная точка	20
6.2.1	Определения	20
6.2.2	Теорема об эквивалентности определений	21
6.2.3	Свойства частичных пределов ч.п.	21
6.3	Система вложенных отрезков	21

6.4	Теорема Больцано-Вейерштрасса . . . . .	22
6.5	Дополнительный материал (вне курса) . . . . .	22
6.5.1	Принцип Больцано-Вейерштрасса . . . . .	22
6.5.2	Стягивающая система вложенных отрезков . . . . .	23
6.5.3	Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Фундаментальная ч.п. Критерий сходимости ч.п. по Коши</b>	<b>24</b>
7.1	Определение фундаментальной ч.п. . . . .	24
7.2	Критерий сходимости ч.п. по Коши . . . . .	25
7.3	Постоянная Эйлера-Маскерони . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Асимптоты</b>	<b>27</b>
8.1	Определения асимптот . . . . .	27
8.2	Признак наклонной асимптоты . . . . .	28
<b>9</b>	<b>Определение и свойства функции</b>	<b>29</b>
9.1	Определения . . . . .	29
9.2	Пределы . . . . .	30
9.2.1	Определение предела функции по Коши . . . . .	30
9.2.2	Определение предела функции по Гейне . . . . .	30
9.2.3	Теорема об эквивалентности определений по Коши и по Гейне . . . . .	31
9.2.4	Определение одностороннего предела функции . . . . .	31
9.2.5	Свойство предела функции . . . . .	32
9.2.6	Бесконечные пределы . . . . .	32
9.2.7	Арифметика предела функции . . . . .	33
9.2.8	Предельный переход в неравенствах . . . . .	33
9.2.9	Теорема о зажатой функции . . . . .	34
9.2.10	Первый и второй замечательные пределы . . . . .	35
9.2.11	Теорема о пределе сложной функции . . . . .	37
9.3	О - символика . . . . .	38
9.4	Непрерывность функции . . . . .	38
9.4.1	Непрерывность функции в точке . . . . .	38
9.4.2	Свойства непрерывных функций . . . . .	38
9.4.3	Правило замены переменных в пределе сложной функции . . . . .	38
9.4.4	Непрерывность функции на множестве . . . . .	39
9.4.5	Теорема 1 о функции, непрерывной на отрезке . . . . .	40
9.4.6	Теорема 2 о функции, непрерывной на отрезке . . . . .	41
9.4.7	Определение монотонности функции . . . . .	42
9.4.8	Определение обратной функции . . . . .	42
9.4.9	Достаточное условие обратимости . . . . .	42
9.4.10	Критерий обратимости функции . . . . .	43
9.4.11	Свойства обратимой функции . . . . .	44
9.4.12	Обратные тригонометрические функции . . . . .	45
9.4.13	Показательная функция . . . . .	45
9.4.14	Логарифмическая функция . . . . .	45
9.4.15	Следствия из 2 замечательного предела . . . . .	46
9.4.16	Показательная функция с вещественным показателем . . . . .	46
9.5	Производная функции . . . . .	47
9.5.1	Определение производной . . . . .	47
9.5.2	Правила подсчёта производных . . . . .	48
9.5.3	Определения дифференцируемости функции . . . . .	48
9.5.4	Определение дифференциала . . . . .	48
9.5.5	Теорема о непрерывности функции, дифференцируемой в точке . . . . .	49
9.5.6	Теорема о дифференцируемости сложной функции . . . . .	49
9.5.7	Теорема о производной обратной функции . . . . .	49
9.5.8	Пример 1 . . . . .	49
9.5.9	Пример 2 . . . . .	50

9.5.10	Определение локального минимума . . . . .	50
9.5.11	Определение локального максимума . . . . .	50
9.5.12	Определение точки локального экстремума . . . . .	50
9.5.13	Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма) . . . . .	50
9.5.14	Определения касательной к графику функции . . . . .	50
9.5.15	Теорема Ролля . . . . .	51
9.5.16	Теорема Лагранжа . . . . .	51
9.5.17	Теорема-следствие 1 . . . . .	52
9.5.18	Теорема-следствие 2 . . . . .	52
9.5.19	Теорема-следствие 3 . . . . .	52
9.5.20	Теорема Коши . . . . .	53
9.5.21	Теорема о монотонности непрерывно дифференцируемой функции . . . . .	53
9.5.22	Теорема-следствие . . . . .	54
9.5.23	Достаточное условие экстремума . . . . .	54
9.5.24	Выпуклость и вогнутость функции . . . . .	54
9.5.25	Теорема о выпуклости и вогнутости функции на интервале . . . . .	55
9.5.26	Правило Лопиталя . . . . .	55
9.6	Формула Тейлора . . . . .	59
9.6.1	Многочлен Тейлора . . . . .	59
9.6.2	Свойство многочлена Тейлора . . . . .	59
9.6.3	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано . . . . .	60
9.6.4	Теорема о единственности локальной формулы Тейлора . . . . .	61
9.6.5	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа . . . . .	62
9.6.6	Определение точки возрастания . . . . .	62
9.6.7	Определение точки убывания . . . . .	63
9.6.8	Теорема о функции, имеющей ровно $n - 1$ ненулевых производных . . . . .	63
<b>10</b>	<b>Интегрирование функций</b> . . . . .	<b>64</b>
10.1	Определение первообразной . . . . .	64
10.2	Свойство первообразных . . . . .	64
10.3	Неопределённый интеграл . . . . .	65
10.3.1	Определение неопределённого интеграла . . . . .	65
10.3.2	Свойства неопределённого интеграла . . . . .	65
10.3.3	Теорема об интеграле сложной функции . . . . .	65
10.3.4	Формула подстановки . . . . .	65
10.3.5	Формула замены переменных . . . . .	66
10.3.6	Интегрирование по частям . . . . .	66
10.4	Определённый интеграл . . . . .	67
10.4.1	Разбиение, диаметр разбиения, разметка разбиения . . . . .	67
10.4.2	Интегральная сумма Римана . . . . .	68
10.4.3	Определение определённого интеграла по Коши . . . . .	68
10.4.4	Определение определённого интеграла по Гейне . . . . .	68
10.4.5	Определение функции, интегрируемой по Риману . . . . .	68
10.4.6	Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке . . . . .	69
10.4.7	Суммы Дарбу . . . . .	69
10.4.8	Критерий Дарбу интегрируемости по Риману . . . . .	71
10.4.9	Определение равномерной непрерывности . . . . .	73
10.4.10	Теорема Кантора . . . . .	74
10.4.11	Теорема об интегрируемости непрерывной функции . . . . .	74
10.4.12	Теорема об интегрируемости монотонной функции . . . . .	75
10.4.13	Элементы теории меры . . . . .	75
10.4.14	Свойства определённого интеграла . . . . .	76
10.5	Обобщённое понятие интеграла . . . . .	79
10.5.1	Интеграл с переменным верхним пределом . . . . .	79
10.5.2	Теорема 1 об интеграле с переменным верхним пределом . . . . .	80
10.5.3	Теорема 2 об интеграле с переменным верхним пределом . . . . .	80

10.5.4	Формула Ньютона-Лейбница . . . . .	80
--------	------------------------------------	----

## Chapter 1

### Используемые обозначения

#### Note

$\mathbb{N}$  - множество натуральных чисел. В данном файле полагаем, что  $0 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$  - множество целых чисел

$\mathbb{Q}$  - множество рациональных чисел

$\mathbb{R}$  - множество вещественных чисел

$\mathbb{R}_{>0}$  - множество положительных вещественных чисел

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$  - дополненная прямая (extended real number line)

$\{n, n+1, \dots, m\}$  - множество вещественных чисел от  $n$  до  $m$  "с шагом 1" включительно

Формально, это множество равно  $\{x \in \mathbb{R} | x \geq n \wedge x \leq m \wedge x - n \in \mathbb{Z}\}$

$\textcircled{W}$  - противоречие (используется при доказательстве методом от противного)

(если Вам знаком символ  $\perp$ , то в данном файле полагаем эти обозначения эквивалентными)

Через ":: $\varepsilon$ " будем обозначать "положим по определению равным", например,  $\forall \varepsilon > 0 : \delta(\varepsilon) := 2\varepsilon$  означает "для любого  $\varepsilon$ , большего нуля, положим  $\delta(\varepsilon)$  равным  $2\varepsilon$ "

Аббревиатурой БОО будем обозначать "без ограничения общности" (возможно, Вам также знакомо выражение "не умаляя общности", в данном файле полагаем эти обозначения эквивалентными)

$C[a; b]$  - множество функций, непрерывных на отрезке  $[a; b]$

$R[a; b]$  - множество функций, интегрируемых на отрезке  $[a; b]$

## Логические операции

### 2.1 Высказывания, предикаты и кванторы

#### 2.1.1 Определения

##### Definition: Высказывания и n-местные предикаты

Высказывание - это упрощённая модель повествования предложения, такая что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, но не одновременно  
n-местный предикат (n-арный предикат) - это выражение, которое превращается в высказывание, если в нём заменить  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на подходящие имена, где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - переменные в предикате

##### Definition: Логические операции

- |                  |  |
|------------------|--|
| Отрицание:       | • $\neg A$ (также обозначают $\bar{A}$ ) означает "не A"                       |
| Логическое и:    | • $A \wedge B$ означает "верно A и верно B"                                    |
| Логическое или:  | • $A \vee B$ означает "верно A, или верно B, или верны A и B вместе"           |
| Исключающее или: | • $A \oplus B$ означает "верно ровно одно из высказываний A, B"                |
| Импликация:      | • $A \Rightarrow B$ означает "если верно A, то верно B"                        |
| Эквивалентность: | • $A \Leftrightarrow B$ означает "A верно тогда и только тогда, когда верно B" |

##### Note

Пусть  $A \Rightarrow B$

Если A верно, то B тоже верно, но если A ложно, то B может быть и истинным, и ложным

Пусть  $A \Leftrightarrow B$

Если A ложно, то ложно B. Если B верно, то верно A

##### Note

Логические операции можно выражать через другие логические операции, например,  
 $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

##### Definition: Кванторы

Квантор всеобщности обозначается как  $\forall$  и означает "для любого"

Квантор существования обозначается как  $\exists$  и означает "существует"

Квантор единственности обозначается как  $!$  и означает "единственный, такой что ..."

### Example

- Всеобщность: •  $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x)$  означает  
"Для любого  $x$  из  $\mathbb{R}$  выполняется предикат  $\phi(x)$ "
- Существование: •  $\exists x (x \in \mathbb{Q} \implies \psi(x))$  означает  
"Существует  $x$ , такой что если  $x$  из  $\mathbb{Q}$ , то выполняется предикат  $\psi(x)$ "
- Единственность: •  $\forall n \in \mathbb{N} \exists! k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \leq n < 2^{k+1}$  означает  
"Для любого натурального числа существует и единственно такое целое неотрицательное число  $k$ , что  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ "

### Note

На практике квантор единственности часто используется вместе с квантором существования т.е. часто используют связку  $\exists!$ , "существует и единственно"

### Note

Вместо " $\neg \exists$ " пишут " $\nexists$ "

## 2.1.2 Правило обращения кванторов

### Claim Правило обращения кванторов

При обращении кванторов квантор существования меняется на квантор всеобщности, квантор всеобщности меняется на квантор существования, а утверждение под кванторами меняется на противоположное

### Example

Пусть дано высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m_1 \in \mathbb{Z} \exists m_2 > m_1 \forall q \in \mathbb{Q} : |m_1| > n \wedge \neg \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Тогда отрицание к этому высказыванию будет:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m_1 \in \mathbb{Z} \forall m_2 > m_1 \exists q \in \mathbb{Q} : |m_1| \leq n \vee \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

## 2.2 Метод математической индукции

### Claim Метод математической индукции

Пусть есть предикат  $\phi(n)$ , который выполняется или не выполняется при различных  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, если  $\exists k \in \mathbb{N} : \phi(k)$  и  $\forall n \geq k : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$ , то по методу математической индукции получаем  $\forall n \geq k : \phi(n)$

Этапы доказательства:

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| База индукции:          | • Проверка истинности $\phi(k)$   |
| Предположение индукции: | • Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k$ верно $\phi(n)$ |
| Шаг индукции:           | • Докажем, что $\phi(n+1)$ , используя предположение индукции             |
| Вывод:                  | • $\forall n \geq k : \phi(n)$  |



## 2.3 Неравенство Бернулли

### Theorem Неравенство Бернулли

Если  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \geq -1$ , то  $(1+x)^n \geq 1+nx$

*Proof:*

Докажем неравенство при помощи метода математической индукции

1. База индукции:

Пусть  $n = 1 \implies (1+x)^1 = 1+x \geq 1+x$

2. Предположение индукции:

Пусть для некоторого  $n \geq 1$  верно, что  $(1+x)^n \geq 1+nx$

3. Шаг индукции: Рассмотрим неравенство, подставив в него  $n+1$ :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$$

$$1+x \geq 0 \implies (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x) = 1+nx+x+n \cdot x^2 \geq 1+nx+x = 1+n(x+1)$$

Следовательно,  $(1+x)^{n+1} \geq 1+n(x+1)$

4. Обозначим доказываемое как предикат  $\phi(n)$ , тогда получаем:

$$\phi(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$$

Тогда по принципу математической индукции  $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n)$

■

## 2.4 Перестановки, размещения, сочетания

### Definition: Перестановки, размещения и сочетания

Пусть дано множество из  $n$  элементов

- Если все элементы попарно различны (т.е. при решении задачи мы считаем, что два любых элемента множества различны), то количество попарно различных перестановок этого множества обозначается как  $P_n$  и равно  $n!$

Пусть зафиксировано  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , такое что  $k \leq n$ , тогда:

- Количество количество способов, которыми мы можем выбрать  $k$ -элементное подмножество данного множества, считая, что элементы попарно различны, обозначается как  $A_n^k$  и равно  $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Количество количество способов, которыми мы можем выбрать  $k$ -элементное подмножество данного множества, считая, что все элементы попарно равны, обозначается как  $C_n^k$  и равно  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

### Note

Пусть есть конечная последовательность из  $n$  натуральных чисел от 1 до  $n$  (кортеж из  $n$  элементов от 1 до  $n$ )

Тогда количество различных перестановок элементов кортежа равно  $P_n = n!$

Количество способов выбрать  $k$  чисел из кортежа, считая их перестановки различными, равно  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Количество способов выбрать  $k$  чисел из кортежа, считая, что все перестановки одного набора - это один способ, равно  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пусть  $\sigma = (1, 2, 3, 4)$  - данный кортеж, тогда есть  $P_4 = 24$  различных перестановок  $\sigma$ :

$(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2)$   
 $(2, 1, 2, 4), (2, 1, 4, 2), (2, 3, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1)$   
 $(3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1)$   
 $(4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$

Для  $k = 2$  есть  $A_4^2 = 12$  способ выбрать кортеж из 2 элементов:

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$$

Для  $k = 2$  есть  $C_4^2 = 6$  способ выбрать подмножество из 2 элементов (порядок элементов не важен):

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$$

## 2.5 Бином Ньютона

### Theorem Бином Ньютона

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$  (формально, перед равенством необходимо написать  $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ )

*Proof:*

Докажем это утверждение при помощи метода математической индукции

1. База индукции:  $n = 1 \implies (a + b)^n = a + b = \sum_{k=0}^1 C_n^k a^k b^{n-k}$

2. Предположение индукции: пусть для некоторого  $n \geq 1 : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

3. Рассмотрим равенство и докажем, что оно верно при подстановке  $n + 1$  :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \\ &= a \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + C_{n+1}^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

4. Получили:

Равенство верно при  $n = 1$ , а из верности равенства для  $n$  следует верность равенства для  $n + 1$  (при  $n \geq 1$ ), тогда по методу математической индукции получим, что равенство верно  $\forall n \in \mathbb{N}$

■

## Определения и свойства числовых последовательностей

### 3.1 Определения

#### 3.1.1 Числовая последовательность

**Definition: Числовая последовательность**

Числовая последовательность - это счётно бесконечный проиндексированный набор чисел

**Clarification Уточнение**

Формально, числовая последовательность (далее обозначается ч.п.) - это функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Способы задания:

- Формула. Например,  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Рекуррентно. Например,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

#### 3.1.2 Определения монотонных числовых последовательностей

**Definition: Монотонность ч.п.**

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется строго возрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется строго убывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется неубывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется невозрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

#### 3.1.3 Ограниченная ч.п.

**Definition: Ограниченная сверху числовая последовательность**

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной сверху, если  $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n < C$

**Definition: Ограниченная снизу числовая последовательность**

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной снизу, если  $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n > -C$

**Definition: Ограниченная числовая последовательность**

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной, если  $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$

### Example

Пример:  $a_n = 5 + \frac{1}{n}$

$$\exists C = 7 > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = \left| 5 + \frac{1}{n} \right| < 7 = C$$

### Note

Числовая последовательность ограничена  $\iff$  она ограничена сверху и ограничена снизу

## 3.1.4 Неограниченная ч.п.

### Definition: Неограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется неограниченной, если она не является ограниченной, то есть

$$\forall C > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$$

### Example

Пример:  $a_n = n$

$$\forall C > 0 \exists n = \lceil C \rceil \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$$

## 3.1.5 Отделимая от нуля ч.п.

### Definition: Отделимая от нуля числовая последовательность

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется отделимой от нуля, если

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| > \varepsilon$$

### Example

Пример:  $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

$$\exists \varepsilon = 0.5 > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = \left| 2 - \frac{1}{n} \right| > 0.5 = \varepsilon$$

## 3.1.6 Сходящаяся ч.п.

### Definition: Сходящаяся числовая последовательность

Числовая последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел при  $n \rightarrow +\infty$ , т.е. ч.п.  $\{a_n\}$  называется сходящейся, если:

$$\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A, A \in \mathbb{R}$$

### Example

Пример:  $a_n = \frac{4n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 + 1}$

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2 = A$

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} |a_n - 2| < \varepsilon &\iff \left| \frac{4n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 + 1} - 2 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{2n^2 - 1}{2n^3 + 1} \right| < \varepsilon \iff \\ &\iff \frac{2n^2 - 1}{2n^3 + 1} < \varepsilon \iff \frac{2n^2}{2n^3 + 1} < \varepsilon \iff \frac{2n^2}{2n^3} < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n \end{aligned}$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \forall n > N \geq \frac{1}{\varepsilon} : |a_n - 2| < \varepsilon$$

### Note

Сходящаяся ч.п. является ограниченной

## 3.1.7 Эпсилон окрестность

### Definition: Эпсилон окрестность

Эпсилон окрестностью вещественного числа  $x_0$  (элемента поля вещественных чисел) называется множество  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  и обозначается  $U_\varepsilon(x_0)$ .

Обычно говорят "Эпсилон окрестность точки  $x_0$ "

### Example

$$U_1(\pi) = (\pi - 1; \pi + 1)$$

$$U_e(e) = (0; 2e)$$

### Definition: Проколота эпсилон окрестность

Проколотой эпсилон окрестностью вещественного числа  $x_0$  (элемента поля вещественных чисел) называется множество  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$  и обозначается  $\dot{U}_\varepsilon(x_0)$ .

Обычно говорят "Проколота эпсилон окрестность точки  $x_0$ "

### Example

$$\dot{U}_1(e) = (e - 1; e + 1) \setminus \{e\} = (e - 1; e) \cup (e; e + 1)$$

### Note

Неравенство  $|a_n - A| < \varepsilon$  равносильно тому, что  $a_n \in U_\varepsilon(A)$

### 3.1.8 Бесконечно большая ч.п.

#### Definition: Бесконечно большая числовая последовательность

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно большой, если она стремится к  $+\infty$ , к  $-\infty$  или к  $\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , т.е.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : a_n > M$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : a_n < -M$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : |a_n| > M$

#### Example

Пример б.б. ч.п., стремящейся к  $+\infty$ :  $a_n = n$

Пример б.б. ч.п., стремящейся к  $-\infty$ :  $a_n = -n$

Пример б.б. ч.п., стремящейся к  $\infty$ :  $a_n = (-1)^n \cdot n$

### 3.1.9 Бесконечно малая ч.п.

#### Definition: Бесконечно малая числовая последовательность

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно малой, если она стремится к 0 при  $n \rightarrow +\infty$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N : |a_n| < \varepsilon$$

### 3.2 Связи числовых последовательностей

#### Note

Связи числовых последовательностей:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

#### Note

Если ч.п. сходится или является б.б., то предел единственный

#### Proposition Докажите по определению, что

(ограниченная ч.п.) + (ограниченная ч.п.) = ограниченная ч.п.

б.м + б.м. = б.м.

б.м. · (ограниченная ч.п.) = б.м.

$\frac{\text{отделимая от нуля ч.п.}}{\text{ограниченная ч.п.}} = \text{ограничена ч.п.}$

#### Proposition Приведите пример, когда

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = отделимая от нуля ч.п.

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = б.м.

б.б + б.б = б.б.

б.б + б.б = б.м.

б.б + б.б = (ограниченная ч.п.)

б.б + б.б = (отделимая от нуля ч.п.)

### 3.3 Арифметика предела ч.п.

#### Claim

Если  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a, b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , то

- $a_n \pm b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \pm b$
- $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \cdot b$
- $b \neq 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \neq 0 : \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{b}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0 \implies \sqrt{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a}$

### 3.4 Теоремы

#### 3.4.1 Теорема о предельном переходе в неравенствах

**Theorem** Теорема: свойство предельного перехода в неравенствах

$$(\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c_n > A) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C) \implies C \geq A$$

То есть если начиная с некоторого номера все члены последовательности  $> A$ , и сама последовательность сходится к  $C \in \mathbb{R}$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то  $C \geq A$

**Proof:**

1. Распишем, что дано, по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |c_n - C| < \varepsilon$$

$$\text{Это равносильно } \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c_n > A$$

2. Для любого  $\varepsilon$  рассмотрим  $M(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N) + 1$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N) + 1 \forall n > M : (C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon \wedge c_n > A)$$

$$\text{Следовательно, } \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \forall n > M : C + \varepsilon > A$$

$$\text{Выражение под кванторами не зависит от } M \text{ и } n \implies \forall \varepsilon > 0 : C + \varepsilon > A$$

3. Предположим от противного, что  $C < A$

$$\text{Положим } \varepsilon := \frac{A - C}{2} > 0 \implies C + \varepsilon = C + \frac{A - C}{2} = \frac{A + C}{2} < A$$

$$\text{Получили, что } \exists \varepsilon > 0 : C + \varepsilon < A \implies \textcircled{\text{W}} \implies \text{предположение, что } C < A, \text{ неверно} \implies C \geq A$$

■

### 3.4.2 Теорема о зажатой последовательности

**Theorem** Теорема о зажатой последовательности (о 2 милиционерах / 2 полицейских / гамбургерах)

$$\left. \begin{array}{l} a_n, b_n, c_n - \text{числовые последовательности} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = X \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = X \\ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \leq c_n \leq b_n \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = X$$

**Proof:**

Докажем для случая, когда  $X \in \mathbb{R}$ . При  $X \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$  доказательство проводится аналогично

1. Распишем по определению пределы.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : X - \varepsilon < a_n < X + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) : X - \varepsilon < b_n < X + \varepsilon$$

Рассмотрим  $N_3(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N)$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall n > N_3(\varepsilon) : X - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < X + \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall n > N_3(\varepsilon) : X - \varepsilon < c_n < X + \varepsilon$$

■

### 3.4.3 Свойство предела б.м. ч.п.

**Theorem** Свойство предела б.м. ч.п.

если  $a \in \mathbb{R}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n - \text{б.м. ч.п.}$$

**Proof:**

”  $\implies$  ”

Распишем по определению, что дано:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

Обозначим ч.п.  $\alpha_n = a_n - a$ , тогда  $a_n = a + \alpha_n$

Тогда:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$

Доказали, что  $a_n = a + \alpha_n$ , где  $\alpha_n$  - б.м. ч.п.

”  $\Leftarrow$  ”

Распишем то, что  $\alpha_n$  - б.м., по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$$

По условию  $a_n = a + \alpha_n$ , тогда  $a_n - a = \alpha_n$ , подставим в выражение под кванторами:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

Доказали по определению, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

■



## Элементы теории множеств

### 4.1 Аксиома непрерывности

**Claim** Аксиома непрерывности действительных чисел (принцип полноты)

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ B \subseteq \mathbb{R} \\ B \neq \emptyset \\ \forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

### 4.2 Определения ограниченных множеств

**Definition: Ограниченное сверху множество**

Подмножество  $A \subseteq \mathbb{R}$  называется ограниченным сверху, если  $\exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq C$

**Definition: Ограниченное снизу множество**

Подмножество  $A \subseteq \mathbb{R}$  называется ограниченным снизу, если  $\exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq C$

**Definition: Ограниченное множество**

Подмножество  $A \subseteq \mathbb{R}$  называется ограниченным, если  $\exists C > 0 \forall a \in A : |a| \leq C$

### 4.3 Определения граней множества

**Definition: Определение верхней грани множества**

Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ . Тогда верхней гранью множества  $A$  называют число  $c \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall a \in A : a \leq c$

**Definition: Определение нижней грани множества**

Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ . Тогда нижней гранью множества  $A$  называют число  $c \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall a \in A : a \geq c$

**Definition: Определение точной верхней грани множества**

Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ . Тогда точной верхней гранью множества  $A$  называют наименьший элемент множества всех верхних граней множества  $A$  и обозначают  $\sup A$

**Definition: Определение точной нижней грани множества**

Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ . Тогда точной нижней гранью множества  $A$  называют наибольший элемент множества всех нижней граней множества  $A$  и обозначают  $\inf A$

**Note**

Вообще говоря, наименьший и наибольший элементы множества не всегда существуют. Например, у множества  $(0; 1)$  нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, при этом  $\sup(0; 1) = 1 \notin (0; 1)$ ,  $\inf(0; 1) = 0 \notin (0; 1)$

**4.4 Теорема о существовании точной грани множества****Theorem Теорема о существовании точной грани множества**

Если множество  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  ограничено сверху, то  $\exists \sup A$

Если множество  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  ограничено снизу, то  $\exists \inf A$

**Proof:** Докажем для верхней грани, для нижней грани доказательство аналогично

$$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge (\exists C > 0 \forall a \in A \Rightarrow a < C) \Rightarrow \exists \sup A$$

1. Обозначим  $S_A = \{c \in \mathbb{R} | \forall a \in A \Rightarrow a \leq c\} \neq \emptyset$  - множество верхних граней  
Это множество не пусто, т.к.  $A$  ограничено по условию, т.е.  $\exists C > 0 \forall a \in A \Rightarrow a \leq C$

2. По построению множества  $A$  и  $S_A$  удовлетворяют аксиоме непрерывности действительных чисел, тогда  $\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall c \in S_A \Rightarrow a \leq b \leq c$

Но из  $b \leq c \Rightarrow b \in S_A$ , при этом  $(\forall c \in S_A \Rightarrow b \leq c)$ , следовательно,  $b$  является наименьшим элементом множества верхних граней множества  $A$ , тогда по определению точной верхней грани  $b = \sup A$

■

Теорема Вейерштрасса и число  $e$ 

## 5.1 Теорема Вейерштрасса

**Theorem** Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ч.п.)

Если ч.п.  $\{a_n\}$  неубывает и ограничена сверху, то она сходится

Если ч.п.  $\{a_n\}$  невозрастает и ограничена снизу, то она сходится

**Proof:** Докажем для неубывающей ч.п., для невозрастающей ч.п. доказательство аналогично

1. Обозначим множество значений ч.п.  $A = \{a_n\}$

Т.к.  $a_n$  - числовая последовательность, то множество  $A$  счётно или конечно

(т.е. существует инъекция между  $A$  и  $\mathbb{N}$ ,  $A \lesssim \mathbb{N}$ )

Также  $A \neq \emptyset$  и множество  $A$  ограничено сверху  $\implies$  по теореме о существовании точной верхней грани  $\exists \sup A = a$

2. Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , т.е.  $\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

$a_n$  неубывает и ограничена сверху  $a \implies |a_n - a| = a - a_n$ , тогда

$|a_n - a| < \varepsilon \iff a - a_n < \varepsilon \iff a_n > a - \varepsilon$

Т.к. последовательность  $a_n$  неубывает, то следующие 2 высказывания равносильны:

$\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : a_n > a - \varepsilon$  (#)

$\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) : a_N > a - \varepsilon$  (\*)

3. Докажем второе высказывание (\*) методом от противного.

Предположим, что  $\exists \varepsilon_0 \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a - \varepsilon_0$

Тогда число  $a - \varepsilon_0$  - верхняя грань множества  $A$ , но  $a$  само является точной верхней гранью, но  $a - \varepsilon_0 < a \implies \perp \implies$  неверно предположение, что

высказывание (\*) неверно  $\implies$  высказывание (#) верно ■

## 5.2 Число Эйлера

### Definition: Число e

Рассмотрим ч.п.  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его  $e$

**Proof:** 1. Докажем, что  $a_n$  ограничена сверху числом 3

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n \frac{1}{n^n} = \\
 &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n} \frac{1}{n^n} = \\
 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq \\
 &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\
 &= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3
 \end{aligned}$$

2. Докажем, что  $a_n$  - возрастающая ч.п.

Рассмотрим  $a_{n+1}$

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\
 &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
 &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

Т.к.  $\forall m \in \{1, \dots, n\} \ 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$ , то

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > a_n$$

3.  $\{a_n\}$  ограничена сверху и возрастает  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$  ■

## Определения и свойства подпоследовательности и частичного предела

### 6.1 Определение подпоследовательности

#### Definition: Подпоследовательность

Пусть дана ч.п.  $\{a_n\}$ , тогда подпоследовательностью называется ч.п., полученная *последовательным* выбором некоторых членов исходной ч.п. и обозначается  $\{a_{n_k}\}$

#### Note

Если  $\{a_{n_k}\}$  - подпоследовательность ч.п.  $\{a_n\}$ , то  $\forall k \in \mathbb{N} : n_k \geq k$

### 6.2 Частичные пределы и предельная точка

#### 6.2.1 Определения

#### Definition: Частичный предел

Частичный предел ч.п.  $\{a_n\}$  - число, являющееся пределом какой-либо сходящейся подпоследовательности данной последовательности  $\{a_n\}$

#### Definition: Верхний предел ч.п.

Верхним пределом ч.п.  $\{a_n\}$  называется предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \{a_n\}_{n \geq k}$$

#### Definition: Нижний предел ч.п.

Нижним пределом ч.п.  $\{a_n\}$  называется предел

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \{a_n\}_{n \geq k}$$

#### Definition: Предельная точка ч.п.

Предельной точкой ч.п.  $\{a_n\}$  называется число  $a$ , такое что в любой окрестности точки  $a$  находится бесконечно много членов ч.п.  $\{a_n\}$

### 6.2.2 Теорема об эквивалентности определений

**Theorem** Определение предельной точки ч.п. эквивалентно определению частичного предела ч.п.

*Proof:*

1.  $a$  - частичный предел  $\implies a$  - предельная точка  $\{a_n\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

$\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$$

Следовательно,  $\forall \varepsilon$  в  $U_\varepsilon(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$

2.  $a$  - предельная точка  $\{a_n\} \implies a$  - ч.п.  $\{a_n\}$

По определению предельной точки  $\forall \varepsilon$  в  $U_\varepsilon(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$

Предъявим ч.п.  $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$ , такую что  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

Обозначим  $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$

Рассмотрим  $\varepsilon_1$ , в  $U_{\varepsilon_1}(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$ , выберем какой-то член  $a_{n_1}$

Рассмотрим  $\varepsilon_2$ , в  $U_{\varepsilon_2}(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$ , поэтому  $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$

Рассмотрим  $\varepsilon_k$ , в  $U_{\varepsilon_k}(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$ , поэтому  $\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$

Таким образом, построена ч.п.  $\{a_{n_k}\}$ , такая что  $\forall k \in \mathbb{N} : a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k} \implies$

$\implies$  по теореме о зажатой последовательности  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

■

### 6.2.3 Свойства частичных пределов ч.п.

#### Note

Свойства частичных пределов ч.п.

$$\{a_n\} \text{ сходитс} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{\text{множества предельных точек } \{a_n\}\}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{\text{множества предельных точек } \{a_n\}\}$$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$  - частичные пределы

### 6.3 Система вложенных отрезков

#### Definition: Система вложенных отрезков

Системой вложенных отрезков называют счётно бесконечное множество отрезков, каждый из которых содержит следующий отрезок как подмножество

Обозначение:  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} = [a_{k+1}; b_{k+1}] \subseteq I_k = [a_k; b_k]$

#### Example

Рассмотрим  $S = \{[1 - \frac{1}{k}; 2 + \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ , тогда

$$S = \{[0; 3], [0.5; 2.5], [\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}], \dots\}$$

Рассмотрим  $S = \{[\pi; \pi - \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ , тогда

$$S = \{[\pi; \pi - 1], [\pi; \pi - \frac{1}{4}], [\pi; \pi - \frac{1}{27}], \dots\}$$

## 6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

### Theorem Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной ч.п. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

**Proof:**

По определению ограниченной ч.п.  $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$

Построим искомую подпоследовательность при помощи системы вложенных отрезков

$I_1 = [-C; C], \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in I_1$ , выберем какой-то член ч.п.  $a_{n_1} \in I_1$

Т.к.  $\{a_n\}$  - ч.п., то в какой-то половине точно есть бесконечно много членов  $\{a_n\}$

Выберем эту половину и обозначим  $I_2$ , выберем в нём какой-то член ч.п.  $a_{n_2} \in I_2$ , такой что  $n_2 > n_1$  (если это нельзя сделать, т.е.  $\forall m (a_m \in I_2 \implies m \leq n_1)$ , то в  $I_2$  лишь конечное число членов

ч.п.  $\{a_n\} \implies \textcircled{\text{W}} \implies \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in I_2$ )

Пусть построен  $I_k$  и  $a_{n_k}$ . Делим  $I_k$  пополам и выбираем половину,

в которой бесконечно много членов  $\{a_n\}$ , обозначим эту половину как  $I_{k+1}$

и выберем  $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$  (если это нельзя сделать, т.е.  $\forall m (a_m \in I_{k+1} \implies m \leq n_k)$ ,

тогда в  $I_{k+1}$  лишь конечное число членов ч.п.  $\{a_n\} \implies \textcircled{\text{W}} \implies \exists n_{k+1} > n_k : a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ )

Построили последовательность  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $I_k = [b_k; d_k]$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{b_k\}$  неубывает и ограничена сверху  $C$

$$\implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_k = b, b \geq b_k$$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{d_k\}$  невозрастает и ограничена снизу  $-C$

$$\implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} d_k = d, d \leq d_k$$

$$\text{При этом } |d_k - b_k| = \frac{2 \cdot C}{2^{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$\forall k \in \mathbb{N} : b_k \leq d_k \implies$  по теореме о предельном переходе в неравенствах:  $b \leq d$

$$d - b \leq d_k - b_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \implies d \leq b \implies d = b$$

$$\text{Получили: } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_k = b = d = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_k$$

$b_k$  и  $d_k$  - границы отрезка  $I_k \implies \forall k \in \mathbb{N} : b_k \leq a_k \leq d_k \implies$

$$\implies \text{по теореме о пределе зажатой последовательности } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_k = b = d$$

■

## 6.5 Дополнительный материал (вне курса)

### 6.5.1 Принцип Больцано-Вейерштрасса

#### Note

В терминах теории множеств теорема Больцано-Вейерштрасса формулируется так:

У любого бесконечного ограниченного множества существует хотя бы одна предельная точка

### 6.5.2 Стягивающая система вложенных отрезков

#### Definition: Стягивающая система вложенных отрезков

Пусть  $I$  - система вложенных отрезков, тогда если  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ([a_n; b_n] \in I \wedge b_n - a_n < \varepsilon)$ , то такая система вложенных отрезков  
 называется стягивающейся системой вложенных отрезков

### 6.5.3 Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора

#### Theorem Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора

Для любой системы вложенных отрезков существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

Т.е.  $\exists c \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N} : c \in I_k = [a_k; b_k]$

Если система вложенных отрезков является стягивающейся, то такая точка единственна

*Proof:*

1. Множество  $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$  ограничено сверху, например, числом  $b_1 \implies$

$\implies \exists \sup A = \alpha$  по теореме о существовании точной грани множества

Аналогично  $\exists \sup B = \beta, B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$(\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n) \implies (\alpha \leq \beta \wedge \forall n \in \mathbb{N} : [\alpha; \beta] \subseteq [a_n; b_n])$

2. Тогда положим  $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2} \implies \forall n \in \mathbb{N} : \gamma \in [a_n; b_n]$

3. Для стягивающейся системы вложенных отрезков:

Предположим от противного, что точка не одна, т.е.

$\exists \gamma_1 < \gamma_2 : \forall n \in \mathbb{N} : (\gamma_1 \in [a_n; b_n] \wedge \gamma_2 \in [a_n; b_n])$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$

Положим  $\varepsilon := \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$ , тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : b_n - a_n \geq \varepsilon \implies \textcircled{W} \implies$

$\implies$  изначальное предположение неверно  $\implies$  точка не более, чем одна,

а существование хотя бы одной показано в пунктах 1, 2

■

#### Note

Вообще говоря, утверждение неверно для интервалов, например для системы вложенных интервалов:

$$\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(0; \frac{1}{k}\right) \right\}_{k \in \mathbb{N}} : \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \emptyset$$



## Фундаментальная ч.п. Критерий сходимости ч.п. по Коши

### 7.1 Определение фундаментальной ч.п.

**Definition: Фундаментальная ч.п.**

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

## 7.2 Критерий сходимости ч.п. по Коши

### Theorem Критерий сходимости ч.п. по Коши

Ч.п.  $\{a_n\}$  сходится  $\iff \{a_n\}$  - Фундаментальная ч.п.

*Proof:*

"  $\implies$  "

Распишем, что дано:  $\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1 : |a_n - A| < \varepsilon$

Хотим доказать:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \iff |a_n - a + a - a_m| < \varepsilon \iff |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon \iff |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

Положим  $N_2(\varepsilon) := N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

"  $\impliedby$  "

Распишем, что дано:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Покажем, что  $\{a_n\}$  ограничена: положим  $\varepsilon = 1 \implies$

$$\exists N_2(1) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < 1 \implies$$

$$\exists N_2(1) \forall n > N_2 : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1 \implies$$

$$\exists N_2(1) \forall n > N_2 : a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$$

$$\text{Положим } C := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_2(1)}|, |a_{N_2(1)+1}|) + 1 \implies$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists a \in \mathbb{R} \exists \{a_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

$$\text{Докажем, что } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

Перепишем, что дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall k > N_3(\varepsilon) : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Распишем, что хотим доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < \varepsilon \iff |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Т.к. при выборе членов в подпоследовательности  $n_k \geq k$ , то при  $k > N_3(\varepsilon) \implies n_k > N_3(\varepsilon)$

$$\text{Положим } N_1(\varepsilon) = \max\left(N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

■

### 7.3 Постоянная Эйлера-Маскерони

#### Definition: Постоянная Эйлера-Маскерони

Рассмотрим ч.п.  $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его  $\gamma$

*Proof:*

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$$

$\gamma_n$  убывает

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \left(1 - (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 - \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)\right) \end{aligned}$$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  сходится к  $e$  и убывает. Докажем убывание

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right) \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{(n+1)(n^2 + 3n + 1)}{n^3 + 4n^2 + 4n} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1 \end{aligned}$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} (1 - \ln b_n)$$

$$b_n \text{ убывает к } e \implies b_n > e \implies \ln b_n > 1 \implies \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$$

Докажем ограниченность  $\gamma_n$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \implies n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \implies \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n} > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ \gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln(n+1) - \ln n - \ln n = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

■

## Асимптоты

### 8.1 Определения асимптот

#### Definition: Асимптоты

Вертикальная асимптота: • Прямая  $x = a$  называется вертикальной асимптотой для графика функции  $y = f(x)$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$$

Горизонтальная асимптота: • Прямая  $y = b$  называется горизонтальной асимптотой для графика функции  $y = f(x)$  на  $\pm\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

Вообще говоря, горизонтальные асимптоты на  $+\infty$  и  $-\infty$  могут быть разными

Наклонная асимптота: • Прямая  $y = kx + b$  называется наклонной асимптотой для графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (kx + b) = 0$$

Вообще говоря, наклонные асимптоты на  $+\infty$  и  $-\infty$  могут быть разными

## 8.2 Признак наклонной асимптоты

### Theorem Признак наклонной асимптоты

Прямая  $y = kx + b$  - наклонная асимптота графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty \iff$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b \end{cases}$$

*Proof:*

”  $\implies$  ”

1. Распишем определение наклонной асимптоты:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$

Вынесем  $b$  из предела:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$

$f(x) - kx - b$  - б.м. при  $x \rightarrow +\infty$

Т.к.  $x \rightarrow +\infty$ , то можно поделить на  $x$ :

$$\frac{f(x)}{x} - k = \frac{b}{x} + \frac{\text{б.м.}}{x}$$
$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \frac{\text{б.м.}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right\} \implies \frac{f(x)}{x} - k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

”  $\impliedby$  ”

Т.к.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$

■

## Определение и свойства функции

### 9.1 Определения

#### Definition: Определение функции

Множество пар  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f \wedge y \in E_f\}$  называется функцией  $f$  с областью определения  $D_f$  и областью значения  $E_f$ , если  $\forall x \in D_f \exists! y \in E_f : (x, y) \in f$  (для удобства  $(x, y) \in f$  обозначают как  $f(x) = y$ )

Обозначение функции:  $f : X \rightarrow Y$

В данном обозначении подразумевают, что  $D_f = X, E_f \subseteq Y$

#### Example

$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , в данном случае  $D_f = \mathbb{N} \cup \{0\}, E_f = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

Т.к. несложно установить, что  $E_f = \mathbb{Z}$ , то можно написать  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$

#### Definition: Определение инъективной функции

Функция  $f$  называется инъективной, если  $\forall y \in E_f \exists! x \in D_f : f(x) = y$

Это эквивалентно тому, что  $\forall x_1, x_2 \in D_f : (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$

(говорят, что  $f$  - инъекция)

#### Example

$\forall n \in \mathbb{N}$  функция  $f(x) = x^{2n-1}$  является инъективной

$\forall n \in \mathbb{N}$  функция  $f(x) = x^{2n}$  не является инъективной

#### Definition: Определение сюръективной функции

Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется сюръективной для множества  $Y$ , если  $E_f = Y$

(говорят, что  $f$  - сюръекция)

Когда говорят, что  $f$  сюръективна, не уточняя множество, то подразумевают, что  $f$  сюръективна для  $Y$

#### Example

Функция  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не сюръективна для  $\mathbb{R}$ , но сюръективна для  $[-1; 1]$

**Definition: Определение биективной функции**

Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется биективной, если она инъективна и сюръективна (говорят, что  $f$  - биекция)

**Example**

Функция  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ , такая что  
 $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  - биекция между  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $\mathbb{Z}$   
 (как следствие, показали, что  $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{Z}$ , т.е. множества равномощны)

**9.2 Пределы****9.2.1 Определение предела функции по Коши****Definition: Определение предела функции по Коши**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Note**

При этом  $\dot{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty)$ ,  $\dot{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta)$ ,  $\dot{U}_\delta(\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$

**9.2.2 Определение предела функции по Гейне****Definition: Определение предела функции по Гейне**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : (x_n \neq x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A)$$

### 9.2.3 Теорема об эквивалентности определений по Коши и по Гейне

#### **Theorem** Теорема об эквивалентности определений по Коши и по Гейне

Определение предела функции по Коши эквивалентно определению предела функции по Гейне

**Proof:**

"  $\implies$  "

Распишем определение по Коши:  $\forall \xi > 0 \exists \delta = \delta(\xi) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x) - A| < \xi$  (1)

Пусть дана ч.п., удовлетворяющая условиям посыпки импликации, т.е.

$$\{x_n\} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0$$

По определению это означает, что

$$\forall \lambda > 0 \exists N(\lambda) \in \mathbb{N} \forall n > N(\lambda) : 0 < |x_n - x_0| < \lambda \quad (2)$$

Хотим доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) : |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ , тогда по (2):

$$\forall n > N(\delta(\varepsilon)) : 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Это равносильно тому, что  $\forall n > N(\delta(\varepsilon)) : x_n \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$

Тогда по (1) получим:  $\forall n > N(\delta(\varepsilon)) : |f(x_n) - A| < \varepsilon$

Т.е. мы доказали искомое высказывание, положив  $N_1(\varepsilon) := N(\delta(\varepsilon))$

"  $\impliedby$  "

Предположим от противного, т.е. выполнено определение по Гейне, но по Коши не выполнено:

$$\forall \{x_n\} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0 \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A \quad (3)$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0 \quad (4)$$

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  рассмотрим  $\delta_n = \frac{1}{n}$  и  $x \in \dot{U}_{\delta_n}(x_0)$  из (4) обозначим как  $x_n$

Тогда по (4):  $\forall n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n} \implies x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \text{ по теореме о пределе зажатой последовательности}$$

Получили ч.п., такую что  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0$

Тогда по определению сходимости по Гейне (3):  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A \implies$

$$\implies \exists N(\varepsilon_0) \forall n > N(\varepsilon_0) : |f(x_n) - A| < \varepsilon_0 \implies \textcircled{\text{W}}$$

■

### 9.2.4 Определение одностороннего предела функции

#### **Definition:** Односторонний предел функции

Левосторонним пределом функции называют предел функции по Коши  $f$  при  $x \rightarrow x_0$  слева, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Правосторонним пределом функции называют предел функции по Коши  $f$  при  $x \rightarrow x_0$  справа, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$



### 9.2.5 Свойство предела функции

**Theorem** Свойство предела функции при  $x \rightarrow x_0, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A, \text{ где } A \in \overline{\mathbb{R}}$$

*Proof:*

"  $\implies$  "

Дано:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Тогда:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

"  $\impliedby$  "

Дано:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta_1) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_2; x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Положим  $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$ , тогда:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subseteq (x_0 - \delta_2; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta_1) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

■

### 9.2.6 Бесконечные пределы

**Definition: Бесконечные пределы**

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$

**Definition: Бесконечно малая функция**

Функция называется б.м. при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , при этом  $x_0 \in \mathbb{R}$

Функция называется б.м. при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Функция называется б.м. при  $x \rightarrow -\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

**Definition: Бесконечно большая функция**

Функция называется б.б. при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , при этом  $x_0 \in \mathbb{R}$

Функция называется б.б. при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

Функция называется б.б. при  $x \rightarrow -\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

**Definition: Ограниченная функция**

Функция называется ограниченной при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\exists \delta > 0 \exists C > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| < C$

**Definition: Отделимая от нуля функция**

Функция называется отделимой от нуля при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\exists \delta > 0 \exists \varepsilon_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > \varepsilon_0$

**Note**

Связь функций при  $x \rightarrow x_0$ , где  $x$  - аргумент обеих функций,  $x_0$  - число, к которому стремится аргумент обеих функций:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

### 9.2.7 Арифметика предела функции

**Claim**

Если  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a \in \mathbb{R}, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b \in \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , то

- $f(x) \pm g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a \pm b$
- $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a \cdot b$
- $(\exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : g(x) \neq 0) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{a}{b}$

### 9.2.8 Предельный переход в неравенствах

**Theorem** Предельный переход в неравенствах

$$\left. \begin{array}{l} f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \\ \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < g(x) \end{array} \right\} \implies A \leq B$$

### 9.2.9 Теорема о зажатой функции

**Theorem** Теорема о зажатой функции

$$\left. \begin{array}{l} f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \\ \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$$

**Proof:**

1. По определению предела функции по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_2}(x_0) : |h(x) - A| < \varepsilon$$

2. Докажем, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ , расписав определение по Коши:

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ , тогда положим  $\delta_3(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \delta\}$

Тогда  $\forall x \in \dot{U}_{\delta_3}(x_0) : A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$

То есть показали верность определения предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_3 > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_3}(x_0) : |g(x) - A| < \varepsilon$$

■

## 9.2.10 Первый и второй замечательные пределы

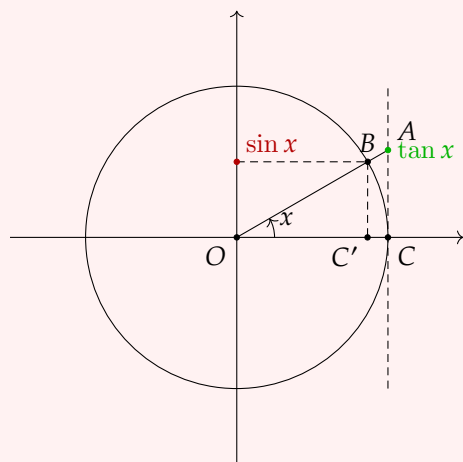
### Definition: Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Proof:**

Докажем неравенство  $x < \sin x < \tan x$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Рассмотрим единичную окружность с центром в  $(0; 0)$ :



$AC = \tan x$ ,  $BC' = \sin x$ , дуга  $\overset{\frown}{BC} = x \cdot OC$

Пусть  $S_{BOC}$ ,  $S_{AOC}$  - площади соответствующих треугольников,  $S_{B\check{O}C}$  - площадь сектора, тогда

$$S_{BOC} < S_{B\check{O}C} < S_{AOC}$$

$$\frac{BC' \cdot OC}{2} < \frac{x \cdot OC^2}{2} < \frac{AC \cdot OC}{2}$$

$$\sin x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x \cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

При  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  воспользуемся нечётностью синуса и чётностью косинуса:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} \in (\cos(x); 1)$$

$$\text{Тогда } \forall x \in \dot{U}_{\frac{\pi}{2}}(0) : \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Распишем предел по определению сходимости по Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(0) : \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$

Будем выбирать только значения  $\delta(\varepsilon) \leq \frac{\pi}{2}$ , тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon &\iff 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon \iff 1 - \cos x < \varepsilon \iff 1 - \cos^2 x < \varepsilon \iff \sin^2 x < \varepsilon \\ &\iff \sin x < \varepsilon \iff x < \varepsilon \end{aligned}$$

Показали, что если  $\forall \varepsilon > 0 : \delta(\varepsilon) := \min\left(\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right)$ , то определение предела по Коши выполняется

■

**Definition: Второй замечательный предел**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

**Proof:**

1. По определению числа Эйлера:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

По арифметике предела ч.п.:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

По определению предела ч.п. это означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) : \left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e \right| < \varepsilon$$

$$\text{Последнее выражение равносильно: } e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < e + \varepsilon$$

Аналогично

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) : e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

2. Хотим доказать:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Распишем определение предела функции по Коши при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (\delta; +\infty) : \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right| < \varepsilon$$

Будем рассматривать только  $\delta \geq 1$ , тогда:

$$\forall x \in (\delta; +\infty) \exists n \in \mathbb{N} : n < x \leq n+1$$

$$\text{Тогда } \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\text{Положим } \delta(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} + 1$$

Тогда для каждого рассматриваемого  $x$ :  $n \geq x - 1 > \delta - 1 \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

То есть  $n > N_1(\varepsilon) \wedge n > N_2(\varepsilon)$

$$\text{Тогда } e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon \implies$$

$$\implies e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon$$

Таким образом, показали, что верно определение предела функции по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} + 1 > 0 \forall x \in (\delta; +\infty) : e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon$$

■

### 9.2.11 Теорема о пределе сложной функции

**Theorem** Теорема о пределе сложной функции

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

**Proof:**

Распишем, что дано, по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) : |f(x) - y_0| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall \lambda > 0 \exists \delta_2(\lambda) \forall y \in \dot{U}_{\delta_2(\lambda)}(y_0) : |g(y) - g(y_0)| < \lambda \quad (2)$$

Распишем, что хотим доказать:

$$\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta(\eta) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$$

Положим  $\delta_3(\eta) = \delta_1(\delta_2(\eta))$ , тогда :

$$x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) \iff x \in \dot{U}_{\delta_1(\delta_2(\eta))}(x_0) \implies \text{по (1)} |f(x) - y_0| < \delta_2(\eta)$$

$$|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta) \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$$

По (2) знаем, что если  $f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$ , то  $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Если  $f(x) = y_0$ , то  $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Иначе, если  $f(x) \neq y_0 \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$ , то  $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Получили:  $\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta_1(\delta_2(\eta)) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

■

### 9.3 О - символика

#### Definition: О - символика

- о-малое: •  $f(x) = \overline{o}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , если  $\frac{f(x)}{g(x)}$  - б.м. при  $x \rightarrow x_0$   
О-большое: •  $f(x) = \underline{O}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , если  $\frac{f(x)}{g(x)}$  - ограниченная при  $x \rightarrow x_0$

### 9.4 Непрерывность функции

#### 9.4.1 Непрерывность функции в точке

#### Definition: Непрерывность функции в точке

Функция называется непрерывной в точке  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

#### Clarification Уточнение

Если  $x_0$  - граница области определения, то рассматривается односторонний предел

#### 9.4.2 Свойства непрерывных функций

#### Note

Свойства непрерывных функций:

- Сумма, произведение и частное непрерывных функций - непрерывные функции (по арифметике пределов функции)
- Композиция непрерывных функций - непрерывная функция (по теореме о пределе сложной функции)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

#### 9.4.3 Правило замены переменных в пределе сложной функции

#### Claim Правило замены переменных в пределе

Пусть дана сложная функция  $f(g(x))$ , тогда, если для некоторой точки  $x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$  и  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A \in \mathbb{R}$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$

**Example** (Пример использования правила замены переменной в пределе)

Пусть надо найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x}$

Преобразуем выражение:  $\frac{\sin(\pi x)}{x} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi$

В данном случае в обозначения из утверждения выше:

$$f(y) = \frac{\sin(y)}{y}$$

$$g(x) = \pi x$$

$g(x)$  непрерывна в точке  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = g(x_0) = 0$ , и при этом  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = 1 = A$

Тогда по правилу замены переменной в пределе:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi = \lim_{x \rightarrow 0} A \cdot \pi = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \pi = \pi$$

#### 9.4.4 Непрерывность функции на множестве

**Definition: Непрерывность функции на множестве**

Функция называется непрерывной на множестве  $E$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $E$

/\* Когда говорят, что функция непрерывна, имеют ввиду, что она непрерывна на  $D_f$  \*/

**Note**

В частности, функция непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , если она непрерывна в каждой точке отрезка  $[a; b]$   
При этом, в точках  $a$  и  $b$  рассматриваются односторонние пределы



### 9.4.5 Теорема 1 о функции, непрерывной на отрезке

**Theorem** Теорема о функции, непрерывной на отрезке (иногда называют теоремой Вейерштрасса)

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и достигает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке

Докажем, что функция ограничена сверху и достигает наибольшее значение. Для второго случая доказательство проводится аналогично

*Proof:*

1.  $E_f$  – мно-во значений  $f(x)$  на  $[a; b]$

Обозначим  $M = \sup E_f = \sup_{x \in [a; b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Построим некоторую строго возрастающую ч.п.  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$

2. Докажем, что  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n)$

Предположим от противного, то есть  $\exists n_0 \forall x \in [a; b] : a_{n_0} \geq f(x)$

Тогда  $a_{n_0}$  - верхняя грань множества  $E_f$  (по определению верхней грани множества)

Однако, т.к.  $a_n$  - возрастающая ч.п. и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = M$ , то  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < M$

В частности,  $a_{n_0} < M$ , т.е.  $a_{n_0}$  - верхняя грань, которая меньше точной верхней грани  $\implies$

$\implies \textcircled{W} \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n)$

3. По построению  $M$ :  $\forall x \in [a; b] : f(x) \leq M$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n) \leq M$

Следовательно, по теореме о зажатой последовательности  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$

4. Докажем, что  $M = f(x_0)$

Т.к.  $x_n$  - ограниченная ч.п., то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  такую, что  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_0 \in [a; b]$

Т.к.  $f$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она непрерывна в  $x_0$ , следовательно

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

(по определению непрерывности в точке и определению предела функции по Гейне)

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M \right) \wedge \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \right) \implies M = f(x_0) < \infty$$

Таким образом, на отрезке  $[a; b]$  функция  $f$  ограничена сверху числом  $M = f(x_0)$

■

## 9.4.6 Теорема 2 о функции, непрерывной на отрезке

### Theorem Теорема (2) о функции, непрерывной на отрезке

Функция, непрерывная на отрезке  $[a; b]$ , принимает все промежуточные значения

Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ ,  $f(x_1) = A$ ,  $f(x_2) = B$ ,  $x_1 < x_2$ , БОО  $A < B$ , тогда

$\forall c \in (A; B) \exists x_0 \in (x_1; x_2) : f(x_0) = c$

**Proof:**

1. Построим последовательность вложенных отрезков:

/\* Если Вам так будет удобнее, то докажем существование  $x_0$  бинпоиском по ответу \*/

$[a_1; b_1] := [x_1; x_2]$

$x_3 := \frac{a_1 + b_1}{2}$ , рассмотрим  $f(x_3)$

1)  $f(x_3) = c \implies q.e.d.$

2)  $f(x_3) < c \implies [a_2; b_2] := [x_3; b_1]$

3)  $f(x_3) > c \implies [a_2; b_2] := [a_1; x_3]$

Применяя это правило, продолжим строить последовательность отрезков

Если ни на какой итерации не произойдёт случай 1), то получим счётно бесконечную

последовательность отрезков  $\{[a_n; b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$

По построению ч.п.  $\{a_n\}$  неубывает и ограничена сверху  $b \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq b$

По построению ч.п.  $\{b_n\}$  невозрастает и ограничена снизу  $a \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \geq a$

$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0$

$x_0 \in [a; b] \implies f(x)$  непрерывна в  $x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \implies$

$\implies$  по определению по Гейне  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(x_0)$

По построению  $f(a_n) < c \wedge f(b_n) > c \implies c \leq f(x_0) \leq c \implies f(x_0) = c$

■

### Следствие 1

#### Corollary Следствие

$f(x)$  непрерывна на  $[a; b] \implies E_f = [\inf E_f; \sup E_f]$

### Следствие 2

#### Corollary Следствие

$f(x) = x^2$  непрерывна на  $D_f = [1; 2] \implies E_f = [1; 4] \implies \exists x_0 \in [1; 2] : x_0^2 = 2$

То есть доказано существование числа  $\sqrt{2}$

### Следствие 3

#### Corollary Следствие

$f(x)$  непрерывна на  $[a; b] \wedge f(a) < 0 \wedge f(b) > 0 \implies \exists c \in (a; b) : f(c) = 0$

### 9.4.7 Определение монотонности функции

#### Definition: Определение монотонности функции

- $f(x)$  называется строго возрастающей на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- $f(x)$  называется неубывающей на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f(x)$  называется строго убывающей на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- $f(x)$  называется невозрастающей на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

### 9.4.8 Определение обратной функции

#### Definition: Определение обратной функции

Функция  $y = f^{-1}(x)$  называется обратной функцией к функции  $y = f(x)$ , если множество пар функции  $f^{-1}$  является симметрией множества пар  $f$

#### Example

Пусть  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = e^x$ , т.е.  $f = \{(x, e^x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$   
Тогда  $f^{-1} = \{(e^x, x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\} = \{(x, \ln x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}_{>0}\}$   
То есть  $f^{-1}(x) = \ln x$

#### Note

Функция обратима  $\iff$  она инъективна

### 9.4.9 Достаточное условие обратимости

#### Definition: Достаточное условие обратимости

Если функция  $f(x)$  строго монотонна на  $X$ , то  $f(x)$  обратима на  $X$

#### Proof:

Предположим от противного, что  $f(x)$  не инъективна, то есть

$$\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \implies \min(x_1, x_2) < \max(x_1, x_2) \implies \textcircled{W} \text{ с определением строгой монотонности}$$

■

#### 9.4.10 Критерий обратимости функции

##### Definition: Критерий обратимости функции

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ . Тогда  $f(x)$  обратима  $\iff f(x)$  строго монотонна

*Proof:*

”  $\Leftarrow$  ”Смотри достаточное условие обратимости

”  $\Rightarrow$  ”

Докажем для случая, когда  $f(x)$  строго монотонно возрастает, для убывания аналогично

Предположим от противного, тогда БОО

$$\exists x_1 < x_2 < x_3 \in [a; b] : f(x_1) < f(x_2) \geq f(x_3)$$

Если  $f(x_2) = f(x_3)$ , то  $f$  не инъективна  $\implies f$  не обратима  $\implies \textcircled{W}$

Иначе, положим  $c := \frac{\max(f(x_1), f(x_3)) + f(x_2)}{2} \implies f(x_1) < c < f(x_2) \wedge f(x_3) < c < f(x_2)$

$f$  непрерывна на  $[a; b] \implies f$  непрерывна на  $[x_1; x_2]$  и  $[x_2; x_3]$

$f$  непрерывна на  $[x_1; x_2] \implies \exists x'_0 \in (x_1; x_2) : f(x'_0) = c$

$f$  непрерывна на  $[x_2; x_3] \implies \exists x''_0 \in (x_2; x_3) : f(x''_0) = c$

Получили:  $\exists x'_0 < x''_0 \in [a; b] : f(x'_0) = f(x''_0) \implies f$  не инъективна  $\implies f$  не обратима  $\implies \textcircled{W}$

■

### 9.4.11 Свойства обратной функции

#### Theorem

Если функция  $f(x)$  непрерывна и строго монотонна на  $[a; b]$ , то функция  $f^{-1}(y)$  :

- 1) определена на  $E_f = [\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$
- 2) монотонна (и имеет ту же монотонность) на  $E_f$
- 3) непрерывна на  $E_f$

#### Proof:

1. Доказано по критерию обратимости функции

2. БОО  $f$  возрастает на  $[a; b]$

Предположим от противного

$f^{-1}(y)$  не возрастает на  $[a; b] \implies \exists y_1 < y_2 \in [f(a); f(b)] : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

По определению обратной функции  $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in [a; b]$ , обозначим  $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$

$x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ . При этом,  $f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$

$x_1 \geq x_2 \implies y_1 \geq y_2 \implies \textcircled{\text{W}}$

3. Докажем непрерывность по определению

Дано:  $x = f^{-1}(y)$  - определённая монотонная на  $[a; b]$  функция

Докажем, что  $f^{-1}$  непрерывна в любой точке  $y_0 \in (f(a); f(b))$

Для  $y_0 \in \{f(a), f(b)\}$  доказательство аналогично (нужно рассмотреть односторонние пределы)

По определению непрерывности в точке  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in U_\delta(y_0) : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

Обозначим  $f^{-1}(y_0) = x_0$

БОО докажем для таких  $\varepsilon$ , что  $U_\varepsilon(x_0) \subset (a; b)$ . Для *больших*  $\varepsilon$  неравенство также будет выполняться  $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$

Обозначим  $y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ , тогда  $y_1 < y_0 < y_2$

Положим  $\delta := \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1)$ , тогда  $U_\delta(y_0) \subset (y_1; y_2)$

Докажем, что при выбранном  $\delta$  выполняется неравенство под знаками кванторов:

$y \in U_\delta(y_0) \implies y \in (y_1; y_2) \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \implies x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \implies$   
 $\implies |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon \implies$  неравенство под кванторами верно и определение выполняется

■

#### Следствие 1

#### Corollary Следствие (без доказательства)

Если функция  $f(x)$  непрерывна и строго монотонна на  $(a; b)$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , то функция  $f^{-1}(y)$  :

- 1) определена на  $(m; M)$ , где  $m = \min(f(a), f(b)), M = \max(f(a), f(b))$
- 2) монотонна (и имеет ту же монотонность)  $[m; M]$
- 3) непрерывна на  $(m; M)$

Идея доказательства: рассмотреть  $[c; d] \subset (a; b)$ , для него верна теорема выше, а далее перейти к пределу при границах, стремящихся к  $a$  и  $b$

## Следствие 2

### Corollary

Т.к.  $f(x) = x^n$  непрерывна и строго монотонно возрастает на  $D_f = n \cdot \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup [0; +\infty) : \mathbb{R}$ , то  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  непрерывна и строго монотонно возрастает на  $D_g = E_f = n \cdot \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup [0; +\infty) : \mathbb{R}$

## 9.4.12 Обратные тригонометрические функции

### Definition: Обратные тригонометрические функции

$y = \sin x$  непрерывна и возрастает на  $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \implies \implies \exists \arcsin := \sin^{-1} : y = \arcsin x$  непрерывна и возрастает на  $E_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , область значений -  $D_f = [-1; 1]$

Аналогично

- $y = \arccos x$  непрерывна и убывает на  $E_f = [0; \pi]$ , область значений -  $D_f = [-1; 1]$
- $y = \arctan x$  непрерывна и возрастает на  $E_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , область значений -  $D_f = \mathbb{R}$
- $y = \text{arcctg } x$  непрерывна и убывает на  $E_f = (0; \pi)$ , область значений -  $D_f = \mathbb{R}$

## 9.4.13 Показательная функция

### Definition: Показательная функция

(теорема без доказательства) функция  $y = a^x, a > 0$

- 1) определена на  $D_f = \mathbb{R}, E_f = (0; +\infty)$
- 2) возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на  $\mathbb{R}$
- 4)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$   
 $(a^x)^y = a^{xy}$

/\* Следствие:  $\phi(x) = a^x$  является изоморфизмом (см. алгебра) между  $(\mathbb{R}, +)$  и  $(\mathbb{R}_{>0}, *)$  \*/

## 9.4.14 Логарифмическая функция

### Definition: Логарифмическая функция

Функция, обратная к  $y = a^x, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$  обозначается  $y = \log_a x$

- 1) определена на  $D_f = (0; +\infty), E_f = \mathbb{R}$
- 2) возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на  $(0; +\infty)$
- 4)  $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$   
 $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

/\* Следствие:  $\psi(x) = \log_a x$  является изоморфизмом (см. алгебра) между  $(\mathbb{R}_{>0}, *)$  и  $(\mathbb{R}, +)$  \*/

### 9.4.15 Следствия из 2 замечательного предела

**Corollary** Следствия из 2 замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

**Proof:**

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{x} \ln(x+1) = \ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Функция  $\ln x$  непрерывна, тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$$

■

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Proof:**

$$t = e^x - 1 \implies x = \ln(t+1)$$

$$x \rightarrow 0 \implies t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

■

### 9.4.16 Показательная функция с вещественным показателем

**Corollary** Показательная функция с вещественным показателем

$$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$$

$$y = e^{\alpha \ln x}$$

$\ln x$  непрерывна и возрастает на  $(0; +\infty)$

$\alpha \ln x$  непрерывна и возрастает при  $\alpha > 0$  и убывает при  $\alpha < 0$

$e^{\alpha \ln x}$  непрерывна и возрастает при  $\alpha > 0$  и убывает при  $\alpha < 0$

**Следствие**

**Corollary**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = a \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = b \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x)^{b(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{b(x) \ln a(x)} = e^{b \ln a} = a^b$$

Для ч.п.  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  построим кусочно-линейные функции  $a(x)$  и  $b(x)$ , такие что  $\forall n \in \mathbb{N} : a(n) = a_n \wedge b(n) = b_n$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

## 9.5 Производная функции

### 9.5.1 Определение производной

#### Definition: Определение производной

Производная функции  $f$  в точке  $x_0$  - это предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

#### Note

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x$$

**Proof:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

#### Note

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x^n)' = nx^{n-1}$$

**Proof:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k = nx_0^{n-1}$$

#### Note

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

**Proof:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} &= a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \\ &= a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \ln a} - 1}{t} = a^{x_0} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s} \cdot \ln a = a^{x_0} \ln a \end{aligned}$$

#### Note

$$(e^x)' = e^x$$

#### Note

$n$ -я производная обозначается как  $f^{(n)}(x)$  и определяется как  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ , где 0-я производная  $f^{(0)}(x) = f(x)$

#### Example

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$



### 9.5.2 Правила подсчёта производных

#### Claim Правила подсчёта производных

Если  $\exists f'(x), \exists g'(x), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ , то

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $g(x) \neq 0 \implies \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

### 9.5.3 Определения дифференцируемости функции

#### Definition: Дифференцируемость функции в точке

Функция  $f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если

$$\exists A(x_0) \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

Где  $A(x_0)$  - некоторая величина, не зависящая от  $x$  (т.е. для каждой точки  $x_0$  это некоторое число)

#### Theorem Признак дифференцируемости функции в точке

Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \iff \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$

*Proof:*

"  $\implies$  "

По определению дифференцируемости в точке

$$\exists A(x_0) \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A(x_0) + \bar{o}(1) \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A(x_0) \in \mathbb{R} \implies \exists f'(x_0) = A(x_0) \in \mathbb{R}$$

"  $\impliedby$  "

По определению производной:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \bar{o}(1) \implies$$

$$\implies f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$\implies f(x) = f(x_0) + A(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0), A(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

■

### 9.5.4 Определение дифференциала

#### Definition: Определение дифференциала

Дифференциал функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  - это линейная функция  $df(x_0) = A(x_0) \cdot (x - x_0)$  такая, что  $f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \bar{o}(x - x_0)$

Обозначив  $x - x_0$  как  $dx$  (фиксированное приращение), получим:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

### 9.5.5 Теорема о непрерывности функции, дифференцируемой в точке

#### Theorem

Дифференцируемая в точке  $x_0$  функция непрерывна в ней

#### Proof:

По определению дифференцируемости в точке  $x_0$  :

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \\ f'(x_0) \in \mathbb{R} &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{o}(x - x_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

■

### 9.5.6 Теорема о дифференцируемости сложной функции

#### Theorem

Если  $g(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и функция  $f(y)$  дифференцируема в точке  $y_0 = g(x_0)$ , то  $f(g(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

#### Proof:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \\ f(y) &= f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \bar{o}(y - y_0) \implies \\ f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) + \bar{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) \\ f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0)) \cdot \bar{o}(x - x_0) + \bar{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) = \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) + (x - x_0)\bar{o}(g'(x_0) + \bar{o}(x)(1)) = \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \implies (f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

■

### 9.5.7 Теорема о производной обратной функции

#### Theorem

Если  $f(x)$  непрерывна и обратима на  $[a; b]$ ,  $x_0 \in (a; b)$ ,  $\exists f'(x_0) \neq 0$ , тогда  $\exists (f^{-1}(y))'|_{y=f(x_0)=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

#### Proof:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = |\text{замена } y = f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

### 9.5.8 Пример 1

#### Example

Пример:  $f(x) = e^x$ ,  $f'(x) = e^x$ ,  $f^{-1}(y) = \ln y$   
 $(f^{-1}(y))'|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}$

### 9.5.9 Пример 2

#### Example

Пример:  $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$

$$y = e^{\alpha \ln x} \implies y' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

### 9.5.10 Определение локального минимума

#### Definition: Определение локального минимума (точка минимума)

$x_0$  - точка локального минимума функции  $f(x)$ , если  $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \leq f(x)$

$x_0$  - точка строгого локального минимума функции  $f(x)$ , если  $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) < f(x)$

### 9.5.11 Определение локального максимума

#### Definition: Определение локального максимума (точка максимума)

$x_0$  - точка локального максимума функции  $f(x)$ , если  $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \geq f(x)$

$x_0$  - точка строгого локального максимума функции  $f(x)$ , если  $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) > f(x)$

### 9.5.12 Определение точки локального экстремума

#### Definition: Точка локального экстремума

Точками локального экстремума называются точки минимума и точки максимума

### 9.5.13 Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)

#### Theorem Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)

Если  $x_0$  - точка локального экстремума, то  $\exists f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0$

*Proof:*

Пусть  $\exists f'(x_0)$

Докажем для случая, когда  $x_0$  - локальный минимум, для локального максимума

доказательство аналогично.

Предел при  $x \rightarrow x_0$  существует  $\implies$  существуют односторонние пределы и они совпадают с  $f'(x_0)$

В некоторой  $\delta$  окрестности  $f(x_0) \leq f(x)$

$$\left. \begin{array}{l} x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

■

### 9.5.14 Определения касательной к графику функции

#### Definition: Касательная к графику функции

Касательной к графику функции  $f(x)$  называется прямая  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**Note**

Касательная проходит через точку  $(x_0; f(x_0))$

В точке  $x_0$ :  $f'(x_0) = \tan(\alpha)$ , где  $\alpha$  - угол наклона прямой на графике

**9.5.15 Теорема Ролля****Theorem Теорема Ролля**

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на  $[a; b]$
- Дифференцируема на  $(a; b)$
- $f(a) = f(b)$

То  $\exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) = 0$

**Proof:**

1. Обозначим  $M := \sup_{x \in [a; b]} f(x), m := \inf_{x \in [a; b]} f(x)$  достигаются, т.к. функция непрерывна на отрезке
2. Если  $m = M \implies f(x) = \text{const} \implies \forall x \in (a; b) : f'(x) = 0$
3. Иначе, если  $m < M$ , тогда хотя бы одна из этих точек достигается в  $\xi \in (a; b)$  (т.к.  $f(a) = f(b)$ )  
 БОО  $f(\xi) = M \implies \xi$  - точка  $\text{loc max}$   
 $f$  дифференцируема на  $(a; b) \implies \exists f'(\xi) \implies f'(\xi) = 0$  (по теореме Ферма)

■

**9.5.16 Теорема Лагранжа****Theorem Теорема Лагранжа**

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на  $[a; b]$
- Дифференцируема на  $(a; b)$

То  $\exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

**Proof:**

1. Рассмотрим  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ , эта функция также, как и функция  $f$ , непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$   
 $F(a) = F(b) \implies$  для  $F$  выполняются требования теоремы Ролля  $\implies \exists \xi \in (a; b) : F'(\xi) = 0 \implies$   
 $\implies \exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies \exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

■

### 9.5.17 Теорема-следствие 1

#### Corollary Теорема-следствие 1

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на  $[a; b]$
- Дифференцируема на  $(a; b)$
- $f'(x) = 0$  на  $(a; b)$

То  $f(x) = \text{const}$  на  $[a; b]$

**Proof:**

$$\forall x_1, x_2 \in [a; b] f(x) \text{ удовлетворяет требованиям теоремы Лагранжа на } [x_1; x_2] \implies \\ \implies \exists \xi \in (x_1; x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\text{Получили: } \forall x_1, x_2 \in [a; b] : f(x_2) - f(x_1) = 0$$

■

### 9.5.18 Теорема-следствие 2

#### Corollary Теорема-следствие 2

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям:

- Непрерывность на  $[a; b]$
- Дифференцируемость на  $(a; b)$
- $\forall x \in (a; b) : f'(x) = g'(x)$

То  $\forall x \in [a; b] : f(x) - g(x) = \text{const}$

**Proof:**

$$\text{Рассмотрим } h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h(x) \text{ удовлетворяет требованиям предыдущей теоремы-следствия 1} \implies$$

$$\implies \forall x \in [a; b] : f(x) - g(x) = \text{const}$$

■

Если вы перешли на эту теорему по ссылке из свойства первообразных, то портал обратно: [10.2](#)

### 9.5.19 Теорема-следствие 3

#### Corollary Теорема-следствие 3

Если  $\phi(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и  $\phi'(x)$  определена везде на  $(a; b)$ , кроме, быть может,  $x_0$ , и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(x) = A \in \mathbb{R}$

То  $\exists \phi'(x_0) = A$ , т.е. у производной непрерывной функции нет точек устранимого разрыва

**Proof:**

По определению производной и по теореме Лагранжа:

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(\xi(x)), \xi(x) \in (x_0; x), \text{ т.к. на } (x_0; x)$$

$\phi(x)$  удовлетворяет требованиям т. Лагранжа

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \xi(x) = x_0 \implies \phi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(\xi(x)) = A \text{ (по теореме о пределе сложной функции)}$$

■

### 9.5.20 Теорема Коши

#### Theorem Теорема Коши

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям:

- Непрерывность на  $[a; b]$
- Дифференцируемость на  $(a; b)$

А также  $g'(x) \neq 0$  на  $(a; b)$  и  $g(a) \neq g(b)$

То  $\exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

**Proof:**

1. Рассмотрим  $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$ , эта функция также

непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$

$F(a) = F(b) \implies$  для  $F$  выполняются требования теоремы Ролля  $\implies \exists \xi \in (a; b) : F'(\xi) = 0 \implies$

$$\implies \exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0 \implies \exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

■

### 9.5.21 Теорема о монотонности непрерывно дифференцируемой функции

#### Theorem

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на  $[a; b]$
- Дифференцируема на  $(a; b)$

То:

$\forall x \in (a; b) : f'(x) \geq 0 \iff f(x)$  неубывает на  $[a; b]$

$\forall x \in (a; b) : f'(x) > 0 \implies f(x)$  возрастает на  $[a; b]$

(Для 2 высказывания импликация в обратную сторону не верна, например, для  $f(x) = x^3$  в т.  $x = 0$ )

**Proof:**

”  $\Leftarrow$  ”

$$\forall x_0 \in (a; b) : f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) - \text{неубывающая функция} \implies \forall x \neq x_0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

”  $\implies$  ”

$\forall x_1 < x_2 \in [a; b] : f(x)$  удовлетворяет т. Лагранжа на  $[x_1; x_2] \implies$

$$\exists \xi \in (x_1; x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

$$f'(\xi) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$$

$$f'(\xi) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

■

### 9.5.22 Теорема-следствие

#### Corollary

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$ , кроме конечного числа точек (дифференцируемость), и  $f'(x) \geq 0$ , то  $f(x)$  неубывает на  $[a; b]$

### 9.5.23 Достаточное условие экстремума

#### Theorem Достаточное условие экстремума

Если  $\exists \delta > 0$  :

$(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f'(x) \geq 0) \wedge$

$\wedge (\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f'(x) \leq 0) \wedge$

$\wedge (f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0)$

, то  $x_0$  - точка loc max (нестроого)

### 9.5.24 Выпуклость и вогнутость функции

#### Definition: Выпуклость и вогнутость функций

Функция называется выпуклой вверх на отрезке  $[a; b]$ , если

$\forall x_1 < x_2 \in [a; b]$  верно:

график функции  $y = f(x)$  лежит выше хорды, соединяющей точки  $(x_1; f(x_1))$  и  $(x_2; f(x_2))$ , т.е.

$l(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}$  - уравнение хорды  $l$

$\forall x \in [x_1; x_2] : f(x) \geq l(x)$  - нестрогая выпуклость

$\forall x \in (x_1; x_2) : f(x) > l(x)$  - строгая выпуклость

В определении функции, выпуклой вниз, знаки неравенств  $f(x) \geq l(x)$  и  $f(x) > l(x)$  меняются на противоположные

### 9.5.25 Теорема о выпуклости и вогнутости функции на интервале

#### Theorem

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и на  $(a; b) \exists f''(x)$ , то

$\forall x \in (a; b) : f''(x) \geq 0 \implies f(x)$  выпукла вниз

$\forall x \in (a; b) : f''(x) \leq 0 \implies f(x)$  выпукла вверх

#### Proof:

Докажем выпуклость вниз, выпуклость вверх доказывается аналогично

Пусть  $x_1 < x_2 \in [a; b]$ , тогда для доказательства по определению необходимо

доказать верность неравенства:

$\forall x \in (x_1; x_2) : l(x) - f(x) \geq 0$ , где

$l(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$  - уравнение хорды  $l$

$$\begin{aligned} l(x) - f(x) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} - f(x) \frac{x_2 - x + x - x_1}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x)(x_2 - x) + f(x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1) - f(x)(x_2 - x) - f(x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(f(x_1) - f(x))(x_2 - x) + (f(x_2) - f(x))(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \textcircled{=}, \text{ т.к. для функции } f \end{aligned}$$

на  $(x_1; x)$  и  $(x; x_2)$  выполняется т. Лагранжа,  $\xi \in (x; x_2), \eta \in (x_1; x)$

$$\begin{aligned} \textcircled{=} & \frac{f'(\xi)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\eta)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(x - x_1)(x_2 - x)(f'(\xi) - f'(\eta))}{x_2 - x_1} \textcircled{=}, \text{ т.к. для функции } f' \text{ на } (\eta; \xi) \text{ выполняется т. Лагранжа} \\ \textcircled{=} & \frac{(x - x_1)(x_2 - x)f''(\zeta)(\xi - \eta)}{x_2 - x_1} \geq 0, \zeta \in (\eta; \xi) \subset (a; b) \end{aligned}$$

■

### 9.5.26 Правило Лопиталья

#### Theorem Правило Лопиталья (неопределённость вида $\frac{0}{0}$ )

Докажем теорему для случая, когда рассматривается левосторонний предел при  $a \in \mathbb{R}$ , т.е. предел

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

для  $a \in \mathbb{R}$  и функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , таких что:

- $\exists \delta_1 > 0 : f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a - \delta_1; a)$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} g(x) = 0$
- $\forall x \in (a - \delta_1; a) : g'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда:  $\exists \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$



**Proof:**

1. БОО рассмотрим случай, когда  $A \in \mathbb{R}$ . Иначе рассмотрим предел частного  $\frac{g(x)}{f(x)}$

2. Доопределим  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $a$ :  $f(a) = g(a) = 0$ , чтобы функции были непрерывны в точке  $a$ .

Это не влияет на искомый предел по определению предела функции при  $x \rightarrow a$

(т.к. в определении по Коши рассматриваются интервалы / проколота окрестность точки  $a$ )

Тогда  $\forall x \in (a - \delta_1; a)$  на  $[x; a]$  выполнено условие т. Коши

Тогда по т. Коши  $\exists \xi \in (x; a)$ :  $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$

$\xi$  зависит от  $x$  по построению  $\implies \xi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-} a$

3. Обозначим  $F(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда  $\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = F(\xi(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a-} A$  по теореме о пределе сложной функции  $F(\xi(x))$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = A \implies \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = A \implies \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

■

Для случая  $x \rightarrow a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  и  $x \rightarrow a+$ ,  $a \in \mathbb{R}$  доказательство аналогично

Докажем теорему для случая, когда рассматривается предел при  $a \in +\infty$ , т.е. предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Proof:**

1. БОО рассмотрим случай, когда  $A \in \mathbb{R}$ . Иначе рассмотрим предел частного  $\frac{g(x)}{f(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left| x = \frac{1}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = A$$

2. Рассмотрим функции:

$$a(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$b(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

Тогда:

$$a'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

$$b'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

$$\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{a'(t)}{b'(t)} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a'(t)}{b'(t)} = A$$

По построению  $a(t)$  и  $b(t)$  - композиция дифференцируемых функций, также для них выполнены пункты 2, 3, 4 теоремы, тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a(t)}{b(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a'(t)}{b'(t)} = A \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

■

**Theorem** Правило Лопиталя (неопределённость вида  $\frac{\infty}{\infty}$ )

Докажем теорему для случая, когда рассматривается левосторонний предел при  $a \in \mathbb{R}$ , т.е. предел

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

для  $a \in \mathbb{R}$  и функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , таких что:

- $\exists \delta_1 > 0 : f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a - \delta_1; a)$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} g(x) = \infty$
- $\forall x \in (a - \delta_1; a) : g'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда:  $\exists \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

**Proof:**

1. БОО рассмотрим случай, когда  $A \in \mathbb{R}$ . Иначе рассмотрим предел частного  $\frac{g(x)}{f(x)}$

2. По определению предела:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in (a - \delta_2; a) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon_1$$

Рассмотрим такие  $\varepsilon_1$ , что  $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$

Зафиксируем  $x_0 \in (a - \min\{\delta_1; \delta_2\}; a)$

Т.к.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-} \infty$ , то  $\exists \delta_3 > 0 \forall x \in (a - \delta_3; a) : |f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1}$

То есть  $\exists \delta_3 > 0 \forall x \in (a - \delta_3; a) : \varepsilon_1 \geq \left| \frac{f(x_0)}{f(x)} \right|$

Аналогично  $\exists \delta_4 : \forall x \in (a - \delta_4; a) : \varepsilon_1 \geq \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|$

Обозначим  $x_0 = a - \min\{\delta_1; \delta_2; \delta_3; \delta_4\}$  и рассмотрим  $x \in (x_0; a)$

Тогда на  $[x_0; x]$  выполнены условия теоремы Коши для функций  $f$  и  $g \implies$

$$\implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} - A \right| < \varepsilon_1, \text{ т.к. } \xi(x) \in (x_0; x) \subset (a - \delta_2; a)$$

$$3. \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A \right| <$$

$$< \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| + \varepsilon_1 =$$

$$= \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right| + \varepsilon_1 <$$

$$< (|A| + \varepsilon_1) \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right| + \varepsilon_1 =$$

$$= (|A| + \varepsilon_1) \left| \frac{\frac{f(x_0)}{f(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| + \varepsilon_1 \leq$$

$$\leq (|A| + \varepsilon_1) \frac{\left| \frac{f(x_0)}{f(x)} \right| + \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|}{1 - \left| \frac{f(x_0)}{f(x)} \right|} + \varepsilon_1 \leq$$

$$\leq (|A| + \varepsilon_1) \frac{2\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} + \varepsilon_1 < \left( |A| + \frac{1}{2} \right) \frac{2\varepsilon_1}{1 - \frac{1}{2}} + \varepsilon_1 = \varepsilon_1(3 + 4|A|)$$

4. Тогда:

$\forall \varepsilon > 0$  построим  $\varepsilon_1 = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3 + 4|A|}, \frac{1}{2} \right\}$ , по  $\varepsilon_1$  построим  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$

Положим  $\delta := \min\{\delta_1; \delta_2; \delta_3; \delta_4\}$ , тогда  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon_1(3 + 4|A|) = \varepsilon$

■

**Example** (Пример использования правила Лопиталя)

1. Пусть  $\alpha > 0, \beta > 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \implies \\ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha = 0, \text{ т.к. } x^\alpha \text{ непрерывна на всей области определения}\end{aligned}\tag{9.1}$$

2. Пусть  $\alpha > 0, a > 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0 \implies \\ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{(\sqrt[\alpha]{a})^x} \right)^\alpha = 0\end{aligned}$$

## 9.6 Формула Тейлора

### 9.6.1 Многочлен Тейлора

**Definition: Многочлен Тейлора**

Пусть дана функция  $f$ , дифференцируемая  $n$  раз в точке  $x_0$ , тогда в точке  $x_0$  многочленом Тейлора называется многочлен:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**Note**

При  $x_0 = 0$   $T_n(x)$  называется рядом Маклорена

### 9.6.2 Свойство многочлена Тейлора

**Claim** Свойство многочлена Тейлора

$$\forall k \in \mathbb{N} : (0 \leq k \leq n \implies T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0))$$

**Proof:**

$$\begin{aligned}T_n^{(m)}(x) &= \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} = \\ &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} + \left( \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m \right)^{(m)} + \left( \sum_{k=m+1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} + \left( \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} m! (x - x_0)^0 \right) + \left( \sum_{k=m+1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} + (f^{(m)}(x_0)) + \left( \sum_{k=m+1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} \implies \\ \implies T_n^{(m)}(x_0) &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} 0 \right) + (f^{(m)}(x_0)) + \left( \sum_{k=m+1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} 0 \right) = f^{(m)}(x_0)\end{aligned}$$

■

### 9.6.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

**Theorem** Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (локальная формула Тейлора)

Если  $\exists f^{(n)}(x_0)$ , т.е. существует  $n$ -ая производная в точке  $x_0$   
(следовательно, функция  $n - 1$  раз дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ ), то  
 $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \bar{o}((x - x_0)^n)$

**Proof:**

1. По правилу Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - T''_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} \end{aligned}$$

Для полученного выражения нельзя применить правило Лопиталя, т.к.  $f^{(n-1)}$  может быть не дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$

(из условия следует, только то, что  $f^{(n-1)}$  дифференцируема в точке  $x_0$ )

2. Для  $f^{(n-1)} - T_n^{(n-1)}$  существует производная в точке  $x_0 \implies$

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$T_n^{(n-1)}(x) = T_n^{(n-1)}(x_0) + T_n^{(n)}(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

3. По свойству многочлена Тейлора:  $f^{(n-1)}(x_0) = T_n^{(n-1)}(x_0) \wedge f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0)$

$$\text{Тогда } f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x) = \bar{o}(x - x_0) - \bar{o}(x - x_0) = \bar{o}(x - x_0) \implies$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{o}(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{o}(1)}{n!} = 0 \implies$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \implies f(x) - T_n(x) = \bar{o}((x - x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ (по определению о-малого)}$$

■

**Example** (Локальная формула Тейлора для синуса)

$$f(x) = \sin x, x_0 = 0, \text{ тогда } f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{2} \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}}, \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

**Example** (Локальная формула Тейлора для косинуса)

$$f(x) = \cos x, x_0 = 0, \text{ тогда } f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, k \equiv 1 \pmod{2} \\ (-1)^{\frac{k}{2}}, \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \bar{o}(x^{2n})$$

**Example** (Локальная формула Тейлора для экспоненциальной функции)

$f(x) = e^x, x_0 = 0$ , тогда  $f^{(k)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \bar{o}(x^n)$$

**Example** (Пример использования локальной формулы Тейлора для подсчёта предела)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3))}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3) - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3)} = 1 \quad (9.2)$$

#### 9.6.4 Теорема о единственности локальной формулы Тейлора

**Theorem** Теорема о единственности локальной формулы Тейлора

Если функция  $f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x) = P_n(x) + \bar{o}((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $P_n(x)$  - многочлен от  $x$ ,  $\deg P_n(x) \leq n$ )

то  $P_n(x) = T_n(x)$

**Proof:**

1. Функция  $f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0 \implies f(x) = T_n(x) + \bar{o}((x - x_0)^n)$

2.  $P_n(x) - T_n(x) = \bar{o}((x - x_0)^n)$

$$\sum_{k=0}^n \left( a_k - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right) (x - x_0)^k = \bar{o}((x - x_0)^n)$$

Перейдём к пределу:  $\implies a_0 - \frac{f(x_0)}{0!} = 0 \implies a_0 = \frac{f(x_0)}{0!}$

Разделим на  $x - x_0$  и снова перейдём к пределу и снова перейдём к пределу  $\implies a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$

Повторив это ещё  $n - 1$  раз, получим, что  $\forall k : a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

■

### 9.6.5 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

#### Theorem Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Если функция  $f(x)$   $n+1$  раз дифференцируема на интервале  $(a; b)$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $a < x_0, x < b$ , то  $\exists c = c(x) \in (\min(x_0; x); \max(x_0; x))$  :

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

**Proof:**

$$1. \text{ Рассмотрим функцию } \gamma(t) = f(x) - T_n(t; x) - \frac{(x-t)^{n+1} R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}, \text{ где } T_n(t; x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

$\gamma(t)$  дифференцируема по  $t$  на  $(\min(x_0; x); \max(x_0, x))$ , также

$$\gamma(x_0) = f(x) - T_n(x_0; x) - R_n(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\gamma(x) = f(x) - T_n(x; x) = f(x) - f(x) = 0$$

Тогда по т. Ролля  $\exists c \in (\min(x_0; x); \max(x_0, x)) : \gamma'(c) = 0$

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \right) + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \\ &= -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + f'(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \end{aligned}$$

$$2. \gamma'(c) = 0 \implies$$

$$\implies \frac{(n+1)(x-c)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n = 0 \implies$$

$$\implies R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

■

#### Example (Пример для функции синус)

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| \sin x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

#### Example (Пример для экспоненты)

$$f(x) = e^x, T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : |T_n(x) - e^x| = |R_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ т.к. } c = c(x; x_0) \in (x_0; x) = (0; x)$$

### 9.6.6 Определение точки возрастания

#### Definition: Точка возрастания

$x_0$  - точка возрастания, если:

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) :$$

$$(x_0 < x \implies f(x_0) < f(x)) \wedge (x < x_0 \implies f(x) < f(x_0))$$

### 9.6.7 Определение точки убывания

#### Definition: Точка убывания

$x_0$  - точка убывания, если:

$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) :$

$(x_0 < x \implies f(x_0) > f(x)) \wedge (x < x_0 \implies f(x) > f(x_0))$

### 9.6.8 Теорема о функции, имеющей ровно $n - 1$ ненулевых производных

#### Theorem

Если функция  $f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$  и выполнено:

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n - 1\} : f^{(i)}(x_0) = 0$

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , то

- $n = 2k$  :  
Если  $f^{(2k)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  - точка  $\min$   
Если  $f^{(2k)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  - точка  $\max$
- $n = 2k + 1$  :  
Если  $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  - точка возрастания  
Если  $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  - точка убывания

#### Proof:

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{o}((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right) (x - x_0)^n$$

2. Для случая, когда  $n = 2k$ , докажем при  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , для второго случая аналогично:

Т.к.  $\bar{o}(1)$  - б.м. при  $x \rightarrow x_0$ , то

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) : \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right) > 0$$

$$\text{Тогда } \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) - f(x_0) = \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right) (x - x_0)^{2k} > 0$$

3. Для случая, когда  $n = 2k + 1$ , докажем при  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , для второго случая аналогично:

$$\text{Аналогично пункту 2 } \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) : \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right) > 0$$

$$\text{При } x \in (x_0; x_0 + \delta) : (x - x_0)^{2k+1} > 0$$

$$\text{При } x \in (x_0 - \delta; x_0) : (x - x_0)^{2k+1} < 0$$

$$\text{Тогда при } x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) - f(x_0) > 0$$

$$\text{Тогда при } x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) - f(x_0) < 0$$

■



## Интегрирование функций

### 10.1 Определение первообразной

#### Definition

Пусть  $f(x)$  определена на  $(a; b)$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Первообразной к функции  $f(x)$  называется такая функция  $F(x)$ , определённая на  $(a; b)$ , что  $F'(x) = f(x)$

#### Example

Первообразной к  $\frac{1}{1+x^2}$  будет  $\arctan(x)$

Первообразной к  $\frac{1}{1+x^2}$  будет  $\arctan(x) + 1$

Первообразной к  $\frac{1}{1+x^2}$  будет  $\arctan(x) + \pi$

### 10.2 Свойство первообразных

#### Theorem Свойство первообразных

Пусть  $f(x)$  определена на  $(a; b)$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  - первообразные к  $f(x)$  на  $(a; b)$ , то

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$$

**Proof:**

$F_1(x)$  и  $F_2(x)$  дифференцируемы на  $(a; b)$  и непрерывны на  $[a; b]$

Тогда по теореме 9.5.18 :  $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$  на  $[a; b]$

■

#### Example

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}, \text{ т.к.}$$

$$\text{При } x > 0 : \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{При } x < 0 : \ln'(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

При этом, т.к.  $D_{\ln} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , то можно привести пример, когда предыдущая теорема не выполняется на  $D_{\ln}$ :

$$F_1(x) = \ln|x|$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x) + 2, & x < 0 \end{cases}$$

## 10.3 Неопределённый интеграл

### 10.3.1 Определение неопределённого интеграла

#### Definition: Неопределённый интеграл

Неопределённым интегралом для  $f(x)$  на  $(a; b)$  называется множество первообразных  $f(x)$

Обозначение:  $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}_{C \in \mathbb{R}}$

На практике пишут  $\int f(x)dx = F(x) + C$  и используют интеграл как функцию

### 10.3.2 Свойства неопределённого интеграла

#### Note

Свойства неопределённого интеграла

- $\int 1 \cdot dF(x) = \int dF(x) = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$
- $(\int f(x)dx)' = f(x)$   
 $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
- $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

### 10.3.3 Теорема об интеграле сложной функции

#### Theorem Теорема об интеграле сложной функции

Если  $F(x)$  - первообразная к  $f(x)$  на  $(a; b)$  и  $\phi(t)$  дифференцируема на  $(c; d)$ , причём  $\phi((c; d)) \subseteq (a; b)$ , то

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C, C \in \mathbb{R}$$

*Proof:*

$$(F(\phi(t)))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

■

### 10.3.4 Формула подстановки

#### Claim Формула подстановки

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\phi(t)}$$

Проведём занесение функции под знак дифференциала:

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(\phi(t))d\phi(t) = \int f(x)dx|_{x=\phi(t)}$$

#### Example

$$\int \sin x^2 dx^2 = -\cos x^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

**Example**

$$\int x e^{\frac{-x^2}{2}} dx = - \int e^{\frac{-x^2}{2}} d\left(\frac{-x^2}{2}\right) = -e^{\frac{-x^2}{2}} + C, C \in \mathbb{R}$$

**10.3.5 Формула замены переменных****Claim** Формула замены переменных

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \Big|_{t=\phi^{-1}(x)}, \text{ если } \phi \text{ обратима}$$

**Example**

$x \in (-1; 1)$ :

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \left| x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \right| = \int \cos t d \sin t = \int \cos^2 t dt = \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \frac{1}{2} \left( \int \cos 2t dt + \int 1 dt \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin 2t + t + C \right) = \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x) + \frac{1}{2} \arcsin x + C$$

**10.3.6 Интегрирование по частям****Theorem** Формула интегрирования по частям

$f(x)$  и  $g(x)$  - дифференцируемы на  $(a; b)$

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x)$$

**Proof:**

$$d(f(x)g(x)) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

$$\int d(f(x)g(x)) = \int g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

$$f(x)g(x) = \int (g(x)df(x) + f(x)dg(x))$$

$$f(x)g(x) - \int g(x)df(x) = \int f(x)dg(x)$$

■

**Example**

$$\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

**Example**

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C, C \in \mathbb{R}$$

## 10.4 Определённый интеграл

### 10.4.1 Разбиение, диаметр разбиения, разметка разбиения

#### Definition: Разбиение отрезка

Разбиением отрезка  $[a; b]$  называется множество

$$\tau = \{[x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^n,$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

#### Example (Пример разбиения)

$$[a; b] = [0; 2]$$

$$n = 5, \tau = \{[0; 0.5], [0.5; 1], [1; 1.5], [1.5; 1.75], [1.75; 2]\}$$

$$a = 0 = x_0 < x_1 = 0.5 < x_2 = 1 < x_3 = 1.5 < x_4 = 1.75 < x_5 = 2 = b$$

#### Definition: Измельчение разбиения

Пусть даны 2 разбиения:

$$\tau = \{[x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^n$$

$$\tau' = \{[x'_{j-1}; x'_j]\}_{j=1}^k$$

$\tau'$  является измельчением  $\tau$ , если  $\forall i \exists j : x_i = x'_j$

Обозначение:  $\tau' > \tau$

#### Note

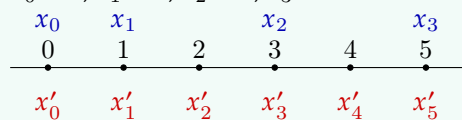
Если  $\tau' > \tau$ , то  $k \geq n$ , причём  $k = n \iff \tau' = \tau$

#### Example (Пример измельчения разбиения)

$$[a; b] = [0; 5]$$

$$n = 3, \tau = \{[0; 1], [1; 3], [3; 5]\}$$

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$$



$$k = 5, \tau' = \{[0; 1], [1; 2], [2; 3], [3; 4], [4; 5]\}$$

$$x'_0 = 0, x'_1 = 1, x'_2 = 2, x'_3 = 3, x'_4 = 4, x'_5 = 5$$

#### Definition: Диаметр разбиения

Диаметр разбиения - это  $d(\tau) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$

#### Definition: Разметка разбиения

Разметка разбиения - это множество  $\{\xi_i | \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^n$

Разбиение, у которого есть разметка, называется размеченным разбиением

## 10.4.2 Интегральная сумма Римана

### Definition: Интегральная сумма Римана

Интегральная сумма (Римана) - это

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

## 10.4.3 Определение определённого интеграла по Коши

### Definition: Определение определённого интеграла по Коши

Число  $I$  называется определённым интегралом  $f(x)$  на  $[a; b]$ , если  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau : d(\tau) < \delta \forall$  разметки  $\{\xi_i\}_{i=1}^n : |\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$

## 10.4.4 Определение определённого интеграла по Гейне

### Definition: Определение определённого интеграла по Гейне

Число  $I$  называется определённым интегралом  $f(x)$  на  $[a; b]$ , если  
 $\forall$  послед.  $\tau_k : d(\tau_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \forall \{\xi_i^k\}_{i=1}^n : \sigma_{\tau_k}(f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I$

## 10.4.5 Определение функции, интегрируемой по Риману

### Definition: Определение интегрируемости по Риману

Функция  $f(x)$  интегрируема по Риману, если  $\exists I \in \mathbb{R}$ , т.ч. выполняется определение по Коши 10.4.3

Обозначения:

$f(x) \in R[a; b]$ , где  $R[a; b]$  - множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке  $[a; b]$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

### Example

Пример функции, не интегрируемой по Риману:

На отрезке  $[0; 1]$  рассмотрим функцию Дирихле:  $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Выберем первую разметку такую, что  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \xi_i \in \mathbb{Q}$

Тогда  $\sigma_\tau(D) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a = 1 - 0 = 1$

Выберем вторую разметку такую, что  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Тогда  $\sigma_\tau(D) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0$

## 10.4.6 Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке

**Theorem** Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке

Функция,  $f(x)$  интегрируемая на  $[a; b]$ , ограничена на  $[a; b]$

*Proof:*

1. Предположим от противного, т.е. функция не ограничена на отрезке

По определению интегрируемости для  $\varepsilon = 1$  :

$$\exists \delta > 0 \forall \tau : d(\tau) < \delta \forall \{\xi_i\}_{i=1}^n : |\sigma_\tau(f) - I| < 1$$

Зафиксируем  $\tau$ . Хотя бы на 1 элементе  $\tau$   $f(x)$  не ограничена. БОО это первый отрезок  $[x_0; x_1]$

Зафиксируем разметку везде кроме 1-ого отрезка:  $\xi_2, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$|\sigma_\tau(f)| - |I| \leq |\sigma_\tau(f) - I| \implies |\sigma_\tau(f)| < |I| + 1$$

$$|f(\xi_1)|\Delta x_1 - \sum_{i=2}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i \leq |\sigma_\tau(f)| \implies |f(\xi_1)|\Delta x_1 < |I| + 1 + \sum_{i=2}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

$$|f(\xi_1)| < \frac{|I| + 1 + \sum_{i=2}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i}{\Delta x_1}$$

$$\text{Обозначим } C = \frac{|I| + 1 + \sum_{i=2}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i}{\Delta x_1} > 0$$

Получили:  $\forall \xi_1 \in [x_0; x_1] : |f(\xi_1)| < C$

Но на отрезке  $[x_0; x_1]$  функция не ограничена  $\implies \textcircled{W}$

■

## 10.4.7 Суммы Дарбу

Нижняя сумма Дарбу

**Definition:** Нижняя сумма Дарбу

Пусть  $f(x)$  ограничена на  $[a; b]$ , дано разбиение  $\tau$ , тогда нижней суммой Дарбу называется  $s_\tau = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ , где  $\forall i : m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$

Верхняя сумма Дарбу

**Definition:** Верхняя сумма Дарбу

Пусть  $f(x)$  ограничена на  $[a; b]$ , дано разбиение  $\tau$ , тогда верхней суммой Дарбу называется  $S_\tau = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ , где  $\forall i : M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$

## Свойства сумм Дарбу

### Claim Свойства сумм Дарбу

- $s_\tau, S_\tau$  определены, если  $f(x)$  ограничена, т.е.  $s_\tau \in \mathbb{R} \wedge S_\tau \in \mathbb{R}$
- Если  $\tau' > \tau$ , то:  
 $S_{\tau'} \leq S_\tau$   
 $s_{\tau'} \geq s_\tau$
- $\forall \tau_1, \tau_2 : s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$
- $s_\tau = \inf_{\{\xi_i\}_{i=1}^n} \sigma_\tau(f)$  - инфинум по всем разметкам  
 $S_\tau = \sup_{\{\xi_i\}_{i=1}^n} \sigma_\tau(f)$  - супремум по всем разметкам

Докажем 2-е свойство для нижних сумм Дарбу:

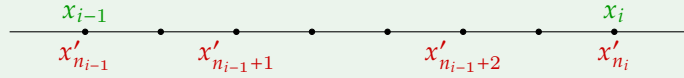
**Proof:**

Докажем для нижних сумм, для верхних сумм аналогично:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$s_{\tau'} = \sum_{j=1}^k m'_j \Delta x'_j$$

$$\forall i \exists n_{i-1} < n_i : \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} \Delta x'_j = \Delta x_i \text{ и } \cup_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} [x'_{j-1}; x'_j] = [x_{i-1}; x_i]$$



Т.к.  $m_i = \inf f(x)$  на всём отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$ , то  $\forall j \in \{n_{i-1} + 1, \dots, n_i\} : m'_j \geq m_i$

Тогда  $m'_j \Delta x'_j \geq m_i \Delta x'_j$

$$\text{Следовательно, } \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} m'_j \Delta x'_j \geq \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} m_i \Delta x'_j = m_i \Delta x_i$$

$$\text{Тогда } \sum_{j=1}^k m'_j \Delta x'_j \geq \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \implies s'_{\tau} \geq s_\tau$$

■

Докажем 3-е свойство:

**Proof:**

Рассмотрим разбиение  $\tau$ , состоящее из точек  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , тогда  $\tau > \tau_1, \tau_2$

Следовательно, по 2-му свойству сумм Дарбу:  $s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}$

■

Докажем 4-е свойство:

**Proof:**

$$s_\tau = \sum_{i=1}^n \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]} f(\xi_i) \Delta x_i = \inf_{\{\xi_i\}_{i=1}^n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \inf_{\{\xi_i\}_{i=1}^n} \sigma_\tau(f)$$

■

## Интегралы Дарбу

### Definition: Верхний интеграл Дарбу

Верхним интегралом Дарбу называется  $I^* = \inf_{\tau} S_{\tau}$  - инфимум верхних сумм Дарбу по всем разбиениям

### Definition: Нижний интеграл Дарбу

Нижним интегралом Дарбу называется  $I_* = \sup_{\tau} s_{\tau}$  - супремум нижних сумм Дарбу по всем разбиениям

### Clarification Уточнение

$$s_{\tau} \leq S_{\tau} \implies I_* \leq I^*$$

## 10.4.8 Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

### Lemma Лемма 1

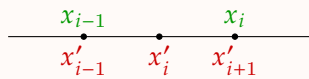
Пусть  $\tau' > \tau$  и  $\tau'$  на  $p$  точек (т.е. границ отрезков) больше, чем у  $\tau$   
Тогда  $0 \leq S_{\tau} - S_{\tau'} \leq (M - m) \cdot p \cdot \delta$ , где  $\delta > d(\tau)$ ,  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x) \in \mathbb{R}$ ,  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x) \in \mathbb{R}$

*Proof:*

1.  $S_{\tau} - S_{\tau'} \geq 0$  по свойству 2 сумм Дарбу 10.4.7

2. Рассмотрим случай, когда  $p = 1$

Пусть граница отрезка, которая есть в  $\tau'$ , но которой нет в  $\tau$ , имеет индекс  $i$



$$S_{\tau} = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j, \text{ где } M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x)$$

$$S_{\tau'} = \sum_{j=1}^{n+1} M'_j \Delta x'_j, \text{ где } M'_j = \sup_{x \in [x'_{j-1}; x'_j]} f(x)$$

Причём  $\forall j < i : x_j = x'_j \wedge M_j = M'_j$  и  $x_i = x'_{i+1}$  и  $\forall j > i : x_j = x'_{j+1} \wedge M_j = M'_{j+1}$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{\tau} - S_{\tau'} &= M_i \Delta x_i - (M'_i \Delta x'_i + M'_{i+1} \Delta x'_{i+1}) = M_i (\Delta x'_i + \Delta x'_{i+1}) - (M'_i \Delta x'_i + M'_{i+1} \Delta x'_{i+1}) = \\ &= (M_i - M'_i) \Delta x'_i + (M_i - M'_{i+1}) \Delta x'_{i+1} \leq \left| \text{т.к. } M_i \leq M \text{ и } M'_i \geq m \right| \leq (M - m) \Delta x'_i + (M - m) \Delta x'_{i+1} = \\ &= (M - m) \Delta x_i \leq (M - m) \cdot d(\tau) < (M - m) \cdot \delta \end{aligned}$$

3. Для  $p > 1$  доказывается итерационно, сводя для каждой из  $p$  точек измельчения  $\tau'$  к пункту 2. ■



**Lemma Лемма Дарбу**

Пусть дан отрезок  $[a; b]$  и функция  $f(x)$ , непрерывная на отрезке  $[a; b]$ , тогда

$$I^* = \lim_{d \rightarrow 0} S_\tau$$

Это означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau : d(\tau) < \delta : |S_\tau - I^*| < \varepsilon$

**Proof:**

1. Если  $m = M$ , то функция - константа на отрезке  $[a; b]$ , тогда все верхние суммы равны  $f(a) \cdot (b - a) \implies I^* = f(a) \cdot (b - a)$ , т.к.  $I^*$  - это инфимум верхних сумм по всем разбиениям
2. Иначе, если  $m \neq M$ , то  $m < M$

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$I^* = \inf_{\tau} S_\tau \implies \exists \tau^* : |S_{\tau^*} - I^*| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I^* - \text{инфимум всех верхних сумм} \implies S_{\tau^*} \geq I^* \implies S_{\tau^*} - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть в  $\tau^*$   $p$  точек (границ отрезков внутри  $(a; b)$ ), т.е.  $\tau^*$  состоит из  $p + 1$  отрезка

$$\text{Положим } \delta = \frac{\varepsilon}{2(M - m)p}$$

Построено  $\delta$ , тогда пусть дано разбиение  $\tau$  т.ч.  $d(\tau) < \delta$

Составим разбиение  $\tau'$  из границ отрезков разбиений  $\tau$  и  $\tau^*$ , тогда  $\tau' > \tau \wedge \tau' > \tau^*$ ,

и при этом в  $\tau'$  не более чем на  $p$  больше точек (границ отрезков), чем в  $\tau$ , тогда по Лемме 1

$$0 \leq S_\tau - S_{\tau'} \leq (M - m) \cdot p \cdot \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

(если в  $\tau'$  меньше, чем на  $p$  больше точек, чем в  $\tau$ , то неравенство также выполняется)

$$\tau' - \text{измельчение } \tau^* \text{ по построению} \implies S_{\tau'} \leq S_{\tau^*}$$

$$I^* - \text{инфимум всех верхних сумм} \implies S_{\tau'} \geq I^* \implies I^* \leq S_{\tau'} \leq S_{\tau^*}$$

$$S_{\tau^*} - I^* < \frac{\varepsilon}{2} \implies S_{\tau'} - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq S_\tau - S_{\tau'} < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \leq S_{\tau'} - I^* < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \implies 0 \leq S_\tau - I^* < \varepsilon \implies |S_\tau - I^*| < \varepsilon$$

■

**Note**

Аналогичная лемма верна и для случая нижних сумм:

$$I_* = \lim_{d \rightarrow 0} s_\tau$$

**Theorem** Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Ограниченная функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a; b] \iff I^* = I_*$

Используя введённые обозначения,  $f(x) \in R[a; b] \iff f(x)$  ограничена и  $I^* = I_*$

**Proof:**

”  $\implies$  ”

Предположим от противного, т.е. функция интегрируема и  $I_* \neq I^* \implies I_* < I^*$

По определению интегрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau : d(\tau) < \delta \forall \{\xi_i\}_{i=1}^n : |\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$$

$$|\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon \implies I - \varepsilon < \sigma_\tau(f) < I + \varepsilon \implies I - \varepsilon \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \varepsilon \text{ по сво-ву 4}$$

$$s_\tau \leq I_* < I^* \leq S_\tau \implies S_\tau - s_\tau \geq I^* - I_* > 0, \text{ но при этом } \forall \varepsilon > 0 : S_\tau - s_\tau \leq 2\varepsilon \implies \textcircled{W}$$

”  $\impliedby$  ”

Обозначим  $I = I_* = I^*$  и покажем, что выполняется определение, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau : d(\tau) < \delta \forall \{\xi_i\}_{i=1}^n : |\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$$

$$|\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon \implies I - \varepsilon < \sigma_\tau(f) < I + \varepsilon$$

$$\text{По определению сумм Дарбу } s_\tau \leq \sigma_\tau(f) \leq S_\tau$$

$$\text{По лемме Дарбу } \exists \delta_1 > 0 : S_\tau < I^* + \varepsilon$$

$$\text{аналогично } \exists \delta_2 > 0 : s_\tau > I_* - \varepsilon$$

$$\text{Положим } \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \text{ тогда: } I_* - \varepsilon < \sigma_\tau(f) < I^* + \varepsilon \implies I - \varepsilon < \sigma_\tau(f) < I^* + \varepsilon = I + \varepsilon$$

■

### 10.4.9 Определение равномерной непрерывности

#### Definition: Определение равномерной непрерывности

Функция  $f(x)$  называется равномерно непрерывной на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

#### Note

$f(x)$  равномерно непрерывна на  $E \implies f(x)$  непрерывна на  $E$ , но обратное, вообще говоря, не верно

#### Example (Пример к замечанию)

$$E = (0; 1), f(x) = \frac{1}{x}$$

$f(x)$  непрерывна на  $E$ , покажем, что равномерной непрерывности нет:

Рассмотрим последовательность аргументов:  $x_n = \frac{1}{n}$ , тогда  $x_{n+1} - x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,

$$\text{но при этом } f(x_{n+1}) - f(x_n) = 1$$

Положим  $\varepsilon = 0.5$ , тогда т.к.  $x_{n+1} - x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , то можно выбрать  $x_i$  и  $x_j$ , т.ч.  $|x_i - x_j| < \delta(0.5)$ , но при этом  $|f(x_1) - f(x_2)| = 1 > 0.5 = \varepsilon$

### 10.4.10 Теорема Кантора

#### **Theorem** Теорема Кантора (для случая функции на отрезке)

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[a; b]$

**Proof:**

Предположим от противного, тогда в отрицании определения выберем конкретные значения  $\delta$ :

$$\exists \varepsilon_0 \forall \delta = \frac{1}{n} \exists x'_n, x''_n \in [a; b] : |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} : |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon_0$$

Ч.п.  $\{x'_n\}$  и  $\{x''_n\}$  ограничены  $\implies$  по теореме Больцано-Вейерштрасса из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности:  $\exists x'_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_0 \in [a; b]$

При этом по теореме о зажатой последовательности  $x''_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_0$

$f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , тогда по определению непрерывности в точке по Гейне:

$$f(x'_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x_0)$$

$$f(x''_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x_0)$$

Но по предположению  $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon_0 \implies \textcircled{\text{W}}$

■

### 10.4.11 Теорема об интегрируемости непрерывной функции

#### **Theorem** Теорема об интегрируемости непрерывной функции

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то  $f(x) \in R[a; b]$

**Proof:**

1.  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b] \implies$  по теореме Кантора  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[a; b]$ , тогда по определению:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in [a; b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

2. Для любого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим разбиение  $\tau$  отрезка  $[a; b]$  с диаметром  $d(\tau) < \delta$ , тогда

$$0 \leq I^* - I_* \leq S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\eta_i)) \Delta x_i, \text{ т.к. } f \text{ непрерывна на } [a; b]$$

$$\forall i : |\xi_i - \eta_i| \leq d(\tau) < \delta \implies |f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \varepsilon \implies 0 \leq f(\xi_i) - f(\eta_i) < \varepsilon$$

$$\text{Тогда } \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\eta_i)) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon \Delta x_i = \varepsilon \cdot (b - a)$$

$$I^* - I_* - \text{ неотрицательное число, и при этом } \forall \varepsilon > 0 : I^* - I_* < \varepsilon(b - a) \implies I^* - I_* = 0$$

■

### 10.4.12 Теорема об интегрируемости монотонной функции

#### Theorem Теорема об интегрируемости монотонной функции

Если  $f(x)$  определена и монотонна на  $[a; b]$ , то  $f(x) \in R[a; b]$

*Proof:*

БОО докажем для неубывающей функции

1. Для любого  $\delta > 0$  рассмотрим разбиение  $\tau$  отрезка  $[a; b]$  с диаметром  $d(\tau) < \delta$ , тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq I^* - I_* &\leq S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \delta = \\ &= \delta \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

$I^* - I_*$  - неотрицательное число, и при этом  $\forall \delta > 0 : I^* - I_* < \delta (f(b) - f(a)) \implies I^* - I_* = 0$

■

### 10.4.13 Элементы теории меры

#### Критерий Лебега интегрируемости по Риману

#### Theorem Критерий Лебега интегрируемости по Риману (без док-ва)

Функция  $f(x) \in R[a; b] \iff$  функция  $f(x)$  ограничена и множество точек разрыва функции - множество меры ноль по Лебегу

#### Определение множества меры ноль по Лебегу

##### Definition: Определение множества меры ноль по Лебегу

Множество  $E \subseteq \mathbb{R}$  называется множеством нулевой меры Лебега, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists$  не более чем счётный набор интервалов  $\{(a_i; b_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ , такой что

1.  $E \subseteq \cup_{i=1}^{+\infty} (a_i; b_i)$ , т.е. объединение всех интервалов покрывает множество  $E$

2.  $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i - a_i \leq \varepsilon$

Обозначение:  $\mu(E) = 0$

#### Example (Пример множества меры ноль по Лебегу)

Покажем, что  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  - множество нулевой меры Лебега

*Proof:*

$$1. \mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \implies \mathbb{Q} = \{q_i\}_{i=1}^{+\infty}$$

$$2. \forall i \in \mathbb{N} : (a_i; b_i) = U_{\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}}(q_i) \implies \mathbb{Q} \subseteq \cup_{i=1}^{+\infty} (a_i; b_i)$$

$$3. \text{ При этом } \sum_{i=1}^{+\infty} b_i - a_i = \sum_{i=1}^{+\infty} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon \leq \varepsilon$$

■

## Свойства множеств меры ноль по Лебегу

### Theorem Свойства множеств меры ноль по Лебегу

1. Если  $A \subseteq \mathbb{R}$  нулевой меры Лебега и  $B \subseteq A$ , то  $B$  тоже множество нулевой меры Лебега (это свойство меры называется полнотой)
2. Если множества  $X, Y$  - нулевой меры Лебега, то  $X \cup Y$  - нулевой меры Лебега

Докажем 1-е свойство:

**Proof:**

$\forall \varepsilon > 0$  по определению множества меры ноль по Лебегу построим покрытие

множества  $A : \{(a_i; b_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ , т.ч.  $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i - a_i \leq \varepsilon$

$$B \subseteq A \implies B \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (a_i; b_i)$$

■

Докажем 2-е свойство:

**Proof:**

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ , тогда:

Для  $\frac{\varepsilon}{2}$  по определению множества нулевой меры Лебега построим покрытия

для множеств  $X$  и  $Y$ :  $\{(a_i; b_i)\}_{i=1}^{+\infty}$  и  $\{(c_i; d_i)\}_{i=1}^{+\infty}$  соответственно

Тогда для множества  $X \cup Y$  построим покрытие  $\{(e_i; f_i)\}_{i=1}^{+\infty}$  такое что

$$e_i = \begin{cases} a_j, & i = 2j \\ c_j, & i = 2j + 1 \end{cases}$$

$$f_i = \begin{cases} b_j, & i = 2j \\ d_j, & i = 2j + 1 \end{cases}$$

Тогда  $X \cup Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (e_i; f_i)$  и:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |f_i - e_i| = \sum_{j=1}^{+\infty} |b_j - a_j| + \sum_{j=1}^{+\infty} |d_j - c_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

### Note

Из 1 и 2 свойств следует, что разность, пересечение и симметрическая разность множеств нулевой меры Лебега - также множества нулевой меры Лебега

## 10.4.14 Свойства определённого интеграла

### Theorem Свойства определённого интеграла

1. **Линейность:**  
Пусть  $f, g \in R[a; b]$ , тогда  

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \in R[a; b] \wedge \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$
2. Если  $f, g \in R[a; b]$ , то  $f \cdot g \in R[a; b] \wedge |f| \in R[a; b]$   
(здесь  $f \cdot g$  - это произведение, а не композиция, т.е.  $\forall x \in \mathbb{R} : (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ )
3. **Аддитивность:** если  $f \in R[a; c]$ , и  $b \in [a; c]$  то:  

$$f \in R[a; b] \cup R[b; c] \text{ и } \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$
4. **Интегрируемость неравенств:**  $f, g \in R[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b] : f(x) \leq g(x)$ , то:  

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$
5. **Теорема о среднем:**  
Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то  $\exists \xi \in [a; b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
6. **Оценка интеграла:**  
Если  $f(x) \in R[a; b]$ , то:  

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Докажем 1-е свойство:

**Proof:**

1. По критерию Лебега интегрируемости по Риману:  $f, g$  - ограниченные на  $[a; b]$  функции и  $X_f$  - множество точек разрыва функции  $f$  и при этом  $\mu(X_f) = 0$

$X_g$  - множество точек разрыва функции  $g$  и при этом  $\mu(X_g) = 0$

Пусть  $X_{\alpha f + \beta g}$  - множество точек разрыва непрерывной на  $[a; b]$  функции  $\alpha f + \beta g$

$$X_{\alpha f + \beta g} \subseteq X_f \cup X_g \implies \mu(X_{\alpha f + \beta g}) = 0$$

Тогда по критерию Лебега интегрируемости по Риману  $\alpha f + \beta g \in R[a; b]$

2. Рассмотрим последовательность разбиений  $\tau_k: \forall \tau_k \forall \{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty} \sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_\tau(f) + \beta \sigma_\tau(g)$ , т.к.

$$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \beta g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \alpha \sigma_\tau(f) + \beta \sigma_\tau(g)$$

По определению Гейне интегрируемости по Риману:

$$\begin{aligned} \sigma_\tau(\alpha f + \beta g) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx \\ \alpha \sigma_\tau(f) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \alpha \int_a^b f(x) dx \\ \beta \sigma_\tau(g) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \beta \int_a^b g(x) dx \\ \implies \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

■

2-е свойство:

2-е свойство доказывается аналогично 1-ому доказательству, т.к. множества точек разрыва функций  $f \cdot g$  и  $|f|$  - множества меры ноль по Лебегу и эти функции непрерывны на  $[a; b]$

Докажем 3-е свойство:

**Proof:**

1.  $f \in R[a; c] \implies$  и на отрезках  $[a; b]$  и  $[b; c]$  она непрерывна и её множества точек разрыва на этих отрезках тоже множества меры ноль по Лебегу  $\implies f \in R[a; b] \wedge f \in R[b; c]$
2. По определению интегрируемости по Гейне:

$$\forall \tau_k \text{ разбиения отрезка } [a; c] \text{ т.ч. } d(\tau_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \forall \{\xi_i^k\}_{i=1}^n : \sigma_{\tau_k}(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^k) \Delta x^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$$

Будем рассматривать последовательность  $\tau_k^0$ , такую что точка  $b$  является точкой данного разбиения, т.е. является границей одного из отрезков (вообще говоря, если  $a < b < c$ , то 2-ых отрезков)

Тогда  $\tau_k^0 = \tau_k^1 \cup \tau_k^2$ , где  $\tau_k^1$  - разбиение  $[a; b]$ ,  $\tau_k^2$  - разбиение  $[b; c]$

Следовательно,  $\sigma_{\tau_k^0}(f) = \sigma_{\tau_k^1}(f) + \sigma_{\tau_k^2}(f)$

По 1 пункту и интегрируемости по Гейне:

$$\sigma_{\tau_k^1}(f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\sigma_{\tau_k^2}(f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_b^c f(x) dx$$

$$\text{Тогда } \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

■

Докажем 4-е свойство:

**Proof:**

Рассмотрим  $h(x) = g(x) - f(x) \in R[a; b]$ .  $\forall x \in [a; b] : h(x) \geq 0$

$$\text{Тогда } \forall \tau : \sigma_{\tau}(f) \geq 0 \implies \int_a^b h(x) dx \geq 0 \implies \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \implies \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

■

Докажем 5-е свойство (формально, теорему о среднем для интегралов)

**Proof:**

1. т.к.  $f$  непрерывна на  $[a; b]$ , то  $\forall x \in [a; b] : m \leq f(x) \leq M$ , где  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x) \in \mathbb{R}$  и  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x) \in \mathbb{R}$

2. По 4-ому свойству определённых интегралов:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

$$f \text{ - непрерывная функция на } [a; b] \implies E_f = [m; M] \implies \exists \xi \in [a; b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

■

Докажем 6-е свойство:

**Proof:**

$$\begin{aligned} 1. \forall x \in [a; b] : -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \\ f \in R[a; b] \implies \int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \implies \\ \implies -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \implies \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

■

## 10.5 Обобщённое понятие интеграла

**Claim** Обобщённое понятие интеграла

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  (если  $f \in R[\min(a; b); \max(a; b)]$ ) доопределим:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ \int_b^a f(x) dx &= - \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

**Note**

$\forall c_1, c_2, c_3 \in [a; b]$  :

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x) dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx$$

**Note**

Уточним оценку интеграла (6-е свойство):

$$\forall c_1, c_2 \in [a; b] : \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{c_1}^{c_2} |f(x)| dx \right|$$

### 10.5.1 Интеграл с переменным верхним пределом

**Definition:** Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть  $f \in R[\alpha; \beta]$  и  $a, x \in [\alpha; \beta]$ , тогда введём функцию  $F$ , т.ч.:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Заметим, что  $F(a) = 0$



## 10.5.2 Теорема 1 об интеграле с переменным верхним пределом

**Theorem** Теорема 1 об интеграле с переменным верхним пределом

$F(x)$  непрерывна на  $[\alpha; \beta]$

*Proof:*

$$1. \text{ Обозначим } M = \left| \sup_{x \in [\alpha; \beta]} f(x) \right| \in \mathbb{R}$$

Тогда  $\forall x \in [\alpha; \beta] : f(x) \leq |f(x)| \leq M$

$$2. |F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_x^{x+\Delta x} M dt \right| = |M\Delta x| = M |\Delta x|$$

$$(-M\Delta x \leq F(x + \Delta x) - F(x) \leq M\Delta x) \wedge \left( M\Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \right) \implies F(x + \Delta x) - F(x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Тогда } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(x + \Delta x) - F(x)) = 0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x + \Delta x) = F(x)$$

■

## 10.5.3 Теорема 2 об интеграле с переменным верхним пределом

**Theorem** Теорема 2 об интеграле с переменным верхним пределом

$f(x) \in \mathbb{R}[a; b]$  и непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ , то  $F(x)$  дифференцируема на  $(\alpha; \beta)$  и  $F'(x) = f(x)$

*Proof:*

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$$

$$= \text{по теореме о среднем } \exists \xi = \xi(\Delta x) \in [\min(x; x + \Delta x); \max(x; x + \Delta x)] = f(\xi) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$$

То есть по определению производной  $\forall x \in (\alpha; \beta) : F'(x) = f(x)$

■

## 10.5.4 Формула Ньютона-Лейбница

**Claim** Формула Ньютона-Лейбница

Если  $\Phi(x)$  - первообразная функции  $f(x)$  на  $(\alpha; \beta)$  и  $f(x)$  непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ , то  $\forall a, b \in [\alpha; \beta]$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

*Proof:*

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b)$$

$F(x)$  - первообразная функции  $f(x)$  на  $(\alpha; \beta) \implies \exists C \in \mathbb{R} \forall x \in (\alpha; \beta) : F(x) = \Phi(x) + C$

$$F(a) = \Phi(a) + C \wedge F(a) = 0 \implies C = -\Phi(a) \implies F(b) = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a)$$

■

Благодарность на нахождение неточностей/опечаток:

- Агузаров Руслан
- Котежов Семён
- Васюков Александр
- Лазаренко Александр
- Кулин Егор
- Михайлов Андрей
- Кожевников Антон
- Тищенко Андрей
- Хадзакос Николай

При нахождении опечаток, если Вам не сложно, Вы можете написать [https://t.me/i8088\\_t](https://t.me/i8088_t), на момент компиляции ник в тг: vova kormilitsyn

Актуальную версию файла (см ver на 1 странице) можно найти по ссылке на wiki странице курса, а также по ссылке на github репозиторий <https://github.com/i80287/Calculus-HSE-SE>