

# FLUXO EM GRAFOS

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 18 de abril de 2024

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



Estes problemas abordam o processo de produção

- Produtos tem origem em um ponto do grafo
- Produtos são consumidos em um outro ponto do grafo
- As arestas (ou arcos) indicam as possíveis ligações (caminhos) que o produto pode percorrer

Problemas de fluxo ocorrem naturalmente em diversas aplicações

- Plantas industriais
- Sistemas de comunicação e de transporte
- Distribuição de água e energia
- ...

Em redes, problemas de fluxo normalmente são bem definidos

- A oferta de cada produto é conhecida
- A demanda por cada produto é conhecida
- O processo de transporte destes produtos permite pontos intermediários
  - Centros ou depósitos de distribuição
  - Restrições de capacidade nos depósitos
  - Restrições de tráfego e custos entre cada ponto

Podemos definir uma rede  $R = (V, A, F, U)$  como um grafo **direcionado**  $G = (V, A)$  atravessado por um fluxo

- Vértice **s**: *source* (fonte), origem do fluxo
- Vértice **t**: *terminal* (sumidouro), destino do fluxo

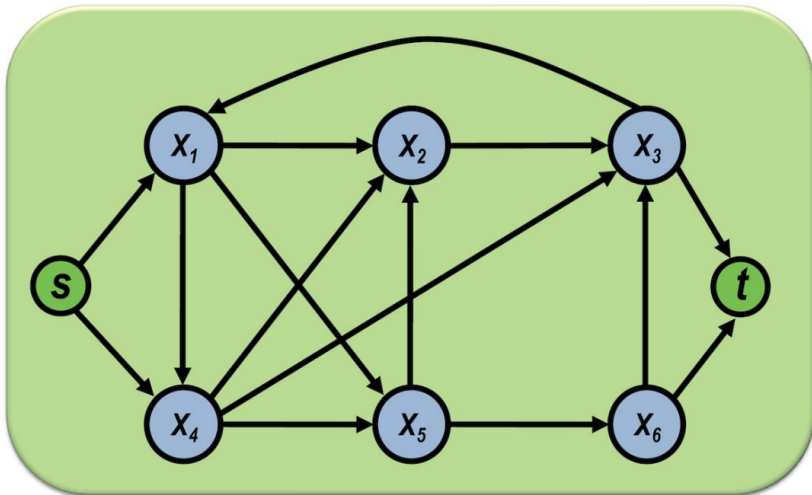
Um fluxo  $F$  pode ser definido como  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  circulando pelos  $|A| = m$  arcos da rede

- Também pode ser definido como  $F = \{f(i, j)\}, (i, j) \in A$

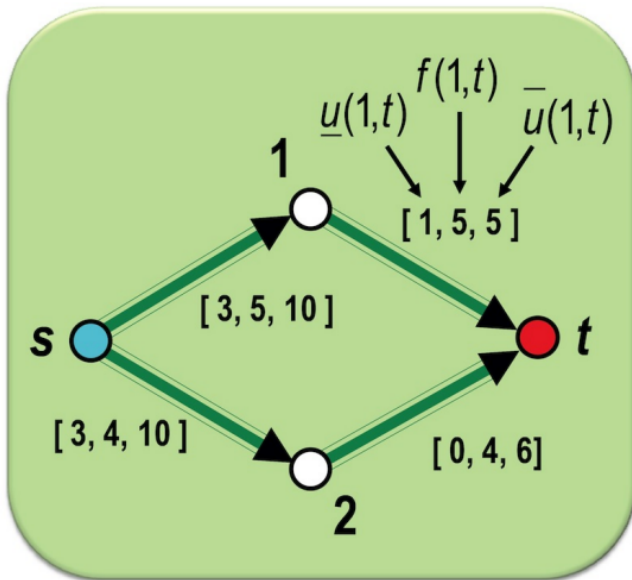
O conjunto  $U = \{u(i, j)\}, (i, j) \in A$  é o conjunto de **limites de fluxo** associado aos arcos de  $A$

- $\bar{u}(i, j)$  é o limite máximo
- $\underline{u}(i, j)$  é o limite mínimo

## REDE DE FLUXO

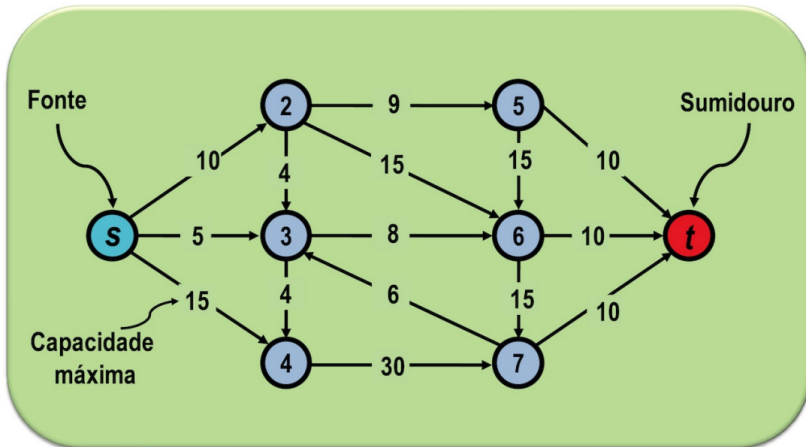


## ROTULAÇÃO COM OS LIMITES DE FLUXO



# ROTULAÇÃO MAIS COMUM

Inclui somente o fluxo máximo, sendo que o mínimo sempre é zero



## FLUXO ENTRE CONJUNTO DE VÉRTICES

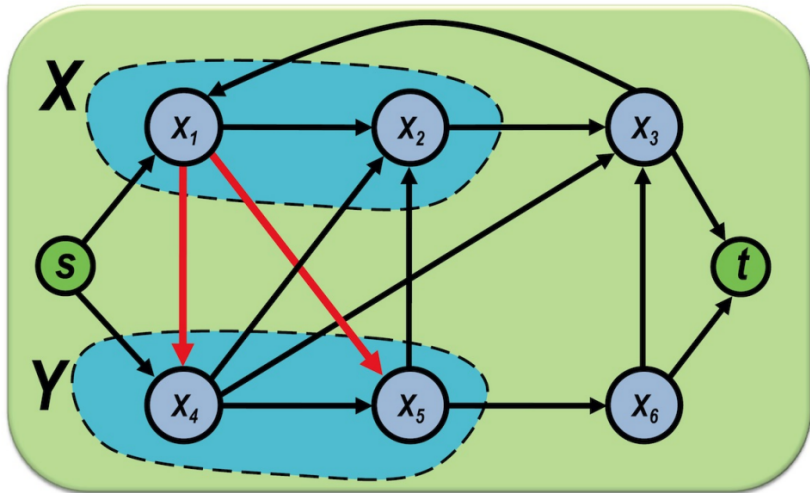
Dado dois subconjuntos de vértices  $X, Y \subset V$  de uma rede

- $X \cap Y = \emptyset$
- Fluxo ocorre de  $X$  para  $Y$  ou vice-versa -  $f(X, Y)$  ou  $f(Y, X)$

$$f(X, Y) = \sum_{e \in S} f_e \quad S = \{e | (x_i, x_j), x_i \in X, x_j \in Y\}$$



## FLUXO ENTRE CONJUNTO DE VÉRTICES

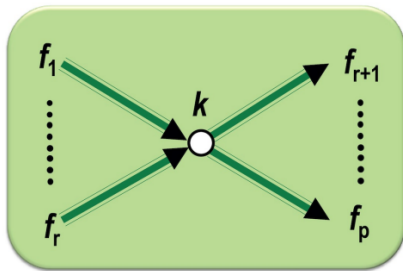


$$f(X, Y) = f(x_1, x_4) + f(x_1, x_5)$$

# CONSERVAÇÃO DE FLUXO

O fluxo que sai de um vértice de transbordo deve ser igual ao fluxo que chega neste mesmo vértice

- Primeira lei de Kirchoff
- Vértices que atendem a esta propriedade são chamados de **vértices conservativos**



$$f_1 + \dots + f_r = f_{r+1} + \dots + f_p$$

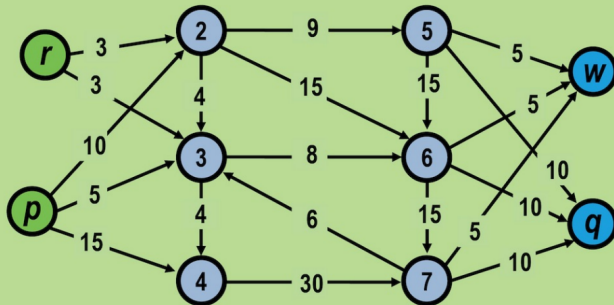
Vértices fonte e sumidouro não atendem a lei de conservação de fluxo

Entretanto, é fácil fazer uma pequena adaptação para fazer com que a lei seja verdade também para  $s$  e  $t$

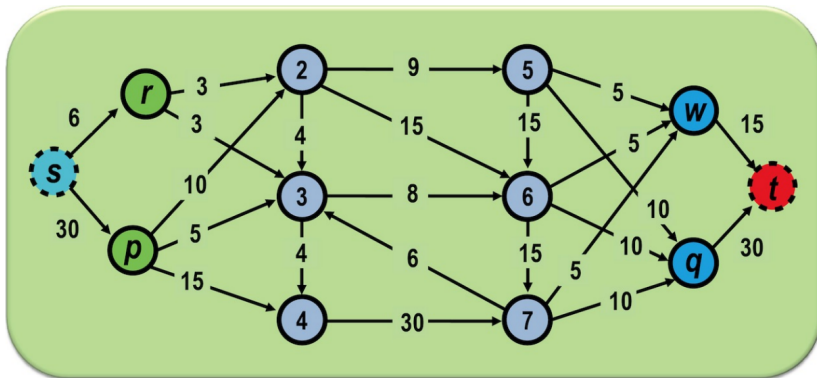
São necessários 2 passos

1. Unificação dos vértices de oferta e dos vértices de consumo
2. Transformação dos novos vértices em vértices conservativos

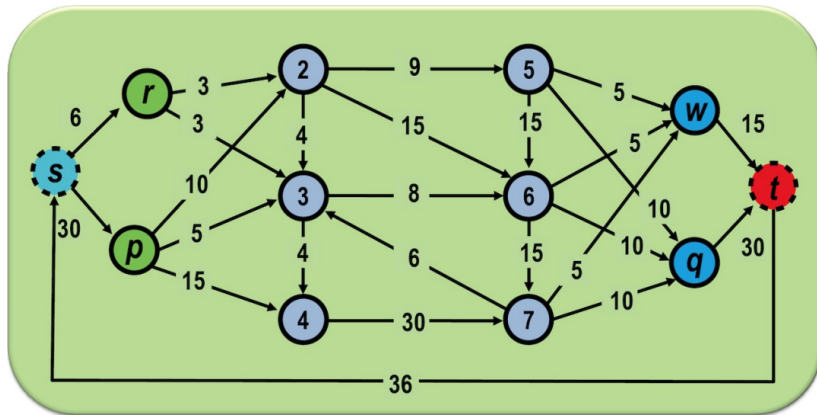
# REDE ORIGINAL



## PRIMEIRO PASSO



## SEGUNDO PASSO

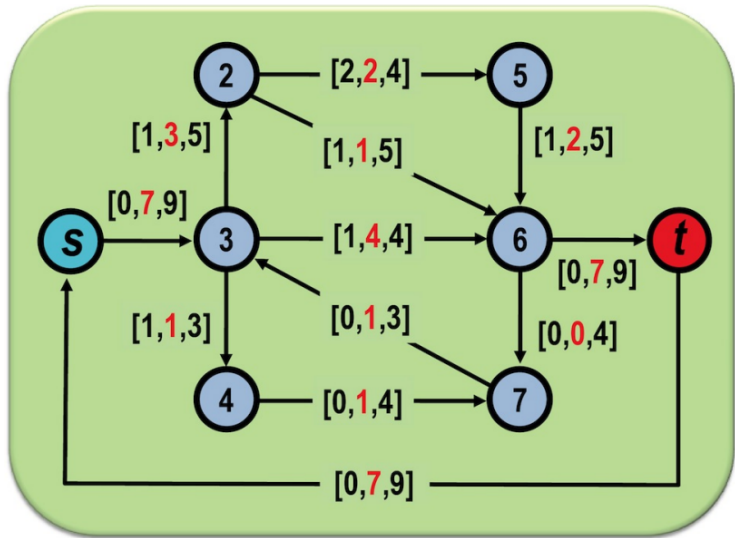


Capacidade do arco: menor valor entre oferta (36) e demanda (45)

Um fluxo  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  é dito ser viável se

1. É conservativo
2.  $\exists \underline{u}(i, j) \wedge \bar{u}(i, j) \forall (i, j) \in A$
3.  $\underline{u}(i, j) \leq f_{ij} \leq \bar{u}(i, j) \forall f_{ij} \in F$
4.  $0 \leq \underline{u}(i, j) \leq \bar{u}(i, j) \forall f_{ij} \in F$

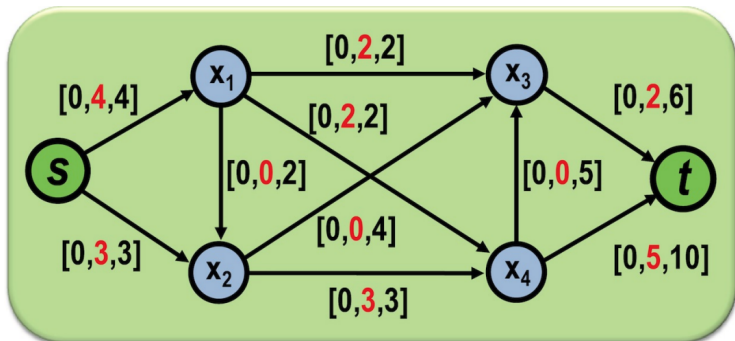
# FLUXO VIÁVEL





# FLUXO MÁXIMO

O **problema do fluxo máximo** consiste em fazer circular a maior quantidade possível de fluxo entre  $s$  e  $t$  em uma rede  $R$



O fluxo máximo neste exemplo é igual a 7

Um **corte** em um grafo  $G = (V, A)$  é uma divisão dos vértices em dois subconjuntos disjuntos

- $X \subseteq V$
- $\bar{X} = V \setminus X$

## Corte $s - t$

Um corte  $s - t$  é um corte em um grafo de tal forma que o vértice fonte pertença a um dos conjuntos e o vértice sumidouro pertence ao outro conjunto

## CAPACIDADE DE UM CORTE

A **capacidade**  $c$  de um corte é igual a soma dos fluxos dos arcos associados ao corte

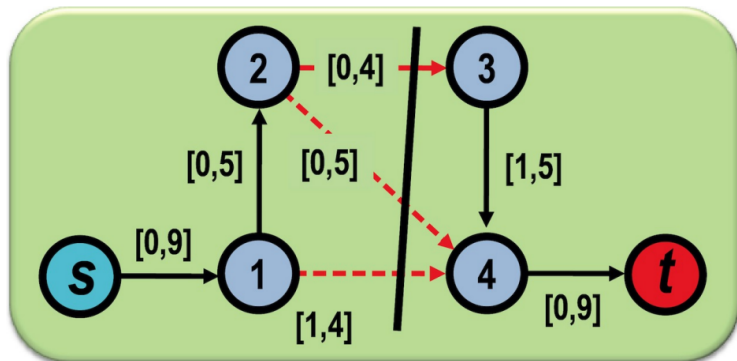
- Fluxo entre os conjuntos  $X$  e  $\bar{X}$

$$c = f(X, \bar{X}) = \sum_{e \in S} f_e$$

$$\bar{u}(X, \bar{X}) = \sum_{e \in S} \bar{u}$$

$$\underline{u}(X, \bar{X}) = \sum_{e \in S} \underline{u}$$

$$S = \{e | (x_i, x_j), x_i \in X, x_j \in \bar{X}\}$$



$$\bar{u}(X, \bar{X}) = 4 + 5 + 4 = 13$$

$$\underline{u}(X, \bar{X}) = 1$$

## Fluxo líquido

Diferença entre os fluxos de  $X$  para  $Y$  e do fluxo de  $Y$  para  $X$

$$f_l = f(X, Y) - f(Y, X)$$

## Capacidade líquida

Diferença das capacidades dos arcos do corte

$$u_l = \bar{u}(X, Y) - \underline{u}(X, Y)$$

## Teorema do fluxo/corte

Dado um fluxo  $f$  de valor  $val(f)$ , qualquer que seja o corte  $(X, \bar{X})$

$$val(f) \leq \bar{u}(X, \bar{X}) - \underline{u}(X, \bar{X})$$

## Teorema do fluxo máximo/corte mínimo

Para qualquer rede, o valor do fluxo máximo é igual a capacidade líquida mínima entre todos os possíveis cortes  $s - t$  da rede

$$u_f = \bar{u}(X, Y) - \underline{u}(X, Y)$$

# ALGORITMO DE FLUXO MÁXIMO

## Algoritmo de Ford-Fulkerson (1956)

- Complexidade  $\mathcal{O}(|A|f)$ , onde  $f$  é o fluxo máximo da rede

## Algoritmo de Edmonds-Karp (1972)

- Uma melhoria no algoritmo de Ford-Fulkerson
- Complexidade  $\mathcal{O}(|V||A|^2) = \mathcal{O}(|V|^3)$

## Algoritmo de Dinic (1970)

- Complexidade  $\mathcal{O}(|V|^2|A|) = \mathcal{O}(|V|^3)$

Detalhes dos algoritmos podem ser encontrados nos livros texto de nossa disciplina