

HSE FCS SE
Calculus-1 2023-2024

Lecturer: Ivan Erlikh
File edited by: vova kormilitsyn

ver. 1.2.1

Теоремы и определения

Definition: Высказывания и n-местные предикаты

Высказывание - это упрощённая модель повествования предложения, такая что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, но не одновременно

n-местный предикат (n-арный предикат) - это выражение, которое превращается в высказывание, если в нём заменить x_1, x_2, \dots, x_n на подходящие имена, где x_1, x_2, \dots, x_n - переменные в предикате

Definition: Логические операции

- Отрицание:
 - $\neg A$ (также обозначают \bar{A}) означает "не A "
- Логическое и:
 - $A \wedge B$ означает "верно A и верно B "
- Логическое или:
 - $A \vee B$ означает "верно A , или верно B , или верны A и B вместе"
- Исключающее или:
 - $A \oplus B$ означает "верно ровно одно из высказываний A, B "
- Импликация:
 - $A \implies B$ означает "если верно A , то верно B "
- Эквивалентность:
 - $A \iff B$ означает " A верно тогда и только тогда, когда верно B "

Note

Пусть $A \implies B$

Если A верно, то B тоже верно, но если A ложно, то B может быть и истинным, и ложным

Пусть $A \iff B$

Если A ложно, то ложно B . Если B верно, то верно A

Note

Логические операции можно выражать через другие логические операции, например,

$$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$$

Definition: Кванторы

Квантор всеобщности обозначается как \forall и означает "для любого"

Квантор существования обозначается как \exists и означает "существует"

Квантор единственности обозначается как $!$ и означает "единственный, такой что ..."

Example

- Всеобщность:
 - $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x)$ означает "Для любого x из \mathbb{R} выполняется предикат $\phi(x)$ "
- Существование:
 - $\exists x (x \in \mathbb{Q} \implies \psi(x))$ означает "Существует x , такой что если x из \mathbb{Q} , то выполняется предикат $\psi(x)$ "
- Единственность:
 - $\forall n \in \mathbb{N} \exists! k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \leq n < 2^{k+1}$ означает "Для любого натурального числа существует и единственно такое целое неотрицательное число k , что $2^k \leq n < 2^{k+1}$ "

Note

На практике квантор единственности часто используется вместе с квантором существования т.е. часто используют связку $\exists!$, "существует и единственно"

Note

Вместо " $\neg \exists$ " пишут " \nexists "

Claim Правило обращения кванторов

При обращении кванторов квантор существования меняется на квантор всеобщности, квантор

всеобщности меняется на квантор существования, а утверждение под кванторами меняется на противоположное

Example

Пусть дано высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m_1 \in \mathbb{Z} \exists m_2 > m_1 \forall q \in \mathbb{Q} : |m_1| > n \wedge \neg \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Тогда отрицание к этому высказыванию будет:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m_1 \in \mathbb{Z} \forall m_2 > m_1 \exists q \in \mathbb{Q} : |m_1| \leq n \vee \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Claim Метод математической индукции

Пусть есть предикат $\phi(n)$, который выполняется или не выполняется при различных $n \in \mathbb{N}$. Тогда, если $\exists k \in \mathbb{N} : \phi(k)$ и $\forall n \geq k : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$, то по методу математической индукции получаем $\forall n \geq k : \phi(n)$.

Этапы доказательства:

- | | |
|-------------------------|---|
| База индукции: | • Проверка истинности $\phi(k)$ |
| Предположение индукции: | • Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k$ верно $\phi(n)$ |
| Шаг индукции: | • Докажем, что $\phi(n+1)$, используя предположение индукции |
| Вывод: | • $\forall n \geq k : \phi(n)$ |

Theorem Неравенство Бернулли

Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq -1$, то $(1+x)^n \geq 1+nx$

Proof:

Докажем неравенство при помощи метода математической индукции

1. База индукции:

$$\text{Пусть } n = 1 \implies (1+x)^1 = 1+x \geq 1+x$$

2. Предположение индукции:

$$\text{Пусть для некоторого } n \geq 1 \text{ верно, что } (1+x)^n \geq 1+nx$$

3. Шаг индукции: Рассмотрим неравенство, подставив в него $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$$

$$1+x \geq 0 \implies (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x) = 1+nx+x+n \cdot x^2 \geq 1+nx+x = 1+n(x+1)$$

$$\text{Следовательно, } (1+x)^{n+1} \geq 1+n(x+1)$$

4. Обозначим доказываемое высказывание как предикат $\phi(n)$, тогда получаем:

$$\phi(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$$

Тогда по принципу математической индукции $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n)$

■

Definition: Перестановки, размещения и сочетания

Пусть дано множество из n элементов

- Если все элементы попарно различны (т.е. при решении задачи мы считаем, что два любых элемента множества различны), то количество попарно различных перестановок этого множества обозначается как P_n и равно $n!$

Пусть зафиксировано $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что $k \leq n$, тогда:

- Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k -элементное подмножество данного множества, считая, что элементы попарно различны, обозначается как A_n^k и равно $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k -элементное подмножество данного множества, считая, элементы равны, обозначается как C_n^k и равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Theorem Бином Ньютона

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ (формально, перед равенством необходимо написать $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$)

Proof:

Докажем это утверждение при помощи метода математической индукции

1. База индукции: $n = 1 \implies (a + b)^n = a + b = \sum_{k=0}^1 C_n^k a^k b^{n-k}$

2. Предположение индукции: пусть для некоторого $n \geq 1 : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

3. Рассмотрим равенство и докажем, что оно верно при подстановке $n + 1$:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \\ &= a \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + C_{n+1}^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

4. Получили:

Равенство верно при $n = 1$, а из верности равенства для n следует верность равенства для $n + 1$ (при $n \geq 1$), тогда по методу математической индукции получим, что равенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$

■

Definition: Числовая последовательность

Числовая последовательность - это счётно бесконечный проиндексированный набор чисел

Definition: Ограниченная сверху числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если
 $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n < C$

Definition: Ограниченная снизу числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если
 $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n > -C$

Definition: Ограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если
 $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$

Note

Числовая последовательность ограничена \iff она ограничена сверху и ограничена снизу

Definition: Неограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется неограниченной, если она не является ограниченной, то есть
 $\forall C > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$

Definition: Отделимая от нуля числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется отделимой от нуля, если
 $\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| > \epsilon$

Definition: Эпсилон окрестность

Эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$ и обозначается $U_\epsilon(x_0)$.
 Обычно говорят "Эпсилон окрестность точки x_0 "

Example

$$U_1(\pi) = (\pi - 1; \pi + 1)$$

$$U_\epsilon(e) = (0; 2e)$$

Definition: Проколотаая эпсилон окрестность

Проколотаая эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$ и обозначается $\dot{U}_\epsilon(x_0)$.
 Обычно говорят "Проколотаая эпсилон окрестность точки x_0 "

Example

$$\dot{U}_1(e) = (e - 1; e + 1) \setminus \{e\} = (e - 1; e) \cup (e; e + 1)$$

Definition: Сходящаяся числовая последовательность

Числовая последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел при $n \rightarrow +\infty$, т.е. ч.п. $\{a_n\}$ называется сходящейся, если $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, то есть по определению

$$\exists A \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall n > N : |a_n - A| < \epsilon$$

Note

Сходящаяся ч.п. является ограниченной

Note

Неравенство $|a_n - A| < \epsilon$ равносильно тому, что $a_n \in U_\epsilon(A)$

Definition: Бесконечно большая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если она стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞ при $n \rightarrow +\infty$, т.е.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : a_n > M$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : a_n < -M$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : |a_n| > M$

Definition: Бесконечно малая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если она стремится к 0 при $n \rightarrow +\infty$, т.е.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall n > N : |a_n| < \epsilon$$

Note

Связи числовых последовательностей:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Note

Если ч.п. сходится или является б.б., то предел единственный

Proposition Докажите по определению, что

(ограниченная ч.п.) + (ограниченная ч.п.) = ограниченная ч.п.

б.м. + б.м. = б.м.

б.м. · (ограниченная ч.п.) = б.м.

$\frac{\text{отделимая от нуля ч.п.}}{\text{ограниченная ч.п.}} = \text{ограничена ч.п.}$

Proposition Приведите пример, когда

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = отделимая от нуля ч.п.

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = б.м.

б.б. + б.б. = б.б.

б.б. + б.б. = б.м.

б.б. + б.б. = (ограниченная ч.п.)

б.б. + б.б. = (отделимая от нуля ч.п.)

Theorem Теорема: свойство предельного перехода в неравенствах

$$(\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c_n > A) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C) \implies C \geq A$$

Proof:

1. Распишем, что дано, по определению:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |c_n - C| < \epsilon$$

$$\text{Это равносильно } \forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : C - \epsilon < c_n < C + \epsilon$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c_n > A$$

2. Для любого ϵ рассмотрим $M(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N) + 1$

$$\text{Тогда } \forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N) + 1 \forall n > M : (C - \epsilon < c_n < C + \epsilon \wedge c_n > A)$$

$$\text{Следовательно, } \forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon) \forall n > M : C + \epsilon > A$$

$$\text{Выражение под кванторами не зависит от } M \text{ и } n \implies \forall \epsilon > 0 : C + \epsilon > A$$

3. Предположим от противного, что $C < A$

$$\text{Положим } \epsilon := \frac{A - C}{2} > 0 \implies C + \epsilon = C + \frac{A - C}{2} = \frac{A + C}{2} < A$$

$$\text{Получили, что } \exists \epsilon > 0 : C + \epsilon < A \implies \textcircled{W} \implies \text{предположение, что } C < A, \text{ неверно} \implies C \geq A$$

■

Theorem Теорема о зажатой последовательности (о 2 миллионерах / 2 полицейских / гамбургерах)

$$\left. \begin{array}{l} a_n, b_n, c_n - \text{числовые последовательности} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = X \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = X \\ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \leq c_n \leq b_n \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = X$$

Proof:

Докажем для случая, когда $X \in \mathbb{R}$. При $X \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ доказательство проводится аналогично

1. Распишем по определению пределы.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : X - \epsilon < a_n < X + \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n > N_2(\epsilon) : X - \epsilon < b_n < X + \epsilon$$

Рассмотрим $N_3(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon), N)$, тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_3(\epsilon) \forall n > N_3(\epsilon) : X - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < X + \epsilon$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists N_3(\epsilon) \forall n > N_3(\epsilon) : X - \epsilon < c_n < X + \epsilon$$

■

Theorem Теорема о свойстве предела б.м. ч.п.

если $a \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n - \text{б.м. ч.п.}$$

Proof:

" \implies "

Распишем по определению, что дано:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

Обозначим ч.п. $\alpha_n = a_n - a$, тогда $a_n = a + \alpha_n$

Тогда: $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |\alpha_n| < \epsilon$

Доказали, что $a_n = a + \alpha_n$, где α_n - б.м. ч.п.

" \Leftarrow "

Распишем то, что α_n - б.м., по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |\alpha_n| < \epsilon$$

По условию $a_n = a + \alpha_n$, тогда $a_n - a = \alpha_n$, подставим в выражение под кванторами:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

Доказали по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

■

Definition: Монотонность ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$

Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$

Ч.п. $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$

Ч.п. $\{a_n\}$ называется невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

Claim Аксиома непрерывности действительных чисел (принцип полноты)

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ B \subseteq \mathbb{R} \\ B \neq \emptyset \\ \forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \end{array} \right\} \implies \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

Definition: Ограниченное сверху множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq C$

Definition: Ограниченное снизу множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq C$

Definition: Ограниченное множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным, если $\exists C > 0 \forall a \in A : |a| \leq C$

Definition: Определение верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$. Тогда верхней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \leq c$

Definition: Определение нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$. Тогда нижней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \geq c$

Definition: Определение точной верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$. Тогда точной верхней гранью множества A называют наименьший элемента множества всех верхних граней множества A и обозначают $\sup A$

Definition: Определение точной нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$. Тогда точной нижней гранью множества A называют наибольший элемента множества всех нижней граней множества A и обозначают $\inf A$

Note

Вообще говоря, наименьший и наибольший элементы множества не всегда существуют. Например, у множества $(0; 1)$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, при этом $\sup(0; 1) = 1 \notin (0; 1)$, $\inf(0; 1) = 0 \notin (0; 1)$

Theorem Теорема о существовании точной грани множества

Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ограничено сверху, то $\exists \sup A$

Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ограничено снизу, то $\exists \inf A$

Proof: Докажем для верхней грани, для нижней грани доказательство аналогично

$$A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge (\exists C > 0 \forall a \in A \implies a < C) \implies \exists \sup A$$

1. Обозначим $S_A = \{c \in \mathbb{R} | \forall a \in A \implies a \leq c\} \neq \emptyset$ - множество верхних граней

Это множество не пусто, т.к. A ограничено по условию, т.е. $\exists C > 0 \forall a \in A \implies a \leq C$

2. По построению множества A и S_A удовлетворяют аксиоме непрерывности

действительных чисел, тогда $\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall c \in S_A \implies a \leq b \leq c$

Но из $b \leq c \implies b \in S_A$, при этом $(\forall c \in S_A \implies b \leq c)$, следовательно, b является наименьшим элементом множества верхних граней множества A , тогда по определению точной верхней грани $b = \sup A$

■

Theorem Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ч.п.)

Если ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится

Если ч.п. $\{a_n\}$ невозрастает и ограничена снизу, то она сходится

Proof: Докажем для неубывающей ч.п., для невозрастающей ч.п. доказательство аналогично

1. Обозначим множество значений ч.п. $A = \{a_n\}$

Т.к. a_n - числовая последовательность, то множество A счётно или конечно (т.е. существует инъекция между A и $\mathbb{N}, A \lesssim \mathbb{N}$)

Также $A \neq \emptyset$ и множество A ограничено сверху \implies по теореме о существовании точной верхней грани $\exists \sup A = a$

2. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, т.е. $\forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

a_n неубывает и ограничена сверху $a \implies |a_n - a| = a - a_n$, тогда

$$|a_n - a| < \epsilon \iff a - a_n < \epsilon \iff a_n > a - \epsilon$$

Т.к. последовательность a_n неубывает, то следующие 2 высказывания равносильны:

$$\forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) \forall n > N(\epsilon) : a_n > a - \epsilon \quad (\#)$$

$\forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) : a_N > a - \epsilon$ (*)

3. Докажем второе высказывание (*) методом от противного.

Предположим, что $\exists \epsilon_0 \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a - \epsilon_0$

Тогда число $a - \epsilon_0$ - верхняя грань множества A , но a само является точной

верхней гранью, но $a - \epsilon_0 < a \implies \perp \implies$ неверно предположение, что

высказывание (*) неверно \implies высказывание (#) верно ■

Definition: Число e

Рассмотрим ч.п. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его e

Proof: 1. Докажем, что a_n ограничена сверху числом 3

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\ &= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

2. Докажем, что a_n - возрастающая ч.п.

Рассмотрим a_{n+1}

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Т.к. $\forall m \in \{1, \dots, n\} 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$, то

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > a_n$$

3. $\{a_n\}$ ограничена сверху и возрастает $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ ■

Definition: Подпоследовательность

Пусть дана ч.п. $\{a_n\}$, тогда подпоследовательностью называется ч.п., полученная *последовательным* выбором некоторых членов исходной ч.п. и обозначается $\{a_{n_k}\}$

Note

Если $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность ч.п. $\{a_n\}$, то $\forall k \in \mathbb{N} : n_k \geq k$

Definition: Частичный предел

Частичный предел ч.п. $\{a_n\}$ - число, являющееся пределом какой-либо сходящейся подпоследовательности данной последовательности $\{a_n\}$

Definition: Верхний предел ч.п.

Верхним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup\{a_n\}_{n \geq k}$$

Definition: Нижний предел ч.п.

Нижним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf\{a_n\}_{n \geq k}$$

Definition: Предельная точка ч.п.

Предельной точкой ч.п. $\{a_n\}$ называется число a , такое что в любой окрестности точки a находится бесконечно много членов ч.п. $\{a_n\}$

Theorem Определение предельной точки ч.п. эквивалентно определению частичного предела ч.п.

Proof:

1. a - частичный предел $\implies a$ - предельная точка $\{a_n\}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

\iff

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$$

Следовательно, $\forall \epsilon$ в $U_\epsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$

2. a - предельная точка $\{a_n\} \implies a$ - ч.п. $\{a_n\}$

По определению предельной точки $\forall \epsilon$ в $U_\epsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$

Предъявим ч.п. $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$, такую что $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

$$\text{Обозначим } \epsilon_k = \frac{1}{k}$$

Рассмотрим ϵ_1 , в $U_{\epsilon_1}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, выберем какой-то член a_{n_1}

Рассмотрим ϵ_2 , в $U_{\epsilon_2}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in U_{\epsilon_2}(a)$

Рассмотрим ϵ_k , в $U_{\epsilon_k}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} \in U_{\epsilon_k}(a)$

Таким образом, построена ч.п. $\{a_{n_k}\}$, такая что $\forall k \in \mathbb{N} : a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k} \implies$

\implies по теореме о зажатой последовательности $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

■

Note

Свойства частичных пределов ч.п.

$$\{a_n\} \text{ сходится} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{\text{множества предельных точек } \{a_n\}\}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{\text{множества предельных точек } \{a_n\}\}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ - частичные пределы

Theorem Система вложенных отрезков

Системой вложенных отрезков называют счётно бесконечное множество отрезков, каждый из

которых содержит следующий отрезок как подмножество
 Обозначение: $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subseteq I_k$

Example

Рассмотрим $S = \{[1 - \frac{1}{k}; 2 + \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$, тогда
 $S = \{[0; 3], [0.5; 2.5], [\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}], \dots\}$
 Рассмотрим $S = \{[\pi; \pi - \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$, тогда
 $S = \{[\pi; \pi - 1], [\pi; \pi - \frac{1}{4}], [\pi; \pi - \frac{1}{27}], \dots\}$

Theorem Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной ч.п. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Proof:

По определению ограниченной ч.п. $\exists C \forall n \in \mathbb{N} |a_n| < C$
 Построим искомую подпоследовательность при помощи системы вложенных отрезков
 $I_1 = [-c; c], \forall n \in \mathbb{N} a_n \in I_1$, выберем какой-то член ч.п. $a_{n_1} \in I_1$
 Т.к. $\{a_n\}$ - ч.п., то в какой-то половине точно есть бесконечно много членов $\{a_n\}$
 Выберем эту половину и обозначим I_2 , выберем в нём какой-то член ч.п. $a_{n_2} \in I_2$
 Пусть построен I_k и a_{n_k} . Делим I_k пополам и выбираем половину,
 в которой бесконечно много членов $\{a_n\}$, обозначим эту половину как I_{k+1}
 и выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$
 Построили последовательность $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k; d_k]$
 $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{b_k\}$ неубывает и ограничена сверху C
 $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_k = b, b \geq b_k$
 $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{d_k\}$ невозрастает и ограничена снизу $-C$
 $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} d_k = d, d \leq d_k$
 При этом $|d_k - b_k| = \frac{2 \cdot C}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$
 ADDPROOF[$d \geq b$](пока что см. консультацию 2)
 $d - b \leq d_k - b_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty \implies d \leq b \implies d = b$

■

Definition: Фундаментальная ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n, m > N(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$$

Theorem Критерий сходимости ч.п. по Коши

Ч.п. $\{a_n\}$ сходится $\iff \{a_n\}$ - Фундаментальная ч.п.

Proof:

” \implies ”

Распишем, что дано: $\exists A \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1 : |a_n - A| < \epsilon$

Хотим доказать: $\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \epsilon$

$$|a_n - a_m| < \epsilon \iff |a_n - a + a - a_m| < \epsilon \iff |a_n - a| + |a - a_m| < \epsilon \iff |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon$$

Положим $N_2(\epsilon) := N_1\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \implies$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon \implies$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \epsilon$$

” \impliedby ”

Распишем, что дано: $\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$

Покажем, что $\{a_n\}$ ограничена: положим $\epsilon = 1 \implies$

$$\exists N_2(1) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < 1 \implies$$

$$\exists N_2(1) \forall n > N_2 : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1 \implies$$

$$\exists N_2(1) \forall n > N_2 : a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$$

Положим $C := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_2(1)}|, |a_{N_2(1)+1}|) + 1 \implies$

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists a \in \mathbb{R} \exists \{a_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$

Перепишем, что дано:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2(\epsilon) \forall n, m > N_2(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_3(\epsilon) \forall k > N_3(\epsilon) : |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

Распишем, что хотим доказать:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

$$|a_n - a| < \epsilon \iff |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < \epsilon \iff |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

Т.к. при выборе членов в подпоследовательности $n_k \geq k$, то при $k > N_3(\epsilon) \implies n_k > N_3(\epsilon)$

Положим $N_1(\epsilon) = \max\left(N_2\left(\frac{\epsilon}{2}\right), N_3\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right) \implies$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon \implies$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

■

Definition: Постоянная Эйлера

Рассмотрим ч.п. $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его γ

Proof:

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$$

γ_n убывает

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \left(1 - (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 - \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)\right) \end{aligned}$$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходится к e и убывает. Докажем убывание

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{n^3+4n^2+4n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1 \end{aligned}$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} (1 - \ln b_n)$$

$$b_n \text{ убывает к } e \implies b_n > e \implies \ln b_n > 1 \implies \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$$

Докажем ограниченность γ_n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \implies n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \implies \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n} > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln(n+1) - \ln n - \ln n = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

■

Definition: Определение функции

Множество пар $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D_f \wedge y \in E_f\}$ называется функцией f с областью определения D_f и областью значения E_f , если $\forall x \in D_f \exists! y \in E_f : (x, y) \in f$ (для удобства $(x, y) \in f$ обозначают как $f(x) = y$)

Обозначение функции: $f : X \rightarrow Y$

В данном обозначении подразумевают, что $D_f = X, E_f \subseteq Y$

Example

$$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \text{ в данном случае } D_f = \mathbb{N} \cup \{0\}, E_f = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

Т.к. несложно установить, что $E_f = \mathbb{Z}$, то можно написать $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$

Definition: Определение инъективной функции

Функция f называется инъективной, если $\forall y \in E_f \exists! x \in D_f : f(x) = y$
 Это эквивалентно тому, что $\forall x_1, x_2 \in D_f : (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$
 (говорят, что f - инъекция)

Example

$\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^{2n-1}$ является инъективной
 $\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^{2n}$ не является инъективной

Definition: Определение сюръективной функции

Функция $f : X \rightarrow Y$ называется сюръективной для множества Y , если $E_f = Y$
 (говорят, что f - сюръекция)
 Когда говорят, что f сюръективна, не уточняя множество, то подразумевают, что f сюръективна для Y

Example

Функция $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не сюръективна для \mathbb{R} , но сюръективна для $[-1; 1]$

Definition: Определение биективной функции

Функция $f : X \rightarrow Y$ называется биективной, если она инъективна и сюръективна
 (говорят, что f - биекция)

Example

Функция $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$, такая что
 $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ - биекция между $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и \mathbb{Z}
 (как следствие, показали, что $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{Z}$, т.е. множества равномощны)

Definition: Определение обратной функции

Функция $y = f^{-1}(x)$ называется обратной функцией к функции $y = f(x)$, если множество пар функции f^{-1} является симметрией множества пар f

Note

Функция обратима \iff она инъективна

Definition: Определение предела функции по Коши

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Note

При этом $\dot{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty)$, $\dot{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta)$, $\dot{U}_\delta(\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$

Definition: Определение предела функции по Гейне

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : (x_n \neq x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A)$$

Definition: Односторонний предел функции

Левосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \rightarrow x_0$ слева, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Правосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \rightarrow x_0$ справа, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Theorem Свойство предела функции при $x \rightarrow x_0, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ где } A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Proof:

” \implies ”

Дано: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

Тогда:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

” \impliedby ”

Дано:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta_1) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_2; x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

Положим $\delta(\epsilon) = \min(\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon))$, тогда:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subseteq (x_0 - \delta_2; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta_1) : f(x) \in U_\epsilon(A)$

■

Definition: Бесконечные пределы

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$

Definition: Бесконечно малая функция

Функция называется б.м. при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$

Функция называется б.м. при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Функция называется б.м. при $x \rightarrow -\infty$, если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Definition: Бесконечно большая функция

Функция называется б.б. при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$

Функция называется б.б. при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

Функция называется б.б. при $x \rightarrow -\infty$, если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

Definition: Ограниченная функция

Функция называется ограниченной при $x \rightarrow x_0$, если $\exists \delta > 0 \exists C > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| < C$

Definition: отделимая от нуля функция

Функция называется отделимой от нуля при $x \rightarrow x_0$, если $\exists \delta > 0 \exists \epsilon_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > \epsilon_0$

Note

Связь функций при $x \rightarrow x_0$, где x - аргумент обеих функций, x_0 - число, которому стремится аргумент обеих функций:

- $\frac{1}{\text{б.п.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.п.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Theorem Теорема о зажатой функции

$$\left. \begin{array}{l} f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \\ \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$$

Definition: Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Definition: Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Theorem Теорема о пределе сложной функции

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Proof:

Распишем, что дано, по определению:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1(\epsilon) \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\epsilon)}(x_0) : |f(x) - y_0| < \epsilon \quad (1)$$

$$\forall \lambda > 0 \exists \delta_2(\lambda) \forall y \in \dot{U}_{\delta_2(\lambda)}(y_0) : |g(y) - g(y_0)| < \lambda \quad (2)$$

Распишем, что хотим доказать:

$$\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta(\eta) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$$

Положим $\delta_3(\eta) = \delta_1(\delta_2(\eta))$, тогда :

$$x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) \iff x \in \dot{U}_{\delta_1(\delta_2(\eta))}(x_0) \implies \text{по (1)} |f(x) - y_0| < \delta_2(\eta)$$

$$|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta) \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$$

По (2) знаем, что если $f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Если $f(x) = y_0$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Иначе, если $f(x) \neq y_0 \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Получили: $\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta_1(\delta_2(\eta)) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

■

Definition: Асимптоты

Вертикальная асимптота: • Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$$

Горизонтальная асимптота: • Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ на $\pm\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

Вообще говоря, горизонтальные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными

Наклонная асимптота: • Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (kx + b) = 0$$

Вообще говоря, наклонные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными

Theorem Признак наклонной асимптоты

Прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty \iff$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b \end{cases}$$

Proof:

" \implies "

1. Распишем определение наклонной асимптоты: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$

Вынесем b из предела: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$

$f(x) - kx - b$ - б.м. при $x \rightarrow +\infty$

Т.к. $x \rightarrow +\infty$, то можно поделить на x :

$$\frac{f(x)}{x} - k = \frac{b}{x} + \frac{\text{б.м.}}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty \\ \frac{\text{б.м.}}{x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \implies \frac{f(x)}{x} - k \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

" \impliedby "

Т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$

■

Definition: O - символика

о-малое: • $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$

О-большое: • $f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - ограниченная при $x \rightarrow x_0$

Definition: Непрерывность функции в точке

Функция называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Clarification

Если x_0 - граница области определения, то рассматривается односторонний предел

Note

Свойства непрерывных функций:

- Сумма, произведение и частное непрерывных функций - непрерывные функции (по арифметике пределов функции)
- Композиция непрерывных функций - непрерывная функция (по теореме о пределе сложной функции)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

Claim Правило замены переменных в пределе

Пусть дана сложная функция $f(g(x))$, тогда, если для некоторой точки x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$ и $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A \in \mathbb{R}$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$

Example (Пример использования правила замены переменной в пределе)

Пусть надо найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x}$

Преобразуем выражение: $\frac{\sin(\pi x)}{x} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi$

В данном случае в обозначения из утверждения выше:

$$f(y) = \frac{\sin(y)}{y}$$

$$g(x) = \pi x$$

$g(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, $y_0 = g(x_0) = 0$, и при этом $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = 1 = A$

Тогда по правилу замены переменной в пределе:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi = \lim_{x \rightarrow 0} A \cdot \pi = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \pi = \pi$$

Definition: Непрерывность функции на множестве

Функция называется непрерывной на множестве E , если она непрерывна в каждой точке множества E

/* Когда говорят, что функция непрерывна, имеют ввиду, что она непрерывна на D_f */

Note

В частности, функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка $[a; b]$. При этом, в точках a и b рассматриваются односторонние пределы

Theorem Теорема о функции, непрерывной на отрезке (иногда называют теоремой Вейерштрасса)

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и достигает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке

Докажем, что функция ограничена сверху и достигает наибольшее значение. Для второго случая доказательство проводится аналогично

Proof:

1. E_f — мно-во значений $f(x)$ на $[a; b]$

Обозначим $M = \sup E_f = \sup_{x \in [a; b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Построим некоторую строго возрастающую ч.п. $a_n \rightarrow M$ при $n \rightarrow +\infty$

2. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n)$

Предположим от противного, то есть $\exists n_0 \forall x \in [a; b] : a_{n_0} \geq f(x)$

Тогда a_{n_0} — верхняя грань множества E_f

Однако, т.к. a_n — возрастающая ч.п. и $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = M$, то $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < M$

В частности, $a_{n_0} < M$, т.е. a_{n_0} — верхняя грань, которая меньше точной верхней грани \implies

$\implies \textcircled{W} \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n)$

3. По построению $\forall x \in [a; b] : f(x) \leq M$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n) \leq M$

Следовательно, по теореме о зажатой последовательности $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$

4. Докажем, что $M = f(x_0)$

Т.к. x_n — ограниченная ч.п., то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0 \in [a; b]$

Т.к. f непрерывна на отрезке, то она непрерывна в x_0 , следовательно

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

$$(\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M) \wedge (\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)) \implies M = f(x_0) < \infty$$

Таким образом, на отрезке $[a; b]$ функция f ограничена сверху числом $M = f(x_0)$

■

Theorem Теорема (2) о функции, непрерывной на отрезке

Непрерывная на отрезке $[a; b]$ принимает все промежуточные значения

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, $f(x_1) = A$, $f(x_2) = B$, $x_1 < x_2$, БОО $A < B$, тогда

$\forall c \in (A; B) \exists x_0 \in (x_1; x_2) : f(x_0) = c$

Proof:

1. Построим последовательность вложенных отрезков:

/* Если Вам так будет удобнее, то докажем существование x_0 бинарным поиском по ответу */

$$[a_1; b_1] := [x_1; x_2]$$

$$x_3 := \frac{a_1 + b_1}{2}, \text{ рассмотрим } f(x_3)$$

$$1) f(x_3) = c \implies \text{q.e.d.}$$

$$2) f(x_3) < c \implies [a_2; b_2] := [x_3; b_1]$$

$$3) f(x_3) > c \implies [a_2; b_2] := [a_1; x_3]$$

Применяя это правило, продолжим строить последовательность отрезков

Если ни на какой итерации не произойдёт случай 1), то получим счётно бесконечную

последовательность отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$

По построению ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху $b \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq b$

По построению ч.п. $\{b_n\}$ невозрастает и ограничена снизу $a \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \geq a$

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0$$

$$x_0 \in [a; b] \implies f(x) \text{ непрерывна в } x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \implies$$

$$\implies \text{по определению по Гейне } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(x_0)$$

$$\text{По построению } f(a_n) < c \wedge f(b_n) > c \implies c \leq f(x_0) \leq c \implies f(x_0) = c$$

■

Corollary Следствие

$$f(x) \text{ непрерывна на } [a; b] \implies E_f = [\inf E_f; \sup E_f]$$

Corollary Следствие

$$f(x) = x^2 \text{ непрерывна на } D_f = [0; 2] \implies (E_f = [0; 4] \wedge \exists x_0 \in \mathbb{R} : x_0^2 = 2)$$

То есть доказано существование числа $\sqrt{2}$

Corollary Следствие

$$f(x) \text{ непрерывна на } [a; b] \wedge f(a) < 0 \wedge f(b) > 0 \implies \exists c \in (a; b) : f(c) = 0$$

Definition: Определение монотонности функции

- $f(x)$ называется строго возрастающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- $f(x)$ называется неубывающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f(x)$ называется строго убывающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- $f(x)$ называется невозрастающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Definition: Достаточное условие обратимости

Если функция $f(x)$ строго монотонна на X , то $f(x)$ обратима на X

Proof:

Предположим от противного, что $f(x)$ не инъективна, то есть

$$\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \implies \min(x_1, x_2) < \max(x_1, x_2) \implies \textcircled{W} \text{ с определением строгой монотонности}$$

■

Definition: Критерий обратимости функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Тогда $f(x)$ обратима $\iff f(x)$ строго монотонна

Proof:

" \Leftarrow "Смотри достаточное условие обратимости

" \Rightarrow "

Докажем для случая, когда $f(x)$ строго монотонно возрастает, для убывания аналогично

Предположим от противного, тогда БОО

$$\exists x_1 < x_2 < x_3 \in [a; b] : f(x_1) < f(x_2) \geq f(x_3)$$

$$\text{Если } f(x_2) = f(x_3), \text{ то } f \text{ не инъективна} \implies f \text{ не обратима} \implies \textcircled{W}$$

$$\text{Иначе, положим } c := \frac{\max(f(x_1), f(x_3)) + f(x_2)}{2} \implies f(x_1) < c < f(x_2) \wedge f(x_3) < c < f(x_2)$$

$$f \text{ непрерывна на } [a; b] \implies f \text{ непрерывна на } [x_1; x_2] \text{ и } [x_2; x_3]$$

$$f \text{ непрерывна на } [x_1; x_2] \implies \exists x'_0 \in (x_1; x_2) : f(x'_0) = c$$

$$f \text{ непрерывна на } [x_2; x_3] \implies \exists x''_0 \in (x_2; x_3) : f(x''_0) = c$$

$$\text{Получили: } \exists x'_0 < x''_0 \in [a; b] : f(x'_0) = f(x''_0) \implies f \text{ не инъективна} \implies f \text{ не обратима} \implies \textcircled{W}$$

■

Theorem

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$, то функция $f^{-1}(y)$:

- 1) определена на $E_f = [\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$
- 2) монотонна (и имеет ту же монотонность) на E_f
- 3) непрерывна на E_f

Proof:

1. Доказано по критерию обратимости функции

2. БОО f возрастает на $[a; b]$

Предположим от противного

$f^{-1}(y)$ не возрастает на $[a; b] \implies \exists y_1 < y_2 \in [f(a); f(b)] : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

По определению обратной функции $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in [a; b]$, обозначим $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$

$x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$. При этом, $f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$

$x_1 \geq x_2 \implies y_1 \geq y_2 \implies \textcircled{\text{W}}$

3. Докажем непрерывность по определению

Дано: $x = f^{-1}(y)$ - определённая монотонная на $[a; b]$ функция

Докажем, что f^{-1} непрерывна в любой точке $y_0 \in (f(a); f(b))$

Для $y_0 \in \{f(a), f(b)\}$ доказательство аналогично (нужно рассмотреть односторонние пределы)

По определению непрерывности в точке $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in U_\delta(y_0) : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$

Обозначим $f^{-1}(y_0) = x_0$

БОО докажем для таких ϵ , что $U_\epsilon(x_0) \subset (a; b)$. Для *больших* ϵ неравенство также будет выполняться $a < x_0 - \epsilon < x_0 + \epsilon < b$

Обозначим $y_1 = f(x_0 - \epsilon), y_2 = f(x_0 + \epsilon)$, тогда $y_1 < y_0 < y_2$

Положим $\delta := \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1)$, тогда $U_\delta(y_0) \subset (y_1; y_2)$

Докажем, что при выбранном δ выполняется неравенство под знаками кванторов:

$y \in U_\delta(y_0) \implies y \in (y_1; y_2) \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \implies x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon \implies$
 $\implies |f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon \implies$ неравенство под кванторами верно и определение выполняется

■

Corollary Следствие (без доказательства)

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $(a; b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, то функция $f^{-1}(y)$:

- 1) определена на $(m; M)$, где $m = \min(f(a), f(b)), M = \max(f(a), f(b))$
- 2) монотонна (и имеет ту же монотонность) $[m; M]$
- 3) непрерывна на $(m; M)$

Идея доказательства: рассмотреть $[c; d] \subset (a; b)$, для него верна теорема выше, а далее перейти к пределу при границах, стремящихся к a и b

Corollary

Т.к. $f(x) = x^n$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $D_f = n \stackrel{?}{:} 2 \text{ ? } [0; +\infty) : \mathbb{R}$, то

$g(x) = \sqrt[n]{x}$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $D_g = E_f = n \stackrel{?}{:} 2 \text{ ? } [0; +\infty) : \mathbb{R}$

Definition: Обратные тригонометрические функции

$y = \sin x$ непрерывна и возрастает на $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \implies$

$\implies \exists \arcsin := \sin^{-1} : y = \arcsin x$ непрерывна и возрастает на $D_f = [-1; 1], E_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Аналогично

- $y = \arccos x$ непрерывна и убывает на $D_f = [-1; 1], E_f = [0; \pi]$
- $y = \arctan x$ непрерывна и возрастает на $D_f = \mathbb{R}, E_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
- $y = \operatorname{arctg} x$ непрерывна и убывает на $D_f = \mathbb{R}, E_f = (0; \pi)$

Definition: Показательная функция

(теорема без доказательства) функция $y = a^x, a > 0$

- 1) определена на $D_f = \mathbb{R}, E_f = (0; +\infty)$
- 2) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на \mathbb{R}
- 4) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

/* Следствие: $\phi(x) = a^x$ является изоморфизмом между $(\mathbb{R}, +)$ и (\mathbb{R}_+, \cdot) */
 $(a^x)^y = a^{xy}$

Definition: Логарифмическая функция

Функция, обратная к $y = a^x, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ обозначается $y = \log_a x$

- 1) определена на $D_f = (0; +\infty), E_f = \mathbb{R}$
- 2) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на $(0; +\infty)$
- 4) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

/* Следствие: $\psi(x) = \log_a x$ является изоморфизмом между (\mathbb{R}_+, \cdot) и $(\mathbb{R}, +)$ */
 $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

Corollary Следствия из 2 замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Proof:

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{x} \ln(x+1) = \ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Функция $\ln x$ непрерывна, тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$$

■

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Proof:

$$t = e^x - 1 \implies x = \ln(t+1)$$

$$x \rightarrow 0 \implies t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

■

Corollary Показательная функция с вещественным показателем

$$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$$

$$y = e^{\alpha \ln x}$$

$\ln x$ непрерывна и возрастает на $(0; +\infty)$

$\alpha \ln x$ непрерывна и возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$

$e^{\alpha \ln x}$ непрерывна и возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$

Corollary

$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = a \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = b \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x)^{b(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{b(x) \ln a(x)} = e^{b \ln a} = a^b$
 Для ч.п. $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ построим кусочно-линейные функции $a(x)$ и $b(x)$, такие что $\forall n \in \mathbb{N} : a(n) = a_n \wedge b(n) = b_n$
 Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = a^b$

Definition: Определение производной

Производная функции f в точке x_0 - это предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Note

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x$$

Proof:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

Note

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x^n)' = nx^{n-1}$$

Proof:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k = nx_0^{n-1}$$

Note

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Proof:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} &= a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \\ &= a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \ln a} - 1}{t} = a^{x_0} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s} \cdot \ln a = a^{x_0} \ln a \end{aligned}$$

Note

$$(e^x)' = e^x$$

Claim Правила подсчёта производных

Если $\exists f'(x), \exists g'(x), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, то

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $g(x) \neq 0 \implies \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Definition: Дифференцируемость функции

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

Theorem

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \iff \exists f'(x_0) (\in \mathbb{R})$

Proof:

” \implies ”

По определению дифференцируемости в точке

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \bar{o}(1) \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R} \implies \exists f'(x_0) = A \in \mathbb{R}$$

” \impliedby ”

По определению производной:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \bar{o}(1) \implies$$

$$\implies f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$\implies f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0), A = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

■

Definition: Определение дифференциала

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 - это линейная функция $df(x) = A \cdot (x - x_0)$ такая, что $f(x) = f(x_0) + df(x) + \bar{o}(x - x_0)$

Theorem

Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в ней

Proof:

По определению дифференцируемости в точке x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_0) \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{o}(x - x_0) = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

■

Theorem

Если $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $f(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то $f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Proof:

$$\begin{aligned}g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \\f(y) &= f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \bar{o}(y - y_0) \implies \\f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) + \bar{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) \\f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0)) \cdot \bar{o}(x - x_0) + \bar{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) = \\&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) + (x - x_0)\bar{o}(g'(x_0) + \bar{o}(x)(1)) = \\&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \implies (f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\end{aligned}$$

■

Theorem

Если $f(x)$ непрерывна и обратима на $[a; b]$, $x_0 \in (a; b)$, $\exists f'(x_0) \neq 0$, тогда $\exists (f^{-1}(y))'|_{y=f(x_0)=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Proof:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f'(y) - f'(y_0)}{y - y_0} = |\text{замена } y = f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

Example

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x, f'(x) = e^x, f^{-1}(y) = \ln y \\(f^{-1}(y))'|_{y=y_0} &= \frac{1}{f'(f^{-1}y_0)} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}\end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}\text{Пример: } y &= x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty) \\y &= e^{\alpha \ln x} \implies y' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Definition: Определение локального минимума (точка минимума)

x_0 - точка локального минимума функции $f(x)$, если $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \leq f(x)$
 x_0 - точка строгого локального минимума функции $f(x)$, если $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) < f(x)$

Definition: Определение локального максимума (точка максимума)

x_0 - точка локального максимума функции $f(x)$, если $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \geq f(x)$
 x_0 - точка строгого локального максимума функции $f(x)$, если $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) > f(x)$

Definition: Точка локального экстремума

Точками локального экстремума называются точки минимума и точки максимума

Theorem Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)

Если x_0 - точка локального экстремума, то $\exists f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0$

Proof:

Пусть $\exists f'(x_0)$

Докажем для случая, когда x_0 - локальный минимум, для локального максимума доказательство аналогично.

Предел при $x \rightarrow x_0$ существует \implies существуют односторонние пределы и они совпадают с $f'(x_0)$

В некоторой δ окрестности $f(x_0) \leq f(x)$

$$\left. \begin{array}{l} x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

■

Definition: Касательная к графику функции

Касательной к графику функции $f(x)$ называется прямая $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Theorem Теорема Ролля

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a; b]$
- Дифференцируема на $(a; b)$
- $f(a) = f(b)$

То $\exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) = 0$

Proof:

1. Обозначим $M := \sup_{x \in [a; b]} f(x), m := \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ достигаются, т.к. функция непрерывна на отрезке
2. Если $m = M \implies f(x) = \text{const} \implies \forall x \in (a; b) : f'(x) = 0$
3. Иначе, если $m < M$, тогда хотя бы одна из этих точек достигается в $\xi \in (a; b)$ (т.к. $f(a) = f(b)$)
 БОО $f(\xi) = M \implies \xi$ - точка loc max
 f дифференцируема на $(a; b) \implies \exists f'(\xi) \implies f'(\xi) = 0$ (по теореме Ферма)

■

Theorem Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a; b]$
- Дифференцируема на $(a; b)$

То $\exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

Proof:

1. Рассмотрим $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$, эта функция также, как и функция f , непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$
 $F(a) = F(b) \implies$ для F выполняются требования теоремы Ролля $\implies \exists \xi \in (a; b) : F'(\xi) = 0 \implies$
 $\implies \exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies \exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

■

Corollary

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a; b]$
- Дифференцируема на $(a; b)$
- $f'(x) = 0$ на $(a; b)$

То $f(x) = \text{const}$ на $[a; b]$

Proof:

$$\forall x_1, x_2 \in [a; b] f(x) \text{ удовлетворяет требованиям теоремы Лагранжа на } [x_1; x_2] \implies \\ \implies \exists \xi \in (x_1; x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\text{Получили: } \forall x_1, x_2 \in [a; b] f(x_2) - f(x_1) = 0$$

■

Corollary

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- Непрерывность на $[a; b]$
- Дифференцируемость на $(a; b)$
- $\forall x \in (a; b) : f'(x) = g'(x)$

То $\forall x \in [a; b] : f(x) - g(x) = \text{const}$

Theorem Теорема следствие

Если $\phi(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $\phi'(x)$ определена везде на $(a; b)$, кроме, быть может, x_0 , и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(x) = A \in \mathbb{R}$

То $\exists \phi'(x_0) = A$

Proof:

По определению производной и по теореме Лагранжа:

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(\xi(x)), \xi(x) \in (x_0; x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \xi(x) = x_0 \implies \phi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(\xi(x)) = A \text{ (по теореме о пределе сложной функции)}$$

■

Theorem

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на $[a; b]$
- Дифференцируема на $(a; b)$

То:

$$\forall x \in (a; b) f'(x) \geq 0 \iff f(x) \text{ неубывает на } [a; b]$$

$$\forall x \in (a; b) f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ возрастает на } [a; b]$$

При нахождении опечаток просьба написать https://t.me/i8088_t, на момент компиляции ник в тг: vova kormilitsyn