notes

ver. 1.0.4

Теоремы и определения

Definition: Высказывания и n-местные предикаты

Высказывание - это упрощённая модель повествования предложения, такая что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, но не одновременно
n-местные предикат (n-арный предикат) - это выражение, которое превращается в высказывание, если в нём заменить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на подходящие имена, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - переменные в предикате

Definition: Логические операции

Отрицание:	• $\neg A$ (также обозначают $\bar{A}$) означает "не A"
Логическое и:	• $A \wedge B$ означает "верно A и верно B"
Логическое или:	• $A \vee B$ означает "верно A, или верно B, или верны A и B вместе"
Исключающее или:	• $A \oplus B$ означает "верно ровно одно из высказываний A, B"
Импликация:	• $A \implies B$ означает "если верно A, то верно B"
Эквивалентность:	• $A \iff B$ означает "A верно тогда и только тогда, когда верно B"

Note

Пусть $A \implies B$
Если A верно, то B тоже верно, но если A ложно, то B может быть и истинным, и ложным
Пусть $A \iff B$
Если A ложно, то ложно B. Если B верно, то верно A

Note

Логические операции можно выражать через другие логические операции, например,
$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$

Definition: Кванторы

Квантор всеобщности обозначается как $\forall$ и означает "для любого"
Квантор существования обозначается как $\exists$ и означает "существует"
Квантор едиственности обозначается как ! и означает "едиственный, такой что ..."

Example

Всеобщность:	• $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x)$ означает "Для любого x из $\mathbb{R}$ выполняется предикат $\phi(x)$"
Существование:	• $\exists x \, (x \in \mathbb{Q} \implies \psi(x))$ означает "Существует x, такой что если x из $\mathbb{Q}$, то выполняется предикат $\psi(x)$"
Единственность:	• $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists! k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \leq n < 2^{k+1}$ означает "Для любого натурального числа существует и едиственно такое целое неотрицательное число k, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$"

Note

На практике квантор едиственности часто используется вместе с квантором существования т.е. часто используют связку $\exists!$, "существует и единственно"

Note

Вместо "$\neg\exists$" пишут "$\nexists$"

Claim Правило обращения кванторов

При обращении кванторов квантор существования меняется на квантор всеобщности, квантор всеобщности меняется на квантор существования, а утверждение под кванторами меняется на противоположное

Example

Пусть дано высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m_1 \in \mathbb{Z}\, \exists m_2 > m_1\, \forall q \in \mathbb{Q} : |m_1| > n \land \neg\psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Тогда отрицание к этому высказыванию будет:

$$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m_1 \in \mathbb{Z}\, \forall m_2 > m_1\, \exists q \in \mathbb{Q} : |m_1| \leq n \lor \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Claim Метод математической индукции

Пусть есть предикат $\phi(n)$, который выполняется или не выполняется при различных $n \in \mathbb{N}$
Тогда, если $\exists k \in \mathbb{N} : \phi(k)$ и $\forall n \geq k : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$, то по методу математической индукции получаем $\forall n \geq k : \phi(n)$
Этапы доказательства:

База индукции:	• Проверка истинности $\phi(k)$
Предположение индукции:	• Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N} \land n \geq k$ верно $\phi(n)$
Шаг индукции:	• Докажем, что $\phi(n+1)$, используя предположение индукции
Вывод:	• $\forall n \geq k : \phi(n)$

Theorem Неравенство Бернулли

Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq -1$, то $(1+x)^n \geq 1 + xn$

Proof:

Докажем неравенство при помощи метода математической индукции

1. База индукции:

Пусть $n = 1 \implies (1+x)^n = 1 + x \geq 1 + x$

2. Предположение индукции:

Пусть для некоторого $n \geq 1$ верно, что $(1+x)^n \geq 1 + xn$

3. Шаг индукции: Рассмотрим неравенство, подставив в него $n + 1$:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$

$1 + x \geq 0 \implies (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+xn) \cdot (1+x) = 1 + xn + x + n \cdot x^2 \geq 1 + nx + x = 1 + n(x+1)$

Следовательно, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + n(x+1)$

4. Обозначим доказываемое высказывание как предикат $\phi(n)$, тогда получаем:

$\phi(1) \land \forall n \in \mathbb{N} : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$

Тогда по принципу математической индукции $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n)$

■

Definition: Перестановки, размещения и сочетания

Пусть дано множество из n элементов
• Если все элементы попарно различны (т.е. при решении задачи мы считаем, что два любых элемента множества различны), то количество попарно различных перестановок этого множества обозначается как P_n и равно $n!$
Пусть зафиксировано $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что $k \le n$, тогда:
• Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k-элементное подмножество данного множества, считая, что элементы попарно различны, обозначается как A_n^k и равно $\frac{n!}{(n-k)!}$
• Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k-элементное подмножество данного множества, считая, элементы равны, обозначается как C_n^k и равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Theorem Бином Ньютона
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$(формально, перед равенством необходимо написать $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$)

Proof:

Докажем это утверждение при помощи метода математической индукции

1. База индукции: $n = 1 \implies (a+b)^n = a + b = \sum\limits_{k=0}^{1} C_n^k a^k b^{n-k}$

2. Предположение индукции: пусть для некоторого $n \ge 1 : (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

3. Рассмотрим равенство и докажем, что оно верно при подстановке $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^0 a^0 b^{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + C_{n+1}^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

4. Получили:

Равенство верно при $n = 1$, а из верности равенства для n следует верность равенства для $n+1$ (при $n \ge 1$), тогда по методу математической индукции получим, что равенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$

∎

Definition: Числовая последовательность

Числовая последовательность - это счётно бесконечный проиндексированный набор чисел

Definition: Ограниченная сверху числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если
$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n < C$

Definition: Ограниченная снизу числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если
$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n > -C$

Definition: Ограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если
$\exists C > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$

Note

Числовая последовательность ограничена $\iff$ она ограничена сверху и ограничена снизу

Definition: Неограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется неограниченной, если она не является ограниченной, то есть
$\forall C > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$

Definition: Отделимая от нуля числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется отделимой от нуля, если
$\exists \epsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| > \epsilon$

Definition: Эпсилон окрестность

Эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$ и обозначается $U_\epsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Эпсилон окрестность точки x_0"

Example

$U_1(\pi) = (\pi - 1; \pi + 1)$
$U_e(e) = (0; 2e)$

Definition: Проколотая эпсилон окрестность

Проколотой эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$ и обозначается $\dot{U}_\epsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Проколотая эпсилон окрестность точки x_0"

Example

$\dot{U}_1(e) = (e - 1; e + 1) \setminus \{e\} = (e - 1; e) \cup (e; e + 1)$

Definition: Сходящаяся числовая последовательность

Числовая последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел при $n \to +\infty$, т.е. ч.п. $\{a_n\}$ называется сходящейся, если $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, то есть по определению

$$\exists A \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0\, \exists N = N(\epsilon) \forall n > N : |a_n - A| < \epsilon$$

Note

Сходящаяся ч.п. является ограниченной

Note

Неравенство $|a_n - A| < \epsilon$ равносильно тому, что $a_n \in U_\epsilon(A)$

Definition: Бесконечно большая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если она стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞ при $n \to +\infty$, т.е.

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : a_n > M$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : a_n < -M$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : |a_n| > M$

Definition: Бесконечно малая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если она стремится к 0 при $n \to +\infty$, т.е.
$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall n > N : |a_n| < \epsilon$

Note

Связь числовых последовательностей:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Note

Если ч.п. сходится или является б.б., то предел единственный

Theorem Теорема: свойство предельного перехода в неравенствах

$$(\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : c_n > A) \wedge (\lim_{n\to\infty} c_n = C) \implies C \geq A$$

Proof:

1. Распишем, что дано, по определению:
$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |c_n - C| < \epsilon$
Это равносильно $\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : C - \epsilon < c_n < C + \epsilon$
$\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : c_n > A$
2. Для любого ϵ рассмотрим $M(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N) + 1$
Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N) + 1\, \forall n > M : (C - \epsilon < c_n < C + \epsilon \wedge c_n > A)$
Следовательно, $\forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon)\, \forall n > M : C + \epsilon > A$
Выражение под кванторами не зависит от M и $n \implies \forall \epsilon > 0 : C + \epsilon > A$
3. Предположим от противного, что $C < A$
Положим $\epsilon := \dfrac{A - C}{2} > 0 \implies C + \epsilon = C + \dfrac{A - C}{2} = \dfrac{A + C}{2} < A$
Получили, что $\exists \epsilon > 0 : C + \epsilon < A \implies (\mathbb{W}) \implies$ предположение, что $C < A$, неверно $\implies C \geq A$

■

Theorem Теорема о зажатой последовательности (о 2 миллиционерах / 2 полицейских / гамбургерах)

$$\left.\begin{array}{l} a_n, b_n, c_n \text{ - числовые последовательности} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = X \\ \lim_{n\to\infty} b_n = X \\ \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : a_n \leq c_n \leq b_n \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to\infty} c_n = X$$

Proof:

Докажем для случая, когда $X \in \mathbb{R}$. При $X \in \bar{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ доказательство проводится аналогично
1. Распишем по определению пределы.
$\forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1(\epsilon) : X - \epsilon < a_n < X + \epsilon$
$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n > N_2(\epsilon) : X - \epsilon < b_n < X + \epsilon$
Рассмотрим $N_3(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon), N)$, тогда
$\forall \epsilon > 0\, \exists N_3(\epsilon)\, \forall n > N_3(\epsilon) : X - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < X + \epsilon$
$\implies \forall \epsilon > 0\, \exists N_3(\epsilon)\, \forall n > N_3(\epsilon) : X - \epsilon < c_n < X + \epsilon$

■

Theorem Теорема о свойстве предела б.м. ч.п.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{где } \alpha_n \text{ - б.м. ч.п.}$$

Proof: Распишем α_n по определению:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N(\epsilon)\, \forall n > N(\epsilon) : |\alpha_n| < \epsilon$$

При $a_n = a + \alpha_n$, то $a_n - a = \alpha_n$.
Подставим в выражение под кванторами, этот переход является равносильным, то есть:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N(\epsilon)\, \forall n > N(\epsilon) : |\alpha_n| < \epsilon \iff \forall \epsilon > 0\, \exists N(\epsilon)\, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

Получили, что при α_n - б.м. ч.п. : $a_n = a + \alpha_n \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a$ ■

Definition: Монотонность ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

Claim Аксиома непрерывности действительных чисел (принцип полноты)

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \neq \varnothing \\ B \subseteq \mathbb{R} \\ B \neq \varnothing \\ \forall a \in A\, \forall b \in B : a \leq b \end{array}\right\} \implies \exists c \in \mathbb{R}\, \forall a \in A\, \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

Definition: Ограниченное сверху множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным свеху, если $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall a \in A : \ a \leq C$

Definition: Ограниченное снизу множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall a \in A : \ a \geq C$

Definition: Ограниченное множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным, если $\exists C > 0\, \forall a \in A : \ |a| \leq C$

Definition: Определение верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда верхней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что
$\forall a \in A : a \leq c$

Definition: Определение нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда нижней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что
$\forall a \in A : a \geq c$

Definition: Определение точной верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда точной верхней гранью множества A называют наименьший элемента множества всех верхних граней множества A и обозначают $\sup A$

Definition: Определение точной нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда точной нижней гранью множества A называют наибольший элемента множества всех нижней граней множества A и обозначают $\inf A$

Theorem Теорема о существовании точной грани множества

Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ ограничено сверху, то $\exists \sup A$
Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ ограничено снизу, то $\exists \inf A$

Proof: Докажем для верхней грани, для нижней грани доказательство аналогично

$$A \subseteq \mathbb{R} \land A \neq \varnothing \land (\exists C > 0 \, \forall a \in A \implies a < C) \implies \exists \sup A$$

1. Обозначим $S_A = \{c \in \mathbb{R} | \forall a \in A \implies a \leq c\} \neq \varnothing$ - множество верхних граней
Это множество не пусто, т.к. A ограничено по условию, т.е. $\exists c > 0 \, \forall a \in A \implies a \leq c$
2. По построению множества A и S_A удовлетворяют аксиоме непрерывности действительных чисел, тогда $\exists b \in \mathbb{R} \, \forall a \in A \forall c \in S_A \implies a \leq b \leq c$
Но из $b \leq c \implies b \in S_A$, при этом $(\forall c \in S_A \implies b \leq c)$, следовательно, b является наименьшим элементом множества верхних граней множества A, т.е. по определению точной верхней грани $b = \sup A$

■

Theorem Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ч.п.)

Если ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится
Если ч.п. $\{a_n\}$ невозрастает и ограничена снизу, то она сходится

Proof: Докажем для неубывающей ч.п., для невозрастающей ч.п. доказательство аналогично
1. Обозначим множество значений ч.п. $A = \{a_n\}$
Т.к. a_n - числовая последовательность, то множество A счётно или конечно
(т.е. существует инъекция между A и $\mathbb{N}, A \lesssim \mathbb{N}$)
Также $A \neq \varnothing$ и множество A ограничено сверху $\implies$ по теореме о существовании точной верхней грани $\exists \sup A = a$
2. Докажем, что $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, т.е. $\forall \epsilon \, \exists N = N(\epsilon) \, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$
a_n неубывает и ограничена сверху $a \implies |a_n - a| = a - a_n$, тогда
$|a_n - a| < \epsilon \iff a - a_n < \epsilon \iff a_n > a - \epsilon$
Т.к. последовательность a_n неубывает, то следующие 2 высказывания равносильны:
$\forall \epsilon \, \exists N = N(\epsilon) \, \forall n > N(\epsilon) : a_n > a - \epsilon$ (#)
$\forall \epsilon \, \exists N = N(\epsilon) : a_N > a - \epsilon$ (*)
3. Докажем второе высказывание (*) методом от противного.
Предположим, что $\exists \epsilon_0 \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a - \epsilon_0$
Тогда число $a - \epsilon_0$ - верхняя грань множества A, но a само является точной верхней гранью, но $a - \epsilon_0 < a \implies \perp \implies$ неверно предположение, что высказывание (*) неверно $\implies$ высказывание (#) верно ■

Definition: Число e

Рассмотрим ч.п. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его e

Proof: 1. Докажем, что a_n ограничена сверху числом 3

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n}\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \\
&= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3
\end{aligned}$$

2. Докажем, что a_n - возрастающая ч.п.
Рассмотрим a_{n+1}

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Т.к. $\forall m \in \{1, \ldots, n\}\ 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$, то

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right) > a_n$$

3. $\{a_n\}$ ограничена сверху и возрастает $\implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ■

Definition: Подпоследовательность

Пусть дана ч.п. $\{a_n\}$, тогда подпоследовательностью называется ч.п., полученная последовательным выбором некоторых членов исходной ч.п. и обозначается $\{a_{n_k}\}$

Definition: Частичный предел

Частичный предел ч.п. $\{a_n\}$ - число, являющееся пределом какой-либо сходящейся ч.п. последовательности $\{a_n\}$

Definition: Верхний предел ч.п.

Верхним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sup\{a_n\}_{n\geq k}$$

Definition: Нижний предел ч.п.

Нижним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \inf\{a_n\}_{n\geq k}$$

Definition: Предельная точка ч.п.

Предельной точкой ч.п. $\{a_n\}$ называется число a, такое что в любой окрестности точки a находится бесконечно много членов ч.п. $\{a_n\}$

Theorem Определение предельной точки ч.п. эквивалентно определению частичного предела ч.п.

Proof:

1. a - частичный предел $\implies$ a - предельная точка $\{a_n\}$

$\forall\epsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : |a_{n_k} - a| < \epsilon$

$\iff$

$\forall\epsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$

Следовательно, $\forall\epsilon$ в $U_\epsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$

2. a - предельная точка$\{a_n\}$ $\implies$ a - ч.п. $\{a_n\}$

По определению предельной точки $\forall\epsilon$ в $U_\epsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$

Предъявим ч.п. $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$, такую что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

Обозначим $\epsilon_k = \dfrac{1}{k}$

Рассмотрим ϵ_1, в $U_{\epsilon_1}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, выберем какой-то член a_{n_1}

Рассмотрим ϵ_2, в $U_{\epsilon_2}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in U_{\epsilon_2}(a)$

Рассмотрим ϵ_k, в $U_{\epsilon_k}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} \in U_{\epsilon_k}(a)$

Таким образом, построена ч.п. $\{a_{n_k}\}$, такая что $\forall k \in \mathbb{N} : a - \dfrac{1}{k} < a_{n_k} < a + \dfrac{1}{k} \implies$

$\implies$ по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

■

Note

Свойства частичных пределов ч.п.

$\{a_n\}$ сходится $\iff \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \varliminf_{n\to+\infty} a_n$

$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \sup\{$множества предельных точек $\{a_n\}\}$

$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \inf\{$множества предельных точек $\{a_n\}\}$

$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n$ и $\varliminf_{n\to+\infty} a_n$ - частичные пределы

Theorem Система вложенных отрезков

Системой вложенных отрезков называют счётно бесконечное множество отрезков, каждый из которых содержит следующий отрезок как подмножество

Обозначение: $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subseteq I_k$

Example

Рассмотрим $S = \{[1-\frac{1}{k}; 2+\frac{1}{k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда
$S = \{[0;3], [0.5; 2.5], [\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}], ...\}$
Рассмотрим $S = \{[\pi; \pi - \frac{1}{k^k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда
$S = \{[\pi; \pi - 1], [\pi; \pi - \frac{1}{4}], [\pi; \pi - \frac{1}{27}], ...\}$

Theorem Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной ч.п. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Proof:

По определению ограниченной ч.п. $\exists C \forall n \in \mathbb{N} |a_n| < C$
Построим искому подпоследовательность при помощи системы вложенных отрезков
$I_1 = [-c; c], \forall n \in \mathbb{N} a_n \in I_1,$ выберем какой-то член ч.п. $a_{n_1} \in I_1$
Т.к. $\{a_n\}$ - ч.п., то в какой-то половине точно есть бесконечно много членов $\{a_n\}$
Выберем эту половину и обозначим I_2, выберем в нём какой-то член ч.п. $a_{n_2} \in I_2$
Пусть построен I_k и a_{n_k}. Делим I_k пополам и выбираем половину,
в которой бесконечно много членов $\{a_n\}$, обозначим эту половину как I_{k+1}
и выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$
Построили последовательность $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k; d_k]$
$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{b_k\}$ неубывает и ограничена сверху C
$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_k = b, b \geq b_k$
$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{d_k\}$ невозрастает и ограничена снизу $-C$
$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} d_k = d, d \leq d_k$
При этом $|d_k - b_k| = \dfrac{2\cdot C}{2^{k-1}} \to 0$ при $k \to \infty$
$ADDPROOF[d \geq b]$(пока что см. консультацю 2)
$d - b \leq d_k - b_k \to 0$ при $k \to \infty \implies d \leq b \implies d = b$

■

Definition: Фундаментальная ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) \forall n, m > N(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$$

Theorem Критерий сходимости ч.п. по Коши

Ч.п. $\{a_n\}$ сходится $\iff$ $\{a_n\}$ - Фундаментальная ч.п.

Proof:

$" \implies "$

Распишем, что дано:$\exists A \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1 : |a_n - A| < \epsilon$

Хотим доказать:$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \epsilon$

$|a_n - a_m| < \epsilon \impliedby |a_n - a + a - a_m| < \epsilon \impliedby |a_n - a| + |a - a_m| < \epsilon \impliedby |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon$

Положим $N_2(\epsilon) := N_1(\dfrac{\epsilon}{2}) \implies$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon \implies$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \epsilon$

$" \impliedby "$

Распишем, что дано:$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$

Покажем, что $\{a_n\}$ ограничена: положим $\epsilon = 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n > N_2 : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n > N_2 : a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$

Положим $C := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_2(1)}|, |a_{N_2(1)+1}|) + 1 \implies$

$\forall n \in \mathbb{N}\, |a_n| \le C$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$\exists a \in \mathbb{R} \exists \{a_{n_k}\} : \lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = a$

Докажем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

Перепишем, что дано:

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_3(\epsilon)\, \forall k > N_3(\epsilon) : |a_{n_k} - a| < \epsilon$

Распишем, что хотим доказать:

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

$|a_n - a| < \epsilon \impliedby |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < \epsilon \impliedby |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon$

Т.к. при выборе членов в подпоследовательности $n_k \ge k$, то при $k > N_3(\epsilon) \implies n_k > N_3(\epsilon)$

Положим $N_1(\epsilon) = max(N_2(\dfrac{\epsilon}{2}), N_3(\dfrac{\epsilon}{2})) \implies$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon \implies$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

$\blacksquare$

Definition: Постоянная Эйлера

Рассмотрим ч.п. $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$
Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его γ

Proof:

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$$

γ_n убывает

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}(1 - (n+1)\ln(1 + \frac{1}{n})) =$$

$$= \frac{1}{n+1}(1 - \ln((1 + \frac{1}{n})^{n+1}))$$

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ сходится к e и убывает. Докажем убывание

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = (\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})^{n+1} \cdot (\frac{n+1}{n+2}) = (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1}(\frac{n+1}{n+2})$$

$$\geq (1 + \frac{n+1}{n^2+2n})(\frac{n+1}{n+2}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{n^3+4n^2+4n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1}(1 - \ln b_n)$$

b_n убывает к $e \implies b_n > e \implies \ln b_n > 1 \implies \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$

Докажем ограниченность γ_n

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e \implies n\ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 \implies \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n} > \ln(\frac{n+1}{n})$$

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + ... + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + ... + \ln(n+1) - \ln n - \ln n =$$

$$= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0$$

■

Definition: Определение предела функции по Коши

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\epsilon > 0 \exists\delta = \delta(\epsilon) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Definition: Определение предела функции по Гейне

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\{x_n\} : (x_n \neq x_0 \land \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A)$$

Definition: Односторонний предел функции

Левосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \to x_0$ слева, то есть

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Правосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \to x_0$ справа, то есть

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Note

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = A$, где $A \in \bar{\mathbb{R}}$

Definition: Бесконечные пределы

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\, \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$

Definition: Бесконечно малая функция

Функция называется б.м. при $x \to x_0$, если $\lim x \to x_0 f(x) = 0$, при этом $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$

Definition: Бесконечно большая функция

Функция называется б.б. при $x \to x_0$, если $\lim x \to x_0 f(x) = \infty$, при этом $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$

Theorem Теорема о пределе сложной функции

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Proof:

Распишем, что дано, по определению:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1(\epsilon) \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\epsilon)}(x_0) : |f(x) - y_0| < \epsilon$ (1)

$\forall \lambda > 0 \exists \delta_2(\lambda) \forall y \in \dot{U}_{\delta_2(\lambda)}(y_0) : |g(y) - g(y_0)| < \lambda$ (2)

Распишем, что хотим доказать:

$\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta(\eta) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Положим $\delta_3(\eta) = \delta_1(\delta_2(\eta))$, :

$x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) \iff x \in \dot{U}_{\delta_1(\delta_2(\eta))}(x_0) \implies$ по (1) $|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta)$

$|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta) \iff f(x) \in U_{\delta_2(\eta)}(y_0)$

По (2) знаем, что если $f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Если $f(x) = y_0$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Иначе, если $f(x) \neq y_0 \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Получили: $\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta_1(\delta_2(\eta)) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

∎

При нахождении опечаток просьба написать `https://t.me/i8088_t`, на момент компиляции ник в тг: vova kormilitsyn