HSE FCS SE
Calculus-1 2023-2024

Lecturer: Ivan Erlikh
File edited by: vova kormilitsyn

ver. 1.2.0

Теоремы и определения

Definition: Высказывания и n-местные предикаты

Высказывание - это упрощённая модель повествования предложения, такая что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, но не одновременно
n-местные предикат (n-арный предикат) - это выражение, которое превращается в высказывание, если в нём заменить $x_1, x_2, ..., x_n$ на подходящие имена, где $x_1, x_2, ..., x_n$ - переменные в предикате

Definition: Логические операции

Отрицание:	• $\neg A$ (также обозначают $\overline{A}$) означает "не A"
Логическое и:	• $A \wedge B$ означает "верно A и верно B"
Логическое или:	• $A \vee B$ означает "верно A, или верно B, или верны A и B вместе"
Исключающее или:	• $A \oplus B$ означает "верно ровно одно из высказываний A, B"
Импликация:	• $A \implies B$ означает "если верно A, то верно B"
Эквивалентность:	• $A \iff B$ означает "A верно тогда и только тогда, когда верно B"

Note

Пусть $A \implies B$
Если A верно, то B тоже верно, но если A ложно, то B может быть и истинным, и ложным
Пусть $A \iff B$
Если A ложно, то ложно B. Если B верно, то верно A

Note

Логические операции можно выражать через другие логические операции, например,
$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$

Definition: Кванторы

Квантор всеобщности обозначается как $\forall$ и означает "для любого"
Квантор существования обозначается как $\exists$ и означает "существует"
Квантор едиственности обозначается как ! и означает "едиственный, такой что ..."

Example

Всеобщность:	• $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x)$ означает "Для любого x из $\mathbb{R}$ выполняется предикат $\phi(x)$"
Существование:	• $\exists x\, (x \in \mathbb{Q} \implies \psi(x))$ означает "Существует x, такой что если x из $\mathbb{Q}$, то выполняется предикат $\psi(x)$"
Единственность:	• $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists! k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \leq n < 2^{k+1}$ означает "Для любого натурального числа существует и едиственно такое целое неотрицательное число k, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$"

Note

На практике квантор едиственности часто используется вместе с квантором существования т.е. часто используют связку $\exists!$, "существует и единственно"

Note

Вместо "$\neg\exists$" пишут "$\nexists$"

Claim Правило обращения кванторов

При обращении кванторов квантор существования меняется на квантор всеобщности, квантор всеобщности меняется на квантор существования, а утверждение под кванторами меняется на противоположное

Example

Пусть дано высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m_1 \in \mathbb{Z}\, \exists m_2 > m_1\, \forall q \in \mathbb{Q} : |m_1| > n \wedge \neg\psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Тогда отрицание к этому высказыванию будет:

$$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m_1 \in \mathbb{Z}\, \forall m_2 > m_1\, \exists q \in \mathbb{Q} : |m_1| \leq n \vee \psi(q \cdot m_1 \cdot m_2 - n)$$

Claim Метод математической индукции

Пусть есть предикат $\phi(n)$, который выполняется или не выполняется при различных $n \in \mathbb{N}$
Тогда, если $\exists k \in \mathbb{N} : \phi(k)$ и $\forall n \geq k : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$, то по методу математической индукции получаем $\forall n \geq k : \phi(n)$
Этапы доказательства:

База индукции:	• Проверка истинности $\phi(k)$
Предположение индукции:	• Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k$ верно $\phi(n)$
Шаг индукции:	• Докажем, что $\phi(n+1)$, используя предположение индукции
Вывод:	• $\forall n \geq k : \phi(n)$

Theorem Неравенство Бернулли

Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq -1$, то $(1+x)^n \geq 1 + xn$

Proof:

Докажем неравенство при помощи метода математической индукции

1. База индукции:

Пусть $n = 1 \implies (1+x)^n = 1 + x \geq 1 + x$

2. Предположение индукции:

Пусть для некоторого $n \geq 1$ верно, что $(1+x)^n \geq 1 + xn$

3. Шаг индукции: Рассмотрим неравенство, подставив в него $n + 1$:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$

$1 + x \geq 0 \implies (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+xn) \cdot (1+x) = 1 + xn + x + n \cdot x^2 \geq 1 + nx + x = 1 + n(x+1)$

Следовательно, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + n(x+1)$

4. Обозначим доказываемое высказывание как предикат $\phi(n)$, тогда получаем:

$\phi(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (\phi(n) \implies \phi(n+1))$

Тогда по принципу математической индукции $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n)$

■

Definition: Перестановки, размещения и сочетания

Пусть дано множество из n элементов
• Если все элементы попарно различны (т.е. при решении задачи мы считаем, что два любых элемента множества различны), то количество попарно различных перестановок этого множества обозначается как P_n и равно $n!$
Пусть зафиксировано $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что $k \leq n$, тогда:
• Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k-элементное подмножество данного множества, считая, что элементы попарно различны, обозначается как A_n^k и равно $\frac{n!}{(n-k)!}$
• Количество количество способов, которыми мы можем выбрать k-элементное подмножество данного множества, считая, элементы равны, обозначается как C_n^k и равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Theorem Бином Ньютона
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$(формально, перед равенством необходимо написать $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$)

Proof:

Докажем это утверждение при помощи метода математической индукции

1. База индукции: $n = 1 \implies (a+b)^n = a + b = \sum\limits_{k=0}^{1} C_n^k a^k b^{n-k}$

2. Предположение индукции: пусть для некоторого $n \geq 1 : (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

3. Рассмотрим равенство и докажем, что оно верно при подстановке $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^0 a^0 b^{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + C_{n+1}^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

4. Получили:

Равенство верно при $n = 1$, а из верности равенства для n следует верность равенства для $n+1$ (при $n \geq 1$), тогда по методу математической индукции получим, что равенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$

■

Definition: Числовая последовательность

Числовая последовательность - это счётно бесконечный проиндексированный набор чисел

Definition: Ограниченная сверху числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если
$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \, a_n < C$

Definition: Ограниченная снизу числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если
$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \, a_n > -C$

Definition: Ограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если
$\exists C > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : \, |a_n| < C$

Note

Числовая последовательность ограничена $\iff$ она ограничена сверху и ограничена снизу

Definition: Неограниченная числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется неограниченной, если она не является ограниченной, то есть
$\forall C > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \, |a_n| \geq C$

Definition: Отделимая от нуля числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется отделимой от нуля, если
$\exists \epsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : \, |a_n| > \epsilon$

Definition: Эпсилон окрестность

Эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$ и обозначается $U_\epsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Эпсилон окрестность точки x_0"

Example

$U_1(\pi) = (\pi - 1; \pi + 1)$
$U_e(e) = (0; 2e)$

Definition: Проколотая эпсилон окрестность

Проколотой эпсилон окрестностью вещественного числа x_0 (элемента поля вещественных чисел) называется множество $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$ и обозначается $\dot{U}_\epsilon(x_0)$.
Обычно говорят "Проколотая эпсилон окрестность точки x_0"

Example

$\dot{U}_1(e) = (e - 1; e + 1) \setminus \{e\} = (e - 1; e) \cup (e; e + 1)$

Definition: Сходящаяся числовая последовательность

Числовая последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел при $n \to +\infty$, т.е. ч.п. $\{a_n\}$ называется сходящейся, если $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, то есть по определению

$$\exists A \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0\, \exists N = N(\epsilon) \forall n > N : |a_n - A| < \epsilon$$

Note

Сходящаяся ч.п. является ограниченной

Note

Неравенство $|a_n - A| < \epsilon$ равносильно тому, что $a_n \in U_\epsilon(A)$

Definition: Бесконечно большая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если она стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞ при $n \to +\infty$, т.е.

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : a_n > M$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : a_n < -M$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \iff \forall M > 0\, \exists N = N(M) \forall n > N : |a_n| > M$

Definition: Бесконечно малая числовая последовательность

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если она стремится к 0 при $n \to +\infty$, т.е.
$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall n > N : |a_n| < \epsilon$

Note

Связи числовых последовательностей:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Note

Если ч.п. сходится или является б.б., то предел единственный

Proposition Докажите по определению, что

(ограниченная ч.п.) + (ограниченная ч.п.) = ограниченная ч.п.
б.м + б.м. = б.м.
б.м. · (ограниченная ч.п.) = б.м.
$\frac{\text{отделимая от нуля ч.п.}}{\text{ограниченная ч.п.}}$ = ограничена ч.п.

Proposition Приведите пример, когда

(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = отделимая от нуля ч.п.
(отделимая от нуля ч.п.) + (отделимая от нуля ч.п.) = б.м.
б.б + б.б = б.б.
б.б + б.б = б.м.
б.б + б.б = (ограниченная ч.п.)
б.б + б.б = (отделимая от нуля ч.п.)

Theorem Теорема: свойство предельного перехода в неравенствах

$$(\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : c_n > A) \wedge (\lim_{n\to\infty} c_n = C) \implies C \geq A$$

Proof:

1. Распишем, что дано, по определению:
$\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : |c_n - C| < \epsilon$
Это равносильно $\forall \epsilon > 0 \exists N_1(\epsilon) \forall n > N_1(\epsilon) : C - \epsilon < c_n < C + \epsilon$
$\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : c_n > A$
2. Для любого ϵ рассмотрим $M(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N) + 1$
Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N) + 1\, \forall n > M : (C - \epsilon < c_n < C + \epsilon \wedge c_n > A)$
Следовательно, $\forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon)\, \forall n > M : C + \epsilon > A$
Выражение под кванторами не зависит от M и $n \implies \forall \epsilon > 0 : C + \epsilon > A$
3. Предположим от противного, что $C < A$
Положим $\epsilon := \dfrac{A - C}{2} > 0 \implies C + \epsilon = C + \dfrac{A - C}{2} = \dfrac{A + C}{2} < A$
Получили, что $\exists \epsilon > 0 : C + \epsilon < A \implies$ W $\implies$ предположение, что $C < A$, неверно $\implies C \geq A$

■

Theorem Теорема о зажатой последовательности (о 2 миллиционерах / 2 полицейских / гамбургерах)

$$\left.\begin{array}{l} a_n, b_n, c_n \text{ - числовые последовательности} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = X \\ \lim_{n\to\infty} b_n = X \\ \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : a_n \leq c_n \leq b_n \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to\infty} c_n = X$$

Proof:

Докажем для случая, когда $X \in \mathbb{R}$. При $X \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ доказательство проводится аналогично
1. Распишем по определению пределы.
$\forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1(\epsilon) : X - \epsilon < a_n < X + \epsilon$
$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n > N_2(\epsilon) : X - \epsilon < b_n < X + \epsilon$
Рассмотрим $N_3(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon), N)$, тогда
$\forall \epsilon > 0\, \exists N_3(\epsilon)\, \forall n > N_3(\epsilon) : X - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < X + \epsilon$
$\implies \forall \epsilon > 0\, \exists N_3(\epsilon)\, \forall n > N_3(\epsilon) : X - \epsilon < c_n < X + \epsilon$

■

Theorem Теорема о свойстве предела б.м. ч.п.

если $a \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{где } \alpha_n \text{ - б.м. ч.п.}$$

Proof:

" $\implies$ "

Распишем по определению, что дано:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\epsilon > 0\,\exists N(\epsilon)\,\forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

Обозначим ч.п. $\alpha_n = a_n - a$, тогда $a_n = a + \alpha_n$

Тогда: $\forall\epsilon > 0\,\exists N(\epsilon)\,\forall n > N(\epsilon) : |\alpha_n| < \epsilon$

Доказали, что $a_n = a + \alpha_n$, где α_n - б.м. ч.п.

" $\impliedby$ "

Распишем то, что α_n - б.м., по определению:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\epsilon > 0\,\exists N(\epsilon)\,\forall n > N(\epsilon) : |\alpha_n| < \epsilon$

По условию $a_n = a + \alpha_n$, тогда $a_n - a = \alpha_n$, подставим в выражение под кванторами:

$\forall\epsilon > 0\,\exists N(\epsilon)\,\forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

Доказали по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

■

Definition: Монотонность ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
Ч.п. $\{a_n\}$ называется невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

Claim Аксиома непрерывности действительных чисел (принцип полноты)

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \neq \varnothing \\ B \subseteq \mathbb{R} \\ B \neq \varnothing \\ \forall a \in A\,\forall b \in B : a \leq b \end{array}\right\} \implies \exists c \in \mathbb{R}\,\forall a \in A\,\forall b \in B : a \leq c \leq b$$

Definition: Ограниченное сверху множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным свеху, если $\exists C \in \mathbb{R}\,\forall a \in A :\ a \leq C$

Definition: Ограниченное снизу множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists C \in \mathbb{R}\,\forall a \in A :\ a \geq C$

Definition: Ограниченное множество

Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным, если $\exists C > 0\,\forall a \in A :\ |a| \leq C$

Definition: Определение верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing$. Тогда верхней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \leq c$

Definition: Определение нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing$. Тогда нижней гранью множества A называют число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\forall a \in A : a \geq c$

Definition: Определение точной верхней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing$. Тогда точной верхней гранью множества A называют наименьший элемента множества всех верхних граней множества A и обозначают $\sup A$

Definition: Определение точной нижней грани множества

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing$. Тогда точной нижней гранью множества A называют наибольший элемента множества всех нижней граней множества A и обозначают $\inf A$

Note

Вообще говоря, наименьшый и наибольший элементы множества не всегда существуют.
Например, у множества $(0;1)$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, при этом $\sup(0;1) = 1 \notin (0;1)$, $\inf(0;1) = 0 \notin (0;1)$

Theorem Теорема о существовании точной грани множества

Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ ограничено сверху, то $\exists \sup A$
Если множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ ограничено снизу, то $\exists \inf A$

Proof: Докажем для верхней грани, для нижней грани доказательство аналогично

$$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing \wedge (\exists C > 0 \, \forall a \in A \implies a < C) \implies \exists \sup A$$

1. Обозначим $S_A = \{c \in \mathbb{R} | \forall a \in A \implies a \leq c\} \neq \varnothing$ - множество верхних граней
Это множество не пусто, т.к. A ограничено по условию, т.е. $\exists c > 0 \, \forall a \in A \implies a \leq c$
2. По построению множества A и S_A удовлетворяют аксиоме непрерывности действительных чисел, тогда $\exists b \in \mathbb{R} \, \forall a \in A \forall c \in S_A \implies a \leq b \leq c$
Но из $b \leq c \implies b \in S_A$, при этом $(\forall c \in S_A \implies b \leq c)$, следовательно, b является наименьшим элементом множества верхних граней множества A, тогда по определению точной верхней грани $b = \sup A$

■

Theorem Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ч.п.)

Если ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится
Если ч.п. $\{a_n\}$ невозрастает и ограничена снизу, то она сходится

Proof: Докажем для неубывающей ч.п., для невозрастающей ч.п. доказательство аналогично
1. Обозначим множество значений ч.п. $A = \{a_n\}$
Т.к. a_n - числовая последовательность, то множество A счётно или конечно
(т.е. существует инъекция между A и $\mathbb{N}, A \lesssim \mathbb{N}$)
Также $A \neq \varnothing$ и множество A ограничено сверху $\implies$ по теореме о существовании точной верхней грани $\exists \sup A = a$
2. Докажем, что $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, т.е. $\forall \epsilon \, \exists N = N(\epsilon) \, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$
a_n неубывает и ограничена сверху $a \implies |a_n - a| = a - a_n$, тогда
$|a_n - a| < \epsilon \iff a - a_n < \epsilon \iff a_n > a - \epsilon$
Т.к. последовательность a_n неубывает, то следующие 2 высказывания равносильны:
$\forall \epsilon \, \exists N = N(\epsilon) \, \forall n > N(\epsilon) : a_n > a - \epsilon$ (#)

$\forall \epsilon\, \exists N = N(\epsilon) : a_N > a - \epsilon$ (*)
3. Докажем второе высказывание (*) методом от противного.
Предположим, что $\exists \epsilon_0 \forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \le a - \epsilon_0$
Тогда число $a - \epsilon_0$ - верхняя грань множества A, но a само является точной верхней гранью, но $a - \epsilon_0 < a \implies \perp \implies$ неверно предположение, что высказывание (*) неверно $\implies$ высказывание (#) верно ■

Definition: Число e

Рассмотрим ч.п. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его e

Proof: 1. Докажем, что a_n ограничена сверху числом 3

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \le$$
$$\le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

2. Докажем, что a_n - возрастающая ч.п.
Рассмотрим a_{n+1}

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Т.к. $\forall m \in \{1, \ldots, n\}\ 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$, то

$$a_{n+1} \ge a_n + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > a_n$$

3. $\{a_n\}$ ограничена сверху и возрастает $\implies \exists \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$ ■

Definition: Подпоследовательность

Пусть дана ч.п. $\{a_n\}$, тогда подпоследовательностью называется ч.п., полученная *последовательным* выбором некоторых членов исходной ч.п. и обозначается $\{a_{n_k}\}$

Note

Если $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность ч.п. $\{a_n\}$, то $\forall k \in \mathbb{N} : n_k \ge k$

Definition: Частичный предел

Частичный предел ч.п. $\{a_n\}$ - число, являющееся пределом какой-либо сходящейся подпоследовательности данной последовательности $\{a_n\}$

Definition: Верхний предел ч.п.

Верхним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sup\{a_n\}_{n\geq k}$$

Definition: Нижний предел ч.п.

Нижним пределом ч.п. $\{a_n\}$ называется предел

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \lim_{k\to+\infty} \inf\{a_n\}_{n\geq k}$$

Definition: Предельная точка ч.п.

Предельной точкой ч.п. $\{a_n\}$ называется число a, такое что в любой окрестности точки a находится бесконечно много членов ч.п. $\{a_n\}$

Theorem Определение предельной точки ч.п. эквивалентно определению частичного предела ч.п.

Proof:

1. a - частичный предел $\implies$ a - предельная точка $\{a_n\}$
$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : |a_{n_k} - a| < \epsilon$
$\iff$
$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(k) \forall k > N : a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$
Следовательно, $\forall \epsilon$ в $U_\epsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$
2. a - предельная точка$\{a_n\}$ $\implies$ a - ч.п. $\{a_n\}$
По определению предельной точки $\forall \epsilon$ в $U_\epsilon(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$
Предъявим ч.п. $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$, такую что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$
Обозначим $\epsilon_k = \dfrac{1}{k}$
Рассмотрим ϵ_1, в $U_{\epsilon_1}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, выберем какой-то член a_{n_1}
Рассмотрим ϵ_2, в $U_{\epsilon_2}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in U_{\epsilon_2}(a)$
Рассмотрим ϵ_k, в $U_{\epsilon_k}(a)$ попадает бесконечно много членов $\{a_n\}$, поэтому $\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} \in U_{\epsilon_k}(a)$
Таким образом, построена ч.п. $\{a_{n_k}\}$, такая что $\forall k \in \mathbb{N} : a - \dfrac{1}{k} < a_{n_k} < a + \dfrac{1}{k} \implies$
$\implies$ по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

■

Note

Свойства частичных пределов ч.п.
$\{a_n\}$ сходится $\iff$ $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$
$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \sup\{$множества предельных точек $\{a_n\}\}$
$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \inf\{$множества предельных точек $\{a_n\}\}$
$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ - частичные пределы

Theorem Система вложенных отрезков

Системой вложенных отрезков называют счётно бесконечное множество отрезков, каждый из

которых содержит следующий отрезок как подмножество
Обозначение: $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subseteq I_k$

Example

Рассмотрим $S = \{[1-\frac{1}{k}; 2+\frac{1}{k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда
$S = \{[0;3], [0.5; 2.5], [\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}], ...\}$
Рассмотрим $S = \{[\pi; \pi - \frac{1}{k^k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда
$S = \{[\pi; \pi-1], [\pi; \pi-\frac{1}{4}], [\pi; \pi-\frac{1}{27}], ...\}$

Theorem Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной ч.п. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Proof:

По определению ограниченной ч.п. $\exists C \forall n \in \mathbb{N} |a_n| < C$
Построим искому подпоследовательность при помощи системы вложенных отрезков
$I_1 = [-c; c], \forall n \in \mathbb{N} a_n \in I_1,$ выберем какой-то член ч.п. $a_{n_1} \in I_1$
Т.к. $\{a_n\}$ - ч.п., то в какой-то половине точно есть бесконечно много членов $\{a_n\}$
Выберем эту половину и обозначим I_2, выберем в нём какой-то член ч.п. $a_{n_2} \in I_2$
Пусть построен I_k и a_{n_k}. Делим I_k пополам и выбираем половину,
в которой бесконечно много членов $\{a_n\}$, обозначим эту половину как I_{k+1}
и выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$
Построили последовательность $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k; d_k]$
$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{b_k\}$ неубывает и ограничена сверху C
$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_k = b, b \geq b_k$
$\forall k \in \mathbb{N} : I_{k+1} \subset I_k \implies \{d_k\}$ невозрастает и ограничена снизу $-C$
$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} d_k = d, d \leq d_k$
При этом $|d_k - b_k| = \dfrac{2\cdot C}{2^{k-1}} \to 0$ при $k \to \infty$
$ADDPROOF[d \geq b]$(пока что см. консультацю 2)
$d - b \leq d_k - b_k \to 0$ при $k \to \infty \implies d \leq b \implies d = b$

∎

Definition: Фундаментальная ч.п.

Ч.п. $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N(\epsilon) \forall n, m > N(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$$

Theorem Критерий сходимости ч.п. по Коши

Ч.п. $\{a_n\}$ сходится $\iff \{a_n\}$ - Фундаментальная ч.п.

Proof:

$" \implies "$

Распишем, что дано:$\exists A \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1 : |a_n - A| < \epsilon$

Хотим доказать:$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \epsilon$

$|a_n - a_m| < \epsilon \impliedby |a_n - a + a - a_m| < \epsilon \impliedby |a_n - a| + |a - a_m| < \epsilon \impliedby |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon$

Положим $N_2(\epsilon) := N_1(\dfrac{\epsilon}{2}) \implies$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon \implies$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < \epsilon$

$" \impliedby "$

Распишем, что дано:$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$

Покажем, что $\{a_n\}$ ограничена: положим $\epsilon = 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n, m > N_2 : |a_n - a_m| < 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n > N_2 : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1 \implies$

$\exists N_2(1)\, \forall n > N_2 : a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$

Положим $C := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_2(1)}|, |a_{N_2(1)+1}|) + 1 \implies$

$\forall n \in \mathbb{N}\, |a_n| \leq C$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$\exists a \in \mathbb{R} \exists \{a_{n_k}\} : \lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = a$

Докажем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

Перепишем, что дано:

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_2(\epsilon)\, \forall n, m > N_2(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_3(\epsilon)\, \forall k > N_3(\epsilon) : |a_{n_k} - a| < \epsilon$

Распишем, что хотим доказать:

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

$|a_n - a| < \epsilon \impliedby |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < \epsilon \impliedby |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon$

Т.к. при выборе членов в подпоследовательности $n_k \geq k$, то при $k > N_3(\epsilon) \implies n_k > N_3(\epsilon)$

Положим $N_1(\epsilon) = max(N_2(\dfrac{\epsilon}{2}), N_3(\dfrac{\epsilon}{2})) \implies$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon \implies$

$\forall \epsilon > 0\, \exists N_1(\epsilon)\, \forall n > N_1(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

■

Definition: Определение функции

Множество пар $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D_f \wedge y \in E_f\}$ называется функцией f с областью определения D_f и областью значения E_f, если $\forall x \in D_f \exists! y \in E_f : (x, y) \in f$ (для удобства $(x, y) \in f$ обозначают как $f(x) = y$)
Обозначение функции: $f : X \to Y$
В данном обозначении подразумевают, что $D_f = X, E_f \subseteq Y$

Example

$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$, в данном случае $D_f = \mathbb{N} \cup \{0\}, E_f = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
Т.к. несложно установить, что $E_f = \mathbb{Z}$, то можно написать $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$

Definition: Определение инъективной функции

Функция f называется инъективной, если $\forall y \in E_f \exists! x \in D_f : f(x) = y$
Это эквивалентно тому, что $\forall x_1, x_2 \in D_f : (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$
(говорят, что f - инъекция)

Example

$\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^{2n-1}$ является инъективной
$\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^{2n}$ не является инъективной

Definition: Определение сюръективной функции

Функция $f : X \to Y$ называется сюръективной для множества Y, если $E_f = Y$
(говорят, что f - сюръекция)
Когда говорят, что f сюръективна, не уточняя множество, то подразумевают, что f сюръективна для Y

Example

Функция $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не сюръективна для $\mathbb{R}$, но сюръективна для $[-1; 1]$

Definition: Определение биективной функции

Функция $f : X \to Y$ называется биективной, если она инъективна и сюръективна
(говорят, что f - биекция)

Example

Функция $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$, такая что
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ - биекция между $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{Z}$
(как следствие, показали, что $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{Z}$, т.е. множества равномощны)

Definition: Определение обратной функции

Функция $y = f^{-1}(x)$ называется обратной функцией к функции $y = f(x)$, если множество пар фукнции f^{-1} является симметрией множества пар f

Note

Функция обратима iff она инъективна

Definition: Постоянная Эйлера

Рассмотрим ч.п. $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$
Докажем, что у ч.п. есть конечный предел и обозначим его γ

Proof:

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$$

γ_n убывает

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n+1}(1 - (n+1)\ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)) =$$

$$= \frac{1}{n+1}(1 - \ln\Big((1 + \frac{1}{n})^{n+1}\Big))$$

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ сходится к e и убывает. Докажем убывание

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = (\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})^{n+1} \cdot (\frac{n+1}{n+2}) = (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1}(\frac{n+1}{n+2})$$

$$\geq (1 + \frac{n+1}{n^2+2n})(\frac{n+1}{n+2}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{n^3+4n^2+4n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1}(1 - \ln b_n)$$

b_n убывает к $e \implies b_n > e \implies \ln b_n > 1 \implies \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$

Докажем ограниченность γ_n

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e \implies n\ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < 1 \implies \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n} > \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$$

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n - \ln n =$$

$$= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0$$

■

Definition: Определение предела функции по Коши

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\epsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\epsilon)\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Note

При этом $\dot{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty)$, $\dot{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta)$, $\dot{U}_\delta(\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$

Definition: Определение предела функции по Гейне

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\{x_n\} : (x_n \neq x_0 \wedge \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A)$$

Definition: Односторонний предел функции

Левосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \to x_0$ слева, то есть

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = A \iff \forall\epsilon > 0 \exists\delta = \delta(\epsilon) \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Правосторонним пределом функции называют предел функции по Коши f при $x \to x_0$ справа, то есть

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = A \iff \forall\epsilon > 0 \exists\delta = \delta(\epsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f(x) \in U_\epsilon(A)$$

Theorem Свойство предела функции при $x \longrightarrow x_0, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = A, \text{ где } A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Proof:

" $\implies$ "
Дано:$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) :\ f(x) \in U_\epsilon(A)$
Тогда:
$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0\, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) :\ f(x) \in U_\epsilon(A)$
$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) :\ f(x) \in U_\epsilon(A)$
" $\impliedby$ "
Дано:
$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0\, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta_1) :\ f(x) \in U_\epsilon(A)$
$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta_2; x_0) :\ f(x) \in U_\epsilon(A)$
Положим $\delta(\epsilon) = \min(\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon))$, тогда:
$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subseteq (x_0 - \delta_2; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta_1) :\ f(x) \in U_\epsilon(A)$

■

Definition: Бесконечные пределы

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0\, \exists\delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0\, \exists\delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\, \exists\delta(M) > 0\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$

Definition: Бесконечно малая функция

Функция называется б.м. при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$
Функция называется б.м. при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
Функция называется б.м. при $x \to -\infty$, если $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Definition: Бесконечно большая функция

Функция называется б.б. при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, при этом $x_0 \in \mathbb{R}$
Функция называется б.б. при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$
Функция называется б.б. при $x \to -\infty$, если $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

Definition: Ограниченная функция

Функция называется ограниченной при $x \to x_0$, если $\exists \delta > 0 \, \exists C > 0 \, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| < C$

Definition: отделимая от нуля функция

Функция называется отделимой от нуля при $x \to x_0$, если $\exists \delta > 0 \, \exists \epsilon_0 > 0 \, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > \epsilon_0$

Note

Связь функций при $x \to x_0$, где x - аргумент обоих функций, x_0 - число, которому стремится аргумент обоих функций:

- $\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$
- $\frac{1}{\text{б.м.}} = \text{б.б.}$
- $\frac{1}{\text{ограниченная}} = \text{отделимая от нуля}$
- $\frac{1}{\text{отделимая от нуля}} = \text{ограниченная}$

Theorem Теорема о зажатой функции

$$\left.\begin{array}{l} f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \to x_0} h(x) = A \\ \exists \delta > 0 \, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \le g(x) \le h(x) \end{array}\right\} \lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

Definition: Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Definition: Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Theorem Теорема о пределе сложной функции

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Proof:

Распишем, что дано, по определению:

$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta_1(\epsilon)\, \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\epsilon)}(x_0) : |f(x) - y_0| < \epsilon\, (1)$

$\forall \lambda > 0\, \exists \delta_2(\lambda)\, \forall y \in \dot{U}_{\delta_2(\lambda)}(y_0) : |g(y) - g(y_0)| < \lambda\, (2)$

Распишем, что хотим доказать:

$\forall \eta > 0\, \exists \delta_3 = \delta(\eta) \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Положим $\delta_3(\eta) = \delta_1(\delta_2(\eta))$, тогда :

$x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) \iff x \in \dot{U}_{\delta_1(\delta_2(\eta))}(x_0) \implies$ по (1) $|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta)$

$|f(x) - y_0| < \delta_2(\eta) \iff f(x) \in U_{\delta_2(\eta)}(y_0)$

По (2) знаем, что если $f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

Если $f(x) = y_0$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Иначе, если $f(x) \neq y_0 \iff f(x) \in \dot{U}_{\delta_2(\eta)}(y_0)$, то $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \eta$

Получили: $\forall \eta > 0\, \exists \delta_3 = \delta_1(\delta_2(\eta))\, \forall x \in \dot{U}_{\delta_3(\eta)}(x_0) : |g(f(x)) - g(y_0)| < \eta$

∎

Definition: Асимптоты

Вертикальная асимптота: • Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$

Горизонтальная асимптота: • Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ на $\pm\infty$, если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$
Вообще говоря, горизонтальные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными

Наклонная асимптота: • Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (kx + b) = 0$
Вообще говоря, наклонные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными

Theorem Признак наклонной асимптоты

Прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty \iff$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = b \end{cases}$$

Proof:

" $\Longrightarrow$ "

1. Распишем определение наклонной асимптоты: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (kx + b) = 0$

Вынесем b из предела: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - kx = b$

$f(x) - kx - b$ - б.м. при $x \longrightarrow +\infty$

Т.к. $x \longrightarrow +\infty$, то можно поделить на x :

$$\frac{f(x)}{x} - k = \frac{b}{x} + \frac{\text{б.м.}}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{b}{x} \longrightarrow 0 \text{ при } x \longrightarrow +\infty \\ \frac{\text{б.м.}}{x} \longrightarrow 0 \text{ при } x \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{f(x)}{x} - k \longrightarrow 0 \text{ при } x \longrightarrow +\infty$$

" $\Longleftarrow$ "

Т.к. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - kx = b$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (kx + b) = 0$

■

Definition: O - символика

о-малое: • $f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \longrightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - б.м. при $x \longrightarrow x_0$

О-большое: • $f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \longrightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ - ограниченная при $x \longrightarrow x_0$

Definition: Непрерывность функции в точке

Функция называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Clarification

Если x_0 - граница области определения, то рассматривается односторонний предел

Note

Свойства непрерывных функций:
- Сумма, произведение и частное непрерывных функций - непрерывные функции (по арифметике пределов функции)
- Композиция непрерывных функций - непрерывная функция (по теореме о пределе сложной функции)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0 \\ \lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

Claim Правило замены переменных в пределе

Пусть дана сложная функция $f(g(x))$, тогда, если для некоторой точки $x_0 : \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$ и $\lim_{y \to y_0} f(y) = A \in \mathbb{R}$, то $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$

Example (Пример использования правила замены переменной в пределе)

Пусть надо найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$

Преобразуем выражение: $\dfrac{\sin(\pi x)}{x} = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi$

В данном случае в обозначения из утверждения выше:

$f(y) = \dfrac{\sin(y)}{y}$

$g(x) = \pi x$

$g(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0, y_0 = g(x_0) = 0,$ и при этом $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = 1 = A$

Тогда по правилу замены переменной в пределе:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi = \lim\limits_{x \to 0} A \cdot \pi = \lim\limits_{x \to 0} 1 \cdot \pi = \pi$

Definition: Непрерывность функции на множестве

Функция называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке множества E

/* Когда говорят, что функция непрерывна, имеют ввиду, что она непрерывна на D_f */

Note

В частность, функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка $[a; b]$
При этом, в точках a и b рассматриваются односторонние пределы

Theorem Теорема о функции, непрерывной на отрезке (иногда называют теоремой Вейерштрасса)

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и достигает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке

Докажем, что функция ограничена сверху и достигает наибольшее значение. Для второго случая доказательство проводится аналогично

Proof:

1. $E_f -$ мно-во значений $f(x)$ на $[a;b]$

Обозначим $M = \sup E_f = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Построим некоторую строго возрастающую ч.п. $a_n \to M$ при $n \to +\infty$

2. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n)$

Предположим от противного, то есть $\exists n_0\, \forall x \in [a;b] : a_{n_0} \geq f(x)$

Тогда a_{n_0} - верхняя грань множества E_f

Однако, т.к. a_n - возрастающая ч.п. и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, то $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < M$

В частности, $a_{n_0} < M$, т.е. a_{n_0} - верхняя грань, которая меньше точной верхней грани $\implies$

$\implies$ $\mathbb{W}$ $\implies \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n)$

3. По построению $\forall x \in [a;b] : f(x) \leq M$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in [a;b] : a_n < f(x_n) \leq M$

Следовательно, по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = M$

4. Докажем, что $M = f(x_0)$

Т.к. x_n - ограниченная ч.п., то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \to x_0 \in [a;b]$

Т.к. f непрерывна в на отрезке, то она непрерывна в x_0, следовательно

$\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

$(\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = M) \wedge (\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)) \implies M = f(x_0) < \infty$

Таким образом, на отрезке $[a;b]$ функция f ограничена сверху числом $M = f(x_0)$

∎

Theorem Теорема (2) о функции, непрерывной на отрезке

Непрерывная на отрезке $[a;b]$ принимает все промежуточные значения
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b], f(x_1) = A, f(x_2) = B, x_1 < x_2$, БОО $A < B$, тогда
$\forall c \in (A;B)\, \exists x_0 \in (x_1;x_2) : f(x_0) = c$

Proof:

1. Построим последовательность вложенных отрезков:

/* Если Вам так будет удобнее, то докажем существование x_0 бинпоиском по ответу */

$[a_1; b_1] := [x_1; x_2]$

$x_3 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, рассмотрим $f(x_3)$

1)$f(x_3) = c \implies q.e.d.$

2)$f(x_3) < c \implies [a_2; b_2] := [x_3; b_1]$

3)$f(x_3) > c \implies [a_2; b_2] := [a_1; x_3]$

Применяя это правило, продолжим строить последовательность отрезков

Если ни на какой итерации не произойдёт случай 1), то получим счётно бесконечную последовательность отрезков$\{[a_n; b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$

По построению ч.п. $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху $b \implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le b$

По построению ч.п. $\{b_n\}$ невозрастает и ограничена снизу $a \implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \ge a$

$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to_{n\to+\infty} 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$

$x_0 \in [a; b] \implies f(x)$ непрерывна в $x_0 \implies \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \implies$

$\implies$ по определению по Гейне $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x_0)$

По построению $f(a_n) < c \wedge f(b_n) > c \implies c \le f(x_0) \le c \implies f(x_0) = c$

■

Corollary Следствие из теоремы:

$f(x)$ непрерывна на $[a; b] \implies E_f = [\inf E_f; \sup E_f]$

Corollary Следствие

$f(x) = x^2 \wedge X \ge 2 \wedge D_f = [0; X] \wedge E_f = [0; X^2] \implies \exists x_0 \in \mathbb{R} : x_0^2 = 2$

Corollary Следствие

$f(x)$ непрерывна на $[a; b] \wedge f(a) < 0 \wedge f(b) > 0 \implies \exists c \in (a; b) : f(c) = 0$

Definition: Достаточное условие обратимости

Если функция $f(x)$ строго монотонна на X, то $f(x)$ обратима

Proof:

Предположим от противного, что $f(x)$ не инъективна, то есть

$\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \ne x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 \ne x_2 \implies \min(x_1, x_2) < \max(x_1, x_2) \implies$ W с определением строгой монотонности

■

Definition: Критерий обратимости функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда $f(x)$ обратима $iff f(x)$ строго монотонна

Proof:

" $\Longleftarrow$ "Смотри достаточное условие обратимости
" $\Longrightarrow$ "
Докажем для случая, когда $f(x)$ строго монотонно возрастает, для убывания аналогично
Предположим от противного, тогда БОО
$\exists x_1 < x_2 < x_3 \in [a;b] : f(x_1) < f(x_2) \geq f(x_3)$
Если $f(x_2) = f(x_3)$, то f не инъективна $\implies$ f не обратима $\implies$ $\mathbb{W}$
Иначе, положим $c := \dfrac{\max(f(x_1), f(x_3)) + f(x_2)}{2} \implies f(x_1) < c < f(x_2) \wedge f(x_3) < c < f(x_2)$
f непрерывна на $[a;b] \implies f$ непрерывна на $[x_1;x_2]$ и $[x_2;x_3]$
f непрерывна на $[x_1;x_2] \implies \exists x_0' \in (x_1;x_2) : f(x_0') = c$
f непрерывна на $[x_2;x_3] \implies \exists x_0'' \in (x_2;x_3) : f(x_0'') = c$
Получили: $\exists x_0' < x_0'' \in [a;b] : f(x_0') = f(x_0'') \implies$ f не инъективна $\implies$ f не обратима $\implies$ $\mathbb{W}$

■

Theorem

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b]$, то функция $f^{-1}(y)$:

- 1) определена на $[\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$
- 2) мотонотонна (и имеет ту же монотонность) $[\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$
- 3) непрерывна на $[\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$

Proof:

1. Доказано по критерию обратимости функции
2. БОО f возрастает на $[a;b]$

Предположим от противного

$f^{-1}(y)$ не возрастает на $[a;b] \implies \exists y_1 < y_2 \in [f(a); f(b)] : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

По определению обратной функции $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in [a;b]$, обозначим $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$

$x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$. При этом, $f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$

$x_1 \geq x_2 \implies y_1 \geq y_2 \implies$ W

3. Докажем непрерывность по определению

Дано: $x = f^{-1}(y)$ - определённая монотонная на $[a;b]$ функция

Докажем, что f^{-1} непрерывна в любой точке $y_0 \in (f(a); f(b))$

Для $y_0 \in \{f(a), f(b)\}$ доказательство аналогично (нужно рассмотреть односторонние пределы)

По определению непрерывности в точке $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$

Обозначим $f^{-1}(y_0) = x_0$

БОО докажем для таких ϵ, что $U_\epsilon(x_0) \subset (a;b)$. Для *бóльших* ϵ неравество также будет выполняться

$a < x_0 - \epsilon < x_0 + \epsilon < b$

Обозначим $y_1 = f(x_0 - \epsilon), y_2 = f(x_0 + \epsilon)$, тогда $y_1 < y_0 < y_2$

Положим $\delta := \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1)$, тогда $U_\delta(y_0) \in (y_1; y_2)$

Докажем, что при выбранном δ выполняется неравенство под знаками кванторов:

$y \in U_\delta(y_0) \implies y \in (y_1; y_2) \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \implies x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon \implies$

$\implies |f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon \implies$ неравенство под кванторами верно и определение выполняется

■

Corollary Следствие (без доказательства)

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b], a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, то функция $f^{-1}(y)$:

- 1) определена на $(\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b)))$
- 2) мотонотонна (и имеет ту же монотонность) $[\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$
- 3) непрерывна на $(\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b)))$

Идея доказательства: рассмотрим $[c;d] \cup (a;b)$, для него верна теорема выше, а далее перейти к пределу при границах, стремящихся к $a и b$

Corollary

Т.к. $f(x) = x^n$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $D_f = n \, \vdots \, 2 \, ? \, [0; +\infty) \, : \, \mathbb{R}$, то

$g(x) = \sqrt[n]{x}$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $D_g = E_f = n \, \vdots \, 2 \, ? \, [0; +\infty) \, : \, \mathbb{R}$

Definition: Обратные тригонометрические функции

$y = \sin x$ непрерывна и возрастает на $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \implies$

$\implies \exists \arcsin := sin^{-1} : y = \arcsin x$ непрерывна и возрастает на $D_f = [-1; 1], E_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Аналогично

- $y = \arccos x$ непрерывна и убывает на $D_f = [-1; 1], E_f = [0; \pi]$
- $y = \arctan x$ непрерывна и возрастает на $D_f = \mathbb{R}, E_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
- $y = \operatorname{argctg} x$ непрерывна и убывает на $D_f = \mathbb{R}, E_f = (0; \pi)$

Definition: Показательная функция

(теорема без доказательства) функция $y = a^x, a > 0$

- 1) определена на $D_f = \mathbb{R}, E_f = (0; +\infty)$
- 2) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на $\mathbb{R}$
- 4) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  /* Следствие: $\phi(x) = a^x$ является изоморфизмом между $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_+, *)$ */
  $(a^x)^y = a^{xy}$

Definition: Логарифмическая функция

Функция, обратная к $y = a^x, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ обозначается $y = \log_a x$

- 1) определена на $D_f = (0; +\infty), E_f = \mathbb{R}$
- 2) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$
- 3) непрерывна на $(0; +\infty)$
- 4) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
  /* Следствие: $\psi(x) = \log_a x$ является изоморфизмом между $(\mathbb{R}_+, *)$ и $(\mathbb{R}, +)$ */
  $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

Corollary Следствия из 2 замечательного предела

$\lim x \to 0(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Proof:

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\ln(x+1) = \ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Функция $\ln x$ непрерывна, тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$$

■

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Proof:

$$t = e^x - 1 \implies x = \ln(t+1)$$
$$x \to 0 \implies t \to \infty$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

■

Corollary Показательная функция с вещественным показателем

$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D_f = (0; +\infty)$
$y = e^{\alpha \ln x}$
$\ln x$ непрерывна и возрастает на $(0; +\infty)$
$\alpha \ln x$ непрерывна и возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$
$e^{\alpha \ln x}$ непрерывна и возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$

Corollary

$\lim_{x\to+\infty} a(x) = a \wedge \lim_{x\to+\infty} b(x) = b \implies \lim_{x\to+\infty} a(x)^{b(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{b(x)\ln a(x)} = e^{b\ln a} = a^b$
Для ч.п. $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ построим кусочно-линейные функции $a(x)$ и $b(x)$, такие что $\forall n \in \mathbb{N} : a(n) = a_n \wedge b(n) = b_n$

Definition: Производная

Производная функции f в точке x_0 - это предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Note

$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x$

Proof:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

■

Note

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (x^n)' = nx^{n-1}$

Proof:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}{x_0}^k}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}{x_0}^k = nx_0^{n-1}$$

■

Note

$(a^x)' = a^x \ln a$

Proof:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} =$$
$$= a^{x_0} \lim_{t\to 0} \frac{e^{t\ln a} - 1}{t} = a^{x_0} \lim_{s\to 0} \frac{e^s - 1}{s} \cdot \ln a = a^{x_0} \ln a$$

■

Claim Правила подсчёта производных

Если $\exists f'(x), \exists g'(x), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, то

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $g(x) \neq 0 \implies \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

При нахождении опечаток просьба написать https://t.me/i8088_t, на момент компиляции ник в тг: vova kormilitsyn