HSE FCS SE
Calculus-1 2023-2024

Lecturer: Ivan Erlikh

version 1.7.1

Contents

Chapter 1

Используемые обозначения

Note

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел. В данном файле полагаем, что $0 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел
$\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел
$\mathbb{R}_{>0}$ - множество положительных вещественных чисел
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ - дополненная прямая (extended real number line)
$\{n, n+1, ..., m\}$ - множество вещественных чисел от n до m "с шагом 1" включительно
Формально, это множество равно $\{x \in \mathbb{R} | x \geq n \land x \leq m \land x - n \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{W}$ - противоречие (используется при доказательстве методом от противного)
(если Вам знаком символ $\perp$, то в данном файле полагаем эти обозначения эквивалентными)
Через ":=" будем обозначать "положим по определению равным", например, $\forall \varepsilon > 0 : \delta(\varepsilon) := 2\varepsilon$ означает "для любого ε, большего нуля, положим $\delta(\varepsilon)$ равным 2ε"
Аббревиатурой БОО будем обозначать "без ограничения общности" (возможно, Вам также знакомо выражение "не умаляя общности", в данном файле полагаем эти обозначения эквивалентными)
$C[a; b]$ - множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$
$R[a; b]$ - множество функций, интегрируемых на отрезке $[a; b]$

Chapter 2

Логические операции

2.1 Высказывания, предикаты и кванторы

2.1.1 Определения

Definition: Высказывания и n-местные предикаты

Высказывание - это упрощённая модель повествования предложения, такая что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, но не одновременно
n-местные предикат (n-арный предикат) - это выражение, которое превращается в высказывание, если в нём заменить $x_1, x_2, ..., x_n$ на подходящие имена, где $x_1, x_2, ..., x_n$ - переменные в предикате

Definition: Логические операции

Отрицание:	• $\neg A$ (также обозначают $\overline{A}$) означает "не A"
Логическое и:	• $A \wedge B$ означает "верно A и верно B"
Логическое или:	• $A \vee B$ означает "верно A, или верно B, или верны A и B вместе"
Исключающее или:	• $A \oplus B$ означает "верно ровно одно из высказываний A, B"
Импликация:	• $A \implies B$ означает "если верно A, то верно B"
Эквивалентность:	• $A \iff B$ означает "A верно тогда и только тогда, когда верно B"

Note

Пусть $A \implies B$
Если A верно, то B тоже верно, но если A ложно, то B может быть и истинным, и ложным
Пусть $A \iff B$
Если A ложно, то ложно B. Если B верно, то верно A

Note

Логические операции можно выражать через другие логические операции, например,
$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$

Definition: Кванторы

Квантор всеобщности обозначается как $\forall$ и означает "для любого"
Квантор существования обозначается как $\exists$ и означает "существует"
Квантор едиственности обозначается как ! и означает "едиственный, такой что ..."

Example

Всеобщность:	• $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x)$ означает "Для любого x из $\mathbb{R}$ выполняется предикат $\phi(x)$"
Существование:	• $\exists x\, (x \in \mathbb{Q} \implies \psi(x))$ означает "Существует x, такой что если x из $\mathbb{Q}$, то выполняется предикат $\psi(x)$"
Единственность:	• $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists! k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \le n < 2^{k+1}$ означает "Для любого натурального числа существует и едиственно такое целое неотрицательное число k, что $2^k \le n < 2^{k+1}$"

Note

На практике квантор едиственности часто используется вместе с квантором существования т.е. часто используют связку $\exists!$, "существует и единственно"

Note

Вместо "$\neg\exists$" пишут "$\nexists$"

2.1.2 Правило обращения кванторов

Claim Правило обращения кванторов

При обращении кванторов квантор существования меняется на квантор всеобщности, квантор всеобщности меняется на квантор существования, а утверждение под кванторами меняется на противоположное

Example

Пусть дано высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m_1 \in \mathbb{Z}\, \exists m_2 > m_1\, \forall q \in \mathbb{Q} : |m_1| > n \land \neg\psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Тогда отрицание к этому высказыванию будет:

$$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m_1 \in \mathbb{Z}\, \forall m_2 > m_1\, \exists q \in \mathbb{Q} : |m_1| \le n \lor \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

2.2 Метод математической индукции

Claim Метод математической индукции

Пусть есть предикат $\phi(n)$, который выполняется или не выполняется при различных $n \in \mathbb{N}$
Тогда, если $\exists k \in \mathbb{N} : \phi(k)$ и $\forall n \ge k : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$, то по методу математической индукции получаем $\forall n \ge k : \phi(n)$
Этапы доказательства:

База индукции:	• Проверка истинности $\phi(k)$
Предположение индукции:	• Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N} \land n \ge k$ верно $\phi(n)$
Шаг индукции:	• Докажем, что $\phi(n+1)$, используя предположение индукции
Вывод:	• $\forall n \ge k : \phi(n)$

2.3 Неравенство Бернулли

Theorem Неравенство Бернулли

Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq -1$, то $(1+x)^n \geq 1 + xn$

Proof:

Докажем неравенство при помощи метода математической индукции

1. База индукции:

Пусть $n = 1 \implies (1+x)^n = 1 + x \geq 1 + x$

2. Предположение индукции:

Пусть для некоторого $n \geq 1$ верно, что $(1+x)^n \geq 1 + xn$

3. Шаг индукции: Рассмотрим неравенство, подставив в него $n+1$:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$

$1 + x \geq 0 \implies (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+xn) \cdot (1+x) = 1 + xn + x + n \cdot x^2 \geq 1 + nx + x = 1 + n(x+1)$

Следовательно, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + n(x+1)$

4. Обозначим доказываемое как предикат $\phi(n)$, тогда получаем:

$\phi(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$

Тогда по принципу математической индукции $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n)$

■

2.4 Перестановки, размещения, сочетания

Definition: Перестановки, размещения и сочетания

Пусть дано множество из n элементов

• Если все элементы попарно различны (т.е. при решении задачи мы считаем, что два любых элемента множества различны), то количество попарно различных перестановок этого множества обозначается как P_n и равно $n!$

Пусть зафиксировано $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что $k \leq n$, тогда:

• Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k-элементное подмножество данного множества, считая, что элементы попарно различны, обозначается как A_n^k и равно $\frac{n!}{(n-k)!}$

• Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k-элементное подмножество данного множества, считая, что все элементы попарно равны, обозначается как C_n^k и равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Note

Пусть есть есть конечная последовательность из n натуральных чисел от 1 до n (кортеж из n элементов от 1 до n)

Тогда количество различных перестановок элементов кортежа равно $P_n = n!$

Количество способов выбрать k чисел из кортежа, считая их перестановки различными, равно $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Количество способов выбрать k чисел из кортежа, считая, что все перестановки одного набора - это один способ, равно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пусть $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ - данный кортеж, тогда есть $P_4 = 24$ различных перестановок σ:

$$(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(1,4,3,2)$$
$$(2,1,2,4),(2,1,4,2),(2,3,1,4),(2,3,4,1),(2,4,1,3),(2,4,3,1)$$
$$(3,1,2,4),(3,1,4,2),(3,2,1,4),(3,2,4,1),(3,4,1,2),(3,4,2,1)$$
$$(4,1,2,3),(4,1,3,2),(4,2,1,3),(4,2,3,1),(4,3,1,2),(4,3,2,1)$$

Для $k=2$ есть $A_4^2=12$ способ выбрать кортеж из 2 элементов:

$$(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)$$
$$(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)$$

Для $k=2$ есть $C_4^2=6$ способ выбрать подмножество из 2 элементов (порядок элементов не важен):

$$(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$$

2.5 Бином Ньютона

Theorem Бином Ньютона
$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$(формально, перед равенством необходимо написать $\forall a,b\in\mathbb{R}\forall n\in\mathbb{N}$)

Proof:

Докажем это утверждение при помощи метода математической индукции

1. База индукции: $n=1 \implies (a+b)^n=a+b=\displaystyle\sum_{k=0}^{1}C_n^k a^k b^{n-k}$
2. Предположение индукции: пусть для некоторого $n\geq 1: (a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$
3. Рассмотрим равенство и докажем, что оно верно при подстановке $n+1$:

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}=$$
$$=a\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}+b\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{k+1} b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n+1-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n+1-k}=C_n^n a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}C_n^{k-1}a^k b^{n+1-k}+C_n^0 a^0 b^{n+1}\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^k b^{n+1-k}=$$
$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(C_n^{k-1}+C_n^k)a^k b^{n+1-k}=C_{n+1}^{n+1}a^{n+1}+C_{n+1}^0 b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

4. Получили:
Равенство верно при $n=1$, а из верности равенства для n следует верность равенства для $n+1$ (при $n\geq 1$), тогда по методу математической индукции получим, что равенство верно $\forall n\in\mathbb{N}$

■

Chapter 3

Определения и свойства числовых последовательностей

3.1 Определения

3.1.1 Числовая последовательность

Definition: Числовая последовательность

Числовая последовательность - это счётно бесконечный проиндексированный набор чисел

Clarification Уточнение

Формально, числовая последовательность (далее обозначается ч.п.) - это функция натурального аргумента
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Способы задания:

- Формула. Например, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Рекуррентно. Например, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

3.1.2 Определения монотонных числовых последовательностей

Definition: Монотонность ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

3.1.3 Ограниченная ч.п.

Definition: Ограниченная сверху числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если
$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} :\ a_n < C$

Definition: Ограниченная снизу числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если
$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} :\ a_n > -C$

Definition: Ограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если
$\exists C > 0\, \forall n \in \mathbb{N} :\ |a_n| < C$

Example

Пример: $a_n = 5 + \frac{1}{n}$
$\exists C = 7 > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = \left|5 + \frac{1}{n}\right| < 7 = C$

Note

Числовая последовательность ограничена $\iff$ она ограничена сверху и ограничена снизу

3.1.4 Неограниченная ч.п.

Definition: Неограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется неограниченной, если она не является ограниченной, то есть
$\forall C > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$

Example

Пример: $a_n = n$
$\forall C > 0\, \exists n = \lceil C \rceil \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$

3.1.5 Отделимая от нуля ч.п.

Definition: Отделимая от нуля числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется отделимой от нуля, если
$\exists \varepsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| > \varepsilon$

Example

Пример: $a_n = 2 - \frac{1}{n}$
$\exists \varepsilon = 0.5 > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = \left|2 - \frac{1}{n}\right| > 0.5 = \varepsilon$

3.1.6 Сходящаяся ч.п.

Definition: Сходящаяся числовая последовательность

Числовая последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел при $n \to +\infty$, т.е. ч.п. $\{a_n\}$ называется сходящейся, если:

$$\exists A \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n > N : |a_n - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = A, A \in \mathbb{R}$$

Example

Пример: $a_n = \dfrac{4n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 + 1}$

Докажем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 2 = A$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда:

$$|a_n - 2| < \varepsilon \impliedby \left| \frac{4n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 + 1} - 2 \right| < \varepsilon \impliedby \left| \frac{2n^2 - 1}{2n^3 + 1} \right| < \varepsilon \impliedby$$

$$\impliedby \frac{2n^2 - 1}{2n^3 + 1} < \varepsilon \impliedby \frac{2n^2}{2n^3 + 1} < \varepsilon \impliedby \frac{2n^2}{2n^3} < \varepsilon \impliedby \frac{1}{n} < \varepsilon \impliedby \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \, \forall n > N \geq \frac{1}{\varepsilon} : |a_n - 2| < \varepsilon$$

Note

Сходящаяся ч.п. является ограниченной

3.1.7 Эпсилон окрестность

Definition: Эпсилон окрестность

Эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ и обозначается $U_\varepsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Эпсилон окрестность точки x_0"

Example

$U_1(\pi) = (\pi - 1; \pi + 1)$
$U_e(e) = (0; 2e)$

Definition: Проколотая эпсилон окрестность

Проколотой эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ и обозначается $\dot{U}_\varepsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Проколотая эпсилон окрестность точки x_0"

Example

$\dot{U}_1(e) = (e - 1; e + 1) \setminus \{e\} = (e - 1; e) \cup (e; e + 1)$

Note

Неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ равносильно тому, что $a_n \in U_\varepsilon(A)$

3.1.8 Бесконечно большая ч.п.

Definition: Бесконечно большая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если она стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞ при $n \to +\infty$, т.е.

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : a_n > M$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : a_n < -M$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : |a_n| > M$

Example

Пример б.б. ч.п., стремящейся к $+\infty$: $a_n = n$
Пример б.б. ч.п., стремящейся к $-\infty$: $a_n = -n$
Пример б.б. ч.п., стремящейся к ∞: $a_n = (-1)^n \cdot n$

3.1.9 Бесконечно малая ч.п.

Definition: Бесконечно малая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если она стремится к 0 при $n \to +\infty$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N : |a_n| < \varepsilon$

3.2 Связи числовых последовательностей

Note

Связи числовых последовательностей:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Note

Если ч.п. сходится или является б.б., то предел единственный

Proposition Докажите по определению, что

(ограниченная ч.п.) + (ограниченная ч.п.) = ограниченная ч.п.
б.м + б.м. = б.м.
б.м. · (ограниченная ч.п.) = б.м.
$\frac{\text{отделимая от нуля ч.п.}}{\text{ограниченная ч.п.}}$ = ограничена ч.п.

Proposition Приведите пример, когда

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = отделимая от нуля ч.п.
(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = б.м.
б.б + б.б = б.б.
б.б + б.б = б.м.
б.б + б.б = (ограниченная ч.п.)
б.б + б.б = (отделимая от нуля ч.п.)

3.3 Арифметика предела ч.п.

Claim

Если $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} a, b_n \underset{n\to+\infty}{\to} b$, то

- $a_n \pm b_n \underset{n\to+\infty}{\to} a \pm b$
- $a_n \cdot b_n \underset{n\to+\infty}{\to} a \cdot b$
- $b \neq 0 \land \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \neq 0 : \frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{a}{b}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0 \implies \sqrt{a_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{a}$

3.4 Теоремы

3.4.1 Теорема о предельном переходе в неравенствах

Theorem Теорема: свойство предельного перехода в неравенствах

$$(\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : c_n > A) \land (\lim_{n\to\infty} c_n = C) \implies C \geq A$$

То есть если начиная с некоторого номера все члены последовательности $> A$, и сама последовательность сходится к $C \in \mathbb{R}$ при $n \to +\infty$, то $C \geq A$

Proof:

1. Распишем, что дано, по определению:
$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |c_n - C| < \varepsilon$
Это равносильно $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon$
$\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : c_n > A$
2. Для любого ε рассмотрим $M(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N) + 1$
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N) + 1\, \forall n > M : (C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon \land c_n > A)$
Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon)\, \forall n > M : C + \varepsilon > A$
Выражение под кванторами не зависит от M и $n \implies \forall \varepsilon > 0 : C + \varepsilon > A$
3. Предположим от противного, что $C < A$
Положим $\varepsilon := \dfrac{A - C}{2} > 0 \implies C + \varepsilon = C + \dfrac{A - C}{2} = \dfrac{A + C}{2} < A$
Получили, что $\exists \varepsilon > 0 : C + \varepsilon < A \implies$ W $\implies$ предположение, что $C < A$, неверно $\implies C \geq A$

■

3.4.2 Теорема о зажатой последовательности

Theorem Теорема о зажатой последовательности (о 2 миллиционерах / 2 полицейских / гамбургерах)

$$\left.\begin{array}{l} a_n, b_n, c_n \text{ - числовые последовательности} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = X \\ \lim_{n\to\infty} b_n = X \\ \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : a_n \leq c_n \leq b_n \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to\infty} c_n = X$$

Proof:

Докажем для случая, когда $X \in \mathbb{R}$. При $X \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ доказательство проводится аналогично

1. Распишем по определению пределы.

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1(\varepsilon) : X - \varepsilon < a_n < X + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n > N_2(\varepsilon) : X - \varepsilon < b_n < X + \varepsilon$

Рассмотрим $N_3(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N)$, тогда

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3(\varepsilon) : X - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < X + \varepsilon$

$\implies \forall \varepsilon > 0\, \exists N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3(\varepsilon) : X - \varepsilon < c_n < X + \varepsilon$

■

3.4.3 Свойство предела б.м. ч.п.

Theorem Свойство предела б.м. ч.п.

если $a \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{где } \alpha_n \text{ - б.м. ч.п.}$$

Proof:

" $\implies$ "

Распишем по определению, что дано:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

Обозначим ч.п. $\alpha_n = a_n - a$, тогда $a_n = a + \alpha_n$

Тогда: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$

Доказали, что $a_n = a + \alpha_n$, где α_n - б.м. ч.п.

" $\impliedby$ "

Распишем то, что α_n - б.м., по определению:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$

По условию $a_n = a + \alpha_n$, тогда $a_n - a = \alpha_n$, подставим в выражение под кванторами:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

Доказали по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

■

Chapter 4

Элементы теории множеств

4.1 Аксиома непрерывности

Claim Аксиома непрерывности действительных чисел (принцип полноты)

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \neq \varnothing \\ B \subseteq \mathbb{R} \\ B \neq \varnothing \\ \forall a \in A \, \forall b \in B : a \leq b \end{array}\right\} \implies \exists c \in \mathbb{R} \, \forall a \in A \, \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

4.2 Определения ограниченных множеств

Definition: Ограниченное сверху множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным свеху, если $\exists C \in \mathbb{R} \, \forall a \in A : \; a \leq C$

Definition: Ограниченное снизу множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists C \in \mathbb{R} \, \forall a \in A : \; a \geq C$

Definition: Ограниченное множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным, если $\exists C > 0 \, \forall a \in A : \; |a| \leq C$

4.3 Определения граней множества

Definition: Определение верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда верхней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \leq c$

Definition: Определение нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда нижней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \geq c$

Definition: Определение точной верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда точной верхней гранью множества A называют наименьший элемента множества всех верхних граней множества A и обозначают $\sup A$

Definition: Определение точной нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда точной нижней гранью множества A называют наибольший элемента множества всех нижней граней множества A и обозначают $\inf A$

Note

Вообще говоря, наименьшый и наибольший элементы множества не всегда существуют.
Например, у множества $(0;1)$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, при этом
$\sup(0;1) = 1 \notin (0;1)$, $\inf(0;1) = 0 \notin (0;1)$

4.4 Теорема о существовании точной грани множества

Theorem Теорема о существовании точной грани множества

Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ ограничено сверху, то $\exists \sup A$
Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ ограничено снизу, то $\exists \inf A$

Proof: Докажем для верхней грани, для нижней грани доказательство аналогично

$$A \subseteq \mathbb{R} \land A \neq \varnothing \land (\exists C > 0 \, \forall a \in A \implies a < C) \implies \exists \sup A$$

1. Обозначим $S_A = \{c \in \mathbb{R} | \forall a \in A \implies a \leq c\} \neq \varnothing$ - множество верхних граней
Это множество не пусто, т.к. A ограничено по условию, т.е. $\exists c > 0 \, \forall a \in A \implies a \leq c$
2. По построению множества A и S_A удовлетворяют аксиоме непрерывности действительных чисел, тогда $\exists b \in \mathbb{R} \, \forall a \in A \forall c \in S_A \implies a \leq b \leq c$
Но из $b \leq c \implies b \in S_A$, при этом $(\forall c \in S_A \implies b \leq c)$, следовательно, b является наименьшим элементом множества верхних граней множества A, тогда по определению точной верхней грани $b = \sup A$

■

Chapter 5

Теорема Вейерштрасса и число е

5.1 Теорема Вейерштрасса

Theorem Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ч.п.)
Если ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится
Если ч.п. $\{a_n\}$ невозрастает и ограничена снизу, то она сходится

Proof: Докажем для неубывающей ч.п., для невозрастающей ч.п. доказательство аналогично
1. Обозначим множество значений ч.п. $A = \{a_n\}$
Т.к. a_n - числовая последовательность, то множество A счётно или конечно
(т.е. существует инъекция между A и $\mathbb{N}, A \lesssim \mathbb{N}$)
Также $A \neq \varnothing$ и множество A ограничено сверху $\implies$ по теореме о существовании точной верхней грани $\exists \sup A = a$
2. Докажем, что $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, т.е. $\forall \varepsilon\, \exists N = N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$
a_n неубывает и ограничена сверху $a \implies |a_n - a| = a - a_n$, тогда
$|a_n - a| < \varepsilon \iff a - a_n < \varepsilon \iff a_n > a - \varepsilon$
Т.к. последовательность a_n неубывает, то следующие 2 высказывания равносильны:
$\forall \varepsilon\, \exists N = N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : a_n > a - \varepsilon$ (#)
$\forall \varepsilon\, \exists N = N(\varepsilon) : a_N > a - \varepsilon$ (*)
3. Докажем второе высказывание (*) методом от противного.
Предположим, что $\exists \varepsilon_0 \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a - \varepsilon_0$
Тогда число $a - \varepsilon_0$ - верхняя грань множества A, но a само является точной верхней гранью, но $a - \varepsilon_0 < a \implies \perp \implies$ неверно предположение, что высказывание (*) неверно $\implies$ высказывание (#) верно ■

5.2 Число Эйлера

Definition: Число e

Рассмотрим ч.п. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его e

Proof: 1. Докажем, что a_n ограничена сверху числом 3

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n}\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \\
&= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3
\end{aligned}$$

2. Докажем, что a_n - возрастающая ч.п.
Рассмотрим a_{n+1}

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = 1 &+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Т.к. $\forall m \in \{1, \ldots, n\}\ 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$, то

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > a_n$$

3. $\{a_n\}$ ограничена сверху и возрастает $\implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ■

Chapter 6

Определения и свойства подпоследовательности и частичного предела

6.1 Определение подпоследовательности

Definition: Подпоследовательность

Пусть дана ч.п. $\{a_n\}$, тогда подпоследовательностью называется ч.п., полученная *последовательным* выбором некоторых членов исходной ч.п. и обозначается $\{a_{n_k}\}$

Note

Если $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность ч.п. $\{a_n\}$, то $\forall k \in \mathbb{N} : n_k \geq k$

6.2 Частичные пределы и предельная точка

6.2.1 Определения

Definition: Частичный предел

Частичный предел ч.п. $\{a_n\}$ - число, являющееся пределом какой-либо сходящейся подпоследовательности данной последовательности $\{a_n\}$

Definition: Верхний предел ч.п.

Верхним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sup\{a_n\}_{n\geq k}$$

Definition: Нижний предел ч.п.

Нижним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \inf\{a_n\}_{n\geq k}$$

Definition: Предельная точка ч.п.

Предельной точкой ч.п. $\{a_n\}$ называется число a, такое что в любой окрестности точки a находится бесконечно много членов ч.п. $\{a_n\}$

6.2.2 Теорема об эквивалентности определений

Theorem Определение предельной точки ч.п. эквивалентно определению частичного предела ч.п.

Proof:

1. a - частичный предел $\implies$ a - предельная точка $\{a_n\}$
$\forall\varepsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$
$\iff$
$\forall\varepsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$
Следовательно, $\forall\varepsilon$ в $U_\varepsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$
2. a - предельная точка$\{a_n\}$ $\implies$ a - ч.п. $\{a_n\}$
По определению предельной точки $\forall\varepsilon$ в $U_\varepsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$
Предъявим ч.п. $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$, такую что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$
Обозначим $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$
Рассмотрим ε_1, в $U_{\varepsilon_1}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, выберем какой-то член a_{n_1}
Рассмотрим ε_2, в $U_{\varepsilon_2}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$
Рассмотрим ε_k, в $U_{\varepsilon_k}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$
Таким образом, построена ч.п. $\{a_{n_k}\}$, такая что $\forall k \in \mathbb{N} : a - \dfrac{1}{k} < a_{n_k} < a + \dfrac{1}{k} \implies$
$\implies$ по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

■

6.2.3 Свойства частичных пределов ч.п.

Note

Свойства частичных пределов ч.п.
$\{a_n\}$ сходится $\iff$ $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$
$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \sup\{$множества предельных точек $\{a_n\}\}$
$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \inf\{$множества предельных точек $\{a_n\}\}$
$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ - частичные пределы

6.3 Система вложенных отрезков

Definition: Система вложенных отрезков

Системой вложенных отрезков называют счётно бесконечное множество отрезков, каждый из которых содержит следующий отрезок как подмножество
Обозначение: $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} = [a_{k+1}; b_{k+1}] \subseteq I_k = [a_k; b_k]$

Example

Рассмотрим $S = \{[1 - \frac{1}{k}; 2 + \frac{1}{k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда
$S = \{[0; 3], [0.5; 2.5], [\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}], \ldots\}$
Рассмотрим $S = \{[\pi; \pi - \frac{1}{k^k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда
$S = \{[\pi; \pi - 1], [\pi; \pi - \frac{1}{4}], [\pi; \pi - \frac{1}{27}], \ldots\}$

6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Theorem Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной ч.п. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Proof:

По определению ограниченной ч.п. $\exists C > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$

Построим искому подпоследовательность при помощи системы вложенных отрезков

$I_1 = [-c; c], \forall n \in \mathbb{N} :\ a_n \in I_1,$ выберем какой-то член ч.п. $a_{n_1} \in I_1$

Т.к. $\{a_n\}$ - ч.п., то в какой-то половине точно есть бесконечно много членов $\{a_n\}$

Выберем эту половину и обозначим I_2, выберем в нём какой-то член ч.п. $a_{n_2} \in I_2$, такой что $n_2 > n_1$ (если это нельзя сделать, т.е. $\forall m\, (a_m \in I_2 \implies m \leq n_1)$, то в I_2 лишь конечное число членов

ч.п. $\{a_n\} \implies \text{Ⓦ} \implies \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in I_2$)

Пусть построен I_k и a_{n_k}. Делим I_k пополам и выбираем половину,

в которой бесконечно много членов $\{a_n\}$, обозначим эту половину как I_{k+1}

и выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$ (если это нельзя сделать, т.е. $\forall m\, (a_m \in I_{k+1} \implies m \leq n_k)$,

тогда в I_{k+1} лишь конечное число членов ч.п. $\{a_n\} \implies \text{Ⓦ} \implies \exists n_{k+1} > n_k : a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$)

Построили последовательность $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k; d_k]$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{b_k\}$ неубывает и ограничена сверху C

$\implies \exists \lim\limits_{n \to +\infty} b_k = b, b \geq b_k$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{d_k\}$ невозрастает и ограничена снизу $-C$

$\implies \exists \lim\limits_{n \to +\infty} d_k = d, d \leq d_k$

При этом $|d_k - b_k| = \dfrac{2 \cdot C}{2^{k-1}} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$

$\forall k \in \mathbb{N} : b_k \leq d_k \implies$ по теореме о предельном переходе в неравенствах: $b \leq d$

$d - b \leq d_k - b_k \underset{k \to +\infty}{\to} 0 \implies d \leq b \implies d = b$

Получили: $\lim\limits_{n \to +\infty} b_k = b = d = \lim\limits_{n \to +\infty} d_k$

b_k и d_k - границы отрезка $I_k \implies \forall k \in \mathbb{N} : b_k \leq a_k \leq d_k \implies$

$\implies$ по теореме о пределе зажатой последовательности $\lim\limits_{n \to +\infty} a_k = b = d$

■

6.5 Дополнительный материал (вне курса)

6.5.1 Принцип Больцано-Вейерштрасса

Note

В терминах теории множеств теорема Больцано-Вейерштрасса формулируется так:
У любого бесконечного ограниченного множества существует хотя бы одна предельная точка

6.5.2 Стягивающая система вложенных отрезков

Definition: Стягивающая система вложенных отрезков

Пусть I - система вложенных отрезков, тогда если
$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ([a_n; b_n] \in I \land b_n - a_n < \varepsilon)$, то такая система вложенных отрезков называется стягивающейся системой вложенных отрезков

6.5.3 Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора

Theorem Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора

Для любой системы вложенных отрезков существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.
Т.е. $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall k \in \mathbb{N} : c \in I_k = [a_k; b_k]$
Если система вложенных отрезков является стягивающейся, то такая точка единствена

Proof:

1. Множество $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \varnothing$ ограничено сверху, например, числом $b_1 \implies$
$\implies \exists \sup A = \alpha$ по теореме о существовании точной грани множества
Аналогично $\exists \sup B = \beta, B = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$(\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n) \implies (\alpha \leq \beta \land \forall n \in \mathbb{N} : [\alpha; \beta] \subseteq [a_n; b_n])$
2. Тогда положим $\gamma := \dfrac{\alpha + \beta}{2} \implies \forall n \in \mathbb{N} : \gamma \in [a_n; b_n]$
3. Для стягивающейся системы вложенных отрезков:
Предположим от противного, что точка не одна, т.е.
$\exists \gamma_1 < \gamma_2 : \forall n \in \mathbb{N} : (\gamma_1 \in [a_n; b_n] \land \gamma_2 \in [a_n; b_n])$
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$
Положим $\varepsilon := \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : b_n - a_n \geq \varepsilon \implies$ W $\implies$
$\implies$ изначальное предположение неверно $\implies$ точка не более, чем одна,
а существование хотя бы одной показано в пунктах 1, 2

■

Note

Вообще говоря, утверждение неверно для интервалов, например для системы вложенных интервалов:

$$\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(0; \frac{1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}} : \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \varnothing$$

Chapter 7

Фундаментальная ч.п. Критерий сходимости ч.п. по Коши

7.1 Определение фундаментальной ч.п.

Definition: Фундаментальная ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n, m > N(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

7.2 Критерий сходимости ч.п. по Коши

Theorem Критерий сходимости ч.п. по Коши

Ч.п. $\{a_n\}$ сходится $\iff$ $\{a_n\}$ - Фундаментальная ч.п.

Proof:

" $\implies$ "

Распишем, что дано: $\exists A \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1 : |a_n - A| < \varepsilon$

Хотим доказать: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$|a_n - a_m| < \varepsilon \impliedby |a_n - a + a - a_m| < \varepsilon \impliedby |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon \impliedby |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$

Положим $N_2(\varepsilon) := N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \implies$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon \implies$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

" $\impliedby$ "

Распишем, что дано: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Покажем, что $\{a_n\}$ ограничена: положим $\varepsilon = 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n > N_2 : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n > N_2 : a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$

Положим $C := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_2(1)}|, |a_{N_2(1)+1}|) + 1 \implies$

$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$\exists a \in \mathbb{R}\, \exists \{a_{n_k}\} : \lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = a$

Докажем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

Перепишем, что дано:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3(\varepsilon)\, \forall k > N_3(\varepsilon) : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$

Распишем, что хотим доказать:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

$|a_n - a| < \varepsilon \impliedby |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < \varepsilon \impliedby |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$

Т.к. при выборе членов в подпоследовательности $n_k \geq k$, то при $k > N_3(\varepsilon) \implies n_k > N_3(\varepsilon)$

Положим $N_1(\varepsilon) = \max\left(N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right), N_3\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \implies$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon \implies$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

■

7.3 Постоянная Эйлера-Маскерони

Definition: Постоянная Эйлера-Маскерони

Рассмотрим ч.п. $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$
Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его γ

Proof:

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$$

γ_n убывает

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(1 - \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)\right)$$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходится к e и убывает. Докажем убывание

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{(n+1)(n^2 + 3n + 1)}{n^3 + 4n^2 + 4n} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1}(1 - \ln b_n)$$

b_n убывает к $e \implies b_n > e \implies \ln b_n > 1 \implies \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$

Докажем ограниченность γ_n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \implies n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \implies \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n} > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n =$$
$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n - \ln n =$$
$$= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0$$

∎

Chapter 8

Асимптоты

8.1 Определения асимптот

Definition: Асимптоты

Вертикальная асимптота:	• Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$
Горизонтальная асимптота:	• Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ на $\pm\infty$, если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ Вообще говоря, горизонтальные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными
Наклонная асимптота:	• Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (kx + b) = 0$ Вообще говоря, наклонные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными

8.2 Признак наклонной асимптоты

Theorem Признак наклонной асимптоты

Прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \longrightarrow +\infty \iff$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = b \end{cases}$$

Proof:

" $\Longrightarrow$ "

1. Распишем определение наклонной асимптоты: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$

Вынесем b из предела: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx = b$

$f(x) - kx - b$ - б.м. при $x \longrightarrow +\infty$

Т.к. $x \longrightarrow +\infty$, то можно поделить на x :

$$\frac{f(x)}{x} - k = \frac{b}{x} + \frac{\text{б.м.}}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{b}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{\text{б.м.}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{f(x)}{x} - k \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

" $\Longleftarrow$ "

Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx = b$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$

■

Chapter 9

Определение и свойства функции

9.1 Определения

Definition: Определение функции

Множество пар $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D_f \wedge y \in E_f\}$ называется функцией f с областью определения D_f и областью значения E_f, если $\forall x \in D_f \, \exists! y \in E_f : (x, y) \in f$ (для удобства $(x, y) \in f$ обозначают как $f(x) = y$)
Обозначение функции: $f : X \to Y$
В данном обозначении подразумевают, что $D_f = X, E_f \subseteq Y$

Example
$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, в данном случае $D_f = \mathbb{N} \cup \{0\}, E_f = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
Т.к. несложно установить, что $E_f = \mathbb{Z}$, то можно написать $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$

Definition: Определение инъективной функции

Функция f называется инъективной, если $\forall y \in E_f \, \exists! x \in D_f : f(x) = y$
Это эквивалентно тому, что $\forall x_1, x_2 \in D_f : (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$
(говорят, что f - инъекция)

Example
$\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^{2n-1}$ является инъективной
$\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^{2n}$ не является инъективной

Definition: Определение сюръективной функции

Функция $f : X \to Y$ называется сюръективной для множества Y, если $E_f = Y$
(говорят, что f - сюръекция)
Когда говорят, что f сюръективна, не уточняя множество, то подразумевают, что f сюръективна для Y

Example
Функция $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не сюръективна для $\mathbb{R}$, но сюръективна для $[-1; 1]$

Definition: Определение биективной функции

Функция $f : X \to Y$ называется биективной, если она инъективна и сюръективна (говорят, что f - биекция)

Example

Функция $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$, такая что
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ - биекция между $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{Z}$
(как следствие, показали, что $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{Z}$, т.е. множества равномощны)

9.2 Пределы

9.2.1 Определение предела функции по Коши

Definition: Определение предела функции по Коши

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Note

При этом $\dot{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty)$, $\dot{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta)$, $\dot{U}_\delta(\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$

9.2.2 Определение предела функции по Гейне

Definition: Определение предела функции по Гейне

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : (x_n \neq x_0 \land \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A)$$

9.2.3 Теорема об эквивалентности определений по Коши и по Гейне

Theorem Теорема об эквивалентности определений по Коши и по Гейне

Определение предела функции по Коши эквивалентно определению предела функции по Гейне

Proof:

" $\Longrightarrow$ "

Распишем определение по Коши: $\forall \xi > 0\, \exists \delta = \delta(\xi) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x) - A| < \xi$ (1)

Пусть дана ч.п., удовлетворяющая условиям посылки импликации, т.е.

$\{x_n\} : x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \land \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0$

По определению это означает, что

$\forall \lambda > 0\, \exists N(\lambda) \in \mathbb{N}\, \forall n > N(\lambda) : 0 < |x_n - x_0| < \lambda$ (2)

Хотим доказать:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n > N_1(\varepsilon) : |f(x_n) - A| < \varepsilon$

Пусть дано $\varepsilon > 0$, тогда по (2):

$\forall n > N(\delta(\varepsilon)) : 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$

Это равносильно тому, что $\forall n > N(\delta(\varepsilon)) : x_n \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$

Тогда по (1) получим: $\forall n > N(\delta(\varepsilon)) : |f(x) - A| < \varepsilon$

Т.е. мы доказали искомое высказывание, положив $N_1(\varepsilon) := N(\delta(\varepsilon))$

" $\Longleftarrow$ "

Предположим от противного, т.е. выполнено определение по Гейне, но по Коши не выполнено:

$\forall \{x_n\} : x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \land \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0 \implies f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ (3)

$\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$ (4)

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ и $x \in \dot{U}_{\delta_n}(x_0)$ из (4) обозначим как x_n

Тогда по (4): $\forall n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$

$\forall n \in \mathbb{N} : x_0 - \dfrac{1}{n} < x_n < x_0 + \dfrac{1}{n} \implies x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ по теореме о пределе зажатой последовательности

Получили ч.п., такую что $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \land \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0$

Тогда по определению сходимости по Гейне (3): $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A \implies$

$\implies \exists N(\varepsilon_0)\, \forall n > N(\varepsilon_0) : |f(x_n) - A| < \varepsilon_0 \implies$ W

■

9.2.4 Определение одностороннего предела функции

Definition: Односторонний предел функции

Левосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \to x_0$ слева, то есть

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Правосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \to x_0$ справа, то есть

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

9.2.5 Свойство предела функции

Theorem Свойство предела функции при $x \to x_0, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = A, \text{ где } A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Proof:

$" \implies "$

Дано:$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Тогда:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$" \impliedby "$

Дано:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0\, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta_1) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta_2; x_0) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Положим $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$, тогда:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subseteq (x_0 - \delta_2; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta_1) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

■

9.2.6 Бесконечные пределы

Definition: Бесконечные пределы

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$

Definition: Бесконечно малая функция

Функция называется б.м. при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$
Функция называется б.м. при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
Функция называется б.м. при $x \to -\infty$, если $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Definition: Бесконечно большая функция

Функция называется б.б. при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$
Функция называется б.б. при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$
Функция называется б.б. при $x \to -\infty$, если $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

Definition: Ограниченная функция

Функция называется ограниченной при $x \to x_0$, если $\exists \delta > 0\, \exists C > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| < C$

Definition: Отделимая от нуля функция

Функция называется отделимой от нуля при $x \to x_0$, если $\exists \delta > 0\, \exists \varepsilon_0 > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > \varepsilon_0$

Note

Связь функций при $x \to x_0$, где x - аргумент обоих функций, x_0 - число, к которому стремится аргумент обоих функций:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

9.2.7 Арифметика предела функции

Claim

Если $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}, g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, то

- $f(x) \pm g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a \pm b$
- $f(x) \cdot g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a \cdot b$
- $\left(\exists \delta > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : g(x) \neq 0\right) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$

9.2.8 Предельный переход в неравенствах

Theorem Предельный переход в неравенствах

$$\left.\begin{array}{l} f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \to x_0} g(x) = B \\ \exists \delta > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < g(x) \end{array}\right\} \implies A \leq B$$

9.2.9 Теорема о зажатой функции

Theorem Теорема о зажатой функции

$$\left.\begin{array}{l} f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = A \\ \lim_{x\to x_0} h(x) = A \\ \exists\delta > 0\,\forall x\in\dot{U}_\delta(x_0): f(x)\le g(x)\le h(x) \end{array}\right\} \lim_{x\to x_0} g(x) = A$$

Proof:

1. По определению предела функции по Коши:

$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0\,\forall x\in\dot{U}_{\delta_1}(x_0): |f(x)-A| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0\,\forall x\in\dot{U}_{\delta_2}(x_0): |h(x)-A| < \varepsilon$

2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, расписав определение по Коши:

Пусть дано $\varepsilon > 0$, тогда положим $\delta_3(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \delta\}$

Тогда $\forall x\in\dot{U}_{\delta_3}(x_0): A-\varepsilon < f(x)\le g(x)\le h(x) < A+\varepsilon$

То есть показали верность определения предела по Коши:

$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_3 > 0\,\forall x\in\dot{U}_{\delta_3}(x_0): |g(x)-A| < \varepsilon$

∎

9.2.10 Первый и второй замечательные пределы

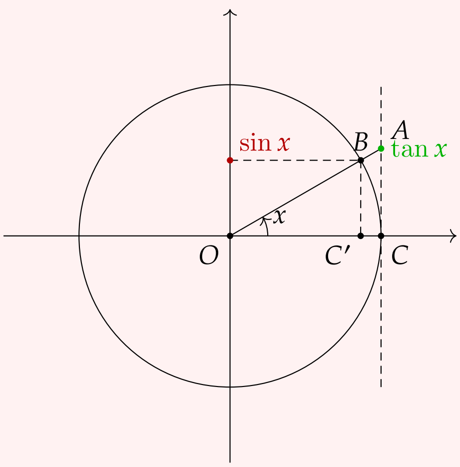
Definition: Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Proof:

Докажем неравенство $\sin x < x < \tan x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Рассмотрим единичную окружность с центром в $(0; 0)$:



$AC = \tan x, BC' = \sin x,$ дуга $\breve{BC} = x \cdot OC$

Пусть S_{BOC}, S_{AOC} - площади соответствующих треугольников, $S_{B\breve{O}C}$ - площаль сектора, тогда

$S_{BOC} < S_{B\breve{O}C} < S_{AOC}$

$\frac{BC'OC}{2} < \frac{xOC^2}{2} < \frac{ACOC}{2}$

$\sin x < x < \tan x$

$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x\cos x}$

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ воспользуемся нечётностью синуса и чётностью косинуса:

$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} \in (\cos(x); 1)$

Тогда $\forall x \in \dot{U}_{\frac{\pi}{2}}(0) : \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Распишем предел по определению сходимости по Коши:$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(0) : \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$

Будем выбирать только значения $\delta(\varepsilon) \leq \frac{\pi}{2}$, тогда

$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon \impliedby 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon \impliedby 1 - \cos x < \varepsilon \impliedby 1 - \cos^2 x < \varepsilon \impliedby \sin^2 x < \varepsilon$

$\impliedby \sin x < \varepsilon \impliedby x < \varepsilon$

Показали, что если $\forall \varepsilon > 0 : \delta(\varepsilon) := \min\left(\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right)$, то определение предела по Коши выполняется

■

Definition: Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Proof:

1. По определению числа Эйлера: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

По арифметике предела ч.п.:

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$

По определению предела ч.п. это означает:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n > N_1(\varepsilon) : \left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e \right| < \varepsilon$

Последнее выражение равносильно: $e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < e + \varepsilon$

Аналогично

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n > N_2(\varepsilon) : e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$

2. Хотим доказать: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Распишем определение предела функции по Коши при $x \to +\infty$:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, \forall x \in (\delta; +\infty) : \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right| < \varepsilon$

Будем рассматривать только $\delta \geq 1$, тогда:

$\forall x \in (\delta; +\infty) \, \exists n \in \mathbb{N} : n < x \leq n + 1$

Тогда $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Положим $\delta(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} + 1$

Тогда для каждого рассматриваемого x: $n \geq x - 1 > \delta - 1 \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

То есть $n > N_1(\varepsilon) \wedge n > N_2(\varepsilon)$

Тогда $e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon \implies$

$\implies e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon$

Таким образом, показали, что верно определение предела функции по Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} + 1 > 0 \, \forall x \in (\delta; +\infty) : e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon$

■

9.2.11 Теорема о пределе сложной функции

Theorem Теорема о пределе сложной функции

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0\\ \lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)\end{array}\right\} \implies \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Proof:

Распишем, что дано, по определению:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1(\varepsilon)\, \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) : |f(x) - y_0| < \varepsilon\, (1)$

$\forall \lambda > 0\, \exists \delta_2(\lambda)\, \forall y \in \dot{U}_{\delta_2(\lambda)}(y_0) : |g(y) - g(y_0)| < \lambda\, (2)$

Распишем, что хотим доказать:

$\forall \eta > 0\, \exists \delta_3 = \delta(\eta) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Положим $\delta_3(\eta) = \delta_1(\delta_2(\eta))$, тогда :

$x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) \iff x \in \dot{U}_{\delta_1(\delta_2(\eta))}(x_0) \implies$ по (1) $|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta)$

$|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta) \iff f(x) \in U_{\delta_2(\eta)}(y_0)$

По (2) знаем, что если $f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Если $f(x) = y_0$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Иначе, если $f(x) \neq y_0 \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Получили: $\forall \eta > 0\, \exists \delta_3 = \delta_1(\delta_2(\eta))\, \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

■

9.3 O - символика

Definition: O - символика

о-малое: • $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - б.м. при $x \to x_0$

О-большое: • $f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - ограниченная при $x \to x_0$

9.4 Непрерывность функции

9.4.1 Непрерывность функции в точке

Definition: Непрерывность функции в точке

Функция называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Clarification Уточнение

Если x_0 - граница области определения, то рассматривается односторонний предел

9.4.2 Свойства непрерывных функций

Note

Свойства непрерывных функций:

• Сумма, произведение и частное непрерывных функций - непрерывные функции (по арифметике пределов функции)

• Композиция непрерывных функций - непрерывная функция (по теореме о пределе сложной функции)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0 \\ \lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0) \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

9.4.3 Правило замены переменных в пределе сложной функции

Claim Правило замены переменных в пределе

Пусть дана сложная функция $f(g(x))$, тогда, если для некоторой точки $x_0 : \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$ и $\lim_{y \to y_0} f(y) = A \in \mathbb{R}$, то $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$

Example (Пример использования правила замены переменной в пределе)

Пусть надо найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$

Преобразуем выражение: $\dfrac{\sin(\pi x)}{x} = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi$

В данном случае в обозначения из утверждения выше:

$f(y) = \dfrac{\sin(y)}{y}$

$g(x) = \pi x$

$g(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0, y_0 = g(x_0) = 0,$ и при этом $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = 1 = A$

Тогда по правилу замены переменной в пределе:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi = \lim\limits_{x\to 0} A \cdot \pi = \lim\limits_{x\to 0} 1 \cdot \pi = \pi$

9.4.4 Непрерывность функции на множестве

Definition: Непрерывность функции на множестве

Функция называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке множества E

/* Когда говорят, что функция непрерывна, имеют ввиду, что она непрерывна на D_f */

Note

В частность, функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка $[a; b]$
При этом, в точках a и b рассматриваются односторонние пределы

9.4.5 Теорема 1 о функции, непрерывной на отрезке

Theorem Теорема о функции, непрерывной на отрезке (иногда называют теоремой Вейерштрасса)

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и достигает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке

Докажем, что функция ограничена сверху и достигает наибольшее значение. Для второго случая доказательство проводится аналогично

Proof:

1. $E_f -$ мно-во значений $f(x)$ на $[a;b]$

Обозначим $M = \sup E_f = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Построим некоторую строго возрастающую ч.п. $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$

2. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n)$

Предположим от противного, то есть $\exists n_0\, \forall x \in [a;b] : a_{n_0} \geq f(x)$

Тогда a_{n_0} - верхняя грань множества E_f (по определению верхней грани множества)

Однако, т.к. a_n - возрастающая ч.п. и $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = M$, то $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < M$

В частности, $a_{n_0} < M$, т.е. a_{n_0} - верхняя грань, которая меньше точной верхней грани $\implies$

$\implies$ W $\implies \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n)$

3. По построению M: $\forall x \in [a;b] : f(x) \leq M$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n) \leq M$

Следовательно, по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = M$

4. Докажем, что $M = f(x_0)$

Т.к. x_n - ограниченная ч.п., то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} x_0 \in [a;b]$

Т.к. f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она непрерывна в x_0, следовательно $\lim\limits_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

(по определению непрерывности в точке и определению предела функции по Гейне)

$$\left(\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M\right) \wedge \left(\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)\right) \implies M = f(x_0) < \infty$$

Таким образом, на отрезке $[a;b]$ функция f ограничена сверху числом $M = f(x_0)$

■

9.4.6 Теорема 2 о функции, непрерывной на отрезке

Theorem Теорема (2) о функции, непрерывной на отрезке

Функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, принимает все промежуточные значения
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b], f(x_1) = A, f(x_2) = B, x_1 < x_2$, БОО $A < B$, тогда
$\forall c \in (A;B) \, \exists x_0 \in (x_1;x_2) : f(x_0) = c$

Proof:

1. Построим последовательность вложенных отрезков:
/* Если Вам так будет удобнее, то докажем существование x_0 бинпоиском по ответу */
$[a_1;b_1] := [x_1;x_2]$
$x_3 := \dfrac{a_1+b_1}{2}$, рассмотрим $f(x_3)$
$1) f(x_3) = c \implies q.e.d.$
$2) f(x_3) < c \implies [a_2;b_2] := [x_3;b_1]$
$3) f(x_3) > c \implies [a_2;b_2] := [a_1;x_3]$
Применяя это правило, продолжим строить последовательность отрезков
Если ни на какой итерации не произойдёт случай 1), то получим счётно бесконечную последовательность отрезков$\{[a_n;b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$
По построению ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху $b \implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le b$
По построению ч.п. $\{b_n\}$ невозрастает и ограничена снизу $a \implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \ge a$
$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to_{n\to+\infty} 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$
$x_0 \in [a;b] \implies f(x)$ непрерывна в $x_0 \implies \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \implies$
$\implies$ по определению по Гейне $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x_0)$
По построению $f(a_n) < c \land f(b_n) > c \implies c \le f(x_0) \le c \implies f(x_0) = c$

■

Следствие 1

Corollary Следствие

$f(x)$ непрерывна на $[a;b] \implies E_f = [\inf E_f; \sup E_f]$

Следствие 2

Corollary Следствие

$f(x) = x^2$ непрерывна на $D_f = [1;2] \implies E_f = [1;4] \implies \exists x_0 \in [1;2] : x_0^2 = 2$
То есть доказано существование числа $\sqrt{2}$

Следствие 3

Corollary Следствие

$f(x)$ непрерывна на $[a;b] \land f(a) < 0 \land f(b) > 0 \implies \exists c \in (a;b) : f(c) = 0$

9.4.7 Определение монотонности функции

Definition: Определение монотонности функции

- $f(x)$ называется строго возрастающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- $f(x)$ называется неубывающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f(x)$ называется строго убывающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- $f(x)$ называется невозрастающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

9.4.8 Определение обратной функции

Definition: Определение обратной функции

Функция $y = f^{-1}(x)$ называется обратной функцией к функции $y = f(x)$, если множество пар фукнции f^{-1} является симметрией множества пар f

Example

Пусть $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = e^x$, т.е. $f = \{(x, e^x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$
Тогда $f^{-1} = \{(e^x, x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\} = \{(x, \ln x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}_{>0}\}$
То есть $f^{-1}(x) = \ln x$

Note

Функция обратима $\iff$ она инъективна

9.4.9 Достаточное условие обратимости

Definition: Достаточное условие обратимости

Если функция $f(x)$ строго монотонна на X, то $f(x)$ обратима на X

Proof:

Предположим от противного, что $f(x)$ не инъективна, то есть
$\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 \neq x_2 \implies \min(x_1, x_2) < \max(x_1, x_2) \implies$ W с определением строгой монотонности

■

9.4.10 Критерий обратимости функции

Definition: Критерий обратимости функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда $f(x)$ обратима $\iff$ $f(x)$ строго монотонна

Proof:

" $\Longleftarrow$ "Смотри достаточное условие обратимости

" $\Longrightarrow$ "

Докажем для случая, когда $f(x)$ строго монотонно возрастает, для убывания аналогично

Предположим от противного, тогда БОО

$\exists x_1 < x_2 < x_3 \in [a;b] : \ f(x_1) < f(x_2) \geq f(x_3)$

Если $f(x_2) = f(x_3)$, то f не инъективна $\implies$ f не обратима $\implies$ W

Иначе, положим $c := \dfrac{\max(f(x_1), f(x_3)) + f(x_2)}{2} \implies f(x_1) < c < f(x_2) \land f(x_3) < c < f(x_2)$

f непрерывна на $[a;b] \implies f$ непрерывна на $[x_1;x_2]$ и $[x_2;x_3]$

f непрерывна на $[x_1;x_2] \implies \exists x_0' \in (x_1;x_2) : f(x_0') = c$

f непрерывна на $[x_2;x_3] \implies \exists x_0'' \in (x_2;x_3) : f(x_0'') = c$

Получили: $\exists x_0' < x_0'' \in [a;b] : f(x_0') = f(x_0'') \implies$ f не инъективна $\implies$ f не обратима $\implies$ W

$\blacksquare$

9.4.11 Свойства обратимой функции

Theorem

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b]$, то функция $f^{-1}(y)$:

- 1) определена на $E_f = [\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$
- 2) мотонотонна (и имеет ту же монотонность) на E_f
- 3) непрерывна на E_f

Proof:

1. Доказано по критерию обратимости функции

2. БОО f возрастает на $[a;b]$

Предположим от противного

$f^{-1}(y)$ не возрастает на $[a;b] \implies \exists y_1 < y_2 \in [f(a); f(b)] : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

По определению обратной функции $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in [a;b]$, обозначим $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$

$x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$. При этом, $f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$

$x_1 \geq x_2 \implies y_1 \geq y_2 \implies$ W

3. Докажем непрерывность по определению

Дано: $x = f^{-1}(y)$ - определённая монотонная на $[a;b]$ функция

Докажем, что f^{-1} непрерывна в любой точке $y_0 \in (f(a); f(b))$

Для $y_0 \in \{f(a), f(b)\}$ доказательство аналогично (нужно рассмотреть односторонние пределы)

По определению непрерывности в точке $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

Обозначим $f^{-1}(y_0) = x_0$

БОО докажем для таких ε, что $U_\varepsilon(x_0) \subset (a;b)$. Для *бо́льших* ε неравество также будет выполняться

$a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$

Обозначим $y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$, тогда $y_1 < y_0 < y_2$

Положим $\delta := \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1)$, тогда $U_\delta(y_0) \in (y_1; y_2)$

Докажем, что при выбранном δ выполняется неравенство под знаками кванторов:

$y \in U_\delta(y_0) \implies y \in (y_1; y_2) \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \implies x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \implies$

$\implies |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon \implies$ неравенство под кванторами верно и определение выполняется

■

Следствие 1

Corollary Следствие (без доказательства)

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $(a;b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, то функция $f^{-1}(y)$:

- 1) определена на $(m;M)$, где $m = \min(f(a), f(b)), M = \max(f(a), f(b))$
- 2) мотонотонна (и имеет ту же монотонность) $[m;M]$
- 3) непрерывна на $(m;M)$

Идея доказательства: рассмотреть $[c;d] \subset (a;b)$, для него верна теорема выше, а далее перейти к пределу при границах, стремящихся к a и b

Следствие 2

Corollary

Т.к. $f(x) = x^n$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $D_f = n \vdots 2 ? [0; +\infty) : \mathbb{R}$, то

$g(x) = \sqrt[n]{x}$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $D_g = E_f = n \vdots 2 ? [0; +\infty) : \mathbb{R}$

9.4.12 Обратные тригонометрические функции

Definition: Обратные тригонометрические функции

$y = \sin x$ непрерывна и возрастает на $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \implies$
$\implies \exists \arcsin := \sin^{-1} : y = \arcsin x$ непрерывна и возрастает на $E_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, область значений - $D_f = [-1; 1]$
Аналогично

- $y = \arccos x$ непрерывна и убывает на $E_f = [0; \pi]$, область значений - $D_f = [-1; 1]$
- $y = \arctan x$ непрерывна и возрастает на $E_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, область значений - $D_f = \mathbb{R}$
- $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывна и убывает на $E_f = (0; \pi)$, область значений - $D_f = \mathbb{R}$

9.4.13 Показательная функция

Definition: Показательная функция

(теорема без доказательства) функция $y = a^x, a > 0$

- 1) определена на $D_f = \mathbb{R}, E_f = (0; +\infty)$
- 2) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на $\mathbb{R}$
- 4) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  $(a^x)^y = a^{xy}$
  /* Следствие: $\phi(x) = a^x$ является изоморфизмом (см. алгебра) между $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, *)$ */

9.4.14 Логарифмическая функция

Definition: Логарифмическая функция

Функция, обратная к $y = a^x, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ обозначается $y = \log_a x$

- 1) определена на $D_f = (0; +\infty), E_f = \mathbb{R}$
- 2) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на $(0; +\infty)$
- 4) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
  $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$
  /* Следствие: $\psi(x) = \log_a x$ является изоморфизмом (см. алгебра) между $(\mathbb{R}_{>0}, *)$ и $(\mathbb{R}, +)$ */

9.4.15 Следствия из 2 замечательного предела

Corollary Следствия из 2 замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Proof:

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\ln(x+1) = \ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Функция $\ln x$ непрерывна, тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$$

■

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Proof:

$$t = e^x - 1 \implies x = \ln(t+1)$$

$$x \to 0 \implies t \to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

■

9.4.16 Показательная функция с вещественным показателем

Corollary Показательная функция с вещественным показателем

$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$

$y = e^{\alpha \ln x}$

$\ln x$ непрерывна и возрастает на $(0; +\infty)$

$\alpha \ln x$ непрерывна и возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$

$e^{\alpha \ln x}$ непрерывна и возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$

Следствие

Corollary

$\lim_{x\to+\infty} a(x) = a \land \lim_{x\to+\infty} b(x) = b \implies \lim_{x\to+\infty} a(x)^{b(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{b(x)\ln a(x)} = e^{b \ln a} = a^b$

Для ч.п. $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ построим кусочно-линейные функции $a(x)$ и $b(x)$, такие что $\forall n \in \mathbb{N} : a(n) = a_n \land b(n) = b_n$

Тогда $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \land \lim_{n\to+\infty} b_n = b \implies \lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a^b$

9.5 Производная функции

9.5.1 Определение производной

Definition: Определение производной

Производная функции f в точке x_0 - это предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Note

$\forall x \in \mathbb{R}: \ (\sin x)' = \cos x$

Proof:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

■

Note

$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ (x^n)' = nx^{n-1}$

Proof:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}{x_0}^k}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}{x_0}^k = nx_0^{n-1}$$

■

Note

$(a^x)' = a^x \ln a$

Proof:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{a^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} =$$
$$= a^{x_0} \lim_{t \to 0} \frac{e^{t \ln a} - 1}{t} = a^{x_0} \lim_{s \to 0} \frac{e^s - 1}{s} \cdot \ln a = a^{x_0} \ln a$$

■

Note

$(e^x)' = e^x$

Note

n-я производная обозначается как $f^{(n)}(x)$ и определяется как $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, где 0-я производная $f^{(0)}(x) = f(x)$

Example

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$

9.5.2 Правила подсчёта производных

Claim Правила подсчёта производных

Если $\exists f'(x), \exists g'(x), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, то

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $g(x) \neq 0 \implies \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

9.5.3 Определения дифференцируемости функции

Definition: Дифференцируемость функции в точке

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если

$$\exists A(x_0) \in \mathbb{R} : \ f(x) = f(x_0) + A(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$$

Где $A(x_0)$ - некоторая величина, не зависящая от x (т.е. для каждой точки x_0 это некоторое число)

Theorem Признак дифференцируемости функции в точке

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \iff \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Proof:

" $\implies$ "

По определению дифференцируемости в точке

$$\exists A(x_0) \in \mathbb{R} : \ f(x) = f(x_0) + A(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0) \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A(x_0) + \overline{o}(1) \implies$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A(x_0) \in \mathbb{R} \implies \exists f'(x_0) = A(x_0) \in \mathbb{R}$$

" $\impliedby$ "

По определению производной:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \overline{o}(1) \implies$$

$$\implies f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$$

$$\implies f(x) = f(x_0) + A(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0), A(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

■

9.5.4 Определение дифференциала

Definition: Определение дифференциала

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 - это линейная функция $df(x_0) = A(x_0) \cdot (x - x_0)$ такая, что $f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \overline{o}(x - x_0)$

Обозначив $x - x_0$ как dx (фиксированное приращение), получим:

$df(x_0) = f'(x_0)dx$

9.5.5 Теорема о непрерывности функции, дифференцируемой в точке

Theorem

Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в ней

Proof:

По определению дифференцируемости в точке x_0 :

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \\ \lim_{x \to x_0} \overline{o}(x - x_0) = 0 \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

■

9.5.6 Теорема о дифференцируемости сложной функции

Theorem

Если $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $f(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то $f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Proof:

$$\begin{aligned}
&g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0) \\
&f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \overline{o}(y - y_0) \implies \\
&f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)) + \overline{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)) \\
&f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0)) \cdot \overline{o}(x - x_0) + \overline{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)) = \\
&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0) + (x - x_0)\overline{o}(g'(x_0) + \overline{o}(x)(1)) = \\
&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0) \implies (f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

■

9.5.7 Теорема о производной обратной функции

Theorem

Если $f(x)$ непрерывна и обратима на $[a; b]$, $x_0 \in (a; b), \exists f'(x_0) \neq 0$, тогда $\exists (f^{-1}(y))'|_{y=f(x_0)=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Proof:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = |\text{замена } y = f(x)| = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

9.5.8 Пример 1

Example

Пример: $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f^{-1}(y) = \ln y$

$(f^{-1}(y))'|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}$

9.5.9 Пример 2

Example

Пример: $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$
$y = e^{\alpha \ln x} \implies y' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

9.5.10 Определение локального минимума

Definition: Определение локального минимума (точка минимума)

x_0 - точка локального минимума функции f(x), если $\exists \delta_0 > 0 \, \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \le f(x)$
x_0 - точка строгого локального минимума функции f(x), если $\exists \delta_0 > 0 \, \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) < f(x)$

9.5.11 Определение локального максимума

Definition: Определение локального максимума (точка максимума)

x_0 - точка локального максимума функции f(x), если $\exists \delta_0 > 0 \, \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \ge f(x)$
x_0 - точка строгого локального максимума функции f(x), если $\exists \delta_0 > 0 \, \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) > f(x)$

9.5.12 Определение точки локального экстремума

Definition: Точка локального экстремума

Точками локального экстремума называются точки минимума и точки максимума

9.5.13 Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)

Theorem Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)
Если x_0 - точка локального экстремума, то $\exists f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0$

Proof:

Пусть $\exists f'(x_0)$
Докажем для случая, когда x_0 - локальный минимум, для локального максимума доказательство аналогично.
Предел при $x \to x_0$ существует $\implies$ существуют односторонние пределы и они совпадают с $f'(x_0)$
В некоторой δ окрестности $f(x_0) \le f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \implies \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \\ x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \implies \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \end{array}\right\} \implies f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

■

9.5.14 Определения касательной к графику функции

Definition: Касательная к графику функции

Касательной к графику функции $f(x)$ называется прямая $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Note

Касательная проходит через точку $(x_0; f(x_0))$
В точке x_0: $f'(x_0) = \tan(\alpha)$, где α - угол наклона прямой на графике

9.5.15 Теорема Ролля

Theorem Теорема Ролля

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a; b]$
- Дифференцируема на $(a; b)$
- $f(a) = f(b)$

То $\exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) = 0$

Proof:

1. Обозначим $M := \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x), m := \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ достигаются, т.к. функция непрерывна на отрезке
2. Если $m = M \implies f(x) = const \implies \forall x \in (a; b) : f'(x) = 0$
3. Иначе, если $m < M$, тогда хотя бы одна из этих точек достигается в $\xi \in (a; b)$ (т.к. $f(a) = f(b)$)

   БОО $f(\xi) = M \implies \xi$ - точка loc max

   f дифференцируема на $(a; b) \implies \exists f'(\xi) \implies f'(\xi) = 0$ (по теореме Ферма)

■

9.5.16 Теорема Лагранжа

Theorem Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a; b]$
- Дифференцируема на $(a; b)$

То $\exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Proof:

1. Рассмотрим $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} x$, эта функция также, как и функция f,

   непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$

   $F(a) = F(b) \implies$ для F выполняются требования теоремы Ролля $\implies \exists \xi \in (a; b) : F'(\xi) = 0 \implies$

$$\implies \exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies \exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

■

9.5.17 Теорема-следствие 1

Corollary Теорема-следствие 1

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a;b]$
- Дифференцируема на $(a;b)$
- $f'(x) = 0$ на $(a;b)$

То $f(x) = const$ на $[a;b]$

Proof:

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b] f(x) \text{ удовлетворяет требованиям теоремы Лагранжа на } [x1_; x_2] \implies$$
$$\implies \exists \xi \in (x_1; x_1) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1)$$
$$\text{Получили: } \forall x_1, x_2 \in [a;b] : f(x_2) - f(x_1) = 0$$

■

9.5.18 Теорема-следствие 2

Corollary Теорема-следствие 2

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- Непрерывность на $[a;b]$
- Дифференцируемость на $(a;b)$
- $\forall x \in (a;b) : f'(x) = g'(x)$

То $\forall x \in [a;b] : f(x) - g(x) = const$

Proof:

$$\text{Рассмотрим } h(x) = f(x) - g(x)$$
$$h(x) \text{ удовлетворяет требованиям предыдущей теоремы-следствия 1} \implies$$
$$\implies \forall x \in [a;b] : f(x) - g(x) = const$$

■

Если вы перешли на эту теорему по ссылке из свойста первообразных, то портал обратно: 10.2

9.5.19 Теорема-следствие 3

Corollary Теорема-следствие 3

Если $\phi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\phi'(x)$ определена везде на $(a;b)$, кроме, быть может, x_0, и $\exists \lim_{x \to x_0} \phi'(x) = A \in \mathbb{R}$

То $\exists \phi'(x_0) = A$, т.е. у производной непрерывной функции нет точек устранимого разрыва

Proof:

По определению производной и по теореме Лагранжа:

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \phi'(\xi(x)), \xi(x) \in (x_0; x), \text{ т.к. на } (x_0; x)$$

$\phi(x)$ удовлетворяет требованиям т. Лагранжа

$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0 \implies \phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \phi'(\xi(x)) = A \text{ (по теореме о пределе сложной функции)}$$

■

9.5.20 Теорема Коши

Theorem Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- Непрерывность на $[a;b]$
- Дифференцируемость на $(a;b)$

А также $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$ и $g(a) \neq g(b)$

То $\exists \xi \in (a;b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Proof:

1. Рассмотрим $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$, эта функция также

непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$

$F(a) = F(b) \implies$ для F выполняются требования теоремы Ролля $\implies \exists \xi \in (a;b) : F'(\xi) = 0 \implies$

$$\implies \exists \xi \in (a;b) : f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0 \implies \exists \xi \in (a;b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

■

9.5.21 Теорема о монотонности непрерывно дифференцируемой функции

Theorem

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a;b]$
- Дифференцируема на $(a;b)$

То:

$\forall x \in (a;b) : f'(x) \geq 0 \iff f(x)$ неубывает на $[a;b]$

$\forall x \in (a;b) : f'(x) > 0 \implies f(x)$ возрастает на $[a;b]$

(Для 2 высказывания импликация в обратную сторону не верна, например, для $f(x) = x^3$ в т. $x = 0$)

Proof:

$$" \impliedby "$$

$$\forall x_0 \in (a;b) : \ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f(x) \text{ - неубывающая функция } \implies \forall x \neq x_0 : \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$$\implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$$" \implies "$$

$\forall x_1 < x_2 \in [a;b] : \ f(x)$ удовлетворяет т. Лагранжа на $[x_1;x_2] \implies$

$\exists \xi \in (x_1;x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

$f'(\xi) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$

$f'(\xi) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$

■

9.5.22 Теорема-следствие

Corollary

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, кроме конечного числа точек (дифференцируемость), и $f'(x) \geq 0$, то $f(x)$ неубывает на $[a;b]$

9.5.23 Достаточное условие экстремума

Theorem Достаточное условие экстремума

Если $\exists \delta > 0:$
$(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f'(x) \geq 0) \wedge$
$\wedge (\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f'(x) \leq 0) \wedge$
$\wedge (f(x)$ непрерывна в точке $x_0)$
, то x_0 - точка loc max (нестрогого)

9.5.24 Выпуклость и вогнутость функции

Definition: Выпуклость и вогнутость функций

Функция называется выпуклой вверх на отрезке $[a;b]$, если
$\forall x_1 < x_2 \in [a;b]$ верно:
график функции $y = f(x)$ лежит выше хорды, соединяющей точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$, т.е.
$l(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$ - уравнение хорды l
$\forall x \in [x_1; x_2] : f(x) \geq l(x)$ - нестрогая выпуклость
$\forall x \in (x_1; x_2) : f(x) > l(x)$ - строгая выпуклость
В определении функции, выпуклой вниз, знаки неравенств $f(x) \geq l(x)$ и $f(x) > l(x)$ меняются на противоположные

9.5.25 Теорема о выпуклости и вогнутости функции на интервале

Theorem

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и на $(a;b)\exists f''(x)$, то
$\forall x \in (a;b) : f''(x) \geq 0 \implies f(x)$ выпукла вниз
$\forall x \in (a;b) : f''(x) \leq 0 \implies f(x)$ выпукла вверх

Proof:

Докажем выпуклость вниз, выпуклость вверх доказывается аналогично

Пусть $x_1 < x_2 \in [a;b]$, тогда для доказательства по определению необходимо доказать верность неравенства:

$\forall x \in (x_1;x_2) : l(x) - f(x) \geq 0$, где

$l(x) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \dfrac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2-x_1}$ - уравнение хорды l

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2-x_1} - f(x)\frac{x_2 - x + x - x_1}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{f(x_1)(x_2-x) + f(x_2)(x-x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x)(x_2-x) + f(x)(x-x_1)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{f(x_1)(x_2-x) + f(x_2)(x-x_1) - f(x)(x_2-x) - f(x)(x-x_1)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{(f(x_1)-f(x))(x_2-x) + (f(x_2)-f(x))(x-x_1)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{(f(x_2)-f(x))(x-x_1) - (f(x)-f(x_1))(x_2-x)}{x_2-x_1} =$$, т.к. для функции f

на $(x_1;x)$ и $(x;x_2)$ выполняется т. Лагранжа, $\xi \in (x;x_2), \eta \in (x_1;x)$

$$= \frac{f'(\xi)(x_2-x)(x-x_1) - f'(\eta)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)(f'(\xi)-f'(\eta))}{x_2-x_1} =$$, т.к. для функции f' на $(\eta;\xi)$ выполняется т. Лагранжа

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)f''(\zeta)(\xi-\eta)}{x_2-x_1} \geq 0, \zeta \in (\eta;\xi) \subset (a;b)$$

■

9.5.26 Правило Лопиталя

Theorem Правило Лопиталя (неопределённость вида $\frac{0}{0}$)

Докажем теорему для случая, когда рассматривается левосторонний предел при $a \in \mathbb{R}$, т.е. предел

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

для $a \in \mathbb{R}$ и функций $f(x)$ и $g(x)$, таких что:

- $\exists \delta_1 > 0 : f$ и g дифференцируемы на $(a-\delta_1;a)$
- $\exists \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-} g(x) = 0$
- $\forall x \in (a-\delta_1;a) : g'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда: $\exists \lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Proof:

1. БОО рассмотрим случай, когда $A \in \mathbb{R}$. Иначе рассмотрим предел частного $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

2. Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке a: $f(a) = g(a) = 0$, чтобы функции были непрерывны в точке a. Это не влияет на искомый предел по определению предела функции при $x \to a$
(т.к. в определении по Коши рассматриваются интервалы / проколотая окрестность точки a)
Тогда $\forall x \in (a - \delta_1; a)$ на $[x; a]$ выполнено условие т. Коши
Тогда по т. Коши $\exists \xi \in (x; a) : \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$
ξ зависит от x по построению $\implies \xi(x) \underset{x \to a-}{\longrightarrow} a$

3. Обозначим $F(x) = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
Тогда $\dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = F(\xi(x)) \underset{x \to a-}{\longrightarrow} A$ по теореме о пределе сложной функции $F(\xi(x))$
Следовательно, $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = A \implies \lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = A \implies \lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

■

Для случая $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$ и $x \to a+$, $a \in \mathbb{R}$ доказательство аналогично
Докажем теорему для случая, когда рассматривается предел при $a \in +\infty$, т.е. предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Proof:

1. БОО рассмотрим случай, когда $A \in \mathbb{R}$. Иначе рассмотрим предел частного $\dfrac{g(x)}{f(x)}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \left| x = \dfrac{1}{t} \right| = \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = A$

2. Рассмотрим функции:
$a(t) = f(\dfrac{1}{t})$
$b(t) = g(\dfrac{1}{t})$
Тогда:
$a'(t) = f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)$
$b'(t) = g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)$
$\dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \dfrac{a'(t)}{b'(t)} \implies \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{a'(t)}{b'(t)} = A$
По построению $a(t)$ и $b(t)$ - композиция дифференцируемых функций, также для них выполнены пункты 2, 3, 4 теоремы, тогда
$\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{a(t)}{b(t)} = \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{a'(t)}{b'(t)} = A \implies \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

■

Theorem Правило Лопиталя (неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$)

Докажем теорему для случая, когда рассматривается левосторонний предел при $a \in \mathbb{R}$, т.е. предел

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

для $a \in \mathbb{R}$ и функций $f(x)$ и $g(x)$, таких что:

- $\exists \delta_1 > 0 : f$ и g дифференцируемы на $(a - \delta_1; a)$
- $\exists \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a-} g(x) = \infty$
- $\forall x \in (a - \delta_1; a) : g'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда: $\exists \lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Proof:

1. БОО рассмотрим случай, когда $A \in \mathbb{R}$. Иначе рассмотрим предел частного $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

2. По определению предела:

$\forall \varepsilon_1 > 0\, \exists \delta_2 > 0\, \forall x \in (a - \delta_2; a) : \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon_1$

Рассмотрим такие ε_1, что $\varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}$

Зафиксируем $x_0 \in (a - \min\{\delta_1; \delta_2\}; a)$

Т.к. $f(x) \underset{x \to a-}{\longrightarrow} \infty$, то $\exists \delta_3 > 0\, \forall x \in (a - \delta_3; a) : |f(x)| \geq \dfrac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1}$

То есть $\exists \delta_3 > 0\, \forall x \in (a - \delta_3; a) :\ \varepsilon_1 \geq \left|\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\right|$

Аналогично $\exists \delta_4 : \forall x \in (a - \delta_4; a) : \varepsilon_1 \geq \left|\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right|$

Обозначим $x_0 = a - \min\{\delta_1; \delta_2; \delta_3; \delta_4\}$ и рассмотрим $x \in (x_0; a)$

Тогда на $[x_0; x]$ выполнены условия теоремы Коши для фунций f и $g \implies$

$\implies \left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A\right| = \left|\dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} - A\right| < \varepsilon_1$, т.к. $\xi(x) \in (x_0; x) \subset (a - \delta_2; a)$

3. $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right| + \left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A\right| <$

$< \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right| + \varepsilon_1 =$

$= \left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right| \left|\dfrac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1\right| + \varepsilon_1 <$

$< (|A| + \varepsilon_1) \left|\dfrac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1\right| + \varepsilon_1 =$

$= (|A| + \varepsilon_1) \left|\dfrac{\frac{f(x_0)}{f(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}\right| + \varepsilon_1 \leq$

$\leq (|A| + \varepsilon_1) \dfrac{\left|\frac{f(x_0)}{f(x)}\right| + \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|}{1 - \left|\frac{f(x_0)}{f(x)}\right|} + \varepsilon_1 \leq$

$\leq (|A| + \varepsilon_1) \dfrac{2\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} + \varepsilon_1 < \left(|A| + \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{2\varepsilon_1}{1 - \frac{1}{2}} + \varepsilon_1 = \varepsilon_1(3 + 4|A|)$

4. Тогда:

$\forall \varepsilon > 0$ построим $\varepsilon_1 = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{3 + 4|A|}, \dfrac{1}{2}\right\}$, по ε_1 построим $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$

Положим $\delta := \min\{\delta_1; \delta_2; \delta_3; \delta_4\}$, тогда $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon_1(3 + 4|A|) = \varepsilon$

■

Example (Пример использования правила Лопиталя)

1.Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \implies$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = 0, \text{ т.к. } x^\alpha \text{ непрерывна на всей области определения}$$

2. Пусть $\alpha > 0, a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0 \implies$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{(\sqrt[\alpha]{a})^x}\right)^\alpha = 0 \tag{9.1}$$

9.6 Формула Тейлора

9.6.1 Многочлен Тейлора

Definition: Многочлен Тейлора

Пусть дана функция f, дифференцируемая n раз в точке x_0, тогда в точке x_0 многочленом Тейлора называется многочлен:
$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

Note

При $x_0 = 0$ $T_n(x)$ называется рядом Маклорена

9.6.2 Свойство многочлена Тейлора

Claim Свойство многочлена Тейлора

$\forall k \in \mathbb{N} : (0 \le k \le n \implies T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0))$

Proof:

$$T_n^{(m)}(x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)^{(m)} =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)^{(m)} + \left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m\right)^{(m)} + \left(\sum_{k=m+1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)^{(m)}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)^{(m)} + \left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} m!(x - x_0)^0\right) + \left(\sum_{k=m+1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)^{(m)}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)^{(m)} + \left(f^{(m)}(x_0)\right) + \left(\sum_{k=m+1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)^{(m)} \implies$$
$$\implies T_n^{(m)}(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} 0\right) + \left(f^{(m)}(x_0)\right) + \left(\sum_{k=m+1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} 0\right) = f^{(m)}(x_0)$$

■

9.6.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Theorem Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (локальная формула Тейлора)
Если $\exists f^{(n)}(x_0)$, т.е. существует n-ая производная в точке x_0
(следовательно, функция $n-1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0), то
$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \overline{o}((x-x_0)^n)$

Proof:

1. По правилу Лопиталя:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$
Для полученного выражения нельзя применить правило Лопиталя, т.к. $f^{(n-1)}$
может быть не дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0
(из условия следует, только то, что $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0)
2. Для $f^{(n-1)} - T_n^{(n-1)}$ существует производная в точке $x_0 \implies$
$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0) + \overline{o}(x-x_0)$
$T_n^{(n-1)}(x) = T_n^{(n-1)}(x_0) + T_n^{(n)}(x_0)(x-x_0) + \overline{o}(x-x_0)$
3. По свойству многочлена Тейлора: $f^{(n-1)}(x_0) = T_n^{(n-1)}(x_0) \wedge f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0)$
Тогда $f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x) = \overline{o}(x-x_0) - \overline{o}(x-x_0) = \overline{o}(x-x_0) \implies$
$$\implies \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overline{o}(x-x_0)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overline{o}(1)}{n!} = 0 \implies$$
$$\implies \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \implies f(x)-T_n(x) = \overline{o}((x-x_0)^n) \text{ при } x\to x_0 \text{ (по определению о-малого)}$$

■

Example (Локальная формула Тейлора для синуса)
$f(x) = \sin x, x_0 = 0$, тогда $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$
$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \mod 2 \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}}, \text{otherwise} \end{cases}$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \overline{o}(x^{2n+1})$$

Example (Локальная формула Тейлора для косинуса)
$f(x) = \cos x, x_0 = 0$, тогда $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$
$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, k \equiv 1 \mod 2 \\ (-1)^{\frac{k}{2}}, \text{otherwise} \end{cases}$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \overline{o}(x^{2n})$$

Example (Локальная формула Тейлора для экспоненциальной функции)
$f(x) = e^x, x_0 = 0$, тогда $f^{(k)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \overline{o}(x^n)$$

Example (Пример использования локальной формулы Тейлора для подсчёта предела)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + \overline{o}(x^3))}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \overline{o}(x^3) - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + \overline{o}(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \overline{o}(x^3)} = 1 \tag{9.2}$$

9.6.4 Теорема о единственности локальной формулы Тейлора

Theorem Теорема о единственности локальной формулы Тейлора
Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $f(x) = P_n(x) + \overline{o}((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$
($P_n(x)$ - многочлен от $x, \deg P_n(x) \le n$)
то $P_n(x) = T_n(x)$

Proof:

1. Функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке $x_0 \implies f(x) = T_n(x) + \overline{o}((x - x_0)^n)$
2. $P_n(x) - T_n(x) = \overline{o}((x - x_0)^n)$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right)(x - x_0)^k = \overline{o}((x - x_0)^n)$$

Перейдём к пределу: $\implies a_0 - \dfrac{f(x_0)}{0!} = 0 \implies a_0 = \dfrac{f(x_0)}{0!}$

Разделим на $x - x_0$ и снова перейдём к пределу и снова перейдём к пределу $\implies a_1 = \dfrac{f'(x_0)}{1!}$

Повторив это ещё $n - 1$ раз, получим, что $\forall k : a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

■

9.6.5 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Theorem Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Если функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема на интервале $(a;b), a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a < x_0, x < b$, то $\exists c = c(x) \in (\min(x_0;x); \max(x_0;x))$:
$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Proof:

1. Рассмотрим функцию $\gamma(t) = f(x) - T_n(t;x) - \dfrac{(x-t)^{n+1}R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$, где $T_n(t;x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$

$\gamma(t)$ дифференцируема по t на $(\min(x_0;x); \max(x_0,x))$, также
$\gamma(x_0) = f(x) - T_n(x_0;x) - R_n(x) = f(x) - f(x) = 0$
$\gamma(x) = f(x) - T_n(x;x) = f(x) - f(x) = 0$
Тогда по т. Ролля $\exists c \in (\min(x_0;x); \max(x_0,x)) : \gamma'(c) = 0$

$$\gamma'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right) + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} =$$

$$= -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + f'(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

2. $\gamma'(c) = 0 \implies$

$$\implies \frac{(n+1)(x-c)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = 0 \implies$$

$$\implies R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

■

Example (Пример для функции синус)

$\forall x \in \mathbb{R} : \left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right| \le \frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Example (Пример для экспоненты)

$$f(x) = e^x, T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$\forall x \in \mathbb{R} : |T_n(x) - e^x| = |R_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, т.к. $c = c(x;x_0) \in (x_0;x) = (0;x)$

9.6.6 Определение точки возрастания

Definition: Точка возрастания

x_0 - точка возрастания, если:
$\exists \delta > 0\, \forall x \in U_\delta(x_0)$:
$(x_0 < x \implies f(x_0) < f(x)) \wedge (x < x_0 \implies f(x) < f(x_0))$

9.6.7 Определение точки убывания

Definition: Точка убывания

x_0 - точка убывания, если:
$\exists \delta > 0 \, \forall x \in U_\delta(x_0):$
$(x_0 < x \implies f(x_0) > f(x)) \land (x < x_0 \implies f(x) > f(x_0))$

9.6.8 Теорема о функции, имеющей ровно n - 1 ненулевых производных

Theorem

Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и выполнено:
$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : f^{(i)}(x_0) = 0$
$f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то

- $n = 2k$: Если $f^{(2k)}(x_0) > 0$, то x_0 - точка min
  Если $f^{(2k)}(x_0) < 0$, то x_0 - точка max
- $n = 2k+1$: Если $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$, то x_0 - точка возрастания
  Если $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$, то x_0 - точка убывания

Proof:

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \overline{o}((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \overline{o}(1)\right)(x - x_0)^n$$

2. Для случая, когда $n = 2k$, докажем при $f^{(n)}(x_0) > 0$, для второго случая аналогично:

Т.к. $\overline{o}(1)$ - б.м. при $x \to x_0$, то

$$\exists \delta > 0 \, \forall x \in U_\delta(x_0): \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \overline{o}(1)\right) > 0$$

Тогда $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0): \; f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \overline{o}(1)\right)(x - x_0)^{2k} > 0$

3. Для случая, когда $n = 2k+1$, докажем при $f^{(n)}(x_0) > 0$, для второго случая аналогично:

Аналогично пункту 2 $\exists \delta > 0 \, \forall x \in U_\delta(x_0): \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \overline{o}(1)\right) > 0$

При $x \in (x_0; x_0 + \delta): \; (x - x_0)^{2k+1} > 0$

При $x \in (x_0 - \delta; x_0): \; (x - x_0)^{2k+1} < 0$

Тогда при $x \in (x_0; x_0 + \delta): f(x) - f(x_0) > 0$

Тогда при $x \in (x_0 - \delta; x_0): f(x) - f(x_0) < 0$

■

Chapter 10

Интегрирование функций

10.1 Определение первообразной

Definition

Пусть $f(x)$ определена на $(a;b), a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
Первообразной к функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, определённая на $(a;b)$, что $F'(x) = f(x)$

Example
Первообразной к $\frac{1}{1+x^2}$ будет $\arctan(x)$
Первообразной к $\frac{1}{1+x^2}$ будет $\arctan(x) + 1$
Первообразной к $\frac{1}{1+x^2}$ будет $\arctan(x) + \pi$

10.2 Свойство первообразных

Theorem Свойство первообразных
Пусть $f(x)$ определена на $(a;b), a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные к $f(x)$ на $(a;b)$, то
$F_1(x) - F_2(x) = const$

Proof:

$$F_1(x) \text{ и } F_2(x) \text{ дифференцируемы на } (a;b) \text{ и непрерывны на } [a;b]$$
$$\text{Тогда по теореме 9.5.18 : } F_1(x) - F_2(x) = const \text{ на } [a;b]$$

■

Example
$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$, т.к.
При $x > 0 : \ln'(x) = \frac{1}{x}$
При $x < 0 : \ln'(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$
При этом, т.к. $D_{\ln} = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, то можно привести пример, когда предыдущая теорема не выполняется на $D_{\ln}$:
$F_1(x) = \ln|x|$
$F_2(x) = \begin{cases} \ln x, x > 0 \\ \ln(-x) + 2, x < 0 \end{cases}$

10.3 Неопределённый интеграл

10.3.1 Определение неопределённого интеграла

Definition: Неопределённый интеграл

Неопределённым интегралом для $f(x)$ на $(a;b)$ называется множество первообразных $f(x)$
Обозначение: $\int f(x)dx = \{F(x)+C\}_{C\in\mathbb{R}}$
На практике пишут $\int f(x)dx = F(x)+C$ и используют интеграл как функцию

10.3.2 Свойства неопределённого интеграла

Note

Свойства неопределённого интеграла

- $\int 1\cdot dF(x) = \int dF(x) = F(x)+C, C\in\mathbb{R}$
- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
  $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
- $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

10.3.3 Теорема об интеграле сложной функции

Theorem Теорема об интеграле сложной функции

Если $F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $(a;b)$ и $\phi(t)$ дифференцируема на $(c;d)$, причём $\phi((c;d))\subseteq(a;b)$, то

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))+C, C\in\mathbb{R}$$

Proof:

$$(F(\phi(t)))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

■

10.3.4 Формула подстановки

Claim Формула подстановки

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\phi(t)}$$

Проведём занесение функции под знак дифференциала:

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(\phi(t))d\phi(t) = \int f(x)dx|_{x=\phi(t)}$$

Example

$$\int \sin x^2 dx^2 = -cos x^2 + C, C\mathbb{R}$$

Example

$$\int xe^{\frac{-x^2}{2}}dx = -\int e^{\frac{-x^2}{2}}d\left(\frac{-x^2}{2}\right) = -e^{\frac{-x^2}{2}} + C, C \in \mathbb{R}$$

10.3.5 Формула замены переменных

Claim Формула замены переменных

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt|_{t=\phi^{-1}(x)}, \text{ если } \phi \text{ обратима}$$

Example

$x \in (-1; 1)$:
$\int\sqrt{1-x^2}dx = \left|x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\right| = \int \cos t d \sin t = \int \cos^2 t dt = \int \frac{\cos 2t+1}{2}dt = \frac{1}{2}\left(\int \cos 2t dt + \int 1 dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + t + C\right) = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + \frac{1}{2}\arcsin x + C$

10.3.6 Интегрирование по частям

Theorem Формула интегрирования по частям

$f(x)$ и $g(x)$ - дифференцируемы на $(a; b)$
$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$

Proof:

$$d(f(x)g(x)) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$
$$\int d(f(x)g(x)) = \int g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$
$$f(x)g(x) = \int (g(x)df(x) + f(x)dg(x))$$
$$f(x)g(x) - \int g(x)df(x) = \int f(x)dg(x)$$

■

Example

$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C, c \in \mathbb{R}$

Example

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + C, C \in \mathbb{R}$$

10.4 Определённый интеграл

10.4.1 Разбиение, диаметр разбиения, разметка разбиения

Definition: Разбиение отрезка

Разбиением отрезка $[a;b]$ называется множество
$\tau = \{[x_{i-1};x_i]\}_{i=1}^{n}$,
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Example (Пример разбиения)

$[a;b] = [0;2]$
$n = 5, \tau = \{[0;0.5],[0.5,1],[1;1.5],[1.5;1.75],[1.75,2]\}$
$a = 0 = x_0 < x_1 = 0.5 < x_2 = 1 < x_3 = 1.5 < x_4 = 1.75 < x_5 = 2 = b$

Definition: Измельчение разбиения

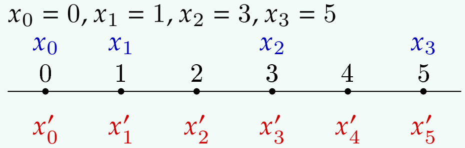
Пусть даны 2 разбиения:
$\tau = \{[x_{i-1};x_i]\}_{i=1}^{n}$
$\tau' = \{[x'_{j-1};x'_j]\}_{j=1}^{k}$
τ' является измельчением τ, если $\forall i\, \exists j : x_i = x'_j$
Обозначение: $\tau' \succ \tau$

Note

Если $\tau' \succ \tau$, то $k \geq n$, причём $k = n \iff \tau' = \tau$

Example (Пример измельчения разбиения)

$[a;b] = [0;5]$
$n = 3, \tau = \{[0;1],[1;3],[3;5]\}$
$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$



$k = 5, \tau' = \{[0;1],[1;2],[2;3],[3;4],[4;5]\}$
$x'_0 = 0, x'_1 = 1, x'_2 = 2, x'_3 = 3, x'_4 = 4, x'_5 = 5$

Definition: Диаметр разбиения

Диаметр разбиения - это $d(\tau) = \max\limits_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1}) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\Delta x_i$

Definition: Разметка разбиения

Разметка разбиения - это множество $\{\xi_i | \xi_i \in [x_{i-1};x_i]\}_{i=1}^{n}$
Разбиение, у которого есть разметка, называется размеченным разбиением

10.4.2 Интегральная сумма Римана

Definition: Интегральная сумма Римана

Интегральная сумма (Римана) - это

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

10.4.3 Определение определённого интеграла по Коши

Definition: Определение определённого интеграла по Коши

Число I называется определённым интегралом $f(x)$ на $[a;b]$, если
$\forall \varepsilon > 0\,\exists \delta > 0\,\forall \tau : d(\tau) < \delta\,\forall$ разметки $\{\xi_i\}_{i=1}^{n} : |\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$

10.4.4 Определение определённого интеграла по Гейне

Definition: Определение определённого интеграла по Гейне

Число I называется определённым интегралом $f(x)$ на $[a;b]$, если
$\forall$ послед. $\tau_k : d(\tau_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,\forall\{\xi_i^k\}_{i=1}^{n} : \sigma_{\tau_k}(f) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I$

10.4.5 Определение функции, интегрируемой по Риману

Definition: Определение интегрируемости по Риману

Функция $f(x)$ интегрируема по Риману, если $\exists I \in \mathbb{R}$, т.ч. выполняется определение по Коши 10.4.3
Обозначения:
$f(x) \in R[a;b]$, где $R[a;b]$ - множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$
$I = \int_a^b f(x)dx$

Example

Пример функции, не интегрируемой по Риману:
На отрезке $[0;1]$ рассмотрим функцию Дирихле: $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
Выберем первую разметку такую, что $\forall i \in \{1,\dots,n\} : \xi_i \in \mathbb{Q}$
Тогда $\sigma_\tau(D) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a = 1 - 0 = 1$
Выберем вторую разметку такую, что $\forall i \in \{1,\dots,n\} : \xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Тогда $\sigma_\tau(D) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0$

10.4.6 Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке

Theorem Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке

Функция, $f(x)$ интегрируемая на $[a;b]$, ограничена на $[a;b]$

Proof:

1. Предположим от противного, т.е. функция не ограничена на отрезке
По определению интегрируемости для $\varepsilon = 1$:
$\exists \delta > 0 \, \forall \tau : d(\tau) < \delta \, \forall \{\xi_i\}_{i=1}^n : |\sigma_\tau(f) - I| < 1$
Зафиксируем τ. Хотя бы на 1 элементе τ $f(x)$ не ограничена. БОО это первый отрезок $[x_0; x_1]$
Зафиксируем разметку везде кроме 1-ого отрезка: $\xi_2, \xi_3, ...\xi_n$
$|\sigma_\tau(f)| - |I| \leq |\sigma_\tau(f) - I| \implies |\sigma_\tau(f)| < |I| + 1$
$$|f(\xi_1)|\Delta x_1 - \sum_{i=2}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i \leq |\sigma_\tau(f)| \implies |f(\xi_1)|\Delta x_1 < |I| + 1 + \sum_{i=2}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$$
$$|f(\xi_1)| < \frac{|I| + 1 + \sum_{i=2}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i}{\Delta x_1}$$
Обозначим $C = \dfrac{|I| + 1 + \sum_{i=2}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i}{\Delta x_1} > 0$
Получили: $\forall \xi_1 \in [x_0; x_1] : |f(\xi_1)| < C$
Но на отрезке $[x_0; x_1]$ функция не ограничена $\implies$ W

■

10.4.7 Суммы Дарбу

Нижняя сумма Дарбу

Definition: Нижняя сумма Дарбу

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, дано разбиение τ, тогда нижней суммой Дарбу называется $s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, где $\forall i : m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$

Верхняя сумма Дарбу

Definition: Верхняя сумма Дарбу

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, дано разбиение τ, тогда верхней суммой Дарбу называется $S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, где $\forall i : M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$

Свойства сумм Дарбу

Claim Свойства сумм Дарбу

- s_τ, S_τ определены, если $f(x)$ ограничена, т.е. $s_\tau \in \mathbb{R} \wedge S_\tau \in \mathbb{R}$
- Если $\tau' \succ \tau$, то:
  $S_{\tau'} \leq S_\tau$
  $s_{\tau'} \geq s_\tau$
- $\forall \tau_1, \tau_2 : s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$
- $s_\tau = \inf\limits_{\{\xi_i\}_{i=1}^n} \sigma_\tau(f)$ - инфинум по всем разметкам
  $S_\tau = \sup\limits_{\{\xi_i\}_{i=1}^n} \sigma_\tau(f)$ - супремум по всем разметкам

Докажем 2-е свойство для нижних сумм Дарбу:

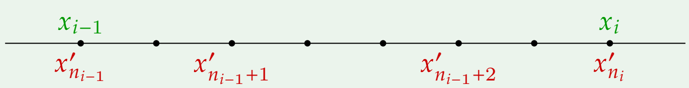
Proof:

Докажем для нижних сумм, для верхних сумм аналогично:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$s_{\tau'} = \sum_{j=1}^{k} m'_j \Delta x'_j$$

$$\forall i\, \exists n_{i-1} < n_i : \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} \Delta x'_j = \Delta x_i \text{ и } \cup_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} [x'_{j-1}; x'_j] = [x_{i-1}; x_i]$$



Т.к. m_i - $\inf f(x)$ на всём отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, то $\forall j \in \{n_{i-1}+1, ..., n_i\} : m'_j \geq m_i$

Тогда $m'_j \Delta x'_j \geq m_i \Delta x'_j$

Следовательно, $\displaystyle\sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} m'_j \Delta x'_j \geq \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} m_i \Delta x'_j = m_i \Delta x_i$

Тогда $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} m'_j \Delta x'_j \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \implies s'_\tau \geq s_\tau$

■

Докажем 3-е свойство:

Proof:

Рассмотрим разбиение τ, состоящее из точек τ_1 и τ_2, тогда $\tau \succ \tau_1, \tau_2$

Следовательно, по 2-му свойству сумм Дарбу: $s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}$

■

Докажем 4-е свойство:

Proof:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \inf_{\{\xi_i\}_{i=1}^n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \inf_{\{\xi_i\}_{i=1}^n} \sigma_\tau(f)$$

■

Интегралы Дарбу

Definition: Верхний интеграл Дарбу

Верхним интегралом Дарбу называется $I^* = \inf\limits_{\tau} S_\tau$ - инфинум верхних сумм Дарбу по всем разбиениям

Definition: Нижний интеграл Дарбу

Нижним интегралом Дарбу называется $I_* = \sup\limits_{\tau} s_\tau$ - супремум нижних сумм Дарбу по всем разбиениям

Clarification Уточнение

$s_\tau \le S_\tau \implies I_* \le I^*$

10.4.8 Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Lemma Лемма 1

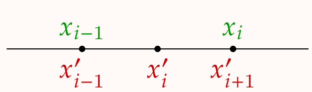
Пусть $\tau' > \tau$ и у τ' на p точек (т.е. границ отрезков) больше, чем у τ

Тогда $0 \le S_\tau - S_{\tau'} \le (M - m) \cdot p \cdot \delta$, где $\delta > d(\tau)$, $m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x) \in \mathbb{R}$, $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x) \in \mathbb{R}$

Proof:

1. $S_\tau - S_{\tau'} \ge 0$ по свойству 2 сумм Дарбу 10.4.7
2. Рассмотрим случай, когда $p = 1$

Пусть граница отрезка, которая есть в τ', но которой нет в τ, имеет индекс i



$$S_\tau = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j, \text{ где } M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x)$$

$$S_{\tau'} = \sum_{j=1}^{n+1} M'_j \Delta x'_j, \text{ где } M'_j = \sup_{x \in [x'_{j-1}; x'_j]} f(x)$$

Причём $\forall j < i : x_j = x'_j \land M_j = M'_j$ и $x_i = x'_{i+1}$ и $\forall j > i : x_j = x'_{j+1} \land M_j = M'_{j+1}$

Тогда $S_\tau - S_{\tau'} = M_i \Delta x_i - (M'_i \Delta x'_i + M'_{i+1} \Delta x'_{i+1}) = M_i(\Delta x'_i + \Delta x'_{i+1}) - (M'_i \Delta x'_i + M'_{i+1} \Delta x'_{i+1}) =$

$= (M_i - M'_i)\Delta x'_i + (M_i - M'_{i+1})\Delta x'_{i+1} \le \big|\text{т.к. } M_i \le M \text{ и } M'_i \ge m\big| \le (M - m)\Delta x'_i + (M - m)\Delta x'_{i+1} =$

$= (M - m)\Delta x_i \le (M - m) \cdot d(\tau) < (M - m) \cdot \delta$

3. Для p > 1 доказывается итерационно, сводя для каждой из p точек измельчения τ' к пункту 2. ∎

Lemma Лемма Дарбу

Пусть дан отрезок $[a;b]$ и функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, тогда

$$I^* = \lim_{d\to 0} S_\tau$$

Это означает, что $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall\tau : d(\tau) < \delta : |S_\tau - I^*| < \varepsilon$

Proof:

1. Если $m = M$, то функция - константа на отрезке $[a;b]$, тогда все верхние суммы равны $f(a)\cdot(b-a) \implies I^* = f(a)\cdot(b-a)$, т.к. I^* - это инфинум верхних сумм по всем разбиениям
2. Иначе, если $m \neq M$, то $m < M$

Пусть дано $\varepsilon > 0$, тогда

$I^* = \inf\limits_\tau S_\tau \implies \exists\tau^* : |S_{\tau^*} - I^*| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

I^* - инфинум всех верхних сумм $\implies S_{\tau^*} \geq I^* \implies S_{\tau^*} - I^* < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Пусть в τ^* p точек (границ отрезков внутри $(a;b)$), т.е. τ^* состоит из $p+1$ отрезка

Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(M-n)p}$

Построено δ, тогда пусть дано разбиение τ т.ч. $d(\tau) < \delta$

Составим разбиение τ' из границ отрезков разбиений τ и τ^*, тогда $\tau' > \tau \wedge \tau' > \tau^*$,
и при этом в τ' не более чем на p больше точек (границ отрезков), чем в τ, тогда по Лемме 1

$0 \leq S_\tau - S_{\tau'} \leq (M-m)\cdot p\cdot\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

(если в τ' меньше, чем на p больше точек, чем в τ, то неравенство также выполняется)

τ' - измельчение τ^* по построению $\implies S_{\tau'} \leq S_{\tau^*}$

I^* - инфинум всех верхних сумм $\implies S_{\tau'} \geq I^* \implies I^* \leq S_{\tau'} \leq S_{\tau^*}$

$S_{\tau^*} - I^* < \dfrac{\varepsilon}{2} \implies S_{\tau'} - I^* < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq S_\tau - S_{\tau'} < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \leq S_{\tau'} - I^* < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \implies 0 \leq S_\tau - I^* < \varepsilon \implies |S_\tau - I^*| < \varepsilon$$

■

Note

Аналогичная лемма верна и для случая нижних сумм:

$$I_* = \lim_{d\to 0} s_\tau$$

Theorem Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b] \iff I^* = I_*$
Используя введённые обозначения, $f(x) \in R[a;b] \iff f(x)$ ограничена и $I^* = I_*$

Proof:

" $\implies$ "

Предположим от противного, т.е. функция интегрируема и $I_* \neq I^* \implies I_* < I^*$

По определению интегрируемости:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \tau : d(\tau) < \delta \forall \{\xi_i\}_{i=1}^n : |\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$

$|\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon \implies I - \varepsilon < \sigma_\tau(f) < I + \varepsilon \implies I - \varepsilon \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \varepsilon$ по сво-ву 4

$s_\tau \leq I_* < I^* \leq S_\tau \implies S_\tau - s_\tau \geq I^* - I_* > 0$, но при этом $\forall \varepsilon > 0 : S_\tau - s_\tau \leq 2\varepsilon \implies$ W

" $\impliedby$ "

Обозначим $I = I_* = I^*$ и покажем, что выполняется определение, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \tau : d(\tau) < \delta\, \forall \{\xi_i\}_{i=1}^n : |\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$

$|\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon \implies I - \varepsilon < \sigma_\tau(f) < I + \varepsilon$

По определению сумм Дарбу $s_\tau \leq \sigma_\tau(f) \leq S_\tau$

По лемме Дарбу $\exists \delta_1 > d(\tau) : S_\tau < I^* + \varepsilon$

аналогично $\exists \delta_2 > d(\tau) : s_\tau > I_* - \varepsilon$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда: $I_* - \varepsilon < \sigma_\tau(f) < I^* + \varepsilon \implies I - \varepsilon < \sigma_\tau(f) < I^* + \varepsilon = I + \varepsilon$

■

10.4.9 Определение равномерной непрерывности

Definition: Определение равномерной непрерывности

Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на $E \subseteq \mathbb{R}$, если
$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Note

$f(x)$ равномерно непрерывна на $E \implies f(x)$ непрерывна на E, но обратное, вообще говоря, не верно

Example (Пример к замечанию)

$E = (0;1), f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x)$ непрерывна на E, покажем, что равномерной непрерывности нет:
Рассмотрим последовательность аргументов: $x_n = \frac{1}{n}$, тогда $x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$,
но при этом $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 1$
Положим $\varepsilon = 0.5$, тогда т.к. $x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$, то можно выбрать x_i и x_j, т.ч. $|x_i - x_j| < \delta(0.5)$, но при этом $|f(x_1) - f(x_2)| = 1 > 0.5 = \varepsilon$

10.4.10 Теорема Кантора

Theorem Теорема Кантора (для случая функции на отрезке)
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$

Proof:

Предположим от противного, тогда в отрицании определения выберем конкретные значения δ:
$\exists\varepsilon_0\,\forall\delta = \dfrac{1}{n}\,\exists x'_n, x''_n \in [a;b] : |x'_n - x''_n| < \dfrac{1}{n} : \left|f\left(x'_n\right) - f\left(x''_n\right)\right| > \varepsilon_0$
Ч.п. $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ ограничены $\implies$ по теореме Больцано-Вейерштрасса из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности: $\exists x'_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\to} x_0 \in [a;b]$
При этом по теореме о зажатой последовательности $x''_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\to} x_0$
$f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда по определению непрерывности в точке по Гейне:
$f\left(x'_{n_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\to} f(x_0)$
$f\left(x''_{n_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\to} f(x_0)$
Но по предположению $\left|f\left(x'_n\right) - f\left(x''_n\right)\right| > \varepsilon_0 \implies$ W

■

10.4.11 Теорема об интегрируемости непрерывной функции

Theorem Теорема об интегрируемости непрерывной функции
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $f(x) \in R[a;b]$

Proof:

1.$f(x)$ непрерывна на $[a;b] \implies$ по теореме Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$, тогда по определению: $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x_1, x_2 \in [a;b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
2. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим разбиение τ отрезка $[a;b]$ с диаметром $d(\tau) < \delta$, тогда
$0 \le I^* - I_* \le S_\tau - s_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(\eta_i)\right)\Delta x_i$, т.к. f непрерывна на $[a;b]$
$\forall i : |\xi_i - \eta_i| \le d(\tau) < \delta \implies |f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \varepsilon \implies 0 \le f(\xi_i) - f(\eta_i) < \varepsilon$
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(\eta_i)\right)\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon\Delta x_i = \varepsilon\cdot(b-a)$
$I^* - I_*$ - неотрицательное число, и при этом $\forall\varepsilon > 0 : I^* - I_* < \varepsilon(b-a) \implies I^* - I_* = 0$

■

10.4.12 Теорема об интегрируемости монотонной функции

Theorem Теорема об интегрируемости монотонной функции

Если $f(x)$ определена и монотонна на $[a;b]$, то $f(x) \in R[a;b]$

Proof:

БОО докажем для неубывающей функции

1. Для любого $\delta > 0$ рассмотрим разбиение τ отрезка $[a;b]$ с диаметром $d(\tau) < \delta$, тогда

$$0 \le I^* - I_* \le S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\delta =$$

$$= \delta \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) = \delta\left(f(b) - f(a)\right)$$

$I^* - I_*$ - неотрицательное число, и при этом $\forall \delta > 0 : I^* - I_* < \delta\left(f(b) - f(a)\right) \implies I^* - I_* = 0$

■

10.4.13 Элементы теории меры

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Theorem Критерий Лебега интегрируемости по Риману (без док-ва)

Функция $f(x) \in R[a;b] \iff$ функция $f(x)$ ограничена и множество точек разрыва функции - множество меры ноль по Лебегу

Определение множества меры ноль по Лебегу

Definition: Определение множества меры ноль по Лебегу

Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ называется множеством нулевой меры Лебега, если
$\forall \varepsilon > 0\, \exists$ не более чем счётный набор интервалов $\{(a_i; b_i)\}_{i=1}^{+\infty}$, такой что
1. $E \subseteq \cup_{i=1}^{+\infty}(a_i; b_i)$, т.е. объединение всех интервалов покрывает множество E
2. $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i - a_i \le \varepsilon$

Обозначение: $\mu(E) = 0$

Example (Пример множества меры ноль по Лебегу)

Покажем, что $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ - множество нулевой меры Лебега

Proof:

1. $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \implies \mathbb{Q} = \{q_i\}_{i=1}^{+\infty}$
2. $\forall i \in \mathbb{N} : (a_i; b_i) = U_{\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}}(q_i) \implies \mathbb{Q} \subseteq \cup_{i=1}^{+\infty}(a_i; b_i)$
3. При этом $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} b_i - a_i = \sum_{i=1}^{+\infty} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon \le \varepsilon$

■

Свойства множеств меры ноль по Лебегу

Theorem Свойства множеств меры ноль по Лебегу

1. Если $A \subseteq \mathbb{R}$ нулевой меры Лебега и $B \subseteq A$, то B тоже множество нулевой меры Лебега (это свойство меры называется полнотой)
2. Если множества X, Y - нулевой меры Лебега, то $X \cup Y$ - нулевой меры Лебега

Докажем 1-е свойство:

Proof:

$\forall \varepsilon > 0$ по определению множества меры ноль по Лебегу построим покрытие

множества $A : \{(a_i; b_i)\}_{i=1}^{+\infty}$, т.ч. $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i - a_i \leq \varepsilon$

$B \subseteq A \implies B \subseteq \cup_{i=1}^{+\infty}(a_i; b_i)$

■

Докажем 2-е свойство:

Proof:

Пусть дано $\varepsilon > 0$, тогда:

Для $\frac{\varepsilon}{2}$ по определению множества нулевой меры Лебега построим покрытия для множеств X и Y: $\{(a_i; b_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ и $\{(c_i; d_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ соответственно

Тогда для множества $X \cup Y$ построим покрытие $\{(e_i; f_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ такое что

$$e_i = \begin{cases} a_j, i = 2j \\ c_j, i = 2j + 1 \end{cases}$$

$$f_i = \begin{cases} b_j, i = 2j \\ d_j, i = 2j + 1 \end{cases}$$

Тогда $X \cup Y \subseteq \cup_{i=1}^{+\infty}(e_i; f_i)$ и:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left|f_i - e_i\right| = \sum_{j=1}^{+\infty} |b_j - a_j| + \sum_{j=1}^{+\infty} |d_j - c_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

Note

Из 1 и 2 свойств следует, что разность, пересечение и симметрическая разность множеств нулевой меры Лебега - также множества нулевой меры Лебега

10.4.14 Свойства определённого интеграла

Theorem Свойства определённого интеграла

1. Линейность:
   Пусть $f, g \in R[a;b]$, тогда
   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \in R[a;b] \wedge \int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
2. Если $f, g \in R[a;b]$, то $f \cdot g \in R[a;b] \wedge |f| \in R[a;b]$
   (здесь $f \cdot g$ - это произведение, а не композиция, т.е. $\forall x \in \mathbb{R} : (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$)
3. Аддетивность: если $f \in R[a;c]$, и $b \in [a;c]$ то:
   $f \in R[a;b] \cup R[b;c]$ и $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
4. Интегрируемось неравенств: $f, g \in R[a;b]$ и $\forall x \in [a;b] : f(x) \leq g(x)$, то:
   $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
5. Теорема о среднем:
   Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\exists \xi \in [a;b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$
6. Оценка интеграла:
   Если $f(x) \in R[a;b]$, то:
   $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right| dx$

Докажем 1-е свойство:

Proof:

1. По критерию Лебега интегрируемости по Риману: f, g - ограниченные на $[a;b]$ функции и
X_f - множество точек разрыва функции f и при этом $\mu(X_f) = 0$
X_g - множество точек разрыва функции g и при этом $\mu(X_g) = 0$
Пусть $X_{\alpha f + \beta g}$ - множество точек разрыва непрерывной на $[a;b]$ функции $\alpha f + \beta g$
$X_{\alpha f + \beta g} \subseteq X_f \cup X_g \implies \mu(X_{\alpha f + \beta g}) = 0$
Тогда по критерию Лебега интегрируемости по Риману $\alpha f + \beta g \in R[a;b]$
2. Рассмотрим последовательность разбиений τ_k:$\forall \tau_k \forall \{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty} \sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_\tau(f) + \beta \sigma_\tau(g)$, т.к.

$$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)\right) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \alpha \sigma_\tau(f) + \beta \sigma_\tau(g)$$

По определению Гейне интегрируемости по Риману:

$$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx$$

$$\alpha \sigma_\tau(f) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha \int_a^b f(x)dx$$

$$\beta \sigma_\tau(g) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$\implies \int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

■

2-е свойство:

2-е свойство доказывается аналогично 1-ому доказательству, т.к. множества точек разрыва функций $f \cdot g$ и $|f|$ - множества меры ноль по Лебегу и эти функции непрерывны на $[a;b]$

Докажем 3-е свойство:

Proof:

1. $f \in R[a;c] \implies$ и на отрезках $[a;b]$ и $[b;c]$ она непрерывна и её множества точек разрыва на этих отрезках тоже множества меры ноль по Лебегу $\implies f \in R[a;b] \wedge f \in R[b;c]$
2. По определению интегрируемости по Гейне:

$\forall \tau_k$ разбиения отрезка $[a;c]$ т.ч. $d(\tau_k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0 \, \forall \{\xi_i^k\}_{i=1}^n : \sigma_{\tau_k}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^k)\Delta x^k \underset{k\to+\infty}{\to} \int_a^c f(x)dx$

Будем рассматривать последовательность τ_k^0, такую что точка b является точкой данного разбиения, т.е. является границей одного из отрезков
(вообще говоря, если $a < b < c$, то 2-ых отрезков)

Тогда $\tau_k^0 = \tau_k^1 \cup \tau_k^2$, где τ_k^1 - разбиение $[a;b]$, τ_k^2 - разбиение $[b;c]$

Следовательно, $\sigma_{\tau_k^0}(f) = \sigma_{\tau_k^1}(f) + \sigma_{\tau_k^2}(f)$

По 1 пункту и интегрируемости по Гейне:

$\sigma_{\tau_k^1}(f) \underset{k\to+\infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$

$\sigma_{\tau_k^2}(f) \underset{k\to+\infty}{\to} \int_b^c f(x)dx$

Тогда $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

■

Докажем 4-е свойство:

Proof:

Рассмотрим $h(x) = g(x) - f(x) \in R[a;b]$. $\forall x \in [a;b] : h(x) \geq 0$

Тогда $\forall \tau : \sigma_\tau(f) \geq 0 \implies \int_a^b h(x)dx \geq 0 \implies \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \implies \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

■

Докажем 5-е свойство (формально, теорему о среднем для интегралов)

Proof:

1. т.к. f непрерывна на $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b] : m \leq f(x) \leq M$, где $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x) \in \mathbb{R}$ и $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x) \in \mathbb{R}$

2. По 4-ому свойству определённых интегралов:

$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$

f - непрерывная функция на $[a;b] \implies E_f = [m;M] \implies \exists \xi \in [a;b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

■

Докажем 6-е свойство:

Proof:

1. $\forall x \in [a;b] : -\left|f(x)\right| \le f(x) \le \left|f(x)\right|$

$f \in R[a;b] \implies \int_a^b -\left|f(x)\right| dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx \implies$

$\implies -\int_a^b \left|f(x)\right| dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx \implies \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx$

■

10.5 Обобщённое понятие интеграла

Claim Обобщённое понятие интеграла

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ (если $f \in R[\min(a;b); \max(a;b)]$) доопределим:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Note

$\forall c_1, c_2, c_3 \in [a;b]$:

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx$$

Note

Уточним оценку интеграла (6-е свойство):

$$\forall c_1, c_2 \in [a;b] : \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| \le \left|\int_{c_1}^{c_2} \left|f(x)\right| dx\right|$$

10.5.1 Интеграл с переменным верхним пределом

Definition: Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $f \in R[\alpha;\beta]$ и $a, x \in [\alpha;\beta]$, тогда введём функцию F, т.ч.:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Заметим, что $F(a) = 0$

10.5.2 Теорема 1 об интеграле с переменным верхним пределом

Theorem Теорема 1 об интеграле с переменным верхним пределом

$F(x)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$

Proof:

1. Обозначим $M = \left|\sup\limits_{x\in[\alpha;\beta]} f(x)\right| \in \mathbb{R}$

Тогда $\forall x \in [\alpha;\beta] : f(x) \le |f(x)| \le M$

2. $|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \le \left|\int_x^{x+\Delta x} \left|f(t)\right| dt\right| \le$

$\le \left|\int_x^{x+\Delta x} M dt\right| = |M\Delta x| = M|\Delta x|$

$(-M\Delta x \le F(x+\Delta x) - F(x) \le M\Delta x) \wedge \left(M\Delta x \underset{\Delta x\to 0}{\to} 0\right) \implies F(x+\Delta x) - F(x) \underset{\Delta x\to 0}{\to} 0$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} (F(x+\Delta x) - F(x)) = 0 \implies \lim\limits_{\Delta x\to 0} F(x+\Delta x) = F(x)$

■

10.5.3 Теорема 2 об интеграле с переменным верхним пределом

Theorem Теорема 2 об интеграле с переменным верхним пределом

$f(x) \in R[a;b]$ и непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то $F(x)$ дифференцируема на $(\alpha;\beta)$ и $F'(x) = f(x)$

Proof:

$\dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$

$= |$по теореме о среднем $\exists \xi = \xi(\Delta x) \in [\min(x;x+\Delta x); \max(x;x+\Delta x)]| = f(\xi) \underset{\Delta x\to 0}{\to} f(x)$

То есть по определению производной $\forall x \in [\alpha;\beta] : F'(x) = f(x)$

■

10.5.4 Формула Ньютона-Лейбница

Claim Формула Ньютона-Лейбница

Если $\Phi(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $(\alpha;\beta)$ и $f(x)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то $\forall a, b \in [\alpha;\beta]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Proof:

$F(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b)$

$F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $(\alpha;\beta) \implies \exists C \in \mathbb{R}\, \forall x \in (\alpha;\beta) : F(x) = \Phi(x) + C$

$F(a) = \Phi(a) + C \wedge F(a) = 0 \implies C = -\Phi(a) \implies F(b) = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a)$

■

10.5.5 Формула интегрирования по частям

Claim Обозначение

Введём обозначение:
$f(x)|_a^b := f(b) - f(a)$

Theorem Формула интегрирования по частям

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a;b]$ функции (это означает, что и их производные также непрерывны на $[a;b]$), тогда:

$$\int_a^b f(x)d(g(x)) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)d(f(x))$$

Proof:

$1. \forall x \in [a;b] : (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Тогда: $\displaystyle\int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx$

По линейности интеграла: $\displaystyle\int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

По формуле Ньютона-Лейбница: $\displaystyle(f(x)g(x))|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

∎

10.5.6 Формула замены переменной

Theorem Формула замены переменной

Пусть $u(x)$ - непрерывно дифференцируемая на $[p;q]$ функция

$$\left.\begin{array}{l} \forall t \in [p;q] : u(t) \in [\alpha;\beta] \\ f(x) \text{ непрерывна на } [\alpha;\beta] \\ u(p) = a \\ u(q) = b \\ [a;b] \subseteq [\alpha;\beta] \end{array}\right\} \implies \int_a^b f(x)dx = \int_p^q u'(t)f(u(t))dt$$

Proof:

1. пусть $F(x)$ - первообразная $f(x)$ на $(\alpha;\beta)$ ($\exists$, т.к. $f(x)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$)

Тогда по формуле производной сложной функции и определению первообразной:

$F(u(t)) = u'(t)f(u(t))$

По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_p^q f(u(t))u'(t)dt = F(u(q)) - F(u(p)) = F(b) - F(a)$$

∎

10.5.7 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Theorem Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Пусть $f(x)$ определена на $[\alpha;\beta]$ и $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на $(\alpha;\beta)$, тогда $\forall a, x \in (\alpha;\beta)$:
Если $a \neq x$ и $T_n(x)$ - многочлен Тейлора функции f в точке a, то:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt$$

Proof:

По формуле Ньютона-Лейбница: $\displaystyle\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(x)$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) - \int_a^x f'(t)d(x-t) = f(a) - f'(t)(x-t)|_a^x + \int_a^x (x-t)d(f'(t)) =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt = f(a) + f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x f''(t)d((x-t)^2)$$

$$= f(a) + f'(x)(x-a) - \frac{1}{2}\left((f''(t)(x-t)^2)\,|_a^x - \int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt\right) =$$

$$= f(a) + f'(x)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt =$$

$$= f(a) + f'(x)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} - \frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(t)d((x-t)^3) = \dots$$

$$\dots = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

■

10.6 Несобственный интеграл

Definition: Определение несобственного интеграл

Пусть дан полуинтервал $[a;b), b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\forall p \in [a;b) : f(x) \in R[a;p]$, тогда, если существует предел $\lim_{p\to b-}\int_a^p f(x)dx$, то этот lim называется несобственным интегралом $f(x)$ на $[a;b)$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$
Если такой предел существует, то говорят, что интеграл сходится
Если несобственность (в определении выше несобственность в правом конце) в левом конце полуинтервала, то рассматривается правосторонний пределом
Если несобственность в обоих концах, т.е. дан интервал, то рассматриваются 2 предела

Example (Пример несобственности в 2 концах)
$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, (a;b) = (0;+\infty)$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{p\to 0+} \int_p^1 f(x)dx$$

$$\int_p^1 f(x)dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}|_p^1, \alpha \neq 1 \\ \ln(x)|_p^1, \alpha = 1 \end{array} \right. = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \cdot p^{-\alpha+1}, \alpha \neq 1 \\ -\ln\big(p\big), \alpha = 1 \end{array} \right.$$

$$\lim_{p\to 0+} -\ln\big(p\big) = +\infty$$

$$\lim_{p\to 0+} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}|_p^1 = A \in \mathbb{R} \iff -\alpha + 1 > 0$$

Т.е. первый интеграл сходится $\iff \alpha < 1$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{p\to +\infty} \int_1^p f(x)dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}|_1^p, \alpha \neq 1 \\ \ln(x)|_1^p, \alpha = 1 \end{array} \right. = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{1-\alpha} \cdot p^{-\alpha+1} - \frac{1}{1-\alpha}, \alpha \neq 1 \\ \ln\big(p\big), \alpha = 1 \end{array} \right.$$

Аналогично, второй интеграл сходится $\iff -\alpha + 1 < 0 \iff \alpha > 1$
Получили, что данный интеграл (от 0 до $+\infty$) расходится $\forall \alpha$

10.6.1 Свойства несобственного интеграла

Theorem Свойства несобственного интеграла

1. Линейность:
   Пусть дан полуинтервал $[a;b), b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\forall p \in [a;b) : f(x), g(x) \in R[a;p]$, тогда
   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}:$
   $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R[a;b]$ несобственно интегрируемы на $[a;b)$
   $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
2. Выполнимость формулы Лейбница:
   Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b)$, то
   $\int_a^b f(x)dx = F(b-) - F(a) = \lim_{p\to b-} F(p) - F(a)$
3. Формула замены переменной
4. Аддетивность

Example (Пример применения формулы замены переменной)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left| x = tg(t), dx = \frac{dt}{\cos^2(t)} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^{\frac{3}{2}}} \frac{dt}{\cos^2(t)} =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) \frac{dt}{\cos^2(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = 1$$

Definition: Эквивалентность функций

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to b-$, если

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Example

$\sin x \sim x$ при $x \to 0$
$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\ln\left(1 + e^{\frac{-1}{x^2}}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{e^{\frac{-1}{x^2}}}$$

10.6.2 Признаки сходимости несобственных интегралов

Theorem Признаки сходимости несобственных интегралов

1. Сходимость интеграла от неотрицательных функций:
   Пусть дан полуинтервал $[a;b), b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\forall x \in [a;b) : f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0$
   1.1 Признак сравнения
   $\int_a^b f(x)dx = L_1, \int_a^b g(x)dx = L_2, \forall x \in [a;b) : f(x) \leq g(x)$
   L_2 сходится $\implies$ L_1 сходится
   L_1 расходится $\implies$ L_2 расходится
   1.2 Признак сравнения в предельной форме
   $\forall x \in [a;b) : f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$, то:
   $\int_a^b f(x)dx$ сходится $\iff$ сходится $\int_a^b g(x)dx$
2. Знакопеременные функции
   Абсолютная сходимость
   Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется сходящимся абсолютно, если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$
   Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится

Докажем свойство 1.1:

Proof:

$$F(p) = \int_a^p f(x)dx, G(p) = \int_a^p g(x)dx \text{ - монотонные функции по p}$$

(идея доказательства: представить $F(p + \Delta p) = F(p) + I$ по линейности и показать, что $I \geq 0$)

Функции монотонны $\implies$ предел при $p \to b-$ существуют $\iff$ функции ограничены

L_2 сходится $\implies$ L_2 ограничивает сверху $F(p)$ $\implies$ L_1 сходится

L_1 расходится $\implies$ $L_1 = +\infty$, т.к. функция монотонна $\implies$ и L_2 расходится

■

Докажем свойство 1.2:

Proof:

В определении предела по Коши положим: $\varepsilon := \dfrac{1}{2} > 0 \implies$

$$\implies \exists \delta_0 > 0\, \forall x \in (b-\delta_0; b) : \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in (b-\delta_0; b) : \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2} \iff 0 < \frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b-\delta_0} f(x)dx + \int_{b-\delta_0}^b f(x)dx$$

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^{b-\delta_0} g(x)dx + \int_{b-\delta_0}^b g(x)dx$$

Если $\displaystyle\int_{b-\delta_0}^b f(x)dx$ расходится, то и $\displaystyle\int_{b-\delta_0}^b \frac{3}{2}g(x)dx$ расходится

Если $\displaystyle\int_{b-\delta_0}^b g(x)dx$ сходится, то и $\displaystyle\int_{b-\delta_0}^b \frac{1}{2}f(x)dx$ сходится

■

Докажем свойство 2:

Proof:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ 0, f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), f(x) < 0 \\ 0, f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \\ f^+(x) \leq |f(x)| \\ f^-(x) \leq |f(x)| \end{array}\right\} \text{интегралы функций } f^+(x) \text{ и } f^-(x)$$

■

Example (Пример применения признака сравнения в предельной форме)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx \text{ сходится } \implies \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}dx \text{ сходится}$$

Благодарность на нахождение неточностей/опечаток:

- Агузаров Руслан
- Котежов Семён
- Васюков Александр
- Лазаренко Александр
- Кулин Егор
- Михайлов Андрей
- Кожевников Антон
- Тищенко Андрей
- Хадзакос Николай
- Марченко Артём

При нахождении опечаток, если Вам не сложно, Вы можете написать https://t.me/i8088_t, на момент компиляции ник в тг: vova kormilitsyn

Актуальную версию файла (см ver на 1 странице) можно найти по ссылке на wiki странице курса, а также по ссылке на github репозиторий https://github.com/i80287/Calculus-HSE-SE