HSE FCS SE
Calculus-1 2023-2024

Lecturer: Ivan Erlikh
File edited by: vova kormilitsyn

ver. 1.2.5

Теоремы и определения

Definition: Высказывания и n-местные предикаты

Высказывание - это упрощённая модель повествования предложения, такая что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, но не одновременно
n-местные предикат (n-арный предикат) - это выражение, которое превращается в высказывание, если в нём заменить $x_1, x_2, ..., x_n$ на подходящие имена, где $x_1, x_2, ..., x_n$ - переменные в предикате

Definition: Логические операции

Отрицание:	• $\neg A$ (также обозначают $\overline{A}$) означает "не A"
Логическое и:	• $A \wedge B$ означает "верно A и верно B"
Логическое или:	• $A \vee B$ означает "верно A, или верно B, или верны A и B вместе"
Исключающее или:	• $A \oplus B$ означает "верно ровно одно из высказываний A, B"
Импликация:	• $A \implies B$ означает "если верно A, то верно B"
Эквивалентность:	• $A \iff B$ означает "A верно тогда и только тогда, когда верно B"

Note

Пусть $A \implies B$
Если A верно, то B тоже верно, но если A ложно, то B может быть и истинным, и ложным
Пусть $A \iff B$
Если A ложно, то ложно B. Если B верно, то верно A

Note

Логические операции можно выражать через другие логические операции, например,
$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$

Definition: Кванторы

Квантор всеобщности обозначается как $\forall$ и означает "для любого"
Квантор существования обозначается как $\exists$ и означает "существует"
Квантор едиственности обозначается как ! и означает "едиственный, такой что ..."

Example

Всеобщность:	• $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x)$ означает "Для любого x из $\mathbb{R}$ выполняется предикат $\phi(x)$"
Существование:	• $\exists x\,(x \in \mathbb{Q} \implies \psi(x))$ означает "Существует x, такой что если x из $\mathbb{Q}$, то выполняется предикат $\psi(x)$"
Единственность:	• $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists! k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \leq n < 2^{k+1}$ означает "Для любого натурального числа существует и едиственно такое целое неотрицательное число k, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$"

Note

На практике квантор едиственности часто используется вместе с квантором существования т.е. часто используют связку $\exists!$, "существует и единственно"

Note

Вместо "$\neg\exists$" пишут "$\nexists$"

Claim Правило обращения кванторов

При обращении кванторов квантор существования меняется на квантор всеобщности, квантор всеобщности меняется на квантор существования, а утверждение под кванторами меняется на противоположное

Example

Пусть дано высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m_1 \in \mathbb{Z}\, \exists m_2 > m_1\, \forall q \in \mathbb{Q} : |m_1| > n \land \neg\psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Тогда отрицание к этому высказыванию будет:

$$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m_1 \in \mathbb{Z}\, \forall m_2 > m_1\, \exists q \in \mathbb{Q} : |m_1| \leq n \lor \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Claim Метод математической индукции

Пусть есть предикат $\phi(n)$, который выполняется или не выполняется при различных $n \in \mathbb{N}$
Тогда, если $\exists k \in \mathbb{N} : \phi(k)$ и $\forall n \geq k : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$, то по методу математической индукции получаем $\forall n \geq k : \phi(n)$
Этапы доказательства:

База индукции:	• Проверка истинности $\phi(k)$
Предположение индукции:	• Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N} \land n \geq k$ верно $\phi(n)$
Шаг индукции:	• Докажем, что $\phi(n+1)$, используя предположение индукции
Вывод:	• $\forall n \geq k : \phi(n)$

Theorem Неравенство Бернулли

Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq -1$, то $(1+x)^n \geq 1 + xn$

Proof:

Докажем неравенство при помощи метода математической индукции

1. База индукции:

Пусть $n = 1 \implies (1+x)^n = 1 + x \geq 1 + x$

2. Предположение индукции:

Пусть для некоторого $n \geq 1$ верно, что $(1+x)^n \geq 1 + xn$

3. Шаг индукции: Рассмотрим неравенство, подставив в него $n+1$:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$

$1 + x \geq 0 \implies (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+xn) \cdot (1+x) = 1 + xn + x + n \cdot x^2 \geq 1 + nx + x = 1 + n(x+1)$

Следовательно, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + n(x+1)$

4. Обозначим доказываемое как предикат $\phi(n)$, тогда получаем:

$\phi(1) \land \forall n \in \mathbb{N} : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$

Тогда по принципу математической индукции $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n)$

■

Definition: Перестановки, размещения и сочетания

Пусть дано множество из n элементов
• Если все элементы попарно различны (т.е. при решении задачи мы считаем, что два любых элемента множества различны), то количество попарно различных перестановок этого множества обозначается как P_n и равно $n!$
Пусть зафиксировано $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что $k \leq n$, тогда:
• Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k-элементное подмножество данного множества, считая, что элементы попарно различны, обозначается как A_n^k и равно $\frac{n!}{(n-k)!}$
• Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k-элементное подмножество данного множества, считая, элементы равны, обозначается как C_n^k и равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Theorem Бином Ньютона
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$(формально, перед равенством необходимо написать $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$)

Proof:

Докажем это утверждение при помощи метода математической индукции

1. База индукции: $n = 1 \implies (a+b)^n = a + b = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} C_n^k a^k b^{n-k}$

2. Предположение индукции: пусть для некоторого $n \geq 1 : (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

3. Рассмотрим равенство и докажем, что оно верно при подстановке $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^0 a^0 b^{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + C_{n+1}^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

4. Получили:

Равенство верно при $n = 1$, а из верности равенства для n следует верность равенства для $n+1$ (при $n \geq 1$), тогда по методу математической индукции получим, что равенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$

■

Definition: Числовая последовательность

Числовая последовательность - это счётно бесконечный проиндексированный набор чисел

Definition: Ограниченная сверху числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если
$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_n < C$

Definition: Ограниченная снизу числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если
$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_n > -C$

Definition: Ограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если
$\exists C > 0\, \forall n \in \mathbb{N}: \; |a_n| < C$

Note

Числовая последовательность ограничена $\iff$ она ограничена сверху и ограничена снизу

Definition: Неограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется неограниченной, если она не является ограниченной, то есть
$\forall C > 0\, \exists n \in \mathbb{N}: \; |a_n| \geq C$

Definition: Отделимая от нуля числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется отделимой от нуля, если
$\exists \varepsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N}: \; |a_n| > \varepsilon$

Definition: Эпсилон окрестность

Эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ и обозначается $U_\varepsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Эпсилон окрестность точки x_0"

Example

$U_1(\pi) = (\pi - 1; \pi + 1)$
$U_e(e) = (0; 2e)$

Definition: Проколотая эпсилон окрестность

Проколотой эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ и обозначается $\dot{U}_\varepsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Проколотая эпсилон окрестность точки x_0"

Example

$\dot{U}_1(e) = (e - 1; e + 1) \setminus \{e\} = (e - 1; e) \cup (e; e + 1)$

Definition: Сходящаяся числовая последовательность

Числовая последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел при $n \to +\infty$, т.е. ч.п. $\{a_n\}$ называется сходящейся, если $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, то есть по определению

$$\exists A \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N : |a_n - A| < \varepsilon$$

Note

Сходящаяся ч.п. является ограниченной

Note

Неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ равносильно тому, что $a_n \in U_\varepsilon(A)$

Definition: Бесконечно большая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если она стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞ при $n \to +\infty$, т.е.

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : a_n > M$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : a_n < -M$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : |a_n| > M$

Definition: Бесконечно малая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если она стремится к 0 при $n \to +\infty$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N : |a_n| < \varepsilon$

Note

Связи числовых последовательностей:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Note

Если ч.п. сходится или является б.б., то предел единственный

Proposition Докажите по определению, что

(ограниченная ч.п.) + (ограниченная ч.п.) = ограниченная ч.п.
б.м + б.м. = б.м.
б.м. $\cdot$ (ограниченная ч.п.) = б.м.
$\frac{\text{отделимая от нуля ч.п.}}{\text{ограниченная ч.п.}}$ = ограничена ч.п.

Proposition Приведите пример, когда

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = отделимая от нуля ч.п.
(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = б.м.
б.б + б.б = б.б.
б.б + б.б = б.м.
б.б + б.б = (ограниченная ч.п.)
б.б + б.б = (отделимая от нуля ч.п.)

Theorem Теорема: свойство предельного перехода в неравенствах

$$(\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : c_n > A) \wedge (\lim_{n\to\infty} c_n = C) \implies C \geq A$$

Proof:

1. Распишем, что дано, по определению:
$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |c_n - C| < \varepsilon$
Это равносильно $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon$
$\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : c_n > A$
2. Для любого ε рассмотрим $M(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N) + 1$
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N) + 1\, \forall n > M : (C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon \wedge c_n > A)$
Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon)\, \forall n > M : C + \varepsilon > A$
Выражение под кванторами не зависит от M и $n \implies \forall \varepsilon > 0 : C + \varepsilon > A$
3. Предположим от противного, что $C < A$
Положим $\varepsilon := \dfrac{A - C}{2} > 0 \implies C + \varepsilon = C + \dfrac{A - C}{2} = \dfrac{A + C}{2} < A$
Получили, что $\exists \varepsilon > 0 : C + \varepsilon < A \implies$ W $\implies$ предположение, что $C < A$, неверно $\implies C \geq A$

■

Theorem Теорема о зажатой последовательности (о 2 миллиционерах / 2 полицейских / гамбургерах)

$$\left.\begin{array}{l} a_n, b_n, c_n \text{ - числовые последовательности} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = X \\ \lim_{n\to\infty} b_n = X \\ \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : a_n \leq c_n \leq b_n \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to\infty} c_n = X$$

Proof:

Докажем для случая, когда $X \in \mathbb{R}$. При $X \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ доказательство проводится аналогично
1. Распишем по определению пределы.
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1(\varepsilon) : X - \varepsilon < a_n < X + \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n > N_2(\varepsilon) : X - \varepsilon < b_n < X + \varepsilon$
Рассмотрим $N_3(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N)$, тогда
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3(\varepsilon) : X - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < X + \varepsilon$
$\implies \forall \varepsilon > 0\, \exists N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3(\varepsilon) : X - \varepsilon < c_n < X + \varepsilon$

■

Theorem Теорема о свойстве предела б.м. ч.п.
если $a \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{где } \alpha_n \text{ - б.м. ч.п.}$$

Proof:

" $\implies$ "

Распишем по определению, что дано:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon)\,\forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

Обозначим ч.п. $\alpha_n = a_n - a$, тогда $a_n = a + \alpha_n$

Тогда: $\forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon)\,\forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$

Доказали, что $a_n = a + \alpha_n$, где α_n - б.м. ч.п.

" $\impliedby$ "

Распишем то, что α_n - б.м., по определению:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon)\,\forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$

По условию $a_n = a + \alpha_n$, тогда $a_n - a = \alpha_n$, подставим в выражение под кванторами:

$\forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon)\,\forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

Доказали по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

■

Definition: Монотонность ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

Claim Аксиома непрерывности действительных чисел (принцип полноты)

$$\left.\begin{aligned} &A \subseteq \mathbb{R} \\ &A \neq \varnothing \\ &B \subseteq \mathbb{R} \\ &B \neq \varnothing \\ &\forall a \in A\,\forall b \in B : a \leq b \end{aligned}\right\} \implies \exists c \in \mathbb{R}\,\forall a \in A\,\forall b \in B : a \leq c \leq b$$

Definition: Ограниченное сверху множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным свеху, если $\exists C \in \mathbb{R}\,\forall a \in A :\ a \leq C$

Definition: Ограниченное снизу множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists C \in \mathbb{R}\,\forall a \in A :\ a \geq C$

Definition: Ограниченное множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным, если $\exists C > 0\,\forall a \in A :\ |a| \leq C$

Definition: Определение верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда верхней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \leq c$

Definition: Определение нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing$. Тогда нижней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \geq c$

Definition: Определение точной верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing$. Тогда точной верхней гранью множества A называют наименьший элемента множества всех верхних граней множества A и обозначают $\sup A$

Definition: Определение точной нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing$. Тогда точной нижней гранью множества A называют наибольший элемента множества всех нижней граней множества A и обозначают $\inf A$

Note

Вообще говоря, наименьшый и наибольший элементы множества не всегда существуют.
Например, у множества $(0;1)$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, при этом $\sup(0;1) = 1 \notin (0;1)$, $\inf(0;1) = 0 \notin (0;1)$

Theorem Теорема о существовании точной грани множества

Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ ограничено сверху, то $\exists \sup A$
Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ ограничено снизу, то $\exists \inf A$

Proof: Докажем для верхней грани, для нижней грани доказательство аналогично

$$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing \wedge (\exists C > 0\, \forall a \in A \implies a < C) \implies \exists \sup A$$

1. Обозначим $S_A = \{c \in \mathbb{R} | \forall a \in A \implies a \leq c\} \neq \varnothing$ - множество верхних граней
Это множество не пусто, т.к. A ограничено по условию, т.е. $\exists c > 0\, \forall a \in A \implies a \leq c$
2. По построению множества A и S_A удовлетворяют аксиоме непрерывности действительных чисел, тогда $\exists b \in \mathbb{R}\, \forall a \in A \forall c \in S_A \implies a \leq b \leq c$
Но из $b \leq c \implies b \in S_A$, при этом $(\forall c \in S_A \implies b \leq c)$, следовательно, b является наименьшим элементом множества верхних граней множества A, тогда по определению точной верхней грани $b = \sup A$

■

Theorem Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ч.п.)

Если ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится
Если ч.п. $\{a_n\}$ невозрастает и ограничена снизу, то она сходится

Proof: Докажем для неубывающей ч.п., для невозрастающей ч.п. доказательство аналогично
1. Обозначим множество значений ч.п. $A = \{a_n\}$
Т.к. a_n - числовая последовательность, то множество A счётно или конечно
(т.е. существует инъекция между A и $\mathbb{N}, A \lesssim \mathbb{N}$)
Также $A \neq \varnothing$ и множество A ограничено сверху $\implies$ по теореме о существовании точной верхней грани $\exists \sup A = a$
2. Докажем, что $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, т.е. $\forall \varepsilon\, \exists N = N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$
a_n неубывает и ограничена сверху $a \implies |a_n - a| = a - a_n$, тогда
$|a_n - a| < \varepsilon \iff a - a_n < \varepsilon \iff a_n > a - \varepsilon$
Т.к. последовательность a_n неубывает, то следующие 2 высказывания равносильны:
$\forall \varepsilon\, \exists N = N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon) : a_n > a - \varepsilon$ $(\#)$

$\forall \varepsilon\, \exists N = N(\varepsilon) : a_N > a - \varepsilon$ (*)
3. Докажем второе высказывание (*) методом от противного.
Предположим, что $\exists \varepsilon_0 \forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \leq a - \varepsilon_0$
Тогда число $a - \varepsilon_0$ - верхняя грань множества A, но a само является точной верхней гранью, но $a - \varepsilon_0 < a \implies \perp \implies$ неверно предположение, что высказывание (*) неверно $\implies$ высказывание (#) верно ∎

Definition: Число e

Рассмотрим ч.п. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его e

Proof: 1. Докажем, что a_n ограничена сверху числом 3

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq$$
$$\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

2. Докажем, что a_n - возрастающая ч.п.
Рассмотрим a_{n+1}

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Т.к. $\forall m \in \{1, \ldots, n\}\; 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$, то

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > a_n$$

3. $\{a_n\}$ ограничена сверху и возрастает $\implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ∎

Definition: Подпоследовательность

Пусть дана ч.п. $\{a_n\}$, тогда подпоследовательностью называется ч.п., полученная *последовательным* выбором некоторых членов исходной ч.п. и обозначается $\{a_{n_k}\}$

Note

Если $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность ч.п. $\{a_n\}$, то $\forall k \in \mathbb{N} : n_k \geq k$

Definition: Частичный предел

Частичный предел ч.п. $\{a_n\}$ - число, являющееся пределом какой-либо сходящейся подпоследовательности данной последовательности $\{a_n\}$

Definition: Верхний предел ч.п.

Верхним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sup\{a_n\}_{n\geq k}$$

Definition: Нижний предел ч.п.

Нижним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \inf\{a_n\}_{n\geq k}$$

Definition: Предельная точка ч.п.

Предельной точкой ч.п. $\{a_n\}$ называется число a, такое что в любой окрестности точки a находится бесконечно много членов ч.п. $\{a_n\}$

Theorem Определение предельной точки ч.п. эквивалентно определению частичного предела ч.п.

Proof:

1. a - частичный предел $\implies$ a - предельная точка $\{a_n\}$
$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$
$\iff$
$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$
Следовательно, $\forall \varepsilon$ в $U_\varepsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$
2. a - предельная точка$\{a_n\}$ $\implies$ a - ч.п. $\{a_n\}$
По определению предельной точки $\forall \varepsilon$ в $U_\varepsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$
Предъявим ч.п. $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$, такую что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$
Обозначим $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$
Рассмотрим ε_1, в $U_{\varepsilon_1}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, выберем какой-то член a_{n_1}
Рассмотрим ε_2, в $U_{\varepsilon_2}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$
Рассмотрим ε_k, в $U_{\varepsilon_k}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$
Таким образом, построена ч.п. $\{a_{n_k}\}$, такая что $\forall k \in \mathbb{N} : a - \dfrac{1}{k} < a_{n_k} < a + \dfrac{1}{k} \implies$
$\implies$ по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

■

Note

Свойства частичных пределов ч.п.
$\{a_n\}$ сходится $\iff \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$
$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \sup\{$множества предельных точек $\{a_n\}\}$
$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \inf\{$множества предельных точек $\{a_n\}\}$
$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ - частичные пределы

Theorem Система вложенных отрезков

Системой вложенных отрезков называют счётно бесконечное множество отрезков, каждый из

которых содержит следующий отрезок как подмножество
Обозначение: $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subseteq I_k$

Example

Рассмотрим $S = \{[1-\frac{1}{k}; 2+\frac{1}{k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда
$S = \{[0;3], [0.5;2.5], [\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}], \ldots\}$
Рассмотрим $S = \{[\pi; \pi - \frac{1}{k^k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда
$S = \{[\pi;\pi-1], [\pi; \pi-\frac{1}{4}], [\pi;\pi-\frac{1}{27}], \ldots\}$

Theorem Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной ч.п. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Proof:

По определению ограниченной ч.п. $\exists C \forall n \in \mathbb{N} |a_n| < C$

Построим искому подпоследовательность при помощи системы вложенных отрезков

$I_1 = [-c; c], \forall n \in \mathbb{N} a_n \in I_1,$ выберем какой-то член ч.п. $a_{n_1} \in I_1$

Т.к. $\{a_n\}$ - ч.п., то в какой-то половине точно есть бесконечно много членов $\{a_n\}$

Выберем эту половину и обозначим I_2, выберем в нём какой-то член ч.п. $a_{n_2} \in I_2$, такой что $n_2 > n_1$ (если это нельзя сделать, т.е. $\forall m\, (a_m \in I_2 \implies m \le n_1)$, то в I_2 лишь конечное число членов ч.п. $\{a_n\} \implies$ W $\implies \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in I_2)$

Пусть построен I_k и a_{n_k}. Делим I_k пополам и выбираем половину,
в которой бесконечно много членов $\{a_n\}$, обозначим эту половину как I_{k+1}
и выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$ (если это нельзя сделать, т.е. $\forall m\, (a_m \in I_{k+1} \implies m \le n_k)$,
тогда в I_{k+1} лишь конечное число членов ч.п. $\{a_n\} \implies$ W $\implies \exists n_{k+1} > n_k : a_{n_{k+1}} \in I_{k+1})$

Построили последовательность $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k; d_k]$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{b_k\}$ неубывает и ограничена сверху C

$\implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_k = b, b \ge b_k$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{d_k\}$ невозрастает и ограничена снизу $-C$

$\implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} d_k = d, d \le d_k$

При этом $|d_k - b_k| = \dfrac{2\cdot C}{2^{k-1}} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$

$ADDPROOF[d \ge b]$(пока что см. консультацию 2)

$d - b \le d_k - b_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0 \implies d \le b \implies d = b$

Получили: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_k = b = d = \lim\limits_{n\to+\infty} d_k$

b_k и d_k - границы отрезка $I_k \implies \forall k \in \mathbb{N} : b_k \le a_k \le d_k \implies$

$\implies$ по теореме о пределе зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} a_k = b = d$

■

Definition: Фундаментальная ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \forall n, m > N(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Theorem Критерий сходимости ч.п. по Коши

Ч.п. $\{a_n\}$ сходится $\iff$ $\{a_n\}$ - Фундаментальная ч.п.

Proof:

" $\implies$ "

Распишем, что дано: $\exists A \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1 : |a_n - A| < \varepsilon$

Хотим доказать: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$|a_n - a_m| < \varepsilon \impliedby |a_n - a + a - a_m| < \varepsilon \impliedby |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon \impliedby |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$

Положим $N_2(\varepsilon) := N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \implies$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon \implies$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

" $\impliedby$ "

Распишем, что дано: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Покажем, что $\{a_n\}$ ограничена: положим $\varepsilon = 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n > N_2 : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n > N_2 : a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$

Положим $C := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_2(1)}|, |a_{N_2(1)+1}|) + 1 \implies$

$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$\exists a \in \mathbb{R}\, \exists \{a_{n_k}\} : \lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = a$

Докажем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

Перепишем, что дано:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2(\varepsilon)\, \forall n, m > N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3(\varepsilon)\, \forall k > N_3(\varepsilon) : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$

Распишем, что хотим доказать:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

$|a_n - a| < \varepsilon \impliedby |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < \varepsilon \impliedby |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$

Т.к. при выборе членов в подпоследовательности $n_k \geq k$, то при $k > N_3(\varepsilon) \implies n_k > N_3(\varepsilon)$

Положим $N_1(\varepsilon) = \max\left(N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right), N_3\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \implies$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon \implies$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon)\, \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

∎

Definition: Постоянная Эйлера

Рассмотрим ч.п. $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$
Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его γ

Proof:

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \gamma_n = \gamma$$

γ_n убывает

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1 - \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)\right)$$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходится к e и убывает. Докажем убывание

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{(n+1)(n^2 + 3n + 1)}{n^3 + 4n^2 + 4n} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1}(1 - \ln b_n)$$

b_n убывает к $e \implies b_n > e \implies \ln b_n > 1 \implies \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$

Докажем ограниченность γ_n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \implies n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \implies \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n} > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + ... + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + ... + \ln(n+1) - \ln n - \ln n =$$

$$= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0$$

■

Definition: Определение функции

Множество пар $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D_f \land y \in E_f\}$ называется функцией f с областью определения D_f и областью значения E_f, если $\forall x \in D_f \, \exists! y \in E_f : (x, y) \in f$ (для удобства $(x, y) \in f$ обозначают как $f(x) = y$)
Обозначение функции: $f : X \to Y$
В данном обозначении подразумевают, что $D_f = X, E_f \subseteq Y$

Example

$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, в данном случае $D_f = \mathbb{N} \cup \{0\}, E_f = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
Т.к. несложно установить, что $E_f = \mathbb{Z}$, то можно написать $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$

Definition: Определение инъективной функции

Функция f называется инъективной, если $\forall y \in E_f\ \exists! x \in D_f : f(x) = y$
Это эквивалентно тому, что $\forall x_1, x_2 \in D_f : (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$
(говорят, что f - инъекция)

Example

$\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^{2n-1}$ является инъективной
$\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^{2n}$ не является инъективной

Definition: Определение сюръективной функции

Функция $f : X \to Y$ называется сюръективной для множества Y, если $E_f = Y$
(говорят, что f - сюръекция)
Когда говорят, что f сюръективна, не уточняя множество, то подразумевают, что f сюръективна для Y

Example

Функция $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не сюръективна для $\mathbb{R}$, но сюръективна для $[-1; 1]$

Definition: Определение биективной функции

Функция $f : X \to Y$ называется биективной, если она инъективна и сюръективна
(говорят, что f - биекция)

Example

Функция $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$, такая что
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ - биекция между $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{Z}$
(как следствие, показали, что $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{Z}$, т.е. множества равномощны)

Definition: Определение обратной функции

Функция $y = f^{-1}(x)$ называется обратной функцией к функции $y = f(x)$, если множество пар фукнции f^{-1} является симметрией множества пар f

Note

Функция обратима $\iff$ она инъективна

Definition: Определение предела функции по Коши

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon)\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Note

При этом $\dot{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty)$, $\dot{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta)$, $\dot{U}_\delta(\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$

Definition: Определение предела функции по Гейне

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : (x_n \neq x_0 \wedge \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A)$$

Definition: Односторонний предел функции

Левосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \to x_0$ слева, то есть

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Правосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \to x_0$ справа, то есть

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Theorem Свойство предела функции при $x \to x_0, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = A, \text{ где } A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Proof:

$$" \implies "$$
Дано:$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Тогда:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$$" \impliedby "$$
Дано:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0\, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta_1) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta_2; x_0) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Положим $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$, тогда:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subseteq (x_0 - \delta_2; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta_1) :\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

■

Definition: Бесконечные пределы

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$

Definition: Бесконечно малая функция

Функция называется б.м. при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$
Функция называется б.м. при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
Функция называется б.м. при $x \to -\infty$, если $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Definition: Бесконечно большая функция

Функция называется б.б. при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$
Функция называется б.б. при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$
Функция называется б.б. при $x \to -\infty$, если $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

Definition: Ограниченная функция

Функция называется ограниченной при $x \longrightarrow x_0$, если $\exists \delta > 0\, \exists C > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| < C$

Definition: отделимая от нуля функция

Функция называется отделимой от нуля при $x \longrightarrow x_0$, если $\exists \delta > 0\, \exists \varepsilon_0 > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > \varepsilon_0$

Note

Связь функций при $x \longrightarrow x_0$, где x - аргумент обоих функций, x_0 - число, которому стремится аргумент обоих функций:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Theorem Теорема о зажатой функции

$$\left.\begin{array}{l} f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \to x_0} h(x) = A \\ \exists \delta > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \le g(x) \le h(x) \end{array}\right\} \lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

Definition: Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Definition: Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Theorem Теорема о пределе сложной функции

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Proof:

Распишем, что дано, по определению:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1(\varepsilon)\, \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) : |f(x) - y_0| < \varepsilon\, (1)$

$\forall \lambda > 0\, \exists \delta_2(\lambda)\, \forall y \in \dot{U}_{\delta_2(\lambda)}(y_0) : |g(y) - g(y_0)| < \lambda\, (2)$

Распишем, что хотим доказать:

$\forall \eta > 0\, \exists \delta_3 = \delta(\eta) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Положим $\delta_3(\eta) = \delta_1(\delta_2(\eta))$, тогда :

$x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) \iff x \in \dot{U}_{\delta_1(\delta_2(\eta))}(x_0) \implies$ по (1) $|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta)$

$|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta) \iff f(x) \in U_{\delta_2(\eta)}(y_0)$

По (2) знаем, что если $f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Если $f(x) = y_0$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Иначе, если $f(x) \neq y_0 \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Получили: $\forall \eta > 0\, \exists \delta_3 = \delta_1(\delta_2(\eta))\, \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

∎

Definition: Асимптоты

Вертикальная асимптота:	• Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$
Горизонтальная асимптота:	• Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ на $\pm\infty$, если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ Вообще говоря, горизонтальные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными
Наклонная асимптота:	• Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (kx + b) = 0$ Вообще говоря, наклонные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными

Theorem Признак наклонной асимптоты

Прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty \iff$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = b \end{cases}$$

Proof:

$" \implies "$

1. Распишем определение наклонной асимптоты: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$

Вынесем b из предела: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-kx=b$

$f(x)-kx-b$ - б.м. при $x\longrightarrow+\infty$

Т.к. $x\longrightarrow+\infty$, то можно поделить на x :

$$\frac{f(x)}{x}-k=\frac{b}{x}+\frac{\text{б.м.}}{x}$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{b}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0\\ \frac{\text{б.м.}}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0\end{matrix}\right\}\implies \frac{f(x)}{x}-k\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

$" \impliedby "$

Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-kx=b$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$

■

Definition: O - символика

о-малое: • $f(x)=\overline{o}(g(x))$ при $x\longrightarrow x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - б.м. при $x\longrightarrow x_0$

О-большое: • $f(x)=\underline{O}(g(x))$ при $x\longrightarrow x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - ограниченная при $x\longrightarrow x_0$

Definition: Непрерывность функции в точке

Функция называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Clarification

Если x_0 - граница области определения, то рассматривается односторонний предел

Note

Свойства непрерывных функций:

- Сумма, произведение и частное непрерывных функций - непрерывные функции (по арифметике пределов функции)
- Композиция непрерывных функций - непрерывная функция (по теореме о пределе сложной функции)

$$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=y_0\\ \lim_{y\to y_0} f(y)=f(y_0)\end{matrix}\right\}\implies \lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(g(x_0))$$

Claim Правило замены переменных в пределе

Пусть дана сложная функция $f(g(x))$, тогда, если для некоторой точки x_0 : $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=y_0$ и $\lim_{y\to y_0} f(y)=A\in\mathbb{R}$, то $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(g(x_0))$

Example (Пример использования правила замены переменной в пределе)

Пусть надо найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$

Преобразуем выражение: $\dfrac{\sin(\pi x)}{x} = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi$

В данном случае в обозначения из утверждения выше:

$f(y) = \dfrac{\sin(y)}{y}$

$g(x) = \pi x$

$g(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0, y_0 = g(x_0) = 0,$ и при этом $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = 1 = A$

Тогда по правилу замены переменной в пределе:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi = \lim\limits_{x \to 0} A \cdot \pi = \lim\limits_{x \to 0} 1 \cdot \pi = \pi$

Definition: Непрерывность функции на множестве

Функция называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке множества E

/* Когда говорят, что функция непрерывна, имеют ввиду, что она непрерывна на D_f */

Note

В частность, функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка $[a;b]$
При этом, в точках a и b рассматриваются односторонние пределы

Theorem Теорема о функции, непрерывной на отрезке (иногда называют теоремой Вейерштрасса)

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и достигает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке

Докажем, что функция ограничена сверху и достигает наибольшее значение. Для второго случая доказательство проводится аналогично

Proof:

1. $E_f -$ мно-во значений $f(x)$ на $[a;b]$

Обозначим $M = \sup E_f = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Построим некоторую строго возрастающую ч.п. $a_n \to M$ при $n \to +\infty$

2. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n)$

Предположим от противного, то есть $\exists n_0\, \forall x \in [a;b] : a_{n_0} \geq f(x)$

Тогда a_{n_0} - верхняя грань множества E_f

Однако, т.к. a_n - возрастающая ч.п. и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, то $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < M$

В частности, $a_{n_0} < M$, т.е. a_{n_0} - верхняя грань, которая меньше точной верхней грани $\implies$

$\implies \mathbb{W} \implies \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n)$

3. По построению $\forall x \in [a;b] : f(x) \leq M$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n) \leq M$

Следовательно, по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = M$

4. Докажем, что $M = f(x_0)$

Т.к. x_n - ограниченная ч.п., то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \in [a;b]$

Т.к. f непрерывна в на отрезке, то она непрерывна в x_0, следовательно $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = M\right) \wedge \left(\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)\right) \implies M = f(x_0) < \infty$

Таким образом, на отрезке $[a;b]$ функция f ограничена сверху числом $M = f(x_0)$

$\blacksquare$

Theorem Теорема (2) о функции, непрерывной на отрезке

Непрерывная на отрезке $[a;b]$ принимает все промежуточные значения
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b], f(x_1) = A, f(x_2) = B, x_1 < x_2$, БОО $A < B$, тогда
$\forall c \in (A;B)\, \exists x_0 \in (x_1;x_2) : f(x_0) = c$

Proof:

1. Построим последовательность вложенных отрезков:
/* Если Вам так будет удобнее, то докажем существование x_0 бинпоиском по ответу */
$[a_1; b_1] := [x_1; x_2]$
$x_3 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, рассмотрим $f(x_3)$
1)$f(x_3) = c \implies q.e.d.$
2)$f(x_3) < c \implies [a_2; b_2] := [x_3; b_1]$
3)$f(x_3) > c \implies [a_2; b_2] := [a_1; x_3]$
Применяя это правило, продолжим строить последовательность отрезков
Если ни на какой итерации не произойдёт случай 1), то получим счётно бесконечную последовательность отрезков$\{[a_n; b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$
По построению ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху $b \implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le b$
По построению ч.п. $\{b_n\}$ невозрастает и ограничена снизу $a \implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \ge a$
$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to_{n\to+\infty} 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$
$x_0 \in [a; b] \implies f(x)$ непрерывна в $x_0 \implies \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \implies$
$\implies$ по определению по Гейне $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x_0)$
По построению $f(a_n) < c \wedge f(b_n) > c \implies c \le f(x_0) \le c \implies f(x_0) = c$

■

Corollary Следствие
$f(x)$ непрерывна на $[a; b] \implies E_f = [\inf E_f; \sup E_f]$

Corollary Следствие
$f(x) = x^2$ непрерывна на $D_f = [0; 2] \implies (E_f = [0; 4] \wedge \exists x_0 \in \mathbb{R} : x_0^2 = 2)$
То есть доказано существование числа $\sqrt{2}$

Corollary Следствие
$f(x)$ непрерывна на $[a; b] \wedge f(a) < 0 \wedge f(b) > 0 \implies \exists c \in (a; b) : f(c) = 0$

Definition: Определение монотонности функции

- $f(x)$ называется строго возрастающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- $f(x)$ называется неубывающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$
- $f(x)$ называется строго убывающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- $f(x)$ называется невозрастающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \ge f(x_2)$

Definition: Достаточное условие обратимости

Если функция $f(x)$ строго монотонна на X, то $f(x)$ обратима на X

Proof:

Предположим от противного, что $f(x)$ не инъективна, то есть

$\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \land f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 \neq x_2 \implies \min(x_1, x_2) < \max(x_1, x_2) \implies$ W с определением строгой монотонности

∎

Definition: Критерий обратимости функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Тогда $f(x)$ обратима $\iff f(x)$ строго монотонна

Proof:

" $\Longleftarrow$ "Смотри достаточное условие обратимости

" $\implies$ "

Докажем для случая, когда $f(x)$ строго монотонно возрастает, для убывания аналогично

Предположим от противного, тогда БОО

$\exists x_1 < x_2 < x_3 \in [a; b] : f(x_1) < f(x_2) \geq f(x_3)$

Если $f(x_2) = f(x_3)$, то f не инъективна $\implies f$ не обратима $\implies$ W

Иначе, положим $c := \dfrac{\max(f(x_1), f(x_3)) + f(x_2)}{2} \implies f(x_1) < c < f(x_2) \land f(x_3) < c < f(x_2)$

f непрерывна на $[a; b] \implies f$ непрерывна на $[x_1; x_2]$ и $[x_2; x_3]$

f непрерывна на $[x_1; x_2] \implies \exists x_0' \in (x_1; x_2) : f(x_0') = c$

f непрерывна на $[x_2; x_3] \implies \exists x_0'' \in (x_2; x_3) : f(x_0'') = c$

Получили: $\exists x_0' < x_0'' \in [a; b] : f(x_0') = f(x_0'') \implies f$ не инъективна $\implies f$ не обратима $\implies$ W

∎

Theorem

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$, то функция $f^{-1}(y)$:

- 1) определена на $E_f = [\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$
- 2) мотонотонна (и имеет ту же монотонность) на E_f
- 3) непрерывна на E_f

Proof:

1. Доказано по критерию обратимости функции
2. БОО f возрастает на $[a;b]$

Предположим от противного

$f^{-1}(y)$ не возрастает на $[a;b] \implies \exists y_1 < y_2 \in [f(a);f(b)] : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

По определению обратной функции $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in [a;b]$, обозначим $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$

$x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$. При этом, $f(x_1) = y_1 \land f(x_2) = y_2$

$x_1 \geq x_2 \implies y_1 \geq y_2 \implies$ W

3. Докажем непрерывность по определению

Дано: $x = f^{-1}(y)$ - определённая монотонная на $[a;b]$ функция

Докажем, что f^{-1} непрерывна в любой точке $y_0 \in (f(a);f(b))$

Для $y_0 \in \{f(a), f(b)\}$ доказательство аналогично (нужно рассмотреть односторонние пределы)

По определению непрерывности в точке $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

Обозначим $f^{-1}(y_0) = x_0$

БОО докажем для таких ε, что $U_\varepsilon(x_0) \subset (a;b)$. Для *бо́льших* ε неравество также будет выполняться

$a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$

Обозначим $y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$, тогда $y_1 < y_0 < y_2$

Положим $\delta := \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1)$, тогда $U_\delta(y_0) \in (y_1; y_2)$

Докажем, что при выбранном δ выполняется неравенство под знаками кванторов:

$y \in U_\delta(y_0) \implies y \in (y_1;y_2) \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \implies x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \implies$

$\implies |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon \implies$ неравенство под кванторами верно и определение выполняется

■

Corollary Следствие (без доказательства)

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $(a;b)$, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, то функция $f^{-1}(y)$:

- 1) определена на $(m;M)$, где $m = \min(f(a), f(b)), M = \max(f(a), f(b))$
- 2) мотонотонна (и имеет ту же монотонность) $[m;M]$
- 3) непрерывна на $(m;M)$

Идея доказательства: рассмотреть $[c;d] \subset (a;b)$, для него верна теорема выше, а далее перейти к пределу при границах, стремящихся к a и b

Corollary

Т.к. $f(x) = x^n$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $D_f = n \vdots 2\, ?\, [0;+\infty) : \mathbb{R}$, то

$g(x) = \sqrt[n]{x}$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $D_g = E_f = n \vdots 2\, ?\, [0;+\infty) : \mathbb{R}$

Definition: Обратные тригонометрические функции

$y = \sin x$ непрерывна и возрастает на $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \implies$

$\implies \exists \arcsin := \sin^{-1} : y = \arcsin x$ непрерывна и возрастает на $E_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, область значений - $D_f = [-1;1]$

Аналогично

- $y = \arccos x$ непрерывна и убывает на $E_f = [0;\pi]$, область значений - $D_f = [-1;1]$
- $y = \arctan x$ непрерывна и возрастает на $E_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, область значений - $D_f = \mathbb{R}$
- $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывна и убывает на $E_f = (0;\pi)$, область значений - $D_f = \mathbb{R}$

Definition: Показательная функция

(теорема без доказательства) функция $y = a^x, a > 0$

- 1) определена на $D_f = \mathbb{R}, E_f = (0; +\infty)$
- 2) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на $\mathbb{R}$
- 4) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  /* Следствие: $\phi(x) = a^x$ является изоморфизмом между $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_+, *)$ */
  $(a^x)^y = a^{xy}$

Definition: Логарифмическая функция

Функция, обратная к $y = a^x, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ обозначается $y = \log_a x$

- 1) определена на $D_f = (0; +\infty), E_f = \mathbb{R}$
- 2) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на $(0; +\infty)$
- 4) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
  /* Следствие: $\psi(x) = \log_a x$ является изоморфизмом между $(\mathbb{R}_+, *)$ и $(\mathbb{R}, +)$ */
  $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

Corollary Следствия из 2 замечательного предела

$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Proof:

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\ln(x+1) = \ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Функция $\ln x$ непрерывна, тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$$

■

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Proof:

$$t = e^x - 1 \implies x = \ln(t+1)$$

$$x \to 0 \implies t \to \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

■

Corollary Показательная функция с вещественным показателем

$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$

$y = e^{\alpha \ln x}$

$\ln x$ непрерывна и возрастает на $(0; +\infty)$

$\alpha \ln x$ непрерывна и возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$

$e^{\alpha \ln x}$ непрерывна и возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$

Corollary

$\lim_{x\to+\infty} a(x) = a \wedge \lim_{x\to+\infty} b(x) = b \implies \lim_{x\to+\infty} a(x)^{b(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{b(x)\ln a(x)} = e^{b\ln a} = a^b$
Для ч.п. $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ построим кусочно-линейные функции $a(x)$ и $b(x)$, такие что $\forall n \in \mathbb{N} : a(n) = a_n \wedge b(n) = b_n$
Тогда $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to+\infty} b_n = b \implies \lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a^b$

Definition: Определение производной

Производная функции f в точке x_0 - это предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Note

$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x$

Proof:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

■

Note

$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : (x^n)' = nx^{n-1}$

Proof:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}{x_0}^k}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}{x_0}^k = nx_0^{n-1}$$

■

Note

$(a^x)' = a^x \ln a$

Proof:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} =$$
$$= a^{x_0} \lim_{t\to 0} \frac{e^{t\ln a}-1}{t} = a^{x_0} \lim_{s\to 0} \frac{e^s - 1}{s} \cdot \ln a = a^{x_0} \ln a$$

■

Note

$(e^x)' = e^x$

Claim Правила подсчёта производных

Если $\exists f'(x), \exists g'(x), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, то
- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $g(x) \neq 0 \implies \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Definition: Дифференцируемость функции

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если

$$\exists A \in \mathbb{R}: \ f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$$

Theorem

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \iff \exists f'(x_0)(\in \mathbb{R})$

Proof:

$$" \implies "$$

По определению дифференцируемости в точке

$$\exists A \in \mathbb{R}: \ f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0) \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \overline{o}(1) \implies$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R} \implies \exists f'(x_0) = A \in \mathbb{R}$$

$$" \impliedby "$$

По определению производной:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \overline{o}(1) \implies$$

$$\implies f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$$

$$\implies f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0), A = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

■

Definition: Определение дифференциала

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 - это линейная функция $df(x) = A \cdot (x - x_0)$ такая, что $f(x) = f(x_0) + df(x) + \overline{o}(x - x_0)$

Theorem

Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в ней

Proof:

По определению дифференцируемости в точке x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_0) \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \\ \lim_{x \to x_0} \overline{o}(x - x_0) = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$$

■

Theorem

Если $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $f(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то $f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Proof:

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$$
$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \overline{o}(y - y_0) \implies$$
$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)) + \overline{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0))$$
$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0)) \cdot \overline{o}(x - x_0) + \overline{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)) =$$
$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0) + (x - x_0)\overline{o}(g'(x_0) + \overline{o}(x)(1)) =$$
$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0) \implies (f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

■

Theorem

Если $f(x)$ непрерывна и обратима на $[a;b]$, $x_0 \in (a;b), \exists f'(x_0) \neq 0$, тогда $\exists (f^{-1}(y))'|_{y=f(x_0)=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Proof:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f'(y) - f'(y_0)}{y - y_0} = |\text{замена } y = f(x)| = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

Example

$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f^{-1}(y) = \ln y$
$(f^{-1}(y))'|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}$

Example

Пример: $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$
$y = e^{\alpha \ln x} \implies y' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

Definition: Определение локального минимума (точка минимума)

x_0 - точка локального минимума функции f(x), если $\exists \delta_0 > 0\, \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \leq f(x)$
x_0 - точка строгого локального минимума функции f(x), если $\exists \delta_0 > 0\, \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) < f(x)$

Definition: Определение локального максимума (точка максимума)

x_0 - точка локального максимума функции f(x), если $\exists \delta_0 > 0\, \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \geq f(x)$
x_0 - точка строгого локального максимума функции f(x), если $\exists \delta_0 > 0\, \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) > f(x)$

Definition: Точка локального экстремума

Точками локального экстремума называются точки минимума и точки максимума

Theorem Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)

Если x_0 - точка локального экстремума, то $\exists f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0$

Proof:

Пусть $\exists f'(x_0)$
Докажем для случая, когда x_0 - локальный минимум, для локального максимума доказательство аналогично.
Предел при $x \to x_0$ существует $\implies$ существуют односторонние пределы и они совпадают с $f'(x_0)$
В некоторой δ окрестности $f(x_0) \le f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \implies \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \\ x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \implies \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \end{array}\right\} \implies f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

■

Definition: Касательная к графику функции

Касательной к графику функции $f(x)$ называется прямая $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Theorem Теорема Ролля

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a; b]$
- Дифференцируема на $(a; b)$
- $f(a) = f(b)$

То $\exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) = 0$

Proof:

1. Обозначим $M := \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x), m := \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ достигаются, т.к. функция непрерывна на отрезке
2. Если $m = M \implies f(x) = const \implies \forall x \in (a; b) : f'(x) = 0$
3. Иначе, если $m < M$, тогда хотя бы одна из этих точек достигается в $\xi \in (a; b)$ (т.к. $f(a) = f(b)$)

БОО $f(\xi) = M \implies \xi$ - точка loc max
f дифференцируема на $(a; b) \implies \exists f'(\xi) \implies f'(\xi) = 0$ (по теореме Ферма)

■

Theorem Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a; b]$
- Дифференцируема на $(a; b)$

То $\exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Proof:

1. Рассмотрим $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}x$, эта функция также, как и функция f,

непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$
$F(a) = F(b) \implies$ для F выполняются требования теоремы Ролля $\implies \exists \xi \in (a; b) : F'(\xi) = 0 \implies$

$$\implies \exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies \exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

■

Corollary

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:
- Непрерывна на $[a;b]$
- Дифференцируема на $(a;b)$
- $f'(x) = 0$ на $(a;b)$

То $f(x) = const$ на $[a;b]$

Proof:

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b] f(x) \text{ удовлетворяет требованиям теоремы Лагранжа на } [x1_; x_2] \implies$$
$$\implies \exists \xi \in (x_1; x_1) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1)$$
$$\text{Получили: } \forall x_1, x_2 \in [a;b] f(x_2) - f(x_1) = 0$$

∎

Corollary

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:
- Непрерывность на $[a;b]$
- Дифференцируемость на $(a;b)$
- $\forall x \in (a;b) : f'(x) = g'(x)$

То $\forall x \in [a;b] : f(x) - g(x) = const$

Theorem Теорема следствие

Если $\phi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\phi'(x)$ определена везде на $(a;b)$, кроме, быть может, x_0, и $\exists \lim_{x \to x_0} \phi'(x) = A \in \mathbb{R}$

То $\exists \phi'(x_0) = A$, т.е. у производной непрерывной функции нет точек устранимого разрыва

Proof:

По определению производной и по теореме Лагранжа:

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \phi'(\xi(x)), \xi(x) \in (x_0; x), \text{ т.к. на } (x_0; x)$$

$\phi(x)$ удовлетворяет требованиям т. Лагранжа

$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0 \implies \phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \phi'(\xi(x)) = A \text{ (по теореме о пределе сложной функции)}$$

∎

Theorem Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:
- Непрерывность на $[a;b]$
- Дифференцируемость на $(a;b)$

И $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$ и $g(a) \neq g(b)$

То $\exists \xi \in (a;b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Proof:

1. Рассмотрим $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$, эта функция также

непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$

$F(a) = F(b) \implies$ для F выполняются требования теоремы Ролля $\implies \exists \xi \in (a;b) : F'(\xi) = 0 \implies$

$$\implies \exists \xi \in (a;b) : f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0 \implies \exists \xi \in (a;b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

■

Theorem

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a;b]$
- Дифференцируема на $(a;b)$

То:

$\forall x \in (a;b) : f'(x) \geq 0 \iff f(x)$ неубывает на $[a;b]$

$\forall x \in (a;b) : f'(x) > 0 \implies f(x)$ возрастает на $[a;b]$

(Для 2 высказывания импликация в обратную сторону не верна, например, для $f(x) = x^3$ в т. $x = 0$)

Proof:

$$" \Longleftarrow "$$

$$\forall x_0 \in (a;b) : \ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) \text{ - неубывающая функция } \implies \forall x \neq x_0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$" \implies "$$

$\forall x_1 < x_2 \in [a;b] : \ f(x)$ удовлетворяет т. Лагранжа на $[x_1; x_2] \implies$

$\exists \xi \in (x_1; x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

$f'(\xi) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$

$f'(\xi) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$

■

Corollary

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, кроме конечного числа точек (дифференцируемость), и $f'(x) \geq 0$, то $f(x)$ неубывает на $[a;b]$

Theorem Достаточное условие экстремума

Если $\exists \delta > 0$:

$(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f'(x) \geq 0) \land$

$\land (\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f'(x) \leq 0) \land$

$\land (f(x)$ непрерывна в точке $x_0)$

, то x_0 - точка loc max (нестрогого)

Definition: Выпуклость и вогнутость функций

Функция называется выпуклой вверх на отрезке $[a;b]$, если
$\forall x_1 < x_2 \in [a;b]$ верно:
график функции $y = f(x)$ лежит выше хорды, соединяющей точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$, т.е.
$l(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \frac{x_2 f(x_1)-x_1 f(x_2)}{x_2-x_1}$ - уравнение хорды l
$\forall x \in [x_1; x_2] : f(x) \geq l(x)$ - нестрогая выпуклость
$\forall x \in (x_1; x_2) : f(x) > l(x)$ - строгая выпуклость
В определении функции, выпуклой вниз, знаки неравенств $f(x) \geq l(x)$ и $f(x) > l(x)$ меняются на противоположные

Theorem

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и на $(a;b) \exists f''(x)$, то
$\forall x \in (a;b) : f''(x) \geq 0 \implies f(x)$ выпукла вниз
$\forall x \in (a;b) : f''(x) \leq 0 \implies f(x)$ выпукла вверх

Proof:

Докажем выпуклость вниз, выпуклость вверх доказывается аналогично

Пусть $x_1 < x_2 \in [a;b]$, тогда для доказательства по определению необходимо доказать верность неравенства:

$\forall x \in (x_1; x_2) : l(x) - f(x) \geq 0$

$l(x) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \dfrac{x_2 f(x_1)-x_1 f(x_2)}{x_2-x_1}$ - уравнение хорды l

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \frac{x_2 f(x_1)-x_1 f(x_2)}{x_2-x_1} - f(x)\frac{x_2 - x + x - x_1}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{f(x_1)(x_2-x)+f(x_2)(x-x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x)(x_2-x)+f(x)(x-x_1)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{f(x_1)(x_2-x)+f(x_2)(x-x_1)-f(x)(x_2-x)-f(x)(x-x_1)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{(f(x_1)-f(x))(x_2-x)+(f(x_2)-f(x))(x-x_1)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{(f(x_2)-f(x))(x-x_1)-(f(x_1)-f(x))(x_2-x)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{f'(\xi)(x_2-x)(x-x_1)-f'(\eta)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} =,$$ т.к. для функции f на $(x_1;x)$ и $(x;x_2)$ выполняется т. Лагранжа, $\xi \in (x;x_2), \eta \in (x_1;x)$

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)(f'(\xi)-f'(\eta))}{x_2-x_1} =,$$ т.к. для функции f' на $(\eta;\xi)$ выполняется т. Лагранжа

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)f''(\zeta)(\xi-\eta)}{x_2-x_1} \geq 0, \zeta \in (\eta;\xi)$$

■

При нахождении опечаток просьба написать https://t.me/i8088_t, на момент компиляции ник в тг: vova kormilitsyn