

CLASSES DE COMPLEXIDADE E REDUÇÕES

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 23 de fevereiro de 2025

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



De forma ampla, podemos dizer que um problema é *fácil* ou *difícil*

- *Fácil*: tratável, tempo polinomial: $\mathcal{O}(p(n))$
- *Difícil*: intratável, tempo exponencial: $\mathcal{O}(c^n)$, onde $c > 1$

Problemas *fáceis*

- Caminho mínimo
- Árvore geradora mínima
- Componentes conexos
- Programação linear
- Números primos
- ...

Problemas *difíceis*

- Caminho máximo
- Árvore de Steiner
- Satisfabilidade
- Programação inteira
- Caixeiro viajante
- ...

Problemas *fáceis* podem ser resolvidos em tempo polinomial

- Considera-se que estão na classe P

Problemas *difíceis* não podem ser resolvidos em tempo polinomial

- Tempo exponencial
- Considera-se que estão na classe NP

EXISTEM ALGORITMOS POLINOMIAIS
PARA PROBLEMAS EM *NP*?

Um problema em NP pode ser transformado em outro problema em NP em tempo polinomial

- Esta premissa também é válida para problemas em P

Caso encontre-se um algoritmo polinomial para um problema em NP , então todos os problemas em NP poderão ser resolvidos em tempo polinomial

Problemas de decisão são a base para o estudo de classes de complexidade

Um problema de decisão aceita duas respostas

- ☐ Sim
- ☐ Não

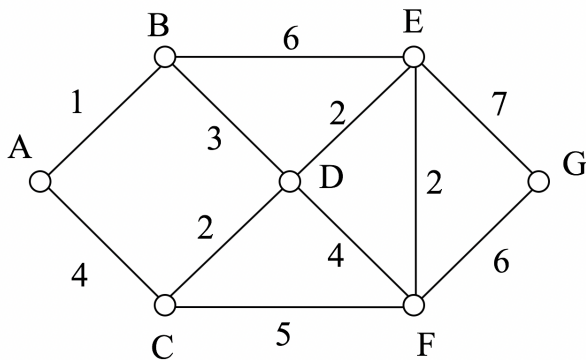
A classe NP contém problemas de decisão onde esta pergunta (sim, não) pode ser respondida em tempo polinomial

- ☐ Verificar a solução \neq computar a solução

PROBLEMAS DE DECISÃO E A CLASSE NP

Problema do caminho mínimo: existe um caminho entre A e G com peso menor ou igual a k ?

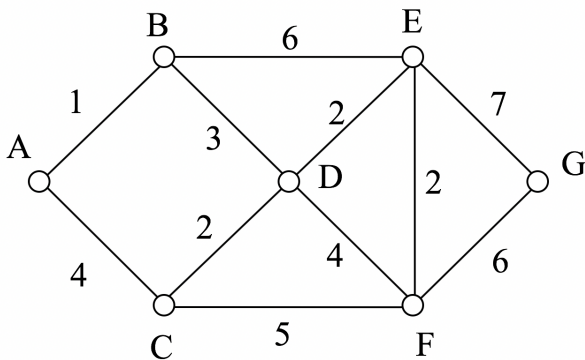
E com peso maior do que k ?



PROBLEMAS DE DECISÃO E A CLASSE NP

Problema do caminho mínimo: existe um caminho entre A e G com peso menor ou igual a k ? \rightarrow *Fácil*

E com peso maior do que k ? \rightarrow *Difícil*

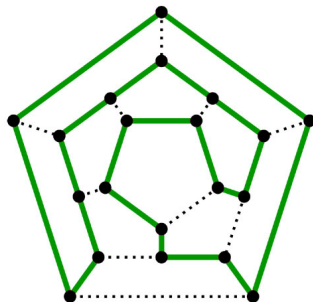


PROBLEMAS DE DECISÃO E A CLASSE NP

Problema do caminho hamiltoniano: existe um caminho que passe por todos os vértices do grafo uma única vez?

Grau dos vértices ≤ 2 : \rightarrow *Fácil*

Caso contrário: \rightarrow *Difícil*



DETERMINISMO E NÃO-DETERMINISMO

Um *algoritmo determinista* é aquele em que o resultado de cada operação é definido de forma única

- No mundo real, só existem algoritmos determinísticos
- Todos os algoritmos que vocês já implementaram até hoje são determinísticos

Um *algoritmo **não** determinista* é capaz de, magicamente, escolher a melhor resposta instantaneamente

- Escolhe dentre um conjunto de respostas possíveis

FUNÇÃO ESCOLHE

Obter o menor número de uma matriz

- Algoritmo determinista: $\mathcal{O}(nm)$
- Algoritmo não-determinista: $\mathcal{O}(1)$
 - Função *escolhe*

83	67	39	85	11	21	87
25	48	74	7	15	74	90
13	10	87	57	3	75	36
19	47	89	48	16	7	81
79	40	68	70	25	59	96

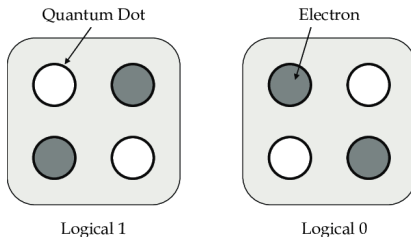
DETERMINISMO E NÃO-DETERMINISMO

Uma máquina de Turing determinística é um dispositivo de computação capaz de rodar somente algoritmos determinísticos

- Processadores atuais

Já uma máquina de Turing não determinística é aquela capaz de rodar algoritmos determinísticos e não-determinísticos

- Computação quântica
- Quantum-Dot Cellular Automata



CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES P E NP

P : Conjunto de problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por uma máquina de Turing determinística

NP : Conjunto de problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por uma máquina de Turing não-determinística

CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES P E NP

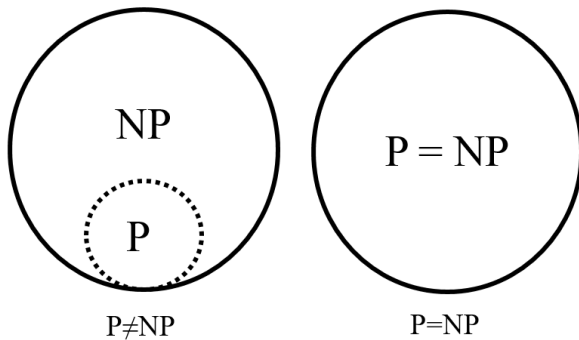
É fácil perceber que $P \subseteq NP$

Entretanto, um dos maiores problemas em computação (e da matemática) é provar

- $P = NP?$
- $P \neq NP?$

Se existem algoritmos polinomiais deterministas para todos os problemas em NP , então $P = NP$

CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES P E NP



CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES P E NP

Muitos problemas em NP podem ou não pertencer a P

- Não conhecemos algoritmos polinomiais para eles
- Isto não quer dizer que tais algoritmos não existam

Se conseguirmos provar que um problema não pertence a P , então não precisaríamos mais procurar algoritmos eficientes para os problemas em NP

- Ninguém nunca conseguiu provar algo semelhante

Como não existe tal prova, então existe a esperança de que $P = NP$

COMO MOSTRAR QUE UM PROBLEMA PERTENCE A NP

Existem duas maneiras para mostrar que um problema pertence a NP

1. Encontrar um algoritmo não-determinístico que resolve o problema em tempo polinomial
2. Encontrar um algoritmo determinístico que checa o custo de uma solução do problema em tempo polinomial

Caso estes algoritmos não existam, possivelmente o problema é mais difícil do que um problema em NP

- Está em um nível mais alto da hierarquia polinomial

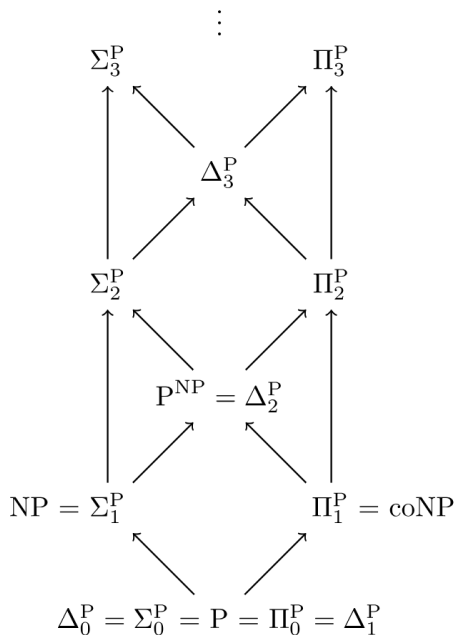
Existem duas maneiras para mostrar que um problema pertence a NP

1. Encontrar um algoritmo não-determinístico que resolve o problema em tempo polinomial
2. Encontrar um algoritmo determinístico que checa o custo de uma solução do problema em tempo polinomial

Caso estes algoritmos não existam, possivelmente o problema é mais difícil do que um problema em NP

- Está em um nível mais alto da hierarquia polinomial

HIERARQUIA POLINOMIAL



Existe uma classe especial de problemas NP

- Problemas NP -Completo

Problemas NP -Completo são problemas difíceis que podem ser transformados uns nos outros

- Transformação de tempo polinomial
- Transformação é possível na ida e na volta

Desta forma, ao se resolver um problema NP -Completo em tempo polinomial, pode-se resolver todos os outros problemas NP -Completo também em tempo polinomial

- Isto provaria que $P = NP$

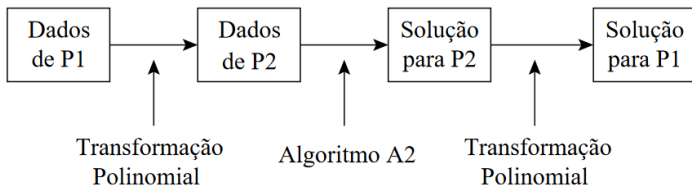
TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL

Sejam P_1 e P_2 dois problemas de decisão

Suponha que exista um algoritmo A_2 que resolva o problema P_2

Caso seja possível transformar P_1 em P_2 (e vice-versa), então podemos utilizar o algoritmo A_2 para resolver o problema P_1

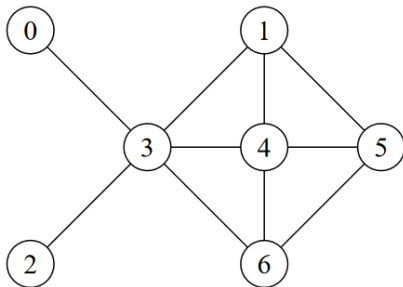
- Transformações devem ser polinomiais



TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL - CONJUNTO INDEPENDENTE

Seja $G = (V, E)$ um grafo. O conjunto independente $V' \subseteq V$ é tal que $i, j \in V' \iff (i, j) \notin E$

- V' é um grafo totalmente desconectado
- Todos par de vértices em V' não é adjacente

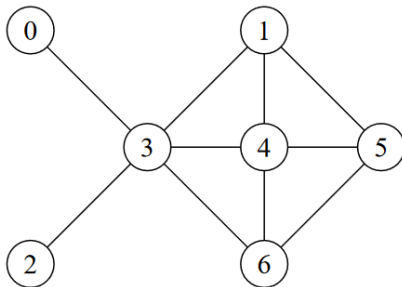


$$V' = \{0, 1, 2, 6\}$$

TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL - CLIQUE

Seja $G = (V, E)$ um grafo. O clique $V' \subseteq V$ é tal que
 $i, j \in V' \iff (i, j) \in E$

- V' é um subgrafo completo de G
- Todos par de vértices em V' é adjacente



$$V' = \{1, 3, 4\}$$

TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL

Seja P_1 o problema do clique e P_2 o problema do conjunto independente

- Seja $G = (V, E)$ uma instância de P_1
- Seja $\overline{G} = (V, E)$ uma instância de P_2
- É possível transformar G em \overline{G} em tempo polinomial
- É possível transformar \overline{G} em G em tempo polinomial

Mostre que G possui um clique de tamanho $\geq k$ se e somente se \overline{G} possui um conjunto independente de tamanho $\geq k$

TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL

Se existe um algoritmo que resolve o conjunto independente em tempo polinomial, ele pode ser utilizado para resolver clique também em tempo polinomial

Diz-se que clique \propto conjunto independente

- $P_1 \propto P_2$ indica que P_1 é polinomialmente transformável em P_2

Esta relação é transitiva

- $P_1 \propto P_2$ e $P_2 \propto P_3$, então $P_1 \propto P_3$

Dois problemas P_1 e P_2 são polinomialmente equivalentes se e somente se $P_1 \propto P_2$ e $P_2 \propto P_1$

Um problema de decisão P_1 é dito ser NP -completo se

1. $P_1 \in NP$
2. Para todo problema $P' \in NP$ -Completo, temos que $P' \propto P_1$

Este *framework* pode ser utilizado para provar que um problema é NP -Completo

- São os problemas *difíceis*
- Complexidade $O(c^n)$, onde
 - $c > 1$
 - n é o tamanho da entrada

COMO RESOLVER PROBLEMAS NP-COMPLETOS

Usar algoritmos exponenciais *eficientes*

- Técnicas baseadas em podas
- *Branch-and-bound*

Utilizar heurísticas, meta-heurísticas ou algoritmos aproximativos

- Último assunto de nossa disciplina

PROBLEMAS $\#P$ E $\#P$ -COMPLETOS

Problemas NP e NP -Completo são problemas de decisão

Problemas $\#P$ e $\#P$ -Completo são problemas de contagem

- Quantos caminhos existem entre dois pontos no mapa?
- De quantas maneiras é possível arranjar uma sequência de items?
- De quantas formas diferentes podemos montar uma rede de computadores?

Resolver um problema $\#P$ -Completo é tão difícil quanto resolver um problema NP -Completo

- Também podemos transformar um problema $\#P$ -Completo em todos os outros problemas $\#P$ -Completo
 - Transformação polinomial

CLASSES DE PROBLEMAS

