FLUXO EM GRAFOS

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 7 de outubro de 2024

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

PROBLEMAS DE FLUXO

Estes problemas abordam o processo de produção

- Produtos tem origem em um ponto do grafo
- Produtos são consumidos em um outro ponto do grafo
- As arestas (ou arcos) indicam as possíveis ligações (caminhos) que o produto pode percorrer

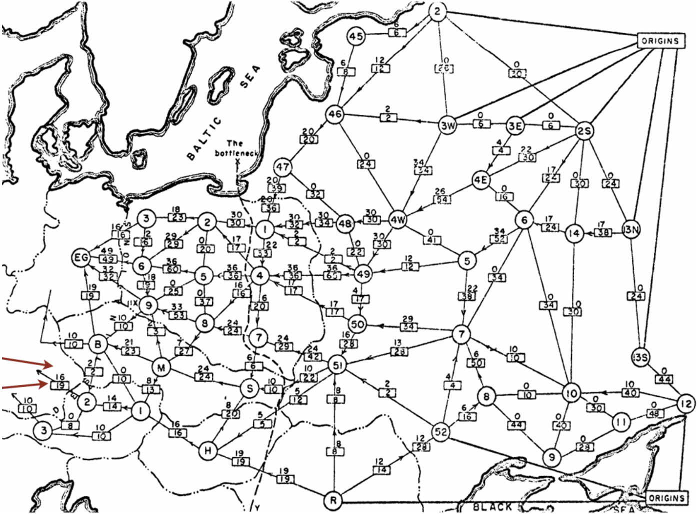
Problemas de fluxo ocorrem naturalmente em diversas aplicações

- Plantas industriais
- Sistemas de comunicação e de transporte
- Distribuição de água e energia
- ...

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O mapa abaixo mostra a rede de suprimentos da URSS

- Maximizar o fluxo de suprimentos até a Europa Oriental



FLUXO EM REDES

Em redes, problemas de fluxo normalmente são bem definidos

- A oferta de cada produto é conhecida
- A demanda por cada produto é conhecida
- O processo de transporte destes produtos permite pontos intermediários
  - Centros ou depósitos de distribuição
  - Restrições de capacidade nos depósitos
  - Restrições de tráfego e custos entre cada ponto

Podemos definir uma rede $R = (V, A, F, U)$ como um grafo **direcionado** $G = (V, A)$ atravessado por um fluxo

- Vértice **s**: *source* (fonte), origem do fluxo
- Vértice **t**: *terminal* (sumidouro), destino do fluxo

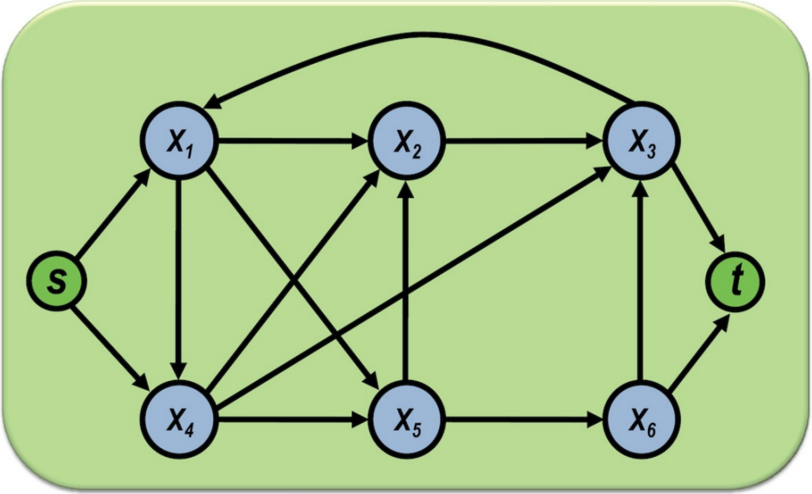
Um fluxo F pode ser definido como $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ circulando pelos $|A| = m$ arcos da rede

- Também pode ser definido como $F = \{f(i,j)\}, (i,j) \in A$

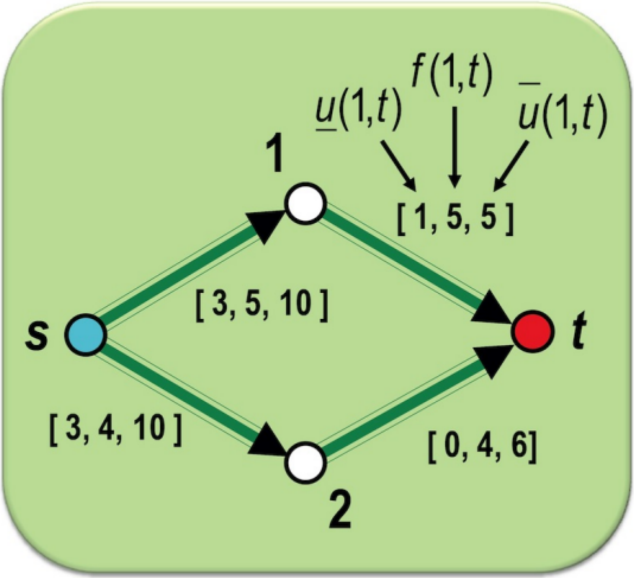
O conjunto $U = \{u(i,j)\}, (i,j) \in A$ é o conjunto de **limites de fluxo** associado aos arcos de A

- $\overline{u}(i,j)$ é o limite máximo
- $\underline{u}(i,j)$ é o limite mínimo

REDE DE FLUXO

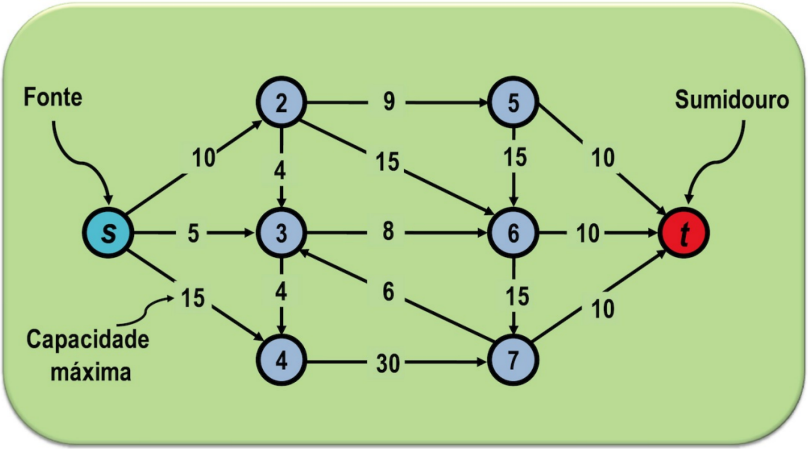


ROTULAÇÃO COM OS LIMITES DE FLUXO



ROTULAÇÃO MAIS COMUM

Inclui somente o fluxo máximo, sendo que o mínimo sempre é zero



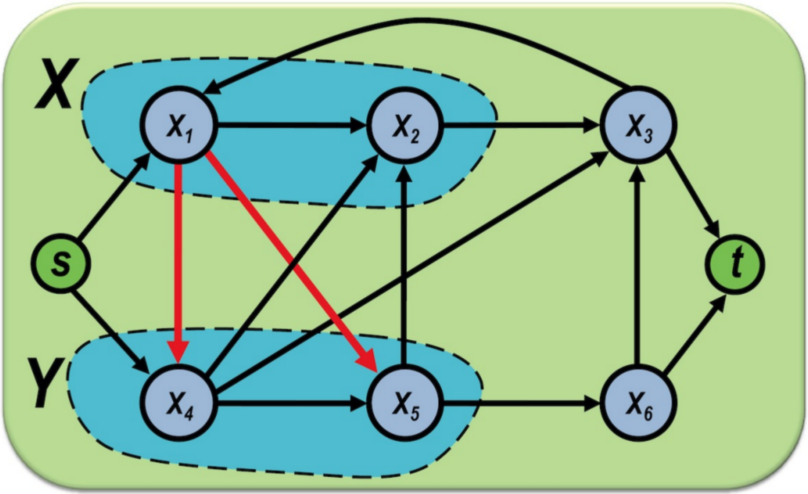
FLUXO ENTRE CONJUNTO DE VÉRTICES

Dado dois subconjuntos de vértices $X, Y \subset V$ de uma rede

- $X \cap Y = \emptyset$
- Fluxo ocorre de X para Y ou vice-versa - $f(X, Y)$ ou $f(Y, X)$

$$f(X, Y) = \sum_{e \in S} f_e \qquad S = \{e | (x_i, x_j), x_i \in X, x_j \in Y\}$$

FLUXO ENTRE CONJUNTO DE VÉRTICES

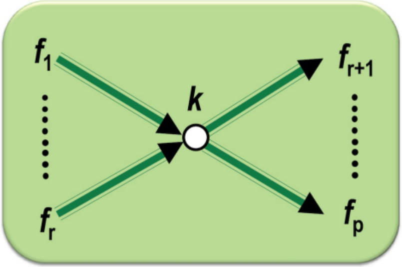


$$f(X, Y) = f(x_1, x_4) + f(x_1, x_5)$$

CONSERVAÇÃO DE FLUXO

O fluxo que sai de um vértice de transbordo deve ser igual ao fluxo que chega neste mesmo vértice

- Primeira lei de Kirchoff
- Vértices que atendem a esta propriedade são chamados de **vértices conservativos**



$$f_1 + \ldots + f_r \quad = \quad f_{r+1} + \ldots + f_p$$

CONSERVAÇÃO DE FLUXO

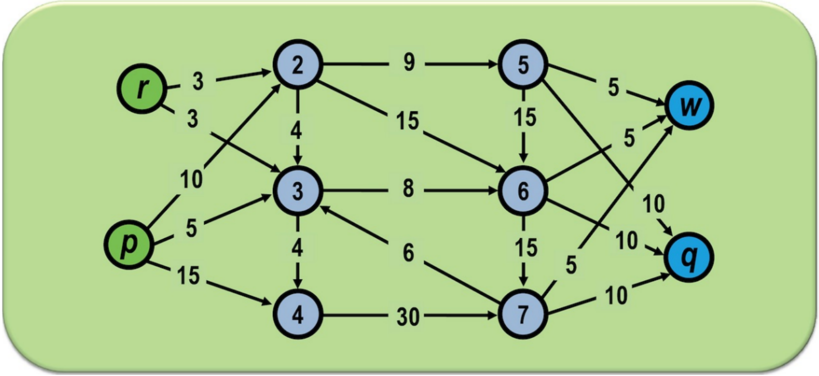
Vértices fonte e sumidouro não atendem a lei de conservação de fluxo

Entretanto, é fácil fazer uma pequena adaptação para fazer com que a lei seja verdade também para s e t

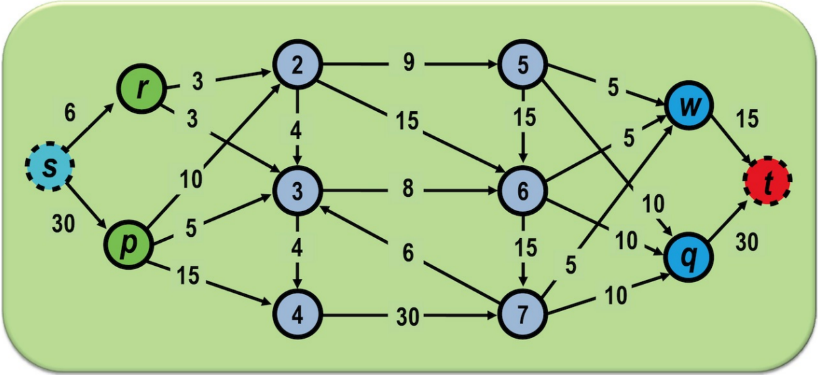
São necessários 2 passos

1. Unificação dos vértices de oferta e dos vértices de consumo
2. Transformação dos novos vértices em vértices conservativos

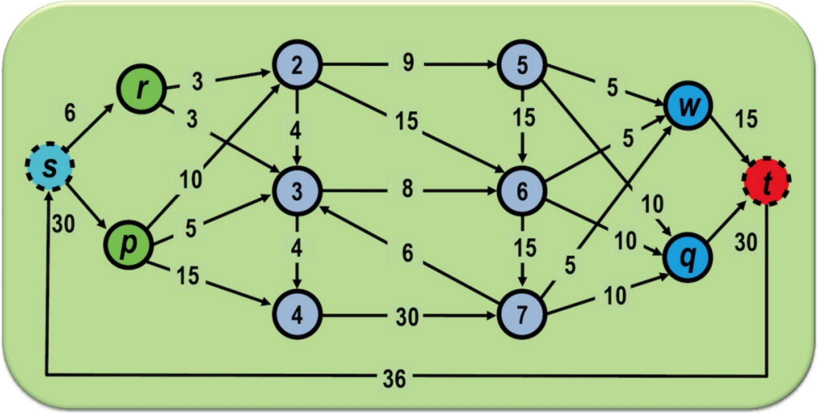
REDE ORIGINAL



PRIMEIRO PASSO



SEGUNDO PASSO



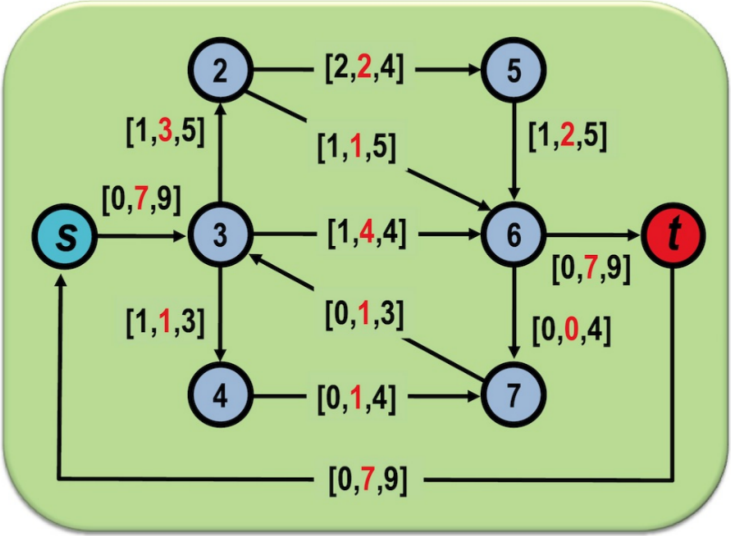
Capacidade do arco: menor valor entre oferta (36) e demanda (45)

FLUXO VIÁVEL

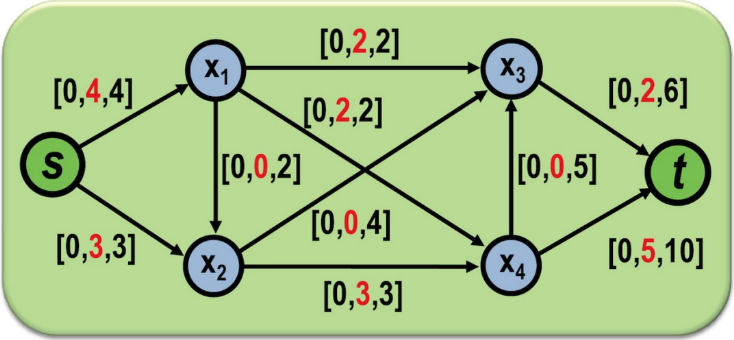
Um fluxo $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ é dito ser viável se

1. É conservativo
2. $\exists\ \underline{u}(i,j) \wedge \overline{u}(i,j)\ \forall (i,j) \in A$
3. $\underline{u}(i,j) \leq f_{ij} \leq \overline{u}(i,j)\ \forall f_{ij} \in F$
4. $0 \leq \underline{u}(i,j) \leq \overline{u}(i,j)\ \forall f_{ij} \in F$

FLUXO VIÁVEL



O **problema do fluxo máximo** consiste em fazer circular a maior quantidade possível de fluxo entre s e t em uma rede R



O fluxo máximo neste exemplo é igual a 7

CORTE

Um **corte** em um grafo $G = (V, A)$ é uma divisão dos vértices em dois subconjuntos dijuntos

- $X \subseteq V$
- $\overline{X} = V \setminus X$

Corte $s - t$

Um corte $s - t$ é um corte em um grafo de tal forma que o vértice fonte pertença a um dos conjuntos e o vértice sumidouro pertence ao outro conjunto

CAPACIDADE DE UM CORTE

A **capacidade** c de um corte é igual a soma dos fluxos dos arcos associados ao corte

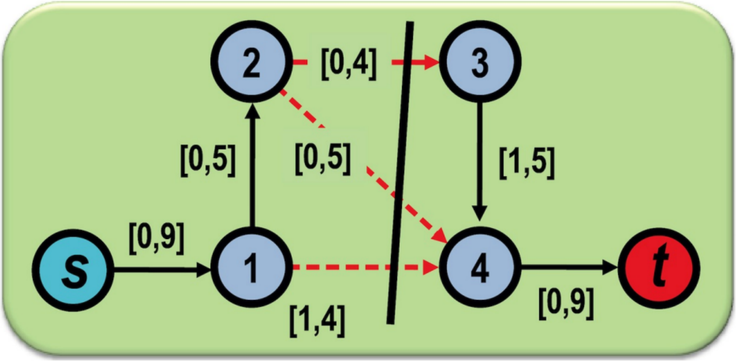
- Fluxo entre os conjuntos X e $\overline{X}$

$$c = f(X, \overline{X}) = \sum_{e \in S} f_e$$

$$\overline{u}(X, \overline{X}) = \sum_{e \in S} \overline{u}$$

$$\underline{u}(X, \overline{X}) = \sum_{e \in S} \underline{u}$$

$$S = \left\{ e | (x_i, x_j), x_i \in X, x_j \in \overline{X} \right\}$$

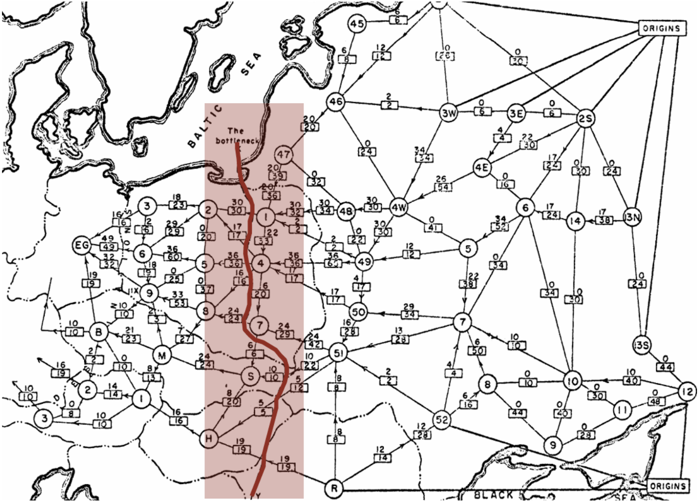


$$\overline{u}(X, \overline{X}) = 4 + 5 + 4 = 13$$

$$\underline{u}(X, \overline{X}) = 1$$

O mapa abaixo mostra a rede de suprimentos da URSS

- Deseja-se cortar o esta cadeia de suprimentos



FLUXO LÍQUIDO E CAPACIDADE LÍQUIDA

Fluxo líquido

Diferença entre os fluxos de X para Y e do fluxo de Y para X

$$f_l = f(X, Y) - f(Y, X)$$

Capacidade líquida

Diferença das capacidades dos arcos do corte

$$u_l = \overline{u}(X, Y) - \underline{u}(X, Y)$$

Teorema do fluxo/corte

Dado um fluxo f de valor $val(f)$, qualquer que seja o corte $(X, \overline{X})$

$$val(f) \leq \overline{u}(X, \overline{X}) - \underline{u}(X, \overline{X})$$

Teorema do fluxo máximo/corte mínimo

Para qualquer rede, o valor do fluxo máximo é igual a capacidade líquida mínima entre todos os possíveis cortes $s - t$ da rede

$$u_l = \overline{u}(X, Y) - \underline{u}(X, Y)$$

Algoritmo de Ford-Fulkerson (1956)

- Complexidade $\mathcal{O}(|V|f)$, onde f é o fluxo máximo da rede

Algoritmo de Edmonds-Karp (1972)

- Uma melhoria no algoritmo de Ford-Fulkerson
- Complexidade $\mathcal{O}(|V||A|^2) = \mathcal{O}(|V|^3)$

Algoritmo de Dinic (1970)

- Complexidade $\mathcal{O}(|V|^2|A|) = \mathcal{O}(|V|^3)$

Detalhes dos algoritmos podem ser encontrados nos livros texto de nossa disciplina