

**HSE FCS SE**  
**Calculus-1 2023-2024**

Lecturer: Ivan Erlikh  
File edited by: vova kormilitsyn

ver. 1.3.2

# Contents

<b>1</b>	<b>Используемые обозначения</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Логические операции</b>	<b>5</b>
2.1	Высказывания, предикаты и кванторы . . . . .	5
2.1.1	Определения . . . . .	5
2.1.2	Правило обращения кванторов . . . . .	6
2.2	Метод математической индукции . . . . .	6
2.3	Неравенство Бернулли . . . . .	6
2.4	Перестановки, размещения, сочетания . . . . .	7
2.5	Бином Ньютона . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Определения и свойства числовых последовательностей</b>	<b>9</b>
3.1	Определения . . . . .	9
3.1.1	Числовая последовательность . . . . .	9
3.1.2	Определения монотонных числовых последовательностей . . . . .	9
3.1.3	Ограниченная ч.п. . . . .	9
3.1.4	Неограниченная ч.п. . . . .	10
3.1.5	Отделимая от нуля ч.п. . . . .	10
3.1.6	Сходящаяся ч.п. . . . .	10
3.1.7	Эпсилон окрестность . . . . .	11
3.1.8	Бесконечно большая ч.п. . . . .	11
3.1.9	Бесконечно малая ч.п. . . . .	12
3.2	Связи числовых последовательностей . . . . .	12
3.3	Арифметика предела ч.п. . . . .	13
3.4	Теоремы . . . . .	13
3.4.1	Теорема о предельном переходе в неравенствах . . . . .	13
3.4.2	Теорема о зажатой последовательности . . . . .	13
3.4.3	Теорема о свойстве предела б.м. ч.п. . . . .	14
<b>4</b>	<b>Элементы теории множеств</b>	<b>15</b>
4.1	Аксиома непрерывности . . . . .	15
4.2	Определения ограниченных множеств . . . . .	15
4.3	Определения граней множества . . . . .	15
4.4	Теорема о существовании точной грани множества . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Теорема Вейерштрасса и число <math>\epsilon</math></b>	<b>17</b>
5.1	Теорема Вейерштрасса . . . . .	17
5.2	Число Эйлера . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Определения и свойства подпоследовательности и частичного предела</b>	<b>19</b>
6.1	Определение подпоследовательности . . . . .	19
6.2	Частичные пределы и предельная точка . . . . .	19
6.2.1	Определения . . . . .	19
6.2.2	Теорема об эквивалентности определений . . . . .	20
6.2.3	Свойства частичных пределов ч.п. . . . .	20
6.3	Система вложенных отрезков . . . . .	20

6.4	Теорема Больцано-Вейерштрасса . . . . .	21
6.5	Дополнительный материал (вне курса) . . . . .	21
6.5.1	Принцип Больцано-Вейерштрасса . . . . .	21
6.5.2	Стягивающая система вложенных отрезков . . . . .	22
6.5.3	Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Фундаментальная ч.п. Критерий сходимости ч.п. по Коши</b>	<b>23</b>
7.1	Определение фундаментальной ч.п. . . . .	23
7.2	Критерий сходимости ч.п. по Коши . . . . .	23
7.3	Постоянная Эйлера-Маскерони . . . . .	25
<b>8</b>	<b>Асимптоты</b>	<b>26</b>
8.1	Определения асимптот . . . . .	26
8.2	Признак наклонной асимптоты . . . . .	26
<b>9</b>	<b>Определение и свойства функции</b>	<b>28</b>
9.1	Определения . . . . .	28
9.2	Пределы . . . . .	29
9.3	Теорема о зажатой функции . . . . .	31
9.4	Первый и второй замечательные пределы . . . . .	31
9.5	Теорема о пределе сложной функции . . . . .	31
9.6	O - символика . . . . .	32
9.7	Непрерывность функции . . . . .	32
9.7.1	Непрерывность функции в точке . . . . .	32
9.7.2	Свойства непрерывных функций . . . . .	32
9.7.3	Правило замены переменных в пределе сложной функции . . . . .	32
9.7.4	Непрерывность функции на множестве . . . . .	33
9.7.5	Теорема 1 о функции, непрерывной на отрезке . . . . .	33
9.7.6	Теорема 2 о функции, непрерывной на отрезке . . . . .	34
9.7.7	Определение монотонности функции . . . . .	36
9.7.8	Достаточное условие обратимости . . . . .	36
9.7.9	Критерий обратимости функции . . . . .	36
9.7.10	Свойства обратимой функции . . . . .	37
9.7.11	Обратные тригонометрические функции . . . . .	38
9.7.12	Показательная функция . . . . .	38
9.7.13	Логарифмическая функция . . . . .	38
9.7.14	Следствия из 2 замечательного предела . . . . .	38
9.7.15	Показательная функция с вещественным показателем . . . . .	39
9.8	Производная функции . . . . .	39
9.8.1	Определение производной . . . . .	39
9.8.2	Правила подсчёта производных . . . . .	40
9.8.3	Определения дифференцируемости функции . . . . .	40
9.8.4	Определение дифференциала . . . . .	41
9.8.5	Теорема о непрерывности функции, дифференцируемой в точке . . . . .	41
9.8.6	Теорема о дифференцируемости сложной функции . . . . .	41
9.8.7	Теорема о производной обратной функции . . . . .	42
9.8.8	Пример 1 . . . . .	42
9.8.9	Пример 2 . . . . .	42
9.8.10	Определение локального минимума . . . . .	42
9.8.11	Определение локального максимума . . . . .	42
9.8.12	Определение точки локального экстремума . . . . .	43
9.8.13	Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма) . . . . .	43
9.8.14	Определения касательной к графику функции . . . . .	43
9.8.15	Теорема Ролля . . . . .	43
9.8.16	Теорема Лагранжа . . . . .	44
9.8.17	Теорема-следствие 1 . . . . .	44
9.8.18	Теорема-следствие 2 . . . . .	44

9.8.19	Теорема-следствие 3 . . . . .	45
9.8.20	Теорема Коши . . . . .	45
9.8.21	Теорема о монотонности непрерывно дифференцируемой функции . . . . .	45
9.8.22	Теорема-следствие . . . . .	46
9.8.23	Достаточное условие экстремума . . . . .	46
9.8.24	Выпуклость и вогнутость функции . . . . .	46
9.8.25	Теорема о выпуклости и вогнутости функции на интервале . . . . .	47
9.8.26	Правило Лопиталья . . . . .	47
9.9	Формула Тейлора . . . . .	51
9.9.1	Многочлен Тейлора . . . . .	51
9.9.2	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано . . . . .	52
9.9.3	Формула Тейлора для синуса . . . . .	52
9.9.4	Формула Тейлора для экспоненциальной функции . . . . .	52
9.9.5	Формула Тейлора для экспоненциальной функции . . . . .	53
9.9.6	Теорема Тейлора с остаточным членом в формуле Лагранжа . . . . .	53
9.9.7	Определение точки возрастания . . . . .	54
9.9.8	Определение точки убывания . . . . .	54
9.9.9	Теорема о функции, имеющей ровно $n - 1$ ненулевых производных . . . . .	54

## 10 Интегрирование функций

56

## Chapter 1

### Используемые обозначения

#### Note

$\mathbb{N}$  - множество натуральных чисел. В данном файле полагаем, что  $0 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$  - множество целых чисел

$\mathbb{Q}$  - множество рациональных чисел

$\mathbb{R}$  - множество вещественных чисел

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$  - дополненная прямая (extended real number line)

$\{n, n+1, \dots, m\}$  - множество вещественных чисел от  $n$  до  $m$  "с шагом 1" включительно

Формально, это множество равно  $\{x \in \mathbb{R} | x \geq n \wedge x \leq m \wedge x - n \in \mathbb{Z}\}$

$\textcircled{\text{W}}$  - противоречие (используется при доказательстве методом от противного)

(если Вам знаком символ  $\perp$ , то в данном файле полагаем эти обозначения эквивалентными)

## Логические операции

### 2.1 Высказывания, предикаты и кванторы

#### 2.1.1 Определения

##### Definition: Высказывания и n-местные предикаты

Высказывание - это упрощённая модель повествования предложения, такая что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, но не одновременно  
n-местный предикат (n-арный предикат) - это выражение, которое превращается в высказывание, если в нём заменить  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на подходящие имена, где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - переменные в предикате

##### Definition: Логические операции

- |                  |  |
|------------------|--|
| Отрицание:       | • $\neg A$ (также обозначают $\bar{A}$ ) означает "не $A$ "                    |
| Логическое и:    | • $A \wedge B$ означает "верно $A$ и верно $B$ "                               |
| Логическое или:  | • $A \vee B$ означает "верно $A$ , или верно $B$ , или верны $A$ и $B$ вместе" |
| Исключающее или: | • $A \oplus B$ означает "верно ровно одно из высказываний $A, B$ "             |
| Импликация:      | • $A \implies B$ означает "если верно $A$ , то верно $B$ "                     |
| Эквивалентность: | • $A \iff B$ означает " $A$ верно тогда и только тогда, когда верно $B$ "      |

##### Note

Пусть  $A \implies B$

Если  $A$  верно, то  $B$  тоже верно, но если  $A$  ложно, то  $B$  может быть и истинным, и ложным

Пусть  $A \iff B$

Если  $A$  ложно, то ложно  $B$ . Если  $B$  верно, то верно  $A$

##### Note

Логические операции можно выражать через другие логические операции, например,  
 $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$

##### Definition: Кванторы

Квантор всеобщности обозначается как  $\forall$  и означает "для любого"

Квантор существования обозначается как  $\exists$  и означает "существует"

Квантор единственности обозначается как  $!$  и означает "единственный, такой что ..."

##### Example

Всеобщность:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x)</math> означает "Для любого <math>x</math> из <math>\mathbb{R}</math> выполняется предикат <math>\phi(x)</math>"</li> </ul>
Существование:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\exists x (x \in \mathbb{Q} \implies \psi(x))</math> означает "Существует <math>x</math>, такой что если <math>x</math> из <math>\mathbb{Q}</math>, то выполняется предикат <math>\psi(x)</math>"</li> </ul>
Единственность:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\forall n \in \mathbb{N} \exists! k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \leq n &lt; 2^{k+1}</math> означает "Для любого натурального числа существует и единственно такое целое неотрицательное число <math>k</math>, что <math>2^k \leq n &lt; 2^{k+1}</math>"</li> </ul>

#### Note

На практике квантор единственности часто используется вместе с квантором существования т.е. часто используют связку  $\exists!$ , "существует и единственно"

#### Note

Вместо " $\neg \exists$ " пишут " $\nexists$ "

## 2.1.2 Правило обращения кванторов

### Claim Правило обращения кванторов

При обращении кванторов квантор существования меняется на квантор всеобщности, квантор всеобщности меняется на квантор существования, а утверждение под кванторами меняется на противоположное

### Example

Пусть дано высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m_1 \in \mathbb{Z} \exists m_2 > m_1 \forall q \in \mathbb{Q} : |m_1| > n \wedge \neg \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Тогда отрицание к этому высказыванию будет:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m_1 \in \mathbb{Z} \forall m_2 > m_1 \exists q \in \mathbb{Q} : |m_1| \leq n \vee \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

## 2.2 Метод математической индукции

### Claim Метод математической индукции

Пусть есть предикат  $\phi(n)$ , который выполняется или не выполняется при различных  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, если  $\exists k \in \mathbb{N} : \phi(k)$  и  $\forall n \geq k : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$ , то по методу математической индукции получаем  $\forall n \geq k : \phi(n)$

Этапы доказательства:

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| База индукции:          | • Проверка истинности $\phi(k)$   |
| Предположение индукции: | • Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k$ верно $\phi(n)$ |
| Шаг индукции:           | • Докажем, что $\phi(n+1)$ , используя предположение индукции             |
| Вывод:                  | • $\forall n \geq k : \phi(n)$  |

## 2.3 Неравенство Бернулли

### Theorem Неравенство Бернулли

Если  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \geq -1$ , то  $(1+x)^n \geq 1+nx$

**Proof:**

Докажем неравенство при помощи метода математической индукции

1. База индукции:

Пусть  $n = 1 \implies (1+x)^n = 1+x \geq 1+x$

2. Предположение индукции:

Пусть для некоторого  $n \geq 1$  верно, что  $(1+x)^n \geq 1+xn$

3. Шаг индукции: Рассмотрим неравенство, подставив в него  $n+1$ :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$$

$$1+x \geq 0 \implies (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+xn) \cdot (1+x) = 1+xn+x+n \cdot x^2 \geq 1+nx+x = 1+n(x+1)$$

Следовательно,  $(1+x)^{n+1} \geq 1+n(x+1)$

4. Обозначим доказываемое как предикат  $\phi(n)$ , тогда получаем:

$$\phi(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$$

Тогда по принципу математической индукции  $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n)$

■

## 2.4 Перестановки, размещения, сочетания

### Definition: Перестановки, размещения и сочетания

Пусть дано множество из  $n$  элементов

- Если все элементы попарно различны (т.е. при решении задачи мы считаем, что два любых элемента множества различны), то количество попарно различных перестановок этого множества обозначается как  $P_n$  и равно  $n!$

Пусть зафиксировано  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , такое что  $k \leq n$ , тогда:

- Количество количество способов, которыми мы можем выбрать  $k$ -элементное подмножество данного множества, считая, что элементы попарно различны, обозначается как  $A_n^k$  и равно  $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Количество количество способов, которыми мы можем выбрать  $k$ -элементное подмножество данного множества, считая, что все элементы попарно равны, обозначается как  $C_n^k$  и равно  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

### Note

Пусть есть конечная последовательность из  $n$  натуральных чисел от 1 до  $n$  (кортеж из  $n$  элементов от 1 до  $n$ )

Тогда количество различных перестановок элементов кортежа равно  $P_n = n!$

Количество способов выбрать  $k$  чисел из кортежа, считая их перестановки различными, равно  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Количество способов выбрать  $k$  чисел из кортежа, считая, что все перестановки одного набора - это один способ, равно  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пусть  $\sigma = (1, 2, 3, 4)$  - данный кортеж, тогда есть  $P_4 = 24$  различных перестановок  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} &(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2) \\ &(2, 1, 2, 4), (2, 1, 4, 2), (2, 3, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1) \\ &(3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1) \\ &(4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1) \end{aligned}$$

Для  $k = 2$  есть  $A_4^2 = 12$  способ выбрать кортеж из 2 элементов:

$$\begin{aligned} &(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4) \\ &(3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3) \end{aligned}$$



Для  $k = 2$  есть  $C_4^2 = 6$  способ выбрать подмножество из 2 элементов (порядок элементов не важен):

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$$

## 2.5 Бином Ньютона

### Theorem Бином Ньютона

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$  (формально, перед равенством необходимо написать  $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ )

**Proof:**

Докажем это утверждение при помощи метода математической индукции

1. База индукции:  $n = 1 \implies (a + b)^n = a + b = \sum_{k=0}^1 C_n^k a^k b^{n-k}$

2. Предположение индукции: пусть для некоторого  $n \geq 1 : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

3. Рассмотрим равенство и докажем, что оно верно при подстановке  $n + 1$  :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \\ &= a \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + C_{n+1}^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

4. Получили:

Равенство верно при  $n = 1$ , а из верности равенства для  $n$  следует верность равенства для  $n + 1$  (при  $n \geq 1$ ), тогда по методу математической индукции получим, что равенство верно  $\forall n \in \mathbb{N}$

■

## Определения и свойства числовых последовательностей

### 3.1 Определения

#### 3.1.1 Числовая последовательность

**Definition: Числовая последовательность**

Числовая последовательность - это счётно бесконечный проиндексированный набор чисел

**Clarification**

Формально, числовая последовательность (далее обозначается ч.п.) - это функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Способы задания:

- Формула. Например,  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Рекуррентно. Например,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

#### 3.1.2 Определения монотонных числовых последовательностей

**Definition: Монотонность ч.п.**

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется строго возрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется строго убывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется неубывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется невозрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

#### 3.1.3 Ограниченная ч.п.

**Definition: Ограниченная сверху числовая последовательность**

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной сверху, если  $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n < C$

**Definition: Ограниченная снизу числовая последовательность**

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной снизу, если  $\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n > -C$

**Definition: Ограниченная числовая последовательность**

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной, если  $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$

### Example

Пример:  $a_n = 5 + \frac{1}{n}$

$$\exists C = 7 > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = \left| 5 + \frac{1}{n} \right| < 7 = C$$

### Note

Числовая последовательность ограничена  $\iff$  она ограничена сверху и ограничена снизу

## 3.1.4 Неограниченная ч.п.

### Definition: Неограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется неограниченной, если она не является ограниченной, то есть

$$\forall C > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$$

### Example

Пример:  $a_n = n$

$$\forall C > 0 \exists n = \lceil C \rceil \in \mathbb{N} : |a_n| \geq C$$

## 3.1.5 Отделимая от нуля ч.п.

### Definition: Отделимая от нуля числовая последовательность

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется отделимой от нуля, если

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| > \varepsilon$$

### Example

Пример:  $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

$$\exists \varepsilon = 0.5 > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = \left| 2 - \frac{1}{n} \right| > 0.5 = \varepsilon$$

## 3.1.6 Сходящаяся ч.п.

### Definition: Сходящаяся числовая последовательность

Числовая последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел при  $n \rightarrow +\infty$ , т.е. ч.п.  $\{a_n\}$  называется сходящейся, если:

$$\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A, A \in \mathbb{R}$$

### Example

Пример:  $a_n = \frac{4n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 + 1}$

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2 = A$

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} |a_n - 2| < \varepsilon &\iff \left| \frac{4n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 + 1} - 2 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{2n^2 - 1}{2n^3 + 1} \right| < \varepsilon \iff \\ &\iff \frac{2n^2 - 1}{2n^3 + 1} < \varepsilon \iff \frac{2n^2}{2n^3 + 1} < \varepsilon \iff \frac{2n^2}{2n^3} < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n \end{aligned}$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \forall n > N \geq \frac{1}{\varepsilon} : |a_n - 2| < \varepsilon$$

#### Note

Сходящаяся ч.п. является ограниченной

### 3.1.7 Эпсилон окрестность

#### Definition: Эпсилон окрестность

Эпсилон окрестностью вещественного числа  $x_0$  (элемента поля вещественных чисел) называется множество  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  и обозначается  $U_\varepsilon(x_0)$ .

Обычно говорят "Эпсилон окрестность точки  $x_0$ "

#### Example

$$U_1(\pi) = (\pi - 1; \pi + 1)$$

$$U_e(e) = (0; 2e)$$

#### Definition: Проколота эпсилон окрестность

Проколотой эпсилон окрестностью вещественного числа  $x_0$  (элемента поля вещественных чисел) называется множество  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$  и обозначается  $\dot{U}_\varepsilon(x_0)$ .

Обычно говорят "Проколота эпсилон окрестность точки  $x_0$ "

#### Example

$$\dot{U}_1(e) = (e - 1; e + 1) \setminus \{e\} = (e - 1; e) \cup (e; e + 1)$$

#### Note

Неравенство  $|a_n - A| < \varepsilon$  равносильно тому, что  $a_n \in U_\varepsilon(A)$

### 3.1.8 Бесконечно большая ч.п.

#### Definition: Бесконечно большая числовая последовательность

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно большой, если она стремится к  $+\infty$ , к  $-\infty$  или к  $\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , т.е.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : a_n > M$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : a_n < -M$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n > N : |a_n| > M$

### Example

Пример б.б. ч.п., стремящейся к  $+\infty$ :  $a_n = n$

Пример б.б. ч.п., стремящейся к  $-\infty$ :  $a_n = -n$

Пример б.б. ч.п., стремящейся к  $\infty$ :  $a_n = (-1)^n \cdot n$

### 3.1.9 Бесконечно малая ч.п.

#### Definition: Бесконечно малая числовая последовательность

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно малой, если она стремится к 0 при  $n \rightarrow +\infty$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N : |a_n| < \varepsilon$$

### 3.2 Связи числовых последовательностей

#### Note

Связи числовых последовательностей:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

#### Note

Если ч.п. сходится или является б.б., то предел единственный

**Proposition** Докажите по определению, что

(ограниченная ч.п.) + (ограниченная ч.п.) = ограниченная ч.п.

б.м + б.м. = б.м.

б.м. · (ограниченная ч.п.) = б.м.

$\frac{\text{отделимая от нуля ч.п.}}{\text{ограниченная ч.п.}} = \text{ограничена ч.п.}$

**Proposition** Приведите пример, когда

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = отделимая от нуля ч.п.

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = б.м.

б.б + б.б = б.б.

б.б + б.б = б.м.

б.б + б.б = (ограниченная ч.п.)

б.б + б.б = (отделимая от нуля ч.п.)

### 3.3 Арифметика предела ч.п.

#### Claim

Если  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a, b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , то

- $a_n \pm b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \pm b$
- $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \cdot b$
- $b \neq 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \neq 0 : \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{b}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0 \implies \sqrt{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a}$

### 3.4 Теоремы

#### 3.4.1 Теорема о предельном переходе в неравенствах

**Theorem** Теорема: свойство предельного перехода в неравенствах

$$(\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c_n > A) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C) \implies C \geq A$$

То есть если начиная с некоторого номера все члены последовательности  $> A$ , и сама последовательность сходится к  $C \in \mathbb{R}$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то  $C \geq A$

**Proof:**

1. Распишем, что дано, по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |c_n - C| < \varepsilon$$

$$\text{Это равносильно } \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c_n > A$$

2. Для любого  $\varepsilon$  рассмотрим  $M(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N) + 1$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N) + 1 \forall n > M : (C - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon \wedge c_n > A)$$

$$\text{Следовательно, } \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \forall n > M : C + \varepsilon > A$$

$$\text{Выражение под кванторами не зависит от } M \text{ и } n \implies \forall \varepsilon > 0 : C + \varepsilon > A$$

3. Предположим от противного, что  $C < A$

$$\text{Положим } \varepsilon := \frac{A - C}{2} > 0 \implies C + \varepsilon = C + \frac{A - C}{2} = \frac{A + C}{2} < A$$

$$\text{Получили, что } \exists \varepsilon > 0 : C + \varepsilon < A \implies \textcircled{W} \implies \text{предположение, что } C < A, \text{ неверно} \implies C \geq A$$

■

#### 3.4.2 Теорема о зажатой последовательности

**Theorem** Теорема о зажатой последовательности (о 2 миллионерах / 2 полицейских / гамбургерах)

$$\left. \begin{array}{l} a_n, b_n, c_n - \text{числовые последовательности} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = X \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = X \\ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \leq c_n \leq b_n \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = X$$

**Proof:**

Докажем для случая, когда  $X \in \mathbb{R}$ . При  $X \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$  доказательство проводится аналогично

1. Распишем по определению пределы.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : X - \varepsilon < a_n < X + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) : X - \varepsilon < b_n < X + \varepsilon$$

Рассмотрим  $N_3(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N)$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall n > N_3(\varepsilon) : X - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < X + \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall n > N_3(\varepsilon) : X - \varepsilon < c_n < X + \varepsilon$$

■

### 3.4.3 Теорема о свойстве предела б.м. ч.п.

**Theorem** Теорема о свойстве предела б.м. ч.п.

если  $a \in \mathbb{R}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n - \text{б.м. ч.п.}$$

**Proof:**

”  $\implies$  ”

Распишем по определению, что дано:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

Обозначим ч.п.  $\alpha_n = a_n - a$ , тогда  $a_n = a + \alpha_n$

Тогда:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$

Доказали, что  $a_n = a + \alpha_n$ , где  $\alpha_n$  - б.м. ч.п.

”  $\impliedby$  ”

Распишем то, что  $\alpha_n$  - б.м., по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$$

По условию  $a_n = a + \alpha_n$ , тогда  $a_n - a = \alpha_n$ , подставим в выражение под кванторами:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

Доказали по определению, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

■

## Элементы теории множеств

### 4.1 Аксиома непрерывности

**Claim** Аксиома непрерывности действительных чисел (принцип полноты)

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ B \subseteq \mathbb{R} \\ B \neq \emptyset \\ \forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

### 4.2 Определения ограниченных множеств

**Definition: Ограниченное сверху множество**

Подмножество  $A \subseteq \mathbb{R}$  называется ограниченным сверху, если  $\exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq C$

**Definition: Ограниченное снизу множество**

Подмножество  $A \subseteq \mathbb{R}$  называется ограниченным снизу, если  $\exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq C$

**Definition: Ограниченное множество**

Подмножество  $A \subseteq \mathbb{R}$  называется ограниченным, если  $\exists C > 0 \forall a \in A : |a| \leq C$

### 4.3 Определения граней множества

**Definition: Определение верхней грани множества**

Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ . Тогда верхней гранью множества  $A$  называют число  $c \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall a \in A : a \leq c$

**Definition: Определение нижней грани множества**

Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ . Тогда нижней гранью множества  $A$  называют число  $c \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall a \in A : a \geq c$



**Definition: Определение точной верхней грани множества**

Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ . Тогда точной верхней гранью множества  $A$  называют наименьший элемент множества всех верхних граней множества  $A$  и обозначают  $\sup A$

**Definition: Определение точной нижней грани множества**

Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ . Тогда точной нижней гранью множества  $A$  называют наибольший элемент множества всех нижней граней множества  $A$  и обозначают  $\inf A$

**Note**

Вообще говоря, наименьший и наибольший элементы множества не всегда существуют. Например, у множества  $(0; 1)$  нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, при этом  $\sup(0; 1) = 1 \notin (0; 1)$ ,  $\inf(0; 1) = 0 \notin (0; 1)$

**4.4 Теорема о существовании точной грани множества****Theorem Теорема о существовании точной грани множества**

Если множество  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  ограничено сверху, то  $\exists \sup A$

Если множество  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  ограничено снизу, то  $\exists \inf A$

**Proof:** Докажем для верхней грани, для нижней грани доказательство аналогично

$$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge (\exists C > 0 \forall a \in A \Rightarrow a < C) \Rightarrow \exists \sup A$$

1. Обозначим  $S_A = \{c \in \mathbb{R} | \forall a \in A \Rightarrow a \leq c\} \neq \emptyset$  - множество верхних граней

Это множество не пусто, т.к.  $A$  ограничено по условию, т.е.  $\exists C > 0 \forall a \in A \Rightarrow a \leq C$

2. По построению множества  $A$  и  $S_A$  удовлетворяют аксиоме непрерывности

действительных чисел, тогда  $\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall c \in S_A \Rightarrow a \leq b \leq c$

Но из  $b \leq c \Rightarrow b \in S_A$ , при этом  $(\forall c \in S_A \Rightarrow b \leq c)$ , следовательно,  $b$  является наименьшим элементом множества верхних граней множества  $A$ , тогда по определению точной верхней грани  $b = \sup A$

■

## Теорема Вейерштрасса и число $e$

### 5.1 Теорема Вейерштрасса

#### **Theorem** Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ч.п.)

Если ч.п.  $\{a_n\}$  неубывает и ограничена сверху, то она сходится

Если ч.п.  $\{a_n\}$  невозрастает и ограничена снизу, то она сходится

**Proof:** Докажем для неубывающей ч.п., для невозрастающей ч.п. доказательство аналогично

1. Обозначим множество значений ч.п.  $A = \{a_n\}$

Т.к.  $a_n$  - числовая последовательность, то множество  $A$  счётно или конечно

(т.е. существует инъекция между  $A$  и  $\mathbb{N}$ ,  $A \lesssim \mathbb{N}$ )

Также  $A \neq \emptyset$  и множество  $A$  ограничено сверху  $\implies$  по теореме о существовании

точной верхней грани  $\exists \sup A = a$

2. Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , т.е.  $\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

$a_n$  неубывает и ограничена сверху  $a \implies |a_n - a| = a - a_n$ , тогда

$|a_n - a| < \varepsilon \iff a - a_n < \varepsilon \iff a_n > a - \varepsilon$

Т.к. последовательность  $a_n$  неубывает, то следующие 2 высказывания равносильны:

$\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : a_n > a - \varepsilon$  (#)

$\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) : a_N > a - \varepsilon$  (\*)

3. Докажем второе высказывание (\*) методом от противного.

Предположим, что  $\exists \varepsilon_0 \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a - \varepsilon_0$

Тогда число  $a - \varepsilon_0$  - верхняя грань множества  $A$ , но  $a$  само является точной

верхней гранью, но  $a - \varepsilon_0 < a \implies \perp \implies$  неверно предположение, что

высказывание (\*) неверно  $\implies$  высказывание (#) верно ■

## 5.2 Число Эйлера

### Definition: Число e

Рассмотрим ч.п.  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его  $e$

**Proof:** 1. Докажем, что  $a_n$  ограничена сверху числом 3

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n \frac{1}{n^n} = \\
 &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n} \frac{1}{n^n} = \\
 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq \\
 &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\
 &= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3
 \end{aligned}$$

2. Докажем, что  $a_n$  - возрастающая ч.п.

Рассмотрим  $a_{n+1}$

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\
 &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
 &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

Т.к.  $\forall m \in \{1, \dots, n\} \ 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$ , то

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > a_n$$

3.  $\{a_n\}$  ограничена сверху и возрастает  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$  ■

## Определения и свойства подпоследовательности и частичного предела

### 6.1 Определение подпоследовательности

#### Definition: Подпоследовательность

Пусть дана ч.п.  $\{a_n\}$ , тогда подпоследовательностью называется ч.п., полученная *последовательным* выбором некоторых членов исходной ч.п. и обозначается  $\{a_{n_k}\}$

#### Note

Если  $\{a_{n_k}\}$  - подпоследовательность ч.п.  $\{a_n\}$ , то  $\forall k \in \mathbb{N} : n_k \geq k$

### 6.2 Частичные пределы и предельная точка

#### 6.2.1 Определения

#### Definition: Частичный предел

Частичный предел ч.п.  $\{a_n\}$  - число, являющееся пределом какой-либо сходящейся подпоследовательности данной последовательности  $\{a_n\}$

#### Definition: Верхний предел ч.п.

Верхним пределом ч.п.  $\{a_n\}$  называется предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \{a_n\}_{n \geq k}$$

#### Definition: Нижний предел ч.п.

Нижним пределом ч.п.  $\{a_n\}$  называется предел

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \{a_n\}_{n \geq k}$$

#### Definition: Предельная точка ч.п.

Предельной точкой ч.п.  $\{a_n\}$  называется число  $a$ , такое что в любой окрестности точки  $a$  находится бесконечно много членов ч.п.  $\{a_n\}$

### 6.2.2 Теорема об эквивалентности определений

**Theorem** Определение предельной точки ч.п. эквивалентно определению частичного предела ч.п.

*Proof:*

1.  $a$  - частичный предел  $\implies a$  - предельная точка  $\{a_n\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

$\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$$

Следовательно,  $\forall \varepsilon$  в  $U_\varepsilon(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$

2.  $a$  - предельная точка  $\{a_n\} \implies a$  - ч.п.  $\{a_n\}$

По определению предельной точки  $\forall \varepsilon$  в  $U_\varepsilon(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$

Предъявим ч.п.  $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$ , такую что  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

Обозначим  $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$

Рассмотрим  $\varepsilon_1$ , в  $U_{\varepsilon_1}(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$ , выберем какой-то член  $a_{n_1}$

Рассмотрим  $\varepsilon_2$ , в  $U_{\varepsilon_2}(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$ , поэтому  $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$

Рассмотрим  $\varepsilon_k$ , в  $U_{\varepsilon_k}(a)$  попадает бесконечно много членов  $\{a_n\}$ , поэтому  $\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$

Таким образом, построена ч.п.  $\{a_{n_k}\}$ , такая что  $\forall k \in \mathbb{N} : a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k} \implies$

$\implies$  по теореме о зажатой последовательности  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

■

### 6.2.3 Свойства частичных пределов ч.п.

#### Note

Свойства частичных пределов ч.п.

$$\{a_n\} \text{ сходитс} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{\text{множества предельных точек } \{a_n\}\}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{\text{множества предельных точек } \{a_n\}\}$$

$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$  и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$  - частичные пределы

### 6.3 Система вложенных отрезков

#### Definition: Система вложенных отрезков

Системой вложенных отрезков называют счётно бесконечное множество отрезков, каждый из которых содержит следующий отрезок как подмножество

Обозначение:  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} = [a_{k+1}; b_{k+1}] \subseteq I_k = [a_k; b_k]$

#### Example

Рассмотрим  $S = \{[1 - \frac{1}{k}; 2 + \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ , тогда

$$S = \{[0; 3], [0.5; 2.5], [\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}], \dots\}$$

Рассмотрим  $S = \{[\pi; \pi - \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ , тогда

$$S = \{[\pi; \pi - 1], [\pi; \pi - \frac{1}{4}], [\pi; \pi - \frac{1}{27}], \dots\}$$

## 6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

### Theorem Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной ч.п. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

**Proof:**

По определению ограниченной ч.п.  $\exists C \forall n \in \mathbb{N} |a_n| < C$

Построим искомую подпоследовательность при помощи системы вложенных отрезков

$I_1 = [-C; C], \forall n \in \mathbb{N} a_n \in I_1$ , выберем какой-то член ч.п.  $a_{n_1} \in I_1$

Т.к.  $\{a_n\}$  - ч.п., то в какой-то половине точно есть бесконечно много членов  $\{a_n\}$

Выберем эту половину и обозначим  $I_2$ , выберем в нём какой-то член ч.п.  $a_{n_2} \in I_2$ , такой что  $n_2 > n_1$  (если это нельзя сделать, т.е.  $\forall m (a_m \in I_2 \implies m \leq n_1)$ , то в  $I_2$  лишь конечное число членов

ч.п.  $\{a_n\} \implies \textcircled{\mathbf{W}} \implies \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in I_2$ )

Пусть построен  $I_k$  и  $a_{n_k}$ . Делим  $I_k$  пополам и выбираем половину,

в которой бесконечно много членов  $\{a_n\}$ , обозначим эту половину как  $I_{k+1}$

и выберем  $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$  (если это нельзя сделать, т.е.  $\forall m (a_m \in I_{k+1} \implies m \leq n_k)$ ,

тогда в  $I_{k+1}$  лишь конечное число членов ч.п.  $\{a_n\} \implies \textcircled{\mathbf{W}} \implies \exists n_{k+1} > n_k : a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ )

Построили последовательность  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $I_k = [b_k; d_k]$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{b_k\}$  неубывает и ограничена сверху  $C$

$$\implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_k = b, b \geq b_k$$

$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{d_k\}$  невозрастает и ограничена снизу  $-C$

$$\implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} d_k = d, d \leq d_k$$

$$\text{При этом } |d_k - b_k| = \frac{2 \cdot C}{2^{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

ADDPROOF[ $d \geq b$ ]( пока что см. консультацию 2 )

$$d - b \leq d_k - b_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \implies d \leq b \implies d = b$$

$$\text{Получили: } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_k = b = d = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_k$$

$$b_k \text{ и } d_k - \text{границы отрезка } I_k \implies \forall k \in \mathbb{N} : b_k \leq a_k \leq d_k \implies$$

$$\implies \text{по теореме о пределе зажатой последовательности } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_k = b = d$$

■

## 6.5 Дополнительный материал (вне курса)

### 6.5.1 Принцип Больцано-Вейерштрасса

#### Note

В терминах множества теорема Больцано-Вейерштрасса формулируется так:

У любого бесконечного ограниченного множества существует хотя бы одна предельная точка

### 6.5.2 Стягивающая система вложенных отрезков

#### Definition: Стягивающая система вложенных отрезков

Пусть  $I$  - система вложенных отрезков, тогда если  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ([a_n; b_n] \in I \wedge b_n - a_n < \varepsilon)$ , то такая система вложенных отрезков  
называется стягивающей системой вложенных отрезков

### 6.5.3 Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора

#### Theorem Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора

Для любой системы вложенных отрезков существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

Т.е.  $\exists c \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N} : c \in I_k = [a_k; b_k]$

Если система вложенных отрезков является стягивающей, то такая точка единственна

*Proof:*

1. Множество  $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$  ограничено сверху, например, числом  $b_1 \implies$

$\implies \exists \sup A = \alpha$  по теореме о существовании точной грани множества

Аналогично  $\exists \sup B = \beta, B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$(\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n) \implies (\alpha \leq \beta \wedge \forall n \in \mathbb{N} : [\alpha; \beta] \subseteq [a_n; b_n])$

2. Тогда положим  $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2} \implies \forall n \in \mathbb{N} : \gamma \in [a_n; b_n]$

3. Для стягивающей системы вложенных отрезков:

Предположим от противного, что точка не одна, т.е.

$\exists \gamma_1 < \gamma_2 : \forall n \in \mathbb{N} : (\gamma_1 \in [a_n; b_n] \wedge \gamma_2 \in [a_n; b_n])$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$

Положим  $\varepsilon := \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$ , тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : b_n - a_n \geq \varepsilon \implies \textcircled{\text{W}} \implies$

$\implies$  изначальное предположение неверно  $\implies$  точка не более, чем одна,

а существование хотя бы одной показано в пунктах 1, 2

■

#### Note

Вообще говоря, утверждение неверно для интервалов, например для системы вложенных интервалов:

$$\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(0; \frac{1}{k}\right) \right\}_{k \in \mathbb{N}} : \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \emptyset$$

## Фундаментальная ч.п. Критерий сходимости ч.п. по Коши

### 7.1 Определение фундаментальной ч.п.

**Definition: Фундаментальная ч.п.**

Ч.п.  $\{a_n\}$  называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n, m > N(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

### 7.2 Критерий сходимости ч.п. по Коши

**Theorem** Критерий сходимости ч.п. по Коши

Ч.п.  $\{a_n\}$  сходится  $\iff \{a_n\}$  - Фундаментальная ч.п.



**Proof:**

”  $\implies$  ”

Распишем, что дано:  $\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1 : |a_n - A| < \varepsilon$

Хотим доказать:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \iff |a_n - a + a - a_m| < \varepsilon \iff |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon \iff |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

Положим  $N_2(\varepsilon) := N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

”  $\impliedby$  ”

Распишем, что дано:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Покажем, что  $\{a_n\}$  ограничена: положим  $\varepsilon = 1 \implies$

$$\exists N_2(1) \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < 1 \implies$$

$$\exists N_2(1) \forall n > N_2 : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1 \implies$$

$$\exists N_2(1) \forall n > N_2 : a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$$

Положим  $C := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_2(1)}|, |a_{N_2(1)+1}|) + 1 \implies$

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists a \in \mathbb{R} \exists \{a_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$

Перепишем, что дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n, m > N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall k > N_3(\varepsilon) : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Распишем, что хотим доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < \varepsilon \iff |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Т.к. при выборе членов в подпоследовательности  $n_k \geq k$ , то при  $k > N_3(\varepsilon) \implies n_k > N_3(\varepsilon)$

Положим  $N_1(\varepsilon) = \max\left(N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

■

### 7.3 Постоянная Эйлера-Маскерони

#### Definition: Постоянная Эйлера-Маскерони

Рассмотрим ч.п.  $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его  $\gamma$

**Proof:**

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$$

$\gamma_n$  убывает

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \left(1 - (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 - \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)\right) \end{aligned}$$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  сходится к  $e$  и убывает. Докажем убывание

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{n^3+4n^2+4n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1 \end{aligned}$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} (1 - \ln b_n)$$

$$b_n \text{ убывает к } e \implies b_n > e \implies \ln b_n > 1 \implies \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$$

Докажем ограниченность  $\gamma_n$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \implies n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \implies \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n} > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln(n+1) - \ln n - \ln n = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

■

## Асимптоты

### 8.1 Определения асимптот

#### Definition: Асимптоты

- Вертикальная асимптота: • Прямая  $x = a$  называется вертикальной асимптотой для графика функции  $y = f(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$
- Горизонтальная асимптота: • Прямая  $y = b$  называется горизонтальной асимптотой для графика функции  $y = f(x)$  на  $\pm\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$   
Вообще говоря, горизонтальные асимптоты на  $+\infty$  и  $-\infty$  могут быть разными
- Наклонная асимптота: • Прямая  $y = kx + b$  называется наклонной асимптотой для графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (kx + b) = 0$   
Вообще говоря, наклонные асимптоты на  $+\infty$  и  $-\infty$  могут быть разными

### 8.2 Признак наклонной асимптоты

#### Theorem Признак наклонной асимптоты

Прямая  $y = kx + b$  - наклонная асимптота графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty \iff$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b \end{cases}$$

**Proof:**

”  $\implies$  ”

1. Распишем определение наклонной асимптоты:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$

Вынесем  $b$  из предела:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$

$f(x) - kx - b$  - б.м. при  $x \rightarrow +\infty$

Т.к.  $x \rightarrow +\infty$ , то можно поделить на  $x$  :

$$\frac{f(x)}{x} - k = \frac{b}{x} + \frac{\text{б.м.}}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \frac{\text{б.м.}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right\} \implies \frac{f(x)}{x} - k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

”  $\impliedby$  ”

Т.к.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$

■

## Определение и свойства функции

### 9.1 Определения

#### Definition: Определение функции

Множество пар  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D_f \wedge y \in E_f\}$  называется функцией  $f$  с областью определения  $D_f$  и областью значения  $E_f$ , если  $\forall x \in D_f \exists! y \in E_f : (x, y) \in f$  (для удобства  $(x, y) \in f$  обозначают как  $f(x) = y$ )

Обозначение функции:  $f : X \rightarrow Y$

В данном обозначении подразумевают, что  $D_f = X, E_f \subseteq Y$

#### Example

$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , в данном случае  $D_f = \mathbb{N} \cup \{0\}, E_f = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

Т.к. несложно установить, что  $E_f = \mathbb{Z}$ , то можно написать  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$

#### Definition: Определение инъективной функции

Функция  $f$  называется инъективной, если  $\forall y \in E_f \exists! x \in D_f : f(x) = y$

Это эквивалентно тому, что  $\forall x_1, x_2 \in D_f : (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$

(говорят, что  $f$  - инъекция)

#### Example

$\forall n \in \mathbb{N}$  функция  $f(x) = x^{2n-1}$  является инъективной

$\forall n \in \mathbb{N}$  функция  $f(x) = x^{2n}$  не является инъективной

#### Definition: Определение сюръективной функции

Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется сюръективной для множества  $Y$ , если  $E_f = Y$

(говорят, что  $f$  - сюръекция)

Когда говорят, что  $f$  сюръективна, не уточняя множество, то подразумевают, что  $f$  сюръективна для  $Y$

#### Example

Функция  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не сюръективна для  $\mathbb{R}$ , но сюръективна для  $[-1; 1]$

**Definition: Определение биективной функции**

Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется биективной, если она инъективна и сюръективна (говорят, что  $f$  - биекция)

**Example**

Функция  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ , такая что  
 $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  - биекция между  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $\mathbb{Z}$   
 (как следствие, показали, что  $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{Z}$ , т.е. множества равномощны)

**Definition: Определение обратной функции**

Функция  $y = f^{-1}(x)$  называется обратной функцией к функции  $y = f(x)$ , если множество пар функции  $f^{-1}$  является симметрией множества пар  $f$

**Note**

Функция обратима  $\iff$  она инъективна

**9.2 Пределы****Definition: Определение предела функции по Коши**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Note**

При этом  $\dot{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty)$ ,  $\dot{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta)$ ,  $\dot{U}_\delta(\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$

**Definition: Определение предела функции по Гейне**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} : (x_n \neq x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A)$$

**Definition: Односторонний предел функции**

Левосторонним пределом функции называют предел функции по Коши  $f$  при  $x \rightarrow x_0$  слева, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Правосторонним пределом функции называют предел функции по Коши  $f$  при  $x \rightarrow x_0$  справа, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Theorem** Свойство предела функции при  $x \rightarrow x_0, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ где } A \in \overline{\mathbb{R}}$$

**Proof:**

"  $\implies$  "

Дано:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Тогда:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

"  $\impliedby$  "

Дано:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta_1) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_2; x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Положим  $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$ , тогда:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subseteq (x_0 - \delta_2; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta_1) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$

■

#### Definition: Бесконечные пределы

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$

#### Definition: Бесконечно малая функция

Функция называется б.м. при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , при этом  $x_0 \in \mathbb{R}$

Функция называется б.м. при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Функция называется б.м. при  $x \rightarrow -\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

#### Definition: Бесконечно большая функция

Функция называется б.б. при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , при этом  $x_0 \in \mathbb{R}$

Функция называется б.б. при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

Функция называется б.б. при  $x \rightarrow -\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

#### Definition: Ограниченная функция

Функция называется ограниченной при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\exists \delta > 0 \exists C > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| < C$

#### Definition: Отделимая от нуля функция

Функция называется отделимой от нуля при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\exists \delta > 0 \exists \varepsilon_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > \varepsilon_0$

#### Note

Связь функций при  $x \rightarrow x_0$ , где  $x$  - аргумент обеих функций,  $x_0$  - число, к которому стремится аргумент обеих функций:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

### 9.3 Теорема о зажатой функции

**Theorem** Теорема о зажатой функции

$$\left. \begin{array}{l} f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \\ \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$$

### 9.4 Первый и второй замечательные пределы

**Definition:** Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Definition:** Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

### 9.5 Теорема о пределе сложной функции

**Theorem** Теорема о пределе сложной функции

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

**Proof:**

Распишем, что дано, по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) : |f(x) - y_0| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall \lambda > 0 \exists \delta_2(\lambda) \forall y \in \dot{U}_{\delta_2(\lambda)}(y_0) : |g(y) - g(y_0)| < \lambda \quad (2)$$

Распишем, что хотим доказать:

$$\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta(\eta) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$$

Положим  $\delta_3(\eta) = \delta_1(\delta_2(\eta))$ , тогда :

$$x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) \iff x \in \dot{U}_{\delta_1(\delta_2(\eta))}(x_0) \implies \text{по (1)} |f(x) - y_0| < \delta_2(\eta)$$

$$|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta) \iff f(x) \in U_{\delta_2(\eta)}(y_0)$$

По (2) знаем, что если  $f(x) \in U_{\delta_2(\eta)}(y_0)$ , то  $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Если  $f(x) = y_0$ , то  $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Иначе, если  $f(x) \neq y_0 \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$ , то  $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Получили:  $\forall \eta > 0 \exists \delta_3 = \delta_1(\delta_2(\eta)) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

■



## 9.6 О - символика

### Definition: О - символика

- о-малое: •  $f(x) = \overline{o}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , если  $\frac{f(x)}{g(x)}$  - б.м. при  $x \rightarrow x_0$   
О-большое: •  $f(x) = \underline{O}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , если  $\frac{f(x)}{g(x)}$  - ограниченная при  $x \rightarrow x_0$

## 9.7 Непрерывность функции

### 9.7.1 Непрерывность функции в точке

#### Definition: Непрерывность функции в точке

Функция называется непрерывной в точке  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

#### Clarification

Если  $x_0$  - граница области определения, то рассматривается односторонний предел

### 9.7.2 Свойства непрерывных функций

#### Note

Свойства непрерывных функций:

- Сумма, произведение и частное непрерывных функций - непрерывные функции (по арифметике пределов функции)
- Композиция непрерывных функций - непрерывная функция (по теореме о пределе сложной функции)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

### 9.7.3 Правило замены переменных в пределе сложной функции

#### Claim Правило замены переменных в пределе

Пусть дана сложная функция  $f(g(x))$ , тогда, если для некоторой точки  $x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$  и  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A \in \mathbb{R}$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$

**Example** (Пример использования правила замены переменной в пределе)

Пусть надо найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x}$

Преобразуем выражение:  $\frac{\sin(\pi x)}{x} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi$

В данном случае в обозначения из утверждения выше:

$$f(y) = \frac{\sin(y)}{y}$$

$$g(x) = \pi x$$

$g(x)$  непрерывна в точке  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = g(x_0) = 0$ , и при этом  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = 1 = A$

Тогда по правилу замены переменной в пределе:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi = \lim_{x \rightarrow 0} A \cdot \pi = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \pi = \pi$$

#### 9.7.4 Непрерывность функции на множестве

##### Definition: Непрерывность функции на множестве

Функция называется непрерывной на множестве  $E$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $E$

/\* Когда говорят, что функция непрерывна, имеют ввиду, что она непрерывна на  $D_f$  \*/

##### Note

В частности, функция непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , если она непрерывна в каждой точке отрезка  $[a; b]$ . При этом, в точках  $a$  и  $b$  рассматриваются односторонние пределы

#### 9.7.5 Теорема 1 о функции, непрерывной на отрезке

##### Theorem Теорема о функции, непрерывной на отрезке (иногда называют теоремой Вейерштрасса)

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и достигает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке

Докажем, что функция ограничена сверху и достигает наибольшее значение. Для второго случая доказательство проводится аналогично

**Proof:**

1.  $E_f$  — мно-во значений  $f(x)$  на  $[a; b]$

Обозначим  $M = \sup E_f = \sup_{x \in [a; b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Построим некоторую строго возрастающую ч.п.  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$

2. Докажем, что  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n)$

Предположим от противного, то есть  $\exists n_0 \forall x \in [a; b] : a_{n_0} \geq f(x)$

Тогда  $a_{n_0}$  — верхняя грань множества  $E_f$

Однако, т.к.  $a_n$  — возрастающая ч.п. и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = M$ , то  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < M$

В частности,  $a_{n_0} < M$ , т.е.  $a_{n_0}$  — верхняя грань, которая меньше точной верхней грани  $\implies$

$\implies \textcircled{W} \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n)$

3. По построению  $\forall x \in [a; b] : f(x) \leq M$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : a_n < f(x_n) \leq M$

Следовательно, по теореме о зажатой последовательности  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$

4. Докажем, что  $M = f(x_0)$

Т.к.  $x_n$  — ограниченная ч.п., то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  такую, что  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_0 \in [a; b]$

Т.к.  $f$  непрерывна на отрезке, то она непрерывна в  $x_0$ , следовательно

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M \right) \wedge \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \right) \implies M = f(x_0) < \infty$$

Таким образом, на отрезке  $[a; b]$  функция  $f$  ограничена сверху числом  $M = f(x_0)$

■

### 9.7.6 Теорема 2 о функции, непрерывной на отрезке

**Theorem** Теорема (2) о функции, непрерывной на отрезке

Непрерывная на отрезке  $[a; b]$  принимает все промежуточные значения

Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ ,  $f(x_1) = A$ ,  $f(x_2) = B$ ,  $x_1 < x_2$ , БОО  $A < B$ , тогда

$\forall c \in (A; B) \exists x_0 \in (x_1; x_2) : f(x_0) = c$

**Proof:**

1. Построим последовательность вложенных отрезков:

/\* Если Вам так будет удобнее, то докажем существование  $x_0$  бинпоиском по ответу \*/

$$[a_1; b_1] := [x_1; x_2]$$

$$x_3 := \frac{a_1 + b_1}{2}, \text{ рассмотрим } f(x_3)$$

$$1) f(x_3) = c \implies q.e.d.$$

$$2) f(x_3) < c \implies [a_2; b_2] := [x_3; b_1]$$

$$3) f(x_3) > c \implies [a_2; b_2] := [a_1; x_3]$$

Применяя это правило, продолжим строить последовательность отрезков

Если ни на какой итерации не произойдёт случай 1), то получим счётно бесконечную

последовательность отрезков  $\{[a_n; b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$

По построению ч.п.  $\{a_n\}$  неубывает и ограничена сверху  $b \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq b$

По построению ч.п.  $\{b_n\}$  невозрастает и ограничена снизу  $a \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \geq a$

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0$$

$$x_0 \in [a; b] \implies f(x) \text{ непрерывна в } x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \implies$$

$$\implies \text{по определению по Гейне } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(x_0)$$

$$\text{По построению } f(a_n) < c \wedge f(b_n) > c \implies c \leq f(x_0) \leq c \implies f(x_0) = c$$

■

**Следствие 1****Corollary Следствие**

$$f(x) \text{ непрерывна на } [a; b] \implies E_f = [\inf E_f; \sup E_f]$$

**Следствие 2****Corollary Следствие**

$$f(x) = x^2 \text{ непрерывна на } D_f = [0; 2] \implies (E_f = [0; 4] \wedge \exists x_0 \in \mathbb{R} : x_0^2 = 2)$$

То есть доказано существование числа  $\sqrt{2}$

**Следствие 3****Corollary Следствие**

$$f(x) \text{ непрерывна на } [a; b] \wedge f(a) < 0 \wedge f(b) > 0 \implies \exists c \in (a; b) : f(c) = 0$$

### 9.7.7 Определение монотонности функции

#### Definition: Определение монотонности функции

- $f(x)$  называется строго возрастающей на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- $f(x)$  называется неубывающей на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f(x)$  называется строго убывающей на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- $f(x)$  называется невозрастающей на  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

### 9.7.8 Достаточное условие обратимости

#### Definition: Достаточное условие обратимости

Если функция  $f(x)$  строго монотонна на  $X$ , то  $f(x)$  обратима на  $X$

**Proof:**

Предположим от противного, что  $f(x)$  не инъективна, то есть

$$\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \implies \min(x_1, x_2) < \max(x_1, x_2) \implies \textcircled{W} \text{ с определением строгой монотонности}$$

■

### 9.7.9 Критерий обратимости функции

#### Definition: Критерий обратимости функции

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ . Тогда  $f(x)$  обратима  $\iff f(x)$  строго монотонна

**Proof:**

”  $\Leftarrow$  ”Смотри достаточное условие обратимости

”  $\Rightarrow$  ”

Докажем для случая, когда  $f(x)$  строго монотонно возрастает, для убывания аналогично

Предположим от противного, тогда БОО

$$\exists x_1 < x_2 < x_3 \in [a; b] : f(x_1) < f(x_2) \geq f(x_3)$$

$$\text{Если } f(x_2) = f(x_3), \text{ то } f \text{ не инъективна} \implies f \text{ не обратима} \implies \textcircled{W}$$

$$\text{Иначе, положим } c := \frac{\max(f(x_1), f(x_3)) + f(x_2)}{2} \implies f(x_1) < c < f(x_2) \wedge f(x_3) < c < f(x_2)$$

$$f \text{ непрерывна на } [a; b] \implies f \text{ непрерывна на } [x_1; x_2] \text{ и } [x_2; x_3]$$

$$f \text{ непрерывна на } [x_1; x_2] \implies \exists x'_0 \in (x_1; x_2) : f(x'_0) = c$$

$$f \text{ непрерывна на } [x_2; x_3] \implies \exists x''_0 \in (x_2; x_3) : f(x''_0) = c$$

$$\text{Получили: } \exists x'_0 < x''_0 \in [a; b] : f(x'_0) = f(x''_0) \implies f \text{ не инъективна} \implies f \text{ не обратима} \implies \textcircled{W}$$

■

### 9.7.10 Свойства обратимой функции

#### Theorem

Если функция  $f(x)$  непрерывна и строго монотонна на  $[a; b]$ , то функция  $f^{-1}(y)$ :

- 1) определена на  $E_f = [\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$
- 2) монотонна (и имеет ту же монотонность) на  $E_f$
- 3) непрерывна на  $E_f$

#### Proof:

1. Доказано по критерию обратимости функции

2. БОО  $f$  возрастает на  $[a; b]$

Предположим от противного

$f^{-1}(y)$  не возрастает на  $[a; b] \implies \exists y_1 < y_2 \in [f(a); f(b)] : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

По определению обратной функции  $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in [a; b]$ , обозначим  $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$

$x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ . При этом,  $f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$

$x_1 \geq x_2 \implies y_1 \geq y_2 \implies \textcircled{\text{W}}$

3. Докажем непрерывность по определению

Дано:  $x = f^{-1}(y)$  - определённая монотонная на  $[a; b]$  функция

Докажем, что  $f^{-1}$  непрерывна в любой точке  $y_0 \in (f(a); f(b))$

Для  $y_0 \in (f(a); f(b))$  доказательство аналогично (нужно рассмотреть односторонние пределы)

По определению непрерывности в точке  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in U_\delta(y_0) : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

Обозначим  $f^{-1}(y_0) = x_0$

БОО докажем для таких  $\varepsilon$ , что  $U_\varepsilon(x_0) \subset (a; b)$ . Для *бóльших*  $\varepsilon$  неравенство также будет выполняться  
 $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$

Обозначим  $y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ , тогда  $y_1 < y_0 < y_2$

Положим  $\delta := \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1)$ , тогда  $U_\delta(y_0) \subset (y_1; y_2)$

Докажем, что при выбранном  $\delta$  выполняется неравенство под знаками кванторов:

$y \in U_\delta(y_0) \implies y \in (y_1; y_2) \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \implies x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \implies$   
 $\implies |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon \implies$  неравенство под кванторами верно и определение выполняется

■

#### Следствие 1

#### Corollary Следствие (без доказательства)

Если функция  $f(x)$  непрерывна и строго монотонна на  $(a; b)$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , то функция  $f^{-1}(y)$ :

- 1) определена на  $(m; M)$ , где  $m = \min(f(a), f(b)), M = \max(f(a), f(b))$
- 2) монотонна (и имеет ту же монотонность)  $[m; M]$
- 3) непрерывна на  $(m; M)$

Идея доказательства: рассмотреть  $[c; d] \subset (a; b)$ , для него верна теорема выше, а далее перейти к пределу при границах, стремящихся к  $a$  и  $b$

## Следствие 2

### Corollary

Т.к.  $f(x) = x^n$  непрерывна и строго монотонно возрастает на  $D_f = n \cdot 2^? [0; +\infty) : \mathbb{R}$ , то

$g(x) = \sqrt[n]{x}$  непрерывна и строго монотонно возрастает на  $D_g = E_f = n \cdot 2^? [0; +\infty) : \mathbb{R}$

## 9.7.11 Обратные тригонометрические функции

### Definition: Обратные тригонометрические функции

$y = \sin x$  непрерывна и возрастает на  $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \implies$

$\implies \exists \arcsin := \sin^{-1} : y = \arcsin x$  непрерывна и возрастает на  $E_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , область значений -  $D_f = [-1; 1]$

Аналогично

- $y = \arccos x$  непрерывна и убывает на  $E_f = [0; \pi]$ , область значений -  $D_f = [-1; 1]$
- $y = \arctan x$  непрерывна и возрастает на  $E_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , область значений -  $D_f = \mathbb{R}$
- $y = \operatorname{arctg} x$  непрерывна и убывает на  $E_f = (0; \pi)$ , область значений -  $D_f = \mathbb{R}$

## 9.7.12 Показательная функция

### Definition: Показательная функция

(теорема без доказательства) функция  $y = a^x, a > 0$

- 1) определена на  $D_f = \mathbb{R}, E_f = (0; +\infty)$
- 2) возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на  $\mathbb{R}$
- 4)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

/\* Следствие:  $\phi(x) = a^x$  является изоморфизмом между  $(\mathbb{R}, +)$  и  $(\mathbb{R}_+, *)$  \*/  
 $(a^x)^y = a^{xy}$

## 9.7.13 Логарифмическая функция

### Definition: Логарифмическая функция

Функция, обратная к  $y = a^x, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$  обозначается  $y = \log_a x$

- 1) определена на  $D_f = (0; +\infty), E_f = \mathbb{R}$
- 2) возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на  $(0; +\infty)$
- 4)  $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

/\* Следствие:  $\psi(x) = \log_a x$  является изоморфизмом между  $(\mathbb{R}_+, *)$  и  $(\mathbb{R}, +)$  \*/  
 $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

## 9.7.14 Следствия из 2 замечательного предела

### Corollary Следствия из 2 замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

**Proof:**

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{x} \ln(x+1) = \ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Функция  $\ln x$  непрерывна, тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$$

■

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Proof:**

$$t = e^x - 1 \implies x = \ln(t+1)$$

$$x \rightarrow 0 \implies t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

■

## 9.7.15 Показательная функция с вещественным показателем

**Corollary** Показательная функция с вещественным показателем

$$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$$

$$y = e^{\alpha \ln x}$$

$\ln x$  непрерывна и возрастает на  $(0; +\infty)$

$\alpha \ln x$  непрерывна и возрастает при  $\alpha > 0$  и убывает при  $\alpha < 0$

$e^{\alpha \ln x}$  непрерывна и возрастает при  $\alpha > 0$  и убывает при  $\alpha < 0$

**Следствие**

**Corollary**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = a \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = b \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x)^{b(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{b(x) \ln a(x)} = e^{b \ln a} = a^b$$

Для ч.п.  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  построим кусочно-линейные функции  $a(x)$  и  $b(x)$ , такие что  $\forall n \in \mathbb{N} : a(n) = a_n \wedge b(n) = b_n$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

## 9.8 Производная функции

### 9.8.1 Определение производной

**Definition: Определение производной**

Производная функции  $f$  в точке  $x_0$  - это предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

**Note**

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x$$



**Proof:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

**Note**

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x^n)' = nx^{n-1}$$

**Proof:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k = nx_0^{n-1}$$

**Note**

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

**Proof:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} &= a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \\ &= a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \ln a} - 1}{t} = a^{x_0} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s} \cdot \ln a = a^{x_0} \ln a \end{aligned}$$

**Note**

$$(e^x)' = e^x$$

## 9.8.2 Правила подсчёта производных

**Claim** Правила подсчёта производных

Если  $\exists f'(x), \exists g'(x), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ , то

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $g(x) \neq 0 \implies \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

## 9.8.3 Определения дифференцируемости функции

**Definition:** Дифференцируемость функции в точке

Функция  $f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

**Definition:** Признак дифференцируемости функции в точке

**Theorem**

Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \iff \exists f'(x_0) (\in \mathbb{R})$

**Proof:**

”  $\Rightarrow$  ”

По определению дифференцируемости в точке

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \bar{o}(1) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f'(x_0) = A \in \mathbb{R}$$

”  $\Leftarrow$  ”

По определению производной:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \bar{o}(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0), A = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

■

#### 9.8.4 Определение дифференциала

**Definition: Определение дифференциала**

Дифференциал функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  - это линейная функция  $df(x) = A \cdot (x - x_0)$  такая, что  $f(x) = f(x_0) + df(x) + \bar{o}(x - x_0)$

#### 9.8.5 Теорема о непрерывности функции, дифференцируемой в точке

**Theorem**

Дифференцируемая в точке  $x_0$  функция непрерывна в ней

**Proof:**

По определению дифференцируемости в точке  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{o}(x - x_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

■

#### 9.8.6 Теорема о дифференцируемости сложной функции

**Theorem**

Если  $g(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и функция  $f(y)$  дифференцируема в точке  $y_0 = g(x_0)$ , то  $f(g(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

**Proof:**

$$\begin{aligned}g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \\f(y) &= f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \bar{o}(y - y_0) \implies \\f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) + \bar{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) \\f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0)) \cdot \bar{o}(x - x_0) + \bar{o}(g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)) = \\&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) + (x - x_0)\bar{o}(g'(x_0) + \bar{o}(x)(1)) = \\&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0) \implies (f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\end{aligned}$$

■

### 9.8.7 Теорема о производной обратной функции

**Theorem**

Если  $f(x)$  непрерывна и обратима на  $[a; b]$ ,  $x_0 \in (a; b)$ ,  $\exists f'(x_0) \neq 0$ , тогда  $\exists (f^{-1}(y))'|_{y=f(x_0)=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

**Proof:**

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f'(y) - f'(y_0)}{y - y_0} = \text{замена } y = f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

### 9.8.8 Пример 1

**Example**

Пример:  $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f^{-1}(y) = \ln y$   
 $(f^{-1}(y))'|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}$

### 9.8.9 Пример 2

**Example**

Пример:  $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$   
 $y = e^{\alpha \ln x} \implies y' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

### 9.8.10 Определение локального минимума

**Definition: Определение локального минимума (точка минимума)**

$x_0$  - точка локального минимума функции  $f(x)$ , если  $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \leq f(x)$   
 $x_0$  - точка строгого локального минимума функции  $f(x)$ , если  $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) < f(x)$

### 9.8.11 Определение локального максимума

**Definition: Определение локального максимума (точка максимума)**

$x_0$  - точка локального максимума функции  $f(x)$ , если  $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) \geq f(x)$   
 $x_0$  - точка строгого локального максимума функции  $f(x)$ , если  $\exists \delta_0 > 0 \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x_0) > f(x)$

### 9.8.12 Определение точки локального экстремума

#### Definition: Точка локального экстремума

Точками локального экстремума называются точки минимума и точки максимума

### 9.8.13 Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)

#### Theorem Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)

Если  $x_0$  - точка локального экстремума, то  $\exists f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0$

*Proof:*

Пусть  $\exists f'(x_0)$

Докажем для случая, когда  $x_0$  - локальный минимум, для локального максимума доказательство аналогично.

Предел при  $x \rightarrow x_0$  существует  $\implies$  существуют односторонние пределы и они совпадают с  $f'(x_0)$

В некоторой  $\delta$  окрестности  $f(x_0) \leq f(x)$

$$\left. \begin{array}{l} x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

■

### 9.8.14 Определения касательной к графику функции

#### Definition: Касательная к графику функции

Касательной к графику функции  $f(x)$  называется прямая  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

### 9.8.15 Теорема Ролля

#### Theorem Теорема Ролля

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на  $[a; b]$
- Дифференцируема на  $(a; b)$
- $f(a) = f(b)$

То  $\exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) = 0$

*Proof:*

1. Обозначим  $M := \sup_{x \in [a; b]} f(x), m := \inf_{x \in [a; b]} f(x)$  достигаются, т.к. функция непрерывна на отрезке
2. Если  $m = M \implies f(x) = \text{const} \implies \forall x \in (a; b) : f'(x) = 0$
3. Иначе, если  $m < M$ , тогда хотя бы одна из этих точек достигается в  $\xi \in (a; b)$  (т.к.  $f(a) = f(b)$ )  
БОО  $f(\xi) = M \implies \xi$  - точка  $\text{loc max}$   
 $f$  дифференцируема на  $(a; b) \implies \exists f'(\xi) \implies f'(\xi) = 0$  (по теореме Ферма)

■

### 9.8.16 Теорема Лагранжа

#### Theorem Теорема Лагранжа

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на  $[a; b]$
- Дифференцируема на  $(a; b)$

То  $\exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

**Proof:**

1. Рассмотрим  $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ , эта функция также, как и функция  $f$ ,

непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$

$F(a) = F(b) \implies$  для  $F$  выполняются требования теоремы Ролля  $\implies \exists \xi \in (a; b) : F'(\xi) = 0 \implies$

$$\implies \exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \implies \exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

■

### 9.8.17 Теорема-следствие 1

#### Corollary Теорема-следствие 1

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на  $[a; b]$
- Дифференцируема на  $(a; b)$
- $f'(x) = 0$  на  $(a; b)$

То  $f(x) = \text{const}$  на  $[a; b]$

**Proof:**

$\forall x_1, x_2 \in [a; b] f(x)$  удовлетворяет требованиям теоремы Лагранжа на  $[x_1, x_2] \implies$

$$\implies \exists \xi \in (x_1; x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1)$$

Получили:  $\forall x_1, x_2 \in [a; b] : f(x_2) - f(x_1) = 0$

■

### 9.8.18 Теорема-следствие 2

#### Corollary Теорема-следствие 2

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям:

- Непрерывность на  $[a; b]$
- Дифференцируемость на  $(a; b)$
- $\forall x \in (a; b) : f'(x) = g'(x)$

То  $\forall x \in [a; b] : f(x) - g(x) = \text{const}$

**Proof:**

Рассмотрим  $h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x)$  удовлетворяет требованиям предыдущей теоремы-следствия 1  $\implies$

$$\implies \forall x \in [a; b] : f(x) - g(x) = \text{const}$$

■

### 9.8.19 Теорема-следствие 3

#### Corollary Теорема-следствие 3

Если  $\phi(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и  $\phi'(x)$  определена везде на  $(a; b)$ , кроме, быть может,  $x_0$ , и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(x) = A \in \mathbb{R}$

То  $\exists \phi'(x_0) = A$ , т.е. у производной непрерывной функции нет точек устранимого разрыва

**Proof:**

По определению производной и по теореме Лагранжа:

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(\xi(x)), \xi(x) \in (x_0; x), \text{ т.к. на } (x_0; x)$$

$\phi(x)$  удовлетворяет требованиям т. Лагранжа

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \xi(x) = x_0 \implies \phi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi'(\xi(x)) = A \text{ (по теореме о пределе сложной функции)}$$

■

### 9.8.20 Теорема Коши

#### Theorem Теорема Коши

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям:

- Непрерывность на  $[a; b]$
- Дифференцируемость на  $(a; b)$

А также  $g'(x) \neq 0$  на  $(a; b)$  и  $g(a) \neq g(b)$

То  $\exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

**Proof:**

1. Рассмотрим  $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$ , эта функция также

непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$

$F(a) = F(b) \implies$  для  $F$  выполняются требования теоремы Ролля  $\implies \exists \xi \in (a; b) : F'(\xi) = 0 \implies$

$$\implies \exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0 \implies \exists \xi \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

■

### 9.8.21 Теорема о монотонности непрерывно дифференцируемой функции

#### Theorem

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- Непрерывна на  $[a; b]$
- Дифференцируема на  $(a; b)$

То:

$\forall x \in (a; b) : f'(x) \geq 0 \iff f(x)$  неубывает на  $[a; b]$

$\forall x \in (a; b) : f'(x) > 0 \implies f(x)$  возрастает на  $[a; b]$

(Для 2 высказывания импликация в обратную сторону не верна, например, для  $f(x) = x^3$  в т.  $x = 0$ )

**Proof:**

”  $\Leftarrow$  ”

$$\forall x_0 \in (a; b) : f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) - \text{неубывающая функция} \implies \forall x \neq x_0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

”  $\implies$  ”

$$\forall x_1 < x_2 \in [a; b] : f(x) \text{ удовлетворяет т. Лагранжа на } [x_1; x_2] \implies$$

$$\exists \xi \in (x_1; x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

$$f'(\xi) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$$

$$f'(\xi) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

■

### 9.8.22 Теорема-следствие

#### Corollary

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$ , кроме конечного числа точек (дифференцируемость), и  $f'(x) \geq 0$ , то  $f(x)$  неубывает на  $[a; b]$

### 9.8.23 Достаточное условие экстремума

#### Theorem Достаточное условие экстремума

Если  $\exists \delta > 0$  :

$$(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f'(x) \geq 0) \wedge$$

$$\wedge (\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f'(x) \leq 0) \wedge$$

$$\wedge (f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0)$$

, то  $x_0$  - точка  $\text{loc max}$  (нестрогой)

### 9.8.24 Выпуклость и вогнутость функции

#### Definition: Выпуклость и вогнутость функций

Функция называется выпуклой вверх на отрезке  $[a; b]$ , если

$\forall x_1 < x_2 \in [a; b]$  верно:

график функции  $y = f(x)$  лежит выше хорды, соединяющей точки  $(x_1; f(x_1))$  и  $(x_2; f(x_2))$ , т.е.

$$l(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} - \text{уравнение хорды } l$$

$\forall x \in [x_1; x_2] : f(x) \geq l(x)$  - нестрогая выпуклость

$\forall x \in (x_1; x_2) : f(x) > l(x)$  - строгая выпуклость

В определении функции, выпуклой вниз, знаки неравенств  $f(x) \geq l(x)$  и  $f(x) > l(x)$  меняются на противоположные

### 9.8.25 Теорема о выпуклости и вогнутости функции на интервале

#### Theorem

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и на  $(a; b) \exists f''(x)$ , то

$\forall x \in (a; b) : f''(x) \geq 0 \implies f(x)$  выпукла вниз

$\forall x \in (a; b) : f''(x) \leq 0 \implies f(x)$  выпукла вверх

#### Proof:

Докажем выпуклость вниз, выпуклость вверх доказывается аналогично

Пусть  $x_1 < x_2 \in [a; b]$ , тогда для доказательства по определению необходимо доказать верность неравенства:

$\forall x \in (x_1; x_2) : l(x) - f(x) \geq 0$ , где

$l(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$  - уравнение хорды  $l$

$$\begin{aligned} l(x) - f(x) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} - f(x) \frac{x_2 - x + x - x_1}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x)(x_2 - x) + f(x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1) - f(x)(x_2 - x) - f(x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(f(x_1) - f(x))(x_2 - x) + (f(x_2) - f(x))(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x_1) - f(x))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \textcircled{=}, \text{ т.к. для функции } f \end{aligned}$$

на  $(x_1; x)$  и  $(x; x_2)$  выполняется т. Лагранжа,  $\xi \in (x; x_2), \eta \in (x_1; x)$

$$\begin{aligned} &\textcircled{=} \frac{f'(\xi)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\eta)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(x - x_1)(x_2 - x)(f'(\xi) - f'(\eta))}{x_2 - x_1} \textcircled{=}, \text{ т.к. для функции } f' \text{ на } (\eta; \xi) \text{ выполняется т. Лагранжа} \\ &\textcircled{=} \frac{(x - x_1)(x_2 - x)f''(\zeta)(\xi - \eta)}{x_2 - x_1} \geq 0, \zeta \in (\eta; \xi) \subset (a; b) \end{aligned}$$

■

### 9.8.26 Правило Лопиталья

#### Theorem Правило Лопиталья (неопределённость вида $\frac{0}{0}$ )

Докажем теорему для случая, когда рассматривается левосторонний предел при  $a \in \mathbb{R}$ , т.е. предел

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

для  $a \in \mathbb{R}$  и функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , таких что:

- $\exists \delta_1 > 0 : f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a - \delta_1; a)$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} g(x) = 0$
- $\forall x \in (a - \delta_1; a) : g'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда:  $\exists \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$



**Proof:**

1. БОО рассмотрим случай, когда  $A \in \mathbb{R}$ . Иначе рассмотрим предел частного  $\frac{f(x)}{g(x)}$

2. Доопределим  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $a$ :  $f(a) = g(a) = 0$ , чтобы функции были непрерывны в точке  $a$ .

Это не влияет на искомый предел по определению предела функции при  $x \rightarrow a$

Тогда  $\forall x \in (a - \delta_1; a)$  на  $[x; a]$  выполнено условие т. Коши

Тогда по т. Коши  $\exists \xi \in (x; a) : \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$\xi$  зависит от  $x$  по построению  $\implies \xi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-} a$

Тогда  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = F(\xi(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a-} A$  по теореме о пределе сложной функции  $F(\xi(x))$

■

Для случая  $x \rightarrow a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  и  $x \rightarrow a+$ ,  $a \in \mathbb{R}$  доказательство аналогично

Докажем теорему для случая, когда рассматривается предел при  $a \in +\infty$ , т.е. предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Proof:**

1. БОО рассмотрим случай, когда  $A \in \mathbb{R}$ . Иначе рассмотрим предел частного  $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left| x = \frac{1}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = A$$

2. Рассмотрим функции:

$$a(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$b(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

Тогда:

$$a'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

$$b'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

$$\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \frac{a'(t)}{b'(t)} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a'(t)}{b'(t)} = A$$

По построению  $a(t)$  и  $b(t)$  - композиция дифференцируемых функций, также для них выполнены пункты 2, 3, 4 теоремы, тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a(t)}{b(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a'(t)}{b'(t)} = A \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

■

**Theorem** Правило Лопиталья (неопределённость вида  $\frac{\infty}{\infty}$ )

Докажем теорему для случая, когда рассматривается левосторонний предел при  $a \in \mathbb{R}$ , т.е. предел

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

для  $a \in \mathbb{R}$  и функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , таких что:

- $\exists \delta_1 > 0 : f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a - \delta_1; a)$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} g(x) = \infty$
- $\forall x \in (a - \delta_1; a) : g'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда:  $\exists \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

**Proof:**

1. БОО рассмотрим случай, когда  $A \in \mathbb{R}$ . Иначе рассмотрим предел частного  $\frac{f(x)}{g(x)}$

2. По определению предела:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in (a - \delta_2; a) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon_1$$

Рассмотрим такие  $\varepsilon_1$ , что  $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$

Зафиксируем  $x_0 \in (a - \min\{\delta_1; \delta_2\}; a)$

Т.к.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-} \infty$ , то  $\exists \delta_3 > 0 \forall x \in (a - \delta_3; a) : |f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1}$

То есть  $\exists \delta_3 > 0 \forall x \in (a - \delta_3; a) : \varepsilon_1 \geq \left| \frac{f(x_0)}{f(x)} \right|$

Аналогично  $\exists \delta_4 : \forall x \in (a - \delta_4; a) : \varepsilon_1 \geq \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|$

Обозначим  $x_0 = a - \min\{\delta_1; \delta_2; \delta_3; \delta_4\}$  и рассмотрим  $x \in (x_0; a)$

Тогда на  $[x_0; x]$  выполнены условия теоремы Коши для функций  $f$  и  $g \implies$

$$\implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} - A \right| < \varepsilon_1, \text{ т.к. } \xi(x) \in (x_0; x) \subset (a - \delta_2; a)$$

$$3. \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A \right| <$$

$$< \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| + \varepsilon_1 =$$

$$= \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right| + \varepsilon_1 <$$

$$< (|A| + \varepsilon_1) \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right| + \varepsilon_1 =$$

$$= (|A| + \varepsilon_1) \left| \frac{\frac{f(x_0)}{f(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| + \varepsilon_1 \leq$$

$$\leq (|A| + \varepsilon_1) \frac{\left| \frac{f(x_0)}{f(x)} \right| + \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|}{1 - \left| \frac{f(x_0)}{f(x)} \right|} + \varepsilon_1 \leq$$

$$\leq (|A| + \varepsilon_1) \frac{2\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} + \varepsilon_1 < \left( |A| + \frac{1}{2} \right) \frac{2\varepsilon_1}{1 - \frac{1}{2}} + \varepsilon_1 = \varepsilon_1(3 + 4|A|)$$

4. Тогда:

$\forall \varepsilon > 0$  построим  $\varepsilon_1 = \min\left\{ \frac{\varepsilon}{3 + 4|A|}, \frac{1}{2} \right\}$ , по  $\varepsilon_1$  построим  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$

Положим  $\delta := \min\{\delta_1; \delta_2; \delta_3; \delta_4\}$ , тогда  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon_1(3 + 4|A|) = \varepsilon$

■

**Example** (Пример использования правила Лопиталя)

1. Пусть  $\alpha > 0, \beta > 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \implies \\ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha = 0, \text{ т.к. } x^\alpha \text{ непрерывна на всей области определения}\end{aligned}\tag{9.1}$$

2. Пусть  $\alpha > 0, a > 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0 \implies \\ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{(\sqrt[\alpha]{a})^x} \right)^\alpha = 0\end{aligned}$$

## 9.9 Формула Тейлора

### 9.9.1 Многочлен Тейлора

**Definition: Многочлен Тейлора**

Пусть дана функция  $f$ , дифференцируемая  $n$  раз в точке  $x_0$ , тогда в точке  $x_0$  многочленом Тейлора называется многочлен:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**Note**

При  $x_0 = 0$   $T_n(x)$  называется рядом Маклорена

**Claim** Свойство многочлена Тейлора

$$\forall k \in \mathbb{N} : (0 \leq k \leq n \implies T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0))$$

**Proof:**

$$\begin{aligned}T_n^{(m)}(x) &= \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} = \\ &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} + \left( \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m \right)^{(m)} + \left( \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} + \left( \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} m! (x - x_0)^0 \right) + \left( \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} + (f^{(m)}(x_0)) + \left( \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)^{(m)} \implies \\ T_n^{(m)}(x_0) &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} 0 \right) + (f^{(m)}(x_0)) + \left( \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} 0 \right) = f^{(m)}(x_0)\end{aligned}$$

■

### 9.9.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

#### Theorem Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Если  $\exists f^{(n)}(x_0)$ , т.е. существует  $n$ -ая производная в точке  $x_0$   
(следовательно, функция  $n - 1$  раз дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ ), то  
 $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \bar{o}((x - x_0)^n)$

*Proof:*

1. По правилу Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - T''_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}_n(x)}{n!(x - x_0)} \end{aligned}$$

Для полученного выражения нельзя применить правило Лопиталя, т.к.  $f^{(n-1)}$  может быть не дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$   
(из условия следует, только то, что  $f^{(n-1)}$  дифференцируема в точке  $x_0$ )

2. Для  $f^{(n-1)} - T^{(n-1)}_n$  существует производная в точке  $x_0 \implies$

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$T^{(n-1)}_n(x) = T^{(n-1)}_n(x_0) + T^{(n)}_n(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$$

$$f^{(n-1)}(x_0) = T^{(n-1)}_n(x_0) \wedge f^{(n)} = T^{(n)}_n(x_0) \implies$$

$$\implies f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}_n(x) = \bar{o}(x - x_0) - \bar{o}(x - x_0) = \bar{o}(x - x_0) \implies$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{o}(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = 0$$

■

### 9.9.3 Формула Тейлора для синуса

#### Example (Формула Тейлора для синуса)

$f(x) = \sin x, x_0 = 0$ , тогда  $f^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{\pi k}{2})$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{2} \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}}, \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

### 9.9.4 Формула Тейлора для экспоненциальной функции

#### Example (Формула Тейлора для косинуса)

$f(x) = \cos x, x_0 = 0$ , тогда  $f^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{\pi k}{2})$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, k \equiv 1 \pmod{2} \\ (-1)^{\frac{k}{2}}, \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \bar{o}(x^{2n})$$

### 9.9.5 Формула Тейлора для экспоненциальной функции

**Example** (Формула Тейлора для экспоненциальной функции)

$f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ , тогда  $f^{(k)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \bar{o}(x^n)$$

**Example** (Пример использования формулы Тейлора для подсчёта предела)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3))}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3) - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3)} = 1 \quad (9.2)$$

### 9.9.6 Теорема Тейлора с остаточным членом в формуле Лагранжа

**Theorem** Теорема Тейлора с остаточным членом в формуле Лагранжа

Если функция  $f(x)$  дифференцируема  $n+1$  раз на интервале  $(a; b)$ ,  $a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \bar{\mathbb{R}}$  и  $a < x_0, x < b$ , то  $\exists c = c(x) \in (\min(x_0; x); \max(x_0; x))$  :

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

**Proof:**

1. Рассмотрим функцию  $\gamma(t) = f(x) - T_n(t; x) - \frac{(x-t)^{n+1} R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ , где  $T_n(t; x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$

$\gamma(t)$  дифференцируема по  $t$  на  $(\min(x_0; x); \max(x_0, x))$ , также

$$\gamma(x_0) = f(x) - T_n(x_0; x) - R_n(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\gamma(x) = f(x) - T_n(x; x) = f(x) - f(x) = 0$$

Тогда по т. Ролля  $\exists c \in (\min(x_0; x); \max(x_0, x))$  :  $\gamma'(c) = 0$

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \right) + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \\ &= -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + f'(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \end{aligned}$$

2.  $\gamma'(c) = 0 \implies$

$$\implies \frac{(n+1)(x-c)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n = 0 \implies$$

$$\implies R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

■

**Example** (Пример для функции синус)

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| \sin x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Example** (Пример для экспоненты)

$$f(x) = e^x, T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : |T_n(x) - e^x| = |R_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ т.к. } c = c(x; x_0) \in (x_0; x) = (0; x)$$

### 9.9.7 Определение точки возрастания

**Definition: Точка возрастания**

$x_0$  - точка возрастания, если:

$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) :$

$(x_0 < x \implies f(x_0) < f(x)) \wedge (x < x_0 \implies f(x) < f(x_0))$

### 9.9.8 Определение точки убывания

**Definition: Точка убывания**

$x_0$  - точка убывания, если:

$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) :$

$(x_0 < x \implies f(x_0) > f(x)) \wedge (x < x_0 \implies f(x) > f(x_0))$

### 9.9.9 Теорема о функции, имеющей ровно $n - 1$ ненулевых производных

#### Theorem

Если функция  $f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$  и выполнено:

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : f^{(i)}(x_0) = 0$

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , то

- $n = 2k$  :
  - Если  $f^{(2k)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  - точка  $\min$
  - Если  $f^{(2k)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  - точка  $\max$
- $n = 2k + 1$  :
  - Если  $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  - точка возрастания
  - Если  $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  - точка убывания

**Proof:**

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{o}((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right) (x - x_0)^n$$

2. Для случая, когда  $n = 2k$ , докажем при  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , для второго случая аналогично:

Т.к.  $\bar{o}(1)$  - б.м. при  $x \rightarrow x_0$ , то

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) : \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right) > 0$$

$$\text{Тогда } \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) - f(x_0) = \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right) (x - x_0)^{2k} > 0$$

3. Для случая, когда  $n = 2k + 1$ , докажем при  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , для второго случая аналогично:

$$\text{Аналогично пункту 2 } \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) : \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right) > 0$$

$$\text{При } x \in (x_0; x_0 + \delta) : (x - x_0)^{2k+1} > 0$$

$$\text{При } x \in (x_0 - \delta; x_0) : (x - x_0)^{2k+1} < 0$$

$$\text{Тогда при } x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) - f(x_0) > 0$$

$$\text{Тогда при } x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) - f(x_0) < 0$$

■



## Chapter 10

# Интегрирование функций

При нахождении опечаток просьба написать [https://t.me/i8088\\_t](https://t.me/i8088_t), на момент компиляции ник в тг: vova kormilitsyn