ISOMORFISMO, EMPARELHAMENTO, COMPONENTES CONEXOS E COLORAÇÃO

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

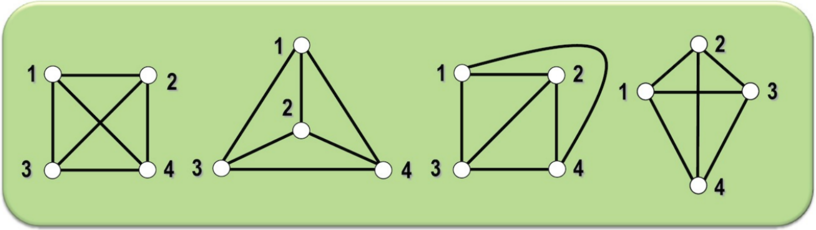
Atualizado em: 11 de abril de 2024

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

Grafos isomorfos

Dois grafos são isomorfos se e somente se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e suas arestas de maneira que suas relações de adjacência sejam preservadas



CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA ISOMORFISMO

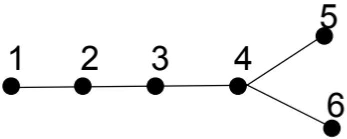
Existem 4 condições necessárias (mas não suficientes) para que dois grafos sejam isomorfos

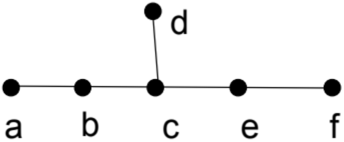
1. Mesmo número de vértices
2. Mesmo número de arestas
3. Mesmo número de componentes
4. Mesmo número de vértices com mesmo grau

Estas quatro condições podem ser checadas em tempo polinomial

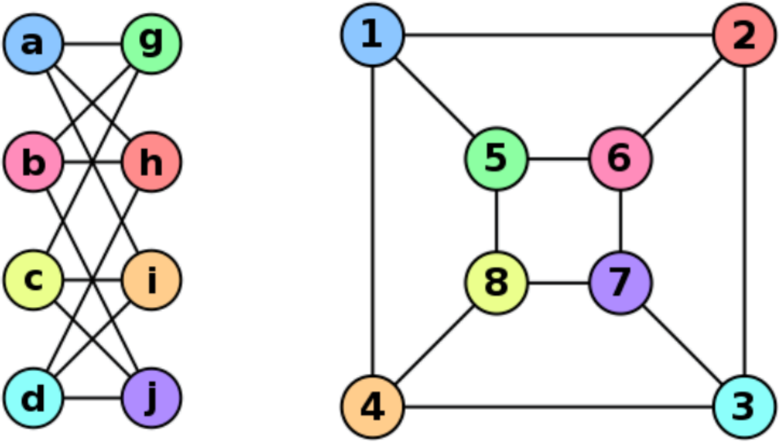
- Elas conseguem nos dizer se um grafo não é isomorfo
- Entretanto, reconhecer a isomorfia não é tão simples assim

SÃO ISOMORFOS?





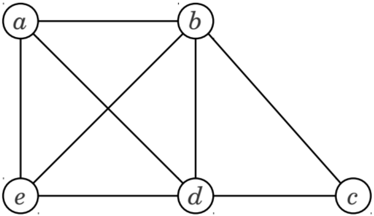
SÃO ISOMORFOS?

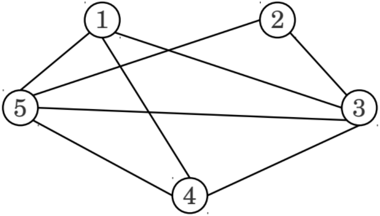


ALGORITMO PARA RECONHECIMENTO DE ISOMORFISMO

Um algoritmo simples para reconhecimento de isomorfismo tem complexidade $\mathcal{O}(n!)$

- Consiste em verificar todas as permutações de linhas e colunas das matrizes de adjacência de dois grafos





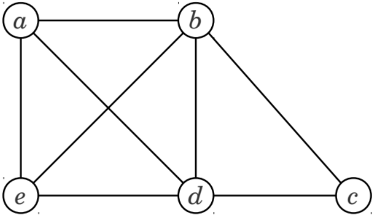
	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	1
b	1	0	1	1	1
c	0	1	0	1	0
d	1	1	1	0	1
e	1	1	0	1	0

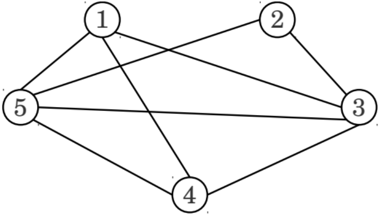
	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0	1
3	1	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0

ALGORITMO PARA RECONHECIMENTO DE ISOMORFISMO

Um algoritmo simples para reconhecimento de isomorfismo tem complexidade $\mathcal{O}(n!)$

- Consiste em verificar todas as permutações de linhas e colunas das matrizes de adjacência de dois grafos





	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	1
b	1	0	1	1	1
c	0	1	0	1	0
d	1	1	1	0	1
e	1	1	0	1	0

	1	5	2	3	4
1	0	1	0	1	1
5	1	0	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	1	1	1	0	1
4	1	1	0	1	0

ALGORITMO PARA RECONHECIMENTO DE ISOMORFISMO

Outro algoritmo para reconhecimento de isomorfismo ▸ Link

- Complexidade quasipolinomial
  - Complexidade pior que polinomial
  - Mas menor que exponencial

Entretanto, a complexidade do problema ainda não é conhecida

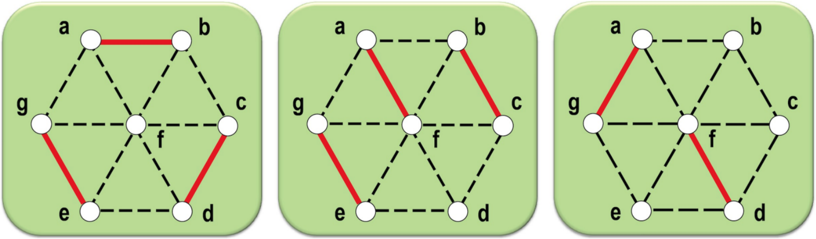
- Provado pertencer a NP
- Entretanto, não se sabe se pertence a P ou é completo para NP

EMPARELHAMENTO EM GRAFOS

DEFINIÇÃO

Um emparelhamento (também conhecido como casamento ou *matching)* é um conjunto independente de arestas

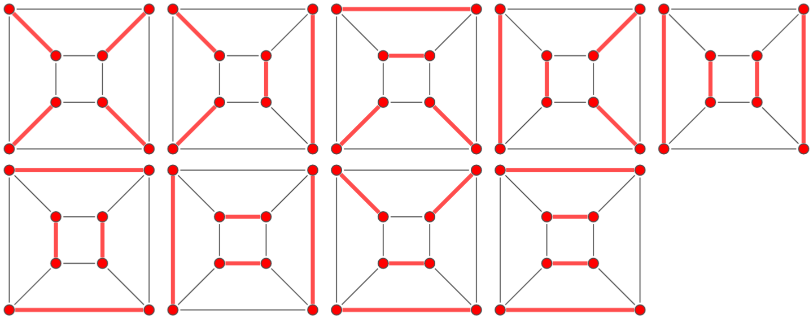
- Conjunto de arestas sem vértices em comum



EMPARELHAMENTO PERFEITO

Um emparelhamento perfeito inclui todos os vértices do grafo

- Um emparelhamento perfeito é maximal
- Algoritmo de Blossons - $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$



EMPARELHAMENTO DE PESO MÁXIMO

Um emparelhamento que considera os pesos das arestas

- Somatório dos pesos das arestas utilizadas é maximal
- Algoritmo de caminhos, árvores e flores
  - Algoritmo de Edmond's
  - Polinomial, de complexidade $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$

Um caso especial (e muito útil) é definido em grafos bipartidos

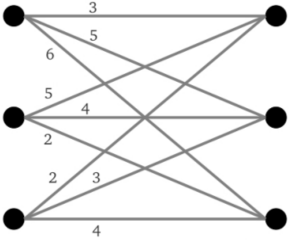
- Problema da atribuição
- Algoritmo Húngaro, de complexidade $\mathcal{O}(|V|^3)$

PROBLEMA DA ATRIBUIÇÃO

Conjunto de trabalhadores $\times$ conjunto de tarefas

- Cada trabalhador gasta um tempo diferente para cada tarefa
- Como dividir as tarefas entre os trabalhadores?
- Desejável gastar o menor tempo o possível

Operário\Máquina	1	2	3
1	3	5	6
2	5	4	2
3	2	3	4



COMPONENTES CONEXOS

CONECTIVIDADE

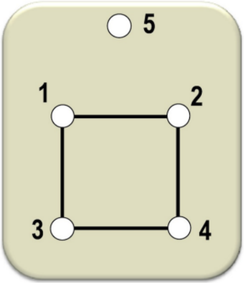
A conectividade tem a ver com a alcançabilidade (ou atingibilidade) em grafos

- Fecho transitivo dos vértices
- Um vértice u é alcançavel a partir de v se existir um caminho entre u e v em G

- É possível ir do ponto A até o ponto B?
- O computador X está conectado na mesma rede que o computador Y?
- Existe um barramento de dados entre dois chips de um computador?
- É possível enviar energia de uma usina hidroelétrica para uma cidade?

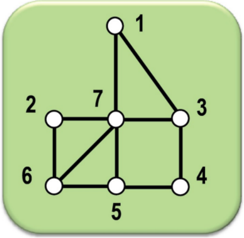
GRAFOS DESCONEXOS

Um grafo é desconexo se existir pelo menos um par de vértices não alcançaveis entre si



GRAFO NÃO-ORIENTADO CONEXO

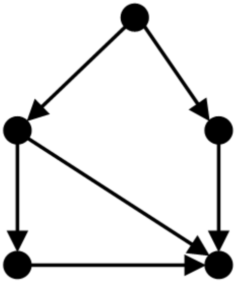
Um grafo não orientado é conexo se todos os vértices são alcançaveis a partir de um vértice qualquer

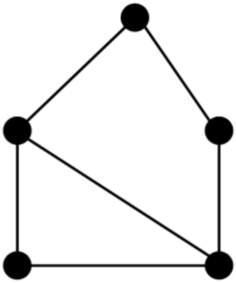


CONECTIVIDADE EM GRAFOS ORIENTADOS

Em grafos orientados, nós temos diferentes conceitos de conectividade

- Ele é considerado conexo se seu grafo não-orientado subjacente é conexo



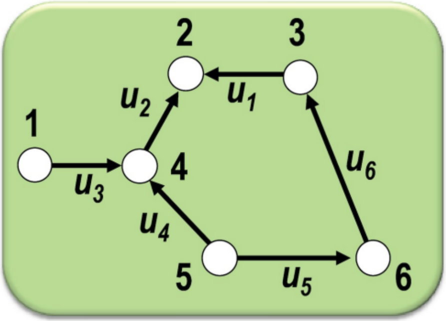


Além disso, dizemos que estes grafos podem ser divididos em três categorias

1. Simplemente conexo
2. Semi-fortemente conexo
3. Fortemente conexo

Cada categoria depende da alcançabilidade de seus vértices

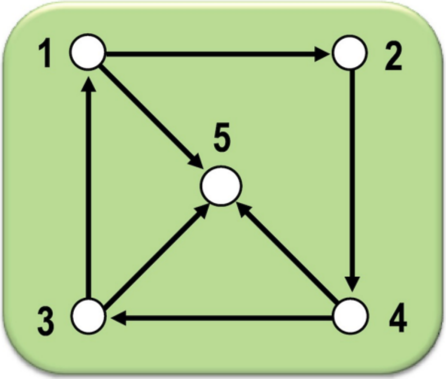
Todo grafo conexo é simplesmente conexo (**s-conexo**)



SEMI-FORTEMENTE CONEXO

Um grafo é semi-fortemente conexo (**sf-conexo**) se

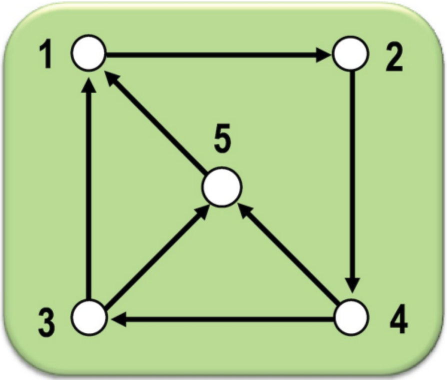
- Para todo par de vértices $u, v \in V$
- Existe um caminho de u para v **OU** de v para u



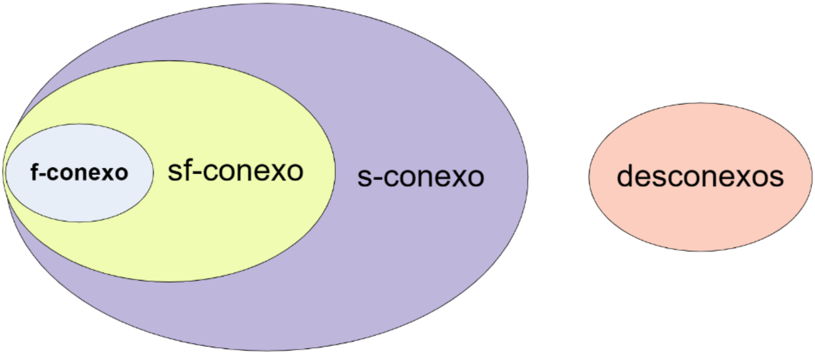
FORTEMENTE CONEXO

Um grafo é fortemente conexo (**f-conexo**) se

- Para todo par de vértices $u, v \in V$
- Existe um caminho de u para v **E** de v para u



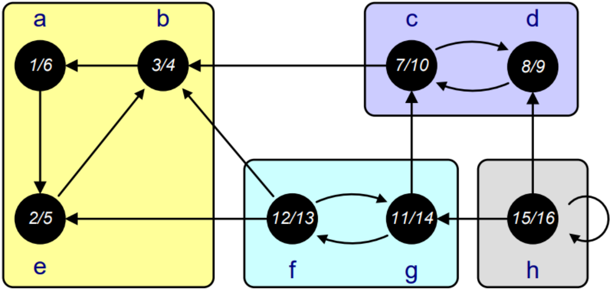
CONECTIVIDADE EM GRAFOS DIRECIONADOS



COMPONENTES CONEXOS

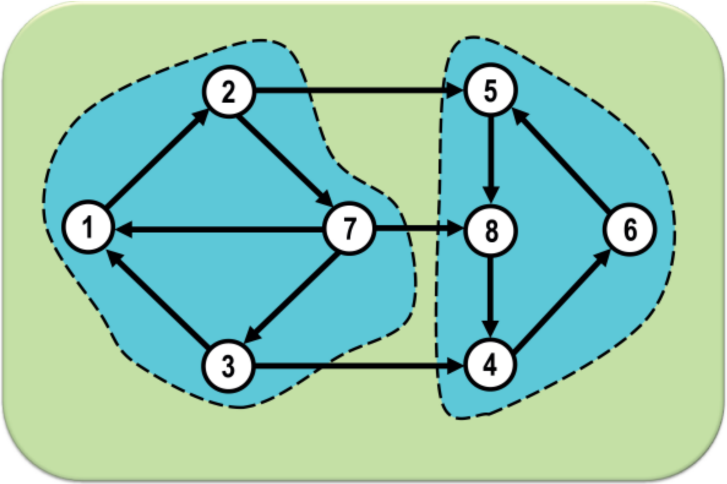
Um componente conexo é um subgrafo conexo maximal

- Maior subgrafo induzido conexo
- Grafos conexos possuem somente um componente
- O número de componentes de um grafo é denotado por c



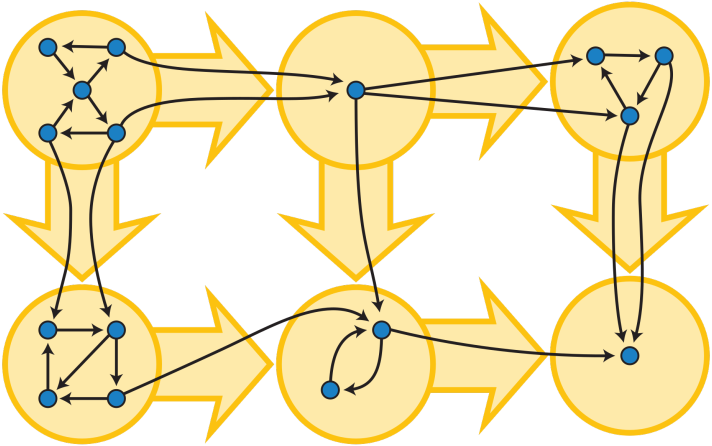
Grafo com $c = 4$

Em um grafo direcionado, componentes fortemente conexos são subgrafos maximais **f-conexos**



GRAFOS REDUZIDOS

Um grafo reduzido é construído mostrando somente as conexões entre os seus componentes conexos

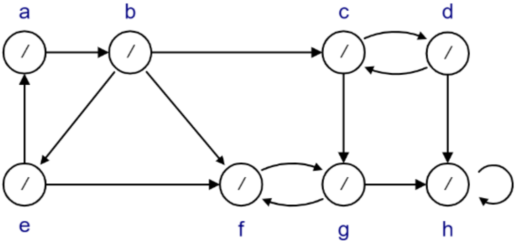


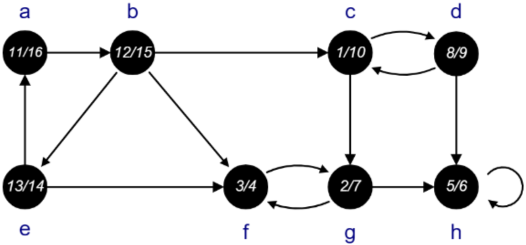
Algoritmo baseado no algoritmo de busca em profundidade

- Complexidade de $\Theta(|V| + |A|)$

1. Faça uma busca em profundidade a partir de u e salve os tempos de fechamento de cada vértice
   - O tempo que ele é colorido de preto
2. Gere o grafo transposto G^T do grafo original G
   - Arcos com sentido invertido
3. Faça uma busca em profundidade em G^T
   - Considerando a ordem decrescente do tempo de fechamento dos vértices encontrado na etapa 1

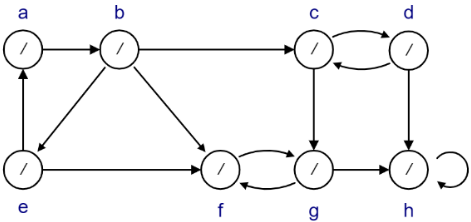
COMO ENCONTRAR COMPONENTES FORTEMENTE CONEXOS

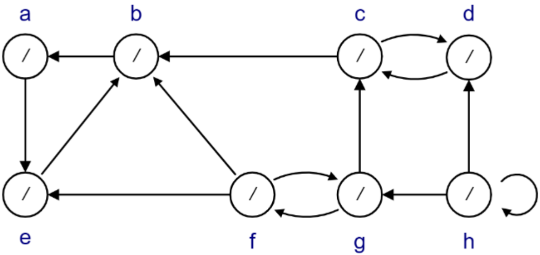




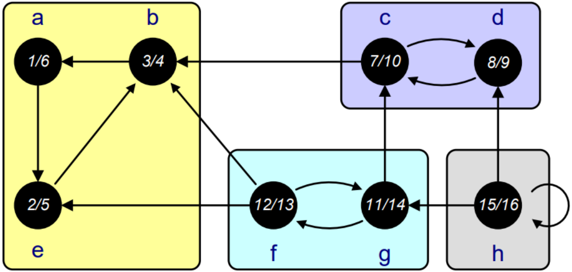
$$[a, b, e, c, d, g, h, f]$$

COMO ENCONTRAR COMPONENTES FORTEMENTE CONEXOS





COMO ENCONTRAR COMPONENTES FORTEMENTE CONEXOS



COLORAÇÃO EM GRAFOS

PROBLEMAS DE COLORAÇÃO

Problemas de coloração consistem em atribuir cores a elementos do grafo

- Vértices
- Arestas
- Vértices e arestas

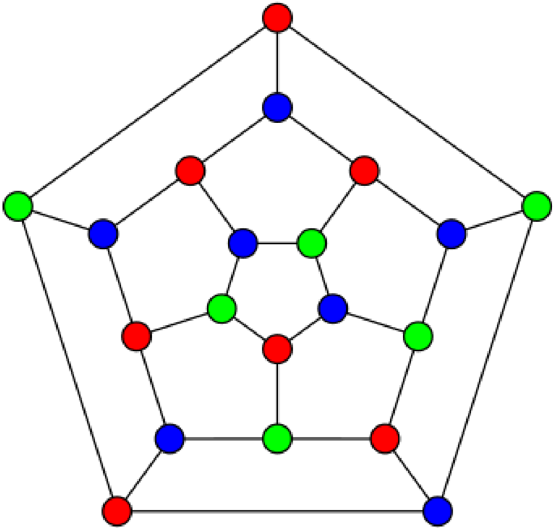
Dois componentes vizinhos não podem ter a mesma cor

- Vértices vizinhos
- Arestas que incidem sobre o mesmo vértice

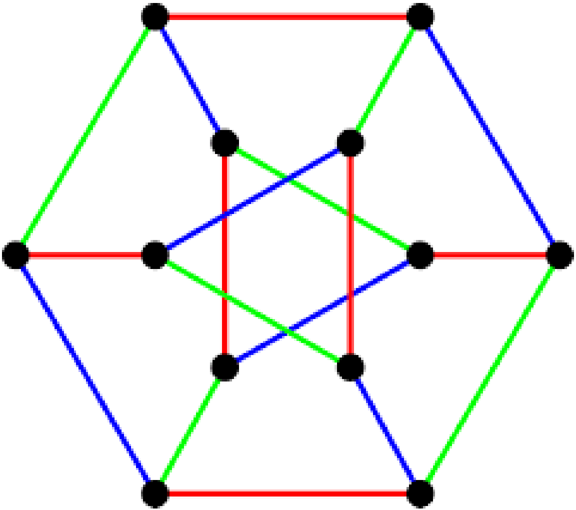
Problemas de coloração são NP-Difíceis

- Qual é o menor número de cores que pode ser utilizada para colorir este grafo?
- Versão de decisão é NP-Completo

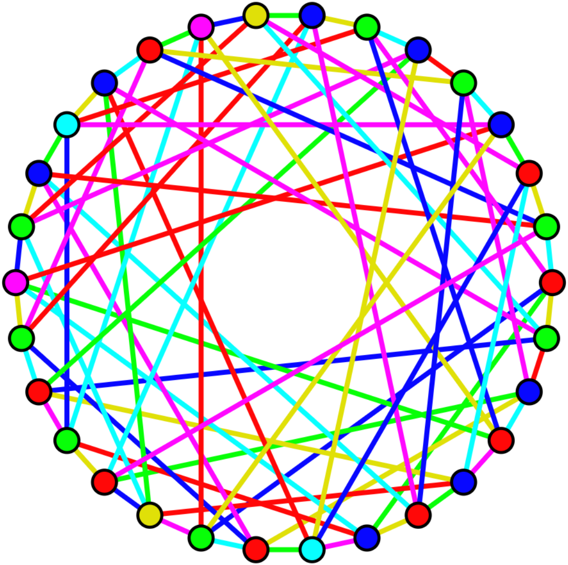
PROBLEMAS DE COLORAÇÃO DE GRAFOS



PROBLEMAS DE COLORAÇÃO DE GRAFOS



PROBLEMAS DE COLORAÇÃO DE GRAFOS



NÚMERO CROMÁTICO

O número cromático $\chi(G)$ representa o menor número de cores de forma a obter uma coloração própria[1] de um grafo

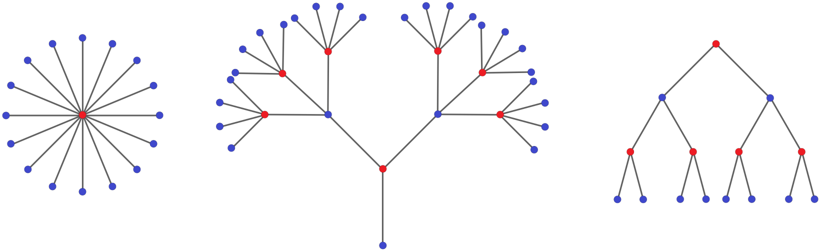
Computar o número cromático de um grafo é um problema NP-Difícil

Entretanto, para alguns grafos especiais, existem maneiras de se computar $\chi(G)$ e resolver o problema de coloração em tempo polinomial

[1] Coloração própria é aquela capaz de colorir um grafo de tal forma que dois elementos vizinhos não tenham a mesma cor

COLORAÇÃO DE GRAFOS - CASOS ESPECIAIS

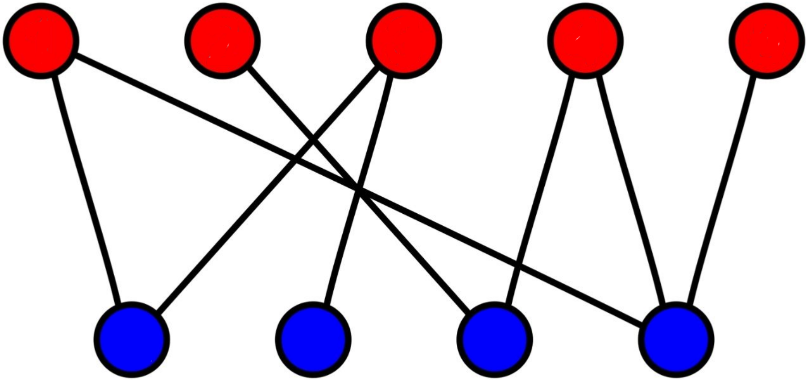
Os vértices de uma árvore pode ser coloridos com duas cores



COLORAÇÃO DE GRAFOS - CASOS ESPECIAIS

Os vértices de um grafo bipartido pode ser coloridos com duas cores

- Para grafos n-partidos, temos que $\chi(G) = n$



COLORAÇÃO DE GRAFOS - CASOS ESPECIAIS

Os vértices de grafos planares podem ser coloridos com quatro cores

- Coloração de mapas