ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA (AVANZADAS) PARA BACHILLERATO

Ignacio Vallés Oriola

Índice general

0.1. Intoducción.

La confección de este texto es fruto de una larga experiencia como profesor de matemáticas de secundaria y para ello me he basado en mis más de treinta años de docencia y en la de tantos autores que han contribuido a la explicación de estos conceptos a multitud de alumnos. He usado también apuntes y problemas de libros de texto de segundo de bachillerato: Anaya, Marea Verde, SM, Santillana, Editex, Edunsa, Alhambra, Marfil, Ecir, Bruno, etc. Así como apuntes y ejercicios encontrados en la web y pruebas de acceso a la universidad de distintas comunidades autónomas. Gracias a todos ellos por su inestimable ayuda para la confección de este pequeño texto que espero que sirva a alguien y que escribo libre de todo tipo de derechos. En particular, me han sido de mucha utilidad los 'Apuntes de Álgebra' de José Salvador Cánovas Peña, profesor del departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la Universidad Politécnica de Cartagena.

Los apartados, teoremas y los ejercicios de mayor nivel estarán marcados con el símbolo $\circledast$. Exceden los contenidos de un curso de segundo de bachillerato pero son altamente recomendables para el alumnado que necesite ampliar sus conocimientos matemáticos en cursos posteriores.

Cómo estudiar matemáticas

Las Matemáticas son una asignatura que no deja indiferente a ningún estudiante. Algunos la aman y otros la odian; siendo este segundo grupo mucho más numeroso que el primero en la mayoría de las ocasiones. Sin embargo, muchos de los estudiantes que odian las matemáticas lo hacen porque no saben cómo estudiarlas para obtener buenos resultados.

Las Matemáticas son una de esas asignaturas en las que las horas de estudio no tienen una relación directa con la nota. Por mucho que hayas estudiado, si no eres capaz de solucionar el problema del examen, estás perdido. No obstante, existen algunas técnicas para aprender matemáticas que pueden hacer que, independientemente de tu nivel, le saques más partido a tu tiempo de estudio y aumentes tus probabilidades de éxito. ¡Hasta es posible que te acabes uniendo al grupo de amantes de las matemáticas!

Cómo Estudiar Matemáticas:

1. Práctica, Práctica y Más Práctica

   Es imposible aprender matemáticas leyendo y escuchando. Para aprender matemáticas hay que ponerse el mono de trabajo y lanzarse a hacer ejercicios matemáticos. Cuanto más practiques, mejor. Cada ejercicio tiene sus particularidades y es importante haber realizado el máximo número de ejercicios posibles antes de enfrentarnos al examen. Este punto es el más importante de todos y la base del resto de técnicas para estudiar matemáticas de esta lista.

   Una vez que entendiste los ejemplos explicados en clase, desarrolla ejercicios o problemas con solución para complementar tus conocimientos. Trata de hacerlos sin ver la respuesta y luego, si ni lo puedes terminar, ayúdate de la solución y sigue desarrollando, siempre preguntándote ¿por qué se realiza dicho paso? Se trata de que poco a poco no tengas necesidad de utilizar las soluciones y llegará el momento, después de unos pocos ejercicios, en que ya no necesites de ellas para desarrollar y entender completamente los problemas

   No pienses que escuchando la explicación de muchos ejercicios y problemas, donde un profesor te explica y entiendes un 100 %, es lo más importante para aprender Matemáticas. La clave del éxito es *¡PRACTICAR!*

2. Revisa los Errores

   Cuando estés practicando con ejercicios, es muy importante que compruebes los resultados y, más importante aún, que te detengas en la parte que has fallado y examines el proceso en detalle hasta asimilarlo. De nada sirve comparar resultados si no sabes en qué te has equivocado. Por eso es conveniente que tengas unos buenos apuntes con problemas resueltos. De esta manera, evitarás cometer los mismos fallos en el futuro. También es recomendable apuntar todos tus fallos y repasarlos repetidamente antes del examen.

Toma buenos apuntes: Sé ordenado, utiliza un solo cuaderno para el curso y escribe claramente usando, en lo posible, tus propias palabras para que puedas entender cuando estudies. Copia todo lo que el profesor diga y escriba en la pizarra, anotando los porqués de cada paso, ya que uno siempre puede olvidar lo escuchado y cuando vuelvas a leer tus apuntes podrás recordarlos rápidamente.

Observa y apunta si el profesor hace hincapié en ciertos puntos basándose en repeticiones, ejemplos, diagramas, comentarios extensos, etc., éstos son casi siempre parte importante de los temas.

3. Domina los Conceptos Clave

   ¡No intentes aprenderte los problemas de memoria! Los problemas matemáticos pueden tener miles de variantes y particularidades, por lo que es inútil aprendernos problemas de memoria sin entenderlos. Es cambio, es mucho más efectivo dominar los conceptos importantes y el proceso de resolución de los problemas.

   Recuerda que las Matemáticas son una asignatura secuencial, por lo que es importante asentar una base firme dominando los conceptos clave y teniendo claras las fórmulas matemáticas esenciales.

4. Consulta tus Dudas

   Puede que en muchas ocasiones te sientas atascado en una parte de un problema o que simplemente no entiendas el proceso. Lo común en estos casos es simplemente pasar de ese problema y pasar al siguiente. Sin embargo, es recomendable despejar todas las dudas que tengas en la resolución de un problema.

   Por tanto, puede ser buena idea estudiar junto a algún/a compañero/a con el que consultar dudas y trabajar juntos en problemas más complejos. O, mejor todavía, ¿por qué no te unes a un grupo de estudio en el que puedes plantear tus dudas y trabajar colaborativamente? Asimismo, recuerda plantearle al profesor/a las dudas que tengas, ya sea en clase o en una tutoría.

5. Crea un Ambiente de Estudio sin Distracciones.

Las Matemáticas son una asignatura que requiere más concentración que ninguna otra. Un ambiente de estudio adecuado y libre de distracciones puede ser el factor determinante para conseguir resolver ecuaciones o problemas de geometría, álgebra, trigonometría o complejos. Si te gusta estudiar con música, puede ser una buena idea escucharla de fondo para relajarte y favorecer un ambiente de máxima concentración; la música instrumental es la más recomendable en estas ocasiones.

¡Ah, y no olvides que es importante también tener confianza en uno mismo y afrontar el examen sabiendo que te has preparado adecuadamente!

Empieza a Estudiar Matemáticas Ahora. ¡Es gratis!

Guía de lectura

Los temas marcados con el símbolo ⋇ no forman parte de un temario normal de segundo de bachillerato, pero son lo suficientemente importantes para que el/la lector/a les dedique su atención si en su futuro va a necesitar ampliar su curriculum matemático, si no durante el curso sí durante el verano. Se exponen con la suficiente sencillez como para ser entendidos por cualquier alumno/a de bachillerato. En estos temas no se proponen ejercicios y todos están resueltos.

Parte I Álgebra Lineal.

Estructuras algebráicas ⋇

Empezamos el libro con el capítulo 1 de 'estructuras algebraicas' que son la base del álgebra y del concepto de 'espacio vectorial' que se verá en un próximo capítulo. No forman parte de un temario ordinario de segundo de bachillerato pero es de interés su conocimiento para seguir con estudios que requieran más bagage matemático. Por la sencillez en la exposición y debido a su carácter meramente introductorio, en este capítulo no habrán ejercicios propuestos, solo presentaremos algunos ejercicios resueltos.

Sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Método de Gauss

Este tema es altamente importante, asegúrate de entenderlo a la perfección y realizar todos los ejercicios.

El método aquí desarrollado para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, 'método de Gauss', es una potente y robusta herramienta para enfrentarte a este tipo de problemas, que suele aparecer con frecuencia en matemáticas y en ciencias, no solo en álgebra. En futuros temas analizaremos otros métodos con sus ventajas e inconvenientes frente a éste que ya detallaremos en su momento.

Matrices

Se introduce el importantísimo concepto de matriz en matemáticas y se aprende a operar con ellas. Dada la relevancia del tema, es aconsejable dedicarle el tiempo necesario para estar convencido de entenderlo y dominarlo.

Determinantes

Son una aplicación del conjunto de matrices cuadradas sobre el conjunto de los números reales: a cada matriz cuadrada se le asigna un número real.

Asegúrate bien de saber calcular determinantes y de entender sus propiedades, así como su aplicación al calculo de matrices inversas y a la resolución de ecuaciones matriciales.

SEL: teorema de Rouché

Comenzamos con la definición de 'rango' de una matriz y estudiamos dos métodos de cálculo de rangos: Gauss y orlados. Debes saber calcular rangos antes de aplicar el teorema de Rocuhé, que se explica a continuación.

Se ha intercalado el método de Cramer para la resolución de SEL, que junto con la forma matricial y el método de Gauss son los tres que veremos en este curso.

El tema acaba con la aplicación del teorema de Rouché a la discusión de sistemas dependientes de parámetros y a la eliminación de éstos en las soluciones de los sistemas compatibles indeterminados.

Asegúrate, como en los temas anteriores, de entender bien todos los conceptos que se explican y los ejemplos y ejercicios resueltos que aparecen. Esfuérzate en la resolución de los problemas propuestos, de los que dispones de solución, así como de las cuestiones finales (tienen ayuda)-

Espacios vectoriales ⁎

En este tema, que está fuera de los temarios ordinarios de bachillerato, se introduce el concepto de 'espacio vectorial', se estudian los subespacios y los conceptos de dependencia lineal, sistema generador, base y dimensión. Acabamos el tema con una introducción a los cambios de base en espacios vectoriales.

Aplicaciones lineales ⁎

Este es otro de los temas que no pertenecen al temario general de bachillerato en que se introduce el importantísimo concepto de homomorfismo o aplicación lineal entre espacios vectoriales. Se habla de los subespacios 'núcleo' e 'imagen' y de la forma matricial de una aplicación lineal.

Diagonalización de matrices ⋇

Último tema externo al temario general de bachillerato donde se introduce la diagonalización de matrices cuadradas y su aplicación al cálculo de potencias enésimas de matrices, para ello se introducen y se aprende a calcular los llamados 'valores y vectores propios' de una matriz (aplicación lineal).

Parte II Geometría.

Vectores en el plano

Tras exponer el concepto de vector fijo del espacio nos centramos en el de vector libre que nos servirá, junto con el conjunto de puntos des espacio, para tratar la geometría analítica que se expondrá en los siguientes temas: los vectores serán los encargados de desplazar a los puntos.

Se estudia el espacio vectorial de los vectores libres del espacio y el de base ortonormal para definir tres tipos de productos entre vectores: el producto escalar, que nos definirá la métrica del espacio (útil para medir distancias y ángulos); el producto vectorial que nos proporciona la idea de perpendicularidad y, como tercer producto entre vectores veremos una combinación de los dos anteriores, el producto mixto, que nos dará información acerca de volúmenes.

Rectas y planos

Definido lo que vamos a entender por rectas y planos y aprendidas las distintas formas de expresarlos, pasamos a estudiar sus características afines, sus posiciones relativas.

Problemas métricos

Dotando al espacio afín (rectas y planos) de una métrica, producto escalar, aprenderemos en este tema a calcular ángulos y distancias entre puntos, rectas y planos.

Superfícies ⋇

Acabamos la geometría con una somera descripción de las superficies en $\mathbb{R}^3$. Hablamos de la esfera y el cilindros y mencionamos las coordenadas esféricas y cilíndricas. Nombramos las superficies cónicas y las cuádricas.

Parte III Apéndices.

Apéndices

El Apéndice A está dedicado a los símbolos matemáticos básicos.

En el apéndice B se puede encontrar la definición y propiedades de los 'sumatorios y productorios', operadores muy usados en matemáticas. $\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \prod_{i=1}^{n} a_i$

El apéndice C se enuncia el 'principio de inducción' y se exponen varios ejemplos de su aplicación en demostraciones matemáticas.

El apéndice D se estudia el determinante de Vandermonde de orden-n y se ve una de sus muchas aplicaciones, el 'polinomio inerpolador'.

El apéndice E muestra la forma de expresar un 'vector de posición' de un punto en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Agradecimientos y licencia

Este material es un conjunto de apuntes personales, que comparto gratuitamente en la red, basados en mi experiencia como profesor, varios textos citados anteriormente y webs de internet. Si hay algún contenido que no he incluido correctamente, hacédmelo saber por e-mail y lo editaré como se pida. También se agradecería la comunicación de la detección de cualquier error.

Parte I

Álgebra Lineal

Álgebra Lineal

Se denomina álgebra a la rama de las matemáticas que se orienta a la generalización de las operaciones aritméticas a través de signos, letras y números. En el álgebra, las letras y los signos representan a otra entidad a través de un simbolismo.

Lineal, por su parte, es un adjetivo que refiere a lo vinculado a una. En el ámbito de la matemática, la idea de lineal alude a aquello que cuenta con consecuencias que son proporcionales a una causa.

Se conoce como álgebra lineal a la especialización del álgebra que trabaja con matrices, vectores, espacios vectoriales y ecuaciones de tipo lineal. Se trata de un área del conocimiento que se desarrolló especialmente en la década de 1840 con los aportes del alemán Hermann Grassmann (1809-1877) y el irlandés William Rowan Hamilton (1805–1865), entre otros matemáticos.

Los espacios vectoriales son estructuras que surgen cuando se registra un conjunto que no está vacío, una operación externa y una operación interna. Los vectores son los elementos que forman parte del espacio vectorial. En cuanto a las matrices, se trata de un conjunto bidimensional de números que permiten la representación de los coeficientes que tienen los sistemas de ecuaciones lineales.

William Rowan Hamilton es uno de los nombres más destacados del ámbito de las matemáticas, ya que fue quien acuñó el término «vector», además de haber creado los cuaterniones. Este concepto se extiende de los números reales, así como ocurre con los complejos. Los cuaterniones no son únicamente una curiosidad algebraica, tienen diversas aplicaciones físicas dentro del electromagnetismo, teoría de la relatividad y mecánica cuántica, entre otras.

Siguiendo con la definición de los elementos con los que trata el álgebra lineal, es importante saber que un sistema de ecuaciones lineales se compone de ecuaciones de primer grado, definidas sobre un anillo conmutativo o un cuerpo. Todos estos conceptos (espacio vectorial, cuerpo, anillo, grupo) son las llamadas ‘estructuras algebraicas’ y formarán nuestro primer tema.

Los espacios vectoriales, el foco de estudio del álgebra lineal, cuentan con dos conjuntos: uno de vectores y otro de escalares. Los escalares son elementos de los cuerpos matemáticos que se usan para llevar a cabo la descripción de un fenómeno con magnitud, aunque sin dirección; puede ser un número real o complejo.

El álgebra lineal es un instrumento de gran aplicación en casi todas las ramas de la matemática moderna, también muy utilizado en disciplinas como la física, computación e ingeniería entre otras; orienta su estudio y enseñanza sobre las bases teóricas y prácticas de: vectores, álgebra de matrices, cálculo de raíces, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y sus respectivas transformaciones.

.

Capítulo 1

Estructuras algebraicas básicas ⋇

1.1. Operación Interna

Definición 1.1. *Dados tres conjuntos A, B y C, se llama 'ley de composición' en los conjuntos A y B y resultado en el conjunto C, que denotaremos por $\oplus$, a una aplicación:*

$$\oplus : A \times B \longrightarrow C : \qquad \therefore \qquad (a, b) \rightsquigarrow a \oplus b = c \in C$$

Definición 1.2. *Dada $\oplus : A \times B \to C$, decimos que esta ley de composición es 'interna' si $A = B = C$. También se le llama 'operación binaria interna' o, más abreviadamente, 'operación interna'.*

Ejemplo 1.1. *La suma y productos ordinarios en $\mathbb{R}$, usualmente denotados por $+$ y $\cdot$, son leyes de composición interna.*

$$+ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}(x, y) \rightsquigarrow x + y \in \mathbb{R}$$
$$\cdot : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}(x, y) \rightsquigarrow x \cdot y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.2. *La resta no es una operación interna en $\mathbb{N}$, ya que, por ejemplo, $4, 7 \in \mathbb{N},$, pero $4 - 7 = -3 \notin \mathbb{N}$.*

Análogamente, la división no es una operación interna en ninguno de los conjuntos numéricos habituales ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *) ya que no está definida la división por* 0 *en ninguno de ellos.*

Definición 1.3. *Dados dos conjuntos* A *y* B*, se llama 'ley de composición externa' a una aplicación de* $A \times A$ *en* B *tal que a todo par de elementos de* A *les asocia un elemento de* B*.*

Ejemplo 1.3. *La resta de números naturales del ejemplo anterior es una operación externa de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$*.*

Definición 1.4. *Una aplicación* $\odot : \ A \times B \to A \therefore (a, b) \rightsquigarrow c = a \odot b \in A$*, se llama 'ley de composición externa por la derecha'. A los elementos del conjunto* B *se les llama multiplicadores o 'escalares'.*

Si se tiene: $\odot : \ B \times a \to A \therefore (b, a) \rightsquigarrow c = b \odot a \in A$*, se dice que es una 'ley de composición externa por la izquierda'.*

Ejemplo 1.4. *Un ejemplo de operación externa es 'el producto de un vector por un escalar' (o número real). Si* V *es el conjunto de vectores libres del plano, el producto* $\lambda \cdot \vec{v} \in V$*;* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $\vec{v} \in V$ *es una operación externa. Por ejemplo,* $\vec{v} = (2, 3) \to 4 \cdot (2, -3) = (8, -12)$*.*

Otro ejemplo de operación externa es el producto de un número real por una función (real de variable real). Si $\mathcal{F}$ *es el el conjunto de funciones reales de variable real, la operación* $\cdot : \ \mathbb{R} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$*, tal que* $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \in \mathcal{F}$*, con* $k \in \mathbb{R}$ *y* $f \in \mathcal{F}$*, también es una operación externa.*

Propiedades. Las leyes de composición no tienen por qué satisfacer ningún requisito en general, pero serán interesantes aquellas que verifiquen ciertas propiedades.

Las propiedades más interesantes que pueden cumplir las leyes de composición interna, son:

- **Asociativa:** $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c; \quad \forall a, b, c \in A$

  La propiedad asociativa, si se cumple, es la que nos permit prescindir de los paréntesis.

- **Conmutativa:** $a \oplus b = b \oplus a; \;\; \forall a, b \in A$

- **Distributivas:** Dado el conjunto A y las operaciones internas $\oplus, \odot$:

  - Se dice que $\odot$ es 'distributiva por la izquierda' respecto de $\oplus$ si:

    $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c); \;\; \forall a, b, c \in A$

  - Se dice que $\odot$ es 'distributiva por la derecha' respecto de $\oplus$ si:

    $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c); \;\; \forall a, b, c \in A$

  - Se dice que $\odot$ es 'distributiva' respecto de $\oplus$ si lo es por la izquierda y por la derecha, es decir:

    $(a \oplus b) \odot (c \oplus d) = (a \odot c) \oplus (a \odot b) \oplus (b \odot c) \oplus (b \odot d); \;\; \forall a, b, c, d \in A$

- **Elemento Neutro:** Decimos que la operación interna $\oplus$ tiene 'elemento neutro' en A, si: $\exists e \in A \;/\; e \oplus a + a \oplus e = a; \;\; \forall a \in A$

  Al elemento neutro lo denotamos por e.

- **Elemento Simétrico:** Dada una operación interna $\oplus$ en un conjunto A con elemento neutro e, se llama 'elemento simétrico', *si existe*, del elemento a a un elemento $\overline{a} \in A$ tal que: $\;\; a \oplus \overline{a} = \overline{a} \oplus a = e$

  Para la suma ordinaria en $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, el elemento neutro es el "0" y el "1" lo es para el producto ordinario.

  Para la suma ordinaria, el simétrico de un elemento x es $-x$ y se le llama 'elemento opuesto'. En el producto ordinario, para un elemento $n \neq 0$, el simétrico es $\frac{1}{x}$ y se le llama 'elemento inverso'.

  Para la composición de funciones reales de variable real, el elemento neutro es la función identidad $I(x) = x$ y el simétrico de una función (inyectiva) es la función inversa ($(f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$.

- **Elemento regular o simplificable:** Decimos que $a \in A$ es 'regular' o 'simplificable' para la composición interna $\oplus$ si se verifica:

  Si $\; a \oplus a_1 = a \oplus a_2 \Rightarrow a_1 = a_2; \;\; \forall a_1, a_2 \in A$, y

  Si $\; a_1 \oplus a = a_2 \oplus a \Rightarrow a_1 = a_2; \;\; \forall a_1, a_2 \in A$

Definición 1.5. *Se llama 'estructura algebraica' a un conjunto A y unas operaciones* $\oplus, \odot, \otimes, \cdots$, *internas o externas, definidas en* A, *de modo que se verifican ciertas propiedades. Se denota por:* $A(\oplus, \odot, \otimes, \cdots)$.

A continuación se describen las estructuras algebraicas más habituales y que son necesarias para llegar, en un próximo tema, a la estructura de 'espacio vectorial'.

1.2. Grupos

Definición 1.6. *Llamamos 'grupo' a una estructura algebraica* $(G, \otimes)$ *que verifica las propiedades:*

1. *Asociativa:* $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z; \;\; \forall x, y, z \in A$
2. *Existencia de Neutro:* $\exists\, e \in A \,/\, x \otimes e = e \otimes x = x, \; \forall x \in A$
3. *Existencia de simétrico:* $\forall x \in A, \; \exists\, y \in G \,/\, x \otimes y = y \otimes x = e$

Definición 1.7. *Si el grupo* $(G, \otimes)$ *cumple también la propiedad conmutativa:* $x \otimes y = y \otimes x; \;\; \forall x, y \in G$ *, se dice de el 'grupo es conmutativo o Abeliano'.*

Ejemplo 1.5. *En el grupo* $(\mathbb{R}, +)$, *el neutro es* 0 *y el simétrico (opuesto) de* x *es* $-x$. *En* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \sim \{0\}, \cdot)$, *el neutro es el* 1 *y el simétrico (inverso) de* x *es* $\frac{1}{x}$. *Ambos grupos son conmutativos. Además:*

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$*son grupos abelianos respecto de la suma ordinaria.*
2. *Los conjuntos* $\mathbb{Q} \sim \{0\}, \mathbb{R} \sim \{0\}, \mathbb{C} \sim \{0\}$ *son grupos abelianos respecto del producto ordinario.*
3. *El conjunto de las funciones reales de variable real,* $\mathcal{F}$, *respecto de la suma de funciones, también tiene estructura de grupo abeliano. Así como el conjunto de los vectores libres del plano* V *y la suma de éstos.*

1.3. Anillos

Definición 1.8. *Un 'anillo' es una estructura algebraica formada por un conjunto y dos leyes de composición interna,* $(A, \oplus, \odot)$ *, que verifican las siguientes propiedades:*

1. $(A, \oplus)$ *es un grupo abeliano. Su elemento neutro lo denotaremos por* 0*.*

2. $\odot$ *cumple la asociativa:* $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z), \ \forall x, y, z \in A$

3. $$\left.\begin{array}{l} x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \\ (x \oplus y) \oplus z = (x \odot z) \oplus (y \odot z) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{distributivas de } \odot \\ \textit{respecto de } \oplus \\ \forall x, y, z \in A \end{array}$$

Definición 1.9. $(A, \oplus, \odot)$ *es anillo 'unitario' si se verifica que:*

$\exists\ \overline{e}\ \in A \ / \ x \odot \overline{e} = \overline{e} \odot x = x, \ \forall x \in A$ *(existe neutro para la segunda ley de composición).*

Definición 1.10. $(A, \oplus, \odot)$ *es anillo 'conmutativo' si se verifica que:*

$x \odot y = y \odot x, \ forall x, y \in A$ *(la segunda ley es conmutativa).*

Definición 1.11. *Un elemento* x *de un anillo unitario* $(A, \oplus, \odot)$ *se dice 'inversible' si posee simétrico respecto de la segunda ley,* $\odot$*, es decir:*

$\exists\ y \in A \ / \ x \odot y = y \odot x = \overline{e}$

Ejemplo 1.6. *En* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *, los únicos elementos invertibles son el* 1 *y el* -1*.*

En $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *, el único elementos no invertibles es el* 0*.*

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo unitario,* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *,* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *,* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *son anillos conmutativos unitarios en los que el único elemento no invertible es el* 0

En determinados anillos es posible encontrar dos elemento no nulos que, al operarlos mediante la segunda ley (que habitualmente denominamos producto), se obtiene el elemento neutro de la primera ley (el 0 *habitualmente). Es decir, se pueden multiplicar dos elementos distintos de* 0 *y* *que el resultado sea* 0*. A estos elemento se les conoce como 'divisores de cero'.*

Por ejemplo: el anillo $(\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ +,\ \cdot\ )$ *con las leyes de composición* $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ *y* $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1\cdot y_1, x_2\cdot y_2)$*, los elementos* $(1, 0)$ *y* $(0, 1)$ *son 'divisores de cero', ya que:* $(1, 0)\cdot(0, 1) = (0, 0)$.

A los anillos que no tienen divisores de cero, es decir: $\forall x, y \in A : x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *vee* $y = 0$*, se les llama 'anillos íntegros o dominio de integridad'.* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, *con las leyes habituales de suma y producto, son 'dominios de integridad'.*

1.4. Cuerpos

Definición 1.12. *Se llama 'cuerpo' a todo anillo unitario* $(K, \oplus, \odot)$*, tal que* $(K \sim \{0\}, \odot)$ *es un grupo, es decir, todo elemento* $x \in K,\ x \neq 0$ *es inversible respecto de* $\odot$*.*

Si el anillo $(K \sim \{0\}, \odot)$ *es conmutativo, se dice que el cuerpo* K *es conmutativo.*

Ejemplo 1.7. *Los conjuntos* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$*, respecto de las operaciones ordinarias, son cuerpos conmutativos.*

1.5. Espacios vectoriales

El concepto de 'espacio vectorial' se verá con más detalle en un próximo tema. Dejamos ahora solo su definición:

Definición 1.13. *Un conjunto* V *tiene estructura de 'espacio vectorial' sobre un cuerpo* K *si:*

— En V *hay definida una ley de composición interna (suma) que da a* V *estructura de 'grupo abeliano'.*

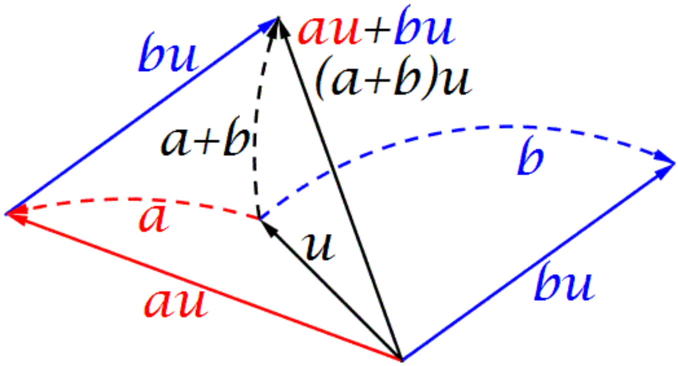
— *En V hay definida una ley de composición externa (producto por un escalar, elemento del cuerpo K) tal que:* $\forall u \in V$, $\forall \lambda \in K \rightsquigarrow k \cdot u = ku \in V$, *que verifica las siguientes leyes:*

1. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

2. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$

3. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

4. $1u = u \quad (\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in K)$



1.6. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 1.1. *Considera la ley de composición:* $a \oplus b = \sqrt[3]{a^3+b^3}$, *con* $,b \in \mathbb{R}$. *Demuestra que* $(R, \oplus)$ *es grupo abeliano.*

1) $\oplus$ interna: $a, b \in \mathbb{R} \to a \oplus b = \sqrt[3]{a^3+b^3} \in \mathbb{R}$

2) $\oplus$ asociativa: $(a \oplus b) \oplus c = \sqrt[3]{a^3+b^3} \oplus c = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^3+b^3})^3 + c^3} = \sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}$; $\quad a \oplus (b \oplus c) = a \oplus \sqrt[3]{b^3+c^3} = \sqrt[3]{a^3 + (\sqrt[3]{b^3+c^3})^3} = \sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}$

3) $\oplus$ neutro: $a + e = \sqrt[3]{a^3+e^3} = a = \sqrt[3]{a^3} \to e = 0$

4) $\oplus$ simétricos: $a \oplus \overline{a} = e \to \sqrt[3]{a^3+\overline{a}^3} = 0 \to \overline{a}^3 = -a^3 \to \overline{a} = -a$

5) $\oplus$ conmutativa: $a \oplus b = \sqrt[3]{a^3+b^3} = \sqrt[3]{b^3+a^3} = b \oplus a$

Efectivamente, $(\boldsymbol{R}, \oplus)$ es **grupo comutativo.** $\diamond$

Ejercicio resuelto 1.2. *Considera las leyes de composición:* $a \oplus b = a + b - 8; \quad a \otimes b = a + b - ab$, *demuestra que* $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ *es un anillo.*

1) $\oplus$ interna: $a, b \in \mathbb{Z} \to a + b - 8 \in \mathbb{Z}$

2) $\oplus$ asociativa: $(a \oplus b) \oplus c = (a + b - 8) \oplus c = (a + b - 8) + c - 8 = a+b+c-16; \qquad a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b+c-8)a+(b+c-8)-8 = a+b+c-16$

3) $\oplus$ neutro: $a \oplus e = a + e - 8 = a \to e = 8$

4) $\oplus$ simétrico: $a \oplus \overline{a} = a + \overline{a} - 8 = e = 8 \to \overline{a} = 16 - a$

5) $\oplus$ conmutativa: $a \oplus b = a + b - 8 = b + a - 8 = b \oplus a$

6) $\otimes$ interna: $a, b \in \mathbb{Z} a \otimes b = \to a + b - ab \in \mathbb{Z}$

7) $\otimes$ asociativa:

$(a \otimes b) \otimes c = (a + b - ab) \otimes c = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c = a + b + c - ab - ac - bc + abc$

$$=$$

$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (b + c - bc) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) = a + b + c - ab - ac - bc + abc$

8) distributiva de $\otimes$ respecto de $\oplus$:

$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes (b + c - 8) = a + (b + c - 8) - a(b + c - 8) = a + b + c - 8 - ab - ac + 8a = 9a + b + c - ab - ac - 8$

$$\neq$$

$(a \times b) \oplus (a \otimes c) = (a+b-ab) \oplus (a+c-ac) = (a+b-ab)+(a+c-ac)-8 = 2a + b + c - ab - ac - 8$

No se cumple la propiedad distributiva, luego $\boldsymbol{(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)}$ **no es un anillo**.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 1.3. *Demuestra que* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, *con las leyes usuales de suma y producto de números complejos es un 'cuerpo conmutativo'.*

Recuérdese que un cuerpo es un anillo con elemento inverso para la segunda ley para todos los elementos de $\mathbb{C}$ excepto en neutro de la primera ley. Además el cuerpo es conmutativo si lo es la segunda ley. Si antes comprobábamos 8 propiedades, ahora serán 10.

$z \in \mathbb{C}$ / $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$; $i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ $(i^2 = -1)$. a es la 'parte real' y b la 'parte imaginaria', ambas reales.

En lo que sigue, $z_k = a_k + b_k\ i,\ k = \{1, 2, 3\}; a_k, b_k \in \mathbb{R}$

1) $+$ es interna: $z_1+z_2 = (a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\ i\ \in \mathbb{C}$

2) $+$ asociativa: $z_1+(z_2+z_3) = (a_1+b_1)\ i+[(a_a+b_2\ i)+(a_3+b_3)\ i] = \cdots = (a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)\ i = \cdots = [(a_1+b_1\ i)+(a_2+b_2\ i)]+(a_3+b_3\ i) = (z_1 + z_2) + z_3$

3) $+$ neutro: $z + e = z \rightarrow (a + bi) + 0 = a + bi \Rightarrow e = 0 = 0 + 0i$

4) $+$ simétrico (opuesto): $z + (-z) = 0 \rightarrow (a + bi) + (-z) = 0 \Rightarrow -z = -a - bi$

5) $+$ conmutativa: $z_1+z_2 = (a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i = z_2 + z_1$

6) $\cdot$ interna: $z_1 \cdot z_2 = (a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i) = a_1a_2+a_1b_2 i+b_1a_2 i+b_1b_2 \cancelto{-1}{i^2} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\ i \in \mathbb{C}$

7) $\cdot$ asociativa:

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (a_1 + b_1 i) \cdot [(a_2a_3 - b_2b_3) + (a_2b_3 + a_3b_2)\ i] = [a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + a_3b_2)] + [a_1(a_2b_3 + a_3b_2) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)]\ i \cdots \rightarrow$

compruébese que son $=$

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\ i] \cdot (a_3 + b_3 i) = \cdots \rightarrow$

8) $\cdot$ distributiva respecto de $+$:

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a_1 + b_1 i) \cdot [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\ i] = \cdots \rightarrow$

compruébese que son $=$

$(z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) = [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\ i] + [(a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_3 + a_3b_1)\ i] = \cdots \rightarrow$

9) $\cdot$ simétrico (inverso): El neutro en el producto es $1 = 1 + 0i$; $z \cdot 1 = (a + bi)(1 + 0i) = a + bi$

$\forall z \neq 0 \in \mathbb{C},\ z = a + bi,\ \exists z^{-1} = \frac{1}{z}\ /\ z \cdot z^{-1} = 1$

En efecto si $z \cdot z^{-1} = 1 \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2-b^2} = \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{-b}{a^2+b*2}\, i \in \mathbb{C}$

10) $\cdot$ conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i = (a_2 a_1 - b_2 b_1) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)\, i = (a_2 + b_2 i) \cdot (a_1 + b_1 i) = z_2 \cdot z_1$

$\diamond$

Comentarios sobre los números complejos.

El nombre escogido, 'números complejos', para estos números tiene lo suyo, pero ... sigamos adelante.

Estos extraños números surgen de la mano de Cardano y Tartaglia en el s. XVI, cuando intentaban resolver ecuaciones de tercer grado. Se dieron cuenta que necesitaba considerar las raíces cuadradas de números negativos, así, p.e., para calcular $\sqrt{-25}$ hacían lo siguiente: $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)} = \pm 5\, \sqrt{-1}$

En el s. XVII, Leibniz considera a la $\sqrt{-1}$ como una especie de 'anfibio entre el ser y la nada'. Los matemáticos y físicos de la época usan estos números pero con desconfianza.

Euler, en el s. XVIII bautiza a $\sqrt{-1}$ como i (de número imaginario). Ahora, las raíces de números negativos son algo tan sencillo como $\sqrt{-4} = \pm 2\, i$

A finales del s. XVIII, Euler demuestra su famoso TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA, que asegura que todo polinomio de grado n tiene, exactamente, n-raíces (considerando la multiplicidad y estas imaginarias). Así, p.e., la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$ tiene por soluciones $2 + 3i$ y $2 - 3i$.

A partir del s. XIX, Gauss logra la representación gráfica de estos números complejos y su interpretación geométrica. Desde entonces son aceptados sin reservas.

s. XXI. La aplicación de los números complejos está presente en muchos apartados de las ciencias.

— En electrónica la ley de ohm ($IR = V$) para corriente alterna necesita de los números complejos: $IZ = V$; $Z = R + iX$ (Z impedancia, tiene parte real o resistiva R y parte imaginaria o reactancia X)

También se usan los números complejo en electromagnetismo (las ondas e.m. son complejas) y en física cuántica (la amplitud de probabilidad es compleja, su cuadrado es lo observable).

— En la teoría especial de la relatividad se reformula el espacio-tiempo 4-dimensional de Minkowski en el que el tiempo es una componente más, imaginaria. En palabras de Minkowski, en 1908, **"las ideas que sobre el espacio-tiempo quiero mostrarles hoy descansan en el suelo firme de la física experimental, en la cual yace su fuerza. Son ideas radicales. Por lo tanto, el espacio y el tiempo, por separado, están destinados a desvanecerse entre las sombras y tan solo una unión de ambos puede representar la realidad."**

— ¿Qué no decir de los fractales?. En 1977 Benoit Mandelbrot publica 'la geometría fractal de la naturaleza', regida por números complejos ($z_{n+1} = z_n^2 + c$, 'conjunto de Mandelbrot').

La ecuación más bella: $\boxed{\boldsymbol{e^{i\cdot\pi} + 1 = 0}}$

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales: método de Gauss

2.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Definición 2.1. *Una 'ecuación lineal' con dos incógnitas es una relación de la forma: $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. x e y son las incógnitas . Cualquier par de valores (α, β) que verifiquen la ecuación se llaman 'solución' de la misma.*

— Cualquier ecuación lineal con dos incógnitas, $ax + by = c$, admite siempre infinitas soluciones. Hay que dar valor a una incógnita y calcular el valor correspondiente en la otra.

— Interpretación geométrica: si representamos en el plano todas las infinitas soluciones de cualquier ecuación lineal con dos incógnitas, $ax + by = c$, obtenemos una 'recta' en el plano.

Vamos a empezar considerando sistemas de **2** ecuaciones lineales con **2** incógnitas. $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$; a_i, b_i son los coeficientes y c_i los términos independientes $(i = \{1, 2\})$

Definición 2.2. *Según sean las soluciones del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, éstos se clasifican en:*

1. *SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD): Solución única.*

   ejemplo: $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \textit{sumando:} \\ 3x = 3 \ \rightarrow \ \boldsymbol{x = 1; \ y = 4} \end{matrix}$

   Interpretación geométrica: las dos rectas que forman el sistema son secantes, $(r \cap s)$, se cortan en un punto, el $(1, 4)$.

2. *SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI): Infinitas soluciones.*

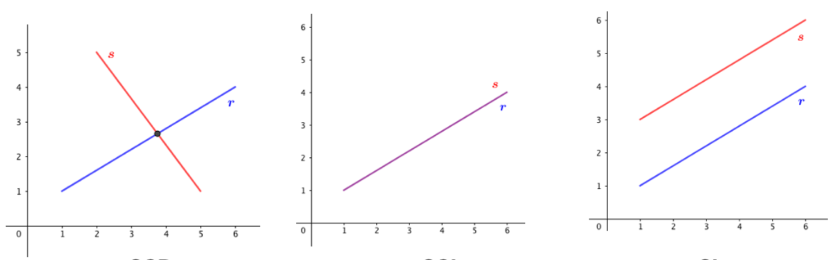
   ejemplo: $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (1^a ec)(2) - (2^a ec) \\ 0x = 0; \ \boldsymbol{x = \lambda \rightarrow y = 3 + \lambda} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}; \ \infty \ \textit{soluciones} \end{matrix}$

   Interpretación geométrica: las dos rectas que forman el sistema son coincidentes $(r \equiv s)$, tienen todos (∞) puntos en común.

3. *SISTEMA INCOMPATIBLE (SI): No hay ninguna solución.*

   ejemplo: $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (1^a ec)(2) - (2^a ec) \\ 0x = -8; \ \nexists \ \boldsymbol{x} \ \rightarrow \nexists \ \boldsymbol{y} \end{matrix}$

   Interpretación geométrica: las dos rectas que forman el sistema son paralelas $(r \parallel s)$, no tienen ningún punto en común.



SCD **SCI** **SI**

Forma matricial de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Aunque dedicaremos en un próximo capítulo a las matrices, de momento nos bastará considerar una matriz como un rectángulo que contiene números. Así, un Sistema de Ecuaciones Lineales (en adelante un SEL) lo podremos escribir, escribiendo en cada fila solamente los coeficientes de las ecuaciones y, a la derecha, separada por una barra vertical, |, los términos independientes. En la segunda fila se escribirán los coeficientes de la segunda ecuación y, a la derecha, su término independiente. En este caso usaremos una matriz de dos filas (ecuaciones) con tres columnas (dos para os coeficientes de las incógnitas y la tercera columna para los términos independientes).

$$\boxed{\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2 = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]}$$

Forma matricial de un S de dos E L con dos incog.

a_1, b_1, a_2, b_2 son los coeficientes; c_1, c_2 son los términos independientes.

2.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición 2.3. *Se llama 'Sistema de m-Ecuaciones Lineales con n-incógnitas' (SEL) a todo conjunto de relaciones de la forma:*

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n & = b_i \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}}$$

La primera fila son los coeficientes de las n-incógnitas y el término independiente de la primera ecuación. La segunda fila, la segunda ecuación, ... En la primera columna aparecen los coeficientes de la primera incógnita, en la segunda columna los coeficientes de la segunda incógnita, ... En la columna m+1 aparecen los términos independientes de las m-ecuaciones. Así, a_{ij} es el coeficiente de la ecuación-i que acompaña a la incógnita-j.

Forma matricial para representar un SEL

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

De nuevo, para cada a_{ij}, el subíndice-i hace referencia a la ecuación-i y el subíndice-j a la incógnita-j: $1 \leq i \leq m$; , m ecuaciones ; $1 \leq j \leq n$, n-incógnitas.

Definición 2.4. *Decimos que la n-tupla (conjunto de n números ordenados) de números reales $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ son 'solución' del SEL si sustituidas en él se satisfacen todas sus ecuaciones.*

Definición 2.5. .

Atendiendo a las soluciones, un SEL puede ser:

$$\begin{cases} \textit{COMPATIBLE (con solución)} \rightarrow \begin{cases} \textit{DETERMINADO (Sol.única)} \\ \textit{INDETREMINADO } (\infty \textit{ sol.}) \end{cases} \\ \\ \textit{INCOMPATIBLE (sin solución)} \end{cases}$$

Definición 2.6. *''Resolver' un SEL es encontrar todas sus soluciones o advertir de que el sistema carece de soluciones.*

2.3. Sistemas equivalentes

Definición 2.7. *Dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas (aunque no tengan el mismo número de ecuaciones) se dice que son 'equivalentes' si tienen las mismas soluciones, es decir, cualquier solución del primer sistema también lo es del segundo y viceversa.*

Teorema 2.1. *Las siguientes transformaciones elementales realizadas a un SEL dan lugar a otro equivalente:*

- *Cambiar de orden las ecuaciones del sistema.*
- *Multiplicar toda la ecuación (los dos miembros) por un número distinto de cero.*
- *Sustituir una ecuación del sistema por ella misma más otra cualquiera multiplicada por un número cualquiera.*
- *Sustituir una ecuación del sistema por ella misma multiplicada por un 'numero distinto de cero' más otras ecuaciones multiplicadas por otros números. ¡Ojo!, la ecuación a sustituir no puede estar multiplicada por cero, sería como cargarse una ecuación del sistema.*

2.4. Resolución de SEL: Método de Gauss

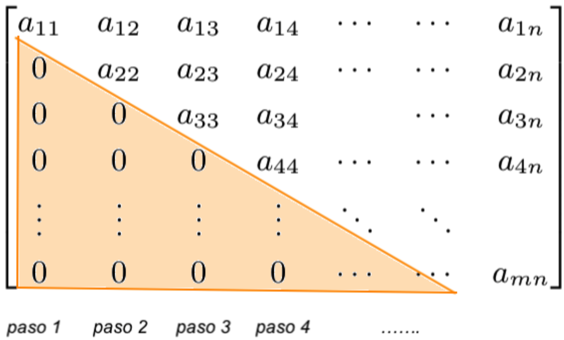
El método de Gauss consiste en aplicar transformaciones a las ecuaciones (filas de números en la representación matricial) hasta obtener un sistema "triangular" (todos los coeficientes por debajo de la diagonal son cero) y, entonces, despejar en cascada (de abajo hacia arriba). Si nos aparece una trivialidad, $0 = 0$, se tacha y se prescinde de esa fila o ecuación (no aporta ninguna información al sistema); si llegamos a una incongruencia (incompatibilidad) $3 = 0$, p.e., tenemos un SI (sin solución).

Este método está formado por varios pasos (m-1 pasos de las m-1 ecuaciones en que hay que buscar ceros por debajo de la diagonal):

— el primer paso consiste en combinar cada una de las ecuaciones $2, 3, \cdots, m$ con la ecuación 1 para que todos sus primeros coeficientes sean cero ($a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{m1} = 0$).

— el segundo paso consiste en hacer que por debajo de la segunda fila, todos los segundos coeficientes del resto de ecuaciones sean cero, combinando cada ecuación $3, 4, \cdots,$, con la 2 para conseguir que $a_{32} = a_{42} = \cdots = a_{m2} = 0$.

— y así hasta conseguir triangularizar la matriz, que por debajo de la diagonal todos los elementos sean ceros.



Cuando se llega a una ecuación con más de una incógnita se elige una de ellas y a las otras se les da valores arbitrarios (parámetros $\lambda, \mu, \ldots$) y se sigue despejando en función de éstos. Para ello:

Teorema 2.2. *Transformaciones de Gauss: En la representación matricial de un SEL está permitido (da lugar a otra ecuación equivalente):*

** multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.*

** Sustituir una ecuación por ella misma más otra multiplicada por un número.*

¡ASTUCIA!: se puede cambiar el orden de las ecuaciones y las incógnitas (advirtiéndolo en este último caso). Lo más conveniente es que el número con el que combinar, 'pivote', sea 1 *ò* -1*, si es posible. En caso de que el coeficiente con el que pivotar sea cero, o bien cambiamos de orden las ecuaciones o sustituimos ésta por una combinación de ella con alguna otra de modo que el pivote sea distinto de cero.*

A continuación veremos unos ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

Ejemplo 2.1. .

$$\begin{cases} x - 2y - 2z & = -3 \\ 2x - 3y + 4z & = 4 \\ 5x - y + 3z & = 16 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow{(1*)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 10 \\ 0 & 9 & 13 & 31 \end{array}\right] \xrightarrow{(2*)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & -59 & -59 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=-3 \\ y+8z=10 \\ -59z=-59 \end{cases}$$

En el paso (1) –primer paso del método de Gauss– hemos combinado las ecuaciones segunda y tercera con la primera para conseguir los dos ceros de la primera columna ($2^a \to 2^a - 2\cdot 1^a$; $3^a \to 3^a - 5\cdot 1^a$). En el paso (2*) –segundo paso del método de Gauss– combinamos la tercera ecuación con la segunda para conseguir el cero de la tercera columna (ojo, combinamos 3^a con 2^a , no con 1^a, que desharíamos el cero anteriormente conseguido), la combinación elegida en este caso ha sido $3^a \to 3^a - 9\cdot 2^a$. Estos pasos no será necesarios explicarlos así como tampoco lo será reescribir el sistema de ecuaciones escalonado al que llegamos. Con ello hemos conseguid un sistema 'escalonado' y (sin necesidad de volver a escribir el sistema de ecuaciones lineales obtenido) nos ponemos a despejar en 'cascada', de abajo hacia arriba:*

Leyendo la última ecuación: $[\,0 \quad 0 \quad -59 \;\mid\; -59] \to -59z=-59 \Rightarrow \boldsymbol{z=1}$

Subimos un peldaño en la cascada y, con el valor encontrado para x*, leemos la segunda ecuación:* $[\,0 \quad 1 \quad 8 \;\mid\; 10] \to y+8z=10;\ y+8\cdot 1=10 \Rightarrow \boldsymbol{y=2}$

Por último, subimos a la primera ecuación y leemos: $[\,1 \quad -2 \quad -2 \;\mid\; -3] \to x-2y-2z=-3;\ x-2\cdot 2-2\cdot 1=-3;\ x-4-2=-3 \to \boldsymbol{x=3}$

Solución única: $\boldsymbol{x=3;\ y=2;\ z=1}$, ***solución única***, ***SDC*** *(sistema compatible y determinado).*

Ejemplo 2.2. .

$$\begin{cases} x-y+3z &=4 \\ 2x-y-z &=6 \\ 3x-2y+2z &=10 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{(1*)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{(2*)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x-y+3z=4 \\ y-7z=-2 \\ 0z=0 \end{cases}$$

$1*)\ \ 2ec \to 2ec - 2\cdot 1ec;\ \ 3ec \to 3ec - 5\cdot 1ec;\quad 2*)\ \ 3ec \to 3ec - 2ec$

La última ecuación: $[\,0 \quad 0 \quad 0 \;\mid\; 0\,]$ *es lo que en matemáticas llamamos una 'trivialidad'* ($0\cdot z=0$)*, no aporta ninguna información y la eliminamos del sistema:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

Leyendo ahora la última ecuación que ha quedado: $y-7z=-2$. *Para resolver una ecuación con más de una incógnita, hay que elegir una de ellas, la* y *por ejemplo y dar valores a las otras, la* z *en este caso. En el problema que nos ocupa (método de Gauss para resolver SEL) lo que haremos es 'parametrizar' las otras incógnita,* z *en el ejemplo, del siguiente modo:* $z = \lambda \ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$ *e ir despejando el resto de incógnitas en función de estos parámetros:*

$z = \lambda \ \ \forall\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow$ *, última ecuación* $y - 7z = -2;\ y - 7\lambda = -2 \Rightarrow y = -2 + 7\lambda$ *. Subimos un peldaño y vamos a la primera ecuación:* $x - y + 3z = 4 \rightarrow x - (-2 + 7\lambda) + 3\lambda = 4 \Rightarrow x = 2 + 4\lambda$

Las soluciones son: $\boldsymbol{x = 2 + 4\lambda;\ \ y = -2 + 7\lambda;\ \ z = \lambda}$ *, como esto es* $\forall\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ *, tenemos* ***infinitas soluciones: SCI*** *(Sistema compatible Indeterminado)*

Por ejemplo, si $\lambda = 0 \rightarrow x = 2;\ y = -2;\ z = 0$ *es una solución del sistema, la terna de números* $(2, -2, 0)$*, en ese orden, son verifican todas las ecuaciones del sistema (x el primer número, y el segundo y z el tercero, de la terna). Para, p.e.,* $\lambda = -2 \rightarrow (-6, -16, -2)$*, también lo es y así, como valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *hay* ∞*, se pueden obtener las infinitas soluciones del mismo.*

¿Es $(2, 3, -1)$ *solución del sistema?. Si lo fuese,* $z = -1 = \lambda \rightarrow x = -2 \neq 2;\ y = -9 \neq 3$. *No,* $(2, 3, -1)$ *no es solución del sistema.*

¿Es $(32, 47, 7)$ *solución del sistema?* $\rightarrow z = 7 = \lambda \rightarrow x = 32\ \ y = 47$. *Sí lo es.*

¿¿Que deben valer m y n para que $(4, m, n)$ *sea solución del sistema? Dicho de otro modo, Si* $x = 4$ *es una de las soluciones del sistema, ¿qué vales las otras? Como* $x = 2 + 4\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{1}{/}2 \Rightarrow y = -2 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2};\ z = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.3. .

$$\begin{cases} 2x - y + 3z & = 6 \\ 4x - 2y + 6z & = 9 \\ x - y + z & = 3 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{(1*)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{(2*)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{(3*)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + z = 0 \\ 0z = -3 \end{cases}$$

1) *reorganización de ecuaciones, ponemos la tercera en primer lugar* ;

2) $2ec \to 2ec - 2\ 1ec$; $3ec \to 3e - 4\ 1ec$;

3) $3ec \to 3ec - 2\ 2ec$

Eliminadas las trivialidades (en este caso no hay), leyendo la última fila del método de Gauss: $[\,0 \quad 0 \quad 0 \ \mid \ -3\,]$, *tenemos que* $0 \cdot z = -3$; $\nexists\ z \in \mathbb{R}$, *no hay solución para* z, *ni para* y *ni para* x.

*El **sistema no tiene solución**, es un **SI** (sistema incompatible).*

2.5. Discusión de sistemas por el método de Gauss

En ocasiones se nos presentan problemas de SEL dependientes de un parámetro. Según los distintos valores que tome el parámetro el sistema puede tener o no soluciones y, en el caso de tenerlas, éstas pueden ser únicas (una para cada incógnita) o ser infinitas (dependiendo de un parámetro).

Definición 2.8. *'Discutir' un SEL en función de uno o varios parámetros es encontrar el valor de estos para los cuales el sistema es compatible y resolverlo en los casos de compatibilidad.*

Para ello usaremos el método de Gauss (hay que ir con cuidado por si hay que cambiar una ecuación por ella misma multiplicada por k *con una combinación de las demás, ¡* $k \neq 0$ *!, de lo contrario nos cargaríamos una ecuación.*

El análisis de la solución del sistema escalonado nos determinarán los valores del/los parámetro/s para que tenga solución

Como astucia para la discusión de SEL por Gauss es conveniente tomar el parámetro cuanto más tarde, mejor.

El método de Gauss no es el procedimiento más adecuado para la discusión de SEL dependientes de parámetros, para ello usaremos el 'Teorema de Rouché-Froebenius', que desarrollaremos en temas posteriores.

Ejemplo 2.4. *Discutir el siguiente sistema y resolverlo en los casos de compatibilidad.* $\begin{cases} x+y+az &= 1 \\ x+ay+z &= 1 \\ ax+y+z &= 1 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right] \to$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right] \to a^2-a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

Tenemos que distinguir tres casos: $a=1$*;* $a=-2$ *y* $a \neq 1 \ \wedge \ x \neq -2$*:*

—caso: $\boldsymbol{a \neq 1 \ \wedge \ x \neq -2} \to \boldsymbol{SCD}$*, solución única :* $\boldsymbol{x = y = z = \frac{1}{a+2}}$

Ya que $2-a-a^2 = -(a-1)(a+2) = (1-a)(a+2)$*, ambos factores distintos de cero, por ello:* $(1-a)(a+2)z = 1-a \to z = \frac{1}{a+2}$ *y resolviendo en cascada se encuentran las otras soluciones.*

— caso: $a=1$*: (particularizando)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$. *Eliminando las trivialidades:* $x+y+z=1$ *una ecuación y 3 incógnitas. Daremos valores arbitrarios (parámetros) a dos de ellas y despejamos la tercera:*

Sea $z=\lambda$; $\forall\lambda \in \mathbb{R}$; $y=\mu$; $\forall\mu \in \mathbb{R} \to x+\mu+\lambda = 1 \Rightarrow x = 1-\mu-\lambda$

En el caso $\boldsymbol{a=1}$*, soluciones:* $\boldsymbol{x = 1-\mu-\lambda;\ y=\mu;\ z=\lambda;\ \ \forall\lambda,\mu} \in \mathbb{R}$. *Abreviadamente hay quien lo escribe así:* $(1-\mu-\lambda, \mu, \lambda)$. *Tenemos un **SCI** (infinitas soluciones).*

— caso: $\boldsymbol{a=-2}$*: (particularizando)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

La tercera ecuación muestra una incompatibilidad: $0 = 3$ *ó* $0z = 3 \to \nexists z, \nexists y, \nexists x$*, tenemos un**SI**, es decir, **el sistema no tiene solución**.*

2.6. Sistemas homogéneos

Definición 2.9. *Decimos que un SEL es 'homogéneo' si todos sus términos independientes son cero.*

Teorema 2.3. *Todos los 'sistemas homogéneos son compatibles'.*

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n & = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}}$$

Demostración. Evidentemente, todo sistema homogéneo admite la solución llamada 'trivial' en que todos las incógnitas toman el valor 0. No hay más que sustituir todas las x_i por 0 en el sistema homogéneo para convencernos de que se verifican todas sus ecuaciones. Pero puede que hayan otras soluciones, además de la trivial (evidentemente) que también verifiquen el sistema, por eso el teorema asegura que todo sistema homogéneo es COMPATIBLE, pudiendo ser Determinado o Indeterminado (infinitas soluciones, entre ellas estará la trivial). Como se verá en os ejemplos siguientes eso se determina en la resolución de los mismos. □

Definición 2.10. *Llamamos 'solución trivial' de un SEL homogéneo a aquella en que el valor de todas sus incógnitas es cero:* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

Ejemplo 2.5. $\begin{cases} x + 2y - 3z & = 0 \\ x - y + z & = 0 \\ 2x - z & = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow z = 0;\ 3y - 4(0) = 0 \rightarrow y = 0;\ x + 2(0) - 3(0) = 0 \rightarrow x = 0$

Hemos obtenido la solución única $\boldsymbol{x = y = z = 0}$*, la solución trivial. Los sistemas **SCD** homogéneos solo tiene una solución por ser compatibles y siempre admiten la solución trivial por ser homogéneos: Conclusión: 'la única solución de un SCD homogéneo es la solución trivial'*

Ejemplo 2.6. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ -2x + 13y - 8z = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 12 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 13 & 8 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & -10 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \to$$

Eliminada la trivialidad, la última ecuación dice: $-15y + 10z = 0$; $z = \lambda$, $\forall\lambda \in \mathbb{R} \to y = 2\ lambda/3$; $x = \lambda/3$; *SCI*

Hemos obtenido un SCI (sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones): $\boldsymbol{x = \frac{\lambda}{3};\ y = 2\frac{\lambda}{3};\ z = \lambda\ \ \forall\lambda}\ \in \mathbb{R}$. *Pero tenemos un sistema homogéneo, entre estas soluciones también debe estar la solución trivial* $x = y = z = 0$. *En efecto, basta con tomar* $\lambda = 0$.

Ejemplo 2.7. *Discusión de un sistema homogéneo.*

$$\begin{cases} 2x - y + z & = 0 \\ x + 2y - 3z & = 0 \\ 3x - 4y - kz & = 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -k & 0 \end{array}\right] \to (*1) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -k & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & -10 & 9-k & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5-k & 0 \end{array}\right]$$

*En (*1) hemos usado la astucia de intercambiar ecuaciones, colocando la segunda en primer lugar (pivote=1).*

Última ecuación: $(-5-k)z = 0 \to$

$$\begin{cases} k \neq -5 \to \boldsymbol{z = 0 = y = x;}\ \boldsymbol{SCD} \\ k = -5 \to 0z = 0 \Rightarrow \boldsymbol{z = \lambda;\ y = 7\lambda/5;\ x = \lambda/5;\ SCI} \end{cases}$$

2.7. Ejercicios

Una ampliación del método de Gauss es el de Gauss-Jordan que consiste en que, escrito el sistema matricialmente, por debajo de la diagonal todos los elementos sean cero. Una vez conseguido esto es 'como hacer el pino' y buscar ahora que por encima de la diagonal todos los elementos sean cero. Se consigue un sistema diagonalizando en que en cada ecuación hay una sola ecuación.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss fue un matemático, astrónomo, y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos ámbitos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado ya en vida como Princeps Mathematicorum, Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia.

Gauss pronto fue reconocido como un niño prodigio, pese a provenir de una familia campesina de padres con poca cultura: su madre sabía leer, aunque no escribir; su padre sí, pero en cuanto a las matemáticas, no pasaba de la aritmética más elemental. De Carl Friedrich Gauss existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad. Hizo sus primeros grandes descubrimientos en el bachillerato, siendo a apenas un adolescente, y completó su magnum opus, Disquisitiones arithmeticae, a los veintiún años (1798), aunque se publicó en 1801. Fue un trabajo fundamental para consolidar la teoría de los números y ha moldeado esta área hasta los días presentes.

El método de Gauss para la solución de SEL es un método 'muy robusto' y es aplicable a cualquier sistema independientemente de su número de ecuaciones o incógnitas. Es por ellos que se recomienda al lector/a que siga todos los ejercicios para asegurarse que entiende bien el método. En temas posteriores veremos otros métodos de resolución (Rouché, ecuaciones matriciales), que tendrán sus ventajas e inconvenientes respecto del método de Gauss pero no son tan potentes como éste.

Empezamos una colección de ejercicios resueltos en que se intentará que muestren explícitamente todos los pasos. El/la lector/a debe asegurarse que entiende bien todos los pasos y verse capaz de enfrentarse a los problemas propuestos con solución. Recuerda que cada problema es un mundo y solo al hacer muchos de ellos verás un abanico grande de posibilidades.

Los problemas de discusión de sistemas se dejan, como se ha mencionado anteriormente, para cuando se estudie el ‘teorema de Rocuché-Frobenius’ que es una herramienta matemática más adecuada para estos menesteres.

También se incluyen, a modo de anécdota, algunos problemas de enunciado de los que hay que extraer el SEL correspondiente, resolver e interpretar la solución obtenida.

2.7.1. Ejercicios resueltos

Veamos un problema donde hay que intercambiar ecuaciones e incógnitas (avisando en este caso) para conseguir pivote ± 1. Esto no es necesario, pero es conveniente para minimizar errores.

Ejercicio resuelto 2.1. *Resuelve:* $\begin{cases} 2x+3y-4z=7 \\ 3x+5y-z=6 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases}$

Matricialmente: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & \mathbf{-1} & 6 \\ -3 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right] \to [E2 \leftrightarrow E1] \to (*)$

Intercambiamos la ecuación 2 por la 1 y, luego, cambiamos de orden las incógnitas (*), para que el coeficiente $\mathbf{-1}$ aparezca en el lugar $1,1$ de la matriz y sea más sencillo combinar las otras ecuaciones con la primera para obtener ceros por debajo del $\mathbf{-1}$. Aunque no es necesario advertir del cambio de orden de las ecuaciones, sí lo es para el cambio de las incógnitas (lo hemos hecho añadiendo una fila a la matriz) ya que, de otro modo, pensaríamos que las incógnitas van en el orden habitual x, y, z.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & \mathbf{-1} & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -3 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right] \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-1} & 3 & 5 & 6 \\ -4 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right] \end{array} \to \begin{bmatrix} E2 \to E2-4E1 \\ E3 \to E3+5E1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -10 & -17 & -17 \\ 0 & 12 & 27 & 27 \end{array}\right] \end{array} \to [E3 \to 10E3 - 17E2] \to$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & x & \boldsymbol{y} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -10 & -17 & -17 \\ 0 & 0 & 66 & 66 \end{array}\right] \end{array} \to \begin{cases} 66y = 66 \to \boldsymbol{y = 1} \\ -10x - 17 \cdot 1 = -17 \to \boldsymbol{x = 0} \\ -z + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 6 \to \boldsymbol{z = -1} \end{cases}$$

Los transformaciones de Gauss escogidas para conseguir ceros no es necesario explicitarlas pero, de momento, lo haremos para dar más claridad al proceso.

¡Atención!: la última incógnita ahora es 'y' no 'z' como hemos indicado en la primera fila de la matriz.

Despejando en cascada hemos encontrado $\boldsymbol{x = 0;\ y = 1;\ z = -1}$, solución única: **SDC**. ◇

El método de Gauss no solo se aplica a 'sistemas cuadrados', del mismo número de ecuaciones que de incógnitas si no que se puede aplicar en cualquier caso, con más ecuaciones que incógnitas o con más incógnitas que ecuaciones. En ambos casos el objetivo es el mismo, triangularizar la matriz, que por debajo de la diagonal todos los elementos sean ceros. Analizamos esto en los siguientes ejercicios resueltos.

Ejercicio resuelto 2.2. *Resuelve:* $\begin{cases} x & +2y & -5z & -t & +2u & = -3 \\ & y & -2z & +t & -4u & = 1 \\ 2x & -3y & +4z & +2t & -u & = 9 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 14 & 4 & -5 & 15 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -33 & 22 \end{array}\right] \to \begin{cases} 11t - 33u = 22;\ t - 3u = 2; u = \lambda \Rightarrow t = 2 + 3\lambda \\ y - 2z + 2 + 3\lambda - 4\lambda = 1; z = \mu \Rightarrow y = 2\mu + \lambda - 1 \\ x + 2(2\mu + \lambda - 1) - 5\mu - 2 - 3\lambda + 2\lambda = -3 \Rightarrow \\ \qquad x = \mu - \lambda + 1 \end{cases}.$$

$$\boldsymbol{u = \lambda;\ t = 2 + 3\lambda;\ z = \mu;\ y = 2\mu + \lambda - 1;\ x = \mu - \lambda + 1} \quad \forall\ \boldsymbol{\lambda\ \mu}\ \in \mathbb{R}$$

Esta vez tenemos un **SCI**, doblemente indeterminado (hemos necesitado dos parámetros). ◇

Ejercicio resuelto 2.3. *Resuelve:* $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -2x-z=-3 \\ -x+y=0 \\ -2y+4z=4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} E2 \to E2+2E1 \\ E3 \to E3+E1 \\ E4 \to E4 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right] \to$$

astucia: $[E2 \leftrightarrow E3] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right] \to$ astucia: $[E2 \to E2/3] \to$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} E3 \to E3-4E2 \\ E4 \to E4+2E2 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 42 & 4 \end{array}\right] \to$$

astucia: $[E3 \to E3/3] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 42 & 4 \end{array}\right] \to [E4 \to E4+42E3] \to$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -38 \end{array}\right] \to$ Última ecuación: $0=-38 \to$ **SI**, el sistema no tiene solución. ◇

Ejercicio resuelto 2.4. *Resuelve:* $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-y=5 \\ x-y=1 \\ x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} E2 \to E2 - 3E1 \\ E3 \to E3 - E1 \\ E4 \to E4 - E1 \\ E5 \to E5 - 2E1 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \text{astucia: } [E3 \leftrightarrow E2] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} E3 \to E3 - 5E2 \\ E4 \to E4 - 3E2 \\ E5 \to E5 - E2 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \to$$

Última ecuación (eliminadas las trivialidades): $\boldsymbol{y = 1} \Rightarrow x - 2 = 0 \to \boldsymbol{x = 2}$

Tenemos un **SCD** cuya solución única es $\boldsymbol{x = 2;\ y = 1}$, que muchos autores pueden representar como $(2, 1)$. ◇

Ejercicio resuelto 2.5. *Resuelve:* $\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ x - y + 2z = 4 \\ x + z + t = 3 \\ x + 2z + t = 1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \begin{cases} E2 \to E2 + E1 \\ E3 \to E3 + E1 \\ E4 \to E4 + E1 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to$$

Intercambiamos las ecuaciones 2 y 3: $[\ E2 \leftrightarrow E3\ ]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \begin{cases} E3 \to E3 \\ E4 \to E4 - E2 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \to$$

$[\ E4 \to E4 - E3\ ] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \to$ Última ecuación: $0 = -4$, hemos llegado a una incompatibilidad, tenemos pues un **SI** ◇

Ejercicio resuelto 2.6. *Resuelve:* $\begin{cases} 2x+3y+4z+5t=0 \\ -3x-2y+3z-2t=-2 \\ 4x+5y-2z+2t=7 \end{cases}$ *sin ningún pivotes* ± 1*.*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & 2 & 7 \end{array}\right] \to \begin{cases} E2 \to 2E2+3E1 \\ E3 \to E3-2E1 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 18 & 11 & 23 \\ 0 & -1 & -10 & -8 & -11 \end{array}\right] \to$$

$$[\ E3 \to 5E3+E2\ ] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 18 & 11 & 23 \\ 0 & 0 & 32 & 29 & 32 \end{array}\right] \to 32z+29t=32;\ \boldsymbol{t=\lambda,}\ \forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$$

$\boldsymbol{z = 1 - \frac{29}{32}\lambda}$; $\to 5y+18(1-\frac{29}{32}\lambda)+11\lambda = 23 \to \boldsymbol{y = 1 - \frac{371}{80}\lambda} \to 2x+3(1-\frac{371}{80}\lambda)+4(1-\frac{29}{32}\lambda)+5\lambda = 9 \to \boldsymbol{x = 1 - \frac{1003}{160}\lambda}$. **SCI.** ◇

Ejercicio resuelto 2.7. *Resuelve:* $\begin{cases} 5x-3y+4z=0 \\ 2x+5y-z=0 \\ -3x-2y+6z=0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right] \to E2 \leftrightarrow E1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \text{Intercambio } x \leftrightarrow z \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} E2 \to E2+4E1 \\ E3 \to E3+6E1 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 13 & 0 \\ 0 & 28 & 11 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$[E3 \to 17E3-28E2] \to \left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -183 & 0 \end{array}\right] \to -183x=0 \Rightarrow \boldsymbol{x=y=z=0}$$

SCD y homogéneo, solo tiene la solución trivial.

◇

Ejercicio resuelto 2.8. *Resuelve:* $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} E2 \to E2-2E1 \\ E3 \to E3-E1 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \to$$

$[E3 \to E3-E2] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \to$ Eliminando la trivialidad, la última ecuación dice: $-3y+5z=0 \to \boldsymbol{z=\lambda,}\ \forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R};\ \boldsymbol{y=\frac{5}{3}\lambda};\ \ x+2\frac{5}{3}\lambda-3\lambda=0 \to$ $\mathbf{x}=-\mathbf{\frac{1}{3}}\lambda$. Tenemos un **SCI**, como es homogéneos debe contener a la solución trivial. Basta, para ello, tomar $\lambda=0$. ◇

Ejercicio resuelto 2.9. *Resuelve:* $\begin{cases} x+y+z+t &=0 \\ x-2y+3z &=0 \\ 2x-y+4z+t &=0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} E2 \to E2-E1 \\ E3 \to E3-2E1 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$[E3 \to E3-E2] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \to$ última ecuación:

$-3y+2z-t=0; \boldsymbol{y=\lambda};\ \boldsymbol{z=\mu};\ \forall\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\ \in\mathbb{R} \to \boldsymbol{t=-3\lambda+2\mu} \to x+\lambda+\mu+(-3\lambda+2\mu)=0 \to \mathbf{x}=\mathbf{2}\lambda-\mathbf{3}\mu;$ *SCI*

◇

Ejercicio resuelto 2.10. *Como se comenta al principio de la sección ejercicios, el método de Gauss-Jordan es una ampliación del método de Gauss que consiste en, una vez triangularizada inferiormente la matriz asociada al SEL (ceros por debajo de la diagonal), hacerlo ahora por arriba. De este modo queda una matriz 'diagonalizada' en la que de cada fila se despeja cada incógnita.*

Resuelve, por el método de Gauss- Jordan el SEL : $\begin{cases} x+2y-z & =-2 \\ x+z & =2 \\ 2x-y+2z & =5 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \begin{cases} E2 \to E2 - E1 \\ E3 \to E3 - 2E1 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & 9 \end{array}\right] \to$$

$$[E2 \leftrightarrow E2/2] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 9 \end{array}\right] \to [E3 \leftrightarrow E3{-}5E1] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{2} & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \to$$

$$\text{Ahora, al revés: } \begin{cases} E2 \to E2 + E3 \\ E1 \to E1 - E3 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{-2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c} E3 \to \\ E3 - E2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \begin{array}{c}\text{matriz}\\ \text{diagonalizada}\end{array} \to \begin{cases} -x=-1 \to \boldsymbol{x=1} \\ -y=1 \to \boldsymbol{y=-1} \\ -z=-1 \to \boldsymbol{z=1} \end{cases} \quad \boldsymbol{SCD}$$

◇

Ejercicio resuelto 2.11. *Encuentra una solución, si es posible, del siguiente sistema en que $z=3$. ¿Existe alguna solución en que $x=2$?*

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ 5x+y-z=5 \end{cases}$$

Apliquemos el método de Gauss para resolver el sistema y encontrar todas sus soluciones y luego ya intentaremos contestar a las preguntas que nos formulan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \to$$

$2y-2z=0;\ \boldsymbol{z=\lambda},\ forall\lambda \in \mathbb{R} \to -\lambda+\lambda=1 \to \boldsymbol{x=1}$

Tenemos un **SCI**, con soluciones : $x=1;\ y=\lambda;\ z=\lambda;\quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$. Respondamos ahora a las preguntas del problema:

— Encuentra una solución, si es posible, del siguiente sistema en que $z=3 \Rightarrow$ **Sí**, ya que si $z=3=\lambda \to y=3;\ x=1$

— ¿Existe alguna solución en que $x = 2$? **No**, necesariamente, en todas las soluciones $x = 1$

◇

Ejercicio resuelto 2.12. *En ocasiones, ante la sencillez del problema, no es necesario seguir todos los pasos.*

Resuelve:

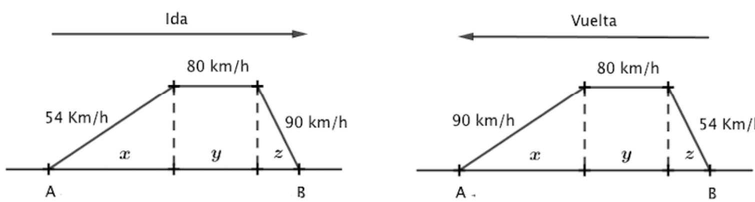
$$a)\quad \begin{cases} 2x - 3z &= 2 \\ 2x + 3y - 4z &= -1 \\ z &= 0 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} y + z &= 4 \\ x - 3y + 2z &= 7 \\ y - z &= 2 \end{cases}$$

a) En este caso, usando un poco la astucia no hace falta hacer nada (colocamos z como primera incógnita, luego x e y por último. Escribimos como primera ecuación la tercera, como segunda la primera y como tercera la segunda y ya tenemos el sistema escalonado).

Última ecuación $\boldsymbol{z = 0}$, yendo a la primera ecuación: $2x - 3 \cdot 0 = 2 \to \boldsymbol{x = 1}$ y, finalmente, acudiendo a la segunda ecuación: $2 \cdot 1 + 3y - 4 \cdot 0 = -1 \to \boldsymbol{y = -1}$, Tenemos un **SDC**.

b) Las ecuaciones uno y tres se resuelven inmediatamente sin más que sumarlas, $2y = 6 \to \boldsymbol{y = 3}$; sustituyendo en la primera, $3 + z = 4 \to \boldsymbol{z = 1}$ y, finalmente, acudiendo a la segunda ecuación: $x - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7 \to \boldsymbol{x = 14}$. Se trata de un **SCD**. ◇

Ejercicio resuelto 2.13. *Un automóvil sube las cuestas a* 54 *km/h, las baja a* 90 *km/h y en llano circula a* 80 *km/h. Para ir de A a B tarda* 2 *horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 45 minutos. ¿Cuál es la longitud de camino llano entre A y B si sabemos que la distancia entre A y B es de* 192 *km?*



Suponiendo que el vehículo viaja a v constante: $v = \frac{s}{t} \to t = \frac{s}{v}$. A la ida $t_{ida} = t_{x,s} + t_{y,n} + t_{z,b}$, a la vuelta $t_{vuelta} = t_{x,b} + t_{y,n} + t_{z,s}$, donde los subíndices x, y, z indican los tramos que circula el coche a distintas velocidades y s, n, b indican los tramos de 'subida', 'normal' y 'bajada', respectivamente.

La traducción del enunciado al leguaje algebraico conduce al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z & = 192 \\ \frac{x}{54} + \frac{y}{80} + \frac{z}{90} & = 2.5 \\ \frac{x}{90} + \frac{y}{80} + \frac{z}{94} & = 2.75 \end{cases}$$

Lo más cómodo es multiplicar las ecuaciones 2 y 3 por el mcm de los denominadores (2160, en este caso) y conseguir un sistema sin denominadores que, resolviendo por Gauss tiene por solución única (**SCD**):

$\boldsymbol{x = 31.725\ km;\ y = 94.800\ km;\ z = 65.465\ km}$, con lo que **la longitud de camino llano es de 94.8** $\boldsymbol{km}$. ◇

Ejercicio resuelto 2.14. *Un cajero automático contiene* 95 *billetes de* 10*,* 20 *y* m *euros. Se sabe que tiene almacenados* 2000 *euros y que el número de billetes de* 10 *euros es el doble que el número de billetes de* 20 *euros.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje las condiciones del problema. ¿Qué valores puede tomar m*?*

b) Resuelve el sistema para $m = 5$ *y para* $m = 50$*.*

Planteemos y resolvamos el problema y, después, contestaremos a las preguntas que se formulan.

Llamamos x al número de billetes de 10 euros, y al número de billetes de 20 euros y z al número de billetes de m euros. Con esto, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + mz = 2000 \\ x = 2y \end{cases}$$

. Sistema que hay que preparar antes de aplicar el método de Gauus pasando todas las incógnitas a la izquierda y los términos independientes a la derecha. Aprovechamos para escribir la segunda ecuación en último lugar y usar el parámetro m lo más tarde posible. Ya advertimos que para discutir sistemas veremos métodos mejores que Gauss, pero en este caso vamos a resolverlo.

$$\begin{cases} x+y+z=95 \\ x-2y=0 \\ 10x+20y+mz=2000 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & m & 2000 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} E2 \rightarrow E2 - E1 \\ E3 \rightarrow E3 - 10E1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & -3 & -1 & -95 \\ 0 & 10 & m-10 & 1050 \end{array}\right] \rightarrow [E3 \rightarrow 3E3 + 10E2] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & -3 & -1 & -95 \\ 0 & 0 & 3m-40 & 2200 \end{array}\right]$$

Última ecuación: $(3m-40)z = 2200$, el sistema es incompatible si $3m-40 = 0 \rightarrow m = 40/3 \notin \mathbb{N}$, como m hace referencia a billetes de determinada cantidad, $m \in \{5, 10, 20, 100, 200, 500\}$, luego es sistema es siempre **SCD** para los posibles valores de m.

Aunque el enunciado pide analizar los casos $m = 5$ y $m = 50$, vamos a estudiar todas las posibilidades:

— $m = 5 \rightarrow (3m-40)z = (15-40)z = 2200 \rightarrow z < 0$, no tiene sentido una cantidad de billetes negativa. No hay solución.

— $m = 10 \rightarrow (3m-40)z = (10-40)z = -10z = 2200 \rightarrow z < 0$, no tiene sentido una cantidad de billetes negativa. No hay solución.

— $m = 50 \rightarrow (3m-40)z = (150-40)z = 110z = 2200 \rightarrow z = 20;\ 3y + 20 = 95 \rightarrow y = 25;\ x + 25 + 20 = 95 \rightarrow x = 50$, la solución es **50 billetes de 1o euros, 25 de 20 euros y 20 de 50 euros.**

— $m = 100 \rightarrow (3m-40)z = (300-40)z = 260z = 2200 \rightarrow z = 8.46\cdots \notin \mathbb{N}$. No hay solución.

— $m = 200 \rightarrow (3m-40)z = (600-40)z = 560z = 2200 \rightarrow z = 3.92\cdots \notin \mathbb{N}$. No hay solución.

— $m = 500 \rightarrow (3m-40)z = (1500-40)z = 1460z = 2200 \rightarrow z = 1.50\cdots \notin \mathbb{N}$. No hay solución. ◇

Ejercicio resuelto 2.15. *Razona si los siguientes sistemas son equivalentes o no:*

$$\begin{cases} x-3y+4z &= 7 \\ 3x+2z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

¿Puedes añadir una ecuación al primer sistema para que resulte incompatible?

El segundo sistema es SCD, su única solución es $(-2, 1, 3)$, que también es solución del primer sistema. Pero éste tiene infinitas soluciones puesto que se trata de un sistema con más incógnitas que ecuaciones que admite, al menos, una solución (no es SI). El primer sistema es pues SCI, por lo que los dos sistemas **no son equivalentes**.

Para añadir una ecuación más al primer sistema y que resulte incompatible la ecuación añadida debe ser de la forma: $a(x-3y+4z)+b(3x+2z) \neq a\cdot 7+b\cdot 0$, Por ejemplo, con $a = b = 1$, si se añade la ecuación $(x - 3y + 4z) + (3x + 2z) = 1 \rightarrow \boldsymbol{4x - 3y + 6z = 1}$, tendremos un SI ◇

Ejercicio resuelto 2.16. *Considera el SEL:* $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$.

Añade, si es posible, una nueva ecuación al sistema para que resulte: a) Incompatible, b) Compatible indeterminado, c) Compatible determinado. Justifica tus respuestas.

Añadir una ecuación para que se produzca incompatibilidad consiste en añadir una contradicción, por ejemplo, si la primera ecuación da 5 y la segunda 3, la suma no puede ser nada que no sea 8. Por otra parte, añadir una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado consiste en añadir una trivialidad, algo que no aporte ninguna nueva información al sistema, por ejemplo, ecuación1 + ecuación 2 = 5+3=0. El sistema será compatible si hay solución única. Por ejemplo, dando un valor a x, de la segunda ecuación obtenemos la y y despejamos en la primera. Sería suficiente con añadir una tercera ecuación de la forma $x = k$.

— SI: $a(2x-y+z)+b(-x+2y) \neq 5a+3b \rightarrow (a = b = 1) \Rightarrow \boldsymbol{x + y + z = 5}$

— SCI: $a(2x-y+z)+b(-x+2y) = 5a+3b \rightarrow (a = b = 1) \Rightarrow \boldsymbol{x + y + z = 8}$

—SCD: $\boldsymbol{x = 1}$ ◇

Ejercicio resuelto 2.17. *Pon un ejemplo, cuando sea posible de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea: a) compatible determinado; b) compatible indeterminado; c) incompatible.*

a) Un sistema con menos ecuaciones que incógnitas jamás puede ser compatible determinado, con solo dos datos no podemos determinar tres valores (incógnitas).

b) Un ejemplo sencillo es el siguiente sistema: $\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$, de soluciones $(1, -\lambda, \lambda)$

c) Un sistema incompatible con dos ecuaciones es que entren en contradicción. por ejemplo: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ $\diamond$

2.7.2. Ejercicios propuestos

1. $a)$ $\begin{cases} 2x + 6y + 7z &= 7 \\ x + 2y - z &= -1 \\ 5x + 7y - 4z &= 9 \end{cases}$ $\quad b)$ $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ 3x + 5y + 7z &= 1 \end{cases}$

   Solución: $a)$ $(10, -3, 5)$; SCD; $b)$ SI

2. $a)$ $\begin{cases} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -y + 2z - t &= 0 \\ -z + 2t &= 5 \end{cases}$ $\quad b)$ $\begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 3x + 3y + z &= 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$

   Solución: $a)$ $(1, 2, 3, 4)$; SCD $b)$ $(1, 0, -1)$; SCD

3. $\begin{cases} x + y - 3z - u &= -3 \\ x - y + 2z - t &= -1 \\ 4x - 2y + 6z + 3t - 4u &= 3 \\ 2x + 4y - 2z + 4t - 7u &= 4 \end{cases}$

Solución: $\left(\frac{7\lambda-2\mu-7}{2}, \frac{5\lambda+2\mu-5}{2}, \mu, 3\lambda-3, \lambda\right)$

4. *a*) $\begin{cases} 3x-2y &= 5 \\ x+4y &= 4 \\ -x-2y &= -3 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x+2z &= 3 \\ x+y=2 \end{cases}$

Solución: *a*) $(2, 1/2)$; *SCD* *b*) $(\lambda, 2-\lambda, (3-\lambda)/2)$; *SCI*

5. *a*) $\begin{cases} -x+3y-z &= 4 \\ x+4y &= 5 \\ 2x-6y+2z &= 3 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x-y+z &= 3 \\ x+2y-z &= 4 \\ x-8y+5z &= -6 \end{cases}$

Solución: *a*) *SI*; *b*) $(2-\lambda/5, 1+3\lambda/5, \lambda)$; *SCI*

6. *a*) $\begin{cases} 3x-z &= 4 \\ y+3x &= 2 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x-3z &= 5 \\ 2y+5z &= 2 \end{cases}$

Solución: *a*) $\left(\frac{4+\lambda}{3}, 2-3\lambda, \lambda\right)$; *SCI* *b*) *SI*

7. *a*) $\begin{cases} -3x+y+z &= 1 \\ x-2y+z &= 4 \\ -x+y-3z &= -7 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x-y+z &= 3 \\ 3x+y-z &= -3 \\ x-3y+3z &= 9 \\ 2x+4y-4z &= -12 \end{cases}$

Solución: *a*) $(0, 1, -2)$; *SCD* *b*) $(2, \lambda-3, \lambda)$ *SCI*

8. *a*) $\begin{cases} x-y+z+t &= 0 \\ x+y+z-t &= 2 \\ x-y-z+t &= 2 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 5x-y+3z &= -6 \\ x+3y-z &= 10 \\ 2x-y+4z &= -2 \end{cases}$

Solución: *a*) $(2, 1+\lambda, -1, \lambda)$; *SCI* *b*) $(-1, 4, 1)$

9. *a*) $\begin{cases} 2x-y+z &= 5 \\ 3x+2y &= 1 \\ -x+4y-2z &= -9 \\ 6x+11y-3z &= -11 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x+2y+z+t &= 3 \\ -x+y+2t &= -1 \\ -x+7y+2z+8t &= 1 \end{cases}$

Solución: *a*) $\left(\frac{11-2\lambda}{7}, \frac{-13+3\lambda}{7}, \lambda\right)$; *SCI* *b*) *SI*

10. *a*) $\begin{cases} 3x-5y+z &= 0 \\ x-2y+z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x-y-z &= 0 \\ x+y+3z &= 0 \\ x-5y-9z &= 0 \end{cases}$

Solución: *a*) $(0, 0, 0)$ *SCD* *b*) $(-\lambda, -2\lambda, \lambda)$; *SCI*

11. *a*) $\begin{cases} x+11y-4z &= 0 \\ -2x+4y+z &= 0 \\ x+y-2z &= 0 \\ 2x-16y+5z &= 0 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x+y+5z &= 0 \\ 3x-y-2t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0 \end{cases}$

    Solución: *a*) $(0,0,0)\ SCD$ *b*) $(\lambda,-\lambda,0,2\lambda)\ SCI$

12. *a*) $\begin{cases} x-2y+3z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x-3y+2z &= 0 \\ -x+5y &= 0 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x+3z &= 0 \\ y-t &= 0 \\ x+y+2t &= 0 \\ 2x+2y+3z+9t &= 0 \end{cases}$

    Solución: *a*) $(-5\lambda,-\lambda,\lambda);\ SCI$ *b*) $(0,0,0,0)\ SCD$

13. Resuelve el sistema $\begin{cases} -x+y &= 1 \\ 3x-y &= 1 \end{cases}$

    Añade una nueva ecuación al sistema, si es posible para que sea:

    a) SCD; b) SCI; c) SI

    Solución: Solución sistema $(1,2)$; $a)x=1$; $b)No$; $c)x=3$

14. ¿El siguiente sistema es compatible o incompatible? $\begin{cases} 3x-2y+4z &= 6 \\ -2x+4y-z &= 3 \\ x+2y+3z &= 1 \end{cases}$

    ¿Se puede conseguir que sea SCI eliminando una ecuación?

    Solución: $E3=E1+E2$, pero el término indep. debería ser 9, no 1 $\rightarrow SI$. Al eliminar una ecuación quedan 2 ecuaciones con 3 incógnitas, a los sumo puede ser SCI

15. Considera el sistema $\begin{cases} 2x-2y-z &= 4 \\ x+2y-2z &= 1 \\ x-z &= 1 \end{cases}$

    a) ¿Existe una solución en que $y=0$?, encuéntrala si se da el caso.

    b) Resuelve el sistema homogéneo asociado al dado.

    Solución: *a*) $(3,0,2),\ SCD$ *b*) $(2\lambda,\lambda,2\lambda),\ SCI$

16. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir

de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

Solución: 25 g del primer lingote, 50 g del segundo y 25 g del tercero.

17. Un estado compra 540 000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27,28 y 32 dólares el barril, respectivamente. La factura total asciende a 16 346 000 dólares. Si del primer suministrador recibe el 30 % del total de petróleo comprado, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

Solución: 162000 barriles al primero, 31000 al segundo y 347000 al tercero.

18. De un número de tres cifras se sabe que la suma de estas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198; y, si se intercambian las de la unidades y decenas, el número aumenta en 36. Encuentra el número.

Solución: 715

19. Si la altura de Luis aumentase el triple de la diferencia entre la altura de Eusebio y de Pablo, Luis sería igual de alto que Pablo. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Eusebio es lo mismo que nueve veces la de Luis. Halla las tres alturas

Solución: Luís 160 cm, Eusebio 180 cm y Pablo 175 cm

20. Tres jugadores acuerdan: "Quien pierda una partida paga el doble del dinero que tengan los otros dos". Tras perder una partida cada uno, cada jugador tiene 200 euros. ¿Con cuanto dinero empieza cada jugador?

Solución: 363, 185, 52 euros, por orden de pérdida de partida

21. Tres amigos juegan tres partidas de modo que cada vez que uno pierda entregará a ls otros una cantidad de dinero igual a que cada de ellos tenga en ese momento. Cada jugador pierde una partida y, al final, acaban con 24 euros cada uno de llos. ¿Con cuánto dinero empezaron?

Solución: 39, 21, 12 euros, por orden de pérdida de partida

22. En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjunta- mente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

Solución: Moneda

23. Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

    a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

    b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuántos billetes hay de cada tipo.

    Solución: No; 80, 10 y 40 billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente.

24. Ajusta las siguientes reacciones químicas mediante la resolución de un SEL adecuado:

    $a)$ $Cl_2 + NH_3 \longrightarrow ClHN_4 + N_2$

    $b)$ $MnO_4K + NO_2K + SO_4H_2 \longrightarrow SO_4K_2 + SO_4Mn + NO_3K + H_2O$

    $c)$ $NO_3H + Fe \longrightarrow (NO_3)_3Fe + NO_3NH_4 + H_2O$

    Ayuda: $a\,Cl_2 + b\,NH_3 \longrightarrow c\,ClHN_4 + d\,N_2$, y cuenta átomos.

    Solución: los coeficientes de cada reacción son:
    a) 3, 8, 6, 1; b) 2, 5, 3, 1, 2, 5, 3; c) 30, 8, 8, 3, 9

2.8. Resumen

Resumen: SEL – Método de Gaus:

SEL: $$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

En la representación matricial de un SEL está permitido (da lugar a otra ecuación equivalente):

* multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.

* Sustituir una ecuación por ella misma más otra multiplicada por un número.

El objetivo es conseguir un sistema escalonado: los elementos situados por debajo de la diagonal (elementos de la forma a_{ii}) han de ser cero.

Sea S un sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas tal que al aplicarle el método de Gauss, una vez suprimidas las ecuaciones de la forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ (trivialidades) , resulta un sistema escalonado S_e de r-ecuaciones con n-incógnitas.

Si al resolver alguna ecuación del sistema escalonado se llega a una que tenga más de una incógnita (los valores ya resueltos son conocidos y no se consideran incógnitas), se elige una de esta incógnitas y se despeja en función del resto de incógnitas a las que, previamente, se habrá 'parametrizado' dándoles valores arbitrarios (para ello usamos letras griegas $(\lambda, \mu, \cdots)$ y se continua el procedimiento de resolución en cascada de Gauss hasta despejar la primera incógnita.

— Si se llega a una contradicción: SI

— Si se ha introducido algún parámetro: SCI

— Si se ha obtenido una única solución para cada incógnita: SCD

Sistemas Homogéneos: todos los términos independientes son cero.

— Son siempre Compatibles.

— Siempre admiten la solución trivial: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Capítulo 3

Matrices

3.1. Matrices: definición, tipo o dimensión e igualdad

En adelante, $\mathbb{K}$ será uno de los cuerpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; m y n representarán números naturales:

Definición 3.1. *Una 'matriz' es un tablero rectangular que contendrá elementos del cuerpo $\mathbb{K}$. La matriz será una colección de filas y columnas de números (aunque podían ser vectores, funciones, etc).*

Definición 3.2. *Se llama 'dimensión' o 'tipo' de una matriz al 'número (indicado, no multiplicado) de filas' por 'número de columnas', así, una matriz de tipo $m \times n$, que representaremos por letras mayúsculas A, p.e., será un tablero rectangular que contendrá m-filas y n-columnas de números (que representaremos por letras minúsculas a_{ij}, haciendo referencia el primer índice i a la fila que ocupa el elemento y el segundo índice j a la columna en que está).*

Matriz $\boldsymbol{A_{m\ x\ n}}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \begin{cases} 0 \le i \le m; \\ 0 \le j \le n \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{(num.\ filas)} \times \boldsymbol{(num.\ columnas)}}$$

Los elementos $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ forman la 'fila i-ésima'

Los elementos $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ forman la 'columna j-ésima'

Por ejemplo: fila-2 $(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$; columna 3 $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix}$.

De este modo puede considerar a A como una matriz de m-filas o de n-columnas: $A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = (\ c_1, c_2, \cdots, c_n\ )$

Definición 3.3. *Igualdad de matrices.*

Dos matrices son iguales si, siendo del mismo tipo, tienen los mismos elementos en las misma posiciones:

$$(a_{ij})_{\substack{1 \le 1 \le m \\ 1 \le i \le n}} = (b_{ij})_{\substack{1 \le 1 \le m \\ 1 \le i \le n}} \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij};\ \forall i, j$$

En lo sucesivo llamaremos $\boldsymbol{\mathcal{M}_{m\times n}}(\mathbb{K})$ al conjunto de todas las matrices de tipo $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Y, en general, mientras no se diga lo contrario, consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hablaremos de matrices de números reales.

3.1.1. Matriz traspuesta

Definición 3.4. *Dada $A_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama 'matriz traspuesta' de A y se denota por A^T a la matriz que resulta de 'cambiar en A las filas por las columnas' (o viceversa), es decir:*

$$A^T_{n\times m} = (A_{m\times n})^T \; : \; si \quad \boxed{A = (a_{ij}) \to A^T = (a_{ji})}$$

Ejemplo 3.1. $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to A^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$B_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to B^T_{1\times 4} = (\ 1, 2, 3, 4\ ) \; ; \qquad C_{1\times 3} = (\ x, y, z\ ) \to C^T_{3\times 1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Proposición 3.1. *Propiedad de la matriz traspuesta*

$$A_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \boxed{\boldsymbol{(A^T)^T = A}}$$

Demostración. .

Evidentemente: $A = (a_{ij}) \to A^T = (a_{ji}) \Rightarrow (A^T)^T = (a_{ij}) = A$ □

3.2. Matrices especiales

Definición 3.5. *'Matriz Cuadrada': son matrices del tipo $n \times n$, es decir, que tienen el 'mismo número de filas que de columnas'.*

Los elementos de la forma a_{ii} se llaman 'elementos diagonales' y a la línea en que están situados se le llama 'diagonal principal'.

Definición 3.6. *'Matriz Diagonal' es una matriz cuadrada en la que los elementos que no están en la diagonal principal valen todos cero: $a_{ij} = 0, \; \forall i \neq j$*

Definición 3.7. *'Matriz Identidad o Unidad', es una matriz diagonal con los elementos de la diagonal ppal. iguales a uno. $a_{ii} = 1; \; a_{ij} = 0, \; \forall i \neq j$*

A las matrices cuadradas del tipo $A_{n\times n}$ se les suele llamar matrices cuadradas de orden-n.

Ejemplo 3.2. .

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ -2 & \boxed{0} & 1 \\ 4 & -3 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C es una matriz cuadrada, D es una matriz diagonal y I es la matriz identidad, todas de orden 3. En la matriz C hemos destacado en cuadros los elementos de la diagonal principal.

Definición 3.8. *'Matriz Triangular', es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima (triangular inferior) de la diagonal principal son cero ($a_{ij} = 0$; $\forall i < j$). Análogamente se define la matriz triangular superior como aquella en que los elementos por debajo la de diagonal principal son cero ($a_{ij} = 0$; $\forall i > j$)*

Ejemplo 3.3. .

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{-4} & 0 \\ -1 & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$

M es una matriz triangular inferior y N una matriz triangular superior (¿no recuerda al método de Gauss?)

Definición 3.9. *'Matrices Simétricas y Antisimétricas (o Hemisimétricas)'.*

S es una 'matriz simétrica' si es una matriz cuadrada que cumple $S^T = S$, es decir $s_{ij} = s_{ji}$, $\forall i, j$

H es una 'matriz antisimétrica o hemisimétrica' si es una matriz cuadrada tal que $H^T = -H$, es decir, $h_{ij} = -h_{ji}$, $\forall i, j$. Necesariamente ha de ocurrir que $h_{ii} = 0$, $\forall i$.

Ejemplo 3.4. $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 3.10. *'Matriz Nula' es cualquier matriz, no necesariamente cuadrada, tal que todos sus elementos son cero.*

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *son matrices nulas.*

Definición 3.11. *Otras matrices especiales* ⋇

A es una matriz 'involutiva' si $A^2 = A \cdot A = I$

Matriz 'idempotente', si $A^2 = A$

Matriz 'nihilpotente de orden k', si $A^k = 0$, con $A^{k-1} \neq 0$

3.3. Operaciones con matrices

3.3.1. Producto de una matriz por un escalar (número real)

Definición 3.12. *Sea $k \in \mathbb{R}$ y $A_{m\times n} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, se define el 'producto de un número real k por una matriz A como aquella matriz del mismo tipo que A en que cada uno de sus elementos está multiplicado por el número k: $k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$, más explícitamente:*

$$\boxed{k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 3.5. $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & -15 \end{pmatrix}$

Proposición 3.2. *Propiedades del producto de una matriz por un escalar.*

1. *$k \cdot A$ es una operación externa de $\mathbb{R}$ sobre $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (el producto de un número por una matriz es una matriz).*
2. *"asociativa": $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$*
3. *"distributiva-1": $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$*
4. *"distributiva-2": $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$*
5. *"elemeto unidad" $1 \cdot A = A$*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R};\ \forall A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

Demostración. La demostración es trivial basándose en la definición. □

3.3.2. Suma de matrices

Definición 3.13. *Sean $A_{m\times n} = (a_{ij})$; $B_{m\times n} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, dos matrices* ***del mismo tipo o dimensión****, llamamos matriz suma a una matriz, del mismo tipo que las anteriores, en que cada elemento se obtiene sumando los respectivos elementos de las matrices A y B, es decir:*

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$, *más explícitamente:*

$$A + B = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}} = A + B$$

'Solo se pueden sumar matrices del mismo tipo o dimensión'

Ejemplo 3.6. $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Proposición 3.3. *Propiedades de la suma de matrices*

1. *$+$ es una operación interna en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (la suma de matrices $m \times n$ es una matriz $m \times n$).*
2. *asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$*
3. *conmutativa: $A + B = B + A$*
4. *matriz nula (neutro) : $A + 0 = A$*
5. *matriz opuesta: $A + (-A) = 0 \to (-A) = (-1) \cdot A = -A$*

$\forall A, B, C \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$; $0 = 0_{m\times n}$ *es la matriz nula.*

⋇ $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración. La demostración es trivial basándose en la definición. □

3.3.3. Producto de matrices

Definición 3.14. *'Producto de una matriz fila (de n-elementos) por una matriz columna (de n-elementos)'.*

$A_{1\times\cancel{n}} \cdot B_{\cancel{n}\times 1} = P_{1\times 1}$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\ )} \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.7. .

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}_{1\times\mathbf{4}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathbf{3}\times 1}$$ *, no tiene sentido, en cambio:*

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}_{1\times\cancel{4}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\cancel{4}\times 1} = (\ 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + 4\cdot 5\ ) =$$

$$= (\ -1 + 0 + 6 + 20\ ) = (\ 25\ )_{1\times 1}$$

Definición 3.15. *'Producto de una matriz $m\times \boldsymbol{p}$ por una matriz $\boldsymbol{p}\times n$'*

$A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}$, *el resultado es una matriz P, de dimensión $(\boldsymbol{m}\times\cancel{p})\cdot(\cancel{p}\times\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})$, en que cada elemento p_{ij} de la matriz producto P se obtiene como producto de la fila-i de la matriz A por la columna-j de la matriz B.*

$$\boxed{A_{m\times p}\cdot B_{p\times n} = P_{m\times n}\ /\ p_{ij} = f_i(A)\cdot c_j(B)} = (\circledast)\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

De otro modo, si $A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(A) \\ \vdots \\ f_m(A) \end{pmatrix}$ *y*

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{\vdots} & \ddots & \vdots \\ \boxed{b_{p1}} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(A), & \cdots, & c_n(B) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

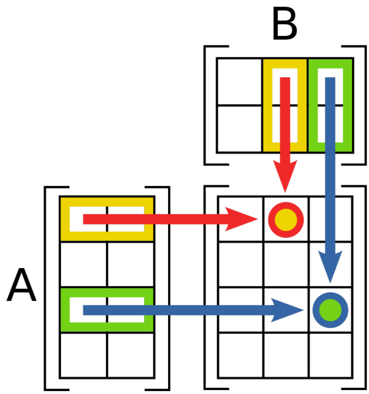


Figura 3.1: Productos de matrices *(fuente: Wikipedia)*

$$A \cdot B = P = \begin{pmatrix} \boxed{f_1(A)\, c_1(B)} & \cdots & f_1(A)\, c_n(B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(A)\, c_n(B) & \cdots & f_m(A)\, c_n(B)\, c \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.8. .

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible:

$A \cdot B;\ A \cdot C;\ B \cdot A;\ B \cdot C;\ C \cdot A;\ C \cdot B;\ A \cdot A;\ B \cdot B;\ C \cdot C$

$$A_{3x2} \cdot B_{2x4} = AB_{3x4} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ \boxed{3} & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 4 & -1 & 1 \\ -6 & -6 & 2 & -4 \\ 15 & 15 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{3x2} \cdot C_{2x2} = AC_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{-2} \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 3 & \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -6 & \boxed{8} \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

$\nexists B_{4x2} \cdot A_{3x2}; \quad \nexists B_{4x2} \cdot C_{2x2}; \quad \nexists C_{2x2} \cdot A_{3x2}$

$$C_{2x2} \cdot B_{2x4} = CB_{2x4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} & -1 \\ 3 & 3 & \boxed{-1} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -2 & 3 \\ 15 & 15 & \boxed{-4} & 5 \end{pmatrix}$$

$\nexists A_{3x2} \cdot A_{3x2}; \quad \nexists B_{2x4} \cdot B_{2x4}$

$$C_{2x2} \cdot C_{2x2} = C^2_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 3 & \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & \boxed{22} \end{pmatrix}$$

En este último caso hemos destacado el elemento $2,2$ de C^2 como proveniente de multiplicar la fila 2 de C por la columna 2 de C. En los otros casos hemos destacados otros elementos a fin de aclarar el producto de matrices.

Asegúrese el/la lector/a de que sabe multiplicar matrices antes de continuar.

Proposición 3.4. *Propiedades del producto de matrices*

1. *El producto de matrices es asociativo:* $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. *¡El producto de matrices es **no conmutativo**!:* $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

   $A \cdot B$ puede existir y $B \cdot A$ no. Incluso si existen ambos productos, no tiene por que coincidir. Piénsese en las matrices: X_{3x1}; Y_{1x3}; Z_{3x3}. En que $\exists (ZX)_{3x1}$ pero $\nexists XZ$. Incluso en el caso en que existan ambas, $(XY)_{3x3} \neq (YX)_{1x1}$

   *Es por ello muy **importante el orden en que se multiplican las matrices**, llegando a hablar de la matriz que 'premultiplica o va delante' y la matriz que 'postmultiplica o va detrás'.*

3. *Distributivas:* $\begin{cases} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{cases}$

   ¡OJO al orden en que se multiplican las matrices!

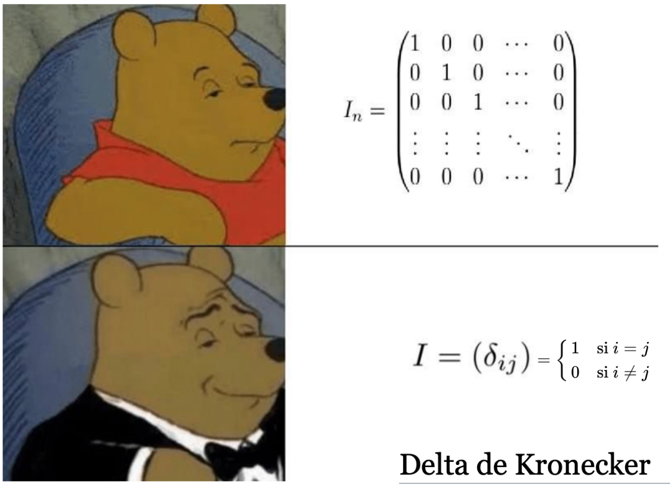
4. *Neutro: Matriz Identidad* $I_{p\times p} = (i_{kl}) \begin{cases} 1 \;\; si\; k = l \\ 0 \;\; si\; k \neq l \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{p\times p}$.

   $\forall A_{m\times n},\; In \times n \therefore\; A \cdot I = A \quad \wedge \quad \forall A_{m\times n},\; Im \times m \therefore\; I \cdot A = A$

5. *Inversa: esta propiedad, debido a su relevancia, se estudiará en el siguiente apartado.*

   $\divideontimes$ $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *tiene estructura de anillo conmutativo.*

Demostración. La demostración excede de los objetivos del presente texto, por lo que se verá una 'comprobación' de las propiedades enunciadas en el teorema en el apartado de ejercicios. □



Corolario 3.1. *Debido a la 'no-conmutatividad' del producto de matrices no se cumplen las llamada identidades notables:*

$$(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2 \quad \wedge \quad (A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$$

Demostración. Efectivamente: $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, puesto que $AB \neq BA$. Lo mismo ocurre con el cuadrado de la resta.

Del mismo modo: $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$, puesto que $AB \neq BA$. □

3.3.4. Potencias de matrices cuadradas

Definición 3.16. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n \to A^2 = A_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = A^2_{n\times n}$

$$A^3 = \begin{cases} A^2 \cdot A = (A \cdot A) \cdot A \\ A \cdot A^2 = A \cdot (A \cdot A) \end{cases}$$

Evidentemente, las sucesivas potencias de una matriz cuadrada conmutan, es decir, podemos calcular $A^8 = A^5 \cdot A^3$ *o* $A^3 \cdot A^5$.

Así, en general, podríamos definir ('por inducción' - ver apéndice C) $A^n = \overbrace{A \cdot A \cdots \cdot A}^{n \text{ veces}}$.

Ejemplo 3.9. *Calcula las potencias enésimas de:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to M^2 = MM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realmente, hemos obtenido una 'conjetura'. Ahora deberíamos someterla a la prueba del 'método de inducción completa'.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to N^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N^n = \begin{pmatrix} 1 & n/5 & n/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De nuevo, este resultado solo es una conjetura.

3.3.5. Matriz Inversa

Definición 3.17. *Dada* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *una matriz cuadrada, puede que exista otra matriz cuadraba* $B_{n\times n}$ *de modo que:*

$$A_{n\times n} \cdot B_{n\times n} = B_{n\times x} \cdot A_{n\times n} = I_n, \text{ con } I_n = I_{n\times n}, \text{ la identidad de orden } n.$$

Si esto ocurre, si $\exists B$, *decimos que* B *es la inversa de* A *y la representamos por* A^{-1}, *es decir:*

Matriz inversa

$\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\therefore$

$$\boxed{A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I},$$

decimos que A es 'invertible o regular' y que A^{-1} es su matriz inversa.

Observaciones:

Para tener matriz inversa, la matriz de partida ha de ser cuadrada. Pero no todas las matrices cuadradas tienen inversa. Cuando una matriz cuadrada no tiene inversa de dice que es una 'matriz singular o no invertible'.

Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ es singular, pues no existe ninguna matriz $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I$ (*Compruébese resolviendo el SEL*)

En el próximo capítulo, 'Determinantes', veremos un teorema que asegura cuando una matriz cuadrada tiene o no inversa.

3.3.6. Propiedades interesantes de las operaciones con matrices

Lema 3.1. $(A+B)^T = A^T + B^T$ *La traspuesta de la suma de matrices es la suma de matrices traspuestas.*

Demostración. Sea $A_{m\times n} = (a_{ij})$; $B_{m\times n} = (b_{ij}) \to A^T = (a_{ji}) \wedge B^T = (b_{ji})$

Como $A+B = (a_{ij}+b_{ij}) \to (A+B)^T = (a_{ji}+b_{ji}) = (a_{ji})+(b_{ji}) = B^T+A^T$

□

Teorema 3.1. ⋇ *Toda matriz cuadrada M se puede descomponer como suma de dos matrices cuadradas S y H, una de ellas simétrica y la otra antisimétrica.*

Demostración. Basta con considerar $S = \frac{1}{2}(M+M^T)$ y $H = \frac{1}{2}(M-M^T)$

En efecto, $S+T = \frac{1}{2}[(M+M^T)+(M-M^T)] = \frac{1}{2}2M = M$

Además, $S^T = \frac{1}{2}(M + M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$ Simétrica.

Y, $H^T = \frac{1}{2}(M - M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -\frac{1}{2}(M - M^T) = -H$, Antisimétrica.

Hemos usado para demostración la proposición 3.1 ($(A^T)^T = A$)) y el lema anterior 3.1. □

Teorema 3.2. ⋇ *La traspuesta del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de las matrices transpuestas, pero con el orden de multiplicación invertido.* $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Demostración. La demostración es más complicada en este caso, así que, para mayor claridad en la exposición, nos contentaremos con una 'comprobación' para un caso particular, que no es ninguna demostración pero será suficiente para los objetivos de este libro.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -5 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -5 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Destacar que está curiosa propiedad (se alterna el orden) ya vimos que se cumplía con una operación no-conmutativa como la composición de funciones y el cálculo de la función inversa: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

□

Teorema 3.3. ⋇ *La inversa del producto de dos matrices es igual al producto de las matrices inversas, pero con el orden de multiplicación invertido.* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Demostración. De modo análogo al teorema anterior, la demostración excede a los objetivos de este curso y solo haremos una mera comprobación que veremos en el apartado de ejercicios, después de aprender a calcular matrices inversas por el método de Gauss.

De nuevo se cumple la curiosa propiedad antes comentada.

□

Teorema 3.4. $(A^{-1})^{-1} = A \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Demostración. El mismo comentario que en el teorema anterior, veremos 'comprobaciones' en ls ejercicios. □

3.4. Método de Gauss para el cálculo de A^{-1}

Supongamos que la matriz tiene inversa $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

El método de Gauss-Jordan consiste, esquemáticamente en colocar en la misma matriz a A, una barra separadora y detrás a la matriz I. Conseguir, mediante transformaciones de Gauss que primero por debajo de la diagonal principal y después por arriba de ésta, todos los elementos que habían en A sean ceros, diagonalizar la matriz A mediante transformaciones de Gauss. Luego, dividiendo cada fila por la cantidad correspondiente, obtener, donde estaba A, que esté la matriz Identidad I. Si ello ha sido posible, la matriz que haya quedado detrás de la barra inicial será la matriz inversa A^{-1}.

Lo que no está permitido ahora /en SEL sí lo estaba) es cambiar de posición ni filas ni columnas.

El método de Gauss permite obtener A^{-1} si ello es posible, si no lo es se llega a un paso a partir del cual no se puede continuar el proceso, por ello, no es éste el mejor método para el cálculo de inversas pero no podremos usar un método mejor (por 'adjuntos') hasta que desarrollemos el siguiente tema de determinantes.

$$\boxed{[\ A \mid I\ ] \ \rightarrow \ \text{transf. Gauss} \ \rightarrow \ [\ I \mid \boldsymbol{A^{-1}}\ ]}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \end{array}\right]$$

Si se ha conseguido escribir delante la matriz I, la matriz que figura detrás (*) será la inversa de A, A^{-1}

Ejemplo 3.10. *Calcula, si es posible, las siguientes matrices inversas:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

— *Inversa de A:*

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow (\ F2 \rightarrow 2F2 - F1\ ) \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow (\ F1 \rightarrow 2F1 + F2\ ) \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} F1 \rightarrow F1/8 \\ F2 \rightarrow F2/4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array}\right] \text{ *Como delante está } I \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Comprobémoslo: $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = I$$

Luego, efectivamente, la inversa de A es: $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

— *Inversa de B:*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} F2 \rightarrow F2 + 2F1 \\ F3 \rightarrow F3 - 3F1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$(\ F3 \rightarrow F3 - F2\ ) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} F1 \rightarrow 8F1 - F3 \\ F2 \rightarrow 16F2 + 7F3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & 0 & -13 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 16 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right] * (F1 \rightarrow 2F1) * \left[\begin{array}{ccc|ccc} 16 & 0 & 0 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 16 & 0 & -13 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 16 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como delante, previo a dividir por 16 *cada una de las filas, aparecerá la matriz identidad, la matriz de atrás es la inversa de B:*

$$B^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -13 & 9 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Compruébese que realmente se trata de la inversa de B*, calculando:* $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$

— *Inversa de C:*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow (F2 \rightarrow 2F2 - F1) \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & \boxed{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Es imposible combinar la $F1$ *con la* $F2$ *para conseguir que* $c_{12} = 0 \rightarrow\ \nexists\, C^{-1}$.

3.5. Aplicaciones de las matrices

Aplicaciones de las matrices

Una vez que ya conocemos a fondo las matrices, puesto que hemos visto los distintos tipos que hay y las operaciones que podemos realizar con ellas. Vamos a ver sus aplicaciones, ya que las matrices son una herramienta muy útil no sólo en el campo de las matemáticas y la física como era de esperar; sino también en el campo de las ciencias sociales, por ejemplo en economía y en geografía. Esta gran utilidad se debe a que las matrices aportan un nuevo lenguaje facilitando el trabajo en una gran cantidad de ámbitos.

Empezaremos en primer lugar con las aplicaciones en **Matemáticas**, donde vamos a distinguir las aplicaciones en las distintas ramas:

— Álgebra lineal:

1. En esta rama destaca la utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones de la forma AX = B, mediante el cálculo de la matriz inversa (siguiente tema $X = A^{-1} \cdot B$).

2. Estudio de las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales mediante la matriz asociada, que nos permite calcular el núcleo y la imagen (temas siguientes de ampliación de conocimientos ⋇).

—Análisis:

⋇ En la rama del análisis se utilizan las matrices jacobianas, que se usan para expresar las derivadas parciales de una función en varias variables. Si f(x,y,z) está definida de la siguiente forma:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

— Probabilidad:

Cadenas de Markov: un tipo especial de proceso estocástico discreto en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior.

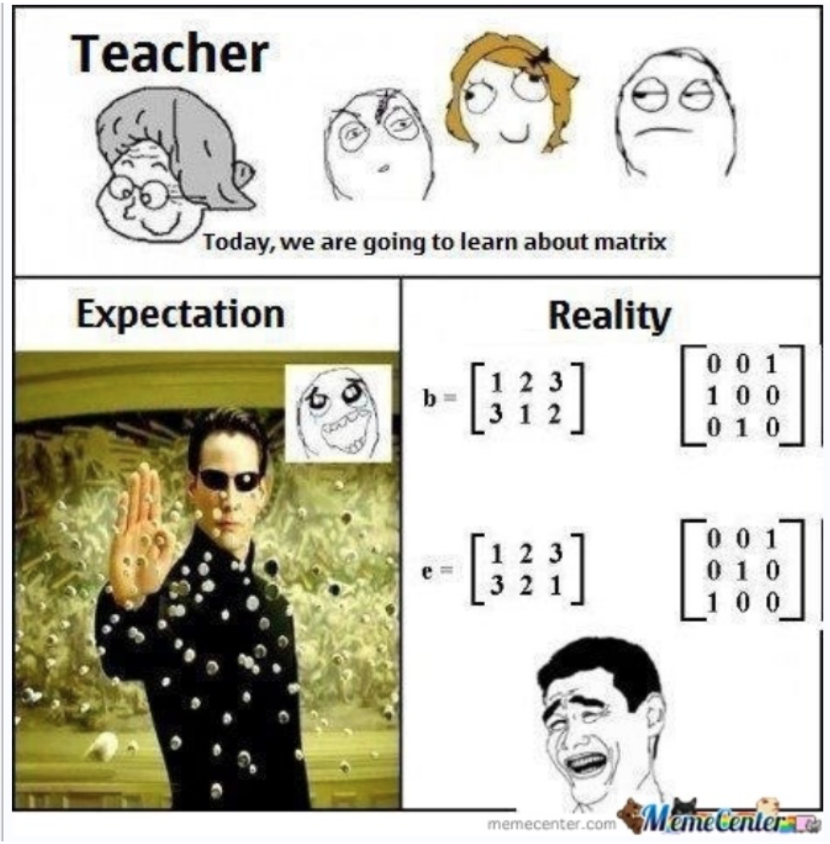
— En teoría de grafos las matrices son de gran utilidad y tienen aplicaciones en diversas ramas del conocimiento humano (demografía, sociología, etc.)

Continuamos con las aplicaciones en la **Física**. (Relatividad Especial ⋇) La aplicación más importante en este campo son las transformaciones

de Lorentz, que dan las ecuaciones del movimiento de un punto en línea recta y sobre el plano conocida la velocidad de la luz.
Por ejemplo: suponiendo que el punto se desplaza sobre el eje OX y que estamos en un espacio tetradimensional, donde la cuarta dimensión es el tiempo, entonces, el punto tendrá como coordenadas iniciales (x, y, z, t) y como finales (x', y', z', t'). Las ecuaciones que dan esta transformación son:

$$\begin{pmatrix} x', & t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} & \dfrac{-v}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \\ \dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}; \quad y' = y;\ z' = z$$

Donde c representa la velocidad de la luz.
Una vez que ya hemos visto algunas de las aplicaciones más importantes en Ciencias, vamos a ver la importancia que tienen en las **Ciencias Sociales**, como la **Economía.**
Las matrices se utilizan para la presentación de datos de un problema en forma de tabla de doble entrada. Un ejemplo de esto es el modelo Input-Output, que permite solucionar problemas macroeconómicos (matriz de Leontiev), algunos de los cuáles son: orientar o estructurar los sectores productivos, poder predecir las demandas de producción, interpretar las relaciones económicas existentes entre los distintos sectores de producción.
Si continuamos por la Geografía, también aparecen cuando hay tablas de doble entrada, por ejemplo, para hacer referencia a la distancia que hay entre varias ciudades. En comunicaciones aéreas, para ver las distintas formas de interconectar vuelos entre diferentes paises. Etc.



3.6. Ejercicios

3.6.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 3.1. *Escribe una matriz cuadrada de orden 3 cuyos elementos cumplan:* $\begin{cases} 2j-i & \text{si } i \leq j \\ (-1)^{i+j} & \text{si } i > j \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -a & 3 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 3.2. *Considera las matrices:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula: $a)\ M+N \quad b)\ \frac{2}{5}N; \quad c)\ -M; \quad d)\ \frac{1}{2}M-3N$

$e)\ 2M-3P^T; \quad f)\ 3(N^T+P)-M^T \quad g)\ MP \neq PM$

$h)(MN^T)P^T = M(N^TP^T); \quad i)\ P(M+N) = PM+PN$

$j)\ (MP)^T = P^TM^T; \quad i)\ MI = M \ y \ IM = M$

— a) $M+N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

— b) $\frac{2}{5}N = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 & -2/5 & 0 \\ 2/5 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

— c) $-M = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

— d) $\frac{1}{2}M - 2N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/2 & 5/2 & 1 \\ -4 & -6 & -3/2 \end{pmatrix}$

— e) $2M - 3P^T = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -11 & 10 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

— f) $3(N^T+P) - M^T = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 01 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$

$$3\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 6 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 7 & 9 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

— g) $MP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

$$PM = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \neq MP$$

— h) $(MN^T)P^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 8 \\ -13 & -17 & -12 \end{pmatrix}$$

$$M(N^TP^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 6 \\ -4 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 8 \\ -13 & -17 & -12 \end{pmatrix} = (MN^T)P^T$$

— i) $P(M+N) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 \\ 11 & -4 & 10 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PM + PN = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ 11 & -4 & 10 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix} = P(M+N).$$

— j) $M_{2\times 3} \cdot I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = M$

$I_{2\times 2} \cdot M_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = M$

◇

Ejercicio resuelto 3.3. .

Sean $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 19 & 2 \end{pmatrix}$. *Calcula:*

a) AB; *b)* $B^T A^T$; *c)* $(AB)^T$; *d)* $(A+I)^2$; *e)* $(A-C)^2$; *f)* $A^2 - 2AC + C^2$.

— a) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 4 & 4 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$

— b) y c) $B^T A^T = (AB)^T = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 20 \\ 11 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

— d) $(A+I)^2 \to (A+I) = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 08 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 18 & 2 \end{pmatrix}$

$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 18 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 & 31 & 13 \\ 16 & 27 & 8 \\ 30 & 91 & 23 \end{pmatrix}$

— e) $(A-C)^2 \to A - C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 19 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$(A-C)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

— f) $A^2 - 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 19 & 2 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 19 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 19 & 2 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 13 & -5 \\ 10 & 20 & 2 \\ -6 & 4 & -14 \end{pmatrix} \neq (A - C)^2$

◇

Ejercicio resuelto 3.4. *Realiza todos los productos posibles.*

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad NM = (-3) \qquad \nexists MP$$

$$PM = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad NP = (5 \quad -2 \quad 4 \quad 2) \qquad \nexists PN$$

◇

Ejercicio resuelto 3.5. *Considera* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. *Descompón* A *como suma de dos matrices, una* S *simétrica y una* H *antisimétrica.*

.

$$S = \tfrac{1}{2}(A + A^t) = \tfrac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \right] = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} =$$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ Con $S^T = S$, simétrica.

$$H = \tfrac{1}{2}(A - A^t) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $H^T = -H$, antisimétrica.

$$S + H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 3.6. *Calcula a, b y c en la expresión:*

$$3\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2c \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

Operando: $\cdots \begin{pmatrix} 9 & 3b \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 4a-5 & 3c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 9 & = 9 \\ 3b & = -9 \\ 3 & = 4a - 5 \\ -3 & = 3c \end{cases}$

Identificando elementos de las matrices: $\boldsymbol{a = 2;\ b = -3;\ c = -1}$ $\diamond$

Ejercicio resuelto 3.7. *Calcula el valor de a y b para que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ conmuten.*

.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & a+2b \\ 5 & 2a+b \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+a \\ 3+2b & 6+b \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} 7 & = 1 + 2a \\ a + 2b & = 2 + a \\ 5 & = 3 + 2b \\ 2a + b & = 6 + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de Gauss (no es necesario, pero hay que comprobar que las soluciones verifican todas las ecuaciones), se obtiene: $\boldsymbol{a = 3;\ b = 1}$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 3.8. .

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *comprueba que* $(A^2 - 5I)^2 = 16\ I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - 5I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16\ I \qquad \diamond$$

Ejercicio resuelto 3.9. *Con* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, *calcula* $M^{102} - M^{100}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Conjeturamos: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$

Prueba por inducción (Ver apéndice C:

1) Es cierto para $n = 1 \rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

2) Supuesto cierto para n, entones para $n{+}1$ debería ocurrir que: $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n+1) & 1 \end{pmatrix}$,

pero $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n+2 & 1 \end{pmatrix}$, sí se cumple.

Queda probado, por inducción, que: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Luego} \quad A^{102} - A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 204 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 200 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

◇

Ejercicio resuelto 3.10. *Calcula M^n, para* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\text{Conjeturamos:} \quad M^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Para que la conjetura se convierta en una demostración habría que usar el método de inducción (excede los objetivos de un curso de segundo de bachillerato - ver apéndice C). ◇

Ejercicio resuelto 3.11. *Sean:* $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Comprueba que una es la inversa de la otra.

Calcula M^{-1}, N^{-1} , comprueba que: $(M^{-1})^{-1} = M$; $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$; $(N^T)^{-1} = (N^{-1})^T$

Si M es la inversa de $N \to M \cdot N = I$; $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

También $N \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Una matriz es la inversa de la otra, es decir: $M^{-1} = N \ \wedge \ N^{-1} = M$

Como N es la inversa de $M \to (M^{-1})^{-1} = (N)^{-1}$, pero por lo dicho anteriormente, $(M^{-1})^{-1} = (N)^{-1} = M$, luego: $(M^{-1})^{-1} = M$

Para comprobar $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$, haremos uso de que una matriz es la inversa de la otra. Empezando por el segundo miembro,

$N^{-1} \cdot M^{-1} = M \cdot N = M \cdot M^{-1} = I$

En el primer miembro tenemos, $(M \cdot N)^{-1} \to$. Calculemos, previamente, $M \cdot N = M \cdot M^{-1} = I$, por lo que $(M \cdot N)^{-1} = I^{-1}$, que evidentemente es I

$I^{-1} = I$, ya que $I^{-1} \cdot I = I^{-1}$ y también, $I \cdot I^{-1} = I$, al ser I el neutro del producto de matrices.

En la última comprobación sí hemos de hacer cálculos: $(N^T)^{-1} = (N^{-1})^T$

* Cálculo de $(N^T)^{-1} \to N^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = N$, N es simétrica. Luego $(N^T)^{-1} = N^{-1} = M$

* Cálculo de $(N^{-1})^T = M^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = M$, M también es simétrica.

Como hemos llegado al mismo resultado, efectivamente se cumple que: $(N^T)^{-1} = (N^{-1})^T$

◇

Ejercicio resuelto 3.12. .

Calcula las inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

— Inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \to [\ F2 \to F2 - 5F1\ ] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= [\ F1 \to F1 - F2\ ] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

— Inversa de B: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{cases} F2 \to 2F3 - 3F1 \\ F3 \to 2F3 - F2 \end{cases} =$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to [\ F3 \to F3 - F2] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \to *\ [\ F3 \to F3/2\ ]\ * \ =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{cases} F1 \to F1 - F3 \\ F2 \to F2 + F3 \end{cases} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to [\ F1 \to F1 - F2\ ] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to [\ F1 \to F1/2\ ] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 3.13. *Calcula la inversa de* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Con mucha astucia ...

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to [\, F1 \to F1 - F2 \,] \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to [\, F2 \to F2 - F3 \,] \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to [\, F3 \to F3 - F4 \,] \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to [\, F4 \to F4 - F5 \,] \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◇

Ejercicio resuelto 3.14. *¿Que valor debe tener a para que la matriz* $A = \begin{pmatrix} -a & -2 \\ 13 & a \end{pmatrix}$ *sea tal que su inversa coincida con su opuesta?*

Queremos que $A^{-1} = -A$

Si esto es así: $A^{-1} \cdot (-A) = I \rightarrow \begin{pmatrix} -a & -2 \\ 13 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ -13 & -a \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -a^2 + 26 & 0 \\ 0 & 26 - a^2 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 26 - a^2 = 1 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow \boldsymbol{a = \pm 5}.$

◇

Ejercicio resuelto 3.15. *Dada una matriz cuadrada A, se llama 'traza de A' y se representa por tr(A) a la suma de los elementos de la diagonal (principal) de A, es decir* $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Considera las matrices. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calcula: a) $tr(A)$; *b)*; $tr(3B)$; *c)* $tr(A+B)$; *d)* $tr(AB) = tr(BA)$

$tra(A) = 2 + 0 + 4 = 6$

$3B = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$

— $tr(3B) = 6 + 3 + (-6) = 3 = 3 \cdot tr(B)$

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$

— $tr(A+B) = 4 + 1 + 2 = 7 = 6 + 1 = tr(A) + tr(B)$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ -3 & 15 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$

— $tr(AB) = 0 + (-3) + (-2) = -5 \neq 6 \cdot 1 = tr(A) \cdot tr(B)$ ◇

Ejercicio resuelto 3.16. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, *comprueba que* $(A+I)^2 = 0$ *y expresa* A^2 *en función de A e I*

$$A+I=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$

$$(A+I)^2=(A+I)\cdot(A+I)=A^2+AI+IA+I^2=A^2+2A+I=0\rightarrow$$

$$\boldsymbol{A^2=-2A-I}$$ ◇

Ejercicio resuelto 3.17. *Comprueba que* $A^2=2A-I$*, con* $A=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}$,

y usa esa relación para encontrar A^4

$$A^2=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{pmatrix}$$

$$2A-I=2\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A^4}=A^2\cdot A^2=(2A-I)\cdot(2A-I)=4A*2-2AI-I2A+I^2=A^2-4A+I=$
$(A^2=2A-I)\ =4(2A-I)-4A+I=8A-4I-4A+I=\boldsymbol{4A-3I}$

$$A^4=4A-3I=4\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&-16&8\\8&-7&4\\-16&16&-7\end{pmatrix}$$ ◇

Ejercicio resuelto 3.18. $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\\0&1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3&x&y\\-2&1&-2\\2&x&y\end{pmatrix}$

¿ Existen x *e* y *tales que* B *sea la inversa de* A *?*

$$AB=I\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2x+3&2y-6\\0&x+1&y-2\end{pmatrix}=I\rightarrow\begin{cases}2x+3=1\\x+1=0\\2y-6=0\\y-2=0\end{cases}\Rightarrow$$

Ecuaciones 1 y 2: $x = -1$, pero las ecuaciones 3 y 4 son contradictorias (resultado incompatible): $\boldsymbol{\nexists \{x, y\} \ / \ B = A^{-1}}$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 3.19. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0; b \neq 0$

Calcula AA^T y razona que siempre existe la inversa de A para cualquier valor $a, b \in \mathbb{R};\ a \neq 0; b \neq 0$

$$AA^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a- & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = Diag(a^2+b^2)$$

La matriz $B = \dfrac{1}{a^2+b^2}\ A^T$, es tal que $B \cdot A = I$ según acabamos de ver, por lo que A siempre es invertible y $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\ A^T$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 3.20. *Se dice que una matriz cuadrada es 'ortogonal' si si traspuesta coincide con su inversa. Se pide:*

— *a) Demuestra que* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}$ *es ortogonal.*

— *b) Calula x e y para que* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ *sea ortogonal.*

Llamamos A a la primera matriz y M a la segunda.

— a) $AA^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

— b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ M es ortogonal si $M^T = M^{-1} \rightarrow MM^{-1} =$ $\boldsymbol{MM^T = I} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1x^2 & xy \\ 0 & xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{cases} 1 + x^2 = 1 \\ xy = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{x = 0;\ y = \pm 1}$$ ◇

Ejercicio resuelto 3.21. *Se dice que una matriz cuadrad A es 'involutiva' si $A^2 = I$.*

— a) Justifica, razonadamente, que toda matriz involutiva es regular.

— b) Encuentra los valores de a y b para que la matriz C sea involutiva, siendo $C = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

— a) Como A es involutiva: $I = A^2 = A \cdot A \rightarrow A^{-1} = A$, todas las matrices involutivas son regulares o invertibles y su inversa coincide con ella misma.

— b) $\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{cases} 2a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ b = \pm 1}$$ ◇

Ejercicio resuelto 3.22. *En una cadena de supermercados hacen tres tipos de lotes de verdura para ensaladas, A, B y C, de modo que el lote A incluye 400 g de lechuga, 200 g de tomate y 100 g de zanahoria; el lote B incluye 200 g, 300 g y 150 g de lechuga, tomate y zanahoria, respectivamente; y el lote C 500 g 300 g y 50 g, en el mismo orden que los anteriores.*

Se ha recogido información sobre las ventas de cada lote de verduras en dos supermercados de la cadena: en el supermercado X se han vendido 50 lotes A, *30 lotes V y 25 lotes C, en el Y las ventas han sido de 40, 20 y 25 lotes de A, B y C.*

a) Escribe una matriz M que recoja los tipos de lote y su composición.

b) Escribe una matriz V donde aparezcan las ventas de los dos supermercados.

c) Encuentra, matricialmente, la matriz que contiene la información de la cantidad de cada tipo de verdura que ha hecho falta en cada supermercado para preparar estos lotes.

— a) $M_{3\times 3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \color{blue}{Le} & \color{blue}{To} & \color{blue}{Za} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 400 & 200 & 100 \\ 200 & 300 & 150 \\ 500 & 300 & 50 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \color{red}{L1} \\ \color{red}{L2} \\ \color{red}{L3} \end{array}$

— b) $V_{2\times 3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \color{red}{L1} & \color{red}{L2} & \color{red}{L3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 50 & 25 \\ 40 & 20 & 25 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \color{green}{X} \\ \color{green}{Y} \end{array}$

— c) Para el tercer apartado hay que multiplicar las matrices M y N, pero puede que no se puedan multiplicar en ambos sentidos o sí, si trasponemos alguna de ellas. Es decir, podríamos probar los productos: MN; MN^T; M^TN; M^TN^T; NM; NM^T; N^TM; N^TM^T. En cualquier tipo de problema de texto, donde debes escribir los datos en forma de matriz, lo puedes hacer por filas o por columnas, por ello, de estos productos algunos de ellas se podrán efectuar, otras no. Pero no es suficiente, además en necesario que 'lo que multiplicamos tenga el sentido deseado'. El **truco** reside en, al final, deseamos una matriz que tenga por columnas Le, To, Za y por filas X, Y. Para ello, las columnas de la primera matriz han de coincidir, literalmente, con las filas de la segunda: $L1$, $L2$, $L3$ (El resultado puede ser la matriz opuesta a la obtenida, pero el 'truco' seguirá siendo el mismo).

$$VM = \begin{pmatrix} & \text{L1} & \text{L2} & \text{L3} \\ X & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & Le & To & Za \\ \text{L1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{L2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{L3} & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow VM = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 35 \\ 40 & 20 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 & 200 & 100 \\ 200 & 300 & 150 \\ 500 & 300 & 50 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c|ccc} & Le & To & Za \\ \hline X & 38500 & 26500 & 10750 \\ Y & 32500 & 21500 & 8250 \end{array}$$

Nótese que, p.e., los 21500 g de Tomate en el supermercado Y vienen de multiplicar $40L1(Y) \cdot 200To(L1) + 20L2(Y) \cdot 300To(L2) + 25L3(Y) \cdot 300To(L3)$, lo cual tiene el sentido pedido, cuánto tomate se necesita en el supermercado Y.

Nótese, que si multiplicamos VM^T (que podría ser un producto normal puesto que el orden de filas y columnas lo hemos elegido arbitrariamente), el resultado que se obtine 'carece de sentido':

$$VM^T = \begin{array}{c|ccc} & \text{L1} & \text{L2} & \text{L3} \\ \hline X & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \; \begin{array}{c|ccc} & L1 & L2 & L3 \\ \hline \text{Le} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{To} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{Za} & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Ahora, el elemento $2,2$ no tiene ningún sentido: $vt^t_{2,2} = 40L1(Y) \cdot 300Le(L2) + 20L2(Y) \cdot 300To(L2) + 25L3(Y) \cdot 150Za(L2) =???$, no tiene ningún sentido. $\diamond$

3.6.2. Ejercicios Propuestos

Las soluciones numéricas a los problemas de matrices se pueden comprobar con cualquier sw como calculadoras o online como 'www.wolframalpha.com' o 'www.symbolab.com'.

1. Escribe una matriz 3×4 que cumpla: $\begin{cases} 3i - j & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i = j \\ j - 2i & \text{si } i > j \end{cases}$

   Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcula AB; BA; $(A + B^T)B$

   Solución: usa un sw. adecuado para comprobar tus resultados.

3. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

   $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

   efectúa todos los productos posibles entre ellas.

   Solución: solo son posibles AC, AD, BA, CD, DC, DD

4. Dadas $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible: AB; BD; $2B - 4C$; BC DD^T

   Solución: Analiza las dimensiones de las matrices
   y usa un sw. adecuado para comprobar tus resultados.

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula,

   si es posible: *a*) A^T; *b*) $BA^T - C$; *c*) BB^TC

   Solución: Las tres operaciones son posibles.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

   Calcula: *a*) $A(B + C)$; *b*) $AB^T - B^TA$; *c*) $A(3B - 2C)$; *d*) A^2

   Solución: Usa un sw. adecuado para realizar las comprobaciones.

7. Encuentra la matriz M que verifica la igualdad:

   $$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + M$$

   Solución: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; calcula los número $x,\ y,\ z$ para que se verifique la ecuación: $E - xAB = yC + zD$

   $x = 1;\ y = 2;\ z = 1$

9. Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α y β.

   Solución: $\alpha = -4;\ \beta = 3;\ \ A^2 - 4A + 3I = 0$

10. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices $B_{2\times 2} \neq 0$ tales que $A \cdot B = 0$

    Solución: $\lambda = 6 \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ x & y \end{pmatrix}\ \forall x, y\ \in \mathbb{R}$

11. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra a y b para para que el producto de estas matrices sea conmutativo.

    Solución: $a = 1;\ b = 4$

12. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; y $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

    a) Encuentra x para que $B^2 = A$

    b) Encuentra x para que $A + B + C = 3I$

    Solución: $a)\ x = 1, \quad b)\ x = 0$

13. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$, encuentra a y b para que $BC^T = A$

    Solución: $a = 3;\ b = -1$

14. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$; y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

    a) Encuentra x para que $B^2 = A$

    b) Encuentra x para que $A - I = B^{-1}$

c) Encuentra x para que $AB = I$

Solución: $a)\ x = 1, \quad b)\ x = 0, \quad c)\ x = -1$

15. Una matriz M es 'ortogonal' si $M^{-1} = M^T$, comprueba si la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Solución: No

16. (*) Obtén todas la matrices cuadradas de segundo orden A tales que $A^2 = I$

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

17. Calcula A^n, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$.

18. Encuentra las potencias enésimas de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & ' & c^n \end{pmatrix}$; $C^n = \begin{matrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

.

19. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, y sea n un número naturral cualquiera. Calcula A^n y el valor de $A^{350} - A^{250}$

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$; $A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

.

20. Calcula: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$

Solución: $\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

21. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to A^n$?

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Determina a y b para que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$

Solución: $a = 2; \quad b = -1$

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2; A^3; $\cdots$; A^{128}

Solución: $A^3 = I \rightarrow 128 = 3 \cdot 42 + 2 : A^{128} = A^2$

24. Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Usa un sw. adecuado para comprobar tus cálculos.

25. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
Averigua si B o C son la inversa de A

Solución: $A^{-1} = C$

26. Calcula las inversas de las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Solución: $\nexists N^{-1}$

27. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Comprueba que $A^3 = 0$ y demuestra que $A^2 + A + I$ es la inversa de $I - A$

Solución: Desarrolla $(A^2 + A + I)(I - A)$, teniendo en cuenta que $A^3 = 0$ y obtendrás I

28. Sea A una matriz tal que $A^2 = -A - I$, justifica que A es invertible y escribe A^3 en función de A e I.

$I = -A^2 - A = A(-A - I) \rightarrow A^{-1} = -A - I; \quad A^3 = A \cdot A^2 = \cdots = I$

29. Considera $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Prueba que $A^3 + I = 0$ y utiliza ese resultado para calcular A^{10}

Sol: $A^3 = -I \rightarrow A^{10} = A^3\ A^3\ A^3\ A = (-I)(-I)(-I)A = -A$

30. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, Calcula $A(A-2I)$ y justifica que A es regular o invertible. Encuentra el valor de λ para el cual $A^{-1} = \lambda(A-2I)$.

Solución: $A(2A - I) = -I \rightarrow A(-(2A - I) = I \rightarrow A^{-1} = -(2A - I) \rightarrow \lambda = -1$

31. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

¿Cuál de las matrices anteriores es inversa de la otra?

$A^{-1} = C; \quad B^{-1} = D$

32. Calcula el valor de k para que $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sea la inversa de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{k = -4}$

33. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Prueba que $-A^2+A+2I = A^{-1}$ (sin calcular A^{-1} explícitamente).

Exige que $AA^{-1} = I$

34. Sea $M = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$.

a) Calcula para qué valores de m se cumple: $B^2 = 2B + I$

b) Para esos valores de m y sin calcular expresamente M^{-1}, encuéntrala.

Exige que $m = \pm 1$; De $B^2 = 2B + I$, aisla I

35. Una fábrica de coches produce tres modelos: coupé, ranchera y económico. La fabricación de cada modelo requiere las cantidades de los siguientes conceptos, relacionados en la matriz C, en unidades convenientemente elegidas: material, personal, impuestos y transporte.

La matriz P indica la producción semanal y la matriz V el valor de una unidad de cada concepto.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 60 & 40 & 90 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ayuda: PC; C^TV; PC^TV

36. En un edificio residencial hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes, las L4 tienen 5 pequeñas y 4 grandes y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras y las grandes 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y bisagras para cada tipo de vivienda.

Ayuda: $V = \begin{array}{c} \\ L1 \\ L2 \\ L3 \end{array}\begin{pmatrix} P & G \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix}$; $M = \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{pmatrix} C & B \\ & \\ & \end{pmatrix}$; $toVM = \begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{pmatrix} C & B \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix}$

37. Una fábrica produce dos tipos de bombillas: transparente (T) y opacas (O). De cada una de ellas se hacen 4 modelos: M1, M2, M3 y M4. La siguiente matriz representa la producción semanal de la fábrica:

$$B = \begin{pmatrix} & T & O \\ M1 & 300 & 200 \\ M2 & 400 & 250 \\ M3 & 250 & 180 \\ M4 & 500 & 300 \end{pmatrix}$$

El porcentaje de bombillas defectuosas es del 2 % en el modelo M1, el 5 % en M2, el 8 % en M3 y 3l 10 % en M4.

Calcula una matriz que calcule el número de bombillas Transparentes y Opacas, buenas y defectuosos, que se producen.

Ayuda: $D = diag(0.02, 0.05, 0.08, 0.010)$ DB defectuosas. $B - DB$ buenas.

Matriz curiosa

Genera números de Fibinacci:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

@TamasGorbe

3.6.3. Cuestiones

Q. 1 Sea $A_{m\times n}$

a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila?, ¿cuál es su dimensión?

b) ¿Existe una matrz B tal que AB sea una matriz fila?, ¿cuál es su dimensión?

c) Si AB es una matriz cuadrada, ¿qué dimensión tiene la matriz $B^T A^T$?

Ayuda: haz un análisis dimensional en cada caso.

Q. 2 Considera las matrices $A_{m\times n}$; $B_{p\times q}$. ¿Qué relación debe haber enre m, n, p, q para que exista:?

a) $(AB)^{-1}$; b) $A^2 - B^2$; c) $AB^T - A$

Ayuda: haz un análisis dimensional.

Q. 3 Sean A, B y C tres matrices tales que ABC es una matriz 3×2 y AC^T es una matriz cuadrada. Encuentra las dimensiones de A, B y C.

Ayuda: haz un análisis dimensional.

Q. 4 Si con las matrices A, B, C y D se pueden hacer las operaciones $(A + D)C^T$; CBT; y B^2, ¿cuál de las operaciones siguientes se pede hacer:?

a) $CBD)^T$ b) $C(D + A)B$ c) $(BA^T D)^2$ d) $(A^t + D^T)^2 C$

Ayuda: solo el apartado c).

Q. 5 ¿Qué efecto tiene multiplicar una matriz diagonal de orden 3, $D = Diag(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ por una matriz cuadrada A cualquiera?

Ayuda: $AD = (\ \alpha c_1(A), \beta c_2(A), \gamma c_3(A)\ )$ $\quad (DA)^T = (\ \alpha f_1(A), \beta f_2(A), \gamma f_3(A)\ ))$

Q. 6 Demuestra que si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \to (A^T)^2 = (A^2)^T$

Ayuda: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y efectua las operaciones.

Q. 7 Encuentra las matrices X que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ayuda: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to AX = XA \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

Q. 8 Encuentra las matrices X que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ayuda: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to AX = XA \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Q. 9 (*) Encuentra las matrices X de segundo orden tales que $X^2 = X$

Ayuda: X : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & \sqrt{a-a^2} \\ \sqrt{a-a^2} & 1-a \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & sqrta-a^2 \\ -\sqrt{a-a^2} & 1-a \end{pmatrix}$

Q. 10 Demuestra que las matrices $M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$, conmutan.

Ayuda: $AB = BA$

Q. 11 Prueba que $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se cumple que $A \cdot A^T$ es simetrica.

Ayuda: Calcula $(AA^T)^T$ y usa propiedades de la trasposición. (lema 3.1)

Q. 12 $M_{m\times n} \to MM^T$ y M^TM son, ambas, matrices simétricas.

Ayuda: S simétrica si $S^T = T$ y usa propiedades de la trasposición. (lema 3.1)

Q. 13 Prueba que si A es idempotente, $A^2 = A$, entonces, si $B = 2A - I$, se cumple que $B^2 = I$

Ayuda: $B^2 = B \cdot B = (2A - I)\cdot(2A - I) = \cdots$

Q. 14 (**) Encuentra todas las matrices ortogonales de orden 2, es decir, matrices M tales que $MM^T = I$ $(\ M^{-1} = M^T\ )$

Ayuda: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$; $\forall\theta,\phi \in \mathbb{R}$

Q. 15 Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^2 = 0$:

a) Comprueba que $(A + I)^2 = 2A + I$

b) $B = I - A$; $\quad C = A + I$. Comprueba que una es inversa de la otra.

Ayuda: a) 0 es la matriz nula; b) calcula BC

Q. 16 Considera matrices triangulares cualquiera de orden 3 y comprueba que la suma, el producto por un número y el producto de matrices triangulares es triangular.

Ayuda: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \rightarrow A + B;\ kA;\ AB$

Q. 17 Si la matriz A, de orden n, es invertible, entonces, la matriz $3A$:

a) Es invertible y su inversa vale $3A^{-1}$

b) Es invertible y su inversa vale $3^n A^{-1}$

c) Es invertible y su inversa vale $\frac{1}{3}A^{-1}$

d) No necesariamente es invertible.

Ayuda: La respuesta correcta es la c)

3.7. Resumen

Resumen de matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \begin{cases} 0 \leq i \leq m; \\ 0 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}_{\;\boldsymbol{(num.\ filas)} \times \boldsymbol{(num.\ columnas)}}}$$

Traspuesta: $(a_{ij})^T = (a_{ji})$

Producto por un número real: $k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

Suma: $(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$
asociaiva, conmutativa, neutro **0**, opuesto $-A$

Producto: $(a_{il})_{m\times \cancel{n}} \cdot (b_{lj})_{\cancel{n}\times p} = (f_i(A) \cdot c_j(B))_{m\times p}$
$AB \neq BA$, asociativa, distributivas, neutro $IA = AI = A$, inversa A^1.
$A \in \mathcal{M}_n : \quad \exists A^{-1} \;/\; AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Potencias: $M \in \mathcal{M}_n : \quad M^n$

Propiedades: $(A+B)^T = A^T + B^T \quad (AB)^T = B^T A^T \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^{-1})^{-1} = A \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Inversa por Gaus: $[\, A \mid I \,] \to$ transf. Gauss $\to [\, I \mid \boldsymbol{A^{-1}} \,]$.

Capítulo 4

Determinantes

4.1. Determinantes ordenes 1 , 2 y 3

Definición 4.1. *El 'determinante' es una aplicación que, para cada matriz cuadrada A de orden n le hace corresponder un número real que se denota por $det(A)$ o $|A|$:*

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_n \to det(A) = |A| \in \mathbb{R}}$$

— *Determinantes orden* 1*:* $A = [a_{11}] \to det(A) = |A| = |a_{11}| = a_{11}$

¡Cuidado! : No confundir $det(a_{11}) = |a_{11}|$ con el valor absoluto $|a_{11}|$. De todos modos, los determinantes de orden uno no se suelen usar.

— *Determinantes orden* 2*:* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

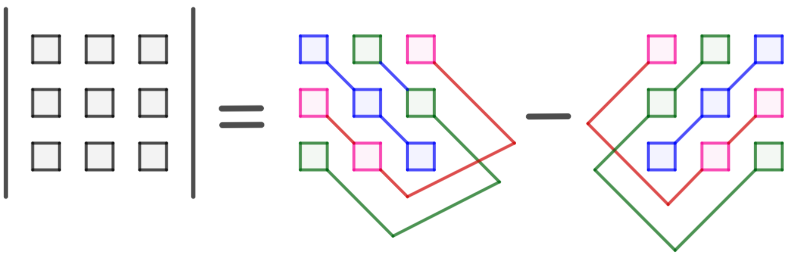
$$= \begin{matrix} \color{blue}{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} \end{matrix} \quad - \quad \begin{matrix} a_{11} & \color{red}{a_{12}} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} \end{matrix} = \color{blue}{a_{11}a_{22}} - \color{red}{a_{12}a_{21}}$$

— *Determinantes orden* 3*: 'Regla de Sarrus'*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to det(A) = |A| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad - \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} \quad - \quad (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$



Otra regla para recordar la regla de Sarrus consiste en repetir, al final del determinante las filas 1 y 2 y multiplicar los elementos de las diagonales (izquierda a derecha positivas, derecha a izquierda negativas).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \quad - \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \quad =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} \quad - \quad (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Aunque es recomendable recordar la técnica anterior (mayor rapidez de cálculo mental).

Ejemplo 4.1. *Calcula los determinantes de:*

$$A = [-7/4]; \; B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = -7/4$

$|B| = 3 \cdot 2 - ((-2) \cdot 5) = 6 + 10 = 16$

$|C| = 1 \cdot 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - (3 \cdot 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \cdot 2) = 0 + 9 + 16 - (0 - 4 - 18) = 25 + 22 = 47$

Para orden 4 o superior, se recurre al desarrollo de Laplace para el cálculo de determinantes (no es válida la regla de Sarrus). Se verá en próximos apartados.

Obsérvese que para las matrices usamos paréntesis o corchetes (a_{ij}) ó $[a_{ij}]$ y para los determinantes barras $|a_{ij}|$.

4.2. Propiedades de los determinantes

.

Las propiedades que vamos a enunciar son válidas para determinantes de cualquier orden. Las demostraciones sobrepasan, con mucho, los objetivos de un curso de bachillerato; por lo que para cada una de ellas nos contentaremos con una mera comprobación con determinantes de ordenes 2 o 3, que son los que de momento, conocemos.

P.D. 1 $\boxed{|A| = |A^T|}$. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

Comprobación: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$

$|A^T| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$

¡ A partir de esta propiedad, todo lo que se diga para 'filas' valdrá para 'columnas' y viceversa !

P.D. 2 Si un determinante contiene una fila (o columna) de ceros, el determinante es cero

Comprobación: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0$

¡Para abreviar, en adelante, nos referiremos a 'líneas' de un determinante queriendo indicar filas o columnas!

En general:

$Det(c_1, c_2, \cdots, 0, \cdots, c_n) = 0$, ó $Det(f_1, f_2, \cdots, 0, \cdots, f_n) = 0$

Donde, con $c_1, c_2, \cdots, c_n$ queremos indicar las columnas de M, así como con $f_1, f_2, \cdots, f_n$ sus filas.

P.D. 3 Si se intercambian de posición dos líneas de un determinante (dos filas o dos columnas), el determinante cambia de signo.

Comprobación: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0-18-12-(0+9-20) = -30-(-11) = -19$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 20 + 9 - (0 - 12 - 18) = -11 - (-30) = 19$

En general:

$Det(f_1, \cdots, f_i, \cdots, f_j \cdots, f_n) = -Det(f_1, \cdots, f_j, \cdots, f_i \cdots, f_n)$

ó

$Det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_j \cdots, c_n) = -Det(c_1, \cdots, c_j, \cdots, c_i \cdots, c_n)$

P.D. 4 A una línea (fila o columna) de un determinante, si se le añade otra línea (fila o columna) del mismo determinante multiplicada por un número, el determinante no varía.

En general:

$Det(f_1, \cdots, f_i, \cdots, f_j, \cdots, f_n) = Det(f_1, \cdots, f_i + k \cdot f_j, \cdots, f_j, \cdots, f_n)$

ó

$Det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_j, \cdots, c_n) = Det(c_1, \cdots, c_i + k \cdot c_j, \cdots, c_j, \cdots, c_n)$

Comprobación: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \quad [\, F2 \to F2 + 5F1 \Rightarrow \,]$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 + 5 \cdot 1 & 4 + 5 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 14 - 16 = -2$

P.D. 5 Si en un determinante hay una línea igual o proporcional a otra, el determinante es cero.

$Det(f_1, \cdots, f_i, \cdots, k \cdot f_i, \cdots, f_n) = 0$

ó

$Det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, k \cdot c_i, \cdots, c_n) = 0$

Comprobación: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -6+120+0-(120+0-6) =$
$\begin{vmatrix} 1 & -2\cdot 1 & 5 \\ -3 & -2\cdot(-3) & 0 \\ 4 & -2\cdot 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$, ya que $c2 = 2c1$

P.D. 6 Producto de un número por un determinante o 'factor común' :

$k{\cdot}Det(f_1,\cdots,f_i,\cdots,f_j,\cdots,f_n) = Det(f_1,\cdots,k{\cdot}f_i,\cdots,f_j,\cdots,f_n) = Det(f_1,\cdots,f_i,\cdots,k{\cdot}f_j,\cdots,f_n) = Det(k{\cdot}f_1,\cdots,f_i,\cdots,f_j,\cdots,f_n) = \ldots$

ó

$k{\cdot}Det(c_1,\cdots,c_i,\cdots,c_j,\cdots,c_n) = Det(c_1,\cdots,k{\cdot}c_i,\cdots,c_j,\cdots,c_n) = Det(c_1,\cdots,c_i,\cdots,k{\cdot}c_j,\cdots,c_n) = Det(\cdot c_1,\cdots,c_i,\cdots,c_j,\cdots,kc_n) = \ldots$

Esta propiedad, leída de derecha a izquierda, es la "'propiedad de factor común para determinantes': si en un determinante hay una línea (fila o columna) multiplicada por un número, éste puede salir fuera del determinante multiplicando.

Comprobación: $5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot(4-6) = 5\cdot(-2) = -10$

$\begin{vmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20-30 = -10$

$\begin{vmatrix} 1 & 5\cdot 2 \\ 3 & 5\cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 20-30 = -10$

Vista como factor común: $\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 60 & 8 \end{vmatrix} = 80-120 = -40$, pero

$\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 60 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10\cdot 1 & 2 \\ 10\cdot 6 & 8 \end{vmatrix} = 10\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 10\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} =$
$10\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10\cdot 2\cdot(4-6) = 10\cdot 2\cdot(-2) = -40$

IMPORTANTE: Si A es una matriz cuadrada de orden n (n-filas y n-columnas), como $k\cdot A$ consiste en multiplicar por k TODAS las filas (columnas) de A, para calcular su determinante, podemos sacar n-veces el número k factor común de cada una de sus filas (columnas), por lo que:

$$\boxed{k \in \mathcal{M}_n \to det(k \cdot A) = k^n \cdot |A|}$$

Nótese la diferencia de $k[A]$ y $k|A|$, el primer producto es el de un número por una matriz y el número multiplica a todos los elementos de la matriz, en el segundo caso tenemos el producto de un número por un determinante y solo se multiplica el número por una sola de sus líneas (filas o columnas).

P.D. 7 Se pueden sumar dos determinantes de matrices del mismo tipo si las matrices son en todos sus elementos iguales excepto en una de sus líneas (fila o columna), siendo ésta la que se suma. Vista la propiedad al revés, permite descomponer un determinante como suma de otros dos en todo iguales excepto en una de sus líneas.

Generalización a determinantes de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

<u>Comprobación:</u> $\begin{vmatrix} 4+2\ (=6) & 7 \\ -3+5\ (=2) & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 12 - 14 = \mathbf{-2} = 8 - (-21) + 4 - (35) = 29 - 31 = \mathbf{-2}$

P.D. 8 El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

En general: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{2n} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

<u>Comprobación:</u> $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 20$

Consecuencia: $\boxed{|I| = 1}$

P.D. 9 El determinante del producto es igual al producto de los determinantes: $\boxed{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$

Comprobación: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$

— $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow det(A \cdot B) = 5 - 9 = \mathbf{-4}$

— $det(A) = 4 - 6 = -2$; $det(B) = 2 - 0 = 2 \rightarrow det(A) \cdot det(B) = (-2) \cdot 2 = \mathbf{-4}$

P.D. 10 Como corolarios a la propiedad anterior: 'el determinante de la potencia es la potencia del determinante' y 'el determinante de la inversa es la inversa del determinante':

Como $A^n = A \cdot A \cdot \underset{\text{n-veces}}{\cdots} \cdot A$ y la propiedad anterior, deducimos que:

$$\boxed{|A^n| = |A|^n}$$

De $A \cdot A^{-1} = I; \quad |I| = 1$ y la propiedad anterior, deducimos que:

$$\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$$

En ejercicios se verán aplicaciones las propiedades de los determinantes.

La historia de los determinantes

Los determinantes hicieron su aparición en las matemáticas más de un siglo antes que las matrices. El término matriz fue creado por James Joseph Sylvester.

Algunos de los más grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX contribuyeron al desarrollo de las propiedades de los determinantes. La mayoría de los historiadores coinciden en afirmar que la teoría de los determinantes se originó con el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Leibniz empleó los determinantes en 1693 con relación a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. No obstante hay quienes creen que el matemático japonés Seki Kowa hizo lo mismo unos años antes.

Las contribuciones más prolíficas a la teoría de los determinantes fueron las del matemático francés Agustin-Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy escribió, en 1812 una memoria de 84 páginas que contenía la primera demostración de la fórmula $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Hay algunos otros matemáticos que merecen ser mencionados aquí. El desarrollo de un determinante por cofactores fue empleado por primera vez por el matemático francés Pierre de Laplace (1749-1827).

Un contribuyente principal en la teoría de los determinantes fue el matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851). Fue él con quien la palabra "determinante" ganó la aceptación definitiva.

Fuente: Wikipedia.

4.3. Menor complementario y adjunto. Desarrollo de Laplace

Para poder calcular determinantes de orden mayor que 3 hemos de introducir los conceptos de 'menor complementario' y 'adjunto' de un elemento de una matriz cuadrada.

Definición 4.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada de orden n. Para cualquier elemento $a_{ij} \in A$ se define su 'menor' correspondiente, y se representa por M_{ij} al determinantes de orden $n-1$ que queda al eliminar de A la fila$-i$ y la columna$-j$.*

Se llama 'adjunto o cofactor' de a_{ij} y se representa por A_{ij} al menor M_{ij} multiplicado por 1 o -1 según sea la paridad de la suma de índices i y j, es decir:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

Ejemplo 4.2. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. *Calcula* $M_{12};\ A_{12};\ M_{23};\ A_{23};\ M_{31};\ A_{31}$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \boxed{\cancel{2}} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 28 = 8 \quad \textit{(tachamos fila 1 y columna 2).}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 8 = -8$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \boxed{\cancel{6}} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \text{ \textit{(tachamos fila 2 y columna 3).}}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{2,3} = (-1)^5 \cdot (-6) = 6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \boxed{\cancel{7}} & \cancel{8} & \cancel{9} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot (-3) = -3$$

Definición 4.3. *Dada una matriz cuadrada A se llama 'matriz adjunta' a la que resulta de reemplazar en A cada elemento a_{ij} por su correspondiente adjunto A_{ij}. Así, p.e., para una matriz de orden 3:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad ad(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, *calcula su matriz adjunta.*

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 64 = -19$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(36 - 42) = -(-6) = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\ M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(18 - 24) = -(-6) = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\ M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8-14) = -(-6) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\ M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\ M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(6-12) = -(-6) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$$

$$\textit{Luego:}\quad ad(A) = \begin{bmatrix} -19 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema, que daremos sin demostración, permite calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada de orden n $(\forall n \in \mathbb{N})$ en función, eso sí, de n determinantes de orden $n-1$. Se trata del 'desarrollo de Laplace'.

Teorema 4.1. *Desarrollo de Laplace de un determinante.*

El determinante de una matriz se puede desarrollar como suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) cualquiera por sus correspondientes adjuntos.

$$\textit{Sea } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}\ \textit{(desarrollo primera fila)} =$$

$$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + \cdots + a_{n3}A_{n3}\ \textit{(desarrollo tercera columna)} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \textit{ desarrollo columna-j }) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} =$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \textit{ (desarrollo fila-i) } = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = etc$$

Ejemplo 4.4. *Usando el desarrollo de Laplace:*

Calcula: a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$

—– *Cálculo del* $|A|$ *:*

* *por adjuntos de la tercera columna:*

$$|A| = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$3 \cdot (+1) \cdot (32 - 35) + 6 \cdot (-1)(8 - 14) + 9 \cdot (+1) \cdot (5 - 8) = -9 + 36 - 27 = 0$$

* *por adjuntos de la segunda fila:*

$$|A| = 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$4 \cdot (-1) \cdot (18 - 24) + 5 \cdot (+1) \cdot (9 - 21) + 6 \cdot (-1)(8 - 14) = 24 - 60 + 36 = 0$$

* *por Sarrus, evidentemente, también dará cero:*

$$A = 45 + 96 + 84 - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0$$

—– *Cálculo del* $|B|$*:*

* *por adjuntos de la tercera fila:*

$$|B| = 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \cancelto{0}{\mathbf{0} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}} +$$

$$+5 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (+1) \cdot (0 + 6 + 0 - (0 + 0 + 6)) + 0 +$$

$+5 \cdot (+1) \cdot (2+0+0-(0+0+0)) + 2 \cdot (-1) \cdot (-6+0+0-(0+0+0)) =$

$= 0 \ + \ 0 \ + \ 10 \ + \ 12 = \mathbf{22}$

Los dos últimos Sarrus son determinantes de matrices triangulares, luego son iguales al producto de los elementos de la diagonal principal, con lo que se ahorra tiempo de cálculo.

Nótese que, como 'estrategia', es conveniente hacer el desarrollo de Laplace por los elementos de la línea que contenga más ceros, lo que hará que tengamos que calcular menos determinantes, por ello:

** por adjuntos de la segunda columna:*

$$|B| = 0 \ + \ 2 \cdot (1-)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \ + \ 0 =$$

$= 2 \cdot (5+6+0-(0-6+6)) = 2 \cdot 11 = \mathbf{22}$

—– *Cálculo de $|C|$:*

** por adjunto segunda columna:*

$|C| = 5{\cdot}(-1)^{1+2}|-3| + 3{\cdot}(-1)^{2+2}{\cdot}|1| = 5(-1)(-3) + 3{\cdot}1{\cdot}1 = 15+3 = \mathbf{18}$

** por adjuntos de la primera fila:*

$|C| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \ |3| + 5 \cdot (-1)^{1+2} \ |-3| = 3 + 15 = \mathbf{18}$

** por la definición:* $|C| = 3 - (-15) = \mathbf{18}$

4.3.1. Método Chio

Método Chio

Utilizando las propiedades de los determinantes se trata de hacer ceros en todos los elementos de una línea excepto uno de ellos, para luego desarrollarlo por los adjuntos de esa línea.

Ejemplo 4.5. *Calcula:* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & \mathbf{0} & 1 & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = [F4 \to F4 - F1] =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & \mathbf{0} & 1 & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \textit{(Sarrus)} =$$

$$= 2\,(-1)\,(-23) = \mathbf{46}$$

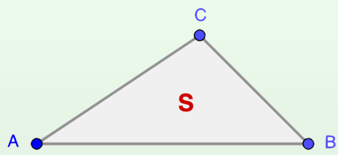
Observación 1: No confundir las propiedades de los determinantes por las transformaciones de Gauss: Gauss permite cambiar una fila por un número ($\neq 0$) multiplicada por ella más un número por otra; en los determinantes se puede cambiar una fila (o columna) por 'ella misma' (multiplicada por '+1') más un número por otra fila (o columna). La línea a cambiar en un determinante no puede estar multiplicada por ningún número distinto de la unidad positiva (ni siquiera se puede tomar para restar)

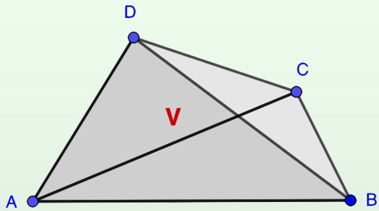
$*\ Fi \to Fi - 3Fj$ *Bién*
$*\ Fi \to 3Fj - Fi$ *Mal:* $(-1) \cdot Fi$.
$*\ Fi \to 2Fi + 3Fj$ *Mal:* $2 \cdot Fi$

Observación 2: Hay una gran diferencie entre el producto de un número por una matriz $k \cdot (A)$, en que se multiplican TODOS los elementos de la matriz por k y el producto de un número por un determinantes, $k \cdot |A|$, que consiste en elegir UNA SOLA LÍNEA de A (fila o columna) y multiplicar sus elementos por k (recuérdese lo dicho en la propiedad P.D. 6 de determinantes).

Observación 3: Para buscar 'ceros' en una columna, combinamos filas. Para buscar 'ceros' en una fila, combinamos columnas (Ver en problemas resueltos).

Aplicaciones geométricas de los determinantes





Área del triángulo de vértices $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$

Sea $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, entonces,

Área $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\ abs\ \Delta = \dfrac{1}{2}\ |\Delta|$ (la mitad del valor absoluto del determinante Δ).

Volumen de un tetraedro de vértices $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3),\ D(x_4, y_4, z_4)$.

$$\text{Vol. } V = \frac{1}{6}\ abs \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

4.4. Inversa de una matriz por adjuntos

Ea ahora cuando vamos a desarrollar un método más potente que el de Gauss para el cálculo de la inversa de una matriz cuadrada. Además, este método nos dice si dada una matriz cuadrada cualquiera tiene inversa. (Lo exponemos como un teorema sin demostración).

Teorema 4.2. *Inversa por adjuntos.*

$\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}): \ \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$ *además* $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\, ad(A^T)}$

La inversa de una matriz es uno partido por su determinante (claro, si el determinantes es cero, no hay inversa) de la matriz adjunta de la matriz traspuesta. –Puesto que las operaciones de trasposición y adjunto conmutan (se puede comprobar, hágase) algunos autores hablan de la traspuesta de la matriz adjunta– [$ad(A^T) = (adA)^T$].

Definición 4.4. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$:

si $|A| = 0 \rightarrow \nexists A^{-1} \Rightarrow$ *se dice que* A *es 'singular'.*

si $|A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$ *se dice que* A *es 'regular o invertible'.*

Ejemplo 4.6. *En el tema anterior, en el apartado de calculo de inversas de matrices por Gauss, vimos:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -13 & 9 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado por el método de los adjuntos: $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\, ad(B^T)$:

El primer caso es calcular $|B|$*, puesto que si es* 0 *la matriz será singular o no invertible y habríamos acabado.*

Por Sarrus: $|B| = 5+6+0-(-4-1+0) = 11-(-5) = 16 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$

El segundo paso es calcular la traspuesta de B*, no se nos vaya a olvidar (se puede calcular después del cálculo de la matriz adjunta, como hemos dicho anteriormente, puesto que trasposición y adjunto son operaciones que conmutan)*

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$ *Como tercer paso, vamos a calcular* $ad(B^T)$

$$B^T_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (5-(-1)) = 6$$

$$B^T_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(0-(2)) = 2$$

$$B^T_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (0-(2)) = -2$$

$$B^T_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(15-(2)) = -13$$

$$B^T_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (5-(-4)) = 9$$

$$B^T_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-(6)) = 7$$

$$B^T_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-(-2)) = 5$$

$$B^T_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-(0)) = -1$$

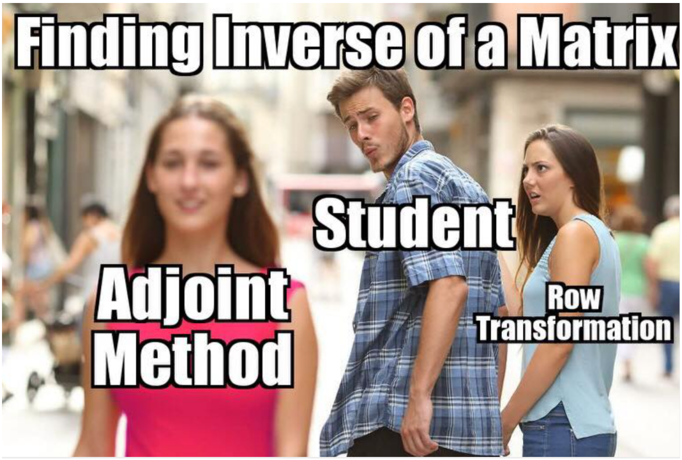
$$B^T_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-(0)) = 1$$

Por lo que $B^{-1} = \dfrac{1}{16} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -13 & 9 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$*, que coincide con la calculada por el método de Gauss, como era de esperar.*

Nota: Hemos llamado A a una matriz (cuadrada), a_{ij} a sus elementos; M_{ij} a sus menores y A_{ij} a sus adjuntos. El problema surge cuando hablemos de matrices M. Proponemos la solución de que m_{ij} sean sus elementos, M_{ij} los menores, entonces a los adjuntos les llamaremos $\boldsymbol{M}_{ij}$ ó ad_{ij}.

Teorema 4.3. *Propiedades de la matiz inversa*

Recordemos las propiedades de la matriz inversa vistas en el capítulo anterior:



Definición: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ *Cálculo:* $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\, ad(A^T)$

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(k \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{k}\, A^{-1}$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4.4.1. Ecuaciones matriciales

Son ecuaciones y sistemas en que las incógnitas (y quizás también los coeficientes) son matrices. $X,\ Y,\ \cdots$ son matrices incógnita, $A,\ B,\ C,\ \cdots$ son datos (matrices).

Este tipo de ejercicios constará usualmente de dos partes: despejar teóricamente la incógnita (si es posible) y realizar las operaciones indicadas a que se ha llegado al despejar.

— * Sistemas de ecuaciones matriciales lineales:

$\begin{cases} aX + bY = M \\ cX + dY = N \end{cases}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, coeficientes reales y $X, Y, M, N \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, siendo X e Y las matrices incógnita y M y N matrices conocidas (datos).

Se resuelven, teóricamente, como si se tratase de sistemas de ecuaciones lineales cualesquiera y, es después, cuando se realizan las operaciones matriciales necesarias para la solución del sistema.

Ejemplo 4.7. *Resuelve* $\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ X + 3Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Si a la segunda ecuación le restamos la primera:

$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la primera ecuación: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2Y =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}$

— * Ecuaciones matriciales:

Son ecuaciones en que tanto coeficientes como incógnitas son matrices.

$AX = B \rightarrow$ si $\exists A^{-1}$ $\therefore$ 'premultiplicando por A^{-1}:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}(B) \rightarrow A^{-1}AX = IX = \boldsymbol{A = A^{-1}B}$

Solo quedaría, en un problema usual, hacer las operaciones que han aparecido al despejar. En este caso, calcular la inversa de A y 'premultiplicar' por B

¡Ojo!: el orden en que se multiplican matrices es MUY importante, por eso insistimos en lo de 'premultiplicar' y 'postmultiplicar'

Veamos otros ejemplos teóricos de resolución de ecuaciones matriciales:

* $XM = N \rightarrow$

Si $\exists M^{-1}$, postmultiplicando: $XMM^{-1} = XI = \boldsymbol{X = NM^{-1}}$

* $AXB = C \rightarrow$

Si existen A^{-1} y B^{-1}, premultiplicando por A^{-1} y postmultiplicando por B^{-1} (lo hacemos más explícitamente en este caso):

$A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \to A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \to$

$IXI = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

* $ABX = C \to$

Si existen A^{-1} y B^{-1}, premultiplicando por A^{-1} y luego por B^{-1}:

$A^{-1}ABX = A^{-1}C \to A^{-1}ABX = A^{-1}C \to IBX = A^{-1}C \Rightarrow$

$BX = A^{-1}C$. Ahora por B^{-1} : $B^{-1}BX = B^{-1}A^{-1}C \to$

$BB^{-1}X = B^{-1}A^{-1}C \to IX = B^{-1}A^{-1}C \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}C$

Obsérvese que también podíamos haber hecho: $(AB)X = C$, si existe $(AB)^{-1} \to (AB)^{-1}(AB)X = (AB)^{-1}C \to IX = (AB)^{-1}C \Rightarrow X = (AB)^{-1}C$, que evidentemente es el mismo resultado anterior, puesto que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

* $AX = BX + C \to$

Primero aislemos la matriz incógnita X en un solo miembro de la ecuación:

$AX - BX = C \to (A - B)X = C \to$ si $\exists (A - B)^{-1} \quad \therefore$

$(A - B)^{-1}(A - B)X = (A - B)^{-1}C \to IX = (A - B)^{-1}C \Rightarrow$

$X = (A - B)^{-1}C$

* $XM = NX + P \to$

Como en el caso anterior: $XM - NX = P$, sacando 'factor común por la izquierda':

$X(M - N) = P$, si existe $(M - N)^{-1}$, postmultiplicando en ste caso:

$X(M - N)(M - N)^{-1} = P(M - N)^{-1} \to XI = P(M - N)^{-1} \Rightarrow$

$X = P(M - N)^{-1}$

* $XM = 2X + N$

Análogamente al caso anterior: $XM-2X=N \to X(M-2)=\cdots$ ¡Un momento!: $M-2$ no tiene ningún sentido. ASTUCIA: usemos la matriz I:

$$XM-2X=N \to XM-X2=N \to XM-X2I=N \to X(M-2I)=N.$$

Si existe la inversa de la matriz $M-2I$, que ahora sí tiene sentido, postmultiplicando tendremos:

$$X(M-2I)(M-2I)^{-1}=N(M-2I)^{-1} \to XI=N(M-2I)^{-1} \Rightarrow$$

$$X=N(M-2I)^{-1}$$

* etc. En problemas veremos, y resolveremos, más casos.

4.4.2. Forma matricial de un SEL

Un sistema de ecuaciones lineales 'cuadrado', es decir, con tantas ecuaciones como incógnitas, se puede interpretar como una ecuación matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots &= \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{AX=B},$$

$$\text{donde: } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A es la matriz de los coeficientes, X la de incógnitas y B la de términos independientes.

Es decir:

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots &= \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

En el caso de que $\exists A^{-1}$, se puede resolver la ecuación matricialemente.

Consideraciones: para usar este método es necesario que el sistema sea cuadrado y la matriz de los coeficientes sea distinta de cero (para que $\exists A^{-1}$. Además, el cálculo de una inversa suele ser largo. El método de Gauss sirve para cualquier sistema de ecuaciones.

En el apartado de problemas veremos como resolver matricialmente un SEL.

4.5. Ejercicios

4.5.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 4.1. *Calcula:*

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad d)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

— a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (-8) = \mathbf{18}$

— b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 30 + 0 - (0 + 0 - 30) = \mathbf{48}$

— c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2 \to F2 - 2F4 \\ F3 \to F3 - F4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \boxed{0} & -1 \\ 3 & -1 & \boxed{0} & -5 \\ 2 & -2 & \boxed{0} & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Longrightarrow$

Desarrollamos por Laplace por los adjuntos de la tercera columna:

$$\rightarrow = 0 + 0 + 0 + 1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -[\,4+6-10-(2+20-6)\,] =$$

$-[0-(16)] = \mathbf{16}$

$$\text{—— d)}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{3}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & 0 & 1 & \text{-2} \end{vmatrix} = \rightarrow$$

Multiplicamos, y dividimos, la última fila por 3, para tenerla preparada y buscar 'ceros en la quinta columna): (también hubiésemos podido buscar 'ceros' en la segunda fila, donde ya hay 3, cambiando $C2$ por$C2-2C1$)

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & \mathbf{0} \\ 6 & 15 & 0 & 3 & \text{-6} \end{vmatrix} = [\,F5 \rightarrow F5 + 2F3\,] = \rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ -1 & 2 & 2 & -1 & \cancel{0} \\ 6 & 15 & -2 & 7 & \cancel{0} \end{vmatrix} = (\text{Laplace } 5^a \text{ columna}) = \rightarrow$$

$$\rightarrow = 0 + 0 + \frac{1}{3}\,3\cdot(-1)^{3+5}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & 15 & -2 & 7 \end{vmatrix} = [\,C3 \rightarrow C3 - 2C1\,] = \rightarrow$$

$$= +\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 15 & -14 & 7 \end{vmatrix} = (\text{Lapalace } 2^a \text{ fila}) = \begin{vmatrix} \cancel{1} & -1 & -2 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & 2 & 4 & -1 \\ \cancel{6} & 15 & -14 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & -2 & 2\\ 2 & 4 & -1\\ 15 & -14 & 7\end{vmatrix}+0+0+0 = -[-28-56+30-(120-14-28)] =$$
$$-[-54-(78)]-[-132] = \mathbf{132}$$ ◇

Ejercicio resuelto 4.2. *Dada* $A = \begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ *, calcula los siguientes adjuntos:* A_{23}; A_{32}; A_{11}

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\ M_{23} = (-1)\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix} = (-1)\ (0-(-3)) = \mathbf{-3}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+3}\ M_{32} = (-1)\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = (-1)\ (4-(0)) = \mathbf{-4}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_1 = +\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} = (2-(0)) = \mathbf{2}$$ ◇

Ejercicio resuelto 4.3. *Sea* $A_n = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & -1 & 2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2\end{pmatrix}$.

Calcula $det(A_2)$; $det(A_3)$; $det(A_4)$. *¿Qué valdrá el* $det(A_n)$ *?*

$$A_2 = \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 2-(-1) = 3 = 3^{2-1}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix} = 4+1-1-(-2-1-2) = 4-(-5) = 9 = 3^2 = 3^{3-1}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} F2 \to F1 + F1 \\ F3 \to F3 + F1 \\ F4 \to F4 + F1 \end{cases} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = diagonal =$$
$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 = 3^3 = 3^{4-1}$

Conjeturamos que $det(A_n) = |A_n| = 3^{n-1}$ Habría que demostrarlo por inducción (ver apéndice C).

◇

Ejercicio resuelto 4.4. *Calcula:* $\begin{vmatrix} 1 & ln2 & (ln2)^2 \\ 1 & ln4 & (ln4)^2 \\ 1 & ln8 & (ln8)^2 \end{vmatrix}$

Es sabido que: $lnx - lny = ln\frac{x}{y} \to \begin{cases} ln4 - ln2 = ln\frac{4}{2} = ln2 \\ ln8 - ln2 = ln\frac{8}{2} = ln4 = ln2^2 = 2ln2 \end{cases}$

Tambien que $lnx + lny = ln(x \cdot y)$, así como $lnx^n = n\ lnx$

Y que: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \to \begin{cases} (ln4)^2 - (ln2)^2 = (ln4 + ln2) \cdot (ln4 - ln2) = \\ = ln8 \cdot ln2 = ln2^3 \cdot ln2 = 3(ln2)^2 \\ ----------- \\ (ln8)^2 - (ln2)^2 = (ln8 + ln2) \cdot (ln8 - ln2) = \\ = ln16 \cdot ln4 = ln2^4 \cdot ln2^2 = 8(ln2)^2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & ln2 & (ln2)^2 \\ 1 & ln4 & (ln4)^2 \\ 1 & ln8 & (ln8)^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2 \to F2 - F1 \\ F3 \to F3 - F1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ln2 & (ln2)^2 \\ 1 & ln2 & 3(ln2)^2 \\ 1 & 2ln2 & 8(ln2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} ln2 \text{ factor común } C2 \\ (ln2)^2 \text{ factor común } C3 \end{cases} = (ln2)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = [F3 \to F3 - 2F2] =$$

$$(ln2)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ diagonal } = (ln2)^3 1 \cdot 1 \cdot 2 = \boldsymbol{2(ln2)^3}$$

◇

Ejercicio resuelto 4.5. *Calcula:* $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2 \to F2+F1 \\ F3 \to F3+F1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & x+a \\ 0 & 0 & x+a \end{vmatrix} = (diagonal) =$$

$= \boldsymbol{2a \cdot (x+a)^2}$ ◇

Ejercicio resuelto 4.6. *Calcula:* $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2 \to F2-F1 \\ F3 \to F3-F1 \\ F4 \to F4-F1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a \text{ factor común F1} \\ (b-a) \text{ factor común F2} \end{bmatrix} = a \cdot (b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F3 \to F3-(b-a)F2 \\ F4 \to F4-(b-a)F2 \end{bmatrix} = a \cdot (b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = (F4 \to F4-F3) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = \text{(diagonal)} = \boldsymbol{a(b-a)(c-b)(b-c)}$$ ◇

Ejercicio resuelto 4.7. *Sabiendo que* $\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & d \\ c & 3 & d \end{vmatrix} = 5$ *encuentra el valor de los siguientes determinantes:*

$$a)\ \begin{vmatrix} a+2d & 2 & d \\ b+2d & 4 & d \\ c+2d & 6 & d \end{vmatrix};\quad b)\ \begin{vmatrix} a & 3d & -1-2a \\ b & 3d & -2-2b \\ c & 3d & -3-2c \end{vmatrix};\quad c)\ \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ a+b+c & b & c \\ 3d & d & d \end{vmatrix} =$$

— a) $\begin{vmatrix} a+2d & 2 & d \\ b+2d & 4 & d \\ c+2d & 6 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & d \\ b & 4 & d \\ c & 6 & d \end{vmatrix} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 2d & 2 & d \\ 2d & 4 & d \\ 2d & 6 & d \end{vmatrix}}$ $=$ [$C1$ proporc. $C3$]=

$= 2 \begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & d \\ c & 3 & d \end{vmatrix}$ = [2 factor común $C2$]=$2 \cdot 5$ = [por hipótesis] = **10**

—b) $\begin{vmatrix} a & 3d & -1-2a \\ b & 3d & -2-2b \\ c & 3d & -3-2c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 3d & 1 \\ b & 3d & 2 \\ c & 3d & 3 \end{vmatrix} - \cancelto{0}{\begin{vmatrix} a & 3d & 2a \\ b & 3d & 2b \\ c & 3d & 2c \end{vmatrix}}$ = [$C3$ proporc. $C1$]=

$= -3 \begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & d & 2 \\ c & d & 3 \end{vmatrix}$ = [3 factor común $C2$]= $= -3\,(-1) \begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & d \\ c & 3 & d \end{vmatrix} =$

Intercambio $C2 \leftrightarrow C3$= $(-3)(-1)\ 5$ [por hipótesis]=**15**

— c) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ a+b+c & b & c \\ 3d & d & d \end{vmatrix} = (\ *\ ) = \begin{vmatrix} 1+2+3 & 2 & 3 \\ a+b+c & b & c \\ d+d+d & d & d \end{vmatrix} =$

= [rompemos como suma de tres determinantes]=

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & d & d \end{vmatrix} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ b & b & c \\ d & d & d \end{vmatrix}} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ c & b & c \\ d & d & d \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} \text{det-2: } C1 = C2 \\ \text{det-3: } C1 = C3 \\ \text{det-1: } |A| = |A^t| \end{bmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & d \\ 3 & c & d \end{vmatrix}$ = [Intercambio: $C1 \leftrightarrow C2$] $= - \begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & d \\ c & 3 & d \end{vmatrix} =$ **−5**, por hipótesis.

◇

Ejercicio resuelto 4.8. *Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 4$ y $|B| = 2$. Calcula:*

a) $|AB|$; *b)* $|(A^TB)^{-1}|$; *c)* $|A^3B^2|$; *d)* $|5A|$

Usando las propiedades de los determinantes:

— a) $|AB| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 2 = \mathbf{8}$

— b) $|(A^TB)^{-1}| = \dfrac{1}{|A^TB|} = \dfrac{1}{|A^T| \cdot |B|} = \dfrac{1}{|A| \cdot |B|} = \dfrac{1}{4 \cdot 2} = \mathbf{\dfrac{1}{8}}$

— c) $|A^3B^2| = |A|^3 \cdot |B|^2 = 4^3 \cdot 2^2 = \mathbf{256}$

— d) Como A es de orden 3: $|5A| = 5^3\,|A| = 5^3 \cdot 4 = \mathbf{500}$ $\diamond$

Ejercicio resuelto 4.9. *Considera* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ *, sin usar Sarrus, calcula los siguientes determinantes:*

$$a)\ \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ (3 factor común F1) $= 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (F1 \leftrightarrow F2)$ $= -3\ \dfrac{2}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =\ 2 \cdot F3\ = -\dfrac{3}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$ (por hipótesis) $=$ $-\dfrac{3}{2}4 = \mathbf{-6}$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} =$ (suma dos determinantes por F3) $=$

$\cancelto{0}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x & y & z \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+0 & 3y+2 & 3z+4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$ primer det. es cero por F1=F3; segundo determinante como suma de dos por la F2 $=$

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$ (3 factor común primer det. F2; 2 factor común segundo det. F3) $= 3 \cancelto{0}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}} + 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (primer determinante es cero por $F1 = F2$; segundo determinantes: $F1 \leftrightarrow F2$) $= -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $(F1 \leftrightarrow F3)$ $= +2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$ (por hipótesis) $= 2 \cdot 4 = \mathbf{8}$

◇

Ejercicio resuelto 4.10. *Para* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, calcula*

$|M|$; $|M^T|$; $|M^3|$; $|4M|$; $|M^{-1}|$

Por Sarrus, $|M| = -1 + 3 - (2 + 2) = -2$

$|M^T| = |M| = -2$

$|M^3| = |M|^3 = (-2)^3 = -8$

$|4M| = 4^3\,|M| = 4^3 \cdot (-2) = -128$

$|M^{-1}| = \dfrac{1}{|M|} = -\dfrac{1}{2}$

◇

Ejercicio resuelto 4.11. *Sin desarrollar el determinante, prueba que* $3, 4$ *y* -7 *sos raíces del polinomio* $P(x) = \begin{vmatrix} 4 & 4 & x \\ 3 & x & 4 \\ x & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$P(3) = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos columnas iguales $C1 = C2$

$P(4) = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos columnas iguales $C2 = C3$

$P(-7) = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Se observa que $F1 + F2 + F3 = 0 \to$

$F1 = -F2 - F3$, por ejemplo. Una fila es combinación lineal de otras, luego su determinante es cero. De otro modo, si usamos la propiedad que dice 'a una línea de un determinantes se le puede sumar un número por otra línea': $F1 \to F1 + F2$; a la nueva $F1 \to F1 + F3$, tendríamos que la primera fila son todos sus elementos cero y por la propiedad que dice que 'si un determinante tiene una línea de ceros, el determinante es cero', quedaría probado lo que pretendíamos demostrar.

◇

Ejercicio resuelto 4.12. *Sin desarrollar, resuelve:* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2 \to F2 - F1 \\ F3 \to F3 - F1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = (diagonal) =$$
$(x-1)(x^2-1) = 0 \to \boldsymbol{x = 1 \ \wedge \ x = -1}$ ◇

Ejercicio resuelto 4.13. *Calcula de determinante de Vandermonde de orden 4: (en el apéndice D se ve la generalización de este determinante y una de sus múltiples aplicaciones.)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F4 \to F4 - aF3 \\ F3 \to F3 - aF2 \\ F2 \to F2 - aF1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ac \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ac^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(a-c) & d(a-d) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} =\rightarrow$$

Desarrollo de Laplace por adjuntos de la primera columna

$$\rightarrow = 1\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(a-c) & d(a-d) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} + 0\ +\ 0\ +\ 0 =\rightarrow$$

$$\text{factor común} \begin{cases} b-a \text{ por } C1 \\ c-a \text{ por } C2 \\ d-a \text{ por } C3 \end{cases} \rightarrow = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =\rightarrow$$

$$\rightarrow = \begin{bmatrix} F4 \to F3 - bF2 \\ F2 \to F2 - bF1 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-bd \end{vmatrix} =\rightarrow$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} =\rightarrow$$

Desarrollo de Laplace por adjuntos de la primera columna

$$(b-a)(c-a)(d-a)\ 1\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} =\rightarrow$$

$$\text{factor común} \begin{cases} c-b \text{ por } C1 \\ d-b \text{ por } C2 \end{cases}$$

$$\rightarrow = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)}$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 4.14. *Determina cuál de las siguientes matrices es regular:*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Una matriz es regular o invertible si su determinante es distinto de cero.

$|P| = 4 - (-5) = 9 \neq 0 \rightarrow \exists\ P^{-1}$; P es regular.

$|Q| = 4 - 4 = 0 \rightarrow \nexists\ Q^{-1}$; Q no es regular, es singular.

$|R| = \text{ (Sarrus) } = 0 \rightarrow \nexists\ R^{-1}$; R no es regular, es singular.

$|S| = \text{ (matriz diagonal) } = 1\ (-1)\ (-3) = 3 \neq 0 \rightarrow \exists\ S^{-1}$; S es regular.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 4.15. *Calcula la inversa de las matrices siguientes:*

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*** Inversa de M: $\quad |M| = 7 - (-6) = 13 \neq 0 \rightarrow \exists\ M^{-1}$

$$M^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{Adjuntos de } M^T\text{:}$$

$\boldsymbol{M}_{11}^T = (-1)^{1+1} M_{11}^T = +|1| = 1 \qquad \boldsymbol{M}_{12}^T = (-1)^{1+2} M_{12}^T = -|-2| = 2$

$\boldsymbol{M}_{21}^T = (-1)^{2+1} M_{21}^T = -|3| = -3 \qquad \boldsymbol{M}_{22}^T = (-1)^{2+2} M_{22}^T = +|7| = 7$

Luego: $\boldsymbol{M^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}}$

*** Inversa de N: $\quad |N| = 0 + 4 + 0 - (-2 + 0 + 0) = 6 \neq 0 \rightarrow \exists\ N^{-1}$

$$N^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{Adjuntos de } N^T\text{ :}$$

$$N_{11}^T = (-1)^{1+1}\ M_{11}^T = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +(0-0) = 0$$

$$N_{12}^T = (-1)^{1+2}\ M_{12}^T = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-(-2)) = -2$$

$$N_{13}^T = (-1)^{1+3}\ M_{13}^T = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = +(0-(-2)) = -2$$

$$N_{21}^T = (-1)^{2+1}\ M_{21}^T = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -(0-0) = 0$$

$$N_{22}^T = (-1)^{2+2}\ M_{22}^T = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = +(0-(-2)) = 2$$

$$N_{23}^T = (-1)^{2+3}\ M_{23}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-(-4)) = -4$$

$$N_{31}^T = (-1)^{3+1}\ M_{31}^T = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(2-(-1)) = 3$$

$$N_{32}^T = (-1)^{3+2}\ M_{32}^T = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$$

$$N_{33}^T = (-1)^{3+3}\ M_{33}^T = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +(2-0) = 2$$

Luego: $\boldsymbol{N^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$ ◇

Ejercicio resuelto 4.16. *Calcula para qué valores del parámetro λ tienen inversa las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -2\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 3\lambda - 4\lambda^2 - (-6\lambda + 2) = -4\lambda^2 + 9\lambda - 2 = 0 \leftrightarrow \lambda = 2 \ \wedge \ \lambda = \frac{1}{4}$ luego, $\exists \ \boldsymbol{A^{-1}} \ \forall \boldsymbol{\lambda} \neq \{\mathbf{2}, \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\}$

$|B| = 3 - (2) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists \ \boldsymbol{B^{-1}} \ \forall \boldsymbol{\lambda} \ \in \mathbb{R}$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \ \text{(diagonal)} \ = 2\ (\lambda - 2)\ 1\ (-1) = -2\lambda + 4 =$$

$0 \leftrightarrow \lambda = 2$ luego, $\exists \ \boldsymbol{C^{-1}} \ \forall \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{2}$ ◇

Ejercicio resuelto 4.17. *Determina para que valores de x e y, las siguientes matrices tienen inversa:*

$$P = \begin{pmatrix} x + y & x \\ 2y & x + y \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & y & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

$|P| = (x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x \neq 0 \ \vee \ y \neq 0 \ : \ \exists P^{-1}}$

$|Q| = 0 \ \forall x, y \ \in \mathbb{R} \rightarrow \nexists \boldsymbol{x} \ \wedge \ \nexists \boldsymbol{y} \ / \ \exists \boldsymbol{Q^{-1}}$

$|R| = 1 \neq 0 \ \forall \boldsymbol{x, y} \ \in \mathbb{R} \ \exists \ \boldsymbol{R^{-1}}$ ◇

Ejercicio resuelto 4.18. *Sea* $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Determina para que valores de m es M singular y calcula, si es posible $M*-1$ para $m = 2$*

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + m - 2 - (0 - 2 - 1) = m + 1 = 0 \leftrightarrow m = -1 \Rightarrow$$

$\exists M^{-1} : \ \forall m \neq -1$. La matriz es singular (no tiene inversa) si $\boldsymbol{m = -1}$.

Para $m = 2 \neq -1 \rightarrow \exists M^{-1}$: $\quad |M| = 2{+}1 = 3; \quad M^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M^T_{11}} = (-1)^{1+1} \ M^T_{11} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +(0 - (-1)) = 1$$

$$\boldsymbol{M^T_{12}} = (-1)^{1+2}\ M^T_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-(2)) = 3$$

$$\boldsymbol{M^T_{13}} = (-1)^{1+3}\ M^T_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +(1-(0)) = 1$$

$$\boldsymbol{M^T_{21}} = (-1)^{2+1}\ M^T_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-(2)) = 1$$

$$\boldsymbol{M^T_{22}} = (-1)^{2+2}\ M^T_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +(2-(-4)) = 6$$

$$\boldsymbol{M^T_{23}} = (-1)^{2+3}\ M^T_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-(2)) = 4$$

$$\boldsymbol{M^T_{31}} = (-1)^{3+1}\ M^T_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +(1-(0)) = 1$$

$$\boldsymbol{M^T_{32}} = (-1)^{3+2}\ M^T_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-(2)) = 0$$

$$\boldsymbol{M^T_{33}} = (-1)^{3+3}\ M^T_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +(0-(-1)) = 1$$

Luego: $\boldsymbol{M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

◇

Ejercicio resuelto 4.19. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$

a) Los valores de x para los A tiene inversa.

b) La inversa de A para $x = 2$.

c) El valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la matriz $k \cdot A$ tenga determinante 1 *cuando $x = 2$.*

—— a) $|A| = -x^2 - (-4x+3) = -x^2 + 4x - 3 = 0 \leftrightarrow x = 1 \wedge x = 3$

$\exists \boldsymbol{A^{-1}}$ **:** $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \sim \boldsymbol{\{1, 3\}}$

— b) $x = 2 \neq \{1, 3\} \rightarrow |A| = -(2^2) + 4(2) - 3 = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

$A^T(x = 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Calculo de adjuntos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11}^T = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = +(-4 - (3)) = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12}^T = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(0 - (-1)) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\ M_{13}^T = + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +(0 - (-2)) = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21}^T = - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(0 - (12)) = 12$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22}^T = + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = +(-2 - (-4)) = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\ M_{23}^T = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - (0)) = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\ M_{31}^T = + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +(0 - (8)) = -8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\ M_{32}^T = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - (0)) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\ M_{33}^T = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +(2 - (0)) = 2$$

Luego $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{12} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

— c) $|kA| = k^3\ |A(x = 2)| = k^3 \cdot 1 = k^3 = 1 \leftrightarrow \boldsymbol{k = 1}$

◇

Ejercicio resuelto 4.20. *Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales:*

$$3A-2B=\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&0&9\\15&-4&4\end{pmatrix}=M\ ;\quad 2A+B=\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}=N$$

Resolvamos, primero teóricamente. Multipliquemos la segunda ecuación por 2

$$\begin{cases}3A-2B &= M\\ 4A+2B &= 2N\end{cases}\rightarrow\ \text{sumando: } 7A=M+2N\rightarrow \boldsymbol{A}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}(\boldsymbol{M}+\mathbf{2}\boldsymbol{N})$$

Multiplicando la primera ec. por -2 y la segundo por 3:

$$\begin{cases}-6A+4B &= -2M\\ 6A+3B &= 3N\end{cases}\rightarrow\ \text{sumando: } 7B=3N-2M\rightarrow \boldsymbol{A}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}(\mathbf{3}\boldsymbol{N}-\mathbf{2}\boldsymbol{M})$$

Por lo que :

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&0&9\\15&-4&4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{-1}&\mathbf{3}&\mathbf{2}\\\mathbf{5}&\mathbf{-2}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{7}\left[3\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&0&9\\15&-4&4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{-1}&\mathbf{2}\\\mathbf{-4}&\mathbf{0}&\mathbf{3}\\\mathbf{0}&\mathbf{-1}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

◇

Ejercicio resuelto 4.21. *Resuelve, teóricamente, las siguientes ecuaciones matriciales:*

a) $M+N^TX=P$

b) $A+BXB=C$

c) $MX+N=M+X$

d) $A(B+XA)=C$

e) $XPQ-P=XQ$

f) $M^2X=M$

g) $XP-Q=X$

h) $ABX+2A=3X+4B$

— a) $M+N^TX=P\rightarrow N^TX=P-M;$ si $\exists(N^T)^{-1}\rightarrow$

$(N^T)^{-1} \cdot (N^T X) = (N^T)^{-1} \cdot (P - M) \rightarrow (N^T)^{-1} N X = [\ IX = X\ ] \rightarrow$

$\boldsymbol{X = (N^T)^{-1} \cdot (P - M)}$

— b) $A + BXB = C \rightarrow BXB = C - A$; si $\exists B^{-1} \rightarrow B^{-1} \cdot (BXB) \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot (C - A) \cdot B^{-1} \rightarrow [\ IXI = X\ ] \rightarrow \boldsymbol{X = B^{-1} \cdot (C - A) \cdot B^{-1}}$

— c) $MX + N = M + X \rightarrow MX - X = -N \rightarrow MX - IX = -N \rightarrow (M - I)X = -N$; si $\exists (M - I)^{-1} \rightarrow (M - N)^{-1} \cdot [(M - I)X] = (M - I)^{-1}(-N)$

como $(M - N)^{-1}(M - N) = I$ e $IX = X \rightarrow \boldsymbol{X = -(M - I)^{-1} N}$

— d) $A(B + XA) = C \rightarrow AB + AXA = C \rightarrow AXA = C - AB \rightarrow$

si $\exists A^{-1} \rightarrow A^{-}1 \cdot (AXA) \cdot A^{-}1 = A^{-1} \cdot (C - AB) \cdot A^{-1} \rightarrow$

Como $A^{-1}A = AA^{-1} = A$ y $IXI = X \rightarrow \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot (C - AB) \cdot A^{-1}}$

— e) $XPQ - P = XQ \rightarrow XPQ - XQ = P \rightarrow X(PQ - Q) = P \rightarrow$ si $\exists\ (PQ - Q)^{-1} \rightarrow X(PQ - Q) \cdot (PQ - Q)^{-1} = P \cdot (PQ - Q)^{-1}$

Como $(PQ - Q) \cdot (PQ - Q)^{-1} = I$ e $XI = X \rightarrow \boldsymbol{X = P \cdot (PQ - Q)^{-1}}$

— f) $M^2X = M \rightarrow$ si $\exists\ M^{-1} \rightarrow M^{-1}M^2X = M^{-1}M \rightarrow M^{-1}M(MX) = I \rightarrow IMX = I \rightarrow MX = I \rightarrow$ Por definición de inversa: $\boldsymbol{X = M^{-1}}$

— g) $XP - Q = X \rightarrow XP + X = Q \rightarrow XP + XI = Q \rightarrow X(P - I) = Q$

Si $\exists (P - I)^{-1} \rightarrow X(P - I) \cdot (P - I)^{-1} = Q \cdot (P - I)^{-1}$, Puesto que $(P - I) \cdot (P - I)^{-1} = I$ e $XI = X \rightarrow \boldsymbol{X = Q \cdot (P - I)^{-1}}$

— h) $ABX + 2A = 3X + 4B \rightarrow ABX - 3X = 4B - 2A \rightarrow$

$ABX - 3IX = 4B - 2A \rightarrow (AB - 3I)X = 4B - 2A \rightarrow$ si $\exists (AB - 3I)^{-1} \rightarrow$

$(AB - 3I)^{-1} \cdot (AB - 3I)X = (AB - 3I)^{-1} \cdot (4B - 2A) \rightarrow$

$IX = \boldsymbol{X = (AB - 3I)^{-1} \cdot (4B - 2A)}$

◇

Ejercicio resuelto 4.22. *Resuelve la ecuación:* $A = AXA^{-1} + B$, *donde* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Primero, resolvamos teóricamente la ecuación:

$A = AXA^{-1} + B \rightarrow AXA^{-1} = A - B$. Es evidente que $\exists\ A^{-1}$, puesto que forma parte de la ecuación (además, $|A| = 6 - 8 = -2 \neq 0$), por lo que:

$\color{red}{A^{-1}}AXA^{-1}\color{blue}{A} = \color{red}{A^{-1}}(A - B)\color{blue}{A}$, como $A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad \rightarrow$ $\boldsymbol{X = A^{-1}(A - B)A}$

Ahora queda la parte práctica, calcular A^{-1} y operar el el orden qe se nos indica:

*** Cálculo de $A^{-1} \rightarrow |A| = -2 \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$A^T_{11} = (-1)^{1+1}M^T_{11} = +|2| = 2 \qquad A^T_{12} = (-1)^{1+2}M^T_{12} = -|4| = -4$

$A^T_{21} = (-1)^{2+1}M^T_{21} = -|2| = -2 \qquad A^T_{22} = (-1)^{2+2}M^T_{22} = +|3| = 3$

Finalmente: $\quad A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

*** Operaciones: $\boldsymbol{X} = A^{-1}(A - B)A = \!\!\rightarrow =$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \!\!\rightarrow$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \!\!\rightarrow$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

◇

Ejercicio resuelto 4.23. *Encuenta X / $X\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$*

En esta ocasión no hay manera de despejar la matriz X, solo podemos resolver el problema 'a la fuerza'. Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b=a+c \\ a+b=b+d \\ c+d=1+c \\ c+d=b+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=c \\ a=d \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \ \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \ \in \ \mathbb{R} \qquad \diamond$$

Ejercicio resuelto 4.24. *Resuelve:* $M(2N+I) = NXN + M$ *, siendo* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolvamos primero la ecuación de modo teórico:

$NXN = M(2N+I) - M = 2MN + \cancel{MI} - \cancel{M} = 2MN \rightarrow$ si $\exists N^{-1}$:

$\underline{N^{-1} \cdot N}X\underline{N \cdot N^{-1}} = N^{-1} \cdot 2MN \cdot N^{-1} = 2N^{-1}M\underline{NN^{-1}} \rightarrow$

$\underline{I}X\underline{I} = \boldsymbol{X} = 2N^{-1}M\underline{I} = \boldsymbol{2N^{-1}M}$

Vamos a por la parte operativa:

$|N| = 1 - 0 = 1 \neq 0 \exists N^{-1}; \quad N^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuntos:

$N_{11}^T = (-1)^{1+1} M_{11}^T = +|1| = 1$ $\qquad N_{12}^T = (-1)^{1+2} M_{12}^T = -|-1| = 1$

$N_{21}^T = (-1)^{2+1} M_{21}^T = -|0| = 0$ $\qquad N_{22}^T = (-1)^{2+2} M_{22}^T = +|1| = 1$

Luego: $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Operando: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 4.25. .

Resuelve, matricialmente, si es posible: $\begin{cases} 3x+2y & = 1 \\ x - z & = 0 \\ x+y+z & = 1 \end{cases}$

El sistema se puede escribir como $A \cdot X = B$,

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \text{ y } \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ,$$

por lo que si $\exists\, A^{-1} \rightarrow \underline{A^{-1}A}X = A^{-1}B \rightarrow \underline{I}X = \boldsymbol{X = A^{-1}B}$

$$|A| = 0 + 0 - 2 - (0 - 3 + 2) = -1 \neq 0 \exists\, A^{-1} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando los adjuntos correspondientes:

$$\begin{array}{lll} A^T_{11} = 1 & A^T_{12} = -2 & A^T_{13} = -2 \\ A^T_{21} = -2 & A^T_{22} = 3 & A^T_{23} = 3 \\ A^T_{31} = 1 & A^T_{32} = -1 & A^T_{33} = -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que:

$$\boldsymbol{X =} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = -1} \\ \boldsymbol{z = 1} \end{pmatrix}$$

Sistema Compatible y Determinado (SCD).

◇

Ejercicio resuelto 4.26. .

Resuelve matricialmente, si es posible: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

$$AX = B \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -4 - 15 = -19 \neq 0 \rightarrow \exists\, A^{-1};$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Resolución teórica: $A^{-1} \cdot AX = IX = \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$

$A^T_{11} = (-1)^{1+1} M^T_{11} = -2$ $\qquad A^T_{12} = (-1)^{1+2} M^T_{12} = -3$

$A^T_{21} = (-1)^{2+1} M^T_{21} = -5$ $\qquad A^T_{22} = (-1)^{2+2} M^T_{22} = 2$

Luego: $A^{-1} = -\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Por lo que: $X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} -19 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Solución: $\boldsymbol{x = 1;\ y = 2}$, **SCD**.

◇

4.5.2. Ejercicios propuestos

Las soluciones numéricas a los problemas de matrices se pueden comprobar con cualquier sw como calculadoras o online como 'www.wolframalpha.com' o 'www.symbolab.com'.

1. Calcula los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}\quad b)\ \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}\quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}\quad d)\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$c)\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\quad d)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 5 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix}\quad e)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\quad f)\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solución: usa un sw. adecuado para comprobar tus resultados.

2. Calcula los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 2 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{vmatrix}\quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

Solución: usa un sw. adecuado para comprobar tus resultados.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -x & 3 & -1 \\ x^2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0\ b)\ \begin{vmatrix} a-x & x & 1 \\ a+x & x/2 & -3 \\ x & x/3 & 0 \end{vmatrix} = 0\ c)\ \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0.$$

Solución: $a)$ $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{4}$ $b)$ $0,\ \frac{8a}{19}$ $c)$ $-\frac{abc}{ab+ac+bc}$.

4. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

Solución: $x = 1 \ \wedge \ x = -1$.

5. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, comprueba que:

$a)$ $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ $b)$ $|5A^2B^{-1}| = 5^3 \dfrac{|A|^2}{|B|}$

Solución: Sí; Sí.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $|A^T|$; $|AA^T|$; $|2A|$; $|4A^{-1}|$

Solución: 19; 19^2; 152; 64/19.

7. Calcula los valores de x para los que $A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$ es singular (no invertible).

Solución: -2; $2/3$.

8. Dada $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se define la matriz $N = M - \lambda I$. Encuentra los valores de λ para los que $|B| = 0$

Solución: $\lambda = \pm 1$.

9. Dada $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se define la matriz $Q = P^2 - \lambda P$. Encuentra los valores de λ para los que $|Q| = 0$

Solución: $\lambda = 1 \ \wedge \ \lambda = 2$.

10. Encuentra las raíces del polinomio $p(x) = |A|$, con $A = \begin{pmatrix} x & x-1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & x+1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $x = -1 \ \wedge \ x = 4$.

11. Calcula el valor de x para que dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & x-1 \\ 2 & x+1 & 0 \end{pmatrix}$ se cumpla que $|A| = |B|$

Solución: $x = -1 \ \wedge \ x = 3$.

12. Reseuelve: $\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$

Usa propiedades de los determinantes.

Solución: $x = -1 \ \wedge \ x = 0 \ \wedge \ x = 1$.

13. Calcula: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

Solución: $a(b-1)(c-1)(d-1)$.

14. Calcula $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$

Solución: $-abc$.

15. Calcula: $a)$ $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} ab & 2ac & 8a^2 \\ 2b^2 & bc & ab \\ 2bc & c^2 & 2ac \end{vmatrix}$

Solución:$a)$ 0; $b)$ $-3ab^2c^2$.

16. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcula:

$a)$ $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix}$; $c)$ $\begin{vmatrix} 2a-p & 3a & x+2a \\ 2b-q & 3b & y+2b \\ r-2c & -3c & -z-2c \end{vmatrix}$.

Solución:$a)$ 14; $b)$ -35; $c)$ 189 .

17. Demuestra que $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

Solución: Cierto.

18. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = n$, calcula:

a) el determinante de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}.$$

b) Considera la función $f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$, sabiendo que $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$, determina los valores de a y b

Solución: *a)* $|A| = n$; *b)* $|B| = 36n$; *b)* $a = 0$; $b = -1$.

19. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+3 & b+3 & c+3 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 1-x & 1-y & 1-z \end{vmatrix}$.

Solución: *a)* $3/2$; *b)* -3; *c)* -6.

20. Calcula $\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 10a & 10b & 10c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{vmatrix}$

Determinante Vandermonde orden 3.

Solución: $210(c-a)(c-b)(b-a)$.

21. Demuestra que $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Solución: Cierto.

22. Resuelve las ecuaciones:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

Solución: $a); x = \pm 2 \ \wedge \ x = \pm 1; \quad b)\ x = 0 \ \vee \ y = 0.$

23. Resuelve $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & x & x+1 \\ 6 & x+4 & x & x+1 \\ x+5 & x+4 & x & x+1 \end{vmatrix}$

Solución: $x = 1;\ x = 2;\ x = 3$.

24. Sean $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & y & 0 \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$, determina los valores de x e y que hacen que: $|A|^2 - 2|A|\,|B| + 1 = 0$

Solución: $\forall x \in \mathbb{R};\ y = 1$.

25. Calcula las inversas de la siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$; $a \neq 0$

h) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

Solución: usa un sw. adecuado para comprobar tus resultados.

26. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss y por adjuntos.

Solución: Obviamente, coinciden.

27. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Solución: Sí.

28. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula el valor de a para que exista M^{-1} y calcula la inversa para $a = 0$

Solución: $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 7$.

29. Sea $A = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \sin x & 0 \\ \sin x + \cos x & \sin x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$. Determina para qué valores x existe la inversa de A y calcúlala en esos casos.

Solución: $\exists A^{-1}, \ \forall x \in \mathbb{R};$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \sin x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

30. Sea $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de λ existe la inversa de A? Calcula, si es posible, $A^{-1}(-2)$

Solución: $\lambda \neq \pm 1$; sí es posible .

31. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\cos x & 1-\sin x \\ 1 & 1+\sin x & 1+\cos x \end{pmatrix}$. Determina para que valores existe la inversa de M y cacúlala para esos valres.

Solución: $\exists M^{-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1+2\cos x & \sin x - \cos x & -\sin x - \cos x \\ -\sin x - \cos x & \cos x & \sin x \\ \sin x - \cos x & -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

32. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & .1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Determina las matrices X e Y que verifican: $\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$

Solución: $X = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

33. Encuentra A y B tales que: $\begin{cases} 2A + B = C^2 \\ A - B = C^{-1} \end{cases}$, siendo $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 14 & 30 \end{pmatrix}$; $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 9 & 33 \end{pmatrix}$.

34. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Encuentra las matrices X e Y que cumplen: $\begin{cases} 2X + eY = A \\ x + 2Y = B \end{cases}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

35. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, resuelve las ecuaciones:

a) $AX = B$

b) $XA = B$

c) $ABX = C$

d) $XACB = I$

e) $AX + I = BX + C$

f) $AXA = BC^T$

g) $AX + B = C - 2A$

h) $2X - BC^T X = A$

i) $AX - B^T CX = CA + 3X$

j) $AXB + CX = I$

$X =\quad A^{-1}B;\ BA^{-1};\ (AB)^{-1}C;\ (ABC)^{-1}; (A-B)^{-1}(C-I);\ A^{-1}BC^T A^{-1}$

$X =\quad A^{-1}(C-2A-B);\ (2I - BC^T)^{-1}A;\ (A - B^T C - 3I)^{-1}C;$

$X =$ no se puede matricialmente

36. Sea $M = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Encuentra los valores a para los que M tiene inversa.

b) Encuentra la matriz X, solución de la ecuación matricial :

$MX + N = I$, donde I es la matriz identidad, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y M la matriz del enunciado para $a = 3$.

Solución: $a)$ $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 2$; $\quad b)$ $X = M^{-1}(I - N)$

37. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de m tiene solución $AX + 2B = 3C$?, resuelve la ecuación cuando $m = 2$

Solución: $m \neq 0$; $\quad X = A^{-1}(3C - 2B) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

38. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Encuentra X tal que $AX + CB * T = BB^T$

Solución: $A = A^{-1}(B - C)B^T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -26 \end{pmatrix}$.

39. Sean $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelve las ecuaciones: $a)$ $I - XA = 3X + B$; $\quad b)$ $B^T X - BX - X = A$

Solución: $a)$ $X = (I - B)(3I + A)^{-1}$; $\;b)$ $X = (B^T - B - I)^{-1}A$.

40. Despeja X en la ecuación: $(x + M)^2 - XM = I + X^2$

Solución: $X = M^{-1} - M$.

41. Considera la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de a tine solución esta ecuación?. Resuelve, si es posible, para $a = 1$.

Solución: $a \neq 6/7$; $\quad X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

42. Resuelve matricialmente, si es posible: $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$

Solución: $x = -1;\ y = 1;\ z = 8.$

43. Resuelve matricialmente, si es posible: $\begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$

Solución: No es posible .

44. Resuelve matricialmente, si es posible: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Solución: $x = 1;\ y = 1.$

45. Resuelve matricialmente, si es posible: $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$

Solución: $x = 1;\ y = 1;\ z = -1.$

46. Sean $A = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el determinante de la matriz $3B$ y obtén x para el cual dicho determinante vale 162.

b) Demuestra que $\nexists\, C^{-1}$ para ningún valor de y

Solución: $a)\ 3^3 \cdot 6x = 162 \leftrightarrow x = 1;\quad b)\ |B| = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$.

4.5.3. Cuestiones

Q. 1. Si $|A| = -1$ y $|2A| = -16$, ¿de qué orden es A?

Ayuda: . Usa propiedades de los determinantes

Q. 2. Si $|B| = -1$ y $|2B| = -8$, ¿de qué orden es B?

Ayuda: Usa propiedades de los determinantes.

Q. 3. Si $C_{4\times 4}$ y $|C| = 4$, calcula $|5B|$ y $|B^2|$.

Ayuda: Usa propiedades de los determinantes..

Q. 4. Sean $c_1,\ c_2,\ c_3$ las columnas de una matriz cuadrada de orden 3, A, y tal de $|A| = 7$, calcula: $|c_3\ \ c_1\ \ c_2|$; $|3c_1\ \ c_2+c_1\ \ -c_3|$; $|c_1+2c_3\ \ c_2\ \ 2c_3-c_1|$; $|A^3|$; $|A^{-1}|$; $|2A|$

Ayuda: Usa propiedades de los determinantes..

Q. 5. Si $f_1,\ f_2,\ f_3$ son las tres filas de una matriz cuadrada de orden 3, B, tal que $|B| = 3$, calcula: $|B^{-1}|$; $|(B^T)^4|$; $|5B|$; $|5f_1 - f_3\ \ 3f_3\ \ f_2|$

Ayuda: Usa propiedades de los determinantes.

Q. 6. Si $C_{2\times 2}$, $c_1,\ c_2$ sus dos columnas y $|C| = 5$; sea $B2\times 2\ /\ |B| = 2$ y sea $C_{2\times 2} = (4c_2\ \ c1 - c_2)$, calcula $|BD^{-1}|$

Ayuda: Usa propiedades de los determinantes.

Q. 7. Si $a,\ b,\ c,\ d\ \in \mathbb{R} \sim \{0\}$, demuestra, sin usar Sarrus, que $\begin{vmatrix} 1/a & 1b & 1/c \\ bc & ac & ab \\ d & d & d \end{vmatrix} = 0$

Ayuda: Usa propiedades de los determinantes.

Q. 8. Una matriz cuadrad, A, se dice que es idempotente si $A^2 = A$. ¿Qué valores puede tomar el valor de una matriz idempotente?

Ayuda: $0 \vee 1$.

4.6. Resumen

Resumen de determinantes

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to |A| \in \mathbb{R} : \begin{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = qd - bc \\ M_3 \to \text{ regla de Sarrus.} \end{cases}$$

Propiedades: ($l_1, l_2, \cdots, l_n$ son las líneas de M, filas o columnas).

- $|A^T| = |A|$
- $det(l_1, l_2, \cdots, 0, \cdots, l_n) = 0$
- $det(l_1, \cdots, l_i, \cdots, l_j, \cdots, l_n) = det(l_1, \cdots, l_j, \cdots, l_i, \cdots, l_n)$
- $det(l_1, \cdots, l_i, \cdots, l_n) = det(l_1, \cdots, l_i + k \cdot lj, \cdots, l_n)$
- $det(l_1, \cdots, l_i, \cdots, k \cdot li, \cdots, l_n) = 0$
- $k \cdot det(l_1, \cdots, l_i, \cdots, l_n) = det(l_1, \cdots, k \cdot l_i, \cdots, l_n)$
- $\longrightarrow |kA| = k^n|A|$
- $det(l_1, \cdots, l_i + l_j, \cdots, l_n) =$
  $det(l_1, \cdots, l_i, \cdots, l_n) + det(l_1, \cdots, l_j, \cdots, l_n)$
- $det(M_{\text{triangular}}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \longrightarrow |I| = 1$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \longrightarrow \begin{cases} |A^n| = |A|^n \\ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \end{cases}$

$A = (a_{ij}) \Longrightarrow ad(A) = (A_{ij})\ ; \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$

Laplace: $|A| = a_{1j}A_{1i} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ (Chiao)

$\exists A^{-1} \leftrightarrow |A| \neq 0; \qquad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\ ad(A^T)$

$AA^{-1} = I;\ (A^{-1})^{-1} = A;\ (kA)^{-1} = \frac{1}{k}\ A^{-1};\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Ecuaciones matriciales: $AX = B$, si $\exists A^{-1} \to X = A^{-1}B$

Forma matricial de un SEL:

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots & = \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}.$$

Capítulo 5

Sistemas de ecuaciones lineales: teorema de Rouché

5.1. Rango de una matriz

Definición 5.1. .

Se dice que una matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *es una* ***'matriz escalonada'*** *:*

— por filas, si:

1. Todas las filas de M *(si las hay) cuyos elementos son todos nulos aparecen en la parte inferior de la matriz.*

2. El primer número no nulo (comenzando por la izquierda) en cualquier fila no nula de M *recibe el nombre de pivote de esa fila.*

3. Cada fila de M *(exceptuando, por lo general, a la primera) comienza con una sucesión de ceros, de manera que siempre contiene (al menos) un cero más que la fila anterior. En otras palabras, el pivote en cualquier fila está a la derecha del pivote de la fila anterior.*

— por columnas, si:

1. Todas las columnas de M (si las hay) cuyos elementos son todos nulos aparecen a la derecha de la matriz.

2. El primer número no nulo (comenzando por arriba) en cualquier columna no nula de M recibe el nombre de pivote de esa fila.

3. Cada columna de M (exceptuando, por lo general, a la primera) comienza con una sucesión de ceros, de manera que siempre contiene (al menos) un cero más que la columna anterior. En otras palabras, el pivote en cualquier columna está más abajo que el pivote de la fila anterior.

Ejemplo 5.1. .

Son matrices escalonadas: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

No lo son: $\begin{pmatrix} \mathit{0} & \mathit{0} & 5 \\ \mathit{0} & 3 & 7 \\ \mathit{0} & \mathit{0} & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ \mathit{0} & 4 & 7 & 8 \\ \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & 3 \\ \mathit{0} & \mathit{0} & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Definición 5.2. .

*Se llama **'Rango'** de una matriz M, $rg(M)$, al número de filas (columnas) no-nulas que quedan en la matriz escalonada M_e.*

Este número, por filas o columnas, coincide y corresponde al 'número de filas (columnas) *Linealmente Independientes*' que tiene la matriz. Este importante concepto lo estudiaremos en el próximo capítulo de 'Espacios Vectoriales'.

Para, dada una matriz $M_{m\times n}$, obtener su rango, $rg(M)$, veremos dos métodos:

— El **método de Gauss** de la matriz escalonada.

— El **método de los orlados** (por adjuntos).

5.1.1. Rango por Gauss

Para, a partir de una matriz cualquiera M obtener una matriz escalonada M_e se usan transformaciones elementales de Gauss en que se puede cambiar el orden tanto de filas como de columnas (estrategia del pivote). En la práctica, en vez de llevar las filas de ceros al final, las podemos tachar.

Observación: Generalmente, cuando se utilizan operaciones elementales se pueden obtener diferentes matrices escalonadas por filas equivalentes a la de partida. Es decir, no existe una única matriz escalonada por filas asociada a una matriz A.

Ejemplo 5.2. *Calcula el rango de* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to M_e$

$$Me \to [F3 \to F3 - F1] \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to [F3 \to F3 - F2] \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(M) = 3}$$

<u>Observación</u>: muchos textos dicen que calcular un rango por Gauss consiste en triangularizar la matriz de modo que por debajo de la diagonal principal todos los elementos sean cero. Entonces, prescindiendo de las trivialidades (filas de cero), el número de filas que quedan es el rango de la matriz. Esto es FALSO, hay que llegar a una MATRIZ ESCALONADA, no solo TRIANGULAR. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ *rango* 4. *Falso, esta matriz es triangular pero no está escalonada, la fila* 3 *no tiene más ceros a la izquierda que la dos (si nos damos cuenta, es la misma y podemos prescindir de ella). Al seguir buscando ceros en* $F3 \to F3 - F2$ *obtenemos una trivialidad:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow rango\ 3.$$

5.1.2. Rango por adjuntos. Método de los orlados.

Definición 5.3. .

Si en una matriz de orden $m \times n$ *tomamos* k *filas y* k *columnas y formamos un determinante de orden* k *se le llama menor de orden* k*,* M_k.

Si a este M_k *se le añaden una fila y una columna cualesquiera de* M *se obtiene un menor de orden* $k+1$ *que se llama* ***menor orlado****.*

Definimos el rango de la matriz M *como* $rg(M) =$ *el orden del mayor menor no-nulo obtenido de* M

Dada $M_{m\times n}$ *siempre se verificará que* $\boxed{rg(M) \leq min\{m,\, n\}}$. *Para encontrar el rango de una matriz bastará con encontrar un* $M_k \neq 0$ *tal que todos los* M_{k+1} *orlados a través de él sean cero. Para esto usaremos el:*

Método de los Orlados: partimos de un menor no nulo y vamos orlando con las filas y columnas restantes hasta encontrar el máximo menor no nulo de la matriz. Su orden es el rango.

En la práctica:

— Se prescinde de todas las líneas formadas por ceros, ya que al añadir filas o columnas de ceros a un determinante, éste resulta nulo.

— Si a simple vista se descubre alguna línea que sea igual o proporcional a otras, se prescinde de ella.

Ejemplo 5.4. *Calcula el rango de* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rápidamente encontramos en M un menor de orden 2 distinto de cero:

$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$. *Luego $rg(M) \geq 2$, veamos si puede ser 3. Para ello vamos a 'orlar' el menor anterior con filas y columnas para obtener menores de orden 3 hasta que encontremos uno de ellos distinto de cero ($rg(M) \geq 3$) o comprobemos que todos ellos son cero ($rg(M) = 2$).* Obsérvese que a partir de nuestro menor de orden 2 distinto de cero (M_2) podemos encontrar hasta 6 menores de orden 3, orlando con F3C3, F4C3, F3C2, F4C2, F3C1 y F4C1

Podemos orlar a M_2 con elementos de la $C3$, pero al ser todo ceros, seguro que el menor de orden 3 que busquemos resulta nulo, así que empecemos orlando a M_2 con elementos de $C2$, podemos añadir la $F3$ o la $F4$, empecemos con M_2, $C3$, $F3$:

$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{3} & \boxed{4} \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 0 + 18 - (16 + 30 + 0) = 46 - 46 = 0$$

Veamos lo que ocurre al orlar con la $F4$, es decir: M_2, $C3$, $F4$:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{3} & \boxed{4} \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(-1)^{1+1} \cdot 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(M) \geq 3$$

A partir ahora de este $M_3 \neq 0$, continuamos orlando. Ahora solo podemos añadir la $C1$ y $F3$ para obtener:

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{vmatrix} = \ [C2 = 2 \cdot C1] \ = 0 \Rightarrow rg(M) \neq 4$$

Conclusión: el rango de M es: $\boldsymbol{rg(M) = 3}$

En el próximo tema diremos que en M hay 3 filas independientes, $F1, F2, F4$ o 3 columnas independientes $C2, C3, C4$. Podremos prescindir de $F3$, pues es 'combinación lineal de las demás' o de la $C1$, por ser 'combinación lineal' de $C2, C3, C4$

Resumiendo:

Cálculo del rango de una matriz A mediante determinantes (orlando menores)

1) Si la matriz es nula, su rango es 0 y hemos terminado. En caso contrario, seguimos.

2) Buscamos un menor fácil de orden 2 no nulo: M. Si esto no es posible, el $rg(A) = 1$ y hemos terminado.

3) Elegimos una fila de A que no esté en M .Orlamos M : completamos un nuevo menor con elementos de dicha fila y una columna que no esté en M. Si dicho menor vale 0, elegimos otra columna, y así hasta completar todas las columnas de A, siempre con dicha fila.

a) Si todos esos menores valen 0, la fila elegida es 'combinación lineal' de las filas que están en M, y puede ignorarse a efectos del cálculo del rango. En ese caso, repetimos el paso 2 con otra fila, y así hasta completar todas las filas de A.

b) Si alguno de esos menores es no nulo, el rango de A es el orden de dicho menor, como mínimo. Llamamos M a dicho nuevo menor no nulo y repetimos el paso 3 con otra fila.

4) El rango de A será el orden del máximo menor no nulo M encontrado con este procedimiento. Las filas y columnas de A que figuran en M son 'linealmente independientes'. A dicho menor M se le llama **menor**

principal. Las filas y columnas que no están en M son 'combinación lineal' de las que sí aparecen en M. (más en el próximo tema de espacios vectoriales).

5.2. Método de Cramer

Definición 5.4. *Se dice que un SEL es de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y, escrito matricialmente, el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.*

Un sistema de ecuaciones lineales 'cuadrado', es decir, con tantas ecuaciones como incógnitas, se puede interpretar como una ecuación matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots & = \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{AX = B},$$

$$\text{donde: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A es la matriz de los coeficientes, X la de incógnitas y B la de términos independientes.

El que este SEL-cuadrado sea de Cramer implica que $|\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0}$ $\rightarrow \exists A^{-1} \rightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}B}$

Recordando que la matriz adjunta de A está formada por los elemento A_{ij} y que la inversa es uno partido por el determinante de la matriz adjunta de la matriz *traspuesta*, esta ecuación se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_i} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{1i}} & \boldsymbol{A_{2i}} & \cdots & \boldsymbol{A_{ni}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{|A|} \left(b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}\right) \Longrightarrow$$

que es el desarrollo del determinante de la matriz A en que se ha sustituido la columna-i de coeficientes por la de términos independientes (b_i) y se ha desarrollado por adjuntos de Laplace de la columna-i:

$$\rightarrow = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Luego, resolver un sistema de Cramer (cuadrado con $|A| \neq 0$) consiste en calcular $(n+1)$ determinantes, uno para cada incógnita más el de los coeficientes y el resultado de cualquier incógnita consiste en calcular el determinante de A en que se ha sustituido la columna correspondiente a la incógnita a calcular por la columna de términos independientes y dividirlo por el determinante de A.

$$\text{Cramer} \begin{cases} n \times n \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 5.5. *Resuelve por Cramer, si es posible:* $\begin{cases} x + 2y - z & = -3 \\ x \qquad + \ z & = 1 \\ 2x - y + 2z & = 4 \end{cases}$

Tenemos un sistema cuadrado: 3 ecuaciones con 3 incógnitas, con $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0+1+4-(0-1+4) = 5-3 = \mathbf{2} \neq 0 \to$ *sí es resoluble por Cramer:*

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\mathbf{2}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\,[0+1+8-(0-3+4)]\frac{1}{2}(9-7) = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{\mathbf{2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\,[2-4-6-(-2+4-6)] = \frac{1}{2}[-8-(-4)] = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{1}{\mathbf{2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\,[0+3+4-(0-1+8)] = \frac{1}{2}(7-7) = \mathbf{0}$$

SCD

Ventajas e inconvenientes del método de Cramer frente al método de Gauss:

- Si el sistema es de Cramer (que no lo son todos los SEL), Cramer nos permite, sin resolver todo el sistema, conocer el valor de cualquier incógnita del sistema sin más que calcular un cociente de determinantes.

- Pero el SEL puede no ser de Cramer y Gauss es válido para cualquier tipo de SEL.

5.3. Teorema de Rouché-Frobenius

Consideremos un SEL cualquiera, de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases},$$

Llamamos matrices A de los coeficientes y A^* matriz ampliada a las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Escrito en una sola matriz, por delante, hasta la barra vertical, tenemos a la matriz A, por detrás, sin la barra, la matriz A^*.

Matriz de coeficientes y ampliada

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \leftarrow A^*$$

Teorema 5.1. *Teorema de Rouché-Frobenius (sin demostración)*

Un SEL es COMPATIBLE si $\boxed{rg(A) = rg(A^*)}$

— *si* $rg(A) = rg(A^*) =$ *número de incógnitas* $\longrightarrow$ ***SCD***

— *si* $rg(A) = rg(A^*) <$ *número de incógnitas* $\longrightarrow$ ***SCI***

— *Obviamente, si* $rg(A) \neq rg(A^*) \longrightarrow$ ***SI***

En el caso $rg(A) = rg(A^*) <$ *número de incógnitas , se llaman* ***ecuaciones principales del sistema*** *a las que forman el menor que dicta en rango, las otras ecuaciones se pueden eliminar y se llaman* ***incógnitas principales del sistema*** *a las que forman el menor que dicta el* *rango, las restantes se parametrizan, es decir, se les asignan valores reales cualesquiera, parámetros (letras griegas) y se pasan al segundo miembro quedando ahora un SEL cuadrado con determinante de los coeficientes principales distinto de cero con lo que el problema se puede resolver por Cramer (o por Gauss).*

5.3.1. Aplicación a sistemas homogéneos

Todo SEL de m ecuaciones con n incógnitas homogéneo ($b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$) admite siempre la **solución trivial** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, por lo que son siempre COMPATIBLES.

Esto es evidente a la luz del teorema de Rouché puesto que si A tiene rango k, A^* también tendrá rango k ya que A^* no consiste más que en añadir a A una columna de ceros y, obviamente, no altera el rango.

Según el teorema de Rouché,

— si $k = rg(A) = n$ =número de incógnitas $\rightarrow$ el SEL es SCD, solución única: 'la trivial' $(0, 0, \cdots, 0)$

— si $k = rg(A) < n$ =número de incógnitas $\rightarrow$ el SEL es SCI, infinitas soluciones (habrá que parametrizar) , entre ellas estará 'la trivial' $(0, 0, \cdots, 0)$

5.4. Discusión de sistemas

En ocasiones se nos presentará resolver SEL dependientes de uno o varios parámetros. Para ello usaremos el teorema de Rouché para determinar los rangos de A y A^* analizando todos los posibles casos que puedan presentarse en función del valor que tomen los parámetros del sistema (esto es lo que se llama 'discusión de SEL') y resolviendo en los casos de compatibilidad.

Observación importante: Para analizar el rango de una matriz usaremos el método ascendente de los orlados —a no ser que nos pidan usar el método de Gauss— (ver si la matriz tiene rango 1; si lo tiene, ver si puede tener rango 2; si es así, ver si el rango es 3; etc). Pero si la matriz A o A^* son cuadradas procederemos al revés, viendo si pueden tener rango máximo, estudiaremos su determinante.

En el siguiente apartado de ejercicios resueltos veremos muchos ejemplos de discusión y resolución de SEL con el teorema de Rouché.

5.5. Eliminación de parámetros ⋇

*La **eliminación de parámetros** es el proceso inverso a resolver un sistema de ecuaciones que sea compatible indeterminado* (los sistemas que tienen infinitas soluciones que dependen de uno o más parámetros), es decir, pasar de las soluciones paramétricas de un SCI a las ecuaciones normales (implícitas, sin parámetros) que da lugar a esta solución. Así pues, lo que haremos es, dada la solución con parámetros encontrar el sistema de ecuaciones (o uno equivalente) que da lugar a esa solución.

En general, las soluciones de un sistema de ecuaciones expresadas en parámetros es (solución de un SEL que sea SCI):

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \cdots + c_{1p}t_p \\ x_2 = k_2 + c_{21}t_1 + c_{22}t_2 + \cdots + c_{2p}t_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = k_n + c_{n1}t_1 + c_{n2}t_2 + \cdots + c_{np}t_p \end{cases}$$

que son las n-soluciones de las n-incógnitas dependientes de p-parámetros obtenidas del SEL de m-ecuaciones con n-incógnitas. Se trata de encontrar ese SEL, o uno equivalente, que proporcione esta misma solución.

Procedimiento para la eliminación de parámetros:

1. Reescribir el sistema considerando los parámetros como incógnitas y las incógnitas como términos independientes:

$$\begin{cases} c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \cdots + c_{1p}t_p = x_1 - k_1 \\ c_{21}t_1 + c_{22}t_2 + \cdots + c_{2p}t_p = x_2 - k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}t_1 + c_{n2}t_2 + \cdots + c_{np}t_p = x_n - k_n \end{cases}$$

2. Este nuevo sistema ha de ser, también, ***compatible***, luego:

$$rg(A) = rg(A^*) \;,$$

siendo A y A^* las matrices de coeficientes y asociada a este nuevo sistema. Al exigir que se cumpla esta condición aparecen las relaciones entre las incógnitas que darán lugar al SEL buscado.

3. El número de ecuaciones obtenidas corresponde con el número de condiciones que debe haber entre las incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (*ligaduras*) para que el sistema tenga solución. Se cumplirá que: (n=número de incógnitas)

$$\boxed{\text{Número de ecuaciones } = n - rg(A)}$$

En en apartado 'ejercicios resueltos' veremos ejemplos de resolución de eliminación de parámetros.

5.6. Ejercicios

5.6.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 5.1. *Estudia el rango de las siguientes matrices por el método de Gauss y por el método de los orlados.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 11 \\ -4 & -6 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ 2 & 10 & 7 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

—— <u>Método de Gauss</u>

* rango de $A \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to [F2 \to F2 - 5F1 \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -14 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\boldsymbol{rg(A) = 2}$

* rango de $B \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} F2 \to F2 + 2F1 \\ F3 \to F3 + 2F1 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to$ $[F3 \to 5F3 - F2] \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 7 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(B) = 3}$

* rango de $C \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 11 \\ -4 & -6 & 10 & -3 \end{pmatrix} \to [C3 \leftrightarrow C1] \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 10 & -6 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to$ $[F3 \to F3 + 10F1] \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 14 & 14 & 27 \end{pmatrix} \to [F3 \to F3 - 2F2] \to$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(C) = 3}$

$$* \text{ rango de } D \to \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ 2 & 10 & 7 \end{pmatrix} [F1 \leftrightarrow F2] \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ 2 & 10 & 7 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{cases} F2 \to F2 - 3F1 \\ F3 \to F3 + F1 \\ F4 \to F4 - 2F1 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{cases} F3 \to F3 - 2F2 \\ F4 \to F4 - 4F2 \end{cases} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to [F4 \to 3F4 - F3] \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{rg(D) = 3}$$

$$* \text{ rango de } E \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to [F4 \to F4 - F1] \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to [F2 \leftrightarrow F4] \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to [F3 \to$$

$$F3{-}2F2] \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to [F4 \leftrightarrow F3] \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$[F4 \to 2F4 - F3] \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \Rightarrow \boldsymbol{rg(E) = 4}$$

—— Método de los orlados

* rango de $A \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & -2 \\ \boxed{5} & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 15 = -14 \neq 0 \Rightarrow$ $rg(A) \geq 2$ Como en A hay una columna más pero no hay más filas, el rango no puede ser 3, por lo que $\boldsymbol{rg(A) = 2}$

* rango de $B \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; B es cuadrada y nos preguntamos si tendrá rango máximo 3 $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -33 - 2 + 20 - (22 + 5 + 12) =$ $-15 - 39 = -54 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{rg(B) = 3}$

* rango de $C \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & -1 & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{7} & 0 & 11 \\ -4 & -6 & 10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1 \neq 0 \rightarrow$ $rg(C) \geq 2$ Veamos si puede ser tres, a partir del M_2 marcado con cuadros en C, podemos orlar con $C2yF3$ y con $C3yF3$ a ver si encontramos un $M_3 \neq 0$ que asegure que el rango es 3, en caso contrario (ambos determinantes fuesen cero), el rango de C se quedaría en 2.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & -1 \\ \boxed{3} & \boxed{7} & 0 \\ -4 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 70 + 18 + 0 - (28 + 0 + 60) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{7} & 11 \\ -4 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -21 - 54 - 88 - (-84 - 66 - 18) = 5 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{rg(C) = 3}$$

Luego en C hay 3 fila o 3 columnas independientes: $C \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & -1 & \boxed{3} \\ \boxed{3} & \boxed{7} & 0 & \boxed{11} \\ -4 & -6 & 10 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$.

* rango de $D \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{10} & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ 2 & 10 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1 \neq 0 rg(D) \geq$ 2. Podemos orlar con $C3yF3$ o con $C3yF4$ para ver si encontramos un

$M_3 \neq 0$ que asegurase que el rango es 3 (ya que 4 no puede ser) o, si ambos determinantes son nulos, el rango de E se quedaría en 2.

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & \boxed{10} & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 72 + 1 + 10 - (3 + 3 + 80) = 83 - 86 = -3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\boldsymbol{rg(D) = 3}$ (estas tres filas o tres columnas son las linealmente independientes de D.)

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & \boxed{10} & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & -1 \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix} = \cdots$$ Es innecesario seguir calculando. Tampoco es necesario escribir todos los posibles orlados, basta con encontrar uno distinto de cero o, eso sí, comprobar que todos sean cero. Lo hemos hecho así, y también en el caso siguiente, por motivos meramente didácticos.

$$* \text{ rango de } E \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \neq$$

$0 \rightarrow rg(E) \geq 2$ Para comprobar si el rango es tres podemos orlar este M_2 con filas y columnas: $C1F3$; $C1F4$; $C4F3$; $C4F4$. Hay que ir calculando determinantes hasta encontrar uno distinto de cero ($rg(E) \geq 3$) o comprobar que todos ellos son cero ($rg(E) = 2$). Vamos a por ellos:

$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\,(-2+0) = -4 \neq 0 \rightarrow rg(E) \geq 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \text{No es necesario continuar.}$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \text{No es necesario continuar.}$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \text{No es necesario continuar.}$$

A parir del $M_3 \neq 0$ obtenido anteriormente podemos orlar con $C4F4$:

$$(*) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \quad [F4 \to F4{-}F1] \quad = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2[0-2+0-(1+0+0)] = 2\cdot(-3) = -6 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{rg(E) = 4}$$

Si recuerda el/la lector/a, dijimos anteriormente que si la matriz era cuadrada convenía hacer el estudio de los rangos al revés, viendo si el rango era máximo, con lo que hubiésemos empezado calculando $|E| =)*) = -6 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{rg(E) = 4}$ y hubiésemos acabado antes. Quede este ejercicio como recuerdo de que en matrices cuadradas conviene hacer el estudio de los rangos de modo 'descendente', empezando por ver si el rango es máximo.

◇

Ejercicio resuelto 5.2. *Halla el rango de las siguientes matrices en función del valor que tome el parámetro:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & \lambda \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ k & k^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & -3 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

—— $rg(A)$: Como A es cuadrada (A_4), veamos si tiene rango máximo (4):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & \lambda \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ 3 & 1 & -4 & \lambda \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} C2 \to C2 - C1 \\ C3 \to C3 - C1 \\ C4 \to C4 - 6C1 \end{cases} \to = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 & -7 \\ 2 & 0 & -3 & \lambda - 12 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3 & -2 & -7 & \lambda - 18 \end{vmatrix} =$$

$1(1-)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & \lambda - 12 \\ -2 & -7 & \lambda - 18 \end{vmatrix} = 9(\lambda-18)+10(\lambda-12)-(-42+21(\lambda-12)) =$ $9(\lambda-18)-11(\lambda-12)+42 = -2\lambda+12 = 0 \leftrightarrow \lambda = 6$. Hemos de distinguir dos casos, $\lambda = 6$ y $\lambda \neq 6$:

(1*) Si $\boldsymbol{\lambda \neq 6} \to |A| \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{rg(A) = 4}$

(2*) Si $\boldsymbol{\lambda = 6} \to$ particularicemos $A(\lambda = 6)$ y estudiemos ascendentemente el rango de A, que sabemos que no puede ser 4:

$$A(6) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & -3 & 5 \\ \boxed{2} & \boxed{2} & -1 & \mathbf{6} \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \| 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-(-2) = 6 \neq$ $0 \to rg(A) \geq 2$. Vamos orlando. Empezamos con $F3C3 \to \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $4-3+1-(-6-2-1) = 2-(-9) = 11 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{rg(A) = 3}$, puesto que ya sabemos que no puede ser 4 $(\lambda = 6)$.

—— $rg(B)$: Como B no es cuadrada, hay que hacer un estudio ascendente. *¡Consejo! 'Cuanto más tardes a tomar el parámetro, mejor'.*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{k} \\ k & 9 \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-2k = 0 \leftrightarrow k = 3$$

Sabemos que si $\boldsymbol{k \neq 3} \to M_2 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{rg(B) = 2}$, puesto que no puede ser 3.

Pero, si $\boldsymbol{k=3}$, este $M_2 = 0$, pero hay otro. particularicemos $B(3) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$ Luego, con $k = 3$ todos los menores de orden dos son nulos $\Rightarrow \boldsymbol{rg(B) = 1}$

—— $rg(C)$: Como C no es cuadrada, haremos el estudio ascendente:

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ k & k^2 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{k} & \boxed{1} \end{pmatrix}$ Como no encontramos ningún $M_2 \neq 0$ que no tenga parámetros, empezamos por el que vemos más sencillo (con menos parámetros): $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k = 0 \leftrightarrow k = 1$

Tenemos pues dos casos, $k = 1$ y $k \neq 1$:

(1*) si $k = 1 \to C(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$, evidentemente, $rg(C) = 1$

(2*) si $k \neq 1 \to M_2 \neq 0 \to rg(C) \geq 2$ y orlaremos con las columnas 2 y 3 y con la fila 1 (dos posibilidades), sabiendo en todo momento que $k \neq 1$:

Empecemos orlando con $C1$ y $F1$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 1 + K^3 + 1 - (k + k + k) =$

$k^3 - 3k + 2 =$ (Ruffini) $= (k-1)^2(k+2) \neq 0 \to \begin{cases} k \neq 1 \text{ ya lo es (1*)} \\ k \neq 2 \end{cases} \to$

(2*-a) Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$ este $M_3 \neq 0 \to rg(C) = 3$

(2*-b) Si $k = -2 \to$ particularizamos: $C(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 16 + 1 - (-2 - 2 + 4) = 18 \neq 0 \to rg(C) = 3$$

Conclusión: $\begin{cases} \text{si } \boldsymbol{k = 1 \Rightarrow rg(C) = 1} \\ \text{si } \boldsymbol{k \neq -1} \rightarrow (k = -2 \ \vee \ k \neq -2) \Rightarrow \boldsymbol{rg(C) = 3} \end{cases}$

——$rg(D)$: Al no ser D cuadrada, haremos un estudio ascendente.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & \boxed{2} \\ -1 & a & -3 \\ 1 & a+2 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \rightarrow M_2 \neq 0 \rightarrow rg(D) \geq 2.$$

Podemos orlar con C2 y F2 y con C2 y F3:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5a-6-(4a-5) = a-1 = 0 \leftrightarrow a = 1 \rightarrow$ distinguiremos dos casos: $a = 1$ y $a \neq 1$

(1*) Si $a \neq 1 \rightarrow M_3 \neq 0 \Rightarrow rg(D) = 3$

(2*) Si $a = 1 \rightarrow$ particularizamos: $D(1) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & \boxed{2} \\ -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \\ \boxed{2} & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}$ Podemos orlar el $M_2 \neq 0$ con $F2yC2$ que ya sabemos que dará cero, pero aún nos queda la posibilidad de orlar con $F3yC2$:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15+2-(12+5) = 17-17 = 0$, luego, si $a = 1 \rightarrow rg(D) = 2$

Conclusión. $\begin{cases} \text{si } \boldsymbol{a \neq 1 \rightarrow rg(D) = 3} \\ \text{si } \boldsymbol{a = 1 \rightarrow rg(D) = 2} \end{cases}$

—— $rg(E)$: E no es cuadrada, estudio ascendente:

$\begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{m-1} & m & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 2 & m-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (m-1) = 2 - m = 0 \leftrightarrow m = 2$ Distinguiremos dos casos, $m = 2$ y $m \neq 2$

(1*) si $m = 2 \rightarrow E(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ tres filas iguales $\rightarrow$ $rg(E) = 1$

(2*) si $m \neq 2 \rightarrow rg(E) \geq 2$ (puede ser hasta tres), hay dos menores de orden tres, orlando con $F1C4$ y con $F1C3$, probemos con la primera posibilidad:

$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^3 + 1 + 1 - 3(m-1) = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ (no considerado).} \\ m = -1 \end{cases}$ Tenemos ahora dos sub-casos: $m \neq 2 \ \wedge \ m \neq -1$ y $m \neq 2 \ \wedge \ m = -1$, analicémoslos:

(2*-a) $m \neq 2 \ \wedge \ m \neq -1$, el M_3 anterior es distinto de cero, por lo que $rg(E) = 3$, no puede ser cuatro.

(2*-b) $m \neq 2 \ \wedge \ m = -1$, particularizamos el M_3 anterior y tenemos: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8+1+1-(-2-2-2) = -6-(-6) = 0 \rightarrow rg(E) = 2.$

Conclusión. $\begin{cases} \boldsymbol{m = 2 \Rightarrow rg(E) = 1} \\ \boldsymbol{m = -1 \Rightarrow rg(E) = 2} \\ \boldsymbol{m \neq 2 \ \wedge \ m \neq -1 \Rightarrow rg(E) = 3} \end{cases}$

◇

Ejercicio resuelto 5.3. *Resuelve por Cramer, si es posible:*

a) $\begin{cases} x * 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$; *b)* $\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

—— a) El SL es cuadrado y la matriz de coeficientes es: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $7 \neq 0 \rightarrow$ sí se puede aplicar Cramer:

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{-7} = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -10 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-7}\, 7 = \mathbf{-1}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{-7} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & -10 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-7}\,(-7) = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{1}{-7} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{-7}\,(-56) = \mathbf{8}$$

SCD

—— b) El SL es cuadrado y la matriz de coeficientes es:

$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ No es aplicable la regla de Cramer. Habría que estudiar el sistema por Gauus o aplicarle, previamente, el teorema de Roché para ver si es compatible. (ver ejercicio siguiente.)

◇

Ejercicio resuelto 5.4. *Aplicar el teorema de Rocuhé a los siguientes SEL y resolver en los casos de compatibilidad:*

$$a)\ \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases} \quad ; \qquad b)\ \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} \quad ; \qquad d)\ \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 5 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y-7z=0 \\ y+z=-1 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \quad ; \qquad f)\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+y+3z=5 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y-7z=0 \\ 3z=0 \end{cases} \quad ; \qquad h)\begin{cases} x+3y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

.

$$\text{—— } a)\begin{cases} x-y=6 \\ 4x+y=-1 \\ 5x+2y=-5 \end{cases} \rightarrow A = \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \boxed{-1} & 6 \\ \boxed{4} & \boxed{1} & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{array}\right] \leftarrow A^*$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-4) = 5 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$

A^* se puede orlar con $C3F3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$

Como $rg(A) = 2 = rg(A^*) =$ número de incógnitas, Th. Rouché: **SCD**. Nos quedamos con las ecuaciones que forman parte del menor (eliminamos la ecuación 3) y con las incógnitas que forman parte del menor (las dos que hay, no sobra ninguna que haya que parametrizar y pasar al segundo miembro): $\rightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ 4x+y=-1 \end{cases}$ es el SEL a resolver que sabemos que es SCD. Podemos usar Gauss, Cramer, matricialmente o por cualquier otro método.

En este caso, sumando las ecuaciones: $5x = 5 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$ y sustituyendo en la segunda ecuación: $4 + y = -1 \rightarrow \boldsymbol{y = -5}$

$$\text{—— } b)\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-y-3z=-3 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \rightarrow B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \leftarrow B^*$$

Como B es cuadrada, estudiamos directamente si tiene rango máximo:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & -1 \\ \boxed{2} & \boxed{-1} & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} 0 =, \text{ luego } rg(B) > 3.$$

Rápidamente encontramos un menor de orden 2 distinto de cero ($|M_2| = -1 - 4 = -5$), encuadrado en las matrices B y B^* que asegura que $rg(B) = 2$. Para B^* podemos orlar con $F3C4$ y calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to rg(B^*) = 3$$

Como $rg(B) = 2 \neq 3 = rg(B^*) \to$ Th. Rouché: **SI** (no hay solución).

—— $c)$ $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} \to C = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right] \leftarrow C^*$

Calculemos $|C| = \begin{vmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & -1 \\ \boxed{-1} & \boxed{-5} & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to rg(C) < 3$, pero en cuadros tenemos un $|M_2| = -10 - (-3) = -7 \neq 0$ que asegura que $rg(C) = 2$

En C^* podemos obtener un M_3 orlando este $M_2 \neq 0$ con $F3$ y $C4$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \to rg(C^*) = 2$$

Hemos obtenido $rg(C) = 2 = rg(C^*) <$ número incógnitas $\to$ Th. Rouché: tenemos un SEL que es **SCI**. Nos quedamos con las ecuaciones del menor (1^a y 2^a) y con las incógnitas del menor (x e y). Prescindimos de la tercera ecuación y parametrizemos la tercera incógnita:

Sea $\boldsymbol{z = \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 2x + 3y = 3 + \lambda \\ -x + 5y = -\lambda \end{cases}$, que como no es de solución rápida resolveremos, en este caso, por Rouché (sistema cuadrado con matriz de coeficientes (M_2) distinto de cero:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\begin{vmatrix} 3+\lambda & 3 \\ -\lambda & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-5(3+\lambda)+3\lambda}{-7} = \frac{\mathbf{15+2\boldsymbol{\lambda}}}{\mathbf{7}}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3+\lambda \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-2\lambda+3+\lambda}{-7} = \frac{\mathbf{-3+\boldsymbol{\lambda}}}{\mathbf{7}}$$

—— $d)$ $\begin{cases} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x+z=5 \end{cases} \rightarrow D = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \leftarrow D^*$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ pero } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow rg(D) = 2$$

$$D^* \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(D^*) = 3$$

Luego: $rg(D) = 2 \neq 3 = rg(D^*) \rightarrow$ Th Roucé: **SI**

—— $e)$ $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y-7z=0 \\ y+z=-1 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \rightarrow E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow E^*$

E^* es cuadrada, veamos si tiene rango máximo.

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [F1 \to F1{+}2F3] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \boxed{-1} \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

(Laplace, adjuntos 4^a columna) $= (-1)\ (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to$

$rg(E^*) < 4 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(E^*) = 3 = rg(E) \to$ Th. Rouché: $rg(E) = 3 = rg(E^*) =$ número de incógnitas $\to$ **SCD**.

Eliminando la última ecuación (que no forma parte del menor), tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas y con determinante de los coeficientes no-nulo $\to$ resolviendo, por ejemplo, por Cramer: $\boldsymbol{x = 3;\ \ y = -2;\ \ z = 1}$

$$\text{——— } f) \begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases} \to F = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \leftarrow F^*$$

Al ser F cuadrada, calculamos $|F| \neq 0 \to rg(F) = 3 = rg(F^*) =$ número de incógnitas. por th. Rouché se trata de un **SCD**, que resolviendo, p.e., por Cramer, se obtiene: $\boldsymbol{x = 0;\ \ y = -1;\ \ z = 2}$

Para que quede como ejemplo, l0 hacemos en este caso:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -14$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-14} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{-14} = \mathbf{-1}$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-14} = \mathbf{2}.$$

$$
\text{—— } g) \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y-7z=0 \\ 3z=0 \end{cases} \quad \rightarrow G = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \leftarrow G^*
$$

$|G| = 6$ (diagonal) $\neq 0 \rightarrow rg(G) = 3 = rg(G^*) =$ número de incógnitas $\rightarrow$ Th. Rouché: **SCD**, solución única y, además, como es homogéneo tiene la solución trivial, $x = y = z = 0$. Luego, la única solución del sistema es la trivial: $\boldsymbol{x = y = z = 0}$

$$
\text{—— } h) \begin{cases} x+3y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \rightarrow H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow H^*
$$

$$
|H| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2F3 = F1 + F2) = 0 \rightarrow rg(H) < 3
$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0 \rightarrow rg(H) = 2 = rg(H^*)$, al añadir una columna de ceros no puede aumentar el rango.

Luego $rg(H) = 2 = rg(H^*) < 3 =$ número de incógnitas to th. Rouché: **SCI**. Eliminamos la tercera ecuación)no forma parte del menor) y parametrizamos la tercera incógnita z)no forma parte del menor):

$z = \lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x+3y=-\lambda \\ x-y=\lambda \end{cases}$ Restando las ecuaciones: $2x = 0 \rightarrow x = 0$ y sustituyendo en la segunda ecuación: $y = \lambda$.

Las soluciones son pues: $\boldsymbol{x = 0;\ y = \lambda;\ z = \lambda}$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, infinitas soluciones. Pero el sistema es homogéneo, debe estar la solución trivial.

Efectivamente, basta con tomar $\lambda = 0$ para obtener $x = y = z = 0$, la solución trivial (pero, además de $(0,0,0)$ hay infinitas soluciones más como $(0,1,1)$, $(0,-13,-13)$, $(0,\pi^e,\pi^e)$, etc.)

◇

Ejercicio resuelto 5.5. *Resuelve el siguiente SEL por Gauss, matricialmente y por Cramer, si es posible:* $\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ 2x+3y-z &= 5 \\ 3x+4y-z &= 3 \end{cases}$

.

—— Gauss: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} F2 \rightarrow F2-2F1 \\ F3 \rightarrow F3-3F1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \end{array}\right] \rightarrow$

$[F3 \rightarrow F3-F2] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{array}\right]$

Última ecuación: $-z=-6 \rightarrow \boldsymbol{z=6}$

Ecuación segunda: $y-3(6)=-3 \rightarrow \boldsymbol{y=15}$

Primera ecuación: $x+(15)+(6)=4 \rightarrow \boldsymbol{x=-17}$ **SCD**

—— Matricialmente: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow AX=B$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3+8-3-(9-4-2) = 2-(3) = -1 \neq 0 \rightarrow$

$\exists A^{-1}: \quad A^{-1}AX = IX = \boldsymbol{X = A^{-1}B}$

Calculo de A^{-1} : $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^T_{11} = (-1)^{1+1} M^T_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = +[-3-(-4)] = 1$$

$$A^T_{12} = (-1)^{1+2} M^T_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -[-1-(4)] = 5$$

$$A^T_{13} = (-1)^{1+2} M^T_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +[-1-(3)] = -4$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} M_{21}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -[-2-(-3)] = -1$$

$$A_{22}^T = (-1)^{2+2} M_{22}^T = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +[-1-(3)] = -4$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3} M_{23}^T = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -[-1-(2)] = 3$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} M_{31}^T = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +[8-(9)] = -1$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2} M_{32}^T = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -[4-(3)] = -1$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3} M_{33}^T = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +[3-(2)] = 1$$

Luego: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\, ad(A^T) = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Por lo que: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-17} \\ \mathbf{15} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}$ **SCD**

—— <u>Cramer</u>: Sistema cuadrado y $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3+8-3-(9-4-2) = 2-(3) = -1 \neq 0 \rightarrow$ podemos usar Cramer.

$$\boldsymbol{x} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{4} & 1 & 1 \\ \mathbf{5} & 3 & -1 \\ \mathbf{6} & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}} = \cdots \frac{17}{-1} = \mathbf{-17} \qquad \boldsymbol{y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{4} & 1 \\ 2 & \mathbf{5} & -1 \\ 3 & \mathbf{6} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}} = \cdots \frac{-15}{-1} = \mathbf{15}$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{4} \\ 2 & 3 & \mathbf{5} \\ 3 & 4 & \mathbf{6} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}} = \cdots \frac{-6}{-1} = \mathbf{6} \qquad \textbf{SDC}$$

◇

Ejercicio resuelto 5.6. *Discute, según los valores del parámetro, los siguientes sistemas:*

$$a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} (a+1)x + y + z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 10y & = -4 \\ ax + y & = 1 \\ x + 3y & = -1 \end{cases} \qquad d) \begin{cases} (2m+2)x + mz + 2z & = -2 \\ 2x + (2-m)y & = 0 \\ (m+1)x \quad + (m+1)z & = m-1 \end{cases}$$

.

$$\text{——} \; a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \leftrightarrow A^*$$

Como A es cuadrada, vemos si puede tener rango máximo:

$|A| = a^3 - 3a + 2 \leftrightarrow a = 1 \ \wedge \ a = -2$

Hemos de distinguir tres casos: $a = 1$; $a = -2$; $a \neq 1 \ \wedge \ a \neq -2$

(*1) si $a \neq 1 \ \wedge \ a \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*)$ =núm. imcóg: **SCD** (Si nos pidiesen resolver en los casos de compatibilidad, usaríamos la regla de Cramer).

(*2) Si $a = 1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow rg(A) < 3$. Particularizamos A y A^* para $a = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow A^* \rightarrow rg(A) = 1 = rg(A^*) < \text{núm. incóg} \rightarrow \textbf{SCI}$$

Si hubiese que resolver, eliminaríamos la segunda y la tercera ecuación, que no forman parte del menor, y parametrizaríamos la segunda y tercera incógnitas $y = \lambda$; $z = \mu$ y las pasaríamos al segundo miembro, pues estas incógnitas no formas parte del menor. Nos quedaría, en este caso, una sola ecuación de donde despejaríamos la x.

(*3) Si $a = -2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow rg(A) < 3$. Particularizamos A y A^* para $a = -2$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow A^* \rightarrow \boxed{M_2} = -5 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

Para el cálculo de A^* hemos de calcular el M_3 que resulta de añadirle al M_2 los elementos correspondientes de la $C4$ y $F3$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 16-2 & -2 & \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3 \neq 2 = rg(A) \Rightarrow \ \textbf{SI}$$

—— $b)$ $\begin{cases} (a+1)x + y + z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{cases} \leftrightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a+1 & 0 \end{array}\right) \leftarrow B^*$

$|B| = (a+1)^3+1+1-3(a+1) = a^3+3a+3a+1+2-3a-3 = a^3+3a^2 = a^2(a+3) = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \wedge \ a = -3$

(1)* $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq -3 \rightarrow |B| = 0 \Rightarrow rg(B) = 3 = rg(B^*) =$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCD.** (Como el sistema es homogéneo solo admite la solución trivial: x=y=z=0).

(2*) $a = 0 \rightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftarrow B^*$, obviamente, $rg(B) = 1 = rg(B^*) <$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCI**

(3*) $a = -3 \rightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \leftarrow B^*;\ M_2 = 4 - 1 = 3 \neq 0 \rightarrow rg(B) = 2 = rg(B^*) <$ núm. incóg. (al añadir una columna de ceros el rango no varía) $\Rightarrow$ **SCI**.

$$\text{——}\ c);\begin{cases} 3x + 10y & = -4 \\ ax + y & = 1 \\ x + 3y & = -1 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 10 & -4 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \leftarrow C^*$$

Como C^* es cuadrada, veamos si tiene rango máximo:

$$(1^*)\ |C^*| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -4 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2a = 0 \leftrightarrow a = 1$$

$a \neq 1 \rightarrow rg(C^*) = 3 \neq rg(A)$ que solo puede ser 2 a lo sumo, luego **SI.**

(2*) $a = 1$, particularizando: $C = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3} & \boxed{10} & -4 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \leftarrow C^*$. Como en este caso $|C^*| \neq 0 \rightarrow rg(C) = rg(C^*) = 2 <$ núm. incóg. *to* **SCI.**

$$\text{——}\ d)\ \begin{cases} (2m+2)x + mz + 2z & = -2 \\ 2x + (2-m)y & = 0 \\ (m+1)x \quad + (m+1)z & = m - 1 \end{cases} \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \qquad D = \left(\begin{array}{ccc|} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{array}\right.\left(\begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ m-1 \end{array}\right) \leftarrow D^*$$

$|D| = (2m+2)(2-m)(m+1) - [2(2-m)(m+1) + 2m(m+1)] = (m+1)\cdot[(2m+2)(2-m) - 2(2-m) + m] = (m+1)\ [(2m+2)(2-m) - 4] = 2(m+1)m(1-m) = 0 \leftrightarrow m = 0\ \wedge\ m = 1\ \wedge\ m = -1$

(1*) $m \neq 0\ \wedge\ m \neq 1\ \wedge\ m \neq -1 rg(D) = rg(D^*) = 3 =$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCD.**

(2*) $m = 0 \to D = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & \boxed{0} & 2 & -2 \\ \boxed{2} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \leftarrow D^*$ En D hay un $\boxed{M_2} = 4 - 0 = 4 \neq 0 \to rg(D) = 2 \to$ en D^* podemos formar un $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 - (-4) = 0 \to rg(D^*) = 2 = rg(D) <$ núm. incóg. $\to$ **SCI.**

(3*) $m = -1 \to D = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{0} & \boxed{-1} & 2 & -4 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \leftarrow D^*$. Como en D tenemos un $M_2 \neq 0$, el $rg(D) = 2$; veamos el $rg(D^*$. Para ello, orlamos M_2 con $C4$ y $F3$ de $D^* \to |M_3| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\ (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2[0 - (-2)] = 4 \neq 0 \to rg(D^*) = 3 \neq 2 = rg(D) \Rightarrow$ **SI.**

(4*) $m = 1 \to D = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & \boxed{1} & 2 & -2 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \leftarrow D^*$. En D hay un $\boxed{M_2} \neq 0 \to rg(D) = 2 \to$ en D^* : $M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 - 2) = 4 \neq 0 \to rg(D^*) = 3 \neq 2 = rg(D) \Rightarrow$ **SI.**

◇

Ejercicio resuelto 5.7. *Discute los siguientes sistemas y resuelve en caso de compatibilidad:*

$a)\ \begin{cases} 4x + 12y + 4z & = 0 \\ 2x - 13y + 2z & = 0 \\ (a+2)x - 12y + 12z & = 0 \end{cases};\qquad b)\ \begin{cases} 2x + y - z & = a - 4 \\ (a - 6y) + 3z & = 0 \\ (a+1)x + 2y & = 3 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x - ay - z & = 0 \\ (2 - 2a)x + 5y + z & = 0 \\ 4x + y & = 0 \end{cases};\qquad d)\ \begin{cases} 2y + az & = a \\ (a-2)x + y + 3z & = 0 \\ (a-1)y & = 1 - a \end{cases}$

$$e)\ \begin{cases} x+y & =1 \\ ay+z & =0 \\ x+(a+1)y+az & =a+1 \end{cases} ; \qquad f)\ \begin{cases} x+y+z & =3 \\ mx-y-z & =-2 \\ 4x+mz & =m^2+4 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x+y+z & =2 \\ x+2y-3z & =8 \\ kx-y-z & =1 \\ x-y+z & =-2 \end{cases} ; \qquad h)\ \begin{cases} kx+ky-z & =-2 \\ 3x-ky & =0 \\ 5x+ky & =0 \\ x+2z & =1 \end{cases}$$

$$j)\ \begin{cases} x+y+z+t & =4 \\ 2x+2y-z+kt & =k-3 \end{cases} ; \qquad k)\ \begin{cases} x+y+z & =1 \\ x+y+\lambda z & =2 \end{cases}$$

.

— a) $\begin{cases} 4x+12y+4z & =0 \\ 2x-13y+2z & =0 \\ (a+2)x-12y+12z & =0 \end{cases} \leftrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 4 & 0 \\ 2 & -13 & 2 & 0 \\ a+2 & -12 & 12 & 0 \end{array}\right) \leftarrow A^*$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 76(a-10) = 0 \leftrightarrow a = 10$$

(1*) $a \neq 10 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) =$ n-un. incóg $\rightarrow$ **SCD** y homogéneo $\rightarrow$ solución trivial: $\boldsymbol{x = y = z = 0}$

(2*) $a = 10 \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -13 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 = rg(A^*)$ (homogéneo) $< 3 =$ núm. incóg, SCI $\rightarrow$ eliminamos ecuación 3 y parametrizamos incógnita $z = \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x+12y = -4\lambda \\ 2x-13y = -2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3y = -\lambda \\ 2x-13y = -2\lambda \end{cases} \rightarrow \text{por reducción:}$$

$-7y = 0;\ y = o \rightarrow x + 0 = -\lambda;\ x = -\lambda$. Solución si $a = 10 \longrightarrow$ $\boldsymbol{x = -\lambda,\ y = 0,\ z = \lambda}$ $\qquad$ ***SCI***.

— b) $\begin{cases} 2x+y-z &= a-4 \\ (a-6y)+3z &= 0 \\ (a+1)x+2y &= 3 \end{cases} \leftrightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & a-4 \\ 0 & a-6 & 3 & 0 \\ a+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \leftarrow B^*$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 3 \\ a+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (a-5)(a+3) = 0 \leftrightarrow a = 5 \ \wedge \ a = -3$

(1*) $a \neq 5 \ \wedge \ a \neq -3 \to |B| \neq 0 \to rg(B) = 3 = rg(B^*) =$ núm. incóg $\to$ **SCD**, resolviendo (y simplificando –Ruffini–) por Cramer:

$$\boldsymbol{x = -\frac{3}{a+3};\ y = \frac{3(a+2)}{a+3};\ z = \frac{(6-a)(a+2)}{a+3}}$$

Hemos dicho que teníamos un SCD pero aparecen infinitas soluciones dependientes de un parámetro a. NO, no hay infinitas soluciones, hay infinitos sistemas: para cada $a \notin \{5, -3\}$ tenemos un solo sistema que tiene una única solución para cada incógnita x, y, z

(2*) $a = -3 \to |B| = 0$, paritcularizando: $B = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & \boxed{1} & -1 & -7 \\ \boxed{0} & \boxed{-9} & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \leftarrow B^*$

$\boxed{M_2} \neq 0 \to rg(B) = 2$. En B^* podemos obtener un M_3 orlando con $F3$ y $C4$: $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & -9 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -9\,(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -9(0-2) = 18 \neq 0 \to rg(B^*) = 3$. Como $rg(B) = 2 \neq 3 = rg(B^*) \Rightarrow$ **SI**

(3*) $a = 5 \to |B| = 0$, paritcularizando: $B = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & \boxed{1} & -1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \leftarrow B^*$

$\boxed{M_2} \neq 0 \to rg(B) = 2$. En B^* podemos obtener un M_3 orlando con $F3$ y $C4$: $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\,(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-6) = 0 \to rg(B^*) = 2$. Como $rg(B) = 2 = rg(B^*) < 3 =$ núm incóg. $\Rightarrow$ **SCI**. Eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la tercera incógnita:

$$\boldsymbol{z = \lambda} \in \mathbb{R}; \quad \begin{cases} 2x + y = 1 + \lambda \\ -y = -3\lambda \end{cases} \to \boldsymbol{y = 3\lambda};\ \boldsymbol{x = \frac{1 - 2\lambda}{2}}$$

$$\text{— c)} \begin{cases} x - ay - z & = 0 \\ (2-2a)x + 5y + z & = 0 \\ 4x + y & = 0 \end{cases} \leftrightarrow C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -1 & 0 \\ 2-2a & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftarrow C^*$$

$|C| = -2a + 17 = 0 \leftrightarrow a = 17/2$

(1*) $a \neq 17/2 \to |C| = 0 \to rg(C) = 3 = rg(C^*) =$ núm. incóg. $\to$ **SCD** y 'homogéneo' $\to$ solución única (la trivial): $\boldsymbol{x = y = z = 0}$

$$(2^*)\ a = 17/2 \to \text{Particularizando: } C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -17/2 & -1 & 0 \\ -15 & \boxed{5} & \boxed{1} & 0 \\ 4 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \end{array}\right) \leftarrow C^*$$

En C tenemos un $\boxed{M_2} = 0 - 1 = -1 \neq 0 \to rg(C) = 2 = rg(C^*)$ (homogéneo) $<$ núm. incóg. $\to$ **SCI**. Eliminamos la primera ecuación (que no forma parte de nuestro menor M_2 que determina el rango y parametrizamos la primera incógnita, x, por el mismo motivo:

$$\boldsymbol{x = \lambda} \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 5y + z = 15\lambda \\ y = -4\lambda \end{cases} \longrightarrow \boldsymbol{y = -4\lambda};\ \boldsymbol{z = 35\lambda}$$

$$\text{— d)} \begin{cases} 2y + az & = a \\ (a-2)x + y + 3z & = 0 \\ (a-1)y & = 1 - a \end{cases} \leftrightarrow D = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & a & a \\ a-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \end{array}\right) \leftarrow D^*$$

$|D| = a(a-1)(a-2) = 0 \leftrightarrow a = 0 \wedge a = 1 \wedge a = 2$ Basta con desarrollar este determinante por Laplace por adjuntos de la tercera fila.

(1*) $a \neq \{0, 1, 2\} \to rg(D) = 3 = rg(D^*) =$ núm incóg $\to$ **SCD**. Resolviendo pr Cramer: $\boldsymbol{x = -\frac{2(a+3)}{a(a-2}};\ \boldsymbol{y = -1};\ \boldsymbol{z = \frac{a+2}{a}}$. Hay infinitos sistemas para cada $a \neq \{0, 1, 2\}$ y para cada uno de ellos una solución única para $x(a),\ y(a),\ z(a)$.

(2*) $a=0 \to$ particularizamos: $D = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow D^*$

$\boxed{M_2} \neq 0 \to rg(D) = 2; \to D^* \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0-(-4) = 4 \neq 0 \to$ $rg(D^*) = 3 \Rightarrow$ **SI**

(3*) $a=1 \to$ particularizamos: $D = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{0} & \boxed{2} & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & \boxed{1} & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \leftarrow D^*$

$\boxed{M_2} \neq 0 \to rg(D) = 2; \to D^* \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to rg(D^*) = 2 < 3 =$ núm. incóg. $\Rightarrow$ **SCI**. Eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la tercera incógnita (no forman parte del menor que dicta el rango) $\to$ $\boldsymbol{z = \lambda} \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 2y = 1-\lambda \\ -x+y = -3\lambda \end{cases} \to \boldsymbol{y = \frac{1-\lambda}{2}; \ x = \frac{1+5\lambda}{2}}$

(4*) $a=2 \to$ particularizamos: $D = \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \boxed{2} & \boxed{2} & 2 \\ \cancel{0} & \boxed{1} & \boxed{3} & 0 \\ \cancel{0} & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \leftarrow D^*$

$\boxed{M_2} \neq 0 \to rg(D) = 2; \to D^* \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6-(6-2) = -10 \neq 0 \to$ $rg(D^*) = 3 \Rightarrow$ **SI**

— e) $\begin{cases} x+y & = 1 \\ ay+z & = 0 \\ x+(a+1)y+az & = a+1 \end{cases} \leftrightarrow E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{array}\right) \leftarrow E^*$

$|E| = a(a-1) = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \wedge \ a = 1$

(1*) $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 1 \rightarrow rg(E) = rg(E^*) = 3 =$ núm. icóg. $\rightarrow$ **SCD** $\rightarrow$ Cramer: $\boldsymbol{x = \dfrac{a}{a-1};\ y = -\dfrac{1}{a-1};\ z = \dfrac{a}{a-1}}$, solución única para cada uno de los infinitos sistemas en que $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 1$.

(2*) $a = 0$, particularizando: $E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow E^*$

En E tenemos un $\boxed{M_2} \neq 0 \rightarrow rg(E) = 2 \rightarrow E^* :\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(F1 = F2) \ \rightarrow rg(E^*) = rg(E) = 2 < 3 =$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCI**. Eliminamos tercera ecuación y parametrizamos primera incógnita (no están en M_2): $\quad \boldsymbol{x = \lambda} \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 1 - \lambda} \\ \boldsymbol{z = 0} \end{cases}$ Sistema que ha salido ya resuelto.

(3*) $a = 1$, particularizando: $E = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \leftarrow E^*$

$\boxed{M_2} \neq 0 \rightarrow gr(E) = 2 \rightarrow E^* :\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2}[1-0] = 1 \neq 0 \rightarrow$ $rg(E^*) = 3$ Por lo que $rg(E) = 2 \neq 3 = rg(E^*) \Rightarrow$ **SI.**

— f) $\begin{cases} x + y + z & = 3 \\ mx - y - z & = -2 \\ 4x + mz & = m^2 + 4 \end{cases} \quad \leftrightarrow F = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ m & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & m & m^2+4 \end{array}\right) \leftarrow F^*$

$|F| = -m(m+1) = 0 \leftrightarrow m = 0 \ \wedge \ m = -1$

(1*) $m \neq 0 \wedge m \neq -1 \rightarrow rg(F) = rg(F^*) = 3 =$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCD**. Por Cramer: $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{m+1};\ y = -m^2 + 2m - 2m + 1;\ z = \dfrac{m^2+m+4}{m+1}}$, una única solución para cada uno de los infinitos sistemas en que

$m \neq 0 \ \wedge \ m \neq -1.$

$$(2^*)\ m=0\rightarrow F=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 3\\ \boxed{0} & \boxed{-1} & -1 & -2\\ 4 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)\leftarrow F^*\rightarrow\boxed{M_2}\neq 0:\ rg(F)=2$$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 4 & 0 & 4\end{vmatrix}=-4-8-(-12)=0\longrightarrow .rg(F^*)=rg(F)=2<3=$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCI**. Eliminamos ecuación 3 y parametrizamos la tercera incógnita $\boldsymbol{z=\lambda}\in\mathbb{R}\rightarrow\begin{cases}x+y=3-\lambda\\ -y=-2\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{y=2};\ \boldsymbol{x=1-\lambda}$

$$(3^*)\ m=-1\rightarrow F=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 3\\ -1 & -1 & -1 & -2\\ \boxed{4} & \boxed{0} & -1 & 5\end{array}\right)\leftarrow F^*\rightarrow\boxed{M_2}\neq 0:\ rg(F)=2$$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & -1 & -2\\ 4 & 0 & 5\end{vmatrix}=4\neq 0\rightarrow rg(F^*)=3\neq 2=rg(F)\Rightarrow$ **SI.**

— g) $\begin{cases}x+y+z &=2\\ x+2y-3z &=8\\ kx-y-z &=1\\ x-y+z &=-2\end{cases}\leftrightarrow G=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -3 & 8\\ k & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)\leftarrow G^*$

G^* es cuadrada: $|G^*|=\begin{cases}C2\rightarrow C2-C1\\ C3\rightarrow C3-C1\\ C4\rightarrow C4-2C1\end{cases}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -4 & 6\\ k & -1-k & -1-k & 1-2k\\ 1 & -2 & 0 & -4\end{vmatrix}=$

(adjuntos primera columna) $.=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -4 & 6\\ -1-k & -1-k & 1-2k\\ -2 & 0 & -4\end{vmatrix}=-8k+16=0\leftrightarrow k=2$. Distinguiremos entre dos casos:

$(1^*)\ k\neq 2|G^*|\neq 0\rightarrow rg(G^*)=4\neq rg(G)$, que solo puede ser tres, luego: **SI**

$$(2^*)\ k=2,\ \text{particularizando: } G=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & 2\\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-3} & 8\\ \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{-1} & 1\\ 1 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)\leftarrow G^*$$

Como $\boxed{M_3}=-15\neq 0\rightarrow rg(G)=3=rg(G^*)=$núm. incóg.

(ya que $det(G^*(k=2))=0$), luego: **SCD**. Prescindiendo de la cuarta ecuación (no forma parte del menor que dicta el rango) y resolviendo por Cramer, se obtiene: $\boldsymbol{x=1;\ y=2;\ z=-1}$

— h) $\begin{cases} kx+ky-z & =-2 \\ 3x-ky & =0 \\ 5x+ky & =0 \\ x+2z & =1 \end{cases} \leftrightarrow H = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \leftarrow H^*$

$|H^*| = -40k = 0 \leftrightarrow k=0$

(1*) $k \neq 0 \to rg(H^*) = 4 \neq rg(H) \to$ **SI.**

(2*) $k=0$, particularizamos: $H = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{0} & \cancel{0} & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{3} & \cancel{0} & \boxed{0} & 0 \\ 5 & \cancel{0} & 0 & 0 \\ 1 & \cancel{0} & 2 & 1 \end{array}\right) \leftarrow H^*$ En H solo hay dos columnas 'libres' $\to \boxed{M_2} = 3 \neq 0 \to rg(H)=2 \to H^*:\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $3(-1)^{2+1}[-1-4] = 15 \neq 0 \to rg(H^*)=3$ Como, $rg(H) \neq rg(H^*) \Rightarrow$ **SI.**

Este sistema es incompatible para cualquier valor de k.

— j) $\begin{cases} x+y+z+t & =4 \\ 2x+2y-z+kt & =k-3 \end{cases} \leftrightarrow J = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 2 & \boxed{2} & \boxed{-1} & k & k-3 \end{array}\right) \leftarrow J^*$

Ni J ni J^* son cuadradas, hay que hacer un estudio ascendente de los rangos. Como $\boxed{M_2} = -3 \neq 0 \to rg(J) = rg(J^*) = 2 < 4 =$ núm. incóg. $\to$ **SCI** $\forall k \in \mathbb{R}$

Por lo que el sistema en compatible indeterminado $\forall k \in \mathbb{R}$. Parametrizando las incógnitas x y t, que no están en el menor, tendremos:

$$\boldsymbol{x=\lambda} \in \mathbb{R}\boldsymbol{;}\ \boldsymbol{y=\mu} \in \mathbb{R} \to \begin{cases} y+z = 4-\lambda-\mu \\ 2y-z = k-3-2\lambda-k\mu \end{cases} \longrightarrow$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1+k-3\lambda-(k+1)\mu}{3}; \quad z = \frac{11-k-(k-2)\mu}{3}}$$

— k) $\begin{cases} x+y+z & =1 \\ x+y+\lambda z & =2 \end{cases} \leftrightarrow K = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array}\right) \leftarrow K^*$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1 = 0 \leftrightarrow \lambda = 1$ Distinguiremos, pues, dos casos:

(1*) $\lambda = 1 \;\rightarrow\; rg(K) = 1;$ En K^* : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(K^*) = 2$.
Como $rg(K) \neq rg(K^*) \rightarrow$ **SI.**

(2*) $\lambda \neq 1 \rightarrow rg(K) = 2 = rg(K^*) < 3 =$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCI**: Parametrizamos la tercera incógnita (no está en el menor):

$$\boldsymbol{x = \aleph},\ \forall \aleph \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} y + z = 1 - \aleph \\ y + \lambda z = 2 - \aleph \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{z = \frac{1}{\lambda - 1};\ y = 1 - \aleph - \frac{1}{\lambda - 1}}$$

Para cada uno de los infinitos sistemas en que $\lambda \neq 1$, fijado éste, tenemos infinitas soluciones dependiendo del parámetro $x = \aleph,\ \forall \aleph \in \mathbb{R}$

Hemos obviado el apartado i) para no confundir la matriz asociada al problema, I, con la identidad.

◇

Ejercicio resuelto 5.8. *Discute los siguientes sistemas y resuelve en los casos de compatibilidad.*

$$a) \begin{cases} 2x - y - 2z & = b \\ x + y + z & = 5 \\ 4x - 5y + az & = -10 \end{cases} ; \qquad b) \begin{cases} ax + y - z & = b - 1 \\ 2x + ay & = b + 1 \\ -x \quad + z & = b \end{cases}$$

.

$$\text{— } a) \begin{cases} 2x - y - 2z & = b \\ x + y + z & = 5 \\ 4x - 5y + az & = -10 \end{cases} \leftrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & a & -10 \end{array}\right) \leftarrow A^*$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = 3a + 24 = 0 \leftrightarrow a = -8 \text{ Distinguiremos dos casos:}$$

(1*) $a \neq -8 \rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) =$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCD**, por Cramer:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b}{a+8} + \frac{b+5}{3};\ y = \frac{4b}{a+8} + \frac{10-b}{3};\ z = \frac{-3b}{a+8}}$$

(2*) $a = -8$, particularizando: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & \boxed{-1} & -2 & b \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -8 & -10 \end{array}\right) \leftarrow A^*$

$\boxed{M_2} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 \longrightarrow A^* : \begin{vmatrix} 2 & -1 & b \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -1 = \end{vmatrix} = -9b = 0 \leftrightarrow b = 0$

Distinguimos dos sub-casos:

(2*-a) $b \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*) \rightarrow$ **SI**

(2*-b) $b = 0 \rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 2 < 3 =$ núm. incóg $\rightarrow$ **SCI**.

Eliminamos ecuación-3 y parametrizamos incógnita-3: $\boldsymbol{z = \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2\lambda \\ x + y = 5 - \lambda \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{5+\lambda}{3};\ y = \frac{-4\lambda + 10}{3}}$

— $b)$ $\begin{cases} ax + y - z & = b - 1 \\ 2x + ay & = b + 1 \\ -x \quad + z & = b \end{cases} \leftrightarrow B = B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & a & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right) \leftarrow B^*$

$|B| = a^2 - a - 2 = 0 \leftrightarrow a = 2 \ \wedge \ a = -1$

(1*) $a \neq 2 \ \wedge \ a \neq -1 \rightarrow rg(B) = rg(B^*) = 3 =$ núm. incóg. $\rightarrow$ **SCD**. Por Cramer: $\boldsymbol{x = \frac{2ab - a - b - 1}{a^2 - a - 2};\ y = \frac{ab + a - 5b + 1}{a^2 - a - 2};\ z = \frac{a^2 b + ab - a - 3b - 1}{a^2 - a - 2}}$

(2*) $a = 2 \longrightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & \boxed{1} & -1 & b-1 \\ \boxed{2} & \boxed{2} & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right) \leftarrow B^* \rightarrow \boxed{M_2} \neq 0 \rightarrow$

$rg(B) = 2 \longrightarrow B^* : \begin{vmatrix} 2 & 1 & b-1 \\ 2 & 2 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 3b - 3 = 0 \leftrightarrow b = 1$ Dos sub-casos.

(2*-a) $b \neq 1 \rightarrow rg(B^*) = 3 \neq 2 = rg(B) \rightarrow$ **SI.**

$$(2^*\text{-b})\ b=1\rightarrow B=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{2}&\boxed{1}&-1&0\\\boxed{2}&\boxed{2}&0&2\\-1&0&1&1\end{array}\right)\leftarrow B^*\rightarrow\begin{vmatrix}2&1&0\\2&2&2\\-1&0&1\end{vmatrix}=0\rightarrow$$

$rg(B^*)=2=rg(B)<3=$ núm. incóg *to* **SCI**. Eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la tercera incógnita:

$\boldsymbol{x=\lambda-1;\ y=2-\lambda;\ z=\lambda}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$(3^*)\ a=-1\longrightarrow B=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{-1}&\boxed{1}&-1&b-1\\\boxed{2}&\boxed{-1}&0&b+1\\-1&0&1&b\end{array}\right)\leftarrow B^*\rightarrow\boxed{M_2}\neq0\rightarrow$$

$rg(B)=2\longrightarrow B^*:\ \begin{vmatrix}-1&1&b-1\\2&-1&b+1\\-1&0&b\end{vmatrix}=-3b=0\leftrightarrow b=0$ Dos subcasos.

$(3^*\text{-a})\ b\neq0\rightarrow rg(B^*)=3\neq2=rg(B)\rightarrow$ **SI.**

$$(3^*\text{-b})\ b=0\rightarrow B=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{-1}&\boxed{1}&-1&-1\\\boxed{2}&\boxed{-1}&0&1\\-1&0&1&0\end{array}\right)\leftarrow B^*\rightarrow\begin{vmatrix}-1&1&-1\\2&-1&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=0$$

$\rightarrow rg(B^*)=2=rg(B)<3=$ núm. incóg $\rightarrow$ **SCI**. Eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la tercera incógnita:

$\boldsymbol{x=\lambda;\ y=-1+2\lambda;\ z=\lambda}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$\text{Resumiendo:}\ \begin{cases}a\neq-1\ \wedge\ a\neq2\rightarrow SCD,\ \forall b\in\mathbb{R}\\ a=-1\rightarrow\begin{cases}b=0\rightarrow SCI\\ b\neq0\rightarrow SI\end{cases}\\ a=2\rightarrow\begin{cases}b=1\rightarrow SCI\\ b\neq1\rightarrow SI\end{cases}\end{cases}$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 5.9. *Elimina los parámetros de los siguientes sistemas:*

$a)\ \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2\lambda - 3\mu \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} x = 2 + 3\alpha - \beta + 2\gamma \\ y = 3 + \alpha + 5\beta + 6\gamma \\ z = 2 - \alpha + \beta \end{cases}$ $\quad c)\ \begin{cases} x = 2\theta + \varphi \\ y = -\theta + \varphi \\ z = 3\theta - 2\varphi \\ t = \theta + \varphi \end{cases}$

—— a) $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2\lambda - 3\mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda - \mu = y \\ 2\lambda - 3\mu = z \end{cases}$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \boxed{1} & x \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & y \\ 2 & -3 & z \end{array}\right) \leftarrow A^*.$$

Como en A hay un $\boxed{M_2} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow$

Tendremos Num.eccs $= n - rg(A) = 3 - 2 =$

Exigimos que $rg(A^*) = 2 \rightarrow |A^*| = 0 \rightarrow$:

$$0 = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & x \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & y \\ 2 & -3 & z \end{vmatrix} = -z - 3x + 2y - (-2x - 3y + z) = -x + 5y - 2z$$

Solución: $\boldsymbol{x - 5y + 2z = 0}$

—— b) $\begin{cases} 2 + 3\alpha - \beta + 2\gamma \\ y = 3 + \alpha + 5\beta + 6\gamma \\ z = 2 - \alpha + \beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = x - 2 \\ \alpha + 5\beta + 6\gamma = y - 3 \\ -\alpha + \beta = z - 2 \end{cases}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & \boxed{-1} & 2 & x - 2 \\ \boxed{1} & \boxed{5} & 6 & y - 3 \\ -1 & 1 & 0 & z - 2 \end{array}\right) \leftarrow A^*.$$

Como $|A| = 0 \rightarrow rg(A) < 3$; En A hay un $\boxed{M_2} = 15 - (-1) = 16 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$. Obendremos: Num. eccs. $= n - rg(A) = 3 - 2 = 1$ ecuación.

Al exigir que $rg(A^*) = rg(A) = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} \boxed{3} & \boxed{-1} & x - 2 \\ \boxed{1} & \boxed{5} & y - 3 \\ -1 & 1 & z - 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \cdots$

Solución: $\boldsymbol{3x - y + 8z = 19}$

—— c) $\begin{cases} x = 2\theta + \varphi \\ y = -\theta + \varphi \\ z = 3\theta - 2\varphi \\ t = \theta + \varphi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2\theta + \varphi = x \\ -\theta + \varphi = y \\ 3\theta - 2\varphi = z \\ \theta + \varphi = t \end{cases}$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & \boxed{1} & x \\ \boxed{-1} & \boxed{1} & y \\ 3 & -2 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \leftarrow A^*.$$ Observamos, rápidamente, que $rg(A) = 2$

Núm. eccs. $= n - rg(A) = 4 - 2 = 2$ ecuaciones, que obtendremos al exigir que el sistema sea compatible: $rg(A^*) = rg(A) = 2 \to$ hay dos menores de orden 3 en A^* que deben ser cero:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 3 & -2 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad \boldsymbol{-x + 7y + 3z = 0} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad \boldsymbol{-2x - y + 3t = 0} \end{cases}$$

Resumiendo, en este caso:

$$(1) \begin{cases} x = 2\theta + \varphi \\ y = -\theta + \varphi \\ z = 3\theta - 2\varphi \\ t = \theta + \varphi \end{cases} \quad \underset{\text{Resolver SEL}}{\overset{\text{eliminar parámeros}}{\longleftarrow - - - - - - \longrightarrow}} \quad (2) \begin{cases} -x + 7y + 3z = 0 \\ -2x - y + 3t = 0 \end{cases}$$

Eliminando los parámetros de (1) obtenemos el SEL (2), que al resolverlo obtendremos un SCI dependiente de dos parámetros cuyas soluciones serán *equivalentes* a (1) (cualquier solución que se obtenga para la solución del SEL con λ y μ, p.e., se corresponderá con la misma solución para oros valores de θ y φ y viceversa).

◇

Nota: Es costumbre, en pruebas de acceso a la universidad, no preguntar toda la discusión y resolución de un SEL dependiente de parámetro/s sino solamente partes del estudio. Siempre que no se trate de algo realmente sencillo es conveniente empezar con la discusión del sistema para pasar, luego, a responder a las preguntas planteadas en el problema.

Ejercicio resuelto 5.10. *Determinar el valor de α para el cual el siguiente SEL tiene solución:* $\begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha^2 \\ \alpha x + (1-\alpha)y + (\alpha-1)z = \alpha^2 \\ \alpha x + y + \alpha z = 2\alpha^2 \end{cases}$

Resolverlo cuando sea compatible determinado.

Este es un ejemplo típico de problemas propuestos es PAU (pruebas de acceso a la universidad).

Hagamos, primero, la discusión del sistema y luego responderemos las preguntas.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & \alpha 2 \\ \alpha & 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha & 2\alpha^2 \end{array}\right) \leftarrow A^*$$

$|A| = a^2(1-a) = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \wedge \ a = 1 \rightarrow$

$\boldsymbol{a \notin \{0,1\}: \ rg(A) = 3 = rg(A*) = \textbf{núm. incog.} \rightarrow \ SCD}$

$$\boldsymbol{a = 1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \mathbf{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{2} \end{array}\right) \rightarrow \boldsymbol{rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A*): \ SI}$$

$$\boldsymbol{a = 0} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \boldsymbol{rg(A) = 2 =} (homogneo) =$$

$\boldsymbol{= rg(A^*) < 3 = \textbf{n-um. incóg.: SCI}}$

—— Resolvamos, ahora, el problema propuesto:

a) para $\boldsymbol{\alpha = 1}$ tenemos **SI**, no tiene solución:

b) para $\boldsymbol{\alpha = 0}$ tenemos **SCI**. Eliminamos la primera ecuación, que no forma parte del rango, y parametrizamos la primera incógnita, x, por el mismo motivo: $x = \lambda$; $\begin{cases} y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \lambda,\ y = 0,\ z = 0}$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 5.11. *Demuestra que si el SEL* $\begin{cases} -x+by+cz-dt=0 \\ ax-y+cz+dt=0 \\ ax+by-z+dt=0 \\ ax+by+cz-t=0 \end{cases}$ *tiene solución distinta de la trivial, entonces se verifica la relación:*

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1$$

El SEL es homogéneo, tendrá solución distinta a la la trivial si $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2 \rightarrow F2-F1 \\ F3 \rightarrow F3-F2 \\ F4 \rightarrow F4-F3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{-1} & b & c & d \\ \boxed{a+1} & -1-b & 0 & 0 \\ \boxed{0} & b+1 & -1-c & 0 \\ \boxed{0} & 0 & c+1 & -1-d \end{vmatrix} =$$

$-1(-1)^{1+1}M_{11} + (a+1)(-1)^{1+2}M_{21} + 0 + 0 = \cdots =$

$= (1+b)(1+c)(1+d)$

$-b(1+a)(1+c)(1+d) - c(1+a)(1+b)(1+d) - d(1+a)(1+b)(1+c) = 0$

Por lo que:

$b(1+a)(1+c)(1+d) + c(1+a)(1+b)(1+d) + d(1+a)(1+b)(1+c) = (1+b)(1+c)(1+d)$

Dividiendo por: $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$, tenemos:

$$\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+a}+\frac{a}{1+a}=\frac{1}{a+a}+\frac{a}{1+a}$$

Donde hemos sumado a cada miembro el término: $\dfrac{a}{1+a}$ y haciendo la suma en el segundo miembro, finalmente, obtenemos:

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+a}=1 \qquad \square$$

$\diamond$

5.6.2. Ejercicios propuestos

1. Calcula el rango. de las siguientes matrices usando el método de Gaus y el de los orlados.

$a)$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix}$

$c)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $d)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

$e)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $f)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución: $rg(A)=2$; $rg(B)=3$; $rg(C)=2$; $rg(D)=2$; $rg(E)=4$; $rg(F)=2$.

2. Calcula el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & x & 2x-6 \\ 1 & x & x \\ 4-x & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m & 2 \\ 1 & -1 & -1 & m-1 \end{pmatrix}$

$c)$ $\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & b \\ 1 & a+1 & 0 & 2b \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $d)$ $\begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ -1 & 2p & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$e)$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 4 & k \end{pmatrix}$; $f)$ $\begin{pmatrix} k-1 & k & 0 \\ 0 & k-1 & k \\ k-1 & 0 & k \end{pmatrix}$

$$g)\ \begin{pmatrix} k & k-1 & k^2-k \\ k & 1 & k \\ k & 1 & k-1 \end{pmatrix} \quad ; \quad h)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix}$$

$$J)\ \begin{pmatrix} m+1 & m \\ m-1 & 2m \end{pmatrix} ; \quad K)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & m^2-1 \\ 0 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $a)$ $x \notin \{2,6\}$ $rg(A) = 3; x \in \{2,6\}$ $rg(A) = 2;$.

Solución: $b)$ $m \neq 2 \to rg(B) = 3;\ m = 2 \to rg(B) = 2$.

Solución: $c)$ $a \notin \{-1,0\} \to rg(C) = 3;\ \ a \in \{-1,0\}\ \wedge b \neq 0 \to rg(C) = 3$.

(sigue) ; $a \in \{-1,0\}\ \wedge b = 0 \to rg(C) = 2$.

Solución: $d)$ $p \notin \{0,1/2\} \to rg(D) = 3;\ \ p \in \{0,1/2\} \to rg(D) = 2$.

Solución: $e)$ $k \notin \{0,4\} :\ rg(E) = 3;\ \ k \in \{0,4\} :\ rg(E) = 2$.

Solución: $f)$ $k \notin \{0,1,1/2\} :\ rg(F) = 3;\ \ k \in \{0,1,1/2\} :\ rg(F) = 2$.

Solución: $g)$ $k \notin \{0,2\} :\ rg(G) = 3;\ \ k \in \{0,2\} :\ rg(G) = 2$.

Solución: $h)$ $k \in \{2,7\} :\ rg(H) = 3;\ \ k \in \{2,7\} :\ rg(H) = 2$.

Solución: $j)$ $m \notin \{0,1\} :\ rg(J) = 2;\ \ m \in \{0,1\} :\ rg(J) = 1$.

Solución: $k)$ $m \neq 0 :\ rg(K) = 3;\ \ m = 0 :\ rg(K) = 2$.

3. Resuelve los siguientes sistemas por Cramer:

$$a)\ \begin{cases} -x+y+z=2 \\ x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} ; \quad b)\ \begin{cases} 3x-2y-2z=4 \\ -x+4z=-1 \\ 2x-5y-6z=-7 \end{cases} ; \quad c)\ \begin{cases} -x+y+z=2 \\ 2x+2y+z=-1 \\ 3x+3y+z=1 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ 3x+2y+z=0 \\ 4x+y+4z=1 \end{cases} ; \quad e)\ \begin{cases} x+2y-t=0 \\ y+z+2t=0 \\ z+t=1 \\ z-t=1 \end{cases} ; \quad f)\ \begin{cases} x+y=m \\ y+z=m+1 \\ x+z=1-m \end{cases} .$$

Solución: $a)$ $(0,1,1)$; $b)$ $(3,2,1/2)$.

Solución: $c)$ no Cramer ; $d)$ $(0,-1/7,2/7)$.

Solución: $e)$ $(2,-1,1,0)$; $g)$ $(-m/2, 3m/2, 1-m/2)$.

4. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+y-3z=3 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases} \quad ; \quad b)\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2y+3z=2 \\ 3x+y+3z=7 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b+c=5 \end{cases} \quad ; \quad d)\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 16x+17y+7z=0 \\ 4x-y+4z=0 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} m+3p-2q=5 \\ p-q=1 \\ m+q=0 \end{cases} \quad ; \quad f)\begin{cases} 2x+y+t=0 \\ 3x-4y+z-2t=1 \\ x+2y-z+4t=-1 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} 11x-22y+5z=24 \\ 2x-4y+z=7 \\ -3x+6y-2z=4 \end{cases} \quad ; \quad h)\begin{cases} 2u-v+w=7 \\ 3u+2v-2w=1 \end{cases}$$

$$i)\begin{cases} 3x-2y+4z08 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-8 \\ 4x+4y+6z=18 \end{cases} \quad ; \quad j)\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+5y-3z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$$

Solución: a) SCD $(-4,4,-1)$.

Solución: b) SCI $((4-\lambda)/2,(2-3\lambda)/2,\lambda)$.

Solución: c) SCD $(-2/3,5/3,2/3)$.

Solución: d) SCD $(-2/21,-1/21,1/3)$.

Solución: e) SI .

Solución: f) SCI $((-1+\lambda-6\mu)/5,(-2+2\lambda-7\mu)/5,\lambda,\mu)$.

Solución: g) SCI $(18+2\lambda,\lambda,-29)$.

Solución: h) SCI $(15/7,(7\lambda-19)/7,\lambda)$.

Solución: i) SCD $(2,1,1)$.

Solución: j) SCI $(\lambda/7,4\lambda/7,\lambda)$.

5. . Discute el siguiente SEL según el valor del parámetro:

$$a)\ \begin{cases} kx+(k+1)z=k \\ y+kz=k \\ ky+z=k \end{cases} \quad ; \qquad b)\ \begin{cases} x+(a-1)y+z=1 \\ 3x+ay+az=3 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x+my-2z=0 \\ my+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases} \quad ; \qquad d)\ \begin{cases} (k+1)x+y+z=k(k+3) \\ x+(k+1)y+z=k^2(k+3) \\ x+y+(k+1)z=k^3(k+3) \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x+y+mz=0 \\ 2x+4y+3z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{cases} \quad ; \qquad f)\ \begin{cases} x+\lambda y+(\lambda+1)z=1 \\ x+2y-z=2 \\ x+(\lambda+1)y-\lambda z=2\lambda \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x-y+z=a \\ x+y-z=1 \\ 3x+3y+az=a \end{cases} \quad ; \qquad h)\ \begin{cases} 3x+2y+z=b \\ bx-y+z=b \\ by+bz=b \end{cases}$$

$$i)\ \begin{cases} a^2x+a^2y+az=1 \\ x+a^2y+z=0 \end{cases} \quad ; \qquad j)\ \begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

$$k)\ \begin{cases} x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=3 \\ x+y+z=3a \end{cases} \quad ; \qquad l)\ \begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=1 \\ ax+y=3 \end{cases}$$

Solución: a) $p \notin \{-1,0,1\}:\ SCD; \quad p=-1:\ SI; \quad p=0:\ SCI; \quad p=1:\ SCI$.

Solución: b) $SCI\ \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Solución: c) $m \neq -1/4:\ SCD; \quad m=-1/4:\ SCI$.

Solución: d) $k \notin \{-3,0\}:\ SCD; \quad k=0:\ SCI; \quad k=-3:\ SCI$.

Solución: e) $k \neq 1:\ SCD; \quad k=1:\ SCI$.

Solución: f) $\lambda \notin \{0,1\}:\ SCD; \quad \lambda=0:\ SI; \quad \lambda=1:\ SCI$.

Solución: g) $a \neq -3:\ SCD; \quad a=-3:\ SI$.

Solución: h) $b \notin \{-6,0\}:\ SCD; \quad b=-6:\ SI; \quad b=0:\ SCI$.

Solución: i) $a \notin \{0,1\}:; SCI; \quad a \in \{0,1\}: SI$.

Solución: j) $a \notin \{1,-2\}:\ SCD; \quad a \in \{1,-2\}:\ SCI$.

Solución: k) $a \neq 1:\ SCD; \quad a=1:\ SCI$.

Solución: l) $a = 6/7: \ SCD; \quad a \neq 6/7: \ SI$.

6. Discute y resuelve en los casos de compatibilidad los siguientes SEL en función del parámetro:

$$a) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ kx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases} ; \qquad b) \begin{cases} x - y + z = 7 \\ 2x + my - 4z = m \\ -x + y - z = 1 \\ -x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{cases} ; \qquad d) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ kx + y + 3z = 4 \\ kx + y - 7z = 3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ky + 3z = 3 \\ y - z = 03y - z = 2 \end{cases} ; \qquad f) \begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + y + bz & = b^2 \\ -x + y + z & = -3 \\ bx + y + z & = 3b \end{cases} ; \qquad h) \begin{cases} ax \quad - y & = 1 \\ -2x + (a-1)y & = 2 \end{cases}$$

Solución: a) $k \neq 1: \ SI; \quad K = 1: \ SCD \ (2, 1, 1)$.

Solución: b) $SI \ \forall m$.

Solución: c) $a = 0: \ SI; \quad a \neq 0: \ SCD \ ((2a+1)/a^2, 1/a^2, -1/a, -1)$.

Solución: d) $k \neq 19/5: \ SI; \quad k = 19/5: \ SCD \ (1, -1/10, 1/10)$.

Solución: e) $k \neq 4: \ SI; \quad k = 4: \ SCD \ (-4, 1, 1)$.

Solución: f) $SI \ \forall k$.

Solución: g) $b = 1: \ SI; \quad b = -1: \ SCI \ (2 + \lambda, -1, \lambda); \quad m \neq \pm 1: \ SCD$.

Solución: h) $a = 2: \ SI; \ a = -1: \ SCI \ (-1 - \lambda, \lambda)$.
(sigue-h): $a \notin \{2, -1\}: \ SCD \ \left(\frac{1}{a-2}, \frac{2}{a-2} \right)$.

7. Discute y resuelve en los casos de compatibilidad los siguientes SEL en función de los parámetros:

$$a)\ \begin{cases} 2x - \lambda y + \mu z = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad ; \qquad b)\ \begin{cases} \lambda x + y + z = \mu \\ x + y + \lambda z = 2 \\ 2x + y + \lambda z = \mu \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} ax + ay + az = 0 \\ ax + by + bz = 0 \\ ax + by + az = 0 \end{cases} \quad ; \qquad d)\ \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = a \\ x + 3y = b \\ 4 + 4y = 2a \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2 y = 1 \end{cases} \quad ; \qquad f)\ \begin{cases} ax + y + 3z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 5x - 3y - 2z = 6 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + y = 5 \\ 2x + z = a \\ 2x - 3z = a \end{cases} \quad ; \qquad h)\ \begin{cases} x + y + z & = 3 \\ x + y - az & = 3 \\ 4x + 4y - z & = 5 \\ ax + 2y + (a+2)z & = a^2 - 2 \end{cases}$$

Solución: a) $[\ \mu \neq 2 :\ SCD\ (2, 0, 0); \quad \mu = 2 :\ SCI\ (a, 0, 2 - a)\ ]\ \forall \lambda$.

Solución: b) $\lambda \neq 1 :\ SCD\ (\mu - 2, \dfrac{\mu - 2}{\lambda - 1} - \lambda(\mu - 2) + 2, \dfrac{(\lambda - 2)(\mu - 2)}{\lambda - 1})\ \forall \mu$.

(sigue-b): $\lambda = 1 \wedge \mu \neq 2 :\ SI; \quad \lambda = 1 \wedge \mu = 2 : SCI\ (0, -a + 2, a)$.

Solución: c) $a \neq 0 \wedge b \neq 1 \wedge a \neq b :\ SI; \quad a \neq 0 \wedge b = 1 :$ SCD(1-param) .

(sigue-c) $a = b \neq 1 :\ SCI$ SCD(1-param); $a = b = 1 :\ SCI$ SCD(2-param) .

(sigue-c) $a = 0 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq 1 : SCI$ SCD(1-param) .

(sigue-c) $a = 0(\ b = 0 \vee b = 1\ ) :\ SCI$ SCD(2-param) .

Solución: d) $a = 2 \wedge b = 3 :\ SDC\ (0, 1);$ otros casos: SI .

Solución: e) $a = 1 :\ SCI\ (1 - \lambda, \lambda); \quad a \neq 1 :\ SCD\ \left(\dfrac{a^3 + a^2 + a + 1}{a^2 + a + 1}, \dfrac{-a}{a^2 + a + 1}\right)$.

Solución: f) $a = 3 :\ SI; \quad a \neq 3 :\ SCD\ \left(\dfrac{-9}{a - 3}, \dfrac{6a + 9}{a - 3}, \dfrac{6a}{a - 3}\right)$.

Solución: g) $a \neq 6 :\ SI; \quad a = 6 :\ SCD\ (3, -7, 0)$.

Solución: h) $a \notin \{1, 6\} :\ SI; \quad a \in \{1, 6\} :\ SCD\ (7, -4, 0)$.

8. Elimina los parámetros en lo siguientes sistemas:

$a)\begin{cases} x-1=4a+b \\ y-2=3a-b \\ z=-a+2b \end{cases}$; $b)\begin{cases} x+y=3+3a \\ 2x+y-z=1+3a+3b \\ x-2y+z=-8-2a+5b \end{cases}$

$c)\begin{cases} x=-\alpha+2\beta+3\gamma+2\delta \\ y=\alpha-2\beta+\gamma+2\delta \\ z=2\alpha-4\beta-\gamma+\delta \\ t=2\alpha-4\beta+3\gamma+5\delta \end{cases}$

Solución: a) $5x-9y-7z+13$; b) $y-2z=2$.

Solución: c) $\begin{cases} 3x-5y+4z=0 \\ x+9y-4t=0 \end{cases}$.

9. Considera el siguiente SEL dependiente de tres parámetros a, b, c :

$$\begin{cases} 2ax+by+z & =3c \\ 3x-2by-2cz & =a \\ 5ax-2y+cz & =-4b \end{cases}.$$

a) Justifica que para $a=0, b=-1, c=2$ el sistema es incompatible.

b) Determina los valores a, b, c para los que $(x, y, z)=(1,2,3)$ es solución del sistema.

c) Justifica si la solución del sistema $(x, y, z)=(1,2,3)$ del apartado anterior es o no única.

Solución: a) particularizando para $a=0, b=-1, c=2$: $rg(A)\neq rg(A^*)$: SI .

b) particularizando $x=1, y=2, z=3$, incóg: a, b, c : SCD : $a=1, b=-1, c=1$.

c) sí, en el caso anterior el SEL es SCD .

10. Considera el SEL: $\begin{cases} 2x-2y-z=4 \\ x+2y-2z=-1 \\ x-z=1 \end{cases}$

a) ¿Existe alguna solución en que $y=0$?

b) Resolver el sistema homogéneo asociado al dado.

Solución: a) Sí, $(3,0,2)$; b) $(2\lambda, \lambda, 2\lambda)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

11. En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos:

* El primer lote está compuesto por un litro de refresco, tres paquetes de snacks y siete vasos desechables, su precio es de 5.65 €.

* El primer lote está compuesto por un litro de refresco, cuatro paquetes de snacks y diez vasos desechables, su precio es de 7.40 €.

Con estos datos, ¿se podría averiguar cuánto debería costar un lote compuesto por un litro de refresco, un paquete de snacks y un vaso desechable?

Solución: Sí, 2.15 € .

12. $\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases}$ Discute el sistema en función de m y resuelve para $m = 2$

Solución: $m = 1$, SI; $m = 0$, SCI: $(\lambda, 1-\lambda, 0)$, si $m \notin \{0,1\} : SCD$. .

(sigue): Para $m = 2$: $(2, -1, 2)$.

13. Considera el sistema de ecuaciones. $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 1 \\ 4x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + az = b \end{cases}$

Determina ls valores de a y b para que el sistema tenga infinitas soluciones y resuélvelo en este caso.

Solución: $a = 44/5$; $(1-\lambda, -1+14\lambda, 5\lambda)$.

14. Determina a, b, c sabiendo que las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ verifican $AB = C$ y que $rg(A) = 2$

Solución: $a = 1$; $b = 23/29$; $c = 33/29$.

15. : Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & m & 2 \\ m & -1 & m-2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina el rango en función de m

b) Discute, en función de m el SEL dado en forma matricial por la ecuación $AX = B$

c) Resolver $AX = B$ cuando sea compatible indeterminado.

Solución: $a)m \in \{1, 1/2\}: \; rg(A) = 2; \quad m \notin \{1, 1/2\}: \; rg(A) = 3$.

Solución: $m \notin \{1, 1/2\}: \; SCD; \quad m = 1/2: \; SI; \quad M = 1: \; SCI$.

Solución: $m = 1 \; (SCI): \quad (1-\lambda, -2\lambda, \lambda)$.

16. Determina los valores de los parámetros a y b sabiendo que el sistema $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ ax + by + z = 4 \end{cases}$, tiene al menos dos soluciones distintas.

Solución: $(SCI) \quad a = 4; \; b = 8$.

17. Un cajero automático contiene solo billetes de 10, 20 y 50 €. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 €.

a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple de billetes de 10 que de 50?

b) Si el número de billetes de 10 es doble que el de 50, ¿cuántos billetes hay de cada tipo?

Solución: a) No; b) 10, 20 y 50 billetes, respectivamente .

18. Sabemos que el sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ tiene las mismas soluciones que si se le añade la ecuación $ax + y + 7z = 7$.

a) Determina el valor de a

b) Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

Ayuda: . a) Necesariamente los sistemas has de ser SCI

Ayuda: . b) $x(\lambda) + y(|lambda) + z(\lambda) = 1 \rightarrow \lambda$

Solución: $a) \; a = 8; \quad b) \; (6/5, 1/5, -2/5)$.

19. Discute el sistema $\begin{cases} 3x+\lambda y=0 \\ x+\lambda z=\lambda \\ x+y+3z=1 \end{cases}$ en función de λ y resuelve para $\lambda=0$,

Solución: $\lambda \notin \{0,6\}:\ SCD; \quad \lambda=6:\ SI; \quad \lambda=0:\ SCI:(0,1-3t,t),\ \forall t\in\mathbb{R}$.

20. Discutir y resolver el sitema: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x+4y-3z=7 \\ 2x+3y-az=4 \\ 5x+7y-(a+b)z=8+b \end{cases}$

Solución: $a\neq 4;\wedge\, b\neq 3:\ SI; \quad a\neq 4\ \wedge\ b=3:\ SDC\ \cdots$.

Solución: $a=4\ \wedge\ b\neq 3:\ SI; \quad a=4\ \wedge\ b=3:\ SCI:\ (5+7\lambda,-2+6\lambda,\lambda)$.

21. Sea $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+ay=b \\ bz+cy=a \end{cases}$, en donde a,b,c son constantes y x,y,z incógnitas. Demuestra que si a,b y c non no nulos, el sistema tiene solución única. Encuéntrala.

Solución: $|A|=-2abc\neq 0; \quad \left(\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2abc},\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2abc},\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}\right)$.

22. De los siguientes dos SEL, discute y resuelve en los casos de compatibilidad el primero de ellos y solamente haz la discusión del segundo sistema:

$a)\ \begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z=k \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+my+m^2z=1 \\ x+my+mnz=m \\ nx+m^2y+m^2nz=m^2n \end{cases}$

Solución: $a)\ k\notin\{-3,1\}:SI \quad k=-3:SCD\ (-1,-1,-1); \quad k=1:\ SCI\ (1-\lambda-\mu,\lambda,\mu)$.

Solución: $b)\ m\notin\{0,n\}:\ SCD; \quad m=0:\ SI; \quad m=n=1:\ SCI; \quad m=n\neq 1:\ SI$.

5.6.3. Cuestiones

Q1. Considera $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$. Determina el valor de k para que $A+kB$ tenga rango 1.

Sol: $k = 1 \vee k = 6$

Q2. Considera los sistemas: $a) \begin{cases} x - 3y + z = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$; $b) \begin{cases} x + 2z = -1 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$

$c) \begin{cases} -3x - y - 2z = 0 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$; $d) \begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 3t = 2 \\ 3x - 2y + 5z = -1 \end{cases}$

a) Añade una ecuación para que el sistema resulte incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado.

Solución: a) Basta con añadir una ecuación suma de las anteriores, .

(sigue-a) pero aumentando 1 en el término independiente. .

Solución: b) Basta con añadir una ecuación suma de las anteriores. .

Q3. Un SEL de dos ecuaciones con 2 incógnitas:

a) Puede tener solución única.

b) Puede tener infinitas soluciones.

c) Puede carecer de soluciones.

d) Para resolverlo hace falta una ecuación más.

e) Se necesitan dos parámetros para su solución.

Sol: A,C y C son correctas

Q4. Un SEL homogéneo:

a) Siempre tiene solución.

b) Solo tiene la solución trivial.

c) Para que tenga solución distinta de la trivial, el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser igual al rango de la matriz ampliada.

d) Si tiene solución distinta de la trivial, tiene infinitas soluciones.

e) Los rangos de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada siempre son iguales.

Sol: A,D y E son correctas

Q5. En un SEL, se cumple que:

i) Los rangos de la matriz de los coeficientes y ampliada son iguales.

ii) El sistema tiene infinitas soluciones.

Entonces:

a) $i \leftrightarrow ii$

b) $i \rightarrow ii$, per $ii \not\rightarrow i$

c) $ii \rightarrow i$, per $i \not\rightarrow ii$

d) i y ii son excluyentes entre sí (si se da uno no se da el otro).

e) Ninguna de las anteriores.

Sol: solo C es correcta

5.7. Resumen

Resumen SEL: Th. Rouché

$rg(M_{m\times n}) \leq min(m,n)$:

— Gauss: filas, excluidas trivialidades, de la matriz escalonada M_e.
— Adjuntos: 'método de los Orlados'.

Sistema de Cramer: $\begin{cases} n\times n \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorema de Rouché:

$$rg(A) \neq rg(A*) \Rightarrow S.I.$$
$$rg(A) = rg(A*) \begin{cases} = n \Rightarrow S.C.D \\ < n \Rightarrow S.C.I. \end{cases}$$

SEL homogéneo tiene solución distinta de la trivial $\leftrightarrow |A| = 0$

SEL / SCI $\rightarrow$ soluciones con parámetros $\rightarrow$ parámetros como incógnitas y exigir SC $\rightarrow$ 'eliminación de parámetros' (SEL equivalente al inicial).

Capítulo 6

Espacios vectoriales ⋇

La idea de vector está tomada de la Física, donde sirven para representar magnitudes vectoriales como fuerzas, velocidades o aceleraciones. Para ello se emplean vectores de dos componentes en el plano, de tres componentes en el espacio...

En Matemáticas, se trata de abstraer las propiedades que caracterizan a los vectores para extenderlas también a otro tipo de objetos diferentes de los vectores de la Física. Esencialmente, el comportamiento que caracteriza a los vectores es el siguiente:

* Podemos sumar dos vectores y obtenemos otro vector;

* Podemos multiplicar un vector por un número (escalar) y obtenemos otro vector.

En álgebra abstracta, un espacio vectorial (o también llamado espacio lineal) es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna (llamada suma, definida para los elementos del conjunto) y una operación externa (llamada producto por un escalar, definida entre dicho conjunto y otro conjunto, con estructura de cuerpo), con unas propiedades fundamentales.

A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \cdots)$y a los elementos del cuerpo, escalares $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$.

6.1. Espacios vectoriales

Definición 6.1. *Se llama 'espacio vectorial' $\mathcal{V}$ sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ a la terna :* $(\,(\mathcal{V}, \oplus),\ (\mathcal{K}, +, \cdot),\ \odot\,)$ *, donde $(\mathcal{V}, \oplus)$ es un grupo abeliano a cuyos elementos se les llama vectores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \cdots)$, $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo a cuyos elementos se les llama escalares $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$ y $\odot$ es una ley de composición externa de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{V}$, de modo que $\forall \alpha \in \mathcal{K} \wedge \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \rightsquigarrow \alpha \odot \vec{u} \in \mathcal{V}$, donde se han de cumplir cuatro propiedades:*

EV.1. $\lambda \odot (\vec{u} \oplus \vec{v}) = (\lambda \odot \vec{u}) \ \oplus \ (\lambda \odot \vec{v})$

EV.2. $(\lambda + \mu) \odot \vec{u} = (\lambda \odot \vec{u}) \ \oplus \ (\mu \odot \vec{u})$

EV.3. $(\lambda \cdot \mu) \odot \vec{u} = \lambda \odot (\mu \odot \vec{u})$

EV.4. $1 \odot \vec{v} = \vec{v} \qquad\qquad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K};\ \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$

En adelante usaremos los mismos símbolos para la suma de vectores que de escalares, así como para el producto de escalares y el de un escalar por un vector: $\lambda + \mu$; $\vec{u} + \vec{v}$; $\lambda \cdot \mu$; $\lambda \cdot \vec{u}$ o, simplemente $\lambda\mu$; $\lambda \cdot \vec{u}$ o, simplemente $\lambda\vec{u}$ y también en adelante $\mathcal{K} \equiv \mathbb{R}$ y hablaremos de 'espacios vectoriales reales' , que representaremos más sencillamente por $(\mathcal{V}, +, \cdot)$, donde $+$ es la ley de composición interna en $\mathcal{V}$, la suma de vectores y $\cdot$ es la ley de composición externa de $\mathbb{R}$ sobre $\mathcal{V}$, el producto de un número real (escalar) por un vector.

Ejemplo 6.1. .

- $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^3$ *y, en general* $\mathbb{R}^n$ *son espacios vectoriales reales con las operaciones usuales de ley suma de vectores y producto por un escalar:*

  $(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n) \ + \ (v_1, v_2, v_3, \cdots v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \cdots, u_n + v_n)$

$$\alpha \cdot (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \cdots, \alpha u_n)$$

- $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *es el espacio vectorial de las matrices reales de orden* $m \times n$ *con las operaciones aprendidas en el tema de matrices.*
- $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *es el espacio vectorial de los polinomios de una variable real de grado menor o igual a* n *con las operaciones habituales de suma de polinomios y producto de un polinomio por un número real.*
- $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *es el espacio vectorial de las funciones reales de variable real 'continuas' con las operaciones habituales de suma y producto por un número.*

Proposición 6.1. *Sea* $\mathcal{V}$ *un e.v. real, entonces:*

P1. $\alpha\,\vec{0} = \vec{0}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

P2. $0\,\vec{u} = \vec{0}, \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

P3. $\alpha\,\vec{u} = \vec{0} \leftrightarrow \alpha = 0 \ \vee\ \vec{u} = \vec{0}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

P4. $(-\alpha)\,\vec{u} = -(\alpha\,\vec{u}) = \alpha\,(-\vec{u}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

P5. $\alpha\,\vec{u} = \alpha\,\vec{v} \ \wedge\ \alpha \neq 0 \rightarrow \vec{u} = \vec{v}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$

P6. $\alpha\,\vec{u} = \beta\,\vec{u} \ \wedge\ \vec{u} \neq \vec{0} \rightarrow \alpha = \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

P7. $(-\alpha)\,(-\vec{u}) = \alpha\,\vec{u}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

6.1.1. Subsespacio vectorial

Definición 6.2. *Sea* $\mathcal{V}$ *un espacio vectorial y sea* $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ *un subconjunto de* $\mathcal{V}$*. Decimos que* $\mathcal{W}$ *es un 'subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$*' si:*

$$\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{W} \ \wedge\ \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} \quad \therefore \quad \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} \in \mathcal{W}}$$

Ejemplo 6.2. *Hay dos subespacios triviales en* $\mathcal{V}$*, el mismo* $\mathcal{V}$ *y* $\{\vec{0}\}$*, se llaman subespacios impropios.*

Ejemplos de subespacios vectoriales propios son:

- $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2 \to \mathcal{W}_1 = \{\vec{0}\} \times \mathbb{R}; \quad \mathcal{W}_2 = \mathbb{R} \times \{\vec{0}\}$ *son subespacios de* $\mathbb{R}^2$

  $\alpha(0,x) + \beta(0,y) = (0, \alpha x + \beta y) \in \mathcal{W}_1; \quad \alpha(x,0) + \beta(y,0) = (\alpha x + \beta y, 0) \in \mathcal{W}_2$

- $\mathcal{W} = \{(x,0,0)/x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ *es s.e.v. de* $\mathbb{R}^3$.

- $\mathcal{W} = \{(x,y,0,t)/x,y,t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ *es s.e.v. de* $\mathbb{R}^4$.

- $\mathcal{W} = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ / \ A^T = A\}$ *es un s.e.v. de* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

- $\mathcal{W} = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ det(A) = 0\}$ *NO es un s.e.v. de* $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

  ya que, p.e., las matrices: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$,

  pues $det(A_1) = det(A_2) = 0$ *, pero* $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{W}$.

Definición 6.3. .

Sean $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\} \in \mathcal{V}$*, se llama 'combinación lineal' de dichos vectores a una expresión de la forma:* $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n$ *, donde* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Definición 6.4. *Dado* $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ *se define el 'subespacio **generado**' por* $\mathcal{S}$ *como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de* $\mathcal{S}$*, lo representaremos por* $\mathcal{L}(\mathcal{S})$*:*

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \{\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n : \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \vec{u}_i \in \mathcal{V}\} \quad .$$

Proposición 6.2. *Para* $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$*, el subespacio generado* $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$.

Demostración. .

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, hemos de probar que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Por ser $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$: ,

$\exists a_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R}$ y $\exists \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m \in \mathcal{S}$, tales que:

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(\alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n) + \beta(\beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_m\vec{v}_m) =$

$= (\alpha\alpha_1)\vec{u}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n)\vec{u}_n + (\beta\beta_1)\vec{v}_1 + \cdots + (\beta\beta_m)\vec{v}_m,$

una combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{S}$, luego $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in\mathcal{L}(\mathcal{S})$

$\square$

Ejemplo 6.3. *Sea* $\mathcal{S}=\{(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}\subset\mathbb{R}^4$. *Calculemos* $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Un vector $(x,y,z,t)\in\mathcal{L}(\mathcal{S})\leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:$

$(x,y,z,t)=\alpha(1,1,1,1)+\beta(0,1,1,1)=(\alpha,\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha+\beta)\rightarrow$

$$\text{SEL: }\begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha+\beta\\ z=\alpha+\beta\\ t=\alpha+\beta\end{cases}\quad,\quad \textit{eliminando parámetros:}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1}&\boxed{0}&x\\ \boxed{1}&\boxed{1}&y\\ 1&1&z\\ 1&1&t\end{array}\right)\leftarrow A^*.\ \textit{Al exigir } rg(A)=2\rightarrow rg(A^*)=2\ \textit{(SC),}$$

$$\textit{se obtiene: }\begin{cases}z-y=0\\ t-y=0\end{cases}\quad,\ \textit{es decir:}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{S})=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ y=z=t\}$

6.2. Base y dimensión de un e.v.

Definición 6.5. *Dados* $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n\in\mathcal{V}$, *se dice que son* ***'linealmente independientes'*** *(LI) si dada la combinación lineal:*

$\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n=\vec{0}$, *se verifica que* $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$.

En caso contrario, se dice de los vectores $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n\in\mathcal{V}$ *son 'linealmente dependientes', LD.*

También se dice que un conjunto de vectores LI es un conjunto de vectores 'libres'. Si los vectores sn LD, también se les llama vectores 'ligados'.

Ejemplo 6.4. *El vector* $\vec{0}$ *siempre es LD, ya que* $\forall\alpha\in\mathbb{R}:\ \alpha\vec{0}=\vec{0}$

Ejemplo 6.5. $\{(1,0),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ *son LI:*

$$\alpha(1,0)+\beta(1,1)=(0,0) \to (\alpha+\beta,\beta)=(0,0) \to \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0\ .$$

Ejemplo 6.6. *En $\mathcal{P}_2(x)$, el e.v. de los polinomios de grado menor o igual a dos de una variable real, el conjunto formado por los 'vectores' $\{1,x,x^2\}$ es LI:*

Construimos una combinación lineal arbitraria de estos vectores e igualamos a cero (al polinomio-vector cero):

$\alpha+\beta x+\gamma x^2=0 \to$ *dos polinomios son igules si toman los mismos valores numéricos; para $x=0, x=1, x=-1$:*

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

Proposición 6.3. *Si $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n \in \mathcal{V}$ son LD, entonces o uno de ellos es $\vec{0}$ o es combinación lineal de los restantes.*

Demostración. .

Si uno de ellos es $\vec{0}$, ya hemos acabado. Supongamos, pues, que todos los vectores son no nulos y que en la combinación lineal $\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n=\vec{0}$ no todos los escalares son nulos. Supongamos, p.e., que $\alpha_1 \neq 0$:

Despejando: $\vec{u}_1=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{u}_2-\cdots-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{u}_n$, por los que $\vec{u}_1$ es combinación lineal de los demás.

□

Definición 6.6. *Se dice que los vectores $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n \in \mathcal{V}$ 'generan' $\mathcal{V}$ si $\mathcal{L}(\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n\})=\mathcal{V}$. En este caso $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial 'finito' y $\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n\}$ es un 'sistema generador' de $\mathcal{V}$.*

Ejemplo 6.7. *El conjunto de vectores $\{(1,0),(1,1)\}$ generan el espacio vectorial finito $\mathbb{R}^2$. Para ello consideremos un vector arbitrario $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*

y veamos que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tales que* $(x, y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) \longrightarrow$
$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = x \ \wedge \ \beta = y - x$*, de modo que*

$$(x, y) = x \cdot (1,0) + (y - x) \cdot (1,1) \ , \ y \ \ \mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(\{(1,0),(1,1)\})$$

No todos los espacios vectoriales son finitos. Por ejemplo el espacio vectorial de los polinomios de una variable en $\mathbb{R}$ no es finito; si lo consideramos generado por los vectores $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$, el polinomio x^{n+1}, p.e., no se puede escribir como combinación lineal de los anteriores.

Proposición 6.4. *Sea* $\mathcal{S} = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ *un sistema generador de* $\mathcal{V}$*. Entoces existe* $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ *que también genera* $\mathcal{V}$ *y cuyos vectores son LI.*

Proposición 6.5. *Supongamos que* $\mathcal{V}$ *está generado por* n *vectores. Entonces, ningún conjunto LI de vectores de* $\mathcal{V}$ *tiene más de* n *elementos.*

Definición 6.7. *Una **'base'** de* $\mathcal{V}$ *es un sistema de generadores de* $\mathcal{V}$ *cuyos vectores son LI*

Ejemplo 6.8. .

— $B = \{1, x, x^2\}$ *es una base de* $\mathcal{P}_2(x)$*, espacio vectorial de los polinomios reales de una variable de grado menor o igual a dos.*

— $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es una base de* $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden dos.*

— $B = \{(1,0),(1,1)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$*.*

Teorema 6.1. *En un espacio vectorial finito* $\mathcal{V}$*, todas las bases tienen el mismo número de vectores.*

Demostración. .

Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ dos bases de $\mathcal{V}$. Como una base es un sistema generador libre (LI), tanto B_1 como B_2 son sistemas de generadores. Si consideramos B_1 como sistema de generadores y B_2 como base, por la proposición anterior se tendría que $n \geq m$. Si consideramos B_2 sistema generador y B_1 base, entonces $m \geq n$, por lo que $m = n$.

□

Definición 6.8. *Dado $\mathcal{V}$ un espacio vectorial finito, se llama* ***'dimensión'*** *de $\mathcal{V}$, $dim(\mathcal{V})$, al número de vectores de una cualquiera de sus bases.*

Proposición 6.6. *Sea $B = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Entonces, todo vector $\vec{u} \in \mathcal{V}$ se escribe de 'forma única' como combinación lineal de los vectores de esa base B*

Demostración. Supongamos que $\vec{u}$ admite dos formas distintas de expresarse como combinación lineal de vectores de B:

$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n = \beta_1\vec{u}_1 + \cdots + \beta_n\vec{u}_n$, entonces

$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{u}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{u}_n = \vec{0}$, como los vectores de B son LI:

$\alpha_i - \beta_i = 0,\ \forall i \in \{1, \cdots, n\}$, es decir, $\alpha_i = \beta_i,\ \forall i$, por lo que ambas formas son la misma y $\vec{u}$ solo se puede escribir de una forma única en la base B.

□

Esta es una de las ventajas de la estructura de espacio vectorial, que todo vector del espacio, fijada una base, se puede escribir en ella de forma única.

Dada una base $B = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ de un e.v. real $\mathcal{V}$, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V},\ \exists!\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{u}$ se escribe en B de forma única: $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$, decimos que $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ son las **'componentes'** de $\vec{u}$ en la base B.

Hay que notar que si en $\mathcal{V}$ cambiamos de base, cambian las componentes de cualquier vector $\vec{u}$. Veamos un ejemplo:

$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Consideremos el vector $\vec{u} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$. Decimos que $\vec{u}$, expresado en B tiene por componentes $(1, 1)$, que denotaremos así: $\vec{u} = (1, 1)_B$

Veamos como escribir este mismo vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ en una nueva base $B' = \{\vec{u}_1 = (1,1),\ \vec{u}_2 = (1,-1)\}$:

$\vec{u} = (1,1) = \alpha u_1 + \beta \vec{u}_2 = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha-\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \alpha = 1 \ \wedge \ \beta = 0 \Rightarrow \vec{u} = (1,0)_{B'}$$

En una tercera base $B'' = \{(1,0),(1,-1)\} \rightarrow$

$$(1,1) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,-1) \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -\lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \lambda_1 = 2 \ \wedge \ \lambda_2 = -1$$

y entonces: $\vec{u} = (2,1)_{B''}$

La base B la llamaremos 'base canónica' pues las coordenadas de un vector son las *naturales* en $\mathbb{R}^2$. Así, todo vector de $\mathbb{R}^n$: $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$ tiene por coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)_C$ respecto de la base canónica $C = \{(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0)\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$. En el e.v. $\mathcal{P}_n(x)$, la base canónica es: $C = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$, así, cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ tiene por componentes $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)_C$.

Teorema 6.2. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real de dimensión finta (e.v. finito) de dimensión n. Entonces:*

a) Todas las bases de $\mathcal{V}$ tienen n elementos.

b) Todo conjunto LI de n elementos es una base en $\mathcal{V}$.

c) Todo sistema generador de $\mathcal{V}$ de n elementos es una base.

6.2.1. Rango de un conjunto de vectores

Definición 6.9. *Sea $S = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ un conjunto de vectores de un e.v. $\mathcal{V}$ y sea $W = \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\})$ un subespacio vectorial generado por S.*

*Se llama **'rango'** del conjunto de vectores S, $rg(S)$ a la dimensión del subespacio W generado por S: $rg(S) = dim(W) = dim(\mathcal{L}(S))$*

Según lo visto hasta ahora, $rg(S) =$ máximo número de vectores LI de S.

Teorema 6.3. *Sea $S = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ un conjunto de vectores y $W = \mathcal{L}(S)$ el subespacio vectorial engendrado por estos.*

Sea S' el conjunto de vectores obtenido al aplicar a S las transformaciones de Gauss necesarias para transformar a S en un sistema escalonado (ver 5.1.1 en tema de 5 del teorema de Rouché).

Entonces:

a) S' engendra el mismo subespacio W que S. *b) $rg(S') = rg(S)$*

Veamos un ejemplo:

$S = \{\vec{u}_1 = (1,1,2,0);\ \vec{u}_2 = (2,-1,0,1);\ \vec{u}_3 = (5,-1,2,2);\ \vec{u}_4 = (3,0,2,1)\}$ y sea $W = \mathcal{L}(S)$ el subespacio vectorial generado por S.

Escribamos las coordenadas de los vectores de S como filas de una matriz y escalonémosla:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 = (1,1,2,0) \\ \vec{u}_2 = (2,-1,0,1) \\ \vec{u}_3 = (5,-1,2,2) \\ \vec{u}_4 = (3,0,2,1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{v}1 & = (1,1,2,0) \\ \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1 & = (0,-3,-4,1) \\ \vec{v}_3 = \vec{u}_3 - 5\vec{u}_1 & = (0,-6,-8,2) \\ \vec{v}_4 = \vec{u}_4 - 3\vec{u}_1 & = (0,-3,-4,1) \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} \vec{w}_1 = \vec{v}1 & = (1,1,2,0) \\ \vec{w}_2 = \vec{v}_2 & = (0,-3-4,1) \\ \vec{w}_3 = \vec{v}_3 - 2\vec{v}_2 & = (0,0,0,0) \\ \vec{w}_4 = \vec{u}_4 - \vec{u}_2 & = (0,0,0,0) \end{pmatrix}$$ Los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ son LI, por lo que $rg(S) = 2$.

Además, como generan el mismo W, $B_W = \{(1,1,2,0),(0,-3-4,1)\}$

Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W \to \vec{x} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 =$

$= \alpha(1,1,2,0) + \beta(0,-3-4,1) = (\alpha, \alpha - 3\beta, 2\alpha - 4\beta, \beta) \to$

$$\to (*) \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha - 3\beta \\ x_3 = 2\alpha - 4\beta \\ x_4 = \beta \end{cases}$$ se llaman **ecuaciones paramétricas de W**, al tomar α y β todos los valore posibles se obtienen todos los vectores de W.

Por ejemplo, tomando $\alpha = 2$ y $\beta = -3$ se obtiene el vector $\vec{y} = (2, 11, 16, 3) \in W$ que lo podemos escribir como $\vec{y} = (2, -3)_{B_W}$

Al eliminar en $(*)$ los parámetros: $A = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \boxed{0} & x_1 \\ 1 & -3 & x_2 \\ 2 & -4 & x_3 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & x_4 \end{array}\right) \leftarrow A^*$, exigiendo que $rg(A) = 2 = rg(A^*)$, obtenemos: $\begin{cases} x_2 = x_1 - 3x_4 \\ x_3 = 2x_1 - 4x_4 \end{cases}$ que son las **ecuaciones implícitas** de W, las condiciones (restricciones) que tienen que cumplir los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ para ser vectores de W.

Se cumple que:

— *dim. subespacio = dim. espacio - núm. restricciones* (2=4-2).

— El rango de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ es siempre menor o igual a n.

— Si el rango de un conjunto de vectores S de $\mathbb{R}^n$ es n, esos vectores LI de S son una base de $\mathbb{R}^n$.

6.2.2. Cambio de base

Teorema 6.4. *Cambio de base en $\mathbb{R}^n$.*

Si B es una base de $\mathbb{R}^n$, y $\vec{x}$ un vector cuyas componentes en B son $(x'_1, \cdots, x'_n)_B$, escribiremos el vector $\vec{x}$ como vector fila:

$\vec{x} = (x'_1, x'_2, \cdots x'_n)_B$

Este mismo vector, en la base canónica $C = \{ \vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0) \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1) \}$ de $\mathbb{R}^n$ lo escribiremos por sus componentes naturales $(x_1, \cdots, x_n)$ como vector fila:

$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_C$.

Si $B = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$, cuyos vectores escritos en C tienen por componentes $\vec{u}_i = \alpha_{1i}(1, 0, \cdots, 0) + \alpha_{2i}(0, 1, \cdots, 0) + \cdots + \alpha_{1n}(0, 0, \cdots, 0)$, entonces, se puede demostrar (es sencillo) *que:*

$$\vec{x_C} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \vec{x_B} \cdot \boldsymbol{A}$$

Donde A es la matriz de cambio de la base B a la base C. Para pasar de C a B usaríamos la matriz inversa A^{-1} : $\boldsymbol{\vec{x_B} = \vec{x_C} \cdot A^{-1}}$ *(Es costumbre escribir los vectores como matrices columna en vez de matriz fila, entonces la matriz de cambio de base es A^T).*

Ejemplo 6.9. *Sea $B = \{(1,1,1),(1,2,0),(0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, entonces, el vector $\vec{x}) = (1,1,1)_B = 1 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (1,2,0) + 1 \cdots (0,0,1) = (2,3,2)_C$, se puede obtener, matricialmente como:*

$(2,3,2)_C = (1,1,1)_B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *siendo* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matriz de cambio de base.*

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ *, escrito como vectores columna.*

Teorema 6.5. *Si A_{BC} es la matriz de cambio de base de B a C y B' es otra base, entonces:*

a) $\exists (A_{BC})^{-1} = A_{CB}$

b) $A_{B'B} = A_{CB} A_{BC} = A_{BC}^{-1} A_{B'C}$

6.3. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 6.1. *Comprueba que* $(2,1,-3)$ *es combinación lineal de los vectores* $(1,-1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$

Si lo dicho en el enunciado es cierto, deben existir α, β, γ $\in \mathbb{R}$, tales que:

$(2,1,-3) = \alpha(1,-1,1) + \beta(1,0,0) + \gamma(1,1,0) = (\alpha+\beta+\gamma,\ -\alpha+\gamma,\ \alpha) \rightarrow$

$\alpha = -3;\ \gamma = -2;\ \beta = 7 \Rightarrow$

Efectivamente, el vector $(2, 1, -3)$ es combinación lineal de los otros tres pues lo hemos podido escribir como:

$\Rightarrow (2, 1, -3) = \boxed{-3}\,(1, -1, 1) + \boxed{7}\,(1, 0, 0) + \boxed{-2}\,(1, 1, 0)$ $\diamond$

Ejercicio resuelto 6.2. *Comprueba que* $S = \{(1, -1, 1),\ (1, 0, 0),\ (1, 1, 0)\}$ *es un sistema libre, LI (linealmente independiente) de vectores de* $\mathbb{R}^3$.

Si ello es cierto, cualquier combinación lineal de los tres vectores igualada a $\vec{0}$ debe implicar que todos los escalares de la combinación sean nulos:

$$\alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(1, 1, 0) = (0, 0, 0) \ \rightarrow \ \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\cdots \rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, efectivamente los tres vectores de S son LI.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 6.3. *Demostar que* $S = \{(1, -1, 1),\ (1, 0, 0),\ (1, 1, 0)\}$ *forma una base de* $\mathbb{R}^3$ *y encontrar las componentes del vector* $\vec{v} = (2, -1, 3)$ *en la base* S.

Una base es un SG (sistema de generadores) que sea LI (linealmente independiente). Esto último lo acabamos de demostrar en el problema anterior(*). Veamos ahora que S es un SG de $\mathbb{R}^3$: debe ocurrir que cualquier vector $(a,\ b,\ c)$ de $\mathbb{R}^3$ se pueda escribir de 'manera única' como combinación lineal de los vectores de S, entonces,

$(a,\ b,\ c) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(1, 1, 0) = (\alpha + \beta + \gamma,\ -\alpha + \gamma,\ \alpha) \rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = a \\ -\alpha + \gamma & = b \\ \alpha & = c \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \leftrightarrow AX = B$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) =$ núm. incóg $\rightarrow$ SCD (sistema compatible determinado), es decir, existe una solución única, una solo forma de escribir $(a, b, c)_C = (\alpha, \beta, \gamma)_S$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Luego S es un SG de $\mathbb{R}^3$. $\square$

En el caso de $\vec{v} = (2, -1, 3) = (2, -1, 3)_C$, reemplazando $a = 2,\ b = -1,\ c = 3$ en el SEL (sistema de ecuaciones lineales) anterior, obtenemos (como ya lo hacíamos en el ejercicio 1): $\alpha = -3;\ \gamma = -2;\ \beta = 7 \Rightarrow \vec{v} = (2, -1, 3)_C = (-3, 7, -2)_S$

(*) Otra forma de comprobar que S es un sistema LI es estudiando el rango de la matriz formada por los tres vectores de S escritos como filas.

Efectivamente: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow rg(S) = 3$ y los tres vectores de S son LI

◇

Ejercicio resuelto 6.4. *Comprobar si los siguientes conjuntos tienen estructura de subespacio vectorial:*

$$A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad x + y = 1\ \}$$

$$B = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\quad x + y + z = 0\ \}$$

$$C = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\quad x \cdot y = 0\ \}$$

.

— $A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad x + y = 1\ \}$

Veamos un contraejemplo (ejemplo que demuestra la falsedad de lo que se pretende demostrar): $(1, 0), (2, -1) \in A \rightarrow$ (la suma de sus componentes da uno) la combinación lineal $(1, 0) + (2, -1) = (3, -1) \notin A$, ya que $3 + (-1) = 2 \neq 1$. Luego A no es suebespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

— $B = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\quad x + y + z = 0\ \}$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $(x_i, y_i, z_i) \in B :\ x_i + y_i + z_i = 0,\ i = 1, 2$, entonces la combinación lineal general:

$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\ (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)\ )$ pertenecerá a B sí la suma de sus componentes es nula:

$\alpha x_1 + \beta x_2\ +\ \alpha y_1 + \beta y_2\ +\ \alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) + \beta(x_2 + y_2 + z_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. Luego B sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

— $C = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \quad x \cdot y = 0\ \}$

Veamos un contraejemplo: Sean $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (0,1,0)$. $\vec{u}, \vec{v} \in C$, ya que el producto de primera por segunda componentes son nulas, pero $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (1,1,1) \notin C$, ya que $w_x \cdot w_y = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$, por lo que C no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

◇

Ejercicio resuelto 6.5. *Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (1,1,1)$. Determínese una base de W, así como las ecuaciones paramétricas e implícitas de W.*

$W = \mathcal{L}\left(\{\ \vec{u} = (1,0,1);\ \vec{v} = (1,1,1)\ \}\right)$

$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow$ forman una base $B_W = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ y $dim W = 2$

$(x,y,z) \in W \rightarrow (x,y,z) = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,1) = (\lambda+\mu, \mu, \lambda+\mu) \rightarrow$
$\begin{cases} x &= \lambda + \mu \\ y &= \mu \\ z &= \lambda + \mu \end{cases}$ Ecuaciones paramétricas de W.

Eliminando parámetros, $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \rightarrow z - x = 0$ Ecuación implícita de W, es decir, $W = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \quad z - x = 0\ \}$

◇

Ejercicio resuelto 6.6. *Encuentra el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 17 & -7 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra una base del subespacio generado por los vectores fila de la matriz A, así como las ecuaciones paramétricas e implícitas de dicho subespacio.*

Escalonando por Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 17 & -7 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to -2\beta{+}2\gamma \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
por lo que, como $rg(A) = 3 \to dim\ \mathcal{L}(A) = 3$ y los tres primeros vectores fila de A, o mejor aún, de A_e (forma escalonada de A) forman una base: $B_A = \{(1, 2, -4, 3), (0, 1, 5, -2), (0, 0, 8, 2)\}$

Cualquier vector de A. (x, y, z, t) se podrá escribir en función de los vectores de B_A de forma única:

$(x, y, z, t) = \alpha(1, 2, -4, 3) + \beta(0, 1, 5, -2) + \gamma(0, 0, 8, 2) \to$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = -4\alpha + 5\beta + 8\gamma \\ t = 3\alpha - 2\beta + 2\gamma \end{cases}$, que son las ec. paramétricas de A

Al eliminar ls parámetros: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ -4 & 5 & 8 & z \\ 3 & -2 & 2 & t \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ -4 & 5 & 8 & z \\ 3 & -2 & 2 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$
$14x - 3y - z - 4t = 0$, que es la ecuación implícita de A. $\diamond$

Ejercicio resuelto 6.7. *Dadas las bases de* R^3 :

$B = \{\vec{u}_1 = (2, 1, 0), \vec{u}_2 = (-1, 0, 1), \vec{u}_3 = (0, 1, -2)\}$ *y*

$B' = \{\vec{v}_1 = (0, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, 0, 0), \vec{v}_3 = (2, 0, 1)\}$, *encontrar la matriz que permite cambiar de la base B a la B'. Si $\vec{w} = (1, 1, 1)$ en la base B, ¿cómo se escribe en la base B'?*

Trabajaremos con vectores fila.

$\vec{w}_B = (1, 1, 1)_B = 1 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_2 + 1 \cdot \vec{u}_3 = (2, 10) + (-1, 0, 1) + (0, 1, -2) = (1, 2, -1)_C$, siendo C la base canónica de $\mathbb{R}^3$ ($C = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$)

Si escribimos los vectores de la base B (expresados en la base canónica C) como vectores fila, obtenemos la matriz A_{BC} de cambio de base de vectores en B a vectores expresados en C:

$A_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, matriz de cambio de base de B a C, dado un vector en B, $\vec{w}_B$, para escribirlo en C, $\vec{w}_C$, bastará con aplicar la ecuación matricial: $\boldsymbol{\vec{w}_C = \vec{w}_B \cdot A_{BC}}$ (1*).

Comprobémoslo: $\vec{w}_C = \vec{w}_B \cdot A_{BC} = (1,1,1)_{\cancel{B}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{\cancel{B}C} = (1,2,-1)_C$.

Analogamente tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{B'C}$, es la matriz de cambio de la base B' a la base C, así: $\boldsymbol{\vec{w}_c = \vec{w}_{B'} \cdot A_{B'C}}$ (2*)

Las expresiones (1*) y (2*) y el hecho de saber que las matrices de cambio de base (rango 3, en este caso, luego determinante distinto de cero) son invertibles nos permetirán encontrar la ecuación de cambio de base de B a B':

$\vec{w}_c = \vec{w}_{B'} \cdot A_{B'C} \rightarrow \vec{w}_c \cdot (A_{B'C})^{-1} = \vec{w}_{B'} \cdot A_{B'C} \cdot (A_{B'C})^{-1} \vec{w}_{B'} \cdot I = \vec{w}_{B'}$

Es decir, $\vec{w}_{B'} = \vec{w}_c \cdot (A_{B'C})^{-1}$

Como $\vec{w}_C = \vec{w}_B \cdot A_{BC} \rightarrow \vec{w}_{B'} = (\vec{w}_B \cdot A_{BC}) \cdot (A_{B'C})^{-1} = \vec{w}_B \cdot A_{BC} \cdot A_{B'C}^{-1} = \vec{w}_B \cdot A_{BB'}$, con $A_{BB'} = A_{BC} \cdot A_{B'C}^{-1}$, la matriz de cambio de base de vectores expresados en B a vectores expresados en B'

Por adjuntos, podemos calcular $A_{B'C}^{-1} = (A_{B'C})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz de cambio de base de B a B', $A_{BB'}$, será:

$$A_{BB'} = A_{BC} \cdot A_{B'C}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Con esto, la expresión de $\vec{w}$ que en B es $(1,1,1)$, en B' tendrá por componentes:

$$\vec{w}_{B'} = \vec{w}_B \cdots A_{BB'} = (1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} = (2,7,-3)$$

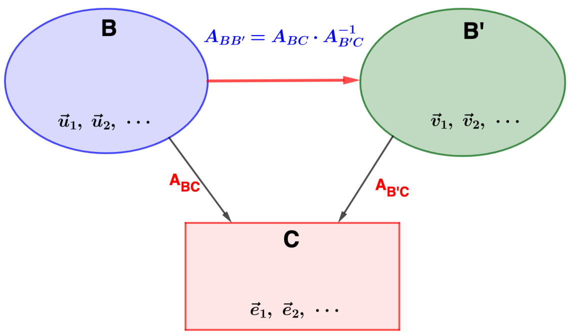
Finalmente: $\vec{w} = (1,1,1)_B = (1,2,-1)_C = (2,7,-3)_{B'}$

Comprobación: $(1,1,1)_B = (1,2,-1)_C = (\alpha,\beta,\gamma)_{B'} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \alpha(0,1,1) + \beta(1,0,0) + \gamma(2,0,1) = (\beta+2\gamma, \alpha, \alpha+\gamma)_C \rightarrow$

$$\begin{cases} \beta + 2\gamma = 1 & \rightarrow \quad \rightarrow \beta = 7 \\ \alpha = 2 & \\ \alpha + \gamma = -1 & \rightarrow \gamma = -3 \end{cases} \rightarrow \vec{w}_{B'} = (2,7,-3)_{B'} \qquad \square$$

Si admitimos la notación $A^{-1}_{B'C} = A_{CB'}$, y siendo $A_{BC} y A_{B'C}$ las matrices de cambio de base de B y B' a la base canónica C, respectivamente, podemos escribir: $A_{BB'} = A_{B\cancel{C}} \cdot A_{\cancel{C}B'} = A_{BC} \cdot A^{-1}_{B'C}$

$\diamond$



Matriz de cambio de base.

Historia de los espacios vectoriales

La noción de espacio vectorial se utiliza para nombrar a la estructura matemática que se crea a partir de un conjunto no vacío y que cumple con diversos requisitos y propiedades iniciales. Esta estructura surge mediante una operación de suma (interna al conjunto) y una operación de producto entre dicho conjunto y un cuerpo.

Es importante tener en cuenta que todo espacio vectorial dispone de una base y que todas las bases de un espacio vectorial, a su vez, presentan la misma cardinalidad.

Datos históricos y aplicaciones:

Fue a partir del siglo XVII que los estudiosos comenzaron a caminar hacia la concepción de los espacios vectoriales, con temas tales como las matrices, los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría analítica (al introducir coordenadas en el espacio tridimensional -3D- o el plano -2D-).

Cerca del año 1636, Descartes y Fermat (célebres científicos originarios de Francia) establecieron los fundamentos de la geometría analítica, tomando una ecuación con dos variables y vinculando sus soluciones con la determinación de una curva plana. Para conseguir una solución dentro de los límites de la geometría sin necesidad de recurrir a las coordenadas, el matemático checo Bernard Bolzano presentó un siglo y medio más tarde algunas operaciones sobre planos, líneas y puntos que pueden considerarse antecesores de los vectores.

Sin embargo, recién a finales del siglo XIX, Giuseppe Peano, conocido matemático italiano, realizó la primera formulación moderna y axiomática de los espacios vectoriales.

Cabe mencionar que los vectores como concepto propiamente dicho nacen con el ‘bipoint’ de Giusto Bellavitis, un segmento orientado que posee un extremo llamado origen y otro, extremo. Más tarde, fue tomado en cuenta cuando Argand y Hamilton presentaron los números complejos y este último creó los cuaterniones, además de ser quien concibió la denominación de vector. Laguerre, por su parte, fue responsable de la definición de los sistemas de ecuaciones lineales y de la combinación lineal de vectores.

Entre las aplicaciones de los espacios vectoriales se encuentran ciertas funciones de compresión de sonido e imágenes, que se basan en las series de Fourier y otros métodos, y la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (relacionar una función matemática con diversas variables independientes y las derivadas parciales de la misma respecto de dichas variables). Por otro lado, sirven para el tratamiento de objetos físicos y geométricos, como son los tensores.

Cuando en varios conjuntos distintos aparecen estructuras similares, es conveniente axiomatizar éstas y dar un nombre al ente resultante. Aunque esto tiene el inconveniente de trabajar en el mundo abstracto de los espacios vectoriales arbitrarios, también presenta una gran ventaja.

La abstracción resulta ser matemáticamente eficiente en el sentido de que ahora pueden demostrarse resultados generales cuya validez afecta a todos los espacios vectoriales. Es decir, una vez que se establecen los hechos sobre los espacios vectoriales en general, se pueden aplicar estos hechos a todos los espacios vectoriales. De otro modo, habría que probar cada hecho una y otra vez, para cada nuevo espacio vectorial que nos encontráramos (y existen un sin fin de ellos).

Capítulo 7

Aplicaciones lineales ⁎

7.1. Homomorfismos

El objetivo de este capítulo es el estudio de las aplicaciones lineales u homomorfismos entre espacios vectoriales. Este tipo de aplicaciones respeta la estructura de espacio vectorial transformando subespacios vectoriales en subespacios vectoriales.

Definición 7.1. *Sean V y V' dos subespacios vectoriales, una aplicación $f : V \to V'$ se dice que es una 'aplicación lineal' u* homomorfismo *si:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ : \qquad \boxed{f\ (\ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\ ) = \alpha\ f(\vec{u}) + \beta\ f(\vec{v})}$$

Ejemplo 7.1. .

— $I : V \to V\ /\ I(\vec{v}) = \vec{v},\ \forall \vec{v} \in V$ *es, trivialmente, una aplicación lineal.*

— $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\ /\ f(x, y) = (x, x + y, x - 2y)$ *es una aplicación lineal:*

$f(\ \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)\ ) = f(\ \alpha x_1 + \beta x_2\ ,\ \alpha y_1 + \beta y_2\ ) =$

$= (\ \alpha x_1 + \beta x_2\ ,\ \alpha x_1 + \alpha y_1 + \beta x_2 + \beta y_2\ ,\ \alpha x_1 + \beta x_2 - 2\alpha y_1 - 2\beta y_2\ ) =$

$= \alpha \cdot (\ x_1, x_1 + y_1, x_1 - 2y_1\ ) + \beta \cdot (\ x_2, x_2 + y_2, x_2 - 2y_2\ ) =$

$= \alpha\ f(x_1, y_1) + \beta\ f(x_2, y_2)$

— $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \;\; : \;\; g(x,y) = (x^2, x+y, x-2y)$, *no es una aplicación lineal pues (contraejemplo):*

$g(\ (-1)\cdot(1,1)\ ) = (1,-2,1); \quad (-1)\cdot g(1,1) = (-1)(1,2,-1) = (-1,-2,1) \Rightarrow g(\ (-1)\cdot(1,1)\ ) \neq (-1)\cdot g(1,1)$

— $h : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\; : \;\; h(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix}$, *no es una aplicación lineal.*

$h(\ (x_1,y_1)+(x_2,y_2)\ ) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 0 \\ 1 & y_1+y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 1 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 1 & y_2 \end{pmatrix} = h(x_1,y_1) + h(x_2,y_2)$

Por su importante significado geométrico, destacamos algunas aplicaciones lineales importantes:

- **Aplicación identidad**: asigna a cada vector el mismo vector.

  $I : V \to V \;:\; I(\vec{v}) = \vec{v}$

- **Aplicación nula**: siempre asocia el vector nulo del subespacio imagen.

  $N : V \to V' \;:\; N(\vec{v}) = \vec{0}_{V'}$

- **Giros ángulo θ**: Provoca un giro de θ grados sobre el vector.

  $G_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; G_\theta(x,y) = (\cos\theta\ x - \sin\theta\ y\ ,\ \sin\theta\ x + \cos\theta\ y)$

- **Reflexiones o simetrías**: un ejemplo de simetría en el espacio respecto del plano XZ sería,

  $S_{XZ} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;:\; S_{XZ}(x,y,z) = (x,-y,z)$

- **Homotecias**: Producto de un escalar por un vector (si el escalar es, en módulo mayor que 1 tenemos una dilatación; si es menor, una contracción). Como ejemplo pondremos la dilatación (superficial) de una lámina del 1 % debido al calor,

  $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;:\; D(x,y) = (1.01x, 1.01y)$

- **Proyecciones**: Son aplicaciones que llevan todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ a un plano sobre el que se proyecta. P.e., una proyección sobre el plano YZ sería,

  $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ : \ P(x, y, z) = (x, 0, z)$

Definición 7.2. *Una aplicación lineal $f : V \to V'$ se dice que es:*

- ***inyectiva*** *si* $f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \longrightarrow \vec{u} = \vec{v}$, *de otro modo, a originales distintos le corresponden imágenes distintas.*
- ***epiyectiva, sobreyectica o suprayectica*** *si* $\forall \vec{v}' \in V' \ \exists \vec{v} \in V \ / \ \vec{v}' = f(\vec{v})$, *es decir, si* $f(V) = V'$
- *Si f es inyectiva y epiyectiva se dice que es* ***biyectiva***

Ejemplo 7.2. .

— La aplicación del conjunto de la población española mayor de edad en $\mathbb{N}$ que asocia a cada ciudadano su DNI es INYECTIVA, pues no hay dos personas con el mismo DNI. Pero NO es EPIYECTIVA porque no se usan todos los números naturales.

— La aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ que asocia a cada número real su cuadrado NO es INYECTIVA pues a los números opuestos les asocia en mismo cuadrado ($(2^2 = (-2)^2 = 4$), pero sí es EPIYECTIVA ya que todos los números reales positivos son el cuadrado de algún número real.

Dependiendo de sus características las aplicaciones lineales (**homomorfismos**) $f : V \to V'$ se clasifican en:

- MONOMORFISMO: si f es inyectiva.
- EPIMORFISMO: si f es epiyectiva.
- ISOMORFISMO: si f es biyectiva.
- ENDOMORFISMO: si $V = V'$
- AUTOMORFISMO: si $V = V'$ y f es biyectiva.

7.2. Subespacios de una aplicación lineal.

Las aplicaciones lineales transforman subespacios vectoriales en subsespacios vectoriales (conservan la estructura de subespacio vectorial):

7.2.1. Subespacio *Imagen* de una aplicación lineal

Proposición 7.1. *$f : V \to V'$, sea $W \subseteq V$ un subespacio vectorial, entonces $f(W) = \{f(\vec{u}) : \ \vec{u} \in W\}$ es un subespacio vectorial de V'.*

Demostración. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\vec{u}, \vec{v} \in f(W) \to \exists \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in W \ / \ f(\vec{u}_1) = \vec{u} \ \wedge f(\vec{v}_1) = \vec{v} \Rightarrow \alpha\, \vec{u} + \beta\, \vec{v} = \alpha\, f(\vec{u}_1) + \beta\, f(\vec{v}_1) = f(\alpha\, \vec{u}_1 + \beta\, \vec{v}_1)$, por lo que $\alpha\, \vec{u} + \beta\, \vec{v} \in f(W)$ □

Definición 7.3. *Dada $f : V \to V'$ aplicación lineal, se llama **imagen** de f, $Im(f)$, al conjunto $f(V)$ que, como se ha visto en la proposición anterior, es un subespacio vectorial de V'. Además, se cumple que:*

f *es* epimorfismo $\leftrightarrow Im(f) = V'$

—— *La $Im(f)$ permite clasificar a los epimosfismos (aplicaciones epiyectivas o suprayectivas).*

Ejemplo 7.3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $\quad f(x, y, z) = (x + y, x - z, 2x + y - z)$

$(x, y, z) \in Im(f)$ *si* $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$: $\quad (x, y, z) = f(\alpha, \beta, \gamma) =$

$$= (\alpha + \beta, \alpha - \gamma, 2\alpha + \beta - \gamma) \to \begin{cases} \alpha + \beta & = x \\ \alpha - \gamma & = y \\ 2\alpha + \beta - \gamma & = z \end{cases} \text{, ha de ser SC.}$$

(ecuaciones paramétricas de $Im(f)$), *calculando rangos por Gauss (p.e.):*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ 2 & 1 & -1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & y - x \\ 0 & -1 & -1 & z - 2x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & x \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & -1 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & z - 2 - y \end{array}\right)$$

al exigir que los rangos de matrices de coeficientes y ampliada sean iguales a 2 : $\qquad z - x - y = 0$, *por lo que:*

$Im(f) = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \quad z - x - y = 0 \ \}$ (ecuación implícita de $Im(f)$).

Veamos un método alternativo de calcular $Im(f)$:

Proposición 7.2. *Sean $f : V \to V'$, aplicación lineal y $B = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ una base de V, entonces $f(B)$ es un sistema generador de $Im(f)$.*

Demostración. Sea $\vec{v} \in Im(f) \to \exists \vec{u} \in V \ \therefore \ \vec{v} = f(\vec{u})$. Como B es base de V, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ / \ \vec{v} = f(\vec{u}) = f(\alpha_1 \ \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n \ \vec{u}_n) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \cdots + \alpha_n f(\vec{u}_n)$, por lo que $f(B)$ genera el subespacio imagen $Im(f)$. □

Ejemplo 7.4. *Calculemos, de otro modo $Im(f)$ del ejemplo anterior:*

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ . \quad f(x, y, z) = (x + y, x - z, 2x + y - z)$

$C = \{ \ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \ \}$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^3$*, calculamos* $f(C) = \{ \ (1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, -1, .1) \ \}$,

entonces $Im(f) = \mathcal{L}(\ \{ \ (1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, -1, -1) \ \} \ )$*, es decir,*

$(x, y, z) \in Im(f) \leftrightarrow \exists \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ \therefore$

$(x, y, z) = \alpha(1, 1, 2) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, -1, -1) = (\alpha + \beta, \alpha - \gamma, 2\alpha + \beta - \gamma)$, *que son las ecuaciones paramétricas de $Im(f)$ obtenidas en el ejemplo anterior. Si eliminamos los parámetros, como allí, obtendríamos:*

$z - x - y = 0$ *como ecuación implícita de $Im(f)$.*

7.2.2. Subespacio *Núcleo* de una aplicación lineal

Definición 7.4. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, se llama **núcleo** de f, $ker(f)$ (de 'kernel', de la raíz germánica Kern, núcleo) , a los vectores de V cuya imagen por f es el $\vec{0} \in V'$:*

$Ker(f) = \{ \ \vec{u} \in V \ : \ f(\vec{u}) = \vec{0} \in V' \ \}$

Proposición 7.3. *El núcleo de una aplicación lineal $f : V \to V'$, $\ker(f)$, es un subespacio vectorial de V*

Demostración. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\vec{u}, \vec{v} \in ker(f): \ f(\vec{u}) = f(\vec{v}) = 0 \rightarrow$

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha\,\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \ \in ker(f)$ □

—— El núcleo permite caracterizar a los monomorfismos (aplicaciones inyectivas).

Proposición 7.4. *Sea* $f : V \rightarrow V'$ *aplic. lineal.*

Entonces, f *es inyectiva* $\leftrightarrow Kerf(f) = \vec{0}$

Demostración. f inyectiva $\rightarrow \vec{u} \in ker(f) : \ f(\vec{u}) = \vec{0} = f(\vec{0})$ y por inyectividad, $\vec{u} = \vec{0} \rightarrow Ker(f) = \{\vec{0}\}$. Recíprocamente, si $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ y $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$, por linealidad, $\vec{0} = f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = f(\vec{u} - \vec{v}) \rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in Kerf(f) = \{\vec{0}\} \rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ □

Teorema 7.1. *Sea* $f : V \rightarrow V'$ *una aplicación lineal de un espacio vectorial* V *de dimensión finita en un espacio vectorial* V'*, se verifica la igualdad:*

$$\boxed{dim(V) \ = \ dim\,Kem(f) \ + \ dim\,Im(f)}$$

Ejemplo 7.5. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \ : \quad f(x, y, z) = (x-y, x-z, -y-z)$. *Calcula su núcleo y si imagen.*

$(x, y, z) \in Ker(f) \leftrightarrow (0, 0, 0) = f(x, y, z) = (x - y, x - z, -y - z) \rightarrow$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \rightarrow SCD \ homog. \rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow$$

$Ker(f) = \{(0, 0, 0\}$ *y* $dim\ ker(f) = 0 \rightarrow dim\ Im(f) = 3 \Rightarrow Im(f) = \mathbb{R}^3$

7.3. Matriz asociada a una aplicación lineal

Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal y sen $B = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ dos bases de V y V' respectivamente. Dado un vector cualquiera $\vec{u} \in V$, existen m escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ de forma que:

$\vec{u} = \alpha_1\,\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_m\,\vec{u}_m$ (Estos α_i; $1 \leq i \leq m$ son las componentes de $\vec{u}$ en la base B) y por linealidad de f tenemos que:

$$f(\vec{u}) = \alpha_1 \cdot f(\vec{u}_1) + \cdots + \alpha_m \cdot f(\vec{u}_m)$$

De donde se deduce que conociendo las imágenes por una aplicación lineal de ls vectores de una base del espacio inicial, es posible calcular la imagen que se obtiene por la aplicación lineal de cualquier vector. Por otra parte, $f(\vec{u}_1), \cdots, f(\vec{u}_m)$ estan en V', por lo que pueden escribirse como combinación lineal de los vectores de una de sus bases, B'. Sean $\lambda_{1j}, \cdots, \lambda_{nj} \in \mathbb{R}$ las coordenadas de $f(\vec{u}_j)$ en B', es decir,

$f(\vec{u}_j) = \lambda_{1j} \cdot f(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_{nj} \cdot f(\vec{v}_n)$, $\quad 1 \leq j \leq m$, se tiene:

$$f(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f(\vec{u}_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}\ \alpha_j \right)\ \vec{v}_i$$

Si $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ son las componentes del vector $f(\vec{u})$ en la base B', como se trata de una base y un vector se escribe en ella de farma única:

$\beta_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}\ \alpha_j$, $\quad 1 \leq i \leq n$, matricialmente:

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \ ,$$

cuyas columnas son las componentes en B' de las imágenes por f de los vectores $f(\vec{u}_i)$, con lo que:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

La matriz $M_{BB'}f$ es la **matriz de la aplicación f en las bases B y B'** y permite obtener en la base B' la imagen por f de cualquier vector a partir de sus componentes es la base B, como se indica en la relación anterior.

Ejemplo 7.6. *Sean* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad : \quad f(x,y) = (x, x+y.x-2y)$, *una aplicación lineal;* C_2, C_3 *las bases canónicas de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$*.*

$$f(1,0) = (1,1,1); \quad f(0,1) = (0,1,-2) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = M_{C_3C_2}(f)$$

Consideremos $B = \{\ (1,1),(1,-1)\ \}$ *una nueva base en* $\mathbb{R}^2$*, entonces:*

$$\begin{cases} f(1,1) & = (1,2,-1) \\ f(1,-1) & = (1,0,3) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = M_{C_3B}(f)$$

Consideremos una nueva base en $\mathbb{R}^3$, $\quad B' = \{\ (1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\ \}$

Es fácil comprobar (ver más adelante, en gris) que:*

$$\begin{cases} f(1,1) = (1,2,-1)_{C_3} = (-1,3,-1)_{B'} \\ f(1,-1) = (1,0,3)_{C_3} = (1,-3,3)_{B'} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = M_{B'B}(f)$$

Como se vio en el apartado de matriz cambio de base en el tema de espacios vectoriales, ver sección 6.2.2, se tiene que (ahora con vectores columnas usamos las matrices traspuestas de las que allí se vieron):

$$\vec{w}_C = M_{BC} \cdot \vec{w}_B \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{de donde:} \begin{cases} 1 = \alpha + \beta + \gamma \\ 2 = \beta + \gamma \\ -1 = \gamma \end{cases} \quad \to \quad \alpha = -1;\ \beta = 3;\ \gamma = -1$$

Es decir: $(1,2,-1)_C^T = (-1,3,-1)_{B'}^T$ y, del mismo modo, $(1,0,3)_C = (1,-3,3)_{B'}^T$

Hubiésemos podido usar la matriz inversa: $\boldsymbol{M_{BC}^{-1}} \cdot \vec{w}_C = \boldsymbol{M_{BC}^{-1}} \cdot M_{BC} \cdot \vec{w}_B \to \vec{w}_B = M_{CB} \cdot \vec{w}_C$, donde $M_{CB} = M_{BC}^{-1}$

7.4. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 7.1. *Dada la aplicación lineal:* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad : f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3z)$*, se pide:*

a) Probar que f es una aplicación lineal.

b) Hallar su núcleo y su imagen.

c) Obtener la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$

— a) $\forall \vec{u} = (x,y,z);\ \vec{v} = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') = \cdots$ (aplíquese la definición de f y simplifíquese al máximo (*1).

$\alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y'.z') = \cdots$ (aplíquese la definición de f y simplifíquese al máximo (*2)

Compruébese, ahora, que (*1) y (*2) son el mismo resultado, por lo que f sí es aplicación lineal.

— b) $Ker(f) = \{(x,y,z)\ /\ f(x,y,z) = (0,0)\} \to \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$, se trata de un SEL homogéneo que sale SCI: $x = -3\lambda/2,\ y = 5\lambda/2,\ z = \lambda\ (\forall\lambda \in \mathbb{R}) \Rightarrow Ker(f) = \{\ (-3\lambda/2, 5\lambda/2, \lambda),\ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}\ \}$

Con $\lambda = 2 \to (-3,5,2)$ es un sistema generador de $Ker(f)$ que, como es un solo vector LI se trata de una base: $B_{Kerf(f)} = \{(-3,5,2)\}$

— c) Matriz asociada en las bases canónicas de los espacios vectoriales inicial y final sobre los que actúa f:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,2) \\ f(0,1,0) = (1,0) \\ f(0,0,1) = (-1,3) \end{cases} \longrightarrow M_{C_2C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

◇

Ejercicio resuelto 7.2. *Sea* $(\mathcal{P}_2(x), +, \cdot)$ *el espacio vectorial de los polinomios de segundo grado de una variable reales con la operación suma de polinomios y producto de un polinomio por un número usuales. Sea* $f : \mathcal{P}_2(x) \rightarrow \mathcal{P}_1(x)$ *la aplicación que a cada polinomio de segundo grado de* $\mathcal{P}_2(x)$ *le hace corresponder su derivada, un polinomio de* $\mathcal{P}_1(x)$*:* $\forall p(x) \in \mathcal{P}_2(x) : \; f(p(x)) = p'(x)$*. Probar que se trata de una aplicación lineal, obtener su matriz asociada respecto de las bases canónicas de* $\mathcal{P}_2(x)$ *y* $\mathcal{P}_1(x)$ *y clasificarla.*

$f : \mathcal{P}_2(x) \rightarrow \mathcal{P}_1(x) \;:\; p(x) \rightsquigarrow p'(x) \;\therefore\; ax^2 + bx + c \longrightarrow 2ax + b$, es decir, $f(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$

Linealidad: $f(\alpha p(x) + \beta q(x)) = f(\alpha(ax^2 + bx + c) + \beta(a'x^2 + b'x + c')) = f((\alpha a + \beta a')x^2 + (\alpha b + \beta b')x + (\alpha c + \beta c')) = 2(\alpha a + \beta a')x + (\alpha b + \beta b')$

por otro lado: $\alpha f(p(x)) + \beta f(q(x)) = \alpha f(ax^2 + bx + c) + \beta(a'x^2 + b'x + c) = 2\alpha a x + \alpha b + 2\beta a' x + \beta b' = 2(\alpha a + \beta a')x + (\alpha b + \beta b')$

Luego f sí es aplicación lineal.

Matriz asociada: Sean $C_2 = \{x^2, x, 1\}$ y $C_1 = \{x, 1\}$ las bases canónicas de $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{P}_1(x)$, respectivamente.

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x^2) = 2x & = 2 \cdot x + 0 \cdot 1 \\ f(x) = 1 & = 0 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ f(1) = 0 & = 0 \cdot x + 0 \cdot 0 \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad M_{C_2 C_1}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Modo de actuar: $f(ax^2 + bc + c) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} = 2ax + b$

Clasificación: Núcleo e Imagen.

— Núcleo: $f(ax^2 + bx + c) = 0x + 0 \rightarrow a = b = 0, \; \forall c$, luego $Ker(f) = \{(0, 0, c), \; c \in \mathbb{R}\} \rightarrow B_{Ker(f)} = \{(0, 0, 1)\} \rightarrow dim \; Ker(f) = 1$, como el núcleo no es $0x^2 + 0x + 0$, la aplicación no es inyectiva.

— Imagen: Las imágenes de una base del espacio inicial son un sistema generador del subespacio imagen $\rightarrow \{(2, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ es un sistema generador de $Im(f)$, los dos primeros vectores son LI (rango 2), por lo que forman una base: $B_{Im(f)} = \{(2,0),(0,1))\} \rightarrow dim\ Im(f) = 2$, igual al espacio de llegada. La aplicación es suprayectiva o epiyectiva.

Conclusión: f es un ' EPIMORFISMO', aplicación suprayectiva.

◇

Ejercicio resuelto 7.3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_2(R) \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}$

Compruébese que es lineal, Calcúlese Núcleo e Imagen, clasifíquese y encuéntrese la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{M}_2(R)$.

Linealidad: $f(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' & \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' \\ 0 & \alpha y + \beta y' \end{pmatrix}$

$\alpha f(x,y) + \beta f(x',y') = \alpha \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x' & x'+y' \\ 0 & y' \end{pmatrix}$

como ambos resultados obviamente coinciden, f sí es aplicación lineal.

Núcleo e Imagen:

— Núcleo: $Ker(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = y = 0 \Rightarrow Ker(f) = \{(0,0)\} = \vec{0}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow dim\ Ker(f) = 0$$

— Imagen: $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Im(f) =$ $\mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =$ sistema generador de $Im(f)$ donde es fácil probar que son dos vectores (matrices) LI, por lo que forman una base y $B_{Im(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow dim\ Im(f) = 2$

Clasificación: Como $dim\ Ker(f) = 0$ f es inyectiva y como dim $Im(f) = 2 \neq 4 = dim\ \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, por ello, f no es supreyectiva o epiyectiva.

Conclusión: f es un 'MONOMORFISMO', aplicación lineal inyectiva.

Matriz asociada a f:

$B_{\mathbb{R}^2} = \{\ (1,0)\ ,\ (0,1\ \}$

$$B_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que: $M_{\mathcal{M}_2\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Funcionamiento de la matriz: por ejemplo,

$$f(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{0} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$\mathbf{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 7.4. *Dada la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ :$ $f(x,y,z) = (x+y, y-z, x+y+z)$*, calcúlese su núcleo, imagen y clasifíquese.*

— Núcleo: $Ker(f) = \{(x,y,z)\ /\ f(x,y,z) = (x+y, y-z, x+y+z) = (0,0,0)\} \to$ formal un SEL que es SCD y homogéneo (compruébese), por lo que $Kerf = \{(0,0,0)\} = \{\vec{0}\} \to dim\ Ker(f) = 0$ y la aplicación lineal será 'inyectiva'.

— Imagen: $f(x,y,z) = (x+y, y-z, x+y+z) = x\cdot(1,0,1) + y\cdot(1,1,1) + z\cdot(0,-1,1) \rightarrow Im(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,1),(0,-1,1)\}$ que es fácil comprobar que forman un sistema libre o LI (compruébese), por lo que $dim\ im(f) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ y tendremos una aplicación 'epiyectiva'.

— Clasificación: por lo visto en los apartados anteriores, f es una aplicación biyectiva u 'ENDOMORFISMO'

Como $\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0,1) \\ f(0,1,0) = (1,1,1) \\ f(0,0,1) = (0,-1,1) \end{cases} \rightarrow M_{C_3C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz canónica del endomorfismo f. ◇

Aplicación lineal u HOMOMORFISMO

Una gran cantidad de modelos de la ingeniería siguen leyes 'lineales'. Podemos imaginarnos un aparato que cada vez que se le introduce un determinado estímulo devuelve ese estímulo modificado como una señal de salida. Dicho estímulo puede ser por ejemplo una diferencia de potencial de potencial en un circuito eléctrico que a su vez devolverá una cierta intensidad de corriente. Si denotamos por $V(t)$ el voltaje e $I(t)$ la intensidad, el circuito funciona de la manera siguiente: si $I_1(t)$ e $I_2(t)$ son las respuestas a los voltajes $V_1(t)$ y $V_2(t)$, entonces $I_1(t) + I_2(t)$ es la respuesta al voltaje $V_1(t) + V_2(t)$. Además, si el voltaje es amplificado multiplicando por un escalar α, entonces $\alpha\ I(t)$ es la respuesta a $\alpha\ V(t)$. Esta es la forma de funcionar de un circuito **LRC** y la de numerosos ingenios de la ingeniería, estos aparatos funcionan como una aplicación lineal u *homomorfismo*.

Capítulo 8

Diagonalización de matrices

⋇

8.1. Valores y vectores prropios

Los conceptos de valores y vectores propios cuestan un poco de entender, veamos su definición.

Definición 8.1. *Los* ***'vectores propios o autovectores'*** *son los vectores no nulos de una aplicación lineal que, cuando son transformados por ella, dan lugar a un múltiplo escalar de ellos (no cambian de dirección). Este escalar el el* ***'valor propio o autovalor'****:*

$$\boldsymbol{A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}}\ ,$$

donde A es la matriz de la aplicación lineal, $\vec{v}$ es el vector propio y λ el valor propio o característico. Hay quien usa la raíz alemana y habla de 'eigen-valores' y 'eigen-vectores'.

Para el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz (aplicación lineal) se sigue el siguiente *'algoritmo'*:

1. Calcular la 'ecuación característica': $det(A - \lambda I)$
2. Encontrar las raíces del 'polinomio característico' obtenido:

   $det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda_i$. Estos son los valores propios.
3. Calcular el vector propio correspondiente a cada uno de los valores propios obtenidos en el paso anterior:

   $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

Para el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz también es conveniente tener en cuenta los siguientes 'trucos' (proposiciones que no vamos a demostrar).

- La traza de una matriz A (suma de los elementos de su diagonal principal) coincide con la suma de los autovalores o valores propios:

  $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
- El producto de todos los valores propios coincide con el determinante de la matriz.

  $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
- Si hay una combinación lineal en filas o columnas de A, entonces un valor propio, al menos, de la matriz es cero.

Ejemplo 8.1. *Dada* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, *encuentra sus autovalores y autovectores.*

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \longrightarrow \lambda = 1 \;\wedge\; \lambda = 2$$

$$— \lambda = 1 \longrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \rightarrow (A - I)\vec{v} = \vec{0} \rightarrow (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \rightarrow y = -5x \Rightarrow (x = 1)\; \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

— $\lambda = 2 \longrightarrow (A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \to (A-2I)\vec{v} = \vec{0} \to (A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -x+0y=0 \\ 5x+0y=0 \end{cases} \to x=0 \Rightarrow (y=1)\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión, los valores propios y sus correspondientes valores propios de la matriz A son:

$$\lambda = 1 \leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda = 2 \leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.2. Diagonalización de matrices

Definición 8.2. *Una **matriz diagonalizable** es una matriz cuadrada que se puede transformar en una matriz diagonal.*

La diagonalización de las matrices es del siguiente modo:

$$\boxed{\boldsymbol{A = PDP^{-1} \quad \leftrightarrow \quad D = P^{-1}AP}}\ ,$$

donde A es la matriz a diagonalizar, P es la matriz formada por los vectores propios de A escritos como columnas, P^{-1} es la matriz inversa de P y D es la matriz diagonalizada, cuyos elementos de la diagonal principal son los autovalores de A. La matriz P actúa como una matriz de cambio de base, por lo que, en realidad, con esta fórmula estamos cambiando la matriz A a una nueva base en que se convierte en diagonal D. Evidentemente, P es una matriz regular o invertible.

No todas las matrices son diagonalizables, tan solo se pueden diagonalizar las matrices que cumplen con unas ciertas características. Se puede saber si una matriz es diagonalizable de distintas maneras:

- Una matriz cuadrada de orden n es diagonalizable si tiene n vectores propios (o autovectores) linealmente independientes, o dicho de otra forma, si estos vectores forman una base. Eso es debido a que la matriz P, que sirve para diagonalizar la matriz dada A, está formada por los vectores propios de dicha matriz A. Para saber si los autovectores son LI, basta con que el determinante de la matriz P sea diferente de 0, cosa que significa que la matriz es de rango máximo. *Si* $det(P) \neq 0 \rightarrow$ *matriz diagonalizable.*

- Una propiedad de los valores y vectores propios es que los autovectores de autovalores diferentes son linealmente independientes. Por lo tanto, si todos los autovalores de la matriz son únicos (todos tienen multiplicidad uno) la matriz es diagonalizable.

- Finalmente, existe un teorema, el *'teorema espectral'*, que garantiza la diagonalización de las matrices simétricas con números reales. Es decir, *toda matriz real y simétrica es diagonalizable.*

Para diagonalizar una matriz (aplicación lineal) A se sigue el siguiente *'algoritmo'*:

1. Obtener los valores (λ_i)y vectores propios $(\vec{v}_i)$ de A

2. Construir la matriz P formada los los vectores-columna propios de A

3. Verificar que A es digonalizable, está en alguno de los supuestos anteriores.

4. Construir la matriz D en que todos sus elementos son cero excepto los de la diagonal principal, que son los valores propios de A:
$$D = (d_{ij}) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

NOTA: Los vectores propios en P se pueden escribir en cualquier orden, pero entonces, hay que respetar ese mismo orden al escribir los valores propios en D:

$$P = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \cdots \mid \vec{v}_n) \longrightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Teorema 8.1. *Aplicaciones de las matrices diagonalizables Al estar las matrices diagonales llenas de ceros el cálculo se simplifica muchísimo. Un ejemplo claro de ellos son las 'potencias' de las matrices cuadradas:*

$$A^k = PD^kP^{-1} \ , \qquad D^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$$

$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD\ P^{-1}P\ DP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P$

$A^3 = A^2{\cdot}A = (PD^2P^{-1}){\cdot}(PDP^{-1}) = PD^2\ P^{-1})P\ DP^{-1} = PD^2IDP^{-1} = PD^3P$

. . . .

Conjeturamos: $A^k = PD^kP$, necesitaría de una demostración por inducción que de le deja al lector.

□

Ejemplo 8.2. *Diagonaliza la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = 1;\ \wedge\ \lambda_2 = 4$$

— $\lambda = 1 \to (A - I)\vec{v} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \to x = -2y \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— $\lambda = 4 \to (A - 4I)\vec{v} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \to x = y \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que: $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Compruébese que $D = P^{-1}AP \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Así como que $A^4 = PD^4P^{-1} = \begin{pmatrix} 86 & 170 \\ 85 & 171 \end{pmatrix}$, *con* $D^4 = \begin{pmatrix} 1^4 & 0 \\ 0 & 4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix}$.

8.3. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 8.1. .

Encuentra los autovalores y autovectores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 =$$

$$= -(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = -1;\ \lambda = 2;\ \lambda = 3$$

$$\text{—}\ \lambda = -1:\ (A + I)\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow x = -y\ y = -3z \rightarrow \vec{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{—}\ \lambda = 2:\ (A - 2I)\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = y = 0 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— $\lambda = 3: \ (A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow x0y = z \rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◇

Ejercicio resuelto 8.2. .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \textit{ Encuentra sus autovalores y autovectores}$$

$|A - \lambda I| = 0 \leftrightarrow \lambda = 0, \ \lambda = -1, \ \lambda = 3$, raíz doble

— $\lambda = 0 \rightarrow (A - 0I)\vec{v} = \vec{0} \rightarrow x = -y = z; \ t = 0 \rightarrow \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

— $\lambda = -1 \rightarrow (A + I)\vec{v} = \vec{0} \rightarrow x = z = 0; \ t = 0 \rightarrow \vec{v}_{-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

— $\lambda = 3 \rightarrow (A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \rightarrow y = 2x; \ z = -2x \rightarrow$

Autovalor doble, dos autovectores: $\vec{v}_{3_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \quad \vec{v}_{3_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ◇

Ejercicio resuelto 8.3. *Diagonaliza* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

.

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3 \longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 4 \longrightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 8.4. *Diagonaliza* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

.

$\lambda_1 = -2 \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -2$ doble $\longrightarrow \vec{v}_{2_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_{2_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; $|P| = 0 \longrightarrow \nexists D$. La matriz A no es diagonalizable.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 8.5. *Diagonaliza* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

.

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3$ doble $\longrightarrow \vec{v}_{2_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_{2_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 8.6. *Diagonaliza* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

.

$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \lambda_2 = -3 \longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = 2 \longrightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \lambda_4 = 5 \longrightarrow \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

◇

Ejercicio resuelto 8.7. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Diagonalizala la matriz y calcula* A^{10}

.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 3069 & 1 \end{pmatrix}$$

◇

Un poco de historia

Los valores y vectores propios pertenecen a los temas de mayor utilidad del álgebra lineal. Se usan en varias áreas de las matemáticas, física, mecánica, ingeniería eléctrica y nuclear, hidrodinámica, aerodinámica, etc. De hecho, es raro encontrar un área de la ciencia aplicada donde nunca se hayan usado.

Puede parecer muy extraño, pero los valores propios de las matrices aparecieron publicados antes que las matrices. Esto se debe al hecho insólito de que, parafraseando a Cailey, la teoría de las matrices estaba bien desarrollada (a través de la teoría de los determinantes) antes de que siquiera se definieran las matrices.

En la década de 1760, Lagrange estudió un sistema de seis ecuaciones diferenciales del movimiento de los planetas y de ahí dedujo una ecuación polinomial de sexto grado, cuyas raíces eran los valores propios de una matriz 6×6.

Fue Cauchy quien, en 1840, usó por primera vez los términos valores característicos y ecuación característica para indicar los valores propios y la ecuación polinomial básica que éstos satisfacen. Aplicó sus descubrimientos a la teoría del movimiento planetario.

Pero, ¿cuál es la utilidad de los valores y vectores propios?: son muy útiles en la 'diagonalización de matrices'.

¿Y para qué sirve diagonalizar matrices?: una de las utilidades más notables está en el cálculo de las potencias de las matrices cuadradas, si la matriz es diagonal, su potencia enésima también es diagonal siendo sus elementos los de la matriz elevado a k
$D = (a_{ii})_{diag} \;\rightarrow\; D^k = (a_{ii}^k)_{diag}$

Parte II

Geometría

Geometría

Etimológicamente hablando, la palabra Geometría procede del griego y significa "Medida de la Tierra". La Geometría es la parte de las Matemáticas que estudia las idealizaciones del espacio.

La Geometría no estudia el espacio real en sí mismo, sino objetos ideales (también conocidos como objetos matemáticos o geométricos), sus propiedades, relaciones y teorías, construidos por abstracción de cualidades del espacio real o de otros objetos ideales creados previamente (en el espacio real no existen círculos, pentágonos, rectas, puntos, esferas... sino objetos que tienen forma de... o modelizados por...; la realidad física siempre es menos perfecta que la realidad geométrica pensada o ideal). *"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos y la corteza de los árboles no es lisa, ni los rayos viajan en línea recta" (Benoit Mandelbrot, 'La geometría fractal de la naturaleza', 1980)*

Los componentes elementales de las figuras geométricas serán:
1 Punto: Un punto es un objeto que no tiene dimensiones que indica una posición en el espacio. Se suelen designar con letras mayúsculas A, B, C,... P,. . .
2 Recta: Es una línea ilimitada por ambos extremos. Se suele denotar con letras minúsculas r, s, t,... Como representación en la realidad de una recta podemos tomar un hilo tenso, o el borde de una regla.
3 Plano: es una superficie ilimitada cuya concreción en el mundo real puede verse, por ejemplo, en la superficie de una mesa, una hoja de papel,... Se suele representar con las letras griegas $\pi, \sigma, \tau, \cdots$

Los puntos son objetos de la geometría lineal, puntos y rectas dan lugar a la geometría plana y los puntos, las rectas y los planos son objetos de la geometría espacial.

La geometría analítica es la rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas, cualquier punto del plano se puede localizar por sus tres coordenadas en lo que llamaremos un sistema de regencia.

La fundación de este tipo de geometría se atribuye a René Descartes, quien usó su nombre latinizado, Renatus Cartesius, y por esta razón se conoce con el nombre de ejes cartesianos. Descartes fue un destacado filósofo y matemático francés el y, a mediados del siglo XVII, sentó las bases para el desarrollo de esta disciplina. Se considera uno de los padres del conocimiento científico moderno.

A diferencia de la forma clásica de la geometría (Geometría Euclidiana) que se desprende de un razonamiento lógico-deductivo, la geometría analítica representa de forma gráfica a las figuras geométricas mediante fórmulas matemáticas.

MODERNOS AVANCES.

La geometría sufrió un cambio radical de dirección en el siglo XIX. Los matemáticos Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski, y János Bolyai, trabajando por separado, desarrollaron sistemas coherentes de geometría no euclídea. Estos sistemas aparecieron a partir de los trabajos sobre el llamado "postulado paralelo"de Euclides, al proponer alternativas que generan modelos extraños y no intuitivos de espacio, aunque, eso sí, coherentes.

Casi al mismo tiempo, el matemático británico Arthur Cayley desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones. Imaginemos que una línea es un espacio unidimensional. Si cada uno de los puntos de la línea se sustituye por una línea perpendicular a ella, se crea un plano, o espacio bidimensional. De la misma manera, si cada punto del plano se sustituye por una línea perpendicular a él, se genera un espacio tridimensional. Yendo más lejos, si cada punto del espacio tridimensional se sustituye por una línea perpendicular, tendremos un espacio tetradimensional. El uso de conceptos con más de tres dimensiones tiene un importante número de aplicaciones en las ciencias físicas, en particular en el desarrollo de teorías de la relatividad que necesita de cuatro dimensiones.

Otro concepto dimensional, el de dimensiones fraccionarias, apareció en el siglo XIX. En la década de 1970 el concepto se desarrolló como la geometría fractal.

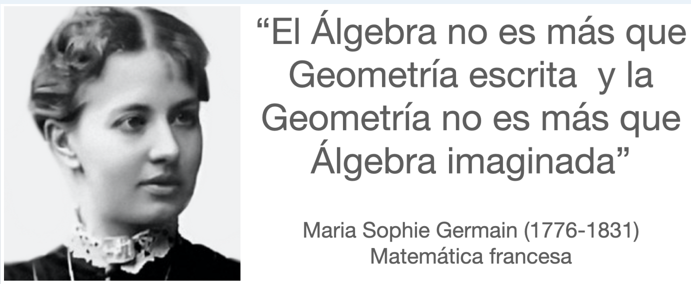
La geometría algebraica es una rama de la matemática que, como sugiere su nombre, combina el álgebra abstracta, especialmente el álgebra conmutativa, con la geometría analítica. Se puede comprender como el estudio de los conjuntos de soluciones de los sistemas de ecuaciones algebraicas. Cuando hay más de una variable, aparecen las consideraciones geométricas que son importantes para entender el fenómeno. Podemos decir que la materia en cuestión comienza cuando abandonamos la mera solución de ecuaciones, y el tema de ‘entender’ todas las soluciones se vuelve tan importante como el de encontrar alguna solución.

.

Capítulo 9

Vectores en el espacio

Geometría vs. Álgebra



9.1. El espacio vectorial de los vectores libres del espacio

$E_3 = \{\text{conjunto puntos del espacio}\} = \{A, B, C, \cdots\}$

$V_3 = \{\text{conjunto `vectores libres' del espacio}\} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \cdots\}$

Las definiciones que se dan a continuación se muestran en la figura siguiente.

Definición 9.1. *Dados dos puntos fijos A y B del espacio de puntos E_3, se llama* ***'vector fijo'*** $\overrightarrow{AB}$ *al segmento orientado con origen en A y extremo en B.*

Dos puntos A y B determinan un solo segmento, $\overline{AB} = \overline{BA}$ y dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

Un vector fijo se dice que es el vector nulo cuando su origen y extremo coinciden: $\vec{\mathbf{0}} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \cdots$

Definición 9.2. *Características de un vector*

Además de extremo y origen, en un vector fijo podemos observar:

— ***Módulo*** *de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$: es la longitud del segmento $\overrightarrow{AB}$ y se representa por $|\overrightarrow{AB}|$*

— ***Dirección*** *de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$: es la determinada por la recta que pasa por los puntos A y B y todas las rectas paralelas a ella (todas las rectas paralelas tienen la misma dirección).*

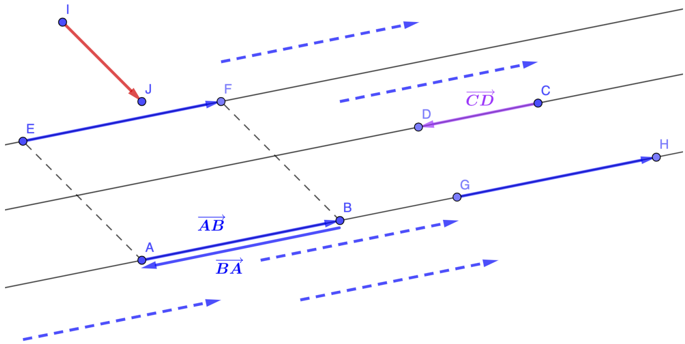
Dos vectores fijos no nulos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma dirección si y solo si están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas, se dice que los vectores son paralelos: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AB}$

— ***Sentido*** *de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$: el que va desde el origen A hasta el extremo B.*

Toda dirección tiene dos sentidos. Em la figura, $\overrightarrow{AB}$ tiene el mismo sentido que $\overrightarrow{GH}$ pero sentido contrario a $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

Definición 9.3. *Vectores opuestos*

Dos puntos fijos del plano A y B determinan dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ que se llaman ***'opuestos'***.



Evidentemente, dos vectores fijos y opuestos tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos contrarios:

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|; \quad \overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{BA}; \quad \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BA}$

Definición 9.4. *Vectores equipolentes*

Dados dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GH}$ son 'equipolentes' ($\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{GF}$) si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

En la figura anterior so observa que:

$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{GF} \quad \longleftrightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{GH}| \ \wedge \ \overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{GH} \ \wedge \ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GH}$

Proposición 9.1. *Si dos vectores fijos no nulos son equipolentes, entonces , o bien están en la misma recta ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GH}$), es decir, A, B, C, D están alineados, o bien el cuadrilátero A, B, C, D obtenido al unir los orígenes y los extremos de los vectores se forma el 'paralelogramo' $ABEF$ ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$). Ver figura anterior.*

Definición 9.5. ***Vectores libres***

Dado un vector fijo $\overrightarrow{AB}$, todos los vectores 'equipolentes' a él definen el mismo ***'vector libre' $\vec{u}$*** *(dibujados en modo discontinuo en la figura anterior). $\vec{u} = \{$vector fijo $\overrightarrow{AB}$ y todos sus equipolentes$\}$*

Al conjunto de todos los vectores libres del espacio $\mathbb{R}^3$ le llamamos V_3.

'Módulo, dirección y sentido' de un vector libre es el módulo, dirección y sentido de uno cualquiera de sus vectores equipolentes.

Podemos considerar un 'vector libre' como una *flecha* que podemos dibujar con origen en cualquier punto con la única condición de no cambiar el tamaño (módulo), la dirección y el sentido.

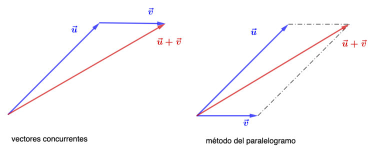
Los vectores libres van a ser objetos matemáticos (de V_3) cuya función va a ser mover puntos (de E_3).

9.1.1. Operaciones con vectores libres

— Suma de vectores

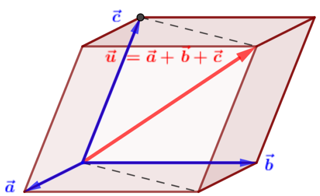
Definición 9.6. *Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$, se define el vector suma, $\vec{u} + \vec{v}$, como aquel que se obtiene:*

- *'vectores concurrentes': dibujado el vector $\vec{u}$, con origen en su extremo dibujamos el vector $\vec{v}$. Entonces, el vector que va desde el origen de $\vec{u}$ hasta el extremo de $\vec{v}$ es el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$.*
- *'método del paralelogramos': dibujamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con el origen común (en el mismo punto de E_3) y construimos el paralelogramo formado por estos dos vectores (ver figura adjunta). Entonces, el vector suma, $\vec{u} + \vec{v}$, es el vector que sale del origen de ambos vectores y llega al extremo opuesto en la diagonal del paralelogramo.*



Suma de vectores libres

Proposición 9.2. *Propiedades de la suma de vectores libres*

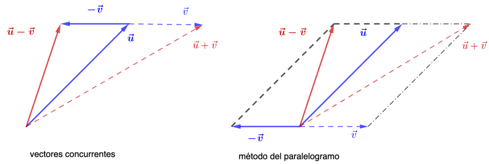


- *Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$*
- *Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$*
- *Neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$*
- *Opuesto: $\vec{u} + (\vec{-u}) = (\vec{-u}) + \vec{u} = \vec{0}$*

Con estas propiedades, $(V_3, +)$ tiene estructura algebraica de grupo abeliano (tema 1 de estructuras algebraicas).

Definición 9.7. *Diferencia de vectores*

Llamaremos diferencia (resta) de dos vectores a la suma del primero de ellos con el opuesto del segundo: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (\vec{-v})$



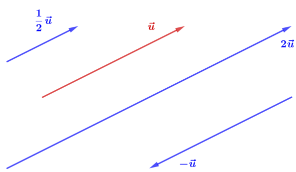
— Producto de un vector libre por un escalar

A los números reales, por contraposición a los vectores, se les llama 'escalares'.

Definición 9.8. *Sea $k \in \mathbb{R}$; $\vec{u} \in V_3$, se define el producto de k por $\vec{u}$, como aquel vector $k\vec{u}$ que tiene por:*

- *módulo:* $|k\vec{u}| = abs(k) \cdot mod(\vec{u}) = |k|\ |\vec{u}|$
- *direción: la misma que* $\vec{u}$
- *sentido:* $\begin{cases} \text{mismo que } \vec{u} \text{ si } k > 0 \\ \text{contrario a } \vec{u} \text{ si } k < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} k\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{u} \leftrightarrow k > 0 \\ k\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{u} \leftrightarrow k < 0 \end{cases}$$



Producto por un escalar

Proposición 9.3. *Propiedades del producto por un escalar*

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + h)\vec{u} = k\vec{u} + h\vec{u}$
- $(kh)\vec{u} = k(h\vec{u})$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

Con estas propiedades, la terna $(V_3, +, \cdot)$ tiene estructura algebraica de espacio vectorial real (tema 6 de espacios vectoriales).

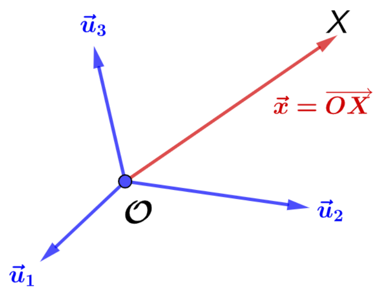
9.1.2. Sistema de Referencia: coordenadas de un punto, componentes de un vector.

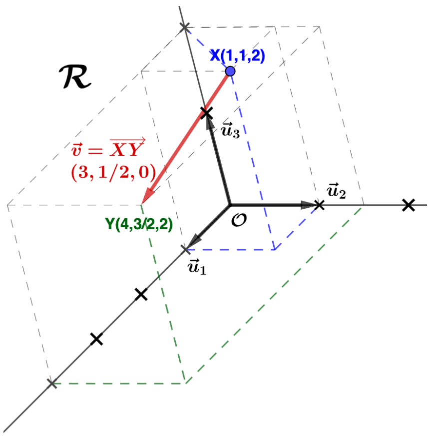
3 vectores $\{\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\ \}$ de V_3 de distintas direcciones y no coplanarios son LI por lo que forman una **base** B_{V_3}:

$$\forall \vec{u} \in V_3\ \exists! x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R},\ \exists! z \in \mathbb{R}\ \therefore\ \vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

Definición 9.9. .

*Llamaremos **Sistema de Referencia, $\mathcal{R}$,** al concurso de un punto fijo del espacio de puntos, que llamaremos 'origen', $\mathcal{O} \in E_3$ y una base del espacio vectorial $B = \{\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\ \} \subset V_3$, es decir:* $\boldsymbol{\mathcal{R} = \{\ \mathcal{O}\ ;\ \{\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\ \}\ \}}$





Para cualquier $X \in E_3$, hay un único vector que desde el origen $\mathcal{O}$ va hasta X, es el 'vector de posición' del punto X, el vector $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$.

*$\vec{x}$, como vector que es, se escribe de forma única en la base B de $\mathcal{R}$: $\vec{x} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$ son las **componentes** del vector $\vec{x}$ en $\mathcal{R}$.*

*X, como punto se puede escribir a través de su vector de posición como $X = (\alpha, \beta, \gamma)$ y ahora hablamos de las **coordenadas** de X en $\mathcal{R}$.*

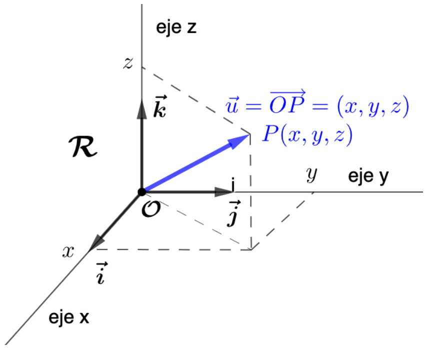
Si dibujamos $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ con origen en $X(x_1, x_2, x_3)$, su extremo será el punto $Y(y_1, y_2, y_3)$ cuyas componentes son $Y(x_1 + v_1, x_2 + v_2, x_3 + v_3)$. De otro modo, llamando $\vec{v} = \overrightarrow{XY}$:

$$Coord\ Y = Coord\ X + Componentes\ \overrightarrow{XY} \qquad \boxed{\boldsymbol{Y = X + \overrightarrow{XY}}}$$

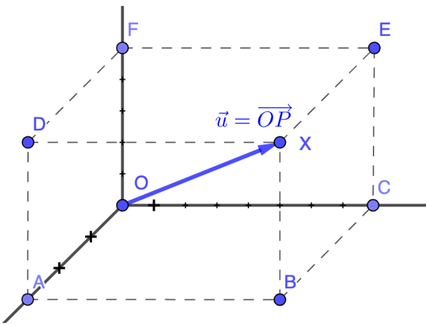
El vector $\vec{v} = \overrightarrow{XY}$ se desplaza $+3$ veces según el vector $\vec{i}$ (hacia delante del observador/a), $+1/2$ veces según el vector $\vec{j}$ (hacia la derecha) y 0 veces según el vector $\vec{k}$ (hacia arriba).

El trabajo de los vectores va a ser desplazar puntos. Al punto X le aplicamos el vector $\vec{v} = \overrightarrow{XY}$ y lo desplazamos hasta la posición Y.

NOTA: Mientras no se diga lo contrario, las coordenadas del origen será $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$ y la base que usaremos será la base canónica de V_3, formada por los vectores $C_{V_3} = \{\vec{\boldsymbol{i}} = (1, 0, 0);\ \vec{\boldsymbol{j}} = (0, 1, 0);\ \vec{\boldsymbol{k}} = (0, 0, 1)\}$, que forman una base llamada **'ortonormal'**, sus módulos valen 1 ('normal'-izado) y son mutuamente perpendiculares ('ortogonales): $\vec{i} \perp \vec{j};\ \vec{j} \perp \vec{k};\ \vec{k} \perp \vec{i}$



Ejemplo 9.1. *En la siguiente figura, encuentra las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, F, P y del vector $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$*



$A(3, 0, 0)$ $B(3, 8, 0);$ $C(0, 8, 0)$

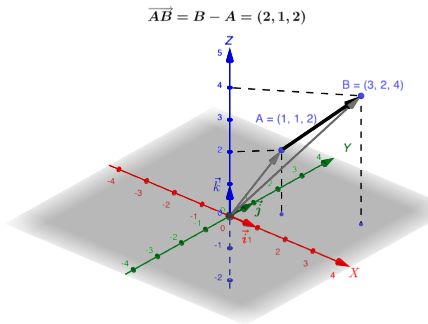
$D(3, 0, 5);$ $E(0, 8, 5);$ $F(0, 0, 5)$

$X(3, 8, 5)$

$\vec{u} = \overrightarrow{OX} = (3, 8, 5) = 3\vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k}$

9.1.3. Aplicaciones de los vectores

Componentes del vector que une dos puntos



$\mathcal{R}\{\mathcal{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ sistema de referencia ortonormal, en que $A(a_x, a_y, a_z)$ y $B(b_x, b_y, b_z)$ son las coordenadas de dos puntos. De la figura se observa que:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$A \rightarrow \overrightarrow{OA} = (1,1,2)$; $B \rightarrow \overrightarrow{OA} = (3,2,4)$

$\overrightarrow{BA} = B - A = (2,1,2)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, abusando del lenguaje podemos decir que: $\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A}$, para calcular las componentes, en un sistema de referencia dado, del vector que representa (une) dos puntos bastará con restar a las coordenadas del punto extremo, las coordenadas del punto origen: *'componentes del vector que une dos puntos = coordenadas del extremo menos coordenadas del origen'.*

Repitiendo lo dicho más arriba, si $\overrightarrow{AB} = B - A$, 'despejando' $B = A + \overrightarrow{AB}$ y tenemos, como se ha mencionado anteriormente, que el trabajo de los vectores va a ser desplazar puntos. Al punto A le aplicamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y lo desplazamos hasta la posición B.

$\mathcal{R}\{\mathcal{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ sistema de referencia ortonormal, las coordenadas del punto $A(a_x, a_y, a_z)$ coinciden con las componentes del vector de posición $\overrightarrow{OA} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$, análogamente $B(b_x, b_y, b_z)$ por ser $\overrightarrow{OB} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$. Las componentes del vector que une los dos puntos, desde A hasta B las obtendremos, abusando del lenguaje, al restar de las coordenadas del extremo B las coordenadas del origen A. Decimos abusando del lenguaje porque, evidentemente dos puntos no se pueden restar, lo que hacemos en realidad es definir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}$ aunque en la práctica haremos: $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = B - A}$

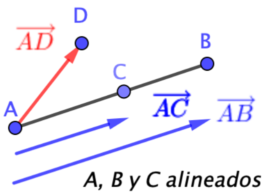
Condición de paralelismo de dos vectores

De la definición de producto de un vector por un escalar sabemos que el resultado son vectores paralelos, es decir: $\vec{u} \,||\, \vec{v} \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{u} = k \cdot \vec{v}$

Si $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \rightarrow \quad k \cdot u = (kv_z, k_v y, kv_z) = (u_x, u_y, u_z) \quad \longrightarrow$ $u_x = kv_x;\ u_y = kv_y;\ u_z = kv_z$, es decir, *dos vectores son paralelos si sus componentes son proporcionales.* $\dfrac{\vec{u}_x}{\vec{v}_x} = \dfrac{\vec{u}_y}{\vec{v}_y} = \dfrac{\vec{u}_z}{\vec{v}_z} = k$

Condición de puntos alineados

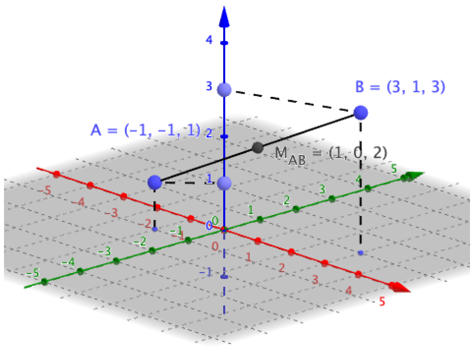
Tres puntos A, B y C están alineados si, formados dos vectores cualesquiera con ellos tres, éstos resultan paralelos: $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{AC}$



Punto medio de un segmento

Dado el segmento $\overline{AB}$, llamamos ' punto medio' del segmento al punto M que verifica la ecuación: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

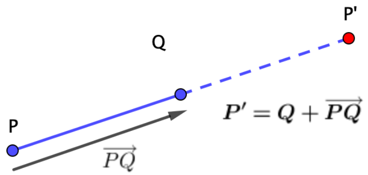
Sean $A(a_x, a_y, a_z)$; $B(b_x, b_y, b_z)$ las coordenadas de A y B extremos del segmento, entonces, las coordenadas de $M(m_x, m_y, m_z)$ se pueden escribir como: $m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$, con $i = \{x, y, z\}$



$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (m_x, m_y, m_z) - (a_x, a_y, a_z) = \frac{1}{2}[\ (b_x, b_y, b_z) - (a_x, a_y, a_z)\ ]$, despejando, $m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$, con $i = \{x, y, z\}$.

Las 'coordenadas del punto medio' de un segmento las obtendremos como 'semisuma de las coordenadas de los extremos': $\boxed{M_{AB} = \dfrac{A+B}{2}}$

Simétrico de un punto P respecto de otro Q



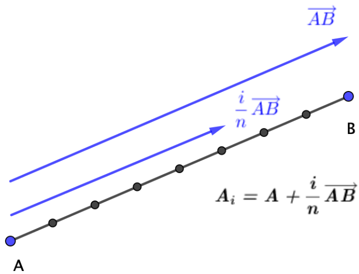
Dados P y Q, el simétrico de P respecto de Q ha de ser un punto P' tal que Q sea el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Es decir, $P' = Q + \overrightarrow{PQ}$, en coordenadas: $\boxed{\dfrac{P+P'}{2} = Q \to P' = 2Q - P}$

(abusando del lenguaje)

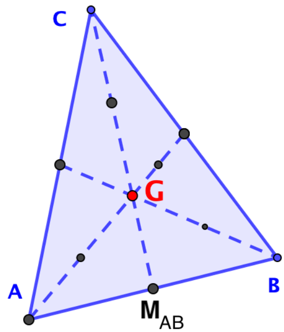
División de un segmento en n partes.

Dados los puntos A y B, formamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y, a partir de él, $\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$. Si a A le sumamos este último vector llegamos al punto $A_1 = A + \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$; análogamente, $A_2 = A + \frac{2}{n}\overrightarrow{AB}$ y, en general,



$\boxed{A_i = A + \dfrac{i}{n}\,\overrightarrow{AB}}$. Evidentemente, $A_0 = A;\ A_n = B$

Baricentro de un triángulo



3 puntos no alineados A, B, C definen un triángulo. Se llama 'baricentro' o 'centro de gravedad' de un triángulo, G, al corte de sus medianas (mediana: recta que va de un vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto; el baricentro dista del vértice el doble que del punto medio)

De nuevo abusando del lenguaje, se tiene que: $\boxed{G = \dfrac{A+B+C}{3}}$.
El baricentro, G, de un triángulo está en la 'tercisuma' de sus vértices:

En lo sucesivo usaremos la siguiente notación: $\boldsymbol{P(x,y,z)}$, para los **puntos** usaremos letras mayúsculas y escribiremos sus componentes sin el símbolo igual, $\boldsymbol{\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)}$, para los **vectores** usaremos letras minúsculas, con flechita arriba, y sus componentes las escribiremos después del signo igual.

Ejemplo 9.2. *Considera los puntos* $A(1,2,-3)$, $B(4,5,0)$, $C(-2,5,3)$ *y* $D(3,x,-1)$. *Se pide:*

a) $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{BA}$

b) *Comprueba que* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(Ley de Chasles) y que* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$

c) *Determina el valor de* x *en* D *para que* A, B *y* D *estén alineados.*

d) *Idem para* $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{CD}$

e) *Encuentra el punto medio del segmento* $\overline{AB}$

f) *Encuentra las coordenadas de un punto* P *del segmento* $\overline{AB}$ *tal que la distancia a* B *sea doble que la distancia a* A

g) *Encuentra el baricentro del triángulo de vértices* A, B, C

h) *Comprueba que la distancia del baricentro a un vértice del triángulo es doble que la de éste al punto medio del lado opuesto al vértice.*

— *a)* $\overrightarrow{AB} = B - A = (3,3,3)$; $\overrightarrow{BA} = A - B = (-3,-3,-3)$, *evidentemente*, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

— *b)* $\overrightarrow{AB} = (3,3,3)$; $\overrightarrow{BC} = C - B = (-6,0,3)$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (3,3,3) + (-6,0,3) = (-3,3,6)$

Por otro lado: $\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,3,6)$.

Luego sí se cumple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

— *c)* A, B *y* D *están alineados si* $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AD}$*:*

$\overrightarrow{AB} = (3,3,3)$; $\overrightarrow{AD} = D - A = (2, x-2, 2) \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x-2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow x = 4$

— *d)* $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ *si sus componentes son proporcionales:*

$\overrightarrow{AB} = (3,3,3)$; $\overrightarrow{CD} = D - C = (5, x-5, -4) \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{x-5}{3} = \frac{-4}{3}$, *evidentemente*, $\frac{5}{3} \neq \frac{-4}{3} \Rightarrow \nexists\, x \,/\, \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

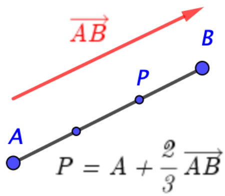
— *e)* $M_{AB} = \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{(5,7,-3)}{2} = (5/2, 7/2, -3/2)$

— *f) De la figura:*

$P = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$P = (1,2,-3) + \frac{2}{3}(3,3,3)$

$P = (1,2,-3) + (1,1,1) = (2,3,2)$



— *g)* $G = \dfrac{A+B+C}{3} = \dfrac{(3,14,0)}{3} = (1,4,0)$

— *h) Fijándonos en la figura del apartado 'baricentro', se observa que:* $G = M_{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{M_{AB}C}$ $(*)$

$M_{AB} = (5/2, 7/2, -3/2)$; $\overrightarrow{M_{AB}C} = C - M_{AB} = (-2,5,3) - (5/2,7/2,-3/2) = (-9/2, 3/2, 9/2)$

$(*) \rightarrow G = (5/2,7/2,-3/2) + \frac{1}{3}(-9/2,3/2,9/2) = (5/2,7/2,-3/2) + (-3/2,1/2,3/2) = (1,4,0)$, *obviamente, el mismo resultado anterior* $\square$.

Vamos ahora a estudiar tres diferentes productos con vectores, el producto escalar, el producto vectorial y el producto mixto, todos ellos con importantes aplicaciones geométricas.

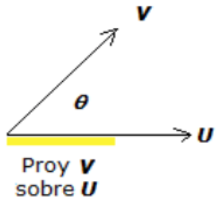
9.2. Producto escalar

Definición 9.10. *Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$, se define el producto escalar de dos vectores como el número real (escalar):* $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta}$ $\in \mathbb{R}$*, siendo θ el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$*

Interpretación geométrica del producto escalar:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta = |\vec{u}|\ Proy_{\vec{u}}\ (\vec{v})$;

siendo $Proy_{\vec{u}}\ (\vec{v}) = |\vec{v}|\ \cos\theta$



El producto escalar de dos vectores es el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Proposición 9.4. *Propiedad fundamental del producto escalar*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$\boxed{\rightarrow}$ Si $\vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \theta = 90^o \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cancel{\cos(90^o)}^{\,0} = 0$

$\boxed{\leftarrow}$ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq 0 \rightarrow |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 0 \longrightarrow$ $\theta = 90^o$: $\vec{u} \perp \vec{v}$ □

Propiedades del producto escalar:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Aplicaciones del producto escalar:

Módulo de un vector:

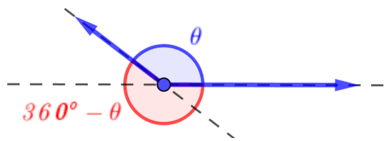
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\ |\vec{u}|\ \cancel{\cos 90^o}^{\,1} = |\vec{u}|^2 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$$

Ángulo de dos vectores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|}}$$

Es por esto por lo que muchos autores hablan del producto escalar como la 'métrica' del espacio, pues nos permite medir distancias (módulos) y *ángulos. Podríamos decir que el producto escalar es la cinta métrica y el goniómetro (transportador) del matemático.*

Aunque parezca existir una cierta ambigüedad a la hora de definir el ángulo que forman dos vectores, pues dado $\cos\theta$ igual a un determinado valor existen dos ángulos posibles θ y $360^o - \theta$ que lo verifican, la ambigüedad desaparece al definir el ángulo entre dos vectores como el menor de los dos posibles (menor de 180^o).



9.2.1. Expresión del producto escalar en una BON (base ortonormal)

Proposición 9.5. *Sea* $B = \{\,\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\ \ \therefore\ \ |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1\ \ y\ \ \vec{i}\perp\vec{j};\ \vec{j}\perp\vec{k};\ \vec{k}\perp\vec{i}\,\}$, *una BON y* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *dos vectores de* V_3 *cuyas componentes en la BON son:* $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} = (u_x, u_y, u_z)$; $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = (v_x, v_y, v_z)$, *se demuestra que:*

$$\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z} \quad \in \mathbb{R}$$

$$|\boldsymbol{\vec{u}}| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}$$

$$\boldsymbol{\cos\theta} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \frac{\boldsymbol{u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z}}{\sqrt{\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}\ \sqrt{\boldsymbol{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}}$$

Como estamos en una BON,

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x, u_y, u_z)\ (v_x, v_y, v_z) = (u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k})\ (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) =$
$u_x\ u_x\ \cancelto{1}{\cos 0^o} + u_x\ u_y\ \cancelto{0}{\cos 90^o} + \cdots = u_x^2 + \cdots$

Teniendo en cuenta lo anterior, es muy sencillo acabar la demostración (hágase).

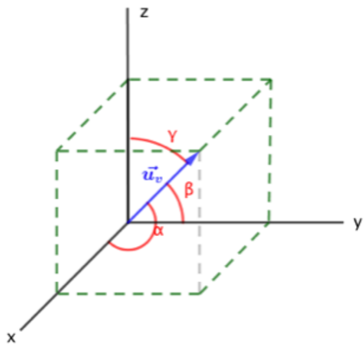
$\square$

9.2.2. Normalización de un vector

Definición 9.11. *Dado un vector $\vec{u}$, 'normalizar' el vector es conseguir otro de la misma dirección y módulo unidad: $\widehat{u} = \pm\frac{1}{|\vec{u}|}\,\vec{u}$, también se le llama 'vector unitario'.. Ambos vectores tienen la misma dirección que $\vec{u}$, uno con el mismo sentido y otro con sentido contrario.*

Consideremos el vector unitario $\widehat{u}$, de componentes $\widehat{u} = (\hat{u}_x, \hat{u}_y.\hat{u}_z)$, como $\widehat{u} \cdot \vec{i} = \cancelto{1}{|\widehat{u}|}\ \cancelto{1}{|\vec{i}|}\ \cos\alpha = \boldsymbol{\cos\alpha} = (\hat{u}_x, \hat{u}_y.\hat{u}_z) \cdot (1,0,0) = \boldsymbol{\hat{u}_x}$, siendo α el ángulo que forma $\vec{u}$ o $\widehat{u}$ con el eje OX y del mismo modo para los ejes OY, β y OZ, γ, tenemos que cualquier vector unitario, $\widehat{u}$, se puede escribir:

$\widehat{u} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, que se llaman 'cosenos directores' de $\widehat{u}$. Es decir, las componentes de un vector unitario o normalizado son los cosenos directores del mismo, los cosenos de los ángulos que forma el vector con los ejes coordenados.



Como $|\widehat{u}|^2 = 1 \rightarrow$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

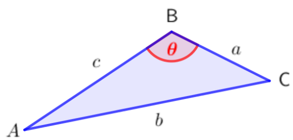
9.2.3. Distancia entre dos puntos

Definición 9.12. *Dados $A, B \in E_3$ dos puntos del espacio, se define la distancia entre ellos como:* $\quad d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$

Propiedades: $\quad d(A,B) = d(B,A)$; $\qquad d(A,B) = 0 \leftrightarrow A = B.$

Ejemplo 9.3. *Clasifica el triángulo de vértices:*

$A(3,4,0);\ B(3,0,1);\ C(0,-5,2)$



$\overrightarrow{AB} = B - A = \ (0, -4, 1) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}\, u = c$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, -9, 2) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{94}\, u = b$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, -5, 1) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}\, u = a$

Al ser los tres lados distintos, el triángulo es 'escaleno'.

Test de Pitágoras: $\sqrt{94}^2 > \sqrt{35}^2 + \sqrt{17}^2 \to$ *el triángulo es 'obtusángulo' en* B.

Cálculo del ángulo B*:* $\overrightarrow{BC} = (-3, -5, 1) \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (0, 4, -1)$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = (-3, -5, 1) \cdot (0, 4, -1) = 0 - 20 - 1 = -21$

$|\overrightarrow{BC}|\, |\overrightarrow{BA}| \cos B = \sqrt{35}\sqrt{17} \cos\theta$

Luego, $-21 = \sqrt{35}\sqrt{17}\cos\theta \longrightarrow \theta = 149.42^o$. *Por lo que el área del triángulo será:* $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2}\sqrt{35}\sqrt{17}\sin 149.42^o = 6.20u^2$

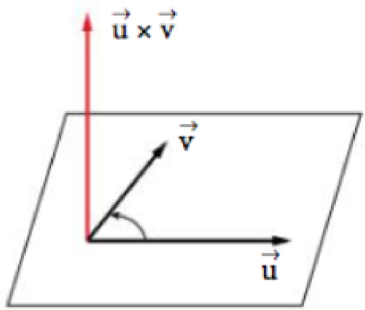
9.3. Producto vectorial

Definición 9.13. *El producto vectorial de dos vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *es un nuevo vector* $\vec{u} \times \vec{v}$ *tal que:*

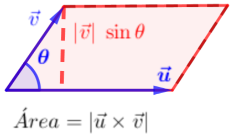
— *su módulo es* $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$, *con* θ *el ángulo que forman* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

— *su dirección es perpendicular al plano que forman* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

— *y su sentido es el de avance del giro de un sacacorchos que intente llevar el vector* $\vec{u}$ *hacia el* $\vec{v}$ *por el camino más corto.*



Propiedades del producto vectorial



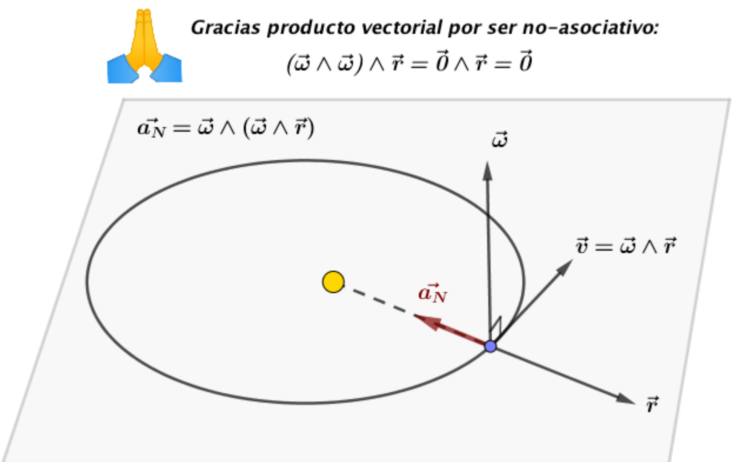
• El módulo del producto vectorial mide el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$$

- ¡El producto vectorial es no-conmutativo!: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- Tomaremos la BON orientada, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ y $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
- $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$
- ¡No se cumple la asociativa!: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
- Distributivas: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$; $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}$
- En componentes, el desarrollo del producto vectorial es un determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

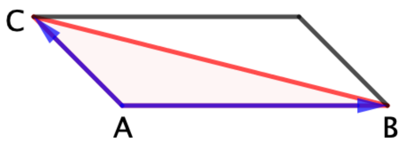
- $\vec{u} \times \vec{v}$ siempre es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ y su módulo representa el área del paralelogramos que definen estos dos vectores.



Afortunadamente, el producto vectorial no es asociativo.

Ejemplo 9.4. *Los tres puntos siguientes forman un triángulo, calcula su área usando el producto vectorial.* $A(3,4,0)$; $B(3,0,1)$; $C(0,-5,2)$

Consideremos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces, el módulo del vector producto vectorial de ambos, $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$, representará el área del paralelogramo y, su mitad, el área del triángulo.



Área del triángulo $\boldsymbol{ABC}$: $\boldsymbol{A_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,-4,1)$; $\qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (-3,-9,2)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 1 \\ -3 & -9 & 2 \end{vmatrix} = \text{por adjuntos primera fila (*)} =$$

$$= \vec{i}\,(-1)^{1+1}M_{11} + \vec{j}\,(-1)^{1+2}M_{12} + \vec{k}\,(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-8-(-9) + \vec{j}(0-(-3)) + \vec{k}(0-12) = \vec{i} - 3\vec{j} - 12\vec{k} = (1,-3,-12)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-12)^2} = \sqrt{154}$$

Y el área del triángulo: $A_T = \frac{1}{2}\sqrt{154} \simeq 6.20\ u^2$, mismo resultado que el obtenido al final del ejemplo anterior.

(*) Es costumbre, en el desarrollo del determinante de un producto vectorial, hacerlo por adjuntos de la primera fila, de este modo, las componentes del vector salen separadas $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, pero también lo hubiésemos podido calcular por Sarrus:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 1 \\ -3 & -9 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 3\vec{j} - (12\vec{k} - 9\vec{i}) = \vec{i} - 3\vec{j} - 12\vec{k} = (1,-3,-12).$$

9.4. Producto mixto

Definición 9.14. *Dados tres vectores del espacio, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, se define el producto mixto de ellos como el producto escalar del primero por el vector que se obtiene como producto vectorial del segundo por el tercero, se representa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.*

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot |(\vec{v} \times \vec{w})| \cdot \cos\theta}$$

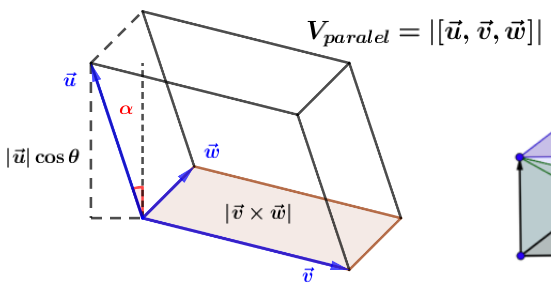
En componentes, el producto mixto se calcula como un determinante:

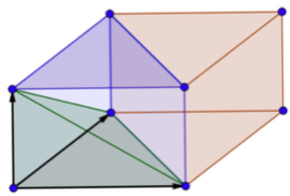
$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

El producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ mide, en valor absoluto, el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores.

Por propiedades de los determinantes y del valor absoluto podemos afirmar que para el cálculo del volumen de un paralelepípedo formado por tres vectores no importa el orden en que los cojamos para calcular el producto mixto.

El volumen del prisma es $\mathbf{\frac{1}{2}}$ del del paralelepípedo y el de la pirámide $\mathbf{\frac{1}{3}}$ del del prisma o $\mathbf{\frac{1}{6}}$ del del paralelepípedo.





$$V_{prisma} = \frac{1}{2} V_{paralel}; \qquad V_{piram} = \frac{1}{6} V_{paralel}$$

Ejemplo 9.5. *Calcula el volumen de la pirámide de vértices:* $A(1,2,3)$, $B(0,2,5)$, $C(1,1,-2)$ *y* $D(2,4,3)$

Dados los vértices de la pirámide, calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,-2)$; $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,1,-5)$; $\overrightarrow{AD} = D - A = (1,2,0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \rightarrow |\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\ | = |-12| = 12$$

El volumen de la pirámide es: $V = \frac{1}{6}\ |\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\ | = \frac{1}{6}\ 12 = 2\ u^3$

9.5. Ejercicios

9.5.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 9.1. *Considera el vector* $\vec{u} = (6,-7,6)$*. Encuentra los ángulos que forma este vector con los ejes coordenados y da un vector paralelo a él de módulo* 55

Calculemos un vector unitario $\hat{u}$ en la dirección de $\vec{u}$:

$|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + (-7)^2 + 6^2} = 11 \rightarrow \hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\ \vec{u} = \frac{1}{11}\ (6,-7,6) =$

$= (6/11, -7/11, 6/11) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (cosenos directores), siendo α, β, γ los ángulos que forman tanto $\vec{u}$ como $\hat{u}$ (son paralelos) con los ejes coordenados X, Y, Z respectivamente.

$\alpha = \gamma = arccos(6/11) = 56.94^o$; $\quad \beta = arccos(-7/11) = 129.52^o$. Luego, $\vec{u}$ forma un ángulo de 56.94^o con el eje X, de 129.52^o con el eje Y y de 56.94^o con el eje Z.

Por otra parte, un vector paralelo a $\vec{u}$ (también paralelo a $\hat{u}$) de módulo 55 será $55\hat{u} = 55\ \frac{1}{11}\ (6,-7,6) = (30,-35,30)$, si lo queremos del mismo sentido o $(-30,35,-30)$ si lo queremos de sentido contrario. $\diamond$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 9.2. *Sean* $\vec{a} = (4,0,-5)$; $\vec{b} = (-4,3,0)$; $\vec{c} = (-2,-3,5)$, *encuentra:*

a). La proyección de $\vec{a}$ *sobre* $\vec{b}$.

b). El área del paralelogramos formados por $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$.

c). El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{a}$ $\vec{b}$ *y* $\vec{c}$.

a) $Proy_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{(4,0,-5)\cdot(-4,3,0)}{|(-4,3,0)|} = \dfrac{-16+0+0}{\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}} = \dfrac{-16}{5}$

b) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 20\vec{j} + 12\vec{k} = (15,20,12) \rightarrow A = |\vec{a}\times\vec{b}| =$
$|\ (15,20,12)\ | = \sqrt{15^2+20^2+12^2} = \sqrt{769} \simeq 27.73\ u^2$

c) $V = abs\left(\begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}\right) = |-30| = 30\ u^3$ $\diamond$

Ejercicio resuelto 9.3. *Obtén* 5 *vectores perpendiculares a* $\vec{u} = (2,-1,7)$, *no proporcionales entre sí.*

Cualquier vector de la forma $\vec{v} = (\alpha,\beta,\gamma)$ es perpendicular a $\vec{u}$ si y solo si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Tomado $\vec{v}_1 = (0,7,1)$, es evidente que $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-1,7)\cdot(0,7,-1) = 0-7+7 = 0$, por lo que $\vec{v}_1 \perp \vec{u}$.

Si hacemos ahora $\vec{v}_2 = (-7,0,2)$, también es sencillo comprobar que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ y lo mismo ocurre para $\vec{v}_3 = (1,2,0)$. Para esto, hemos tomado una componente nula en $\vec{v}_i$ y hemos intercambiado de posición las otras dos de $\vec{u}$ cambiando el signo a una de ellas.

Comprobemos que cualquier combinación lineal de éstos, p.e. $\vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (-7,7,3)$ y $\vec{v}_5 = \vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3 = (-6,9,3)$ también son perpendiculares al vector $\vec{u}$. P.e., $\vec{v}_5\cdot\vec{u} = (-6,9,3)\cdot(2,-1,7) = -12-9+21 = 0 \rightarrow \vec{v}_5 \perp \vec{u}$.

Dejamos que el/la lector/a compruebe que también $\vec{v}_4$ es perpendicular a $\vec{u}$.

Para encontrar la forma de todos los vectores $\vec{v}$ perpendiculares a $\vec{u}$, haríamos que $\vec{v}\cdot\vec{u} = (\alpha,\beta,\gamma)\cdot(2,-1,7) = 2\alpha-\beta+7\gamma = 0 \rightarrow$, despejando $\gamma:\quad \vec{v} = (\alpha, 2\alpha+7\gamma, \beta),\ \forall\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$ ◇

Ejercicio resuelto 9.4. *Dados* $\vec{u} = (1,0,-1)$; $\vec{v} = (2,3,1)$, *calcular* $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ *y él ángulo que forman* $\theta = \widehat{\vec{u},\vec{v}} = \measuredangle\{\vec{u},\vec{v}\}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,0,-1)\cdot(2,3,1) = 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 1 = 2+0-1 = 1$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+0^2+(.1)^2} = \sqrt{2};\quad |\vec{v}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{14}} \rightarrow$$

$$\theta = \text{arc cos} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{14}} = 79.11^o \quad \cancel{(280.89^o)}$$ ◇

Ejercicio resuelto 9.5. *Obtén un vector perpendicular a* $\vec{u} = (3,-1,2)$ *y a* $\vec{v} = (1,0,-3)$

Dos vectores de distinta dirección (no proporcionales), como $\vec{u}$ y $\vec{v}$, forman un 'plano vectorial', solo queda una dirección perpendicular posible.

Sea $\vec{w} = (\alpha,\beta,\gamma)$ el vector buscado:

Por ser $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$, ha de ocurrir que

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = \mathbf{0} = (3,-1,2)\,((\alpha,\beta,\gamma) = \boldsymbol{3\alpha-\beta+2\gamma} \quad (1*)$$

Por ser $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{v}$, ha de ocurrir que

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \mathbf{0} = (1,0,-3)\,((\alpha,\beta,\gamma) = \boldsymbol{\alpha-3\gamma} \quad (1*)$$

Con $(1*)$ y $(2*)$, tenemos un SEL homogéneo sencillísimo de resolver: $(2*) \rightarrow \alpha = 3\gamma \rightarrow (1*) \rightarrow \beta = 11\gamma$. Con lo que los vectores $\vec{w}$ han de ser de la forma: $\vec{w} = (3\gamma, 11\gamma, \gamma)\ \ \forall\gamma\in\mathbb{R}$. Algunos posibles vectores $\vec{w}$ podrían ser $(3,11,1)$; $(-3,-11,-1)$; $(33,121,11)$; etc.

Otra forma de enfocar el problema es a través del 'producto vectorial' ya que $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$ y también $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$, basta pues con definir $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$3\vec{i} + 11\vec{j} + \vec{k} = (3, 11, 1)$

◇

Ejercicio resuelto 9.6. *Calcula el área de los siguientes triángulos:*

a) $A(2,3,7);\ B(1,-5,4); C(7,0,11)$ *b)* $P(3,-7,4);\ Q(-1,2,5);\ R(-5,11,6)$

Para ambos apartados, formamos los vectores: $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,-8,-3)$; $\overrightarrow{AC} = (5,-3,4)$; $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-4,9,1)$; $\overrightarrow{PR} = (-8,18,2)$

— a) $A_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -8 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|(-41,-11,43)| =$
$\frac{1}{2}\sqrt{3651} \simeq 30.21\ u^2$

— b) $A_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 9 & 1 \\ -8 & 18 & 2 \end{vmatrix} =$ dos filas proporcionales $=$
$\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

¿Cómo puede ser un triángulo de área cero?. Basta con que los tres puntos estén alineados. En efecto, P, Q y Q están alineados pues los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ tiene las componentes proporcionales ($(-8)/(-4) = 1/9/ = 2/1$). ◇

Ejercicio resuelto 9.7. *Calcula el volumen de los siguientes tetraedros:*

a) $A(-7,-2,5);\ B(0,2,0);\ C(-9,3,8);\ D(-7,5,9)$

b) $A(-7,-2,5);\ B(0,2,0);\ C(-9,3,8);\ D(1,21,4)$

Usaremos el producto mixto: $V_T = \frac{1}{6} \mid [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \mid$, donde V_T será el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

— *a)* $\overrightarrow{AB} = (7,4,-5);\ \overrightarrow{AC} = (-2,5,3);\ \overrightarrow{AD} = (0,7,4)$

$$V = \frac{1}{6}\ abs \left(\begin{vmatrix} 7 & 4 & -5 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6}\ |95| = \frac{95}{6}\ u^3$$

— *b)* $\overrightarrow{AB} = (7, 4, -5)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, 5, 3)$; $\overrightarrow{AD} = (8, 23, -1)$

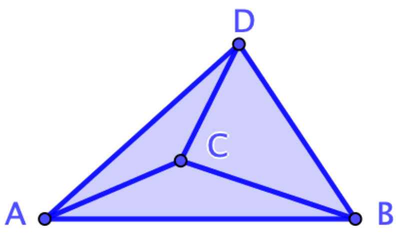
$$V = \frac{1}{6}\, abs \left(\begin{vmatrix} 7 & 4 & -5 \\ -2 & 5 & 3 \\ 8 & 23 & -1 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6}\, |0| = 0\ u^3$$

¿Cómo puede ser un tetraedro de volumen cero?. Porque no tiene altura (V=1/3 área base * altura), ergo los tres vectores son coplanarios, están en el mismo plano. De otro modo, los 4 puntos son coplanarios y no hay tetraedro. ***El cálculo del volumen del tetraedro formado por cuatro puntos (el producto mixto, un determinante), nos permite decidir si los cuatro puntos dados son coplanarios ↔ el volumen del tetraedro es cero***.

◇

Ejercicio resuelto 9.8. *Calcula el área total y el volumen del tretraedro de vértices* $A(2, 3, 1)$; $B(4, 1, -2)$; $C(6, 3, 7)$; $D(-5, -4, 8)$.

$$V_{T_{ABCD}} = \frac{1}{6} \mid [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \mid = \frac{1}{6}\, abs \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} \right) = \frac{308}{6} = \frac{154}{3}\ u^3$$



En un tetraedros $ABCD$ observamos 4 triángulos: ABC, ACD, BCD, ABD; la suma de sus áreas nos dará el área total. Recordemos que el área de un triángulo es la mitad que la del paralelogramo, p.e., $A_{ABC} = \frac{1}{2}\, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\, abs \left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} | -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} \mid =$$
$$\frac{1}{2} |(-24, -12, 8)| = \frac{1}{2}\sqrt{784} = 28/2 = 14\ u^2$$

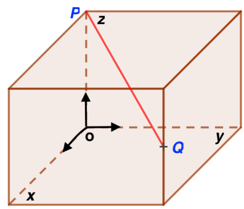
$$A_{ACD} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}\;abs\left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}|\;42\vec{i}-70\vec{j}-28\vec{k}\;| =$$
$$\frac{1}{2}|(42,-70,-28)| = \frac{1}{2}\sqrt{7448} = \sqrt{1862}\;u^2 \simeq 43.15\;u^2$$

Compruébese que $A_{BCD} = 60.19\;u^2$ y que $A_{ABD} = 22.68\;u^2$, por lo que el área total del tetraedro será: $A_{ABCD} = 14+43.15+60.19+22.68 = 140.02\;u^2$

◇

Ejercicio resuelto 9.9. .

Calcula la distancia entre los puntos P y Q que aparecen en el siguiente cubo.



Poniendo el origen y con la elección de ejes que aparece en la figura, las coordenadas de los extremos del segmento cuya longitud pretendemos medir (y asumiendo que Q está en el punto medio de una arista), llamando l a la longitud del cubo, son: $P(0,0,l),\; Q(l,l,l/2)$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (l,l,l/2) - (0,0,l) = (l,l,-l/2)$$

$$long(\overline{PQ}) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\;(l,l,-l/2)\;| = \sqrt{l^2+l^2+(-l/2)^2} = \sqrt{9/4\;l^2} = 3/2\;l\;(u).$$ ◇

Ejercicio resuelto 9.10. *Los puntos $A(1,2,3)$; $B(-2,2,7)$ y $C(4,6,3)$ definen un triángulo en el espacio. Clasifíquese y calcúlese su área.*

El vector $\vec{u} = (2,-1,5)$ traslada los vértices del triángulo a los puntos A', B' y C' y así se consigue un prisma. Calcúlense las coordenadas de los vértices trasladados y el volumen del prisma.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,0,4) \to c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2+0^2+4^2} = 5\;u$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (3,4,0) \to b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5\;u$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (6,4,-4) \to a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2+4^4+(-4)^2} \simeq 8.25\;u$$

Según los lados, el triángulo es 'isósceles'.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3,0,4)\cdot(3,4,0) = -9 = |\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|\ \cos A = 25\cos A \to A = arccos\frac{-9}{25} \Rightarrow A = 110.10^o$

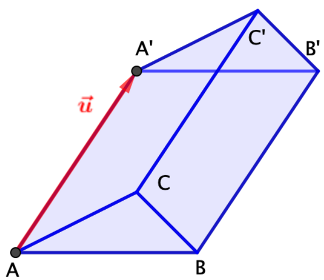
El ángulo que forman los lados iguales del triángulo es de $110,10^o$, por lo que el triángulo es 'obtusángulo'. Como los otros dos lados son iguales (isósceles), la amplitud de los mismos será de $\frac{1}{2}(180^o - 110.10^o) \to B = C = 34.95^o$

El área del triangulo ABC la obtenemos a través del producto vectorial como:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{k} = (-16, 12, -12)$$

$$|\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ | = |\ (-16,12,-12)\ | = \sqrt{(-16)^2 + 12^2 + (-12)^2} \simeq 23.32$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}\ |\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ | = \tfrac{1}{2}\ 23.32 = 11.66\ u^2$$



Los vectores trasladan puntos:

$A' = A + \vec{u} = (1,2,3) + (2,-1,5) = (3,1,8)$;

$B' = B + \vec{u} = (-2,2,7) + (2,-1,5) = (0,1,12)$ y

$C' = C + \vec{u} = (4,6,3) + (2,-1,5) = (6,5,8)$

Podemos considerar el prisma como el formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AA'}$, siendo $\overrightarrow{AB'} = A' - A = (2,-1,5)$($= \vec{u}$ evidentemente.). Su volumen (medio paralelepípedo) lo dará el producto mixto.

$$V_P = \tfrac{1}{2}\ |\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}]\ | = \tfrac{1}{2}\ abs\left(\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\ |-104| = 52\ u^3 \qquad \diamond$$

Ejercicio resuelto 9.11. *<u>Aplicación física</u>: El trabajo $W(J)$ que ejerce una fuerza constante $\vec{F}(N)$ sobre un cuerpo para desplazarlo desde una* *posición inicial $\vec{x}_0$ a una final $\vec{x}$ se define como el producto escalar de la fuerza aplicada al cuerpo por el desplazamiento producido, $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta x}$, siendo $\overrightarrow{\Delta x}$ (m) el vector desplazamiento, que se calcula como $\overrightarrow{\Delta x} = \vec{x} - \vec{x}_0$.*

Calcula el trabajo que ejerce una fuerza constante $F = (\ 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}\ )$ (N)cuando desplaza a un cuerpo desde la posición inicial $\vec{x}_0 = (1,1,1)$ a la posición $\vec{x} = (1,-1,3)$.

$\overrightarrow{\Delta x} = \vec{x} - \vec{x}_0 = (1,-1,3) - (1,1,1) = (0,-2,2)\ (m) \to W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta x} = (3,-2,4) \cdot (0,-2,2) = 0 + 4 + 8 = 12\ J$ ◇

Ejercicio resuelto 9.12. *Aplicación física: Cuando una carga q entra en un campo magnético $\vec{B}$ con una velocidad $\vec{v}$ se ve sometida a la 'fuerza de Lorentz' $F = q\,\vec{v} \times \vec{B}$.*

Encuentra la fuerza de Lorentz que el campo magnético $\vec{B} = (1,2,3)$ (T) ejerce sobre un electrón ($q = 1.6 \times 10^{-19}$ (C)) cuando accede con una velocidad $\vec{v} = (1,-1,1)$ $(m \cdot s^{-1})$.

$$F = q\,\vec{v} \times \vec{B} = 1.6 \times 10^{-19} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.6 \times 10^{-19}(\ 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\ )\ (N)$$

$|\vec{F}| = 1.6 \times 10^{-19}\ \sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2} = 6.08 \times 10^{-18}\ N$ ◇

9.5.2. Ejercicios propuestos

1. Sean $A(1,2,3); B(5,1,-1); C(-7,\lambda,11)$. Calcula: $d(A,B)$; λ para que A, B y C estén alineados, el punto medio de $\overline{AB}$; B', el simétrico de B respecto de A. ¿Cuál debería ser el punto D para que $G = 0,-1,2)$ fuese el baricentro del triángulo ABD?

   Solución: 3; $\lambda = 4$; $M_{AB}(3, 3/2, 1)$; $B'(7,5,5)$; $D(-6,-6,4)$.

2. ¿Cuál de los siguientes vectores tienen la misma dirección? $\vec{x} = (1,-3,2)$; $\vec{y} = (2,0,1)$; $\vec{z} = (-2,6,-4)$; $\vec{u} = (5,-15,10)$; $\vec{v} = (10,-30,5)$

   Solución: $\vec{x}, \vec{z}, \vec{u}$ tienen la misma dirección (paralelos).

3. Sean $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{w} = -\vec{j} + 4\vec{k}$. Calcula:

   a) $|\,\vec{u} - \vec{v}\,|$

   b) $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$

   c) $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot 3\vec{w}$

   d) $-(4\vec{v} - 3\vec{w}) \times 2\vec{v}$

   e) Ángulo de $\vec{u}$ con los ejes coordenados.

   f) Ángulo entre $3\vec{v}$ y $-2\vec{w}$

   g) Volumen de la pirámide que forman los tres vectores.

   Solución: *a)* 8.7; *b)* $(-14, 10, 0)$; *c)* -87; $(54, 96, 24)$; *e)* 122^o_x; 36^o_y; 74^o_z; 128.6^o; $34\ u^3$.

4. Considera los vectores $\vec{u} = (1, -5, 2)$; $\vec{v} = (3, 4, -1)$; $\vec{w} = (5, -2, 1)$ y $\vec{t} = (24, -26, -6)$. Determina α, β y γ para que se cumpla: $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

   Solución: $\alpha = 6$; $\beta = -2$; $\gamma = 4$.

5. Dados los vectores $\vec{u} = (5, -1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 2, -2)$, calcula: $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $|\vec{u}|$; $|\vec{v}|$; la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y el ángulo que forman $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$; el valor de λ para que el vector $(7, 2, \lambda)$ sea perpendicular a $\vec{u}$.

   Solución: -11; 5.48; 3; $-11/3$; 132^o; $\lambda = -33/2$.

6. Dados $\vec{u} = (3, 7, -6)$ y $\vec{v} = (4, 1, -2)$, encuentra un vector perpendicular a $\vec{u}$ y perpendicular a $\vec{v}$, cuya primera componente sea 2.

   Solución: [$\vec{w} = k \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$]; $(2, 9/2, 25/4)$.

7. Dados $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (2, 0, 1)$, encuentra un vector $\vec{w}$ perpendicular a ambos vectores y de módulo $\sqrt{24}$

   Solución: $\vec{w} = \pm(-2, -2, 4)$.

8. $\vec{u} = (1, 2, 3)$; $\vec{v} = (-3, 0, 4)$. Encuentra el vector de proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

   Solución: [$\overrightarrow{Proy}_{\vec{v}}\ (\vec{u}) = (Proy_{\vec{v}}\ (\vec{u}))\ \widehat{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\ \widehat{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\ \frac{1}{v}\ \vec{v}$] $\rightarrow\ \frac{9}{25}\ (-3, 0, 4)$.

9. Para $\vec{u} = (1, 2, 2)$ y $\vec{v} = (-4, 5, -3)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$

c) $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

e) $\vec{u} \times \vec{v}$

f) $|\vec{u} \times \vec{v}|$

g) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

h) El vector de proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

i) $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})$

Solución: $a)$ 0; $b)$ $3y7.1$; $c)$ 90^o; $d)$ -41; $e)$ $(-16, -5, -13)$; $f)$ $15\sqrt{2}$; $g)$ 0; $h)$ $\vec{0}$ $i)$ $(36, -45, 27)$.

10. Encuentra t para que los vectores $\vec{u} = (7, 4, 2)$; $\vec{v} = (1, 14, 0)$ y $\vec{w} = (3, -5, t)$ sean coplanarios el volumen del paralelepípedo que determinan sea cero.

Solución: $t = 1$.

11. Sean $\vec{u} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$. Encuentra el valor de m para que los vectores sean a) paralelos y b) perpendiculares.

Solución: $a)$ $m = -2$; $b)$ $m = 2/5$.

12. Los vectores directores de $\vec{u}$ son $\cos\alpha = 0.2$; $\cos .\beta = 0.31$ y $\cos\gamma = 0.93$, si $|\vec{u}| = 6$, ¿cuáles son sus componentes?

Solución: [$\vec{u} = |\vec{u}| \cdot \widehat{u}$; $\widehat{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ $\rightarrow$] $\vec{u} = /1.2, 1.86, 5.58)$.

13. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $|\vec{u}| = 4$; $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$. ¿Qué ángulo forman?

Solución: 78.5^o.

14. Los vértices de un triángulo son $A(m, 2, -1)$, $B(5, 3, -4)$ y $C(7, m, -2)$. Calcula el valor de m para que el triángulo sea rectángulo en B y determina su área.

Solución: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow m = 1$; (área=prod.catetos/2) $\sqrt{312}/2\ u^2$.

15. Demuestra que $A(t, 2, t); B(2, -t, 0)$ y $C(t, 0, t + 2)$ son los vértices de un triángulo isósceles. Para $t = 2$ calcula su área.

Solución: [$|\overrightarrow{AB}|$; $|\overrightarrow{AC}|$; $|\overrightarrow{BC}|$] $\rightarrow$ isósceles en B; $t = 2 \rightarrow$ área $= 6\ u^2$.

16. Dados $P(1,3,-1)$; $Q(a,2,0)$; $R(1,5,4)$ y $S(2,0,2)$, calcula a para que: a) los cuatro puntos sean coplanarios; b) el volumen del tetraedros de vértices $PQRS$ sea $7\ u^3$.

Solución: *a)* $a = 4/3$; *b)* $a = 10/3 \ \vee \ a = -2/3$.

17. Dados $P(1,2,1)$; $Q(2,3,1)$; $R(0,5,3)$ y $S(-1,4,3)$, prueba que están en un mismo plano, demuestra que el polígono $PQRS$ es un rectángulo y calcula su área.

Solución: $V_{PQRS} = 0\ u^3$; $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QR}$; $A_{PQRS} = \sqrt{24}\ u^2$.

18. Dados los vectores $\vec{u} = (-1,2,3)$ y $\vec{v} = (2,0,-1)$, se pide:

a) Encuentra un vector $\vec{w}_1$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y cuya tercera componente sea positiva.

b) Encuentra un vector $\vec{w}_2$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $vecv$ y que sea ortogonal a $\vec{v}$

Solución: *a)* $\vec{w}_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,(2,-5,4)$; *b)* $\vec{w}_2 = (t, 2t, 2t) = (1,2,2)$ p.e..

19. Dados $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (1,-1,1)$ encuentra el vector $\vec{w}$ sabiendo que es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que $[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = 114$

Solución: $\vec{w} = (15, 6, -9)$.

20. Dados $\vec{u} = (0,1,2)$ y $\vec{v} = (1,-1,0)$ y $\vec{w} = (m + 1.2m, 2 - 3m)$, encuentra el valor de m para que

a) $vecu$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios.

b) $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$

c) el volumen de la pirámide formada por los tres vectores sea $3\ u^3$

Solución: *a)* $m = 0$; *b)* $m = 1$; *c)* $m = \pm 2$.

21. Encuentra un vector $\vec{u}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{v} = (1,-2,3)$ y que determine con el vector $\vec{w}$ un paralelogramo de área $25\ u^2$

Solución: $\vec{u} = \pm\sqrt{5}\,(1,-2,3)$.

22. Encuentra un vector $\vec{a}$ que sea coplanario con $\vec{u} = (2, -1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 3)$, ortogonal a $\vec{w} = (2, 3, 0)$ y cuya primera componente sea 6

Solución: $[\ \vec{a} = k(\vec{u} \times \vec{v})\ ;\ \ \vec{a} \cdot \vec{w} = 0\ ] \ \rightarrow\ \vec{a} = (6, -4, -2))$.

23. Encuentra un vector $\vec{w}$ de módulo 10, perpendicular a $\vec{u} = (-3, 1, 0)$ y que forme un ángulo de 60^o con $\vec{v} = (0, 10, 1)$

Solución: $\vec{w} = (\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \vec{w}_1 = \left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$; $\vec{w}_2 = \left(\sqrt{-\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$.

9.5.3. Cuestiones

Q1. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿se puede asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?

Sol: No, $\vec{u} = (3, 4, 0)$; $\vec{v} = (4, 0, 5)$; $\vec{w} = (0, 3, -1)$

Q2. Demuestra que si $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $\vec{u} \perp \vec{w} \longrightarrow \vec{u} \perp (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})$

Sol: Calcula, $\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})$

Q3. Sabiendo que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, se puede asegurar con seguridad que:

a) Al menos uno de los tres vectores es el vector $\vec{0}$.

b) Los tres vectores son linealmente dependientes, es decir, son coplanarios.

c) El vector $\vec{w}$ se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

d) Por lo menos, dos de los vectores tienen la misma dirección.

Sol: La respuesta correcta es la b).

Q4. Sean $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, .1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

a) Los vectores tienen el mismo módulo.

b) Son ortogonales.

c) Forman un ángulo de 60^o.

d) Tienen la misma dirección

Elige las respuestas correctas.

Sol: Las respuestas correctas son la a) y la c)

Q5. Demuestra que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares dos a dos, el producto escalar $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{u})$ no puede ser negativo.

Sol: Calcula el producto escalar pedido.

Q6. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores que verifican $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

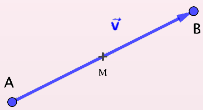
Sol: $\cos\theta = \pm 1 \rightarrow \theta = 0^o \vee \theta = 180^o$.

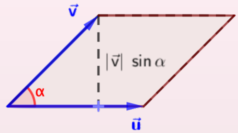
Q7. Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos tales que $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$, ¿cómo son los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

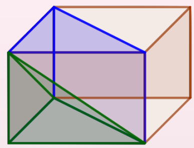
Sol: $\sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0^o \vee \theta = 180^o$, vectores paralelos.

9.6. Resumen

Resumen de vectores







$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A; \quad A + \vec{v} = B; \quad d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|; \quad M = \frac{A+B}{2}$

PRODUCTO ESCALAR: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta} \quad \in \mathbb{R}$

$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \longrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

— Módulo de un vectore: $|\vec{u}| \ = \ +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

— Ángulo entre dos vectores: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|}$

PE en una BON: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x, u_y.u_z) \cdot (v_x, v_y, v_z) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \ \in \mathbb{R}$.

PRODUCTO VECTORIAL: (Anticonmutativo) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u} \quad \wedge \quad \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

PRODUCTO MIXTO: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}|\ \cos\alpha$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

En valor absoluto, el producto mixto mide el volumen del paralelepípedo que forman los tres vectores. El prisma tiene la mitad del volumen y la pirámide o tetraedros, la sexta parte.

Capítulo 10

Rectas y planos

Inscripción en la Academia de Platón

Espacio afín euclídeo

El espacio afín euclídeo es la terna $(E_3, (V_3, \cdot), +)$; ‘ $\cdot$ ’ es el producto escalar (la métrica del espacio) y ‘ + ’ es la ley de Chasles (los vectores desplazan puntos: $A + \vec{v} = B$)

Propiedades afines (en este tema)

Son propiedades afines todas aquellas que se derivan de la estructura vectorial de V_3 , tales como:

— Incidencia — Paralelismo — Intersección

Propiedades euclídeas (próximo tema)

Son propiedades euclídeas todas aquellas que se derivan de la estructura métrica de V_3 , tales como:

— Distancias — Ángulos — Áreas — Volúmenes

Recordemos:

3 vectores $\{\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\ \}$ de V_3 de distintas direcciones y no coplanarios son LI por lo que forman una **base** B_{V_3}:

$$\forall \vec{u} \in V_3\ \exists! x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R},\ \exists! z \in \mathbb{R}\ \therefore\ \vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

Definición 10.1. *Llamamos* ***Sistema de Referencia, $\mathcal{R}$,*** *al concurso de un punto fijo del espacio de puntos, que llamaremos ‘origen’, $\mathcal{O} \in E_3$ y una base del espacio vectorial $B = \{\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\ \} \subset V_3$, es decir:* $\boldsymbol{\mathcal{R} = \{\ \mathcal{O}\ ;\ \{\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\ \}\ \}}$

Vector que une dos puntos: $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2) \rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Los vectores mueven puntos: $\overrightarrow{AB} = B - A \rightarrow B = A + \overrightarrow{AB}$

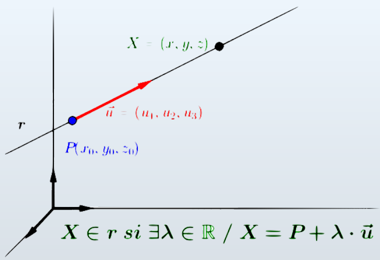
3 puntos están **alineados** si $\overrightarrow{AB}\ ||\ \overrightarrow{AC}$ (componentes proporcionales).

10.1. Ecuaciones de la recta

Definición 10.2. *Dado un vector $\vec{u}$, cualquier vector de su misma dirección, $k \cdot \vec{u}$, $(\ k \in \mathbb{R};\ k \neq 0\ )$ es un* ***vector director****, determina una única dirección.*

La recta en el espacio

Para determinar una recta r es necesario conocer un punto por donde pasa $P(x_0, y_0, z_0)$ y un vector director $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Cualquier punto $X(x, y, z)$ será un punto de la recta r si el vector $\overrightarrow{PX}$ tiene la misma dirección que $\vec{u}$: $\quad \exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \boldsymbol{\overrightarrow{PX} = \lambda\, \vec{u}}$:



$$\boldsymbol{r} \begin{cases} \boldsymbol{P(x_0, y_0, z_0)} \\ \boldsymbol{\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)} \end{cases}$$

Ecuaciones de la recta

ECUACIÓN VECTORIAL: De la propia definición, $\overrightarrow{PX} = \lambda\, \vec{u}$, considerando que $\overrightarrow{PX} = X - P$ y despejando, tenemos que un punto cualquiera $X(x, y, z)$ es un punto de la recta r si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$\boldsymbol{r:\ X = P + \lambda\, \vec{u}}$ Ecuación vectorial.

Una recta no es más que un punto desplazándose libremente a lo largo de una dirección dada.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: Leyendo coordenada a coordenada la ecuación anterior, tenemos:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x \\ y = y_0 + \lambda u_y \\ z = z_0 + \lambda u_z \end{cases} \qquad \text{Ecuaciones paramétricas.}$$

ECUACIONES CONTINUAS: Despejando λ en cada ecuación e igualando, se obtienen las siguientes 3 ecuaciones continuas de las que solo hay que considerar 2 de ellas, siendo la tercera redundante con las anteriores (si en alguna de estas el denominador es cero, también deberá serlo el numerador).

Aunque algebraicamente no tiene sentido un denominador cero, se admiten estas ecuaciones como expresión simbólica de la recta.

$$r: \frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z} \qquad \text{Ecuaciones continuas.}$$

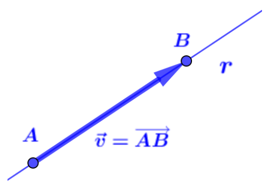
ECUACIONES GENERALES O IMPLÍCITAS: Tomando dos cualesquiera de estas ecuaciones, multiplicándolas en cruz y pasándolo todo a la izquierda (o cualquier pareja de ecuaciones combinación lineal de las anteriores que sea linealmente independiente) o bien eliminando el parámetro de las ecuaciones paramétricas, se obtienen:

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad \text{Ecuaciones generales.}$$

10.1.1. Recta que pasa por dos puntos

La recta que pasa por dos puntos A y B es la recta que pasa por A según la dirección de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:

$$r \begin{cases} A \\ B \end{cases} = \begin{cases} A \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$



Ejemplo 10.1. *Determina las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos* $P(1,2,3)$ *y* $Q(0,-4,2)$*. A partir de las ecuaciones generales encuentra dos puntos de* r *y un vector director de* r*. ¿Es (2,3,-1) un vector director de esta recta?, ¿lo es (3,18,k)?. Averigua cuales de los siguientes puntos pertenecen a la recta:* $A(0,0,0)$*,* $B(0,-4,2)$*,* $C(-1,m,-1)$*.*

$$r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ Q(0,-4,2) \end{cases} \leftrightarrow r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1,-6,-1) \end{cases} \leftrightarrow r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{v}_r = (1,6,1) \end{cases}$$

Tomamos como vector director de r, $\vec{v}_r = -\vec{u}$, por comodidad, ya que tienen la misma dirección.

$$\boldsymbol{(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda\,(1,6,1)} \quad \text{Ec. Vect.}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + \lambda} \\ \boldsymbol{y = 2 + 6\lambda} \\ \boldsymbol{z = 3 + \lambda} \end{cases} \quad \text{Ecs. param.}$$

Tanto en la ecuación vectorial como en las paramétricas, para cada λ se obtiene un punto de la recta: $\lambda = 0 \to R_1 = P(1,2,3)$; $\lambda = 1 \to R_2(2,8,4)$; $\lambda = 2 \to R_3(3,14,5)$; $\lambda = -1 \to R_4 = Q(0,-4,2)$; *etc.* Este tipo de ecuaciones de la recta serán, como veremos más adelante, especialmente indicadas para un tratamiento vectorial de los problemas.

$$r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{v}_r = (1,6,1) \end{cases} \to \frac{x - \textit{punto}}{\textit{vector}}$$

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{1}} \quad \text{Ecs. continuas.}$$

Estas ecuaciones son cómodas para encontrar rápidamente un punto y un vector director de la recta.

Tomando las ecuaciones primera y segunda y las segunda y tercera, p.e., tenemos: $6x - 6 = y - 2$; $x - 1 = z - 3$, que conforman el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{6x - y - 4 = 0} \\ \boldsymbol{x - z + 2 = 0} \end{cases} \quad \text{Ecs. generales.}$$

Ecuaciones de la recta especialmente indicadas para un tratamiento algebraico como veremos más adelante (recta 3D $\equiv$ sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas).

Para encontrar puntos de una recta dada en forma general hay que encontrar soluciones particulares del SEL asociado a r [un punto $(x, y, z) \in r$ si satisface sus ecuaciones generales]. P.e., haciendo $x = 0$ en el sistema anterior, obtenemos $y = -4;\ z = 2 \to (0, -4, 2)$ será un punto de la r. Para encontrar un vector director de r bastaría con encontrar dos puntos y restarlos, lo cual es equivalente *(*)* a buscar una solución del sistema *homogéneo* asociado a r.

(*) $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \in r \to Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D;\ A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 = -D'$ y lo mismo para $B(x_2, y_2, z_2)$. Como $\vec{v}_r = (v_x, v_y, v_z) = \overrightarrow{AB} = B - A$, sus componentes cumplirán que: $Av_x + Bv_y + Cv_z = A(x_1 - x_2) + B(y_1 - \cdots = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_2 + B \cdots) = -D - (-D) = 0$ y análogamente $A'v_x + B'v_y + C'v_z = 0$, es decir, las componentes de $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ satisfacen las ecuaciones del SEL homogéneo asociado a r, $\begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0 \end{cases}$.

$\vec{w}_1 = (2, 3, -1)$ no es vector director de r, ya que $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{6} \neq \frac{-1}{1}$, por lo que $\vec{w}_1 \nparallel \vec{v}_r$.

$\vec{w}_1 = (3, 18, k)$ será vector director de r, si $\frac{3}{1} = \frac{18}{6} = \frac{k}{1}$, de donde si $k = 3\ \ \vec{w}_2 \parallel \vec{v}_r$ y sí sería vector director de r, pero si $k \neq 3\ \ \vec{w}_2 \nparallel \vec{v}_r$ y no sería vector director.

$A(0, 0, 0) \notin r$ pues no verifica sus ecuaciones paramétricas (p.e.),

$$\begin{cases} 0 = 1 + \lambda & \to \lambda = -1 \\ 0 = 2 + 6\lambda & \to \lambda = -1/3 \\ 0 = 3 + \lambda & \to \lambda = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \nexists\lambda \ \to\ A \notin r$$

$B(0, -4, 2) \in r$ pues verifica sus ecuaciones generales (p.e.),

$$\begin{cases} 6 \cdot 0 - (-4) - 4 = 0 \\ 0 - 2 + 2 = 0 \end{cases} \qquad B \in r \quad (B \equiv Q)$$

$C(-1, m, -1) \in r$ si verifica cualesquiera de sus ecuaciones, p.e., las generales:

$$\begin{cases} 6\cdot(-1)1-m-4=0 & \to m=-10 \\ (-1)-(-1)+2=0 & \to \forall m \end{cases} \quad C\in r \leftrightarrow m=-10$$

10.1.2. Ejercicios resueltos (ecuaciones de la recta)

Ejercicio resuelto 10.1. *Determina las ecuaciones de los ejes coordenados.*

$$\text{Eje } OX: \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{v}_x = \vec{i} = (1,0,0) \end{cases}$$

$$(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda\,(1,0,0) \;\text{ E. V.} \qquad \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{E. P.}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0} \;\text{ E. C.} \qquad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{E. G.}$$

$$\text{Eje } OY: \;(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(0,1,0) \leftrightarrow x/0=y/1=z/0 \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{Eje } OZ: \;(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(0,0,1) \leftrightarrow x/0=y/0=z/1 \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

◇

Ejercicio resuelto 10.2. *Encuentra las ecuaciones de la recta r sabiendo que pasa por $A(1,2,3)$ y es paralela a la recta s :* $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$

Una recta queda determinada por un punto por donde pasa, A, lo tenemos, y un vector que le da su dirección, $\vec{v}_r$. Para determinar este vector usamos que *todas las rectas paralelas tienen la misma dirección*, por lo que el vector director de la recta r será el mismo que el de la recta s, $\vec{v}_r = \vec{v}_s$. Necesitamos un vector director de la recta s. Como ésta viene dada en forma general, buscaremos dos puntos, S_1 y S_2 (soluciones particulares del SEL) y, restando, encontraremos un $\vec{v}_s = \overrightarrow{S_1S_2} = S_2 - S_1$. Hubiésemos podido, directamente, encontrar una solución particular del SEL homogéneo asociado a s, $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+4z=2 \end{cases}$, es decir, una solución del sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$.

Dando a z los valores 0 y 1, p.e., y sustituyendo en las ecuaciones generales de s, obtenemos:

$$z=0 \to \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \quad \cdots \quad y=2/5;\ x=3/5 \to S_1(3/5, 2/5, 0)$$

$$z=1 \to \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-3y=-4 \end{cases} \quad \cdots \quad y=4/5;\ x=1/5 \to S_2(1/5, 4/5, 1)$$

De donde $\vec{v}_s = \overrightarrow{S_1S_2} = (-2/5, 2/5, 1) \to$ tomaremos, como vector director de s uno 5 veces más grande (*), $\vec{v}_s = (-2, 2, 5)$

Hemos de buscar las ecuaciones de $r:\begin{cases} A \\ ||s \end{cases} \equiv \begin{cases} A(1,2,3) \\ \vec{v}_r = \vec{v}_s = (-2,2,5) \end{cases}$

$$\boldsymbol{r}:\quad (x,y,z) = (1,2,3)+\lambda(-2,2,5) \leftrightarrow \tfrac{x-1}{-2} = \tfrac{y-2}{2} = \tfrac{z-3}{5} \leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ 5y-2z-4=0 \end{cases}$$

Para las ecuaciones generales hemos tomado los miembros 1 y 2 de las ecs. continuas para la primera ecuación y los miembros 2 y 3 para la segunda ecuación general.

(*) El vector $\overrightarrow{S_1S_2}$ y el vector $5 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$ tienen la misma dirección, luego son el mismo 'vector director', así conseguimos eliminar los molestos denominadores del primer vector. ¡Ojo!, esto solo se puede hacer con vectores **directores**, no con cualquier vector y, mucho menos, con puntos.

◇

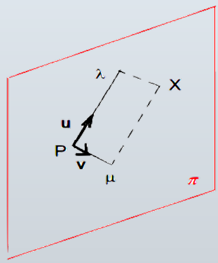
10.2. Ecuaciones del plano

El plano en el espacio

Para determinar una plano π es necesario conocer un punto por donde pasa $P(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores directores (de distinta dirección) $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$; $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Cualquier punto $X(x, y, z)$ será un punto del plano π si el vector $\overrightarrow{PX}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ / $\boldsymbol{\overrightarrow{PX} = \lambda\, \vec{u} + \mu \vec{v}}$:

$$\boldsymbol{\pi :} \begin{cases} \boldsymbol{P(x_0, y_0, z_0)} \\ \boldsymbol{\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)} \\ \boldsymbol{\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)} \end{cases}$$



Dándole la libertad a un punto para moverse a lo largo de una dirección tenemos una recta (1 grado de libertad = 1 parámetro ⇒ 3 [dimensión espacio] − 1=2 ligaduras o ecuaciones generales). Si al punto le damos la opción de moverse según dos direcciones distintas obtenemos un plano (2 grados de libertad = 2 parámetros ⇒ 3-2=1 ligadura, relación entre sus coordenadas o ecuación).

Ecuaciones del plano.

ECUACIÓN VECTORIAL: De la propia definición de *plano*, cualquier punto X del espacio será un punto del plano π si existen dos números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que el vector $\overrightarrow{PX}$ es combinación lineal de los vectores directores del plano $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Como $\overrightarrow{XP} = P - X$, despejando, obtenemos:

$\pi : \; X = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ Ecuación Vectorial.

Un plano no es más que un punto desplazándose libremente a lo largo de dos direcciones dadas.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS, leyendo coordenada a coordenada,

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_0 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_0 + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases} \quad \text{Ecuaciones Paramétricas.}$$

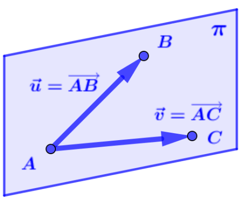
ECUACIÓN GENERAL: O bien al exigir que $\overrightarrow{PX}$ sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (que los tres estén en un mismo plano), que significa que el rango de la matriz formada por los tres vectores sea 2 o que el determinante de dicha matriz sea cero, o bien al eliminar el parámetro de las ecuaciones paramétricas, se obtiene:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0 \overset{*}{\to} Ax + By + Cz + D = 0 \text{ Ecuació General.}$$

(*) La ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$ se obtiene sin más que considerar $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$ y desarrollar el primer determinante por adjuntos de la primera fila.

10.2.1. Plano que pasa por tres puntos

El plano que pasa por tres puntos A, B y C, no alineados, es el plano que pasa por uno cualquiera de ellos, p.e., A y tiene como vectores directores los que le unen con los otros dos puntos: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



$$\pi : \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} = \begin{cases} A \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Ejemplo 10.2. *Encuentra las ecuaciones del plano, en todas sus formas, que pasa por los puntos $P(-2,0,0)$, $Q(0,-1,0)$ y $R(0,0,2)$.*

$$\pi : \begin{cases} P(-2,0,0) \\ Q(0,-1,0) \\ R(0,0,2) \end{cases} \equiv \begin{cases} P(-2,0,0) \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2,-1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PS} = (2,0,2) \rightsquigarrow (1,0,1) \text{ misma dirección} \end{cases}$$

♠ ¡Los vectores, como vectores directores, siempre los podremos simplificar para eliminar molestos denominadores, signos o múltiplos (multiplicar un vector por un número da como resultado un vector de la misma dirección), pero los puntos JAMÁS!

$$\pi : \ (x,y,z) = (-2,0,0) + \lambda(2,-1,0) + \mu(1,0,1) \quad EV;$$

$$\pi : \begin{cases} x = -2 + 2\lambda + \mu \\ y = -\lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad EP$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to -(x+2) + 0 + 0 - (-z + 0 + 2y) = 0 \to$$

$$\pi : \ x + 2y - z + 2 = 0 \quad EG$$

De las ecuaciones paramétricas o la vectorial a un plano es sencillo encontrar puntos y vectores. Los vectores directores son los coeficientes de cada parámetro y los puntos se obtienen al dar valores arbitrarios a λ y μ Para $\lambda = \mu = 0$, las coordenadas del punto son los términos independientes del sistema, los términos que no tienen ni λ ni μ.

Dada la ecuación general de un plano, obtener un punto es encontrar una solución particular de su ecuación general (1 ec. lineal con 3 incógnitas), hay que dar valores arbitrarios a dos de las incógnitas para encontrar la tercera, así, p.e., si $x = 1$ e $y = 1$ en π, tenemos $1 + 2 \cdot 1 - z + 2 = 0 \to z = 5$ y un punto del plano podría ser el $A(1,1,5)$ (comprobar, p.e., que verifica sus ecuaciones paramétricas, es decir, que somos capaces de encontrar un único λ y un único μ que sustituidos en las ecuaciones paramétricas de π nos den el punto A).

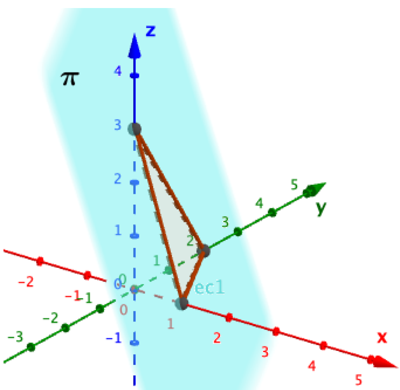
Para encontrar vectores directores de un plano dado por su ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$, o bien buscamos varios puntos como soluciones particulares de esta ecuación y, a partir de ellos, formamos dos vectores de distinta dirección; o bien buscamos dos soluciones, no proporcionales, de la ecuación homogénea asociada al plano, $Ax + By + Cz = 0$.

Ecuación segmentaria de π: Se trata de conseguir que el término independiente sea -1 (dividiendo por $-D \neq 0$), $(A'x + B'y + C'z - 1 = 0)$ así:

$\pi:\ x+2y-z+2=0 \to \frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}-1=0$ es la ecuación segmentaria de π, los denominadores -2, -1 y 2 son, respectivamente, los puntos de corte de π con los ejes cartesianos. (*)

Evidentemente: $\pi \cap OX \to \begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \to x = -2 \to$ $Q(-2,0,0)$ es el corte de π con OX. Análogamente se obtienen $R(0,-1,0)$ corte de π con OY y $S(0,0,2)$ corte de π con OZ.

Si hubiésemos sabido esto en el ejemplo anterior en que nos piden determinar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos, al ser éstos los cortes del plano con los ejes coordenados: $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}-1=0$ es el plano buscado. Por comodidad, multiplicando toda esta ecuación por (-2) tenemos: $\pi:\ x+2y-z-2=0$, que es la ecuación general del plano que allí encontramos.



(*) Dado $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$, los cortes con OX $(y=0,\ z=0)$ son: $Ax+D=0 \to x=-D/A$, análogamente, los cortes con OY y OZ serán $y=-D/B$; $z=-D/C$. Cortes que aparecen directamente en la ecuación general del plano si la dividimos toda ella por $-D$. Así, $\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}+\frac{D}{-D}=\frac{0}{-D} \to \frac{x}{\boldsymbol{-D/A}}+\frac{y}{\boldsymbol{-D/B}}+\frac{z}{\boldsymbol{-D/C}}-1=0$ es la *ecuación segmentaria del plano* y sus denominadores son los cortes de éste con los ejes coordenados.

10.2.2. Vector asociado a un plano

Definición 10.3. *Dado el plano* $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$, *el vector* $\boldsymbol{\vec{n}=(A,B,C)}$ *es un vector perpendicular a* π *que recibe el nombre de* ***vector asociado*** *(o normal) a* π. $\vec{n}\perp\pi$

Recuérdese que la ecuación general de $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$ viene de desarrollar el determinante:

$$0=\begin{vmatrix} x-x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=$$

$$=x\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=Ax+By+Cz+D$$

Teniendo en cuenta el producto vectorial: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\vec{k}=A\,\vec{i}+B\,\vec{j}+C\,\vec{k}$$

Demostramos que $\boxed{\vec{n}=(A,B,C)\perp\pi}$

Ecuación del plano perpendicular a un vector $\vec{n}=(A,B,C)$ que pasa por un punto $P(x_0,y_0,z_0)$:

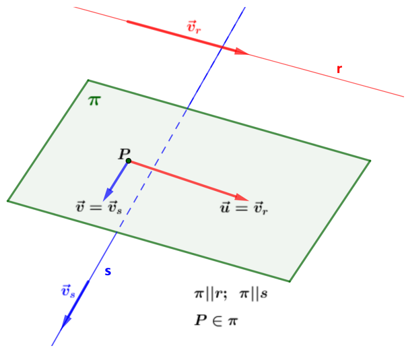
$$\pi : \begin{cases} \perp \vec{n} = (A, B, C) \\ P(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \quad : \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Otra forma sería: $\pi : \ Ax + By + Cz + D = 0$ y determinar D exigiendo que $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi$

Ecuación del plano que pasa por un punto P y es paralelo a dos rectas r y s $(r \not\parallel s)$

Tomamos P como punto y como vectores directores del plano cada uno de los vectores directores de las rectas a las que es paralelo:

$$\pi : \begin{cases} P \\ || \, r \\ || s \end{cases} \quad \equiv \quad \pi : \begin{cases} P \\ \vec{u} = \vec{v}_r \\ \vec{v} = \vec{v}_s \end{cases}$$



* Es importante tener en cuenta que las ecuaciones paramétricas de una recta dependen de 1 parámetro (grado de libertad, una recta está generada por un punto que se puede mover libremente en una dirección, la de su vector director) y las del plano de 2 parámetros (2 grados de libertad, un plano está formado por todas las posiciones que puede ocupar un punto al que se le permite viajar libremente según dos direcciones, las de sus vectores directores). La recta es un objeto de una dimensión y el plano lo es de dos dimensiones. Las restricciones (ecuaciones generales) a las coordenadas (x,y,z) de un punto libre para que representen a una recta o un plano son consecuencia de restar a las tres dimensiones del espacio los grados de libertad del objeto en cuestión, así:

— una recta está formada por 3(dim. espacio) - 1 (grado libertad) = 2 ecuaciones generales [restricciones sobre (x,y,z)].

— un plano está formado por 3(dim. espacio) - 2 (grado libertad) = 1 ecuación general [restricción sobre (x,y,z)].

Visto al revés, el número de parámetros (grados de libertad) de un objeto = 3 (dim. espacio) - número de ecuaciones generales (restricciones) que lo determinan:

— recta: 3-2 ecc. = 1 parámetro; — plano: 3 - 1 ecc- = 2 parámetros.

* Otra cuestión importante a tener en cuenta es que no existen 'las ecuaciones' de una recta o plano sino 'unas ecuaciones' ya que los puntos y vectores que los definen podemos tomarlos distintos tanto para un plano como para una recta. Ahora bien, se tomen las ecuaciones que se tomen, si representan a la misma recta o el mismo plano, todo punto que se obtenga con una de las ecuaciones verificará las otras y viceversa.

Por ejemplo, para la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-3}$, podemos obtener sus ecuaciones generales al igualar primer y segundo miembros y igualar primer y tercer miembros: $r: \begin{cases} x-2y-5=0 \\ 3x+2z-3=0 \end{cases}$ o hubiéramos podido tomar los miembros 1 y 2 y también el 2 y 3, para obtener $r: \begin{cases} x-2y-5=0 \\ 3y+z+6=0 \end{cases}$. O cualquier otra combinación linealmente independiente. Aparentemente parece ser que se trata de rectas distintas pero no, representan a la misma recta. Todo punto que se obtenga con las primeras ecuaciones verifican las segundas ecuaciones y a la inversa. Obviamente, esto también ocurre para las ecuaciones paramétricas, y también con los planos.

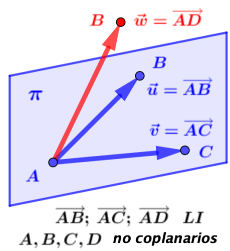
10.2.3. Ejercicios resueltos (ecuaciones del plano)

Ejercicio resuelto 10.3. *Comprueba que los puntos* $A(1,1,1)$, $B(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ *y* $D(0,0,6)$ *son coplanarios.*

Si son coplanarios, el vector $\overrightarrow{AB}$ será combinación lineal de los $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, p.e. De otro modo, el determinante formado por los 3 vectores ha de ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$10-1-1-(1+2+5)=0$$



Otra manera de hacerlo, más larga (inténtese), sería encontrar la ecuación del plano que pasa por 3 de estos puntos y comprobar que el cuarto de ellos verifica esta ecuación.

Este último procedimiento es más rápido si recordamos la ecuación segmentaria de un plano, ya que los puntos B, C y D, por los que pasa un solo plano, son los puntos de corte de éste con los ejes coordenados (solo una coordenada distinta de cero). Con ello, el plano buscado es $x/3 + y/2 + z/6 - 1 = 0$. Ahora debería comprobar si el punto $A(1, 1, 1)$ pertenece o no a este plano, es decir, si verifica o no su ecuación general. En este caso, la respuesta es sí, A está en el plano ya que $\mathbf{1}/3+\mathbf{1}/2+\mathbf{1}/6-1 = 0$, luego los cuatro puntos son coplanarios.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.4. *Encuentra las ecuaciones del plano que pasa por* $P(1, 2, 3)$ *con vectores directores* $\vec{u} = (0, 1, 2)$ *y* $\vec{v} = (1, -1, 3)$

EV y P: $\quad (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 3)$

$$\text{EG:} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to \quad 5x + 2y - z - 6 = 0$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.5. *Ecuación del plano que pasa por* $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ *y* $R(0, 0, 3)$.

Como P, Q y R, al tener dos coordenadas igual a cero, son los cortes del plano π buscado con los ejes cartesianos, usaremos la *ecuación segmentaria* del plano. Así:

$\pi: \ x/1 + y/2 + z/3 - 1 = 0$. Para acomodar esta ecuación, la multiplicaremos toda por el mcm de los denominadores, 6, quedando:

$\pi: \ 6x + 3y + 2z - 6 = 0$, que es la ecuación general del plano buscado.

El modo natural de resolverlo, sería: $\pi \begin{cases} P \\ Q \\ R \end{cases} \equiv \pi \begin{cases} P(1,0,0) \\ \overrightarrow{PQ} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{PR} = (-1,0,3) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to \quad 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.6. *Encuentra las ecuaciones de los planos coordenados.*

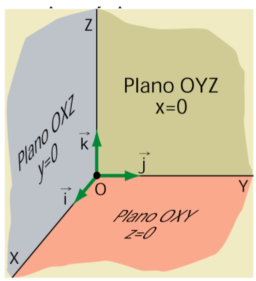
— Plano XY: Necesitamos un punto y dos vectores directores. Si tenemos duda acerca de los vectores directores podríamos buscar tres puntos no alineados del plano: $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$ y $C(0,1,0)$, por ejemplo.

$$\pi_{XY} \begin{cases} A(0,0,0) = \mathcal{O} \\ \overrightarrow{AB} = (1,0,0) = \vec{i} \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,0) = \vec{j} \end{cases} \to$$

$$\pi_{XY}: \quad (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1) : \text{EV (P)}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \pi_{XY}: \quad z = 0 : \text{EG}$$

También hubiésemos podido ver el plano XY como aquel que paso por $(0,0,0)$ y cuyo vector normal o asociado es $\vec{n} = \vec{k} = (0,0,1)$, con lo que la ecuación del plano sería: $0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-0) + 0 \cdot (z-0) = 0 \to z = 0$.



Análogamente:

— Plano XZ: $\quad \pi_{xz}: \ (x,y,z) = (0,0,0) + \theta(1,0,0) + \varphi(0,0,1); \quad \pi_{xz}: \ y = 0$

— Plano YZ: $\pi_{xz}: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \nu(0, 1, 0) + \xi(0, 0, 1)$; $\pi_{xz}: x = 0$

(λ lambda; μ mu; θ theta; φ phi; ν nu; ξ xi)

Plano	**Punto**	**Vectores directores**	**Vector normal**	**Ecuaciones paramétricas**	**Ecuación implícita**
OXY	O(0,0,0)	$\vec{i} = (1,0,0)$ $\vec{j} = (0,1,0)$	$\vec{k} = (0,0,1)$	$OXY \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$	$OXY \equiv z = 0$
OXZ	O(0,0,0)	$\vec{i} = (1,0,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$	$\vec{j} = (0,1,0)$	$OXZ \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$	$OXZ \equiv y = 0$
OYZ	O(0,0,0)	$\vec{j} = (0,1,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$	$\vec{i} = (1,0,0)$	$OYZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$	$OYZ \equiv x = 0$

EJE	**Punto**	**Vector director**	**Ecuaciones paramétricas**	**Ecuación continua**	**Ecuaciones implícitas**
OX	O(0,0,0)	$\vec{i} = (1,0,0)$	$OX \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$OX \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$	$OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
OY	O(0,0,0)	$\vec{j} = (0,1,0)$	$OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$	$OY \equiv \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$	$OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
OZ	O(0,0,0)	$\vec{k} = (0,0,1)$	$OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$	$OZ \equiv \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$	$OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

◇

Ejercicio resuelto 10.7. *Plano que pasa por $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{w} = (-1, 0, 2)$*

$$\pi : \begin{cases} P(1, 2, 3) \\ \perp \vec{w} = (-1, 0, 2) \end{cases} \equiv \pi : \begin{cases} P(1, 2, 3) \\ \vec{n} = \vec{w} = (-1, 0, 2) \end{cases}$$

$-1x + 0y + 2z + D = 0$; $P \in \pi : \ -1(1) + 0(2) + 2(3) + D = 0 \rightarrow D = -5$ $\Rightarrow \pi : \ -x + 2y - 5 = 0$

De otro modo: $-1(x-1)+0(y-2)+2(z-3) = 0 \Rightarrow \pi : \ -x+2z-5 = 0$ ◇

Ejercicio resuelto 10.8. *Encuentra el plano que para por $P(1,2,3)$ y es paralelo a las rectas $r: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ y la recta $s: \begin{cases} x - 5z - 2 = 0 \\ y + 6z + 7 = 0 \end{cases}$.*

Como r viene en forma continua, un vector director es $\vec{v}_r = (1, -1, 3)$.

Para buscar un vector director de s, dada en forma general, podemos buscar dos puntos (soluciones particulares del SEL de s) o buscar una solución particular del SEL homogéneo asociado a s: $\begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases}$. Haciendo, p.e., $z = 1$, obtenemos $x = 5,\ y = -6$, por lo que tomamos como $\vec{v}_s = (5, -6, 1)$

$$\pi \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{u} = \vec{v}_s = (1,-1,3) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (5,-6,1) \end{cases} \rightarrow (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,-1,3) + \mu(5,-6,1)$$

Que es la ecuación vectorial del plano, o paramétricas si las leemos coordenada a coordenada: $\pi \begin{cases} x = 1 + \lambda + 5\mu \\ y = 2 - \lambda - 6\mu \\ z = 3 + 3\lambda + \mu \end{cases}$

Por último, la ecuación general la obtendremos al desarrollar el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow\ 17x + 14y - z - 42 = 0$$

Cualquiera de estas tres formas de expresar π hubiese valido pues no preguntaban por una cualquiera de ellas.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.9. *Dado el plano $\pi: \ 2x - 3y + 4z - 12 = 0$, encuéntrense los cortes con los ejes coordenados.*

$$\pi \cap OX : \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 12 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6 \ \Rightarrow \ \pi \cap OX \ = \ (6, 0, 0)$$

$$\pi \cap OY : \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y = -4 \ \Rightarrow \ \pi \cap OX \ = \ (0, -4, 0)$$

$$\pi \cap OZ : \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow z = 3 \ \Rightarrow \ \pi \cap OX \ = \ (0, 0, 3)$$

De otro modo: dividiendo la ecuación general por 12, tenemos: $\frac{x}{6} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{3} - 1 = 0$, ecuación segmentaria de π; luego el plano corta a los ejes en 6 al eje X, en -4 al Y y en 3 al Z, es decir, en los puntos en los puntos $(6, 0, 0), (0, -4, 0), (0, 0, 3)$. $\diamond$

Ejercicio resuelto 10.10. *La recta* $r : \begin{cases} x + y + z = 0 & : \pi \\ 2x - 3z = 5 & : \sigma \end{cases}$ *está formada por la intersección de 2 planos, encontrar un vector director de misma.*

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k} = (-3, 5, -2)$$

$\diamond$

10.3. Posiciones relativas de recta y planos

Hablamos de posiciones relativas para indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común. Las situaciones básicas a reconocer son:

1. Secantes: Las figuras tienen uno o más puntos en común.

2. No secantes: Las figuras no tienen puntos en común.

3. Coincidentes: Todos los puntos son comunes, por tanto son la misma figura.

4. Contenidas: Todos los puntos de una figura pertenecen a la segunda, pero no a la inversa.

Además, podemos clasificarlas en función de su dirección como:

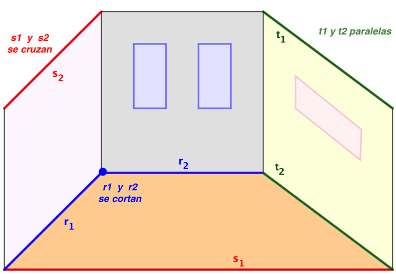
1. Paralelas: Todos los puntos de una figura están a la misma distancia de la otra.

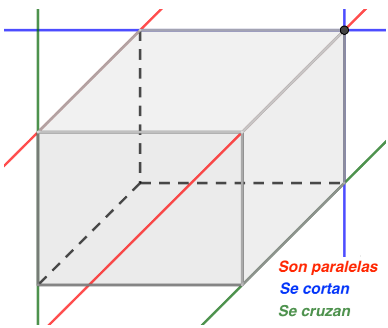
2. Perpendiculares: Las figuras forman un ángulo de 90°.

Algebraicamente, para determinar los puntos en común de dos figuras (si existen) se resolverá el sistema formado por sus ecuaciones.

10.3.1. Posiciones relativas de dos rectas

En el plano, dos rectas, además de la posición trivial de que sean coincidentes (todos los puntos en común, son la misma recta) pueden ocupar dos posiciones más: cortarse en un punto (rectas secantes, hay que averiguar el punto de intersección resolviendo el sistema formado por ambas rectas) y ser rectas paralelas (ningún punto en común). En total (incluyendo el caso trivial), dos rectas en el plano pueden ocupar una de estas 3 posiciones: *coincidentes*, *secantes (se cortan en un punto)* o *paralelas*. En el espacio hay una 4^a posición más en que las rectas no tienen ningún punto en común, son las rectas que *se cruzan en el espacio*.





Veremos dos modos de averiguar las posiciones relativas de dos rectas: el método vectorial (más geométrico) y el método algebraico.

— MÉTODO VECTORIAL:

Dadas dos rectas r y s, las escribimos (si no lo están) en forma vectorial o paramétrica, pues nos interesan un punto y un vector director de cada una de ellas:

$r : \begin{cases} P_r \\ \vec{v}_r \end{cases}$ $\qquad s : \begin{cases} P_s \\ \vec{v}_s \end{cases}$ Nos hacemos la pregunta ¿es: $\vec{v}_r \;||\; \vec{v}_r$?

- Respuesta: SÍ $\rightarrow$ las rectas r y s son paralelas o coincidentes.

  Para discernir entre estas dos posibilidades nos formulamos otra pregunta: Dado un $P_r \in r \;\; \rightarrow \;\;$ ¿ $P_r \in s$?, es decir, ¿un punto cualquiera de una recta, ¿está en la otra? (Recordar que un punto pertenece a un a recta si verifica sus ecuaciones)

  - Respuesta: SÍ $\rightarrow$ Tenemos dos rectas paralelas con un punto en común $\rightarrow$ Todos sus puntos han de ser comunes y las rectas son coincidentes ($r \equiv s$)
  - Respuesta: NO $\rightarrow$ Tenemos dos rectas paralelas con un punto no común $\rightarrow$ Todos sus puntos han de ser no comunes y las rectas son paralelas ($r \;||\; s$)

- Respuesta: NO $\rightarrow$ las rectas r y s se cortan en un punto o se cruzan en el espacio.

  Para discernir entre las dos posibilidades empezamos formando un nuevo vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ y nos preguntamos si las rectas están contenidas en un mismo plano, con lo que se cortarán en un punto y resultará que el nuevo vector formado $\overrightarrow{P_rP_s}$ es combinación lineal de $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, por lo que el determinante formado por los tres será cero. Si $Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) \neq 0$ los tres vectores son libres, no son coplanarios y las rectas r y s se cruzarán en el espacio. Resumiendo, nos preguntamos si ¿ $Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = 0$?

- Respuesta: SÍ $\rightarrow$ r y s se cortan en un punto. La forma más rápida de encontrar este punto de corte P es igualar las ecuaciones paramétricas de ambas rectas. $(r \cap s = P)$

- Respuesta: NO $\rightarrow$ r y s se cruzan en el espacio.

$$¿\ \vec{v}_r \ || \ \vec{v}_s\ ? \ \rightarrow \begin{cases} \text{SÍ} \ \rightarrow ¿\ P_r \in s\ ? \ \rightarrow \begin{cases} \text{SÍ} \ \rightarrow r \equiv s \\ \text{NO} \ \rightarrow r \ || \ s \end{cases} \\ \text{NO} \ \rightarrow ¿\ Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = 0\ ? \ \rightarrow \begin{cases} \text{SÍ} \ \rightarrow r \cap s = P \\ \text{NO} \ \rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan} \end{cases} \end{cases}$$

— MÉTODO ALGEBRAICO:

Dadas dos rectas r y s, las escribimos (si no lo están) en forma general o implícita, pues nos interesan sus 4 ecuaciones generales con las que formaremos un SEL de 4 ecuaciones y 3 incógnitas del que estudiaremos sus posibles soluciones.

$$r: \begin{cases} A_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2 + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} A_3 + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4 + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Formamos el sistema, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$\text{SEL:} \begin{cases} A_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2 + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3 + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4 + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & -D_4 \end{array}\right) \leftarrow A^*$$

Estudiando los rangos se tiene que ($rg(A) \geq 2$, ya que las ecuaciones representan a rectas):

- Coincidentes: $(r \equiv s)$ $\quad rg(A) = 2 = rg(A^*)$ SCI, solo quedan dos ecuaciones libres, una recta, por lo que ambas son coincidentes.

- Paralelas: $(r \ || \ s)$ $\quad rg(A)2 \neq rg(A^*) = 3$ SI solo quedan dos ecuaciones libres, una sola dirección: las rectas son paralelas.

- Secantes: $(r \cap s = P)$ $\quad rg(A) = 3 = rg(A^*) = num.\ incog$ SCD, la solución es un único valor para (x, y, z), un punto, el punto común de las rectas que se cortan (secantes).
- Se cruzan: $\quad r(A) = 3 \neq rg(A^*) = 4$ SI pero las rectas no son paralelas, por lo que se cruzan en el espacio.

	$rg(A) = 2$	$rg(A) = 3$
$rg(A*) = 2$	$r \equiv s$	—
$rg(A*) = 3$	$\|\|$	$r \cap s$
$rg(A*) = 4$	—	r y s se cruzan

Ejemplo 10.3. *Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas:*

a) $\quad r:\ (3 - 5\lambda, 2 + \lambda, 5 - \lambda) \qquad s:\ (1 + 10\mu, 4 - 2\mu, 2\mu)$

b) $\quad r:\ (21 - 5\lambda, \lambda, 4 - \lambda) \qquad s:\ (1 + 10\mu, 4 - 2\mu, 2\mu)$

c) $\quad r:\ (2 - 3\lambda, 3 + 5\lambda, \lambda) \qquad s:\ (1 - \mu, \mu, 5)$

d) $\quad r:\ (2 - 3\lambda, 3 + 5\lambda, \lambda) \qquad s:\ (1 - \mu, 2\mu, 5)$

Puesto que las rectas viene dadas en forma vectorial (paramétrica), usaremos el método gráfico que es más claro y más rápido. Repetiremos algún apartado por el método algebraico.

—— a) $\quad r: \begin{cases} P_r(3, 2, 5) \\ \vec{v}_r = (-5, 1, -1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} P_s(1, 4, 0) \\ \vec{v}_r = (10, -2, 2) \end{cases}$

$\vec{v}_r \mid\mid \vec{v}_s:\ \frac{10}{-5} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} \ \rightarrow\ ¿\ P_r \in s\ ?$

$$\text{ecc. param. } s: \begin{cases} 1 + 10\mu & = 3 \rightarrow \mu = 1/5 \\ 4 - 2\mu & = 2 \rightarrow \mu = 1 \\ 2\mu & = 5 \rightarrow \mu = 5/2 \end{cases} \quad \nexists \mu \therefore\ P_r \notin s \ \rightarrow \ \boxed{r \mid\mid s}$$

>>>>>>> Las recta r y s son paralelas.

—— b) $\quad r: \begin{cases} P_r(21, 0, 4) \\ \vec{v}_r = (-5, 1, -1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} P_s(1, 4, 0) \\ \vec{v}_r = (10, -2, 2) \end{cases}$

$\vec{v}_r \mid\mid \vec{v}_s : \quad \frac{10}{-5} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} \ \rightarrow$ ¿ $P_r \in s$?

ecc. param. $s : \begin{cases} 1 + 10\mu & = 21 \rightarrow \mu = 2 \\ 4 - 2\mu & = 0 \rightarrow \mu = 2 \\ 2\mu & = 4 \rightarrow \mu = 2 \end{cases} \ \mu = 2 \therefore \ \ P_r \in s \ \rightarrow \ \boxed{r \equiv s}$

\>>>>>>> Las recta r y s son coincidentes.

—— c) $\quad r : \begin{cases} P_r(2,3,0) \\ \vec{v}_r = (-3,5,1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} P_s(1,0,5) \\ \vec{v}_r = (-1,1,0) \end{cases}$

$\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s : \quad \frac{-1}{-3} \neq \frac{1}{5} \neq \frac{0}{1} \ \rightarrow \ \overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = (1,3,-5)$

$$Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \ \rightarrow \ \boxed{r \text{ y } s \text{ se cruzan}}$$

\>>>>>>> Las recta r y s se cruzan en el espacio.

—— d) $\quad r : \begin{cases} P_r(2,3,0) \\ \vec{v}_r = (-3,5,1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} P_s(1,0,5) \\ \vec{v}_r = (-1,2,0) \end{cases}$

$\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s : \quad \frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{0}{1} \ \rightarrow \ \overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = (1,3,-5)$

$$Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ \boxed{r \cap s = P}$$

Para encontrar el punto de corte, igualamos las ecuaciones paramétricas de r y s:

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu & 2 - 3(5) = 1 - (14) \\ 3 + 5\lambda = 2\mu & \mu = 14 \quad \uparrow \\ \lambda = 5 & \uparrow \end{cases}$$

Con $\lambda = 5 \rightarrow r \ \ \vee \ \ \mu = 14 \rightarrow s :$ $\qquad \boxed{P(-13,28,5) = r \cup s}$

\>>>>>>> Las recta r y s son secantes, se cortan en $P(-13,28,5)$.

*** Repetimos el estudio de este último apartado por el MÉTODO ALGEBRÁICO. Para ello necesitamos tener las rectas r y s descritas por sus ecuaciones generales:

$$r : \begin{cases} P_r(2,3,0) \\ \vec{v}_r = (-3,5,1) \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1} \rightarrow \begin{cases} x + 3z = 2 \\ y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} P_s(1,0,5) \\ \vec{v}_r = (-1,2,0) \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{0} \rightarrow \begin{cases} z = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$r \cap s : \begin{cases} r : \begin{cases} x + 3z & = 2 \\ y - 5z & = 3 \end{cases} \\ s : \begin{cases} z & = 5 \\ 2x + y & = 2 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \leftarrow A^*$$

Como A^* es cuadrada, veamos si tiene rango máximo:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [F4 \rightarrow F4 - F2] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$=$ (desarrollo Laplace por adjuntos de la segunda columna) $=$

$$= 1 \cdot ad_{22} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \; M_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= -1 + 30 - (4 + 25) = 0$, luego $rg(A^*) < 4$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (diagonal) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \neq 0$, tenemos que

$rg(A) = rg(A^*) = 3 = num.\ incog. \rightarrow SCD$, resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -13; \; x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 28; \; x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{1} = 5$$

Luego, las rectas r y s son secantes, se cortan en $r \cap s = P(-13, 28, 5)$

10.3.2. Ejercicios resueltos (Posiciones relativas de dos rectas)

Ejercicio resuelto 10.11. *determina el valor del parámetro k para que las siguientes rectas sean paralelas:*

$$r: \ X = (5, 2, -7) + \lambda(2, -1, 1) \ ; \qquad s: \begin{cases} x + ky + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Vamos a usar el método vectorial. Para ello necesitamos dos puntos de s, soluciones particulares de sus ecuaciones generales:

$$S_1: \quad y = 0 \to s: \begin{cases} x + z = -2 \\ x - 3z = 2 \end{cases} \quad \to 4z = -4; \ z = -1 \to x = -1$$

$$S_2: \quad y = 1 \to s: \begin{cases} x + z = -2 - k \\ x - 3z = 3 \end{cases} \quad \to 4z = -5-k; \ z = \tfrac{-5-k}{4} \to x = \tfrac{-3-3k}{4}$$

Tomaremos como punto de la recta s a $P_s = S_1 = (-1, 0, -1)$ y como vetor director de la recta s tomaremos uno proporcional a $\overrightarrow{S_2S1} = S_2 - S_1 = (\frac{-3-3k}{4}, 1, \frac{-5-k}{4}) - (-1, 0, -1) = (\frac{1-3k}{4}, 1, \frac{-1-k}{4})$, por lo que $\vec{v}_s = 4\overrightarrow{S_2S1} = (1 - 3k, 4, -1 - k)$.

$$r: \begin{cases} P_r(5, 2, -7) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases} \quad ; \qquad s: \begin{cases} P_s(-1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (1 - 3k, 4, -1 - k) \end{cases}$$

Veamos si $\vec{v}_r$ es o no paralelo a $\vec{v}_s$:

$$\frac{1 - 3k}{2} \overset{\circ}{=} \frac{4}{-1} \overset{\triangle}{=} \frac{-1 - k}{1} \to \begin{cases} {}^{\circ)} \ -1 + 3k = 8 \to k = 3 \\ {}^{\triangle)} \ -1 + k = 4 \to k = 3 \end{cases}$$

Luego, si $k = 3$, las rectas r y s son paralelas o coincidentes. Para discernir entre estos dos casos, veamos si un punto P_r de la recta r está o no en la recta s, es decir, si verifica o no las ecuaciones generales de s:

$$¿\ P_r \in s\ ? \to s(\boldsymbol{k=3}) : \begin{cases} x+\mathbf{3}y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases} \to \begin{cases} 5+3(2)-7+2=6\neq 0 \\ 5-2-3(-7)-2=22\neq 0 \end{cases}$$

Luego, para $\to \boldsymbol{k=3}$, $Pr \notin s$ y las rectas son paralelas, $\boldsymbol{r}\ ||\ \boldsymbol{s}$.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.12. *Determina el valor de k para que las siguientes rectas se corten y averigua el punto de corte:*

$r:\ \{\ x+2y+z=3;\ x-5y-z=-1\ \};\quad s:\ \{\ 2x+y=2;\ x+y+kz=5\ \}$

ALGEBRÁICAMENTE: (las rectas vienen dadas en forma general) Si las rectas r y s se cortan en un punto P es porque el SEL formados por ambas rectas tiene una solución única (el punto P), se ha tretar de un SCD $\to rg(A)=rg(A^*)=3$, por lo que $|A^*|=0$:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & k & 5 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2 \to F2-F1 \\ F3 \to F3-2F1 \\ F4 = F4-F1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & k-1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & -2 & -4 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & k-1 & 2 \end{vmatrix} = -16k+32=0 \leftrightarrow k=2$$

Luego, para k=2 las rectas r y s se cortan en un punto. Para averiguarlo hay que resolver el SEL.

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-5y-z=-1 \\ 2x+y=2 \end{cases} \to \begin{cases} 1^a+2^a: & 2x-3y=2 \\ 3^a): & 2x+y=2 \end{cases} \to \begin{cases} 4y=0 \to y=0 \\ x=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Solución: $\boldsymbol{r \cap s \equiv P(1,0,2)}$

VECTORIALMENTE: Necesitamos punto y vector de cada recta. Como vienen dadas en forma general, buscaremos dos puntos de cada una de ellas.

$$r\begin{cases} y=0 \begin{cases} x+z=3 \\ x-z=-1 \end{cases} \to x=1;\ z=2: \quad R_1(1,0,2) \\ y=1 \begin{cases} x+z=1 \\ x+z=4 \end{cases} \to x=5/2;\ z=-3/2 \ \ R_2(5/2,1,-3/2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R_1R_2}=R_2-R_1=(3/2,1,-7/2)\to \boldsymbol{r:} \begin{cases} \boldsymbol{P_r=R_1=(1,0,2)} \\ \boldsymbol{\vec{v}_r=2\overrightarrow{R_1R_2}=(3,2,-7)} \end{cases}$$

$$s\begin{cases} z=0 \begin{cases} 2x+y=2 \\ x+y=5 \end{cases} \to x=-3;\ y=8: \quad S_1(-3,8,0) \\ z=1 \begin{cases} 2x+y=2 \\ x+y=5-k \end{cases} \to x=-3+k;\ y=8-2k \ \ S_2(-3+k,8-2k,1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{S_1S_2}=S_2-S_1=(k,-2k,1)\to \boldsymbol{s:} \begin{cases} \boldsymbol{P_r=R_1=(-3,8,0)} \\ \boldsymbol{\vec{v}_r=\overrightarrow{R_1R_2}=(k,-2k,1)} \end{cases}$$

¿ $\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$?: $\frac{k}{3}=\frac{-2k}{-2}=\frac{1}{-7}$. Igualando el primer y tercer miembro se obtiene $k=-3/7$, pero al igualar segundo y tercer término se obtiene $k=-1/7$, por lo que $r \not\parallel s$ y las rectas r y s se cortan o se cruzan.

$\overrightarrow{P_rP_s}=P_s-P_r=(-3,8,0)-(1,0,2)=(-4,8,-2)$

$$\det\left(\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right)=\begin{vmatrix} -4 & -8 & -2 \\ 3 & 2 & -7 \\ k & -2k & 1 \end{vmatrix}=16k-32=0\leftrightarrow k=2$$

Luego las rectas r y s se cortan si $k=2$. Para encontrar el punto de intersección (corte) de ambas rectas igualaremos sus ecuaciones paramétricas:

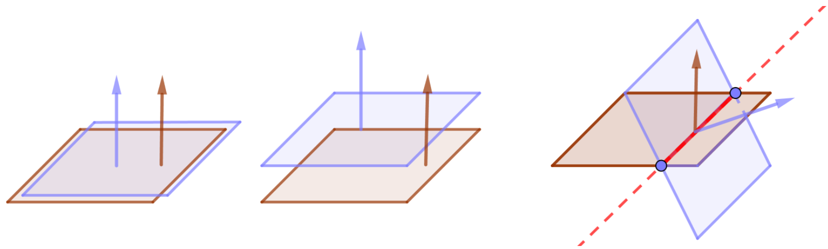
$$r\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2-7\lambda \end{cases} ; \quad s(k=2)\begin{cases} x=-3+2\mu \\ y=8-4\mu \\ z=\mu \end{cases}$$

$\begin{cases} 1+3\lambda & = -3+2\mu \\ 2\lambda & = 8-4\mu \\ 2-7\lambda & = \mu \end{cases}$ $\rightarrow$ 2Ec(1)+Ec(2): $\lambda = 0$, sustituyendo en segunda ecuación $\mu = 2$ y comprobamos que se verifica la tercera ecuación: $2-7(0)=2$; sí se verifica.

Con $\lambda = 0$ vamos a las ecuaciones paramétricas de r (o con $\mu = 2$ a las de s) y encontramos el punto de corte: $\boldsymbol{r \cap s \equiv P(1,0,2)}$

$\diamond$

10.3.3. Posiciones relativas de dos planos



Para pensar las posiciones relativas que pueden ocupar dos planos en el espacio basta con tomar dos hojas de papel y pensar que, al igual que un lápiz puede servir para imaginarse una recta si se le prolonga indefinidamente, prolongamos los planos indefinidamente en sus dos dimensiones. Los papeles (planos) pueden estar pegados, 'planos coincidentes'; no cortarse jamás, 'planos paralelos' y, como última posición, si los prolongamos indefinidamente, acabaran cortándose ...'en una recta', las ecuaciones generales de la cual, dos ecuaciones, serán las ecuaciones generales de cada uno de los planos que la forman.

Como en el caso de las posiciones relativas de dos rectas, vamos a ver un 'método vectorial', atendiendo a los vectores normales de cada plano, y un 'método algebraico', atendiendo al SEL formado por las dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, una de cada plano.

MÉTODO VECTORIAL:

Dados dos planos π y σ, nos interesa conocer de ellos un punto por donde pasan y sus vectores asociados:

$$\pi : \begin{cases} P_\pi \\ \vec{n}_\pi \end{cases} ; \qquad \sigma : \begin{cases} P_\sigma \\ \vec{n}_\sigma \end{cases} \qquad \text{Nos preguntamos: ¿ } \boldsymbol{\vec{n}_\pi \ || \ \vec{n}_\sigma} \text{ ?}$$

- Respuesta: SÍ $\rightarrow$ Los planos son paralelos o coincidentes. Para discernir entre estos dos casos nos preguntamos si un punto cualquiera de uno de ellos está o no en el otro plano: ¿ $\boldsymbol{P_\pi \in \sigma}$?
  - Respuesta: SÍ $\rightarrow$ Los planos son el mismo, coincidentes: $\pi \equiv \sigma$
  - Respuesta: NO $\rightarrow$ Los planos son paralelos: $\pi \ |1 \ \sigma$
- Respuesta: NO $\rightarrow$ Los planos se cortan en una recta r de ecuaciones generales: $r : \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases}$.

$$\pi \ , \ \sigma \quad \begin{cases} \vec{n}_\pi \ || \ \vec{n}_{sigma} \rightarrow \begin{cases} P_\pi \in \sigma \rightarrow \pi \equiv \sigma \\ P_\pi \notin \sigma \rightarrow \pi \ |1 \ \sigma \end{cases} \\ \vec{n}_\pi \ \not{||} \ \vec{n}_{sigma} \rightarrow \pi \cap \sigma \equiv r \end{cases}$$

MÉTODO ALGEBRAICO:

Dados dos planos π y σ, nos interesa conocer de ellos sus ecuaciones generales, para formar un sistema de ecuaciones lineales SEL del que vamos a estudiar sus posibles soluciones.

$$\begin{cases} \pi \ : \ Ax + By + Cz + D & = 0 \\ \sigma \ : \ A'x + B'y + C'z + D' & = 0 \end{cases} \rightarrow A = \left[\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{array}\right] \leftarrow A^*$$

- $rg(A) = 1 = rg(A^*) \rightarrow SCI$: 1 grado de libertad, $\pi \equiv \sigma$ Planos coincidentes: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
- $rg(A) = 1 \neq rg(A^*) = 2 \rightarrow SI$: $\pi \ || \ \sigma$ Planos paralelos: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

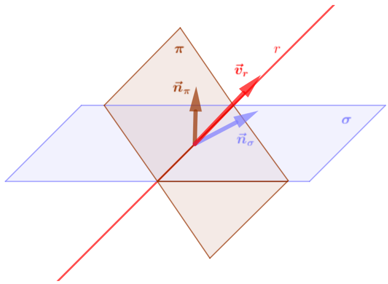
- $rg(A) = rg(A^*) = 2 \to SCI:$ 2 grados de libertad, $\quad \pi \cap \sigma = r$
  Los planos se cortan en una recta de ecuación:
  $$r : \begin{cases} \pi \ : \ Ax + By + Cz + D & = 0 \\ \sigma \ : \ A'x + B'y + C'z + D' & = 0 \end{cases}$$

Vector director de una recta r dada por sus ecuaciones generales

$$\text{Sea } r : \begin{cases} \pi \ : \ Ax + By + Cz + D & = 0 \to \vec{n}_\pi = (A, B, C) \\ \sigma \ : \ A'x + B'y + C'z + D' & = 0 \to \vec{n}_\sigma = (A', B', C') \end{cases}.$$

Como una recta se puede interpretar como la intersección de dos planos, como acabamos de ver, y como cada plano tiene su vector asociado que es perpendicular al mismo, debido a que el producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ambos, podremos considerar siempre que *el vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores asociados de los planos que la definen*:

$$\boldsymbol{\vec{v}_r = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}}$$



Ejemplo 10.4. *Encuentra las posiciones relativas de los siguientes planos:*

$$a) \begin{cases} \pi \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ \sigma \equiv x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad b) \begin{cases} \pi \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ \sigma \equiv -4x - 6y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \pi \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ \sigma \equiv -4x - 6y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

— a) $\begin{cases} \pi \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ \sigma \equiv x - y + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \vec{n}_\pi = (2, 3, -1) \\ \vec{n}_\sigma = (1, -1, 0) \end{cases} \to$

$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{0} \to \vec{n}_\pi \not\parallel \vec{n}_\sigma \Rightarrow \pi \cap \sigma = r : \begin{cases} (\pi)\ 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ (\sigma)\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

Los planos se cortan en una recta.

— b) $\begin{cases} \pi \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ \sigma \equiv -4x - 6y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \vec{n}_\pi = (2, 3, -1) \\ \vec{n}_\sigma = (4, -6, 2) \end{cases} \to$

$\frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} \to \vec{n}_\pi \mid\mid \vec{n}_\sigma \quad P_\pi = (0, 0, -2) : -4(0) - 6(0) + 2(-2) + 1 = -3 \neq 0 \to P_\pi \notin \sigma \Rightarrow \pi \mid\mid \sigma$

Los planos son paralelos.

— c) $\begin{cases} \pi \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ \sigma \equiv -4x - 6y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \vec{n}_\pi = (2, 3, -1) \\ \vec{n}_\sigma = (4, -6, 2) \end{cases} \to$

$\frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} \to \vec{n}_\pi \mid\mid \vec{n}_\sigma \quad P_\pi = (0, 0, -2) : -4(0) - 6(0) + 2(-2) + 4 = 0 \to P_\pi \in \sigma \Rightarrow \pi \equiv \sigma$

Los planos son coincidentes.

Para el estudio algebraico, estúdiense que los rangos de:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1(-4) & -1(-6) & 0(2) & -1(4) \end{array}\right] \leftarrow A^*$$

10.3.4. Ejercicios resueltos (Posiciones relativas de dos planos)

Ejercicio resuelto 10.13. *Calcular el plano paralelo a* $x - y + z - 1 = 0$ *que pasa por el origen de coordenadas.*

$x - y + z + k = 0;\ \ (0, 0, 0) \in \pi : \ \ 0 - 0 + 0 + k = 0 \to k = 0$

El plano buscado es $x - y + z = 0$. ◇

Posiciones relativas de tres planos

$$\pi_1 : \begin{cases} P_{\pi_1}(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{n}_{\pi_1} = (A_1, B_1, C_1) \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} P_{\pi_2}(x_2, y_2, z_2) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (A_2, B_2, C_2) \end{cases} \quad ; \pi_3 : \begin{cases} P_{\pi_3}(x_3, y_3, z_3) \\ \vec{n}_{\pi_3} = (A_1, B_1, C_1) \end{cases}$$

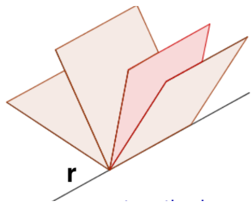
$$\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \quad \pi_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Para visualizar sistemáticamente las 8 posibles posiciones, piénsese en añadir un tercer plano a cada una de las tres posibles posiciones relativas que pueden ocupar dos de ellos. Para el estudio analítico es necesario una combinación de métodos albegraicos y vectoriales.

Haz de planos

HAZ DE PLANOS SECANTES:

Llamamos haz de planos secante en una recta r como el conjunto de todos los planos que contienen a r.



Toda recta r se puede expresar como intersección de dos planos:

$$r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C + z + D' = 0 \end{cases}$$

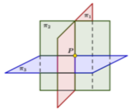
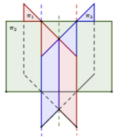
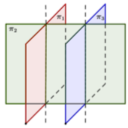
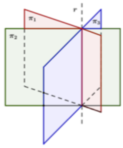
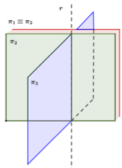
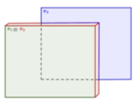
Cualquier otro plano del haz debe contener a la recta, por tanto, su ecuación debe ser combinación lineal de las dos anteriores por lo que la ecuación del haz de planos secantes es:

$$\pi_r \ : \ \alpha\cdot(Ax+By+Cz+D)+\beta\cdot(A'x+B'y+C'z+D') = 0, \text{ con } \alpha \ y\beta \ \in \mathbb{R}.$$

Como α y β no pueden ser simultáneamente nulos (no habría recta), podemos reescribir la ecuación del haz de planos secantes como:

$$\boxed{\pi_r \ : \ (Ax + By + Cz + D) + \lambda \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0, \text{ con } \lambda \ \in \mathbb{R}}$$

El concepto de haz de planos es muy útil en la resolución de determinados problemas geométricos. En la mayoría de casos, el concepto de haz

Rangos	SEL		Posiciones
rg(A)=3 rg(A*)=3	SCD	Se corta en un unto	
rg(A)=2 rg(A*)=3	S I	Se cortan en una recta dos a dos formando un prisma	
		Dos paralelos y uno que corta a ambos	
rg(A)=2 rg(A*)=2	S C I	Los tres se cortan en una recta	
		Dos paralelos y el tercero los corta en una recta	
rg(A)=1 rg(A*)=2	S I	Tres planos paralelos	
		Dos planos coincidentes y el tercero paralelo	
rg(A)=1 rg(A*)=1	S C I	Los tres planos son coincidentes	

Posición relativa de tres planos

de planos sirve para determinar un plano desconocido que casi nunca es ninguno de los planos que se utilizan para formar el haz por lo que dividir todo el haz por uno de los parámetros (α ; $\lambda = \beta/\alpha$) y tener el haz dependiente de solo un parámetro (λ) en lugar de dos. Si en alguna ocasión este procedimiento falla, inmediatamente consideraríamos la opción de que el plano buscado es el que hemos tomado con parámetro ($\alpha = 0$ $A'x + B'y + C'z + D' = 0$).

Ejemplo 10.5. .

Encuentra el haz de planos generado pr la recta: $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{4} = z+3$

De todos ellos, determina el que pasa por $P(3, 2, -2)$

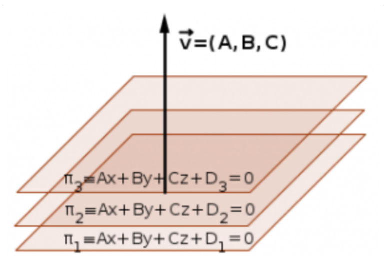
De igualar primer y segundo miembro: $4x-5y+13 = 0$; de igualar primero y tercero: $x - 5z - 13 = 0$, por lo que:

$$r : \begin{cases} 4x - 5y + 13 = 0 \\ x - 5z - 13 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \pi_r : \ 4x - 5y + 13 + \lambda(x - 5z - 13 = 0) = 0$$

Si $P \in \pi_r$, ha de cumplir su ecuación: $4(3) - 5(2) + 13 + \lambda((3) - 5(-2) - 13) = 0 \rightarrow 26 + \lambda \cdot 0 = 0 \rightarrow \nexists\lambda \rightarrow$ el plano buscado es pués el segundo: $\pi_r(P) : \quad x - 5z - 13 = 0$

HAZ DE PLANOS PERPENDICULARES A UNA RECTA:

Definimos el haz de planos perpendiculares a una recta r como el conjunto de todos los planos perpendiculares a dicha recta.



Evidentemente, el vector director de la recta, $\vec{v}_r = (v_x, v_y, v_z)$ será el vector asociado de los planos buscados.

$$\boxed{v_x\, x + v_y\, y + v_z\, z + K = 0 \quad \text{con } K \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo 10.6. *Encuentra el haz de planos perpendicular a la recta* $r: \begin{cases} 4x - y + 2z + 1 = 0 \\ x + y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$ *y determina, de todos ellos, el que pasa por el origen de coordenadas.*

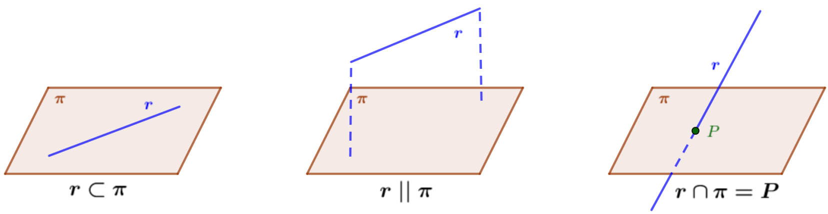
El vector director de la recta r será el vector asociado de todos los planos de haz: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 22\vec{j} + 5\vec{k} = (3, 22, 5)$

Haz de planos $\perp r: \quad 3x + 22y + 5z + K = 0; \quad K \in \mathbb{R}$

De todos ellos, el que pasa por el origen de coordenadas $\mathcal{O}(0,0,0)$ es $3x + 22y + 5z = 0$.

10.3.5. Posiciones relativas de recta y plano

Una recta puede estar contenida en un plano, ser paralela a él o, antes o después, acabar cortándose en un punto.

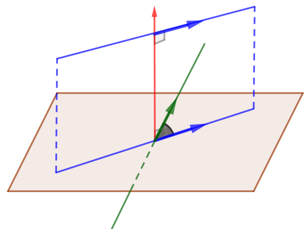


MÉTODO VECTORIAL:

Nos interesa tener el plano dado por su ecuación general, para tener su vector asociado, y la recta en forma paramétrica o continua, para tener su vector director y un punto por donde pase.

$$\boldsymbol{\pi}: \ Ax + By + Cz + D = 0 \quad \vec{n}_\pi = (A, B, C) \qquad \boldsymbol{r}: \begin{cases} P_r(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{v}_r(v_x, v_y, v_z) \end{cases}$$

Nos preguntamos si $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$, es decir, si $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$. Si la respuesta es sí, la recta y el plano son paralelos o coincidentes; si es no, la recta cortará al plano.



¿$\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$?

- Respuesta SÍ: r es paralelo o coincidente con π. Nos preguntamos ahora si un punto de r está o no en π

  ¿$P_r \in \pi$?

  - Respuesta SÍ: $r \subset \pi: \quad r \cap \pi \equiv r$, la recta está contenida en el plano.
  - Respuesta NO: $r \parallel \pi$, recta y plano son paralelos.

- Respuesta: NO: $r \cap \pi \equiv P$, es decir, r y π se cortan en un punto P. Para encontrar sus coordenadas, lo más rápido es sustituir las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación general de π

$$¿\ \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi\ ? \rightarrow \begin{cases} SI \rightarrow ¿P_r \in \pi\ ? \begin{cases} SI \rightarrow r \subset \pi \\ NO \rightarrow r \parallel \pi \end{cases} \\ NO \longrightarrow r \cap \pi \equiv P \end{cases}$$

MÉTODO ALGEBRAICO:

Escribimos el plano por su ecuación general, la recta por sus dos ecuaciones generales y formamos el SEL que sometemos a estudio.

$$\boldsymbol{\pi} : \ Ax+By+Cz+D=0 \quad \boldsymbol{r} : \begin{cases} A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases} \rightarrow A = \left[\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right] \leftarrow A^*$$

- $rg(A) = rg(A^*) \to SCD \quad r \cap \pi \equiv P$, Cramer
- $rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3 \to S\ I \quad r \parallel \pi$
- $rg(A) = rg(A^*) = 2 \to SCI \quad r \subset \pi$

Ejemplo 10.7. *Estudiar la posición relativa de la recta* $r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y-z-5=0 \end{cases}$ *y el plano* $\pi: \ x-y+z-3=0$

Como vienen dador, recta y plano, por sus ecuaciones generales, utilizaremos (primero) el MÉTODO ALGEBRAICO:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x-y-z=5 \\ x-y+z=3 \end{cases} \quad \to A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \leftarrow A^*$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ \to \ rg(A) = 3 = rg(A^*) = num.\ ecc \to SCD,\ Cramer:$

$$x = \frac{1}{-4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4}(-8) = 2;$$

$$y = \frac{1}{-4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4}\,8 = -2;$$

$$z = \frac{1}{-4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4}\,4 = -1$$

Luego el plano y la recta son secantes, se cortan, en el punto $r \cap \pi \equiv P(2,-2,1)$

Vamos, ahora, a resolver el problema por el MÉTODO VECTORIAL, el vector asociado al plano lo tenemos, $n_\pi = (1,-1,1)$, necesitamos el vector director de la recta $\vec{v}_r$ (y, posiblemente, un punto de la misma P_r).

Buscamos el vector director de la recta como producto vectorial de los vectores asociados de los planos que la definen:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 2\vec{k} = (0, 2, -2) \quad (\text{mejor tomar } \vec{v}_r(0, 1, -1))$$

Nos preguntamos: ¿ $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$? Comprobemos si es o no nulo el producto escalar:

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (0, 2, -2) \cdot (1, -1, 1) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = 0 - 2 - 2 = -4 \neq 0 \to \vec{v}_r \not\perp \vec{n}_\pi$, por lo que la recta y el plano se cortan en un punto.

Necesitamos un punto de la recta r, una solución particular de su sistema de ecuaciones. Tomando $z = 0$, $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$; sumando las ecuaciones, $x = 2$ y sustituyendo, $y = -3$. Un punto de r es $P_r(2, -3, 0)$

Para encontrar el punto de corte de r y π, sustituiremos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación general de π:

$$r : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi : \ x - y + z - 3 = 0$$

$$2 - (-3 + 2\lambda) + (-2\lambda) - 3 = 0; \quad \lambda = 1/2 \to \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 + 2 \cdot 1/2 = -2 \\ z = -2 \cdot 1/2 = -1 \end{cases}$$

Solución: $r \cap \pi \equiv P_r(2, -2, -1)$

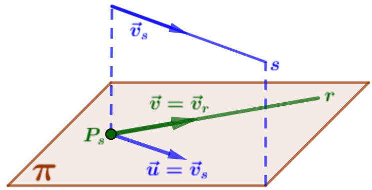
10.3.6. Ejercicios resueltos (Posiciones relativas de recta y plano)

Ejercicio resuelto 10.14. *Encuentra la ecuación del plano que es paralelo a la recta* $r : \ \dfrac{x-2}{-1} = 2y + 6 = \dfrac{z+1}{2}$ *y contiene a la recta* $s : \ (1 + 2\lambda, \lambda, 3 - \lambda)$

Escribamos, en primer lugar, la ecuacón de la recta r en forma continua: $2y+6=2(y+3)=\dfrac{y+3}{1/2} \to r:\ \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+3}{1/2}=\dfrac{z+1}{2} \to$

$$r:\begin{cases} P_r(2,-3,-1) \\ \vec{v}_r=(-1,1/2,2)\to(-2,1,4)\end{cases}$$

$$s:\ \left\{ P_s(1,0,3);\vec{v}_s=(2,1,-1)\right.$$



El plano π buscado, por contener a r pasará por P_r y tomaremos como uno de sus vectores directores el de la recta a la que contiene, $\vec{u}=\vec{v}_r$. El otro vector director de π será el de la recta s a la que es paralelo, $\vec{v}=\vec{v}_s$:

$$\pi:\begin{cases} P_r(2,-3,-1) \\ \vec{u}=\vec{v}_r=(-2,1,4) \\ \vec{v}=\vec{v}_s=(2,1,-1)\end{cases} \to \pi:\begin{cases} x=2+2\lambda+2\mu \\ y=-3+\lambda+\mu \\ z=-1+4\lambda-\mu\end{cases} ;\ \text{EC. Vectorial de } \pi.$$

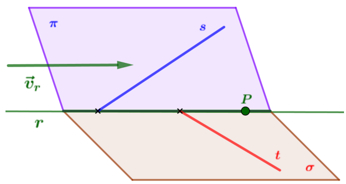
◇

10.4. Un problema clásico

Recta que se apoya (toca o corta) a otras dos.

Se trata de dos problemas clásicos que vamos a ver. Los datos van a ser dos rectas s y t y hay que buscar la recta r que corta a (o se apoya en) las rectas r y s, y ...

- Pasa por un punto P (dato)
- Tiene vector director $\vec{v}_r$ (dato), o es paralela a una cuarta recta (mismo vectores directores)



I. recta r que pasa por un punto P y se apoya en otras dos s y t

$$\pi : \begin{cases} P \\ \subset s \end{cases} \quad \sigma : \begin{cases} P \\ \subset t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{r :} \begin{cases} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{cases}$$

II. recta r que se apoya en otras dos s y t y es paralela a un vector (o recta) $\vec{v}_r$

$$\pi : \begin{cases} || \, \vec{v}_r \\ \subset s \end{cases} \quad \sigma : \begin{cases} || \, \vec{v}_r \\ \subset t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{r :} \begin{cases} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{cases}$$

Es decir, en el primer caso buscamos los planos que contienen a cada una de las rectas en que r se apoya y pasan por el punto P y en el segundo caso buscamos los planos que contienen a cada una de las rectas en que se apoya r y son paralelos a $\vec{v}_r$. En ambos casos, r es la intersección de los planos buscados.

Ejemplo 10.8. *Encontrar la ecuación de la recta* t *que pasa por* $P(1,1,1)$ *y se apoya (corta) en la recta* $r : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$ *y en la recta* $s : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{1}$.

■ MÉTODO 1: Razonamiento más largo, sin conocer el apartado que acabamos de ver (10.4).

La recta buscada es $t : \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_t = (\alpha, \beta, \gamma) \end{cases}$.

Determinaremos $\alpha, \beta,$ y γ exigiendo que la recta t corte a la recta r, $\boldsymbol{|\vec{v}_t, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_r P_t}| = 0}$ y que la recta t corte a la recta s, $\boldsymbol{|\vec{v}_t, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_s P_t}| = 0}$

Necesitamos 'punto' y 'vector director' de cada una de las rectas r y s.

s viene en forma continua, $\rightarrow$ $s : \begin{cases} P_s(0,2,-1) \\ \vec{v}_s = (2,1,1) \end{cases}$

En r buscaremos dos soluciones particulares del sus ecuaciones generales, P_{r_1}, P_{r_2} con lo que formaremos un vector director, $\vec{v}_r = \overrightarrow{P_{r_1} P_{r_2}}$. Para encontrar soluciones particulares en un sistema de doss ecuaciones con tres incógnitas, damos un valor a una de ellas y determinamos las demás.

$$r :\rightarrow z = 0 \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \nexists x, \nexists y.$$ *No pasa nada*, debe ocurrir que en la recta r no puede ser $z = 0$. Intentemos dando valores a otra incógnita.

$$r : \rightarrow x = 0 \rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow y = -1 \ \wedge \ z = 2 \Rightarrow P_{r_1} = (0, -1, 2)$$

$$r :\rightarrow x = 1 \rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2y + z = -2 \end{cases} \rightarrow y = -2 \wedge z = 2 \Rightarrow P_{r_2} = (0, -2, 2)$$

$$r : \begin{cases} P_{r_1} = (0, -1, 2) \\ P_{r_2} = (0, -2, 2) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} P_r = P_{r_1} = (0, -1, 2) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = P_{r_2} - P_{r_1} = (1, -1, 0) \end{cases}$$

Tenemos:

$\vec{v}_t = (\alpha, \beta, \gamma);\ P_t(1, 1, 1);\ \vec{v}_r = (1, -1, 0);\ P_r(0, 1, -2);\ \vec{v}_s = (2, 1, 1);\ P_s(0, 2, -1)$

• Exijamos $|\boldsymbol{\vec{v}_t, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_rP_t}}| = \mathbf{0} \rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\alpha + \beta + 3\gamma = 0}$ (ec 1)

• Exijamos $|\boldsymbol{\vec{v}_t, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_sP_t}}| = \mathbf{0} \rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\alpha - \beta - \gamma = 0}$ (ec 2)

El vector director de la recta t que buscamos, $\vec{v}_t = (\alpha, \beta, \gamma)$, ha de ser tal que verifique las ecuaciones (ec. 1) y (ec. 2). Para encontrar una solución a este sistema (homogéneo *) de doss ecuaciones con tres incógnitas, daremos un valor a una de ellas y determinaremos las otras dos:

*: si hacemos $\alpha = 0 \vee \beta = 0 \vee \gamma = 0$ obtendremos $\alpha = \beta = \gamma = 0$, solución trivial no válida para vector director de una recta.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \gamma = 1 \rightarrow \alpha = -1 \wedge \beta = -2 \Rightarrow \vec{v}_t = (-1, -2, 1)$$

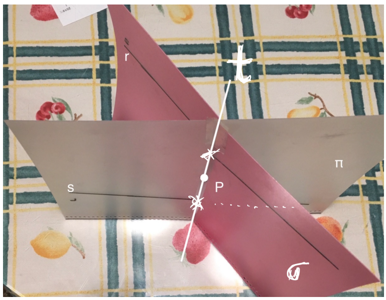
La recta buscada es, al fin, $t : \begin{cases} P_t(1,1,1) \\ \vec{v}_t = (-1,-2,1) \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{t :} \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - \lambda} \\ \boldsymbol{y = 1 - 2\lambda} \\ \boldsymbol{z = 1 + \lambda} \end{cases}$

■ MÉTODO 2: Procedimiento más breve, aplicando lo aprendido en el apartado anterior (10.4).

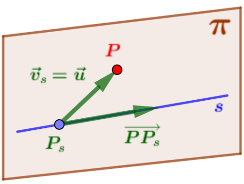
Hubiésemos podido deducir por nosotros mismos lo explicado en este apartado sin necesidad de explicación si hubiésemos utilizado la *estrategia matemática 'imagina el problema resuelto'*: en la figura se puede observar la recta t que pasa por P y corta a las recta r y s. Pero t la podemos expresar como intersección de dos planos, el plano π que contiene a la recta s y al punto P, y el plano σ que contiene a la recta r y al punto P.

Esquemáticamente:

$$t : \begin{cases} \pi : \begin{cases} P \\ \subset s \end{cases} \\ \\ \sigma : \begin{cases} P \\ \subset r \end{cases} \end{cases}$$



Para encontrar la ecuación del plano que pasa por un punto P y contiene a una recta s, necesitamos un punto P, ya lo tenemos, y dos vectores directores; uno de ellos será el vector director de la recta a que contiene, $\vec{u} = \vec{v}_s$, y el otro lo formaremos con P y un punto cualquiera P_s de la recta s, es decr, $\vec{v} = \overrightarrow{PP_s}$, con $P_s \in s$.



$$\pi : \begin{cases} P \\ \subset r \end{cases} \equiv \pi : \begin{cases} P \\ \vec{u} = \vec{v}_r \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_r};\ P_r \in r \end{cases}$$

Como en el método anterior, necesitamos r y s en forma parametrica:

$$r : \begin{cases} P_r(0,1,-2) \\ \vec{v}_r = (1,-1,0) \end{cases} \qquad P(1,1,1) \qquad s : \begin{cases} P_s(0,2,-1) \\ \vec{v}_s = (2,1,1) \end{cases}$$

Según lo visto:

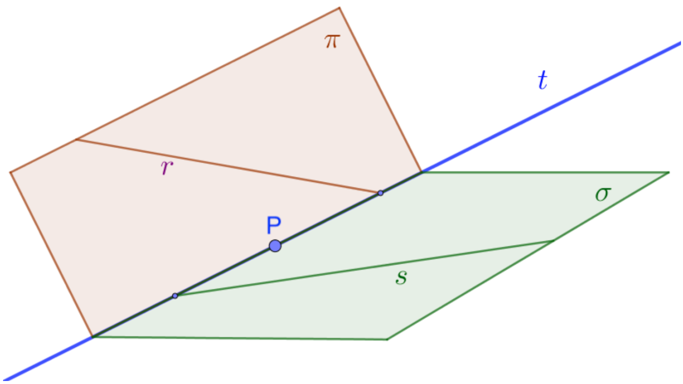
$$\sigma : \begin{cases} P \\ \subset r \end{cases} \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1,-1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_r} = (-1,-2,1) \end{cases} \qquad \pi : \begin{cases} P \\ \subset s \end{cases} \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{u} = \vec{v}_s = (2,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_s} = (-1,1,2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi : \; x + y + 3z - 5 = 0$ $\qquad$ $\sigma : \; x - y - z + 1 = 0$

Por fin, la recta buscada es: $\boldsymbol{t :} \begin{cases} \boldsymbol{x + y + 3z - 5 = 0} \\ \boldsymbol{x - y - z + 1 = 0} \end{cases}$

Presentamos otra figura aclaratoria del problema debido al interés del mismo:



Obviamente se trata de la misma recta encontrada por el método anterior.

$$t: \begin{cases} x+y+3z-5=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow \begin{cases} y+3z=4 \\ -y-z=-2 \end{cases} \rightarrow z=1;\ y=1 \\ x=0 \rightarrow \begin{cases} y+3z=5 \\ -y-z=-1 \end{cases} \rightarrow z=2;\ y=-1 \end{cases}$$

$$P_{t_1}=(1,1,1);\ P_{t_2}=(0,1,-2) \rightarrow \vec{v}_t=\overrightarrow{P_{t_1}P_{t_2}}=(-1,-2,1) \Rightarrow$$

$$t: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

Ejemplo 10.9. *Encontrar la ecuación de la recta* t *que se apoya (corta) en la recta* $r: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$ *y en la recta* $s: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ *. y es paralela a la recta* $m:\ (1+\theta,1-2\theta,\theta);\ \theta\in\mathbb{R}$

En este ejemplo nos piden lo visto en la segunda parte del apartado anterior (10.4): recta t que se apoya en otras dos r y s y es paralela a un vector (o recta) $\vec{v}_m$

$$\pi: \begin{cases} ||\ \vec{v}_t=\vec{v}_m \\ \subset r \end{cases} \quad \sigma: \begin{cases} ||\ \vec{v}_t=\vec{v}_m \\ \subset s \end{cases} \quad \Rightarrow \boldsymbol{r:} \begin{cases} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{cases}$$

Hay que averiguar punto y vector de las recta r y s. Como son las mismas que en el ejemplo anterior:

$$r: \begin{cases} P_r(0,1,-2) \\ \vec{v}_r=(1,-1,0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(0,2,-1) \\ \vec{v}_s=(2,1,1) \end{cases} \quad \vec{v}_r=\vec{v}_m=(1,-2,1)$$

$$\pi: \begin{cases} \vec{u}=\vec{v}_t=(1,-2,1) \\ \vec{v}=\vec{v}_r=(1,-1,0) \\ P=P_r(0,1,-2) \end{cases} \rightarrow\cdots\Rightarrow x+y+z+1=0$$

$$\sigma : \begin{cases} \vec{u} = \vec{v}_t = (1, -2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (2, 1, 1) \\ P = P_s(0, 2, -1) \end{cases} \rightarrow \cdots \Rightarrow 3x - y - 5z - 3 = 0$$

Y la recta buscada es: $t : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x - y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$

10.5. Formas de obtener una recta o un plano

10.5.1. Formas de obtener una recta

1. Un punto P por donde pasa y un vector director $\vec{v}$.

2. Dos puntos por donde pasa, P y Q.

3. Dos planos π y σ secantes en la recta.

4. Un punto por donde pasa, P, y una recta s o vector $\vec{v}_s$ a la que es paralela.

5. Un punto por donde pasa P y dos rectas en que se apoya s y t Problema clasico I (10.4).

6. La direción de una recta m (o de un vector $\vec{v}_m$) y dos rectas en que se apoya, s y t Problema clásico II (10.4).

7. Un punto por donde pasa P y un plano π que le es perpendicular $\rightarrow$ *próximo tema.*

8. Dos rectas s y t que se cruzan a las cuales la recta buscada les es perpendicular a ambas, 'recta perpendicular común' $\rightarrow$ *próximo tema.*

Esquemáticamente:

$$1)\quad r:\begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases} \qquad\qquad 2)\quad r:\begin{cases} P \\ Q \end{cases} \equiv \begin{cases} P \\ \vec{v}=\overrightarrow{PQ} \end{cases}$$

$$3)\quad r:\begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases} \qquad\qquad 4)\quad r:\begin{cases} P \\ \|\ s \end{cases} \equiv \begin{cases} P \\ \vec{v}=\vec{v}_s \end{cases}$$

$$5)\quad r:\begin{cases} P \\ r\cap s \\ r\cap t \end{cases} \equiv \begin{cases} \pi\begin{cases} P \\ \subset s \end{cases} \\ \sigma\begin{cases} P \\ \subset t \end{cases} \end{cases} \qquad 6)\quad r:\begin{cases} \|\ m \\ r\cap s \\ r\cap t \end{cases} \equiv \begin{cases} \pi\begin{cases} \|\ m \\ \subset s \end{cases} \\ \sigma\begin{cases} \|\ m \\ \subset t \end{cases} \end{cases}$$

10.5.2. Formas de obtener un plano

1. Un punto P por donde pasa y dos vectores directores $\vec{u}$, $\vec{v}$.
2. Dos puntos por los que pasa, P y Q, y un vector director $\vec{u}$.
3. Tres puntos por donde pasa P, Q y R.
4. Un punto P por donde pasa y un plano σ al que es paralelo.
5. Un punto P por donde pasa y un vector $\vec{n}$ ortogonal (perpendicular) al plano.
6. Un punto P por donde pasa y una recta r a la que contiene.
7. Una recta r contenida en el plano y otra s a la que el plano es paralelo.
8. Dos rectas r y s paralelas.
9. Para por un punto P y es paralelo a un plano σ.
10. Un punto P por donde pasa y una recta r que le es perpendicular $\rightarrow$ *próximo tema.*

11. Dos rectas s y t que se cruzan de las que el plano equidista $\rightarrow$ *próximo tema.*

Esquemáticamente:

$$1)\quad \pi : \begin{cases} P \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{cases} \qquad\qquad 2)\quad \pi : \begin{cases} P \\ Q \\ \vec{u} \end{cases} \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u} \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \end{cases}$$

$$3)\quad \pi : \begin{cases} P \\ Q \\ R \end{cases} \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} \end{cases} \qquad 4)\quad \pi : \begin{cases} P \\ \| \ \sigma \end{cases} \equiv \begin{cases} P \\ \vec{n}_\pi = \vec{n}_\sigma \end{cases}$$

$$5)\quad \pi : \begin{cases} P \\ \vec{n} \end{cases} \qquad\qquad 6)\quad \pi : \begin{cases} P \\ \supset r \end{cases} \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u} = \vec{v}_r \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_r} \end{cases}$$

$$7)\quad \pi : \begin{cases} \supset r \\ \| \ s \end{cases} \equiv \begin{cases} P = P_r \\ \vec{u} = \vec{v}_r \\ \vec{v} = \vec{v}_s \end{cases} \qquad 8)\quad \pi : \begin{cases} r \\ s \ \| \ r \end{cases} = equiv \begin{cases} P = P_r \\ \vec{u} = \vec{v}_r \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_rP_s} \end{cases}$$

$$9)\pi : \begin{cases} P \\ \| \ \sigma : \ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \pi : \ Ax + By + Cz + K, \text{ con } K \text{ tal que } P \in \sigma.$$

10.6. Ejercicios

En los siguientes ejercicios, aunque se puedan abordar algebráicamente, daremos preferencia al método vectorial por considerarlo más 'geométrico'.

Advertir que hemos estado haciendo un pequeño truco al explicar los métodos vectoriales para las posiciones relativas de recta y plano, pues hemos introducido el 'producto escalar' con el espacio euclídeo (puntos, vectores y ley de Chasles) lo cal nos lleva directamente al espacio euclídeo (espacio afín y producto escalar), que desarrollaremos más ampliamente en el siguiente tema (donde incluiremos también el producto vectorial y el mixto).

10.6.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 10.15. *Encuentra la ecuación, en todas sus formas, de la recta que pasa por $P(1,-1,2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (1,-2,3)$. El punto $Q(3,-5,4)$ está en la recta? ¿Y el punto $R(-2,5,-7)$? Encuentra los valores de m y n para que $T(m,-7,2n)$ pertenezca a la recta*

$$r:\begin{cases} P(1,-1,2) \\ \vec{u} = (1,-2,3) \end{cases}$$

$r:\ (x,y,z)((1,-1,2)+\lambda(1,-2,3);$ Ec. Vec

$$r:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = 2+3\lambda \end{cases} ;\ \text{Ec. Param}$$

En el futuro, la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas d una recta las representaremos así: $(1+\lambda, -1-2\lambda, 2+3\lambda)$.

$$r:\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3};\ \text{Ec. Cont.}$$

$$r:\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3y+2z-1=0 \end{cases} ;\ \text{Ec. Gen.}$$

¿$Q(3,-5,4) \in r$?: En las ec. grales. $\begin{cases} 2(3)+(-5)-1=0 & \text{sí} \\ 3(-5)+2(4)-1\neq 0 & \text{no} \end{cases} \to Q \notin r$

¿$R(-2,5,-7) \in r$?: En ec. param. $\begin{cases} -2 = 1+\lambda; & \lambda=-3 \\ 5 = -1-2\lambda; & \lambda = -3 \\ -7 = 2+3\lambda; & \lambda=-3 \end{cases} \to R \in r$

¡ $T(m,-7,2n)\in r$!: Ec. grales. $\begin{cases} 2m-7-1=0; & m=4 \\ -21+4n-1=0; & n=11/2 \end{cases} \rightarrow$

para $m=4$ y $n=11/2$, $T\in r$.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.16. *Expresa, en todas las formas posibles, la recta* $r:\ \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=z-2$ *y encuentra:*

a) Un punto de r cuya segunda coordenada sea -4.

b) Un punto de r cuya suma de coordenadas sea 2.

Como r viene dada en forma continua, es trivial encontrarle un punto por donde pasa y un vector director. Recuérdese que en forma continua tenemos $\dfrac{x-\text{punto}}{\text{vector}}\cdots\longrightarrow r:\ \begin{cases} P_r(-1,-1,2) \\ \vec{v}_r=(-2,3,1) \end{cases}$

$r:\ (-1-2\lambda,-1+3\lambda,2+\lambda)$ Ec. Vec. o Par. ; $r:\ \begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-3z+7=0 \end{cases}$ Ec. Grales.

—a) Para determinar un punto cuya segunda coordenada sea $y=-4$, si acudimos a las ec. grales., tenemos: $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ -4-3z+7=0 \end{cases} \rightarrow z=1,\ x=1.$

El punto buscado es $P(1,-4,1)$

Si hubiésemos acudido a las ec. paramétricas con $y=-4\rightarrow -1+3\lambda=-4\rightarrow\lambda=-1\Rightarrow x=-1-2(-1)=1;\ z=2+(-1)=1\rightarrow P(1,-4,1)$

— b) Para encontrar un punto de r cuya suma de coordenadas valga 2, si acudimos a las ecuaciones paramétricas tendremos: $x+y+z=2\rightarrow -1-2\lambda-1+3\lambda+2+\lambda=2\lambda=0\rightarrow\lambda=0\Rightarrow R(-1,-1,2)$

Si acudimos a las ecuaciones generales, tendremos un sistema de 3 ecuaciones lineles con tres incógnitas $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-3z+7=0 \\ \boldsymbol{x+y+z=2} \end{cases}$, cuya solución será $R(-1,-1,2)$.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.17. *Encuentra, en todas sus formas, la ecuación de la recta que pasa por* $P(1,2,3)$ *y*

a) es paralela al eje OZ

b) es paralela a la recta $s: \begin{cases} x+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$

— a) ▶ $r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{u}=\vec{k}=(0,0,1) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow r:\ (1,2,3-\lambda) \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1} \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

— b) Necesitamos un vector director de s, haciendo $z=1 \rightarrow x=-2,\ y=3 \Rightarrow S_1(-2,3,1)$. Haciendo $z=-1 \rightarrow x=2,\ y=-3 \Rightarrow S_2=(2,-3,-1)$ Un vector director de s será $\vec{v}_s=\overrightarrow{S_1S_2}=(4,-6,-2) \rightarrow (2,-3,1)$

▶ $r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{u}=\vec{v}_s=(2,-3,1) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow r:\ (1+2\lambda,2-3\lambda,3+\lambda) \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1} \equiv \begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ y+3z-11=0 \end{cases}$

◇

Ejercicio resuelto 10.18. *Encuentra la ecuación del plano, en todas sus formas, que:*

a) Pasa por $P(3,2,1),\ Q(-1,1,-2)$ *y uno de sus vectores directores es* $\vec{u}=(2,0,-1)$

b) Para por $P(3,2,1),\ Q(-1,1,-2)$ *y* $S(1,-1,1)$

— a) $\pi: \begin{cases} P(3,2,1) \\ Q(-1,1,-2) \\ \vec{u}=(2,0,-1) \end{cases} \equiv \begin{cases} P(3,2,1) \\ \vec{u}=(2,0,-1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(-4,-1,-3) \rightarrow (4,1,3) \end{cases}$

▶ $(x,y,z)=(3,2,1)+\lambda(2,0,-1)+\mu(4,1,3),$ *Ec. Vec.*

▶ $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 4\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 - \lambda + 3\mu \end{cases}$ *Ecc. Param.*

Los vectores $(-4,-1,-3)$ y $(4,1,3)$ son puestos, luego tienen la misma dirección, por lo que representan al mismo vector director.

En lo sucesivo, la forma vectorial o paramétrica de un plano la expresaremos así: $\pi:\ (3+2\lambda+4\mu, 2+\mu, 1-\lambda+3\mu)$

▶ $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow\ x - 10y + 2z + 15 = 0$ *Ec.Gral.*

— b) $\pi:\ \begin{cases} P(3,2,1) \\ Q(-1,1,-2) \\ S(1,-1,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} P(3,2,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-4,-1,-3) \rightarrow (4,1,3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PS} = (-2,-3,0) \rightarrow (2,3,0) \end{cases}$

▶ $(3+4\lambda+2\mu, 2+\lambda+3\mu, 1+3\lambda)$ *Ec. Vec. y Param.*

▶ $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow\ 3x - 6y - 2z + 5 = 0$ *Ec.Gral.*

◇

Ejercicio resuelto 10.19. *Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas* $r:\ \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ *y* $s:\ \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$

$$\pi:\ \begin{cases} \mathcal{O}(0,0,0) \\ \parallel r \\ \parallel s \end{cases} \equiv \begin{cases} \mathcal{O}(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-2,-1,2) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-1,3,-3) \end{cases} \rightarrow \pi:\ \begin{cases} x = -2\theta - \varphi \\ y = -\theta + 3\varphi \\ z = 2\theta - 3\varphi \end{cases}$$

◇

Ejercicio resuelto 10.20. *Encuentra la ecuación del plano que contiene al punto $P(-1,2,1)$ y a la recta $r:\ (-2\lambda, 2-\lambda, -1+3\lambda)$*

$$\pi : \begin{cases} P(-1,2,1) \\ \subset r \begin{cases} P_r(0,2,-1) \\ \vec{v}_r = (-2,-1,3) \end{cases} \end{cases} \equiv \begin{cases} P(-1,2,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{PP_r} = (1,0,-2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-2,-1,3) \end{cases}$$

▶ $\pi :\ (-1+\theta-2\varphi, 2-\varphi, 1-2\theta+3\varphi)\ ;\quad \forall \theta,\varphi\ \in \mathbb{R}$ ◇

Ejercicio resuelto 10.21. *Determinar para qué valor de m los puntos $A(1,m,2)$, $B(2,3,m)$ y $C(-1,-9,8)$ están alineados. Para $m=0$, encuentra el planos que los contiene y di si el punto $P(2,1,-2)$ pertenece o no a este plano.*

A, B, C alineados si $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 3-m, m-2)\ ;\quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-2, -9-m, 6) \to$

$$\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{AC} \text{ si } \frac{1}{-2} = \frac{3-m}{-9-m} = \frac{m-2}{6} \to \begin{cases} \dfrac{1}{-2} = \dfrac{3-m}{-9-m} & \to m=-1 \\ \dfrac{1}{-2} = \dfrac{m-2}{6} & \to m=-1 \end{cases} \Rightarrow:$$

$m=-1 \longrightarrow A, B, C$ alineados.

$$m=0 \ \to\ \pi : \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \equiv \begin{cases} A(1,0,2) \\ \overrightarrow{AB} = (1,3,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,-9,6) \end{cases} \to \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -9 & 6 \end{vmatrix} =$$

$0 \to 2y+3z-6=0$

¿$P(2,1,-2) \in \pi \equiv 2y+3z-6=0$?: $\quad 2(1)+3(-2)-6 \neq 0 \to P \notin \pi$ ◇

Ejercicio resuelto 10.22. *Encuentra la posición relativa de:*

a) $\pi :\ x-3y+4z+11=0;\qquad \sigma :\ 4x-12y+16z+40=0$

b) $\pi :\ x-3y+4z+11=0;\qquad \sigma :\ 4x-12y+16z-44=0$

c) $\pi :\ x-3y+4z+11=0;\qquad \sigma :\ x-3y+5z+11=0$

d) $\pi :\ x-3y+5z+11=0;\qquad r :\ \frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$

e) $\pi :\ x-3y-6z=5;\qquad r :\ (x,y,z) = (2,1,0) + \lambda(3,-1,1)$

f) $\pi:\ x-3y-6z=-1;$ $r:\ (x,y,z)=(2,1,0)+\lambda(3,-1,1)$

g) $r:\ (1+\lambda,2-\lambda,3+\lambda);$ $s:\ (-\mu,\mu,-\mu)$

h) $r:\ (1+\lambda,2-\lambda,3+\lambda);$ $s:\ (2-\mu,1-\mu,4-\mu)$

i) $r:\ (1+\lambda,2-\lambda,3+\lambda);$ $s:\ (1,2+\mu,3)$

j) $r:\ (1+\lambda,2-\lambda,3+\lambda);$ $s:\ (0,\mu,0)$

— a) $n_\pi=(1,-3,4);\ n_\pi=(4,-12,16):\ \frac{4}{1}=\frac{-12}{-3}=\frac{16}{4}\rightarrow n_\pi \,||\, n_\sigma$

π y σ son paralelos o coincidentes. $P_\pi:\ \ y=0,\ z=0\rightarrow x=-11\Rightarrow P_\pi(-11,0,0)$. Nos preguntamos: ¿ $P_\pi\in\sigma$? $4(-11)-12(0)+16(0)+40=-4\neq 0\rightarrow P_\pi\notin\sigma\Rightarrow \pi \,||\, \sigma$ **Los planos son paralelos.**

— b) $n_\pi=(1,-3,4);\ n_\pi=(4,-12,16):\ \frac{4}{1}=\frac{-12}{-3}=\frac{16}{4}\rightarrow n_\pi \,||\, n_\sigma$

π y σ son paralelos o coincidentes. $P_\pi:\ \ y=0,\ z=0\rightarrow x=-11\Rightarrow P_\pi(-11,0,0)$. Nos preguntamos: ¿ $P_\pi\in\sigma$? $4(-11)-12(0)+16(0)+44=0\rightarrow P_\pi\in\sigma\Rightarrow \pi\equiv\sigma$ **Los planos son coincidentes.**

— c) $n_\pi=(1,-3,4);\ n_\pi=(1,-3,5):\ \frac{1}{1}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{5}{4}\rightarrow n_\pi \,||\, n_\sigma$

Como los vectores asociados de los planos tienen distinta dirección, **los planos se cortan en una recta** r, cuya ecuación es la formada por las dos ecuaciones generales de ambos planos. $r:\ \begin{cases} x-3y+4z+11=0\\ x-3y+5z+11=0\end{cases}$

— d) $r:\ \begin{cases} P_r(3,-1,5)\\ \vec{v}_r=(0,1,1)\end{cases}$; $\vec{n}_\pi=(1,-3,5)$

$n_\pi\cdot\vec{v}_r=(1,-3,5)\cdot(0,1,1)=-3+5=2\neq 0$, por lo que $r\cap\pi=P$, **la recta y el plano se cortan en un punto** P . Para encontarlo, sustituiremos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación general de π .z $r:\ (3,-1+\lambda,5+\lambda);\ \ \pi:\ x-3y+5z+11=0\rightarrow$

$(3)-3(-1+\lambda)+5(5+\lambda)+11=0\rightarrow\lambda=-21$, llevando este resultado a las ecuaciones paramétricas de r, encontrando $r\cap\pi=P(2,-22,-16)$

— e) $\vec{n}_\pi=(1,-3,7);$ $\vec{v}_r=(3,-1,1);$ $P_r(2,1,0)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (3,-1,1)\cdot(1,-3,7) = 3+3-6 = 0 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow$ r y π son paralelos o coincidentes.

¿ $P_r \in \pi$? $\quad 2-3(1)-6(0) = 2-3 = -1 \neq 5 \rightarrow; P_r \notin \pi \Rightarrow r \mid\mid \pi$ **La recta es paralela al plano.**

— f) $\vec{n}_\pi = (1,-3,7)$; $\qquad \vec{v}_r = (3,-1,1)$; $\quad P_r(2,1,0)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (3,-1,1)\cdot(1,-3,7) = 3+3-6 = 0 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow$ r y π son paralelos o coincidentes.

¿ $P_r \in \pi$? $\quad 2-3(1)-6(0) = 2-3 = -1 \rightarrow; P_r \in \pi \Rightarrow r \equiv \pi$ **La recta está contenida en el plano.**

— g) $P_r(1,2,3)$; $\vec{v}_r = (1,-1,1)$; $\qquad P_s(0,0,0)$; $\vec{v}_s = (-1,1,-1)$

$\dfrac{-1}{1} = \dfrac{1}{-1} = \dfrac{-1}{1} \rightarrow \vec{v}_s \mid\mid \vec{v}_r \rightarrow r$ y s son paralelas o coincidentes.

Veamos si $P_s \in r$, igualaremos las coordenadas de P_s a las ecuaciones paramétricas de r para ver si encontramos un único λ que reproduzca este punto: $\begin{cases} 0 = 1+\lambda & \rightarrow \lambda = -1 \\ 0 = 2-\lambda & \rightarrow \lambda = 2 \\ 0 = 3+\lambda & \rightarrow \lambda = -3 \end{cases}$; $\nexists \lambda \rightarrow P_s \notin r \Rightarrow r \mid\mid s$, por los que **las rectas son paralelas**.

— h) $P_r(1,2,3)$; $\vec{v}_r = (1,-1,1)$; $\qquad P_s(2,1,4)$; $\vec{v}_s = (-1,1,-1)$

$\dfrac{-1}{1} = \dfrac{1}{-1} = \dfrac{-1}{1} \rightarrow \vec{v}_s \mid\mid \vec{v}_r \rightarrow r$ y s son paralelas o coincidentes.

Veamos si $P_s \in r$, igualaremos las coordenadas de P_s a las ecuaciones paramétricas de r para ver si encontramos un único λ que reproduzca este punto: $\begin{cases} 2 = 1+\lambda & \rightarrow \lambda = 1 \\ 1 = 2-\lambda & \rightarrow \lambda = 1 \\ 4 = 3+\lambda & \rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$; para $\lambda = 1 \rightarrow P_s \in r \Rightarrow r \equiv s$, por los que **las rectas son coincidentes**.

— i) $P_r(1,2,3)$; $\vec{v}_r = (1,-1,1)$; $\qquad P_s(1,2,3)$; $\vec{v}_s = (0,1,0)$

Como, evidentemente, $\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s$, las rectas se cortan o se cruzan. Formamos el vector que une un punto cualquiera de cada recta, por ejemplo, $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_s = (0,0,0)$ y calculamos el determinante formado por los vectores $\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}$

$Det(\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r \cap s = P$, **las rectas se cortan en un punto** P que encontraremos igualando las ecuaciones paramétricas de ambas: $\begin{cases} 1+\lambda = 1 & \rightarrow \lambda = 0 \\ 2-\lambda = 2+\mu & \rightarrow \cdots \\ 3+\lambda = 3 & \rightarrow \cdots \end{cases}$ $\rightarrow$ con $\lambda = 0$ vamos a las ecuaciones de r y encontramos el punto de intersección $r \cap s = P(1,2,3)$

— k) $P_r(1,2,3)$; $\vec{v}_r = (1,-1,1)$; $\qquad P_s(0,0,0)$; $\vec{v}_s = (0,1,0)$

Como, evidentemente, $\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s$, las rectas se cortan o se cruzan. Formamos el vector que une un punto cualquiera de cada recta, por ejemplo, $\overrightarrow{P_sP_r} = P_r - P_s = (1,2,3)$ y calculamos el determinante formado por los vectores $\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}$

$Det(\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$, **las rectas se cruzan en el espacio.**

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.23. *Encuentra las ecuaciones paramétricas de la reca* r *definida por la intersección de los planos* $\pi:\ 3x-y+z+2=0$ *y* $\sigma:\ 5x+y-z-2=0$. *¿Dónde cortará* r *al plano* $\tau:\ x+y+z+2=0$*?*

$r:\ \begin{cases} 3x-y+z+2=0 \\ 5x+y-z-2=0 \end{cases}$. Buscaremos dos puntos de r, $R:_1$ y R_2 con lo que: $r:\ \begin{cases} \pi \\ \tau \end{cases} \equiv \begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r = R_1 \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{R_1R_2} \end{cases}$

$r:\ x=0 \rightarrow \begin{cases} -y+z=-2 \\ y-z=2 \end{cases}$ $\rightarrow$ Por aquí no obtenemos nada, probaremos darle valores a otra incógnita (coordenada):

$r:\ y=0 \rightarrow \begin{cases} 3x+z=-2 \\ 5x-2=2 \end{cases}$ $\rightarrow x=0\ \wedge\ z=-2 \Rightarrow R_1(0,0,-2)$

$$r:\ y=1\rightarrow\begin{cases}3x+z=-1\\ 5x-2=1\end{cases}\rightarrow x=0\ \wedge\ z=--1\Rightarrow R_1(0,1,-1)$$

$$r:\ \begin{cases}P_r=R_1(0,0,-2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{R_1R_2}=(0,1,1)\end{cases}\Rightarrow r:\ \begin{cases}x=0\\ y=\lambda\\ z=-2+\lambda\end{cases}$$

Como $\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\tau=(0,1,-1)\cdot(1,1,1)=1\neq 0\rightarrow r\cap\tau=T$, la recta r y el plano τ se cortan en un punto, T. Para encontrar sus coordenadas, sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación general de τ:

$(0)+(\lambda)+(-2+\lambda)+2=0\rightarrow\lambda=0\rightarrow r\cap\tau=T(0,0,-2)$ ◇

Ejercicio resuelto 10.24. *Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:*

a) $r:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{4};\qquad s:\ \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

b) $r:\ \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1};\qquad s:\ \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{2}$

c) $r:\ \dfrac{x}{2}=y-1=\dfrac{z+1}{3};\qquad s:\ \begin{cases}x-2y-1=0\\ 3y-z+1=0\end{cases}$

d) $r:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4};\qquad s:\ \begin{cases}x=3+4\lambda\\ y=3+6\lambda\\ z=4+8\lambda\end{cases}$

— a) $r:\ P_r(1,-2,1);\ \vec{v}_r=(3,2,4);\quad s:\ P_s(-2,3,2);\ \vec{v}_s=(-1,2,3)$

$$r\not\parallel s\rightarrow\overrightarrow{P_rP_s}=(-3,5,1)\rightarrow\begin{vmatrix}3&2&4\\-1&2&3\\-3&5&1\end{vmatrix}=-51\neq 0\rightarrow r\text{ y }s\text{ se cruzan.}$$

— b) $r:\ P_r(1,1,2);\ \vec{v}_r=(-1,2,1);\quad s:\ P_s(4,4,5);\ \vec{v}_s=(4,1,2)$

$r \not\parallel s \to \overrightarrow{P_rP_s} = (3,3,3) \to \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to r$ y s se cortan. Como el punto de corte es un punto común a ambas rectas, igualaremos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r : \left\{ \begin{matrix} 1-\lambda & = & 4+4\mu \\ 1+2\lambda & = & 4+\mu \\ 2+\lambda & = & 5+2\mu \end{matrix} \right\} s \to \begin{cases} Ec.1 + Ec.3 & \to \mu = -1 \\ sust.\ Ec.1 & \to \lambda = 1 \end{cases}$$

Yendo a r con $\lambda = 1$ o a s con $\mu = -1$, obtenemos $r \cap s = P(0,3,3)$

— c) $r :\ P_r(0,1,-1);\ \vec{v}_r = (2,1,3);\quad s :\ P_s(1,0,1);\ \vec{v}_s = (2,1,3)$ (*)

Como $\vec{v}_r \mid\mid \vec{v}_s \to$ las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si $P_r \in s$, sustituimos las coordenadas de P_r en las ecuaciones generales de s, $\begin{cases} 0-2(1)-1 \neq 0 \\ 3(1)-(-1)+1 = 0 \end{cases}$, luego $P_r \notin s$, por lo que las rectas son paralelas ($r \mid\mid s$)

(*) Para buscar un vector director de la recta s, buscamos dos puntos S_1 y S_2 y, a partir de ellos, calculamos un vector director de s, $\vec{v}_s$

$$\begin{bmatrix} \text{si } y = 0 \to x = 1,\ z = 1 : & S_1(1,0,1) \\ \text{si } y = 1 \to x = 3,\ z = 4 : & S_2(3,1,4) \end{bmatrix} \to \vec{v}_s = \overrightarrow{S}_2S_1 = (2,1,3)$$

— d) $r :\ P_r(1,0,0);\ \vec{v}_r = (2,3,4);\quad s :\ P_s(3,3,4);\ \vec{v}_s = (4,6,8)$

Como $\vec{v}_r \mid\mid \vec{v}_s \to$ las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si $P_r \in s$, sustituiremos en las ecuaciones paramétricas de r para ver si encontramos un único λ que las verifique:

$$\begin{cases} 3+4\lambda = 1 & \to \lambda = -1/2 \\ 3+6\lambda = 0 & \to \lambda = -1/2 \to P \in s \text{ y las rectas son coincidentes, } r \equiv s. \\ 4+8\lambda = 0 & \to \lambda = -1/2 \end{cases}$$

◇

Ejercicio resuelto 10.25. *Para que valor de* a *se cortan las rectas:*

$$r :\ x = y = z - a; \qquad s :\ \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

$$r:\ x = y = z - a \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-a}{1} \to r:\ \begin{cases} P_r(0,0,a) \\ \vec{v}_r = (1,1,1) \end{cases}$$

$$s\ :\ \ \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0} \equiv \frac{2(x-1/2)}{3} = \frac{y-(-3)}{-2} = \frac{z-2}{0} \equiv$$
$$\frac{x-1/2}{3/2} = \frac{y-(-3)}{-2} = \frac{z-2}{0} \to \begin{cases} P_s(1/2,-3,2) \\ \vec{v}_s = (3/2,-2,0) \rightsquigarrow (3,-4,0) \end{cases}$$

Evidentemente, $\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s \to$ ¿$det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = 0$?

$\overrightarrow{P_rP_s} = (1/2,-3,2-a) \rightsquigarrow (1,-6,4-2a)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & -6 & 4-2a \end{vmatrix} = 14a - 42 = 0 \leftrightarrow a = 3$$

Luego, para $a = 3$ las rectas r y s se cortan en un unto $P = r \cap s$. Para encontrar el punto de corte, con $a = 3$, igualaremos las ecuaciones paramétricas de ambas rectas:

$$r:\ \left.\begin{cases} x = & \lambda & = & 1/2 + 3\mu & = x \\ y = & \lambda & = & -3-4\mu & = y \\ z = & 3+\lambda & = & 2 & = z \end{cases}\right\} : s \longrightarrow \lambda = -1;\ \mu = -1/2$$

Con $\lambda = -1 \to r$ o con $\mu = -1 \to s$, obtenemos que para $a = 3$ las rectas r y s se cortan en $r \cap s = P(-1,-1,2)$

◇

Ejercicio resuelto 10.26. *Encontrar el valor de los parámetros k y l para que las siguientes rectas sean paralelas:*

$$r:\ (5+4\lambda, 3+\lambda, -\lambda); \qquad s:\ \frac{x}{k} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{k}$$

$$r:\ \begin{cases} P_r(5,3,0) \\ \vec{v}_r = (4,1,-1) \end{cases} ; \qquad s:\ \begin{cases} P_s(0,1,-3) \\ \vec{v}_s = (k,3,l) \end{cases}$$

Para que $r \parallel s \to \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \to \dfrac{k}{4} = \dfrac{3}{1} = \dfrac{l}{-1} \to k = 2\ \wedge\ l = -3$, con esto, las rectas serán paralelas o coincidentes. Veamos si P_s pertenece o no a r:

$P_s(p,1,-3) \rightarrow \begin{cases} 0 = 5+4\lambda & \rightarrow \lambda = -5/4 \\ 1 = 3+\lambda & \rightarrow \lambda = -2 \\ -3 = -\lambda & \rightarrow \lambda = 3 \end{cases}$, no hay un único λ que sustituido en r proporciones las coordenadas de P_s , luego $P_s \notin r \Rightarrow k = 2 \ \wedge \ l = -3 \leftrightarrow r \parallel\!| \ s$ $\diamond$

Ejercicio resuelto 10.27. *Considera la recta y el plano:*

$$r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \quad ; \qquad \pi: \ 2x+y+mz=n$$

a) Determina m y n para que la recta y el plano se corten ($r \cap \pi = P$).

b) Determina m y n para que la recta y el plano no se corten.

c) Determina m y n para que la recta esté contenida en el plano ($r \subset \pi$).

Busquemos dos puntos de r para tener un vector director:

$$r \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow \begin{cases} x-2z=1 \\ x-z=1 \end{cases} \rightarrow z=0; \ x=1 \rightarrow R_1(1,0,0) \\ y=1 \rightarrow \begin{cases} x-2z=3 \\ x-z=1-2 \end{cases} \rightarrow z=-5; \ x=-7 \rightarrow R_2(-7,1,-5) \end{cases}$$

$$\pi: \begin{cases} P_\pi(0,n,0) \\ \vec{n}_\pi = (2,1,m) \end{cases} \quad ; \qquad r: \begin{cases} P_r = R_1(1,0,0) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{R_1R_2} = (-8,1,-5) \end{cases}$$

— a) Para que $r \cap \pi = P$, ha de ocurrir que $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0 \rightarrow (-8,1,-5) \cdot (2,1,m) = -15-5m = 0 \leftrightarrow m = -3$

La respuesta es, para que la recta y el plano se corten en un punto es necesario que $m \neq -3$.

— b) Si $m = -3$ la recta y el plano no se cortan, o bien son paralelos ($r \parallel \pi$) o la recta estará contenida en el plano ($r \subset \pi$).

La recta estará contenida en el plano si, no cortándose, es decir, con $m = -3$, ocurre que un punto P_r de la recta r está en el plano π; si verifica su ecuación general:

$$P_r(1,0,0) \in \pi \equiv 2x + y \,\mathbf{-3}\, z = n \rightarrow 2(1) + 1(0) - 3(0) = n \Rightarrow n = 2$$

La recta está contenida en el plano si $m = -3$ y $n = 2$.

ALGEBRÁICAMENTE:

$$\begin{cases} \pi: \; 2x + y + mz = n \\ r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & m & n \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \leftarrow A^*$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5m + 15 = 0 \leftrightarrow m = -3$$

$$m = -3 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & n \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5n - 10 = 0 \leftrightarrow n = 2$$

$$\begin{cases} m = -3 & \rightarrow SCD: \; r \cap \pi = P \\ m \neq -3 & \rightarrow \begin{cases} n \neq 2 & \rightarrow SI; \;\; r || \pi \\ n = 2 & \rightarrow SCI: \; r \subset \pi \end{cases} \end{cases}$$

◇

Ejercicio resuelto 10.28. .

Considera las rectas: $r: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2a \\ z = a - 2 \end{cases}$

a) Encuentra la reta t paralela a r y que pasa por $P(0,1,0)$.

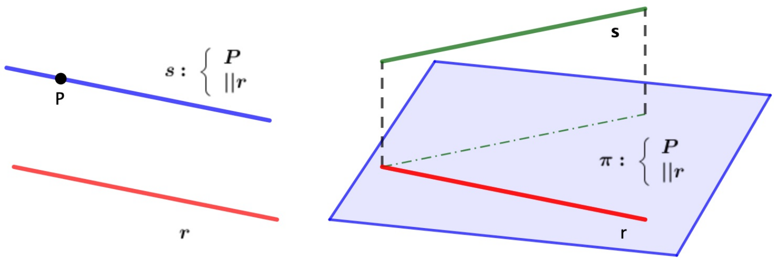
b) Encuentra el plano π que contiene a r y es paralela a s.

Antes de continuar, busquemos P_r, $\vec{v}_r$, P_s, $\vec{v}_s$:

$s: \quad P_s(1,0,-2); \quad \vec{v}_s = (0,2,1)$

$$r: \begin{cases} x=0 \to \begin{cases} -2y+z=-3 \\ y-z=-1 \end{cases} \to y=4 \ \wedge \ z=5 \to R_1(0,4,5) \\ x=1 \to \begin{cases} -2y+z=-4 \\ y-z=-4 \end{cases} \to y=8 \ \wedge \ z=12 \to R_1(1,8,12) \end{cases}$$

$$r: \quad P_r = R_1(0,4,5); \quad \vec{v}_r = \overrightarrow{R_1R_2} = (1,4,7)$$



— a) $t: \begin{cases} ||r \to \vec{v}_t = \vec{v}_r(1,4,7) \\ P(0,1,0) \end{cases} \to r: \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 1+4\lambda \\ z &= 7\lambda \end{cases}$

— b) $\pi: \begin{cases} \subset r \\ ||s \end{cases} \to \pi: \begin{cases} P_r(0,4,5) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1,4,7) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (0,2,1) \end{cases} \to \pi: \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 4+4\lambda+2\mu \\ z &= 5+7\lambda+\mu \end{cases}$

◇

Ejercicio resuelto 10.29. *Considera la recta r que pasa $P(1,2,3)$ y $Q(1,-1,3)$ y el plano π que pasa por los puntos $A(1,0,1)$, $B(2,-1,3)$ y $C(4,1,0)$. Encontrar las ecuaciones imlplícitas de r y π así como la posición relativa de ambos.*

$$r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (0,-3,0) \rightsquigarrow (0,1,0) \end{cases} \to r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ || \ OY \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} A(1,0,1) \\ B(2,-1,3) \\ C(4,1,0) \end{cases} \to \pi : \begin{cases} A(1,0,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,-1,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = (3,1,-1) \end{cases} \to$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to x - 7y - 4z + 3 = 0$$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (0,1,0) \cdot (1,-7,-4) = -7 \neq 0 \to r \cap \pi = P$, recta y plano se cortan en un punto, sustituyendo las ecuaciones paramétricas de r en la general de π:

$1(1) - 7(2+\lambda) - 4(3) + 3 = 0 \to \lambda = -11 \Rightarrow r \cap \pi = P(1,-9,3)$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.30. *PROBLEMA CLÁSICO: Considera el punto $P(2,0,1)$ y las rectas*

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad ; \quad s : \begin{cases} x = 7 - \mu \\ y = -15 + 3\mu \\ z = 7 \end{cases}$$

Encuentra la recta t que pasa por P y corta a las rectas r y s.

$$t : \begin{cases} \pi : \begin{cases} P \\ \subset r \end{cases} \to \begin{cases} P \\ \vec{u} = \vec{v}_r \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_r} \end{cases} \to \begin{cases} P(2,0,1) \\ \vec{u} = (0,1,2) \\ \vec{v} = (-1,5,1) \end{cases} \to 9x + 2y - z - 17 = 0 \\ \tau : \begin{cases} P \\ \subset s \end{cases} \to \begin{cases} P \\ \vec{u} = \vec{v}_s \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_s} \end{cases} \to \begin{cases} P(2,0,1) \\ \vec{u} = (-1,3,0) \\ \vec{v} = (5,-15,6) \end{cases} \to 3x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.31. *Determina la recta r que pasa por $P(1,1,1)$, es paralela a $\pi :\ x - y + z - 3 = 0$ y corta a la recta $s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$*

MÉTODO LARGO: $\pi : x - y + z - 3 = 0 \to \vec{n}_\pi = (1,-1,1)$

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_s(1,3,0) \\ \vec{v}_s = (0,0,1) \end{cases} \quad ; \quad r: \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_r = (\alpha,\beta,\gamma) \end{cases}$$

$\vec{v}_r$ ha de cumplir dos condiciones: $\begin{cases} 1)\ r||\pi & \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}\pi = 0 \\ 2)\ r \cap s & \rightarrow Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PP_s}) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1) & (\alpha,\beta,\gamma)\cdot(1,-1,1) = 0 & \rightarrow \alpha - \beta + \gamma = 0\ (ec.1) \\ 2) & \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 & \rightarrow \alpha = 0\ (ec.2) \end{cases} \qquad \vec{v}_r = (0,\beta,\beta) \rightsquigarrow (0,1,1)$$

Por lo que $r: \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_r = (0,1,1) \end{cases} \rightarrow r: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

MÉTODO CORTO:

r será la intersección de del plano σ, paralelo al π que pasa por P y del plano τ que contiene a s y a P.

$\sigma:\ x-y-z+k = 0;\ P \in \sigma:\ 1-1+1+k = 0 \rightarrow k\_1 \Rightarrow \sigma:\ x-y+z-1 = 0$

Como antes, $s: \begin{cases} P_s(1,3,0) \\ \vec{v}_s = (0,0,1) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{PP_s} = (0,2,-1) \rightarrow$

$$\tau: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \tau:\ x-1 = 0$$

Finalmente: $r: \begin{cases} x-y+z-1 = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases}$

◇

Ejercicio resuelto 10.32. *Considera la recta* $r: \begin{cases} 3x-5y+4z-4 = 0 \\ x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$ *y el punto* $P(0,-1,3)$. *Encuentra la ecuación de la recta* s *sabiendo que pasa por* P *y es paralela a* r.

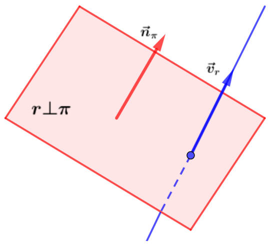
$$\vec{v}_r \rightsquigarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = (-3,-2,-1) \rightsquigarrow \vec{v}_r = (3,2,1)$$

$$s: \begin{cases} P \\ ||r \end{cases} \to s: \begin{cases} P(0,-1,3) \\ \vec{v}_s = \vec{v}_r = (3,2,1) \end{cases} \Rightarrow s: \ (3\lambda, -1+2\lambda, 3+\lambda) \qquad \diamond$$

Ejercicio resuelto 10.33. *Sea $r: \ (1+\lambda, 2+2\lambda, 3-3\lambda)$ y sea $P(1,0,-2)$, calcula la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por P.*

$$\pi: \begin{cases} P \\ \perp r \end{cases} \to$$

$$\pi: \begin{cases} P(1,0,-2) \\ \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1,2,-3) \end{cases} \to$$



$$\to (x-1) + 2(y) - 3(z-2) = 0 \Rightarrow \pi: \ x + 2y - 3z - 7 = 0 \qquad \diamond$$

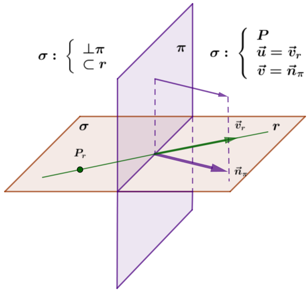
Ejercicio resuelto 10.34. *Sea $\pi: \ x + 2y - 3z - 7 = 0$ y $P(1,2,3)$, encuentra la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P*

$$r: \begin{cases} P \\ \perp\pi \end{cases} \to \pi: \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1,2,-3) \end{cases} \Rightarrow r: \ (1+\lambda, 2+2\lambda, 3-3\lambda) \qquad \diamond$$

Ejercicio resuelto 10.35. *Considera la recta $r: \ (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,2,1)$ y el plano $\pi: \ 2x + y - z + 3 = 0$. Encuentra la ecuación del plano σ, perpendicular a π y que contiene a r.*

$$\sigma: \begin{cases} \perp\pi \\ \subset r \end{cases} \to: \sigma: \begin{cases} P_r(1,2,3) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1,2,1) \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi = (2,1,-1) \end{cases} \to$$

$$\sigma: \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$$



◇

Ejercicio resuelto 10.36. *Encuentra la ecuación del plano σ que pasa por $P(1, 0, -1)$, es perpendicular a $\pi : x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$*

$$\sigma: \begin{cases} P \\ \perp \pi \\ || r \end{cases} \to \sigma: \begin{cases} P(1, 0, 1) \\ \vec{u} = \vec{n}_\pi = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Para encontrar $\vec{v}_r$ se ha buscado una solución particular de las ecuaciones generales 'homogéneas' (ya lo son) de r, así, haciendo $x = 1 \to y = -1$; $z = 0$. ◇

Ejercicio resuelto 10.37. *Encuentra el plano π que contiene a las rectas r y s, de ecuaciones:*

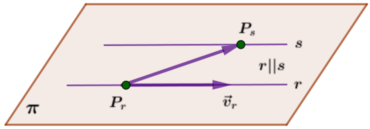
$$r: \frac{x - 1}{2} = y = z - 1; \qquad s: \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

$r: \ P_r(1, 0, 1) \ \ \vec{v}_r = (2, 1, 1)$

$s: \ S = S_1(\mathbf{1}, -5, -2); \ S_2 = (\mathbf{3}, -4, -1) \to \vec{v}_s = \overrightarrow{P_{S_1} P_{S_2}} = (2, 1, 1)$

$\vec{v}_r = \vec{v}_s \ \wedge \ P_r \notin s \to r || s$ $\qquad \pi: \begin{cases} \subset r \\ \subset s \end{cases}$; $r || s \to$

$$\pi : \begin{cases} P_r(1,0,1) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = \vec{v}_s = (2,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_sP_r} = (0,5,4) \end{cases}$$



$\pi \ (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(2,1,1) + \mu(0,5,4)$ ◇

Ejercicio resuelto 10.38. *Estudia, según tos distintos valores del parámetro k, la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\pi_1 : \ ax + y + z = 1; \quad \pi_2 : \ x + ay + z = 1; \quad \pi_3 : \ x + y + az = 1$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] \leftarrow A^*; \quad |A| = (a+2)(a-1)^2 = 0 \leftrightarrow a = 1 \ \vee \ a = -2$$

— $\boldsymbol{a \neq 1 \ \wedge \ a \neq -2} \rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) : \ \boldsymbol{SCD} \rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P$, los tres planos **se cortan en un punto**.

— $\boldsymbol{a = 1} \rightarrow$ Las tres ecuaciones son la misma, $\boldsymbol{SCI}$, $rg(A) = rg(A^*) = 1$, los tres planos son **coincidentes**: $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3$ ◇

— $\boldsymbol{a = -2} \rightarrow A = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \leftarrow A^* \rightarrow rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*)$, comprobarlo, luego tenemos un $\boldsymbol{SI}$.

Como $\vec{n}_{\pi_1} \not\parallel \vec{n}_{\pi_2}; \wedge \vec{n}_{\pi_2} \not\parallel \vec{n}_{\pi_3}; \wedge \vec{n}_{\pi_3} \not\parallel \vec{n}_{\pi_1}$, los planos **se cortan dos a dos** formando un prisma (cabaña).

Ejercicio resuelto 10.39. *Determina el valor del parámetro m para que los siguientes tres planos se corten en una recta:*

$$\pi : \ x + my + z = 0; \quad \sigma : \ 2x - 3y + z - 5 = 0; \quad \tau : \ x + y - 2z - 15 = 0$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 15 \end{array}\right] \leftarrow A^*$$

Pra que los tres planos se corten en una recta r (dos ecuaciones, rango 2), ha de ocurrir que $rg(A) = rg(A^*) = 2$. Necesariamente ha de ser $|A| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5m + 10 = 0 \leftrightarrow m = -2$$

Necesariamente$m = -2$, pero continuemos con el estudio:

$$A(m = -2) = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{-2} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{-3} & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 15 \end{array}\right] \leftarrow A^* \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$rg(A) = rg(A^*) = 2$

Luego para m_2, los planos π, σ y τ se cortan en la recta:

$$m = -2 \rightarrow \pi \cap \sigma \cap \tau \equiv r : \begin{cases} \pi : \boxed{1}x + \boxed{-2}y + z = 0 \\ \sigma : \boxed{2}x + \boxed{-3}y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

◇

Ejercicio resuelto 10.40. *Determina la posicione relativa de los planos:*

$$\pi : \ x - 2y + 3z = 4; \quad \sigma : \ 2x + y + z = -1; \quad \tau : \ x - 2y + 3z = 0$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \leftarrow A^*$$

Compruébese (ver apartado 5.1 en tema 5) que $rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*)$, tenemos un SI en el cual, por ser los vectores asociados de π y τ iguales pero no así los planos, $\pi \,||\, \tau$, la situación es de dos planos paralelos y uno tercero σ que los corta en rectas paralelas.

◇

Ejercicio resuelto 10.41. *Considera el segmento* $\overline{AB}$ *de extremos* $A(1, 0, 0)$ *y* $B(3, -4, 4)$*. Encuentra la ecuación del plano perpendicular a él que pasa por su punto medio.*

$$\pi: \begin{cases} M_{AB} \\ \perp \overline{AB} \end{cases} \rightarrow \pi: \begin{cases} M_{AB} \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$M_{AB} = \dfrac{A+B}{2} = (2,-2,2); \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (2,-4,4) \rightsquigarrow (1,-2,2) \Rightarrow$
$\pi:\ 1(x-2) - 2(y+2) + 2(z-2) = 0 \rightarrow \pi:\ x - 2y + 2z - 2 = 0$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.42. *Determina la posición relativa de los planos:*

$$\pi:\ x+y+az=-2;\ \pi:\ x+ay+z=-1;\ \tau:\ ax+y+z=3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2 = 0 \leftrightarrow a = 1 \ \vee \ a = -2$$

— $a \notin \{1,-2\} \rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 3 \rightarrow SCD \Rightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

— $a = 1 \rightarrow A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \leftarrow A^* \rightarrow rg(A) = 1 \neq 2 = rg(A^*) \rightarrow$ $SI \Rightarrow$ Los tres planos son paralelos pues todos tienen el mismo vector asociado.

— $a = -2 \rightarrow A = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{1} & -2 & -2 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \leftarrow A^* \rightarrow rg(A) = 2 =$ $rg(A^*)$ $(*)$ $\rightarrow SCI \Rightarrow$ como el rango es dos, los tres planos se cortan en una recta (cuya ecuación es, p.e., la dada por los dos primeros planos que forman el menor que dicta el rango). $(*)$ =Compruébese.

$\diamond$

Ejercicio resuelto 10.43. *Para que valores de a y b los siguientes planos:*

$$\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0;\ \sigma: x + 2y - z + b = 0;\ \tau: x + ay - 6z + 10 = 0,$$

a) tienen un solo punto en común.

b) pasan por una recta.

c) se cortan dos a dos formando una 'cabaña' (prisma).

$|A| = 5a - 35 = 0 \leftrightarrow a = 7$

a) — para $a \neq 7 \to rg(A) = 3 = rg(A^*) \to SCD \Rightarrow \pi \cap \sigma \cap \tau = P$, los tres planos se cortan en un punto.

si $a \neq 7 \to \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & \boxed{-1} & 3 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & -1 & -b \\ 1 & 7 & 6 & -10 \end{array}\right] = A^* \to \begin{vmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & -b \\ 1 & 7 & -10 \end{vmatrix} = 15b - 45 = 0 \leftrightarrow b = 3$

b) — $a = 7 \ \wedge \ b = 3 \to rg(A) = 2 = rg(A^*) \to SCI \pi \cap \sigma = r$, los planos pasan por una recta r.

c) — $a = 7 \ \wedge \ b \neq 3 \to rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*) \to SI$, como ningún vector asociado es paralelo a otro, los planos pasan se cortan dos a dos formando un prisma ('cabaña'). $\diamond$

Ejercicio resuelto 10.44. *Considera la recta y el plano:*

$$r: \begin{cases} x + (1+m)y + z = 0 \\ (2+m)x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad ; \qquad \pi: \ 3x - z = m$$

a) Estudia la posición relativa de recta y plano en función del parámetro m.

b) Para $m = 1$ determina el punto donde la recta 'pincha' al plano.

—— a) Buscamos un vector director de la recta como producto vectorial de los vectores asociados de los planos que la definen:

$\vec{v}_r = (1, 1+m, 1) \times (2+m, -1, 2) = (*) = (2m-1, m+4, -m^2 - 3m - 3)$
$(*)$ =Compruébese

Vector asociado del plano: $\vec{n}_\pi = (3, 0, -1)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = m^3 - 3m = 0 \leftrightarrow m = 0 \ \vee \ m = 3$

— $m \notin \{0, 3\} \to r \cap \pi = P$, la recta y el plano se cortan en un punto (la recta 'pincha' al plano).

— $m=0 \to \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \to \begin{cases} r||\pi \\ \vee \\ r\subset\pi \end{cases}$. Para dircernir: ¿ $P_r \in \pi$?

Una solución particular de las ecuaciones de r es $P_r(0,0,0)$, el plano π es, ahora, $\pi(m=0):\ 3x-z=0$, como $3\cdot 0-0=0$, el punto está en el plano y tora la recta también, luego $r\subset\pi$, la recta está contenida en el plano.

— $m=3 \to \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \to \begin{cases} r||\pi \\ \vee \\ r\subset\pi \end{cases}$. Para dircernir: ¿ $P_r \in \pi$?

Una solución particular de las ecuaciones de r es $P_r(0,0,0)$, el plano π es, ahora, $\pi(m=3):\ 3x-z=3$, como $3\cdot 0-0\neq 3$, el punto no está en el plano, $P_r\notin\pi$, por lo que $r||\pi$, la recta es paralela al plano.

—— b) Para $m=1\notin\{0,3\}\to r\cap\pi=P$. Para encontrar el punto en que la recta 'pincha' (intersecta) al plano, sustituiremos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación general de π:

$$r(m=1)\ \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \vec{v}_r(-3,5,-7) \end{cases} \equiv(-3\lambda,5\lambda,-7\lambda);\quad \pi(m=1):\ x-3z=1$$

$$(-3\lambda)-3(-7\lambda)=1\to 10\lambda=1\to\lambda=1/18\Rightarrow r\cap\pi=P(-1/6,5/18,-7/18)$$

◇

Ejercicio resuelto 10.45. *Sea* $P(2,1,0)$ *y* $r:\ x=\dfrac{2-y}{2}=z+2$. *Calcula la ecuación del plano que pasa por* P *y es perpendicular a* r.

$$r:\ x=\frac{2-y}{2}=z+2\ \equiv\ x=\frac{y-2}{-2}=z+2\to r:\ \begin{cases} P_r(0,2,0) \\ \vec{v}_r=(1,-2,1) \end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases} P \\ \perp r \end{cases}\equiv\pi:\begin{cases} P(2,1,0) \\ \vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,-2,1) \end{cases}\to$$

$$(x-2)-2(y-1)+(z-0)=0\to\ \pi:\ x-2y+z=0$$ ◇

Ejercicio resuelto 10.46. *Considera el plano* $\pi:\ 3x+ay+z-6=0$. *Encuentra el valor de* a *para que la recta* r *que pasa pr* $P(1,1,2)$ *y es* *perpendicular al plano, sea paralela al plano* $\tau:\ x-y-3=0$*. Encuentra, también, las ecuaciones paramétricas de dicha recta.*

Busquemos, primero, la ecuación de r, que pasa por P y es perpendicular a $\pi(a)$, evidentemente, r será función de a, $r(a)$. Determinaremos a exigiendo que $r(a) \,||\, \tau$, es decir, $\vec{v}_r(a)\cdot\vec{n}_\tau=0$.

$$r(a)\begin{cases}P\\ \perp\pi\end{cases}\equiv\begin{cases}P(1,1,2)\\ \vec{v}_r=\vec{n}_\pi=(3,a,1)\end{cases}\rightarrow r(a):\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{a}=\frac{z-2}{1}$$

De todas estas rectas que dependen del parámetro a, vamos a elegir la que sea paralela al plano τ, es decir, la que haga que $\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\tau=0$.

$(3,a,1)\cdot(1,.1,0)=3-a=0\leftrightarrow a=3$

Para $a=3$, las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}$

◇

Ejercicio resuelto 10.47. *Encuentra el punto de intersección de* $r:(1+\lambda,2-\lambda,\lambda)$ *con el plano* π*, perpendicular a* r *que pasa por el origen de coordenadas.*

$$\pi:\begin{cases}P(0,0,0)\\ \vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,-1,1)\end{cases}\rightarrow\quad\pi:\ x-y+z=0$$

$(1+\lambda)-(2-\lambda)+(\lambda)=0\rightarrow\lambda=1/3\Rightarrow r\cap\pi=P(4/3,\ 5/3,\ 1/3)$ ◇

Ejercicio resuelto 10.48. *Sean:* $\pi: tx+y-7z+5=0$; $\sigma: x+2y+t^2z-8=0$*. Determina* t *para que los planos se corten en una recta que pase por* $P(0,2,1)$ *pero no pasa por el punto* $Q(6,-3,2)$

Los dos planos se cortan en $r(t):\begin{cases}tx+y-7z+5=0\\ x+2y+t^2z-8=0\end{cases}$

Si $P(0,2,1)\in r\rightarrow r(t):\begin{cases}t\cdot0+2-7\cdot1+5=0\\ 0+2\cdot2+t^2\cdot1-8=0\end{cases}\rightarrow t=2\ \vee\ t=-2$

$$r(2):\begin{cases}2x+y-7z+5=0\\ x+2y+4z-8=0\end{cases}\qquad r(-2):\begin{cases}-2x+y-7z+5=0\\ x+2y+4z-8=0\end{cases}$$

¿ $Q(6,-3,2)\in r(2)$? ¿ $Q(6,-3,2)\in r(-2)$?

$$\begin{cases}12-3-14+5=0\\ 6-6+8-8=0\end{cases}\quad Q\in r\qquad \begin{cases}-12-3-14+5\neq 0\\ 6-6+8-8=0\end{cases}\quad Q\notin r$$

Luego, el valor pedido es $\boldsymbol{t=-2}$. ◇

Ejercicio resuelto 10.49. *Encuentra la ecuación de una recta que pase por $P(1,2,3)$ y sea paralela a los planos $\pi: 2x-y+3z+1=0$ y $\sigma: 3x+2y-z+2=0$*

El vector director de la recta ha de ser perpendicular a los vectores directores de los planos a los que es paralela: $\vec{v}_r\perp\vec{n}_\pi\ \wedge\ \vec{v}_r\perp\vec{n}_\sigma \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi\times\vec{n}_\sigma = (2,-1,3)\times(3,2,-1) = (*) = (-5,11,7)$ [(∗) = hágase] , luego:

$$r:\begin{cases}P\\ ||\pi\\ ||\sigma\end{cases}\equiv\begin{cases}P(1,2,3)\\ \vec{v}_r=(-5,11,7)\end{cases}\rightarrow r:\ (1+5\lambda,2+11\lambda,3+7\lambda)$$ ◇

Ejercicio resuelto 10.50. *Sean $P(2,0,0)$, $Q(0,1,0)$, $R(0,0,3)$. determina la ecuación del plano que pasa por los tres puntos y calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el origen de coordenadas.*

La forma más rápida es escribir la ecuación segmentaria del plano, si no se recuerda, tómese un punto como tal y con los otros dos constrúyanse dos vectores directores.

$$\pi:\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}-1=0\rightarrow 3x+6y+2z-6=0$$

$$r:\begin{cases}\mathcal{O}\\ \perp\pi\end{cases}\equiv\begin{cases}\mathcal{O}(0,0,0)\\ \vec{v}_r=\vec{n}_\pi=(3,6,2)\end{cases}\rightarrow r:\ (3\lambda,6\lambda,2\lambda)$$

◇

Ejercicio resuelto 10.51. *Sean* $r:\ (3+2\lambda,-4-3\lambda,-2\lambda)$ *y* $s:\ (-7+4\mu,1-\mu,2)$*. Comprueba que se cortan en un punto, encuéntralo y determina el plano que determinan ambas rectas.*

$\vec{v}_r=(2,-3,-2) \not\parallel \vec{v}_s=(4,-1,0) \rightarrow r$ y s se cortan o se cruzan.

$\overrightarrow{P_rP_s}=P_s-P_r=(-7,1,2)-(3,-4,0)=(-10,5,2)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow r\cap s=P$$

$(3+2\lambda,-4-3\lambda,\boxed{-2\lambda})=(-7+4\mu,1-\mu,\boxed{2}) \rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$

$r\cap s=P(1,-1,2)$

$$\pi:\ \begin{cases}\subset r\\ \subset s\end{cases} \equiv \begin{cases}P(1,-1,2)\\ \vec{u}=\vec{v}_r=(2,-3,-2)\\ \vec{v}=\vec{v}_s=(4,-1,0)\end{cases} \rightarrow \pi:(1+2\theta+4\varphi,-1-3\theta-\varphi,2-2\theta)$$

◇

Ejercicio resuelto 10.52. *Sea:* $r:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

a) Determina la ecuación de π *sabiendo que es perpendicular a* r *y pasa por* $P(1,2,3)$*.*

b) Encuentra la ecuación de σ*, paralelo a* r *y que pasa por* $P(1,2,3)$ *y* $Q(-1,0,2)$*.*

c) Sea s *la recta en que se cortan* π *y* σ*. Determina las posiciones relativas de* r *y* s*.*

$$r:\ \begin{cases}P_r(1,0,-1)\\ \vec{v}_r=(3,2,-1)\end{cases}$$

— a) $\pi:\ \begin{cases}P(1,2,3)\\ \vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(3,2,-1)\end{cases} \rightarrow 3(x-1)+2y-(z+1)=0 \Rightarrow$

$\pi:\ 3x+2y-z-4=0$

— b) $\sigma : \begin{cases} P(1,2,3) \\ ||r \to \vec{u} = \vec{v}_r = (3,2,-1) \\ P,\ Q \to \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-2,-2,-1) \end{cases}$

$$\to \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma :\ 4x - 5y + 2z = 0$$

— c) $\vec{n}_\pi = (3,2,-1) \not\parallel \vec{n}_\sigma = (4,-5,2) \to \pi \cap \sigma = s$, los planos se cortan en una recta, de ecuación: $s : \begin{cases} 3x + 2y - z - 4 = 0 \\ 4x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$

Veamos las posiciones relativas de r y s:

$s :\ \ x = 1 \to y = 2;\ z = 3 \to S_1(1,2,3);\ \ \ x = 2 :\to y = 12;\ z = 26 \to S_2 = (1,12,26) \Rightarrow \vec{v}_s = \overrightarrow{S_1S_2} = (1,10,23)$ $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (1,2,3) - (1,0,-1) = (0,2,4)$
$rightsquigarrow(0,1,2)$

$det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 23 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Rightarrow$ las rectas r y s se cruzan en el espacio. $\diamond$

Ejercicio resuelto 10.53. *Encuentra los extremos del segmento $\overline{AB}$, sabiendo que A es un punto del plano $\pi :\ 2x + y + z = 0$ y B pertenece a la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ y que el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M_{\overline{AB}} = (0,0,0)$.*

$B \in r \to B(1+2\lambda, 2-\lambda, 3\lambda)$ Si $(0,0,0)$ es el punto medio de $\overline{AB}$, entonces el punto a ha de ser $A(-1-2\lambda, -2+\lambda, -3\lambda)$.

Como además $B \in \pi \to\ 2(-1-2\lambda) - 2 + \lambda - 3\lambda = 0 \to \lambda = -2/3$

Por tanto, $A(-1/3,\ -8/3,\ -2);\ \ B(1/3,\ -8/3,\ 2)$ $\diamond$

10.6.2. Ejercicios propuestos

1. Determina la posición relativa de las siguientes rectas:

   a) $r:\ (x,y,z)=(0,-5,3)+\lambda(1,1,1);\quad s:\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$

   b) $r:\ (2,2,2)+\lambda(1,1,1);\quad s:\ (0,0,0)+\mu(1,0,0)$

   c) $r:\ \begin{cases} y-z-3=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases};\quad s:\ \begin{cases} -y+z=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{cases}$

   Solución: *a*) *paralelas*; *b*) secantes en $(0,0,0)$; *c*) se cruzan.

2. Halla la posición relativa de estos planos:

   a) $\pi: -x+2y-z=0;\quad \sigma:\ x-2y+z+1=0$

   b) $\pi: x-z+11=0\quad \sigma:\ -2y-z+11=0$

   c) $\pi:\ (1+\lambda, 2+\lambda+\mu, 3+\lambda);\quad \sigma:\ x-z+2=0$

   Solución: *a*) *paralelos*; *b*) *secantes*; *c*) *coincidentes*.

3. Encuentra la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas:

   $r:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+4}{3};\quad s:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{3}$

   Solución: $\pi:\ 8x-7y-5z=0$.

4. Encuentra la ecuación de la recta paralela al eje OY que pase por el punto $(4,-2,3)$

   Solución: $r:\ (4,-2+\lambda,3)$.

5. ¿Pertenece el punto $(-1,2,7)$ a la recta $r:\ \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=2+3\lambda \end{cases}$? En caso negativo, obtén la ecuación paramétrica de la recta s paralela a r que pase por dicho punto.

   Solución: No; $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=7+3\lambda \end{cases}$.

6. Determina el valor de k para que las siguientes rectas se corten en un punto:

$$r: \ \frac{x-k}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{0}; \quad s: \ (1, 6+4\lambda, -1+2\lambda)$$

Solución: $k = 4$.

7. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $P(-2,-1,-4)$ y se apoya em las rectas:

$$r: \ (4+\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda); \quad s: \begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Solución: $t: \begin{cases} x - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$.

8. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $P(1,0,0)$ y corta a las rectas:

$$r: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases} ; \quad s: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$$

Solución: $t: \ (\theta, 2-2\theta, -3+3\theta)$.

9. Considera el segmento $\overline{AB}$, de extremos $A(1,2,2)$ y $B(2,m,m)$. Determina m para que la recta que une A y B pase por el origen de coordenadas. Determina la ecuación de dicha recta.

Solución: $m = 4$; $\quad r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$.

10. De todas las rectas que pasan por $0, 2, -1)$, encuentra la que corta a $r: \ (1+2\lambda, 1-\lambda, 2)$ y a $s: \ (-3\mu, 1+\mu, 1+2\mu)$.

Solución: $t: \ (12\theta, 2-5\theta, -1-6\theta)$.

11. Encuentra la ecuación de la recta contenida en $\pi: \ x+2y+6z-2=0$ que corta a los ejes OY y OZ.

.

La recta buscada pasa por $\pi \cap OY$ y por $\pi \cap OZ$

Solución: $r: \ (0, 1-\lambda, \lambda/3)$.

12. Determina la ecuación del plano que pasa por $(4, 0, -1)$ y contiene a la recta $(1 - \lambda, -1 + 3\lambda, 5 + 2\lambda)$

Solución: $\pi: \ 2x + z = 7$.

13. Encuentra los puntos donde el plano $\pi: \ 2x - 3y + 5z - 30 = 0$ corta a los ejes coordenados.

Solución: $(15, 0, 0)$; $(0, -10, 0)$; $(0, 0, 6)$.

.

La ecuación segmentaria acorta el problema.

14. Busca el plano paralelo al $2x - 2y + 3z - 12 = 0$ que pasa por $(-2, 3, -1)$.

Solución: $2x - 2y + 3z + 13 = 0$.

15. Ecuación del plano que contiene a $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$.

Solución: $6x + 5y - 2z + 5 = 0$.

16. Sean $P(1, 1, 2)$, $Q(0, 0, 1)$, $R(0, -1, -1)$. Encuentra la ecuación del plano que los contiene y determina el valor de t para que $T(t, 0, 0)$ sea coplanario con ellos.

Solución: $x - 2y + z - 1 = 0; \quad t = 1$.

17. Calcula la ecuación de la recta que pasa por la intersección de los planos $x + y - z + 6 = 0$ y la recta $x/3 = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Solución: $(-9 + \lambda, -1 - 3\lambda, -4 - 13\lambda)$.

18. Encuentra el plano paralelo a $r: \ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{z+3}{4}$ y que pasa por los puntos $P(2, 2, -3)$ y $Q(-3, 0, 1)$.

Solución: $4x + 28y + 19z - 7 = 0$.

19. Determina la posición relativa de las rectas $r:\ (x,y,z)=(1,2,0)+\lambda(-3,1,-1)$ y $s:\ \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ y calcula, si es posible, la ecuación del plano que las contiene.

Solución: Secantes; sí es posible: $x-4y-6z+1=0$.

20. Determina la posición relativa de las rectas $r:\ \begin{cases} x+2y-z-13=0 \\ 2x-y-7z-16=0 \end{cases}$ y $s:\ (1-3\lambda, 2+\lambda, -\lambda)$ y calcula, si es posible, la ecuación del plano que las contiene.

Solución: Paralelas; sí es posible: $y+z-2=0$.

21. Estudia la posición relativa de las siguientes ternas de planos:

$a)\ \begin{cases} \pi:\ 4x+y+3z+2=0 \\ \sigma:\ -3x+5y+4z-7=0 \\ \tau:\ y+3z-6=0 \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} \pi:\ x-2y+3z-1=0 \\ \sigma:\ 2x+y-z+5=0 \\ \tau:\ 7x-4y+7z+7=0 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} \pi:\ 6x-3y+9z-1=0 \\ \sigma:\ -x+2y-z+1=0 \\ \tau:\ 4x-2y+6z+5=0 \end{cases}$ $\quad d)\ \begin{cases} \pi:\ 2x-3y+z=0 \\ \sigma:\ 2x-y+4z+5=0 \\ \tau:\ 6x-5y+9z-1=0 \end{cases}$

Solución: $a)$ $\pi\cap\sigma\cap\tau=P$; $b)$ $\pi\cap\sigma\cap\tau=r$; $c)$ $\pi||\tau$; σ los corta; $d)$ forman un prisma .

22. Determina si el plano $2x+3y=4$ corta o no al segmento de extremos $P(2,1,3)$ y $Q(3,2,1)$.

Solución: Calcula $P=\pi\cap r_{AB}\rightarrow$ ¿$P\in\pi$? .

Solución: No .

23. Sean $r:\ (x-5)/2=(y+2)/(-1)=z/4$ y $s:\ \begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$.

Determina la posición relativa que ocupan en el espacio y encuentra la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución: Se cruzan, $\pi:\ 9x-2y-5z-49=0$.

24. Considera las rectas $s: \begin{cases} 2x+y+2z-5=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 2x-y=t \\ 2y+z=3 \end{cases}$.
Determina el valor de t para que las rectas se corten y, para $t=1$, encuentra la ecuación del plano que las contiene.

Solución: $t=1$; $\pi:\ 10x+7y+6z=23$.

25. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas en función del parámetro k:
$$r:\ \frac{x-k}{1}=\frac{y+1}{2k-1}=\frac{z}{2}; \qquad s:\ \frac{x}{k+1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

Solución: Para $k \notin \{-3,\ -1/2\} \to$ se cruzan; si $k=-3 \to$ son secantes y para $k=-1/2 \to$ paralelas.

26. Determina el valor de m para que las siguientes rectas se corten y averigua dónde lo hacen:
$$r:\ \begin{cases} 3x+y-1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}; \qquad s:\ (x,y,z)=(a,-1,-1)+\lambda(2,1,-2)$$

Solución: $m=-5/4 \ \to\ r\cap s = P\ (3/4,\ -5/4,\ -1/2)$.

27. Considera la recta $r:\ (2+\lambda, 2+2\lambda, 3+3\lambda)$, el plano $\pi:\ 2x-4y-2z=0$ y el punto $P(1,1,1)$. Se pide:

   a) Ecuación del plano σ, paralelo a π y que pasa por P.

   b) Ecuación del plano τ, que contiene a r y pasa por P.

Solución: $\sigma:\ x-2y-z+2=0$; $\tau:\ x+y-z-1=0$.

28. Calcula el valor de t para que la recta $r:\ \begin{cases} 5x-y+z=0 \\ x-y-z=-4 \end{cases}$ sea paralela al plano $\pi:\ tx-6y+4z=5$.

Solución: $t=26$.

29. ¿Para qué valores del parámetro m la recta $r:\ x=y+1=\dfrac{11-mz}{3}$ es paralela al plano $\pi:\ 2x+y+z-9=0$?. Determina el punto de intersección de r y π cuando $m=2$.

Solución: $m=1$; $m=2 \to r\cap\pi = P(3,2,1)$.

30. Discute, en función de a, la posición relativa de los siguientes planos:

$\pi_1:\ (a+1)x+y+z=3;\quad \pi_2:\ x+2y+az=4;\quad \pi_3:\ x+ay+z=2a$

Solución: $a \notin \{-3,0,2\} \rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P;\ \ a=-3\ \wedge\ a=0 \rightarrow.$
$\rightarrow$ se cortan dos a dos, $\ a=2 \rightarrow \pi_1 \cap (\pi_2 \equiv \pi_3) = r$.

31. Considera los tres planos siguientes en el espacio:

$\pi:\ x+2y+z=1;\ \ \sigma:\ px+y+pz=1;\ \ \tau:\ px+y+2z=1$

a) Para qué valores de p los tres planos se cortan en un único punto. Encontrarlo para $p=1$.

b) ¿Hay algún valore de p para el cual los tres planos tengan en común una recta?. Determinarla.

c) Enconrtar la posición relativa de los tres planos para $p=1/2$

Solución: *a)* $p \notin \{1/2,\ 2\};\ \ p=1 \rightarrow \pi \cap \sigma \cap \tau = P(1,0,0)$.
b) $p=2 \rightarrow \pi \cap (\sigma \equiv \tau) = r:\ (1/3-\lambda,\ 1/3,\ \lambda)$.
c) $\pi \,||\, \tau;\quad \begin{cases} \tau \cap \pi = r_1 \\ \tau \cap \sigma = r_2 \end{cases};\quad r_1 \,||\, r_2$.

32. Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-1,1)$ y $B(0,3,-2)$ y es paralelo al eje Z.

Solución: $4x+y-3=0$.

33. Determina la ecuación del plano paralelo a los ejes X e Y y que pasa por el punto de intersección de la recta $r:\ (2+t,1-t,3t)$ con el plano $\pi:\ x+2y-2z+3=0$.

Solución: $\sigma:\ z=3$.

34. Encuentra la ecuación de la recta paralela a los planos XY y XZ y que pasa por el punto $P(1,-1,3)$.

Solución: $r:\ \begin{cases} y=-1 \\ z=3 \end{cases}$.

35. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $P(-1,2,3)$ y que toca a los ejes X y Z.

Solución: $r:\ (-\lambda,2\lambda,3\lambda)$.

36. Divide el segmento $A(1,2,1)$, $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales mediante dos planos π y σ perpendiculares a la recta determinada por los puntos A y B. Da las ecuaciones de dichos planos.

Solución: $x+y-z=0; \quad 3x+3y-3z+4=0$.

37. Determina el alor del parámetro k para que los planos $\pi: \ 2x-4y+6z+5=0$ y $\sigma: \ kx+2y-3z-1=0$ sean: a) paralelos; y b) perpendiculares.

Solución: $a)\ k=-1; \quad b)\ k=13$.

38. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \ (1+\lambda, -1+2\lambda, \lambda)$ y es perpendicular al plano $\pi: \ 2x+y-z-2=0$.

Solución: $\sigma: \ x-y+z-2=0$.

39. Sean $r: \ \dfrac{x-1}{2}=y=2-z$ y $s: \ \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución: $\pi: \ 3x-5y+z-5=0$.

40. Calcula el valor del parámetro t para que las siguientes recta se corten en un punto y determina dicho punto:

$r: \ \dfrac{x}{4}=\dfrac{t-y}{1}=\dfrac{z-1}{2}; \qquad s: \ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$

Solución: $t=-1; \qquad P(6,\ -25/2,\ 4)$.

41. Determina el valor de k para que las siguientes rectas sean coplanarias y encuentra la ecuación del plano que las contiene:

$r: \ (1+\lambda, 1-\lambda, -1+\lambda); \qquad s: \ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-k}{1}=\dfrac{z}{0}$

Solución: $k=-1; \qquad x-y-2z-2=0$.

42. Determina el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios y encuentra la ecuación del plano que los contiene:

$A(0,1,2); \ B(7,2,1); \ C(1,2,3); \ D(m,0,1)$

Solución: $m=-1; \qquad x-4y+3z-2=0$.

43. Encuentra la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \ (1+\lambda, 2-\lambda, -1+2\lambda)$ y es perpendicular al plano $\pi : ; 2x - 3y + z = 0$

Solución: $\sigma: \ 5x + 3y - z - 12 = 0$.

44. Sean $\pi: \ kx - y + 4z = 2$ y $r: \begin{cases} 2x - z - 3 \\ 3x - y + z00 \end{cases}$.

a) Determina el valor de k para que la recta sea paralela al plano.

b) Determina el valor de k para que la recta sea perpendicular al plano.

Solución: $a)\ \ k = -3$; $\quad b)\ \ \nexists k \ / \ r \perp \pi$.

45. Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por $P(2, 1, -1)$, es perpendicular a $s: \begin{cases} x - 2z = -3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ y está contenida en $\pi: \ x + 2y + 3z = 1$.

Solución: $r: \ (2+\lambda, 1-5\lambda, -1+3\lambda)$.

46. Determina los valores de t para que la recta $r: \ x + 1 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{5}$ esté contenida en el plano $\pi: \ 2x + ty + 4x + 25 = 0$.

Solución: $t = -11$.

47. Sean $P(1, 0, 0)$, $r: \ (1-\lambda, 1+2\lambda, 0)$ y $s: \ x - 3 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$. Determina la posición relativa de r y s y encuentra, si es posible, la ecuación del plano que pasa por P y es paraleo a r y a s.

Solución: r y s se cruzan; sí es posible: $\pi: \ 2x + y + 2z = 2$.

48. Determina la posición relativa de $r: \ (\lambda, 1+\lambda, 2-\lambda)$ y $s: \ x + 1 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{5}$ y encuentra las ecuaciones de los planos π y σ sabiendo que π es paralelo a r y contiene a s y que σ es es paralelo a s y contiene a r. ¿Cómo son π y σ?

Solución: r y s se cruzan; $\pi: \ x + 2y - z - 4 = 0$; $\sigma: \ x + 2y - z = 0$; $\pi \ || \ \sigma$.

10.6.3. Cuestiones

Q1. ¿Verdadero o Falso? Justifica tus respuestas.

a) La recta $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ es paralela al plano $4x+3y+2z+1=0$

b) El plano anterior contiene a la recta $(-\lambda, 0, 2\lambda)$

c) El vector director de una recta dada por dos planos secantes es paralelo a los vectores asociados de ambos planos.

d) Si dos rectas r y s se cruzan, existe una única recta que pasa por un punto P dado y corta a ambas rectas.

e) Si los planos π y σ son paralelos al lano τ, el sistema de ecuaciones que forman los tres planos es compatible indeterminado.

f) La recta $(1+2\lambda, 2+\lambda, 0)$ está contenida en el plano de ecuación $3x-4y+kz-5=0$ para cualquier valor que tome el parámetro k.

• V, F, F, V, F, F

• a) $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \;\wedge\; P_r \notin \pi$; b) idem; c) $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \;\wedge\; \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

• d) $\pi_i = \{P\ ;\ \subset r_i\}$; $i=1,2 \rightarrow r = \pi_1 \cap \pi_2$; e) SI; f) $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow r \cap \pi = P$

Q2. ¿Qué posición relativa deben tener dos rectas para que determinen un único plano?

• $r \parallel s \;\vee\; r \equiv s$

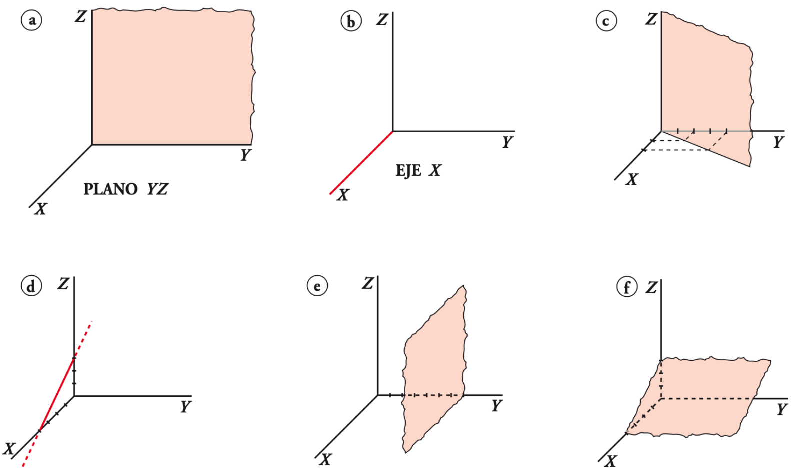
Q3. ¿Dónde corta el plano $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}-1=0$ a los ejes coordenados?

• $(2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,6)$

Q4. Para que valor de t la recta $(2+\lambda, -\lambda, 1+3\lambda)$ es paralela al plano $2x-y-mz+7=0$?

• $t=1$

Q5. Encuentra las ecuaciones de las rectas y planos que se ven en la siguiente figura:



a) $x = 0$; *b*) $(\lambda, 0, 0)$; *c*) $2x - y = 0$; *d*) $(4 + 4\lambda, 0, 3\lambda)$; *e*) $y = 7$; *f*) $3x + 4y - 12 = 0$.

10.7. Resumen

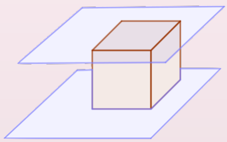
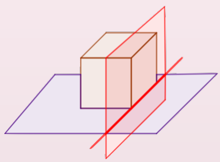
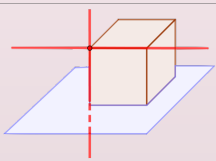
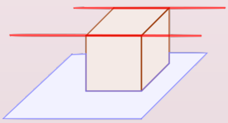
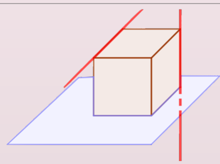
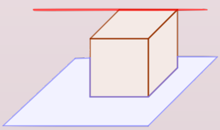
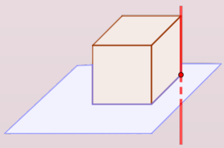
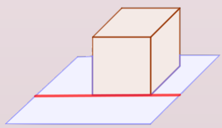
Resumen espació afín

$r:(x_0+\lambda u_x, y_0+\lambda u_y, z_0+\lambda u_z);\ \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z};\ \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

$\pi:(x_0+\lambda u_x+\mu v_x, y_0+\lambda u_y+\mu v_y, z_0+\lambda u_z+\mu v_z);\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_z & v_y & v_z \end{vmatrix}=0\rightarrow$

$\rightarrow Ax+By+Cz+D=0;\quad \vec{n}_\pi(A,B,C)\perp\pi.$

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS.

Posiciones relativas de 2 planos.		
Excepto planos coincidentes $\pi\equiv\sigma$ $\rightarrow$ Y rectas coincidentes $r\equiv s$ $\downarrow$	 Planos paralelos $\pi\,\|\|\,\sigma$	 Planos secantes $\pi\cap\sigma\equiv r$
Posiciones relativas de 2 rectas.		
 Rectas secantes $r\cap s\equiv P$	 Rectas paralelas $r\,\|\|\,s$	 Rectas que se cruzan
Posiciones relativas de recta y plano.		
 Recta paralela al plano $r\,\|\|\,\pi$	 Recta secante al plano $r\cap\pi\equiv P$	 Recta contenida en plano $r\subset\pi$

$$\boxed{r:\ P_r;\ \vec{v}_r;\quad s:\ P_s;\ \vec{v}_s;\quad \pi:\ P_\pi;\ \vec{n}_\pi;\quad \sigma:\ P_\sigma;\ \vec{n}_\sigma}$$

POSICIONES DOS RECTAS:

$$¿\,\vec{v}_r\,||\,\vec{v}_s\,?\rightarrow\begin{cases} \text{SÍ}\ \rightarrow\ ¿\,P_r\in s\,?\rightarrow\begin{cases}\text{SÍ}\ \rightarrow r\equiv s\\ \text{NO}\ \rightarrow r\,||\,s\end{cases} \\ \text{NO}\ \rightarrow\ ¿\,Det(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s})=0\,?\rightarrow\begin{cases}\text{SÍ}\ \rightarrow r\cap s=P\\ \text{NO}\ \rightarrow r\text{ y }s\text{ se cruzan}\end{cases}\end{cases}$$

	$rg(A)=2$	$rg(A)=3$
$rg(A*)=2$	$r\equiv s$	—
$rg(A*)=3$	$\vert\vert$	$r\cap s$
$rg(A*)=4$	—	r y s se cruzan

POSICIONES DOS PLANOS:

$$\pi\ ,\ \sigma \quad \begin{cases} \vec{n}_\pi \ ||\ \vec{n}_{sigma} \rightarrow \begin{cases} P_\pi \in \sigma \rightarrow \pi \equiv \sigma \\ P_\pi \notin \sigma \rightarrow \pi\ |1\ \sigma \end{cases} \\ \vec{n}_\pi \not|| \ \vec{n}_{sigma} \rightarrow \pi \cup \sigma \equiv r \end{cases}$$

$rg(A)=1=rg(A^*)$	$\rightarrow \pi\equiv\sigma$
$rg(A)=1\neq rg(A^*)$	$\rightarrow \pi\ \vert\vert\ \sigma$
$rg(A)=2=rg(A^*)$	$\pi\cap\sigma\equiv r$

POSICIONES RECTA Y PLANO:

$$¿\ \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi\ ?\rightarrow \begin{cases} SI \rightarrow ¿P_r \in \pi\ ? \begin{cases} SI \rightarrow r\subset\pi \\ NO \rightarrow r\ ||\ \pi \end{cases} \\ NO \longrightarrow r\cap\pi\equiv P \end{cases}$$

$rg(A)=2=rg(A^*)$	$\rightarrow r\subset\pi$
$rg(A)=2\neq rg(A^*)$	$\rightarrow r\ \vert\vert\ \pi$
$rg(A)=3=rg(A^*)$	$r\cap\pi\equiv P$

Capítulo 11

Problemas métricos

Euclides (ca. 325 a. C.-ca. 265 a. C.)

René Descartes (1596-1650)

Otras Geometrías

Euclides (325 aC – 265 aC), en Los Elementos, partió de cinco postulados para construir la Geometría. Si alguno de esos postulados no se cumple, entonces tenemos lo que se denominan Geometrías No Euclídeas.

El quinto postulado dice: *"Dada una recta y un punto exterior a ella, hay una única recta que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto".*

Cuando a principios del siglo XIX se intentó demostrar el postulado por reducción al absurdo se encontró, con sorpresa, que no se llegaba a una contradicción, que se podían construir geometrías que podían no verificarlo.

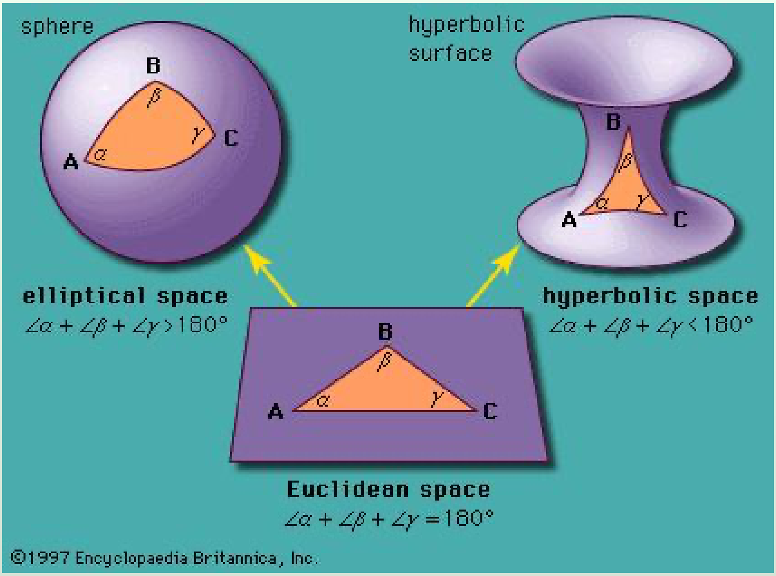
De modo independiente, distintos matemáticos (Gauss, Lobachevsky, Bolyai...), en ese intento de demostrar el quinto postulado llegaron a la Geometría Hiperbólica.

La Geometría Hiperbólica es tan consistente como la Geometría Euclídea, y "su" quinto postulado es: "Dada una recta y un punto exterior a ella, existen al menos dos rectas paralelas a la dada que contienen al punto". En la geometría hiperbólica la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que 180^o. Puedes pensar en una geometría hiperbólica si te sitúas sobre una trompeta.

Si reescribimos el quinto postulado como: "Dada una recta y un punto exterior a ella, no existe ninguna recta paralela a la dada que contenga al punto", se obtiene la Geometría Elíptica.

Imagina que estás en una esfera. Tendrás que redefinir qué entiendes como "rectas". Si una recta es el camino más corto posible que une dos puntos, tendrás lo que se conoce como líneas geodésicas (los meridianos de un globo terráqueo). Entonces, por una de esas nuevas rectas y un punto exterior, todas las rectas que traces cortan a la primera.

Si lo piensas, cada vez que miras un globo terráqueo estás viendo algo de Geometría Elíptica.



Actualmente las Geometrías No Euclídeas proporcionan otras formas de entender el mundo, siendo utilizadas, por ejemplo, en Teoría de la Relatividad, o en el estudio de fenómenos ópticos y propagación de ondas.

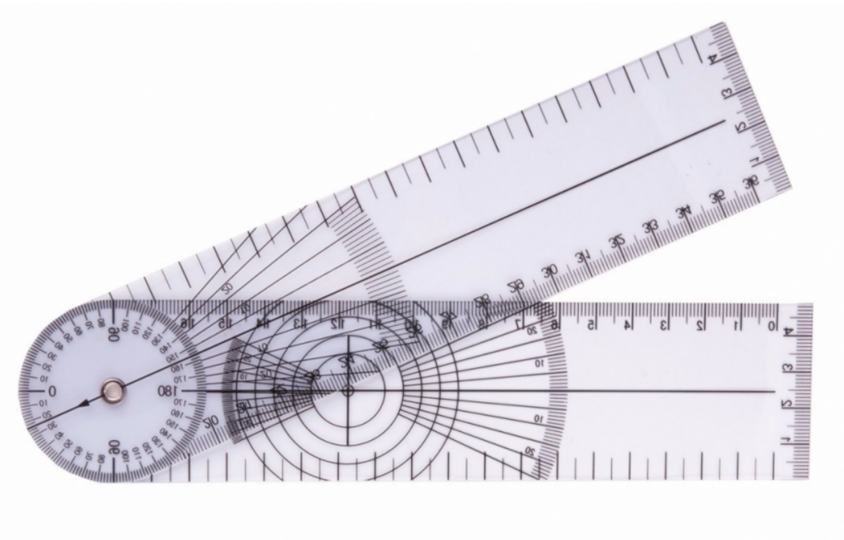
Texto: Marea Verde.

Conocidos, por los dos temas anteriores, los conceptos de:

- Vectores y sus componentes. Operaciones con vectores, geométrica y analíticamente.
- Productos escalar, vectorial y mixto, y su interpretación geométrica.
- Obtener los elementos característicos de una recta: un vector director y un punto.
- Obtener los elementos característicos de un plano: vector asociado, característico o normal y un punto, o dos vectores directores y un punto.

- Las distintas formas de expresar la ecuación de una recta y de un plano.
- Las posiciones relativas de rectas, de planos, y de recta y plano.

En este tema estudiaremos cómo **medir en el espacio**. La herramientas fundamentales son el **producto escalar** (la métrica: metro y goniómetro), el producto vectorial (nos proporcionará la idea de perpendicularidad) y el producto mixto de vectores (para el cálculo de volúmenes de paralelepípedos, prismas y tetraedros).



Con esto, seremos capaces de:

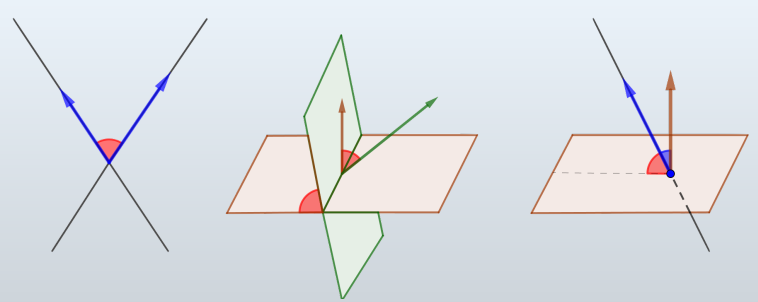
- Hallar la distancia desde un punto a: otro punto, un plano o una recta.
- Hallar la distancia entre rectas y planos.
- Hallar el ángulo que forman dos rectas, dos planos o una recta con un plano.

- Conocer las condiciones para que dos rectas sean paralelas o perpendiculares.
- Conocer las condiciones para que dos planos sean paralelos o perpendiculares.
- Conocer las condiciones para que una recta y un plano sean paralelos o perpendiculares.
- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a dos rectas (perpendicular común).
- Hallar el punto simétrico respecto a: otro punto, una recta o un plano.
- Calcular áreas y volúmenes.

En lo que sigue del tema, usaremos los siguientes puntos, rectas y planos (salvo que se advierta lo contrario): $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$, $r: \{P_r, \vec{v}_r\}$, $s: \{P_s, \vec{v}_s\}$, $\pi: \{P_\pi, \vec{n}_\pi\}$, $\sigma: \{P_\sigma, \vec{n}_\sigma\}$.

11.1. Ángulos

Ángulos



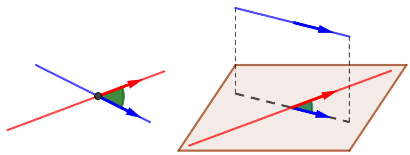
11.1.1. Ángulo entre dos rectas

Definimos el ángulo que forman dos rectas como aquel que forman sus vectores directores. Para asegurarnos que cogemos el menor de los dos ángulos posibles usaremos el concepto de 'valor absoluto'. (Ver 'producto escalar' en apartado 9.2.)

Producto escalar: $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r|\;|\vec{v}_s|\;\cos\theta, \quad \theta = \measuredangle(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta = \measuredangle(r,s) \equiv \measuredangle(\vec{v}_r, \vec{v}_s) \;\rightarrow\; \cos\theta = \frac{|\;\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s\;|}{|\vec{v}_r|\;|\vec{v}_s|}}}$$

Justificamos la formula con una imagen el caso de rectas que se cortan o se cruzan, evidentemente, para rectas paralelas o coincidentes, $\theta = 0^o$, la fórmula también funciona.

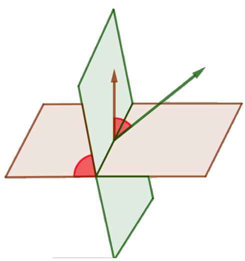


11.1.2. Ángulo entre dos planos

Definimos el ángulo que forman dos planos como aquel que forman sus vectores asociados. Como en el caso anterior (ángulo de dos rectas), usaremos el 'valor absoluto'.

$$\boxed{\boldsymbol{\theta = \measuredangle(\pi,\sigma) \equiv \measuredangle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_\sigma) \;\rightarrow\; \cos\theta = \frac{|\;\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma\;|}{|\vec{n}_\pi|\;|\vec{n}_\sigma|}}}$$

Como en el caso anterior, $\theta = 0^o$ para planos coincidentes o paralelos, como prevé la fórmula. Para los demás (planos secantes en una recta) mostramos esta imagen.



11.1.3. Ángulo entre recta y plano

Definimos el ángulo que forman recta y plano como el 'complementario' al que forman el vector director de la recta con el vector asociado al plano.

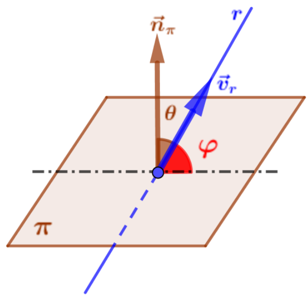
$$\boldsymbol{\varphi = \measuredangle(r,\pi) \equiv 90^o - \theta,\ \theta = \measuredangle(\vec{v}_r, \vec{n}_\pi)\ \rightarrow\ \cos\theta = \frac{|\ \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi\ |}{|\vec{v}_r|\ |\vec{n}_\pi|}}$$

Evidentemente, si la recta es paralela o está contenida en el plano,

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$\rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \leftrightarrow r \mid\mid \pi \rightarrow$

$\rightarrow \theta = 90^o \Rightarrow \varphi = 0^o$



Paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos

$r \mid\mid s \ \leftrightarrow\ \vec{v}_r \mid\mid \vec{v}_s$ $\qquad$ $r \perp s \ \leftrightarrow\ \vec{v}_r \perp \vec{v}_s$

$\pi \mid\mid \sigma \ \leftrightarrow\ \vec{n}_\pi \mid\mid \vec{n}_\sigma$ $\qquad$ $\pi \perp \sigma \ \leftrightarrow\ \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\sigma$

$\boldsymbol{r \mid\mid \pi \ \leftrightarrow\ \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi}$ $\qquad$ $\boldsymbol{r \perp \pi \ \leftrightarrow\ \vec{v}_r \mid\mid \vec{n}_\pi}$

Ejemplo 11.1. *Considera las rectas* $r:\ (1+\lambda, 2, 3-\lambda)$, $s:\ (\mu, 1-\mu, 2\mu)$ *y los planos* $\pi:\ x+y+z+3=0$ *y* $\sigma:\ x-2x=0$. *Encontrar el ángulo que forman las rectas* r *y* s*, el que forman los planos* π *y* σ *y el que forman la recta* r *y el plano* π*.*

— ángulo r y s:

$\vec{v}_r = (1,0,-1);\ |\vec{v}_r| = \sqrt{2};\quad \vec{v}_s = (1,-1,2);\ |\vec{v}_s| = \sqrt{6}$

$$|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s| = |-1| = 1 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} \Rightarrow \measuredangle(r,s) = \theta = 73.22^o$$

— ángulo π y σ:

$\vec{n}_\pi = (1,1,1);\ |\vec{n}_\pi| = \sqrt{3};\quad \vec{n}_\sigma = (1,0,-2);\ |\vec{n}_\sigma| = \sqrt{5}$

$$|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma| = |-1| = 1 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \Rightarrow \measuredangle(r,s) = \theta = 75.04^o$$

— ángulo r y π:

$\vec{v}_r = (1,0,-1);\ |\vec{v}_r| = \sqrt{2};\quad \vec{n}_\pi = (1,1,1);\ |\vec{n}_\pi| = \sqrt{3}$

$|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi| = |0| = 0 \rightarrow \cos\theta = 90^o \Rightarrow \measuredangle(r,s) = 90^o - \theta = 0^o \leftrightarrow r \,||\, \pi$

11.2. Distancias, Proyecciones Ortogonales y Simétricos

11.2.1. Distancia entre puntos

Dados $P, Q \in E_3$ dos puntos del espacio, se define la distancia entre ellos como el modulo del vector que los une, es decir:

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

Propiedades: $\quad d(P,Q) = d(Q,P)$; $\qquad d(P,Q) = 0 \leftrightarrow P = Q$.

——— **Simétrico de un punto P respecto de otro Q**

Dados P y Q, el simétrico de P respecto de Q será un punto $P' = sim_Q\ P$ tal que Q sea el punto medio del segmento $\overline{PP'}$:

$$\frac{P + P'}{2} = Q \rightarrow \quad P' = 2Q - P$$

11.2.2. Distancia de un punto a una recta

——— **Proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r**

Dados punto P y recta r, buscamos el plano π que es perpendicular a r y pasa por P

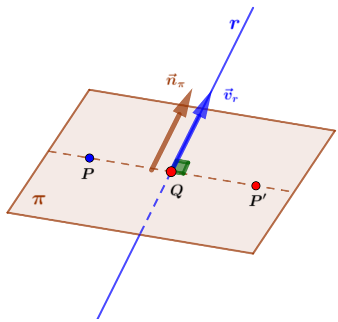
1. El plano π corta a la recta r en un punto Q
2. Q es la proyección ortogonal de P sobre r.

Ver figura en apartado siguiente.

——— Simétrico de un punto P respecto de una recta r

Dados punto P y recta r, buscamos Q, la proyección ortogonal de P sobre r, como se ha descrito anteriormente. Ahora, exigimos que Q sea el punto medio del segmento formado por los puntos P dado y P', el simétrico que estamos buscando.

1. Q es la proyección ortogonal de P sobre r, $Q = Proy_r(P)$
2. P' será tal que $\dfrac{P+P'}{2} = Q \rightarrow P' = 2Q + P$



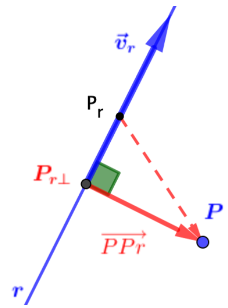
Vamos ahora a por la **distancia de un punto P a una recta r**, veremos tres métodos, cada uno con sus ventajas e inconvenientes.

MÉTODO DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL: Dados P y r, buscamos Q, la proyección ortogonal de P sobre r. Definimos la distancia entre punto y recta como la distancia entre el punto y su proyección ortogonal sobre la recta, de esto modo obtenemos la menor de las distancias posibles entre P y un punto de r. $\boldsymbol{d(P,r) = d(P,Q)}$, $Q = Proy_r(P)$

MÉTODO DEL VECTOR VARIABLE: Dados P y r, tomamos un punto P_r, variable (con su parámetro λ) de la recta r con el que formamos el 'vector variable' $\overrightarrow{PP_r}$ que une a P con un punto cualquiera de r.

Exigimos ahora que $\overrightarrow{PP_r} \perp r$ para obtener el 'punto de r que está frente a P, eso nos determinará el λ que define el $P_{r\perp}$ que mide la distanca mínima.

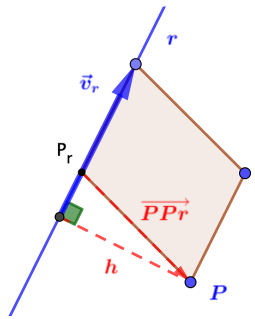
$\boldsymbol{d(P,r) = d(P, P_{r\perp})}$, $P_{r\perp}$ es el punto de r que está frente a P



MÉTODO VECTORIAL: Dados P y r, tomamos un punto determinado cualquiera $P_r \in r$, y formamos el paralelepípedo de lados $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PPr}$

Como el área A de un paralelogramo es igual a su base b por la altura h, calculamos el área por medio del producto vectorial, $A = |\vec{v}_r \times \overrightarrow{PP_r}|$, la base es $|\vec{v}_r|$ y la altura h es la distancia buscada.

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,r)}} = h = \boxed{\frac{|\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{PP_r}}|}{|\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}|}}$$



De los tres métodos visto, el primero es el más largo pero tiene la ventaja de que nos proporciona la proyección ortonormal y el simétrico de P respecto de r (si nos lo piden).

11.2.3. Distancia de un punto a un plano

Proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π

Dados punto P y plano π, buscamos la recta r que es perpendicular a π y pasa por P

1. La recta r corta al plano π en un punto Q

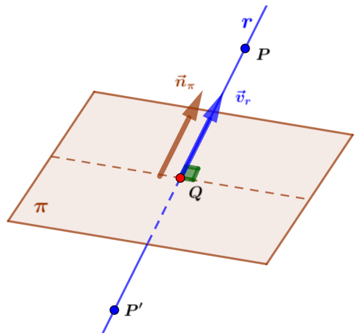
2. Q es la proyección ortogonal de P sobre π.

Ver figura en apartado siguiente.

Simétrico de un punto P respecto de un plano π

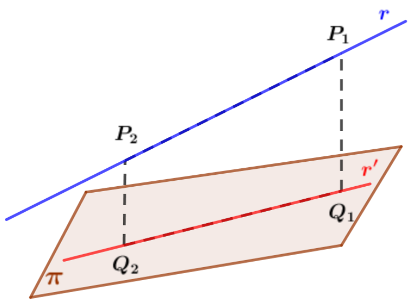
Dados punto P y plano π, buscamos Q, la proyección ortogonal de P sobre π, como se ha descrito anteriormente. Ahora, exigimos que Q sea el punto medio del segmento formado por los puntos P dado y P', el simétrico que estamos buscando.

1. Q es la proyección ortogonal de P sobre π.
2. P' será tal que $\frac{P+P'}{2} = Q \rightarrow P' = 2Q + P$



Simétrico r' de una recta r respecto de un plano π

Basta con calcular los puntos simétricos respecto del plano de dos puntos cualesquiera de la recta y con ellos trazar la recta simétrica. Si la recta corta al plano uno de esos puntos y su simétrico pueden ser el punto de incidencia; si la recta está contenida en el plano, su simétrica es ella misma.

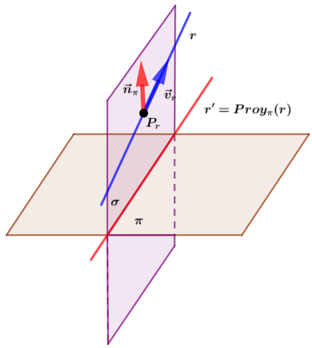


Otra forma de calcular la recta t', simétrica de la recta r respecto del plano π es considerar r' como intersección de dos planos, el propio π y otro, σ, obtenido como aquel que contiene a r y es perpencicular a π, es decir, pasa por P_r y sus vectores directores son el vector director de r y el vector asociado a π; esquemáticamente:

$$r' \equiv Proy_{\,\pi}(r) = \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases}$$

donde

$$\sigma : \begin{cases} \subset r \\ \perp \pi \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r \\ \vec{u} = \vec{v}_r \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi \end{cases}$$



Calculemos ahora la **distancia de un punto** $P(x_0, y_0, z_0)$ **a un plano** $\pi : \; Ax + By + Cz + D = 0$, que representaremos por $d(P, \pi)$:

Dados P y π, calculamos $Q = Proy_{\,\pi}(P)$, la proyección ortogonal de P sobre π y definimos la distancia del punto al plano como la distancia del punto a su proyección ortogonal en el plano, es decir, $d(P, \pi) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$.

Este método es largo pero tiene como contrapartida el que nos proporciona la proyección ortogonal de punto sobre plano y, con un sencillo cálculo más, el simétrico de un punto respecto de un plano.

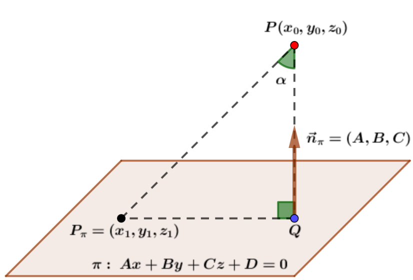
En este caso, punto y plano, podemos obtener una *fórmula* que nos facilite el cálculo de la distancia:

Sea $P_\pi = (x_1, y_1, z_1) \in \pi$, un punto cualquiera del plano.

Del triángulo de la figura: $\quad cos\alpha = \dfrac{d(P, \pi)}{|\overrightarrow{PP_\pi}|}$

Pero también tenemos: $\quad |\ \overrightarrow{PP_\pi} \cdot \vec{n}_\pi\ | = |\overrightarrow{PP_\pi}|\ |\vec{n}_\pi|\ cos\alpha$

Luego: $d(P,\pi) = \dfrac{|\ \overrightarrow{PP_\pi} \cdot \vec{n}_\pi\ |}{|\vec{n}_\pi|} = \dfrac{|\ (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (A,B,C)}{|\vec{n}_\pi|} \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - Bx_1 - Cz}{|\vec{n}_\pi|}$



Como $P_\pi \in \pi \rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \rightarrow -Ax_1 - Bx_1 - Cz_1 = D$, por lo que:

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,\pi) = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{|\vec{n}_\pi|}}}$$

Es decir, para calcular la distancia de un punto a un plano basta con sustituir las coordenadas del punto en la ecuación del plano, considerar el resultado en valor absoluto y dividirlo por el módulo del vector asociado al plano.

Ejemplo 11.2. *Considera los puntos $A(-1,6,0)$ y $B(1,2,3)$, la recta $r:\ (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$ y el plano $\pi\ : x - 2y + 3z - 4 = 0$*

Calcula: La distancia entre A y B, la distancia de A a r y a π, las proyecciones ortogonales de A sobre r y sobre π y los simétricos de A respecto de B, respecto de r y respecto de π.

Empecemos por las proyecciones ortogonales y los simétricos:

—— $Q_r(A):$ proyección de A sobre $r \rightarrow \sigma : \begin{cases} A(-1,6,0) \\ \perp r \rightarrow n_\sigma = \vec{v}_r = (1,1,1) \end{cases}$

$1 \cdot (x+1) + 1 \cdot (y-6) + 1 \cdot z = 0 \rightarrow \quad \sigma:\ x + y + z - 5 = 0$

$Q_r(A) = r \cap \sigma : \quad (1+\lambda) + (2+\lambda) + (3+\lambda) - 5 = 0 \rightarrow \quad \lambda = -1/3$

$Q_r(A) = P_r(\lambda = -1/3) = \ (\ 2/3,\ 5/3,\ 8/3\ )$

—— $A'_r = simet_r(A)$, simétrico de A respecto de r.

$\dfrac{A + A'_r}{2} = Q_r(A) \rightarrow \quad A'_r = 2Q_r(A) - A = \ (\ 7/3,\ -8/3,\ 16/3\ )$

—— $Q_\pi(A)$: proyección de A sobre π $\to s$: $\begin{cases} A(-1,6,0) \\ \perp\pi \to \vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (1,-2,3) \end{cases}$

$s:\ (-1+\mu, 6-2\mu, 3\mu) \to Q_\pi = \pi \cap s : (-1+\mu)-2(6-2\mu)+3(3\mu)-4 = 0 \to$

$\mu = 7/14 \Rightarrow Q_\pi(A) = P_s(\mu = 7/14) = \ (\ 3/14,\ 50/14,\ 51/14\ )$

—— $A'_r = simet_\pi(A)$, simétrico de A respecto de π.

$\dfrac{A+A'_\pi}{2} = Q_\pi(A) \to \quad A'_\pi = 2Q_\pi(A) - A = \ (10/7,\ ,8/7\, 51/7;)$

—— $A'_B = simet_B(A)$, simétrico de A respecto de B.

B ha de ser el punto medio de A y A'_B, por lo que $\dfrac{A+A'_B}{2} = Q\ \to$

$A'_B = 2B - A = (3,-2,6)$

Vamos ahora a por las distancias.

—— $d(A,B)$, distancia entre los puntos A y B:

$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |(2,-4,3)| = \sqrt{29}\ u$

—— $d(A,r)$, distancia de A a r la podemos calcular por los tres métodos, ya que tenemos la proyección ortogonal de A sobre r calculada en apartados anteriores.

MÉODO DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL:

$\overrightarrow{AQ_r(A)} = Q_r(A) - A = (5/3,\ -13/3,\ 8/3) \to$

$d(A,r) = d(A, Q_r(A)) = |\overrightarrow{AQ_r(A)}| = \sqrt{258}/3\ u$

MÉTODO DEL VECTOR VARIABLE: Tomemos un punto cualquiera de r : $A_r(1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$ y formamos el vector variable $\overrightarrow{AA_r} = (2+\lambda, -4+\lambda, 3+\lambda)$

Exigimos ahora que $\overrightarrow{PP_r} \perp \vec{v}_r \to \overrightarrow{PP_r} \cdot \vec{v}_r = (2+\lambda, -4+\lambda, 3+\lambda) \cdot (1,1,1) = 3\lambda + 1 = 0 \to \lambda = -1/3$

El punto de r que está frente a A es el punto $A_{r\perp} = P_r(\lambda = -1/3) = (2/3, 5/3, 8/3)$

$d(A,r) = d(A, A_{r\perp}) = |\overrightarrow{AA_{r\perp}}| = |(5/3,\ -13/3,\ 8/3)| = \sqrt{258}/3\ u$

MÉTODO VECTORIAL: Usaremos la fórmula $d(A,r) = \dfrac{|\overrightarrow{AA_r} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$, con A_r un punto cualquiera de r, por ejemplo, $A_r(\lambda = 0)\ (1,2,3)$

$\overrightarrow{AA_r} = A_r - A = (2,-4,3) \rightarrow \overrightarrow{AA_r} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 1\vec{j} + 6\vec{k} =$ $(-7,1,6)$

$d(A,r) = \dfrac{|\ (-7,1,6)\ |}{|\ (1,1,1)\ |} = \dfrac{\sqrt{86}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{258}}{3}\ u$

—— $d(A,\pi)$, distancia del punto A al plano π, comprobemos que la distancia calculada como la que hay entre A y su proyección ortogonal sobre el plano, $Q_\pi(A)$ coincide con la que obtenemos aplicando la fórmula $d(A,\pi) = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{|\vec{n}_\pi|}$

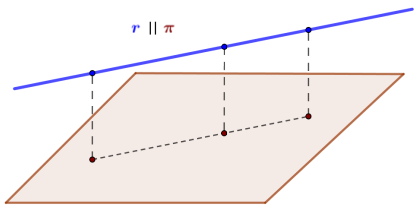
∘ $d(A,\pi) = d(A, Q_\pi(A)) = |\overrightarrow{AQ_\pi(A)}| = |\ (17/14,\ -34/14,\ 51/14) - (-1,6,0)\ | = |(4/7,\ -8/7,\ 12/7)| = \sqrt{4046}/14\ u$

∘ $d(A,\pi) = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{|\vec{n}_\pi|} = \dfrac{|(-1) - 2(6) + 3(0) - 4|}{\sqrt{14}} = \dfrac{|-17|}{\sqrt{14}} = \dfrac{17\sqrt{14}}{14} = \dfrac{\sqrt{4046}}{14}\ u$

11.2.4. Distancia de una recta a un plano

Como es obvio, si la recta está **contenida** en el plano o le es **incidente** (corta al plano), la distancia entre ambos es **cero**.

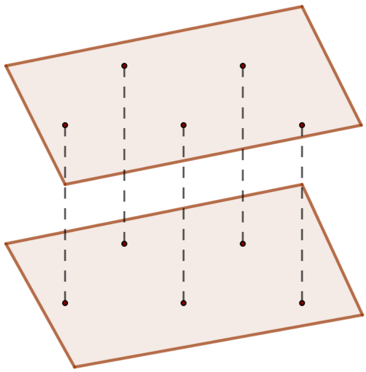
Si la recta es **paralela** al plano, todos los puntos de la primera están a la misma distancia del segundo, por lo que la distancia entre ambos será la de un punto cualquiera de la recta al propio plano (nunca al revés). Para su cálculo, usaremos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.



$$r \,||\, \pi \; (\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0) \;\rightarrow\; d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\; P_r \in r.$$

11.2.5. Distancia entre planos

Obviamente, si los planos son **coincidentes** o se **cortan** en una recta, la distancia entre ellos es **cero**. Si los planos son **paralelos** todos los puntos de uno cualquiera de ellos están a la misma distancia del otro. Para calcular la distancia entre ambos usaremos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.



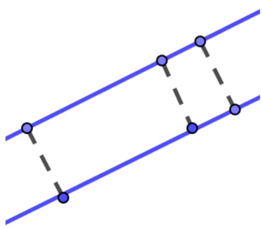
$$\pi \,||\, \sigma \;\rightarrow\; d(\pi,\sigma) = d(P_\pi,\sigma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\; P_\pi \in \pi.$$

11.2.6. Distancia entre rectas

Recordemos que dos rectas pueden ocupar 4 posiciones relativas distintas en el espacio: coincidentes, secantes, paralelas o cruzarse.

Dos rectas **coincidentes** o **secantes** (que se cortan en un punto) están una respecto de otra a distancia mínima **cero**.

Si las rectas son **paralelas**, todos sus puntos están a la misma distancia por lo que la distancia entre ellas será de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra (distancia de un punto a una recta) tenemos dos métodos rápidos: el del vector variable y el método vectorial.



(repetimos la fórmula vista por este último método en este caso)

$$r \parallel s \rightarrow \quad d(r,s) \;=\; \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_r P_s}|}{\vec{v}_s}; \quad P_r \in r$$

Si las rectas **se cruzan**, el cálculo es más complicado. Desarrollaremos tres métodos para el cálculo de la distancia entre rectas que se cruzan. Pero antes vamos a ver un ejemplo de los casos vistos anteriormente:

Ejemplo 11.3. *Sean:* $r: \;(1+\lambda, 2+2\lambda, 3+3\lambda)$, $s: \;(\mu, 1+\mu, 3\mu)$, $\pi: \;3x - z - 3 = 0$ *y* $\sigma: \;3x - z + 4 = 0$.

Calcula la distancia entre r *y* s*, entre* π *y* σ *y entre* r *y* π.

—— $d(r,s):$ Es fácil ver que $r \parallel s$, por lo que la distancia entre ambas será la misma que la de un punto cualquiera de una de ellas hasta la otra de las rectas:

$$r \parallel s \rightarrow \quad d(r,s) \;=\; d(P_r, s) \;=\; \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_r P_s}|}{\vec{v}_s}; \quad (P_r \in r)$$

$P_r(1,2,3)$; $P_s(0,1,0)$; $\overrightarrow{PsP_r} = (1,1,3)$; $\vec{v}_s = (1,2,3)$

$\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_s P_r} = (3,0,1) \rightarrow |\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_s P_r}| = \sqrt{10}$; $|\vec{v}_s| = \sqrt{14}$

Luego, $d(r,s) \;=\; \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \sqrt{35}/7\ u$

—— $d(\pi,\sigma):$ Ocurre que $\pi \parallel \sigma$, por lo que la distancia entre los planos coincide con la de un punto cualquiera de uno de ellos hasta el otro plano:

$$\pi \parallel \sigma \;\rightarrow\; d(\pi,\sigma) = d(P_\pi, \sigma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \; P_\pi \in \pi.$$

$P_\pi(1,0,0)$; $\qquad \sigma: \;3x - z + 4 = 0$

$$d(\pi,\sigma) = d(P_\pi,\sigma) = \frac{|3\cdot 1 + 0\cdot 0 - 1\cdot 0 + 4|}{\sqrt{3^3 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{10}} = 7\sqrt{10}/10\ u$$

—— $d(r,\pi):$ Como $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,2,3)\cdot(3,0,-1) = 0 \rightarrow r \parallel \pi$, por lo que la distancia entre ambos coincide con la de un punto cualquiera de r al plano π:

$$r \parallel \pi \;(\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0) \;\rightarrow\; d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \; P_r \in r.$$

$P_r(1,2,3)$; $\qquad \pi: \;3x - z - 3 = 0$

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|3-3-3|}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}/10\ u$$

Distancia entre rectas que se cruzan

Veremos tres métodos para este cálculo: el 'método de la recta perpendicular común' (más largo, pero como contrapartida nos proporciona la ecuación de la recta que es perpendicular común a dos rectas que se cruzan), el 'método del plano paralelo' y el 'método vectorial' (con fórmula).

MÉTODO DE LA PERPENDICULAR COMÚN:

r y s se cruzan. Vamos a buscar los puntos $R \in r$ y $S \in s$ que están *'frente a frente'*, les llamaremos $R_\perp$ y $S_\perp$ y determinarán la distancia mínima entre las rectas.

Rectas que se cruzan: 'perpendicular común'.

Podemos imaginar una situación física que nos aclare el método: supóngase que se quieren unir dos cables que representarán las rectas que se cruzan mediante un tercer cable que toque a ambos y que tenga la menor longitud (distancia mínima entre las rectas que se cruzan). Para ello, se conectan dos puntos cualesquiera de ambas rectas mediante un cable elástico. Si se le deja libremente tenderá a adoptar la posición de mínima energía potencial elástica (suponiendo que se puede contraer lo necesario para el caso). Esa distancia será la menor entre las rectas que se cruzan y los puntos de intersección serán los que están 'frente a frente'.

Dadas r y s en paramétricas, tomamos un punto general (con parámetro) de cada una de ellas $R(\lambda)$ y $S(\mu)$ con los que formamos el vector *'elástico'* $\overrightarrow{RS}(\lambda, \mu)$.

Para forzar a que este 'vector elástico' que une dos punto cualesquiera de las rectas que se cruzan adopte la posición de mínima energía, distancia mínima entre rectas, le exigiremos que sea *'perpendicular a ambas'*:

$$\overrightarrow{RS} \perp r \;\rightarrow \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \wedge \quad \overrightarrow{RS} \perp rs \;\rightarrow \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0$$

Cada una de estas imposiciones conducirá a una ecuación $(f(\lambda, \mu) = 0)$ con las que formaremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, λ y μ. $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \rightarrow f_1(\lambda, \mu) = 0\ (ec.1)$; $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0 \rightarrow f_2(\lambda, \mu) = 0\ (ec.2)$.

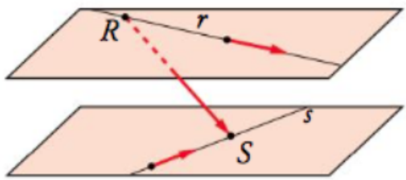
Una vez determinados los valores de λ y μ del sistema anterior y sustituidos en las respectivas rectas r y s, encontramos los *'puntos que están frente a frente'*, $R_\perp$ y $S_\perp$.

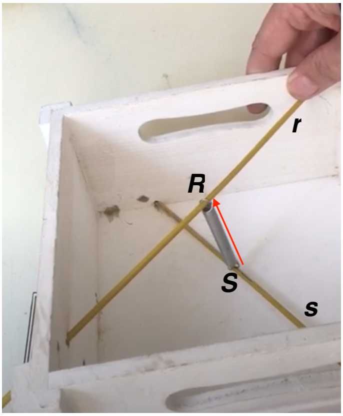
No queda más que definir la distancia entre las rectas que se cruzan como la que hay entre los puntos que están frente a frente: $d(r, s) = d(R_\perp, S_\perp) = |\overrightarrow{R_\perp S_\perp}|$.

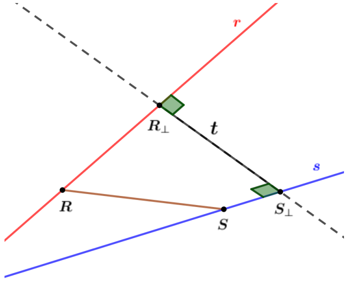
Este método es un poco largo pero tiene la **ventaja** de darnos, de paso, la **ecuación de la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan**: si r y s se cruzan, la recta perpencicular común a ambas, t, será la recta que pasa por los puntos de r y s que están *frente a frente*:

'perpendicular común'

$$t : \begin{cases} \perp r \\ \perp s \end{cases} \equiv t : \begin{cases} R_\perp \\ S_\perp \end{cases}$$







MÉTODO DEL PLANO PARALELO:

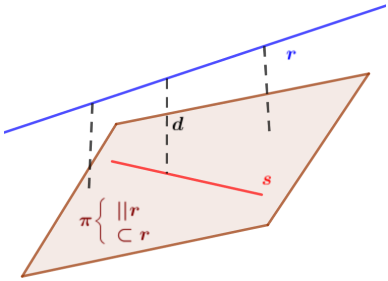
Dadas dos rectas r y s que se cruzan, buscamos es plano paralelo a una de ellas que contiene a la otra. Al ser la primera recta paralela al plano buscado, todos sus puntos están a la misma distancia, por lo que la distancia entre las rectas que se cruzan coincidirá con la distancia de la primera recta al plano que contiene a la segunda y es paralelo a la primera.

r y s se cruzan: $\rightarrow$

$$\pi : \begin{cases} \parallel r \\ \subset s \end{cases} \quad \rightarrow$$

$d(r,s) = d(r,\pi) = d(P_r,\pi)$

$(\forall P_r \in r)$



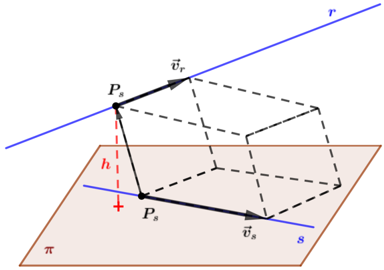
MÉTODO VECTORIAL:

r y s se cruzan: $\rightarrow$ Tomamos un punto de cada una de ellas y su vector director correspondiente. Con los puntos formamos un vector que une un punto de cada recta: $P_r,\ P_s,\ \vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}$

El producto mixto de los tres vectores da, en valor absoluto, el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores, si consideramos que la base la forman los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, dividiendo el volumen entre el área de la base obtenemos la altura del paralelepípedo que no es más que la distancia entre las rectas que se cruzan.

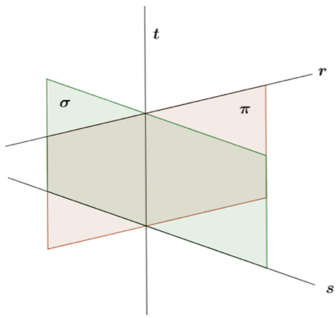
$$\boxed{d(r,s) =} = h = \frac{V_{paral}}{A_{base}} =$$

$$\boxed{= \frac{\mid [\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \overrightarrow{P_r P_s}] \mid}{\mid \vec{v}_r \times \vec{v}_s \mid}}$$



Otro método para calcular la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan es el MÉTODO DE LOS DOS PLANOS: t, recta perpendicular común a r y s que se cruzan. Evidentemente, por ser $r \perp t$ y $s \perp t$, el vector director de t lo podemos obtener como producto vectorial de los vectores directores de r y s: $\quad \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$

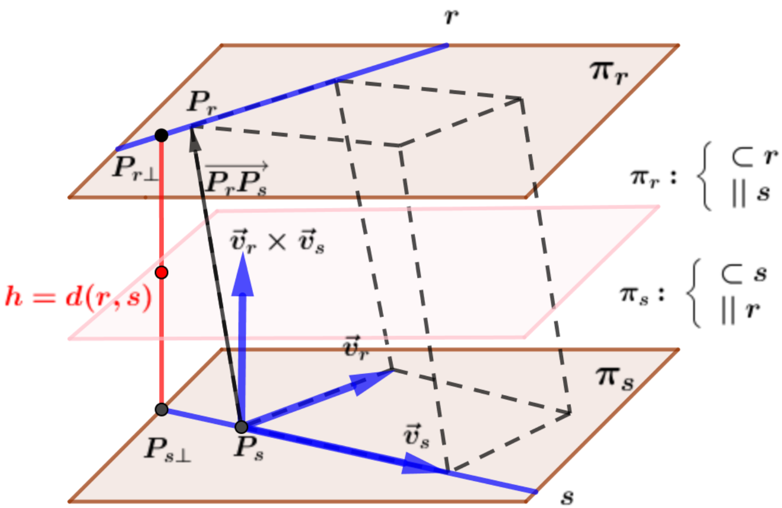
$$t: \begin{cases} \pi \equiv \pi : \begin{cases} \subset r \\ \subset t \end{cases} \equiv \pi : \begin{cases} P_r \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s \end{cases} \\ \sigma \equiv \sigma : \begin{cases} \subset s \\ \subset t \end{cases} \equiv \sigma : \begin{cases} P_s \\ \vec{v}_s \\ \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s \end{cases} \end{cases}$$



11.3. Plano que equidista de dos rectas que se cruzan

Dadas dos rectas que se cruzan, r y s, el plano paralelo a ambas rectas (sus dos vectores directores son los de cada uno de las rectas) que pasa por el punto medio de los puntos de r y s que están 'frente a frente' (método de la perpendicular común) es un plano que equidista de ambas rectas. Esquemáticamente:

$$\pi : \{d(\pi, r) = d(\pi, s)\} \equiv \pi : \begin{cases} \dfrac{R_\perp + S_\perp}{2} \\ \vec{u} = \vec{v}_r \\ \vec{v} = \vec{v}_r \end{cases} \equiv \pi : \begin{cases} \dfrac{R_\perp + S_\perp}{2} \\ \vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s \end{cases}$$



Ejemplo 11.4. *Calcula la distancia entre las rectas*

$$r : \frac{x-3}{2} = y = z - 1 \quad y \quad s : \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases} .$$

Calcula también la recta perpendicular común a ambas así como el plano que equidista de ellas.

$r :\ P_r(3, 0, 1);\ \ \vec{v}_r = (2, 1, 1);\qquad R(\lambda) = (3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

$s :\ P_s(0, 0, 0);\ \ \vec{v}_s = (1, -1, -1);\ \ S(\mu) = (\mu, -\mu, -\mu)$

MÉTODO VECTORIAL:

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{j} - 3\vec{k} = (0, 3, -3)$$

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{3^3 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (-3, 0, 1)$$

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \to \left|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}]\right| = 3$$

$$d(r, s) = \frac{\left|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_r|} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

MÉTODO DEL PLANO PARALELO:

$$\pi : \begin{cases} \subset r \\ \parallel s \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r((3, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, -1 - 1) \end{cases} \to$$

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y & z - 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & .1 \end{vmatrix} = 0 \to \cdots \to \pi :\ y - z + 1 = 0$$

$$d(r, s) = d(s, \pi) = d(P_s, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{0^3 + 3^3 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

MÉTODO DE LA PERPENDICULAR COMÚN:

$$r :\ P_r(3, 0, 1);\ \ \vec{v}_r = (2, 1, 1);\qquad R(\lambda) = (3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$$

$$s :\ P_s(0, 0, 0);\ \ \vec{v}_s = (1, -1, -1);\ \ S(\mu) = (\mu, -\mu, -\mu)$$

Formamos el vector móvil ('elástico') que une dos puntos genéricos, $R(\lambda),\ S(\mu)$, de cada recta:

$\overrightarrow{RS}(\lambda,\mu) = S(\mu) - R(\lambda) = (-3-2\lambda+\mu, -\lambda-\mu, -1-\lambda+\mu)$

- $\overrightarrow{RS} \perp \vec{v}_r \rightarrow \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0$

$2(-3-2\lambda+\mu)+1(-\lambda-\mu)+1(-1-\lambda+\mu)=0 \rightarrow \lambda = -7/6$

- $\overrightarrow{RS} \perp \vec{v}_s \rightarrow \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0$

$1(-3-2\lambda+\mu)-1(-\lambda-\mu)-1(-1-\lambda+\mu)=0 \rightarrow \mu = 2/3$

Volvemos a las ecuaciones paramétricas de r y s con estos valores de λ y μ para determinar los puntos de las rectas que se cruzan que está, 'frente a frente':

$\lambda = -7/6 \rightarrow R_\perp(2/3, -7/6, -1/6)$

$\mu = 2/3 \rightarrow S_\perp = (2/3, -2/3, -2/3)$

$\overrightarrow{R_\perp S_\perp} = S_\perp - R_\perp = (0, 1/2, -1/2) \rightarrow$

$$d(r,s) = d(R_\perp, S_\perp) = \left|\overrightarrow{T_\perp S_\perp}\right| = \sqrt{0^2+(1/2)^2+(-1/2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

RECTA PERPENDICULAR COMÚN.

$$t: \begin{cases} \perp r \\ \perp s \end{cases} \equiv \begin{cases} R_\perp \\ S_\perp \end{cases} \equiv \begin{cases} R_\perp(2/3, -7/6, -1/6) \\ \vec{v}_t = \overrightarrow{R_\perp S_\perp} \rightsquigarrow (0,1,-1)(*) \end{cases}$$

(*) El vector $\overrightarrow{T_\perp S_\perp}$ no puede simplificarse para el cálculo de una distancia peri sí al tratarlo como vector director.

$t:\ (2/3, -7/6, -1/6) + \theta(0,1,-1)$

MÉTODO DE LOS DOS PLANOS para el cálculo de la recta perpendicular común.

Este método no es adecuado para el cálculo de la distancia entre rectas que se cruzan pues no proporciona la posición de los puntos que están frente a frente.

$t \perp r \ \wedge \ t \perp s \to \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_t = (0,3,-3) \rightsquigarrow (0,1,-1)$

$$t: \begin{cases} \perp r \\ \perp s \end{cases} \equiv \begin{cases} \pi: \begin{cases} \subset r \\ \subset t \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r(3,0,1) \\ \vec{v}_r = (2,1,1)\vec{v}_t = (0.1,-1) \end{cases} \\ \sigma: \begin{cases} \subset s \\ \subset t \end{cases} \equiv \begin{cases} P_s(0,0,0) \\ \vec{v}_s = (1,-1,-1)\vec{v}_t = (0.1,-1) \end{cases} \end{cases}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to x - y - z - 5 = 0$$

$$\sigma: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to 2x + y + z = 0$$

Finalmente, $t: \begin{cases} \pi: \ x - y - z - 5 = 0 \\ \sigma: \ 2x + y + z = 0 \end{cases}$, que, evidentemente, coincide con la recta encontrada anteriormente en forma paramétrica (compruébese).

PLANO EQUIDISTANTE de r y s.

$$\tau \ / \ \{d(\tau, r) = d(\tau, s)\} \ \begin{cases} M = \dfrac{R_\perp + S_\perp}{2} = (2/3, -11/12, -5/12) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{R_\perp S_\perp} \rightsquigarrow (0,1,-1) \end{cases}$$

$$0 \cdot (x - 2/3) + 1 \cdot (y + 11/2) - 1 \cdot (z + 5/12) = 0 \to \tau: \ 2x - 2y + 1 = 0$$

11.4. Ejercicios

11.4.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 11.1. *Determinar la ecuación del plano que pasa por* $(5,-1,0)$ *y es perpendicular al vector* $(7,0,4)$

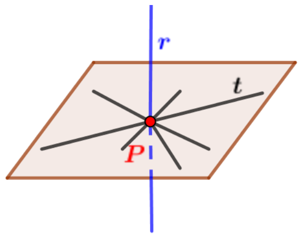
$7 \cdot (x-5) + 0 \cdot (y+1) + 4 \cdot (z-0) = 0 \to 7x + 4z - 35 = 0$ $\diamond$

Ejercicio resuelto 11.2. *Determinar la ecuación de la recta s sabiendo que pasa por P y es perpendicular a r, siendo $P(2,1,0)$ y $r:(4,4+\lambda,-1+\lambda)$*

$$s:\begin{cases} P(2,1,0) \\ \perp r;\ \vec{v}_r=(0,1,1)\end{cases}$$

Rectas perpendiculares a una dada hay infinitas, daremos una de ella, p.e., $\vec{v}_s=(3,1,-1)$ $\quad(\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=0)\rightarrow$

$s:\ (2,1,0)+\mu(3,1,-1)$



◇

Ejercicio resuelto 11.3. *Ecuación de la recta que pasa por $(3,0,-1)$ y es perpendicular al plano $2x-3y-z+1=0$*

$$r:\begin{cases} P(3,0,-1) \\ \vec{v}_r=\vec{n}_\pi=(2,-3,-1)\end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(3,0,-1)+\lambda(2,-3,-1)$$ ◇

Ejercicio resuelto 11.4. *¿Cuáles de las siguientes rectas se cortan, dónde y bajo qué ángulo?*

a) $(1+\lambda,3-4\lambda,\lambda)$ *y* $(1+3\mu,3,7\mu)$

b) $(7+\lambda,9-2\lambda,-1)$ *y* $(4-3\mu,-1,2+\mu)$

a) $\vec{v}_r=(1,-4,1);\quad \vec{v}_s=(3,0,7);\quad \vec{v}_r\nparallel\vec{v}_s\rightarrow$ se cortan o se cruzan.

$\overrightarrow{P_rP_s}=(1,3,0)-(1,3,0)=(0,0,0)$

Esto indica que las rectas se cortan, pues, no teniendo la misma dirección, tienen un punto en común: el punto de corte $(1,3,0)$

Evidentemente, $Det(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s})=0$, pues hay una fila de ceros en el determinante.

Para buscar el ángulo bajo el cual se cortan usaremos el producto escalar:

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (1,-4,1)\cdot(3,0,7) = 3+0+7 = 10;\ |\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s| = 10$

Por otro lado, $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|\cos\theta = \sqrt{18}\sqrt{58}\cos\theta$

Luego $\cos\theta = \dfrac{10}{\sqrt{18}\sqrt{58}} \to \theta = 72^o$

b) $\vec{v}_r = (1,-2,0);\quad \vec{v}_s = (-3,0,1);\quad \vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s \to$ se cortan o se cruzan.

$\overrightarrow{P_rP_s} = (4,-1,2)-(7,9,-1) = (-3,-10,3)$

$$Det(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -10 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to \text{las rectas se cruzan.} \qquad \diamond$$

Ejercicio resuelto 11.5. *Calcular el ángulo que forma la recta* $(x-3)/7 = y/(-1) = (z-2)/3$ *con el plano* $x+3y-z+1=0$

$\vec{v}_r = (7,-1,3);\ |\vec{v}_r| = \sqrt{59} \qquad \vec{n}_\pi = (1,3,-1);\ |\vec{n}_\pi| = \sqrt{11}$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 7-3-3 = 1 \to \cos\theta = \dfrac{|1|}{\sqrt{59}\sqrt{11}} \to \quad \theta = 87.75°$

$\varphi = \measuredangle\{r,\pi\} = 90-\theta = 2'25° \qquad \diamond$

Ejercicio resuelto 11.6. *Dado* $\pi : 2x-3y+5=0$*, da las ecuaciones de: a) una recta paralela a él; b) una recta perpendicular a él; c) un plano paralelo a él; d) un plano perpendicular a él.*

Hay infinitas soluciones en todos los apartados, escribiremos una de ellas en cada caso.

a) $s: \begin{cases} P \to P(0,0,0) \text{ p.e.} \\ \vec{v}_r = (3,2,0);\ \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \end{cases} \quad \to r:\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{0};\quad r \parallel \pi$

b) $s: \begin{cases} P \to P(0,0,0) \text{ p.e.} \\ \vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (2,-3,0) \end{cases} \quad \to s:\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{0};\quad r \perp \pi$

c) P.e., si pasa por el origen: $\quad \to \sigma:\ 2x-3y=0;\quad \sigma \parallel \pi$

d) $\tau : \begin{cases} P \to P(0,0,0) \text{ p.e.} \\ \vec{n}_\tau = (3,2,1);\ \vec{n}_\tau \perp \vec{n}_\pi \end{cases} \to \tau :\ 3x + 2y + z = 0; \quad \tau \perp \sigma$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 11.7. *Calcula* a *para que* 8 *sea la distancia entre los puntos* $(a, 3, -5)$ *y* $(7, 4, 1)$

$d(A, B) = 8; \quad A(a, 3, -5); \quad B(7, 4, 1)$

$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(7-a, 1, 6)| = \sqrt{(7-a)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{a^2 - 14a + 86} =$

$8 \leftrightarrow a^2 - 14a + 86 = 0 \to a^2 - 14a + 22 = 0 \to \begin{cases} a = 7 + 3\sqrt{3} \\ a = 7 - 3\sqrt{3} \end{cases}$ $\diamond$

Ejercicio resuelto 11.8. *Calcula el perímetro del triángulo de vértices* $A(2, 0, 1)$*,* $B(2, 0, 2)$ *y* $C(3, 1, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1); \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, -1); \quad \overrightarrow{BC} = (1, 1, -2)$

$a = |BC| = \sqrt{6}\ u; \quad b = |AC| = \sqrt{3}\ u; \quad c = |AB| = 1\ u;$

Perímetro $= a + b + c = \ (1 + \sqrt{3} + \sqrt{6})\ \ u$

AMPLIACIÓN: 'Resuelve el triángulo':

$\hat{A} = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) :$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos A \to -1 = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos A \to \hat{A} = 125.3°$

$\hat{B} = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) : \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right| \left|\overrightarrow{BC}\right| \cos A \to 2 = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos B \to \hat{B} = 35.3°$

$\hat{C} = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) : \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o \Rightarrow \hat{C} = 19.4°$

El triángulo es escaleno (lados distintos) y obtusángulo (un ángulo mayor de 90^o).

Área $= \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{3}\sin(19.4^o) \approx 0.7\ u^2$

De otro modo: Área$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$; $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{j}-\vec{i}=$ $(-1,1,0)$; Área $=\frac{1}{2}|(-1,1,0)|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.7\ u^2$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 11.9. *Halla la distancia de* $P(5,6,6)$ *a la recta* $r:\ (5\lambda,\ 2-\lambda,\ \lambda)$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{PP_r}\times\vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|};\quad P(5,6,6);\quad P_r(0,2,0);\quad \vec{v}_r=(5,-1,1)$$

$$|\vec{v}_r|=\sqrt{27}=3\sqrt{3};\qquad \overrightarrow{PP_r}=P_r-P=(-5,-4,-6)$$

$$\overrightarrow{PP_r}\times\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -4 & -6\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix}=-10\vec{i}-25\vec{j}+25\vec{k}=(-10,-25,25)$$

$$\left|\overrightarrow{PP_r}\times\vec{v}_r\right|=\sqrt{(-10)^2+(-25)^2+25^2}=15\sqrt{6}$$

$$d(P,r)=\frac{15\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=5\sqrt{2}\ u$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 11.10. *Calcula el simétrico de* $P(2,1,0)$ *respecto de la recta* $r:\ (5+2\lambda,\ 2-\lambda,\ -2)$

$$P(2,1,0);\qquad P_r(5,2,-2);\quad \vec{v}_r=(2,-1,0)$$

$$\pi:\begin{cases}P\\ \perp r\end{cases}\equiv\begin{cases}P(2,1,0)\\ \vec{v}_r=(2,-1,0)\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x-2)-1(y-1)+0z=0\Rightarrow \pi:\ 2x-y-3=0$$

$$Q=Proy_r(P)=r\cap\pi:\quad 2(5+2\lambda)-(2-\lambda)-3=0\rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda=-1\Rightarrow Q=P_r(\lambda=-1)=(3,3,-2)$$

$$\frac{P+P'}{2}=Q\Rightarrow P'=Sim_r(P)=2Q-P=(4,5,-4)$$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 11.11. *Calcula las distancias entre los siguientes elementos:*

a) $P(8, 5, -6)$ *y* $\pi : x + 2y - 2z + 3 = 0$*;*

b) $r:\ (13 + 12\lambda,\ 2,\ 8 + 5\lambda)$ *y* $s:\ (6,\ 6 + \mu,\ -9)$

c) $r:\ (5\lambda,\ 2 - \lambda,\ \lambda)$ *y* $s:\ (5 + 7\mu,\ 1 - 5\mu,\ 1 - 5\mu)$

d) $r:\ (1 - 3\lambda,\ 2 + \lambda,\ 1 - \lambda)$ *y* $\pi:\ x + 3y = 0$

e) $r:\ (1 - 3\lambda,\ 2 + \lambda,\ 1 - \lambda)$ *y* $\pi:\ x + 2y - 5z - 1 = 0$

f) $\pi:\ y - 5z + 4 = 0$ *y* $\pi':\ 2y - 10z = 0$

f) $\pi:\ 2x - y + z = 0$ *y* $\pi':\ x - 2y + 3z = 0$

—— a) $d(P, r) = \dfrac{|8 + 2 \cdot 5 - 2 \cdot (-6) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 11\ u$

—— b) $\begin{cases} r:\ P_r(13, 2, 8); \quad \vec{v}_r = (12, 0, 5) \\ s:\ P_s(6, 6, -9); \quad \vec{v}_s = (0, 1, 0) \end{cases}$

$12/0 \neq 0/1 \neq 5/0 \to \vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s \to$ las rectas se cortan o se cruzan.

$\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (-7, 4, -17) \to Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) =$

$= \begin{vmatrix} 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -17 \end{vmatrix} = -169 \neq 0 \to r$ y s se cruzan en el espacio.

Como solo nos piden la distancia entre las rectas, usaremos el método vectorial (fórmula):

$$d(r, s) = \frac{\left|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_r|} = \frac{169}{13} = 13\ u$$

Donde hemos usado que: $\vec{v}_r \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 12\vec{j} = (-5, 0, 12) \to$

$|\vec{v}_r \times \vec{v}_r| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

Podemos usar la fórmula del método vectorial para el cálculo de la distancia entre dos rectas en cualquier caso, no solo si las rectas se cruzan, siempre teniendo en cuanta que:

- Si las rectas son secantes, el producto mixto sería cero: $\overrightarrow{P_rP_s}$ es combinación lineal de $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, el volumen del paralelepípedo es cero.
- En caso de rectas paralelas, al ser $\vec{v}_r = k\vec{v}_s \rightarrow$ el determinante del producto mixto sería cero (por tener dos filas iguales o proporcionales), pero también lo sería el denominador; con lo que obtendríamos la indeterminación 'cero partido por cero' que nos debería hacer sospechar que las rectas son paralelas y entonces usar que $d(r,s) = d(P_r.s)$ en este caso.
- También obtendríamos la indeterminación 'cero partido por cero' si las rectas son coincidentes.
- Conclusión: si nos piden $d(r,s)$, lo más rápido es usar la fórmula y, si aparece $\frac{0}{0}$ decidir si las rectas son coincidentes ($d(r,s) = 0$) o si son paralelas ($d(r,s) = d(P_r, s)$). Esta última fórmula, de distancia entre rectas paralelas, también funciona para coincidentes y da cero, ya que si $r \equiv s \rightarrow P_r \in s$.

—— c) $\begin{cases} r: \ P_r(0,2,0); \quad \vec{v}_r = (5,-1,1) \\ s: \ P_s(5,1,1); \quad \vec{v}_s = (7,-5,-5) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (5,-1,1)$

$\frac{5}{7} \neq -1 - 5 \neq 1 - 5 \rightarrow r$ y s se cortan o se cruzan:

$Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $[F1 = F3]$, luego las rectas r y s se cortan, por lo que $d(r,s) = 0\ u$.

—— d) $P_r(1,2,1); \quad \vec{v}_r = (-3,1,-1); \qquad \vec{n}_\pi = (1,3,0)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow \begin{cases} r \subset \pi \\ r \parallel \pi \end{cases} \rightarrow ¿P_r \in \pi?$:

$1+3\cdot 2=7\neq 0\rightarrow P_r\notin\pi\Rightarrow r\parallel\pi\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\dfrac{|1+3\cdot 2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=$
$\dfrac{7}{\sqrt{10}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}\ u$

—— e) $P_r(1,2,1)$; $\vec{v}_r=(-3,1,-1)$; $\vec{n}_\pi=(1,2,-5)$

$\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\pi=-3+2+5=4\neq 0\rightarrow r\cap\pi$, la recta y el plano son secantes: $d(r,\pi)=0\ u$

—— f) $\vec{n}_\pi=(0,1,-5)$; $\vec{n}_\sigma=(0,2,-10)=-2\vec{n}_\pi\rightarrow n_\pi\parallel\vec{n}_\sigma$, los planos son paralelos o coincidentes.

¿$P_\pi\in\sigma$:? $\pi:\ x=z=0\rightarrow y=-4\rightarrow P_\pi(0,-4,0)\rightarrow 2(-4)-10\cdot 0\neq 0\rightarrow P_\pi\notin\sigma\Rightarrow\pi\parallel\sigma\longrightarrow d(\pi,\sigma)=d(P_\pi,\sigma)=\dfrac{|2(-4)-10\cdot 0|}{\sqrt{0^2+2^2+(-10)^2}}=$
$\dfrac{8}{\sqrt{104}}=\dfrac{2\sqrt{26}}{13}\ u$

—— g) $\vec{n}_\pi=(2,-1,1)$; $\vec{n}_\sigma=(1,-2,3)$

$\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-3}\neq\frac{1}{3}\rightarrow\pi$ y σ se cortan $\Rightarrow d(\pi,\sigma)=0\ u$ ◇

Ejercicio resuelto 11.12. *Encuentra el valor de k para que las siguientes rectas formen un ángulo de 90°:*

$$r:\ (1+2\lambda,3\lambda,4+5\lambda);\qquad s:\ (1+10\mu,2k,3-k\mu)$$

$\vec{v}_r=(2,3,5)$; $\vec{v}_s=(10,0,k)$: si $\measuredangle(r,s)=90^o\rightarrow r\perp s\leftrightarrow\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=0\rightarrow\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=20+5k=0\Rightarrow k=-4$ ◇

Ejercicio resuelto 11.13. *Calcula los ángulos que forma el plano $\pi:\ 4x+3y+2z-1=0$ con los ejes coordenados.*

El ángulo que forman recta y plano es el complementario al que forman el vector director de la recta con el vector asociado al plano:

$\theta=\measuredangle(\vec{v}_r,\vec{n}_\pi)$; $\varphi=\measuredangle(r,\pi)\rightarrow\varphi=90°-\theta$

$\vec{n}_\pi=(4,3,2)$; $\vec{i}=(1,0,0)$; $\vec{j}=(0,1,0)$; $\vec{k}=(0,0,1)$

$\vec{n}_\pi\cdot\vec{i}=|\vec{n}_\pi|\ |\vec{i}|\ \cos\theta_X\rightarrow 4=\sqrt{33}\cdot 1\ \cos\theta_X\rightarrow\theta_X=45.87^o$

$\vec{n}_\pi\cdot\vec{j}=|\vec{n}_\pi|\ |\vec{i}|\ \cos\theta_X\rightarrow 3=\sqrt{33}\cdot 1\ \cos\theta_Y\rightarrow\theta_X=58.52^o$

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{k} = |\vec{n}_\pi|\ |\vec{i}|\ \cos\theta_X \to 2 = \sqrt{33} \cdot 1\ \cos\theta_Z \to \theta_X = 69.63^o$

Luego los ángulos son: $\varphi_X = 90 - 45.87 = 44.13^o$; $\varphi_Y = 90 - 55.82 = 34 - 18^o$; $\varphi_Z = 90 - 69.63 = 20.37^o$ ◇

Ejercicio resuelto 11.14. *Determina el valor de t para que las siguientes rectas formen un ángulo de* 60^o

$r:\ (1+\lambda, 2-\sqrt{2}\lambda, 3-\lambda);\quad s:\ (1+\mu, 2+t\mu, 3+\mu)$

¿Las recta se cortan en un punto o se cruzan en el espacio?

$\vec{v}_r = (1, -\sqrt{2}, -1);\quad \vec{v}_s = (1, t, 1)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 1 - \sqrt{2}t - 1 = \sqrt{2}t$

$|\vec{v}_r|\ |\vec{v}_s|\ \cos\theta = 2\sqrt{2+t^2}\cos 60^o = \sqrt{2+t^2}$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\ |\vec{v}_s|} \to \frac{1}{2} = \frac{\left|\sqrt{2}t\right|}{2 \cdot \sqrt{2+t^2}} \to$$

$$\to \begin{cases} \sqrt{2}t = \sqrt{2+m^2} & \to \quad m = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}t = -\sqrt{2+m^2} & \to \quad m = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Como $(1,2,3) \in r\ \wedge\ (1,2,3) \in s \to r \cap s = P(1,2,3)$, las rectas se cortan.

Como, en este caso, resulta evidente que (1,2,3) es un punto de ambas rectas, tenemos dos rectas que forman 60^o y tienen un punto en común por lo tanto, se cortan. No es necesario comprobar que $Det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s} = 0$. ◇

Ejercicio resuelto 11.15. *Calcula, la distancia entre las rectas:*

$r:\ (4\lambda, -10-3\lambda, 9+5\lambda);\quad s:\ (2-12\mu, 1+9\mu, 4+\mu)$

Usaremos,esta vez, el método del plano paralelo.

$$\pi: \begin{cases} \subset r \\ \parallel s \end{cases} \to d(r,s) = d(P_s, \pi)$$

$$\pi : \begin{cases} \subset r \\ \parallel s \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r(0,-10,9) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (4,-3,5) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-12,9,1) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x & y+10 & z-9 \\ 4 & -3 & 5 \\ -12 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi : \ 3x+4y+40=0$$

$$d(r,s) = d(P_r,\pi) = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 0\cdot 4 + 40|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \frac{50}{5} = 10\ u$$

Se sugiere al lector/a que resuelva el problema por los otros dos métodos.

◇

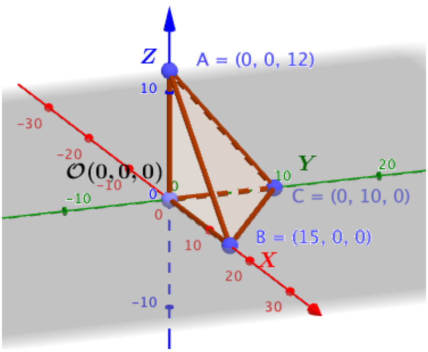
Ejercicio resuelto 11.16. *Calcula el volumen del tetraedro que forma el plano $4x+6y+5z-60=0$ con los ejes coordenados.*

Encontremos los vértices, que junto al origen, $\mathcal{O} = (0,0,0)$, formarán el tetraedro.

$Z: \ x=0 \ \wedge \ y=0 \rightarrow \pi : \ z=12 \rightarrow A(0,0,12)$

$X: \ y=0 \ \wedge \ z=0 \rightarrow \pi : \ x=15 \rightarrow A(15,0,0)$

$Y: \ x=0 \ \wedge \ z=0 \rightarrow \pi : \ z=10 \rightarrow A(0,10,0)$



$$\overrightarrow{OA} = (0,0,12)$$
$$\overrightarrow{OB} = (15,0,0)$$
$$\overrightarrow{OC} = (0,10,0)$$
$$[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}] =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 15 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -1800$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]\right| = \frac{|-1800|}{6} = 300\ u^3$$

◇

Ejercicio resuelto 11.17. *Encuentra la ecuación del plano π perpendicular a la recta $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z}{4}$ y que pasa por el punto $P(-1,1,0)$. Calcula, así mismo, el volumen del tetraedro que forma el plano π al cortar a los ejes coordenados.*

$$\pi: \begin{cases} \perp r \\ P \end{cases} \equiv \begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (2,3,4) \\ P(-1,1,0) \end{cases} \rightarrow$$

$$2(x+1) + 3(y-1) + 4z = 0 \rightarrow \pi: \ 2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

$$X \cap \pi \ \ (y = 0, \ z = 0 \rightarrow x = 1/2) \rightarrow \ A(1/2, 0, 0)$$

$$Y \cap \pi \ \ (x = 0, \ z = 0 \rightarrow y = 1/3) \rightarrow \ B(0, 1/3, 0)$$

$$Z \cap \pi \ \ (x = 0, \ y = 0 \rightarrow z = 1/4) \rightarrow \ A(0, 0, 1/4)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{vmatrix} \right| = \frac{\left|\frac{1}{24}\right|}{6} = \frac{1}{144} \ u^3$$

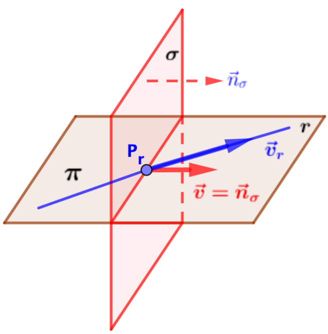
◇

Ejercicio resuelto 11.18. .

a) Encuentra la ecuación del plano π que contiene a la recta r : $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\sigma: \ 2x - y + 3z + 1 = 0$.

b) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta s formada por π y σ.

c) Determina el ángulo que forma la recta r con el plano σ



$$\pi: \begin{cases} \subset r \\ \perp \sigma \end{cases} \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} P_{r_1}(1,-1,1) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (2,-1,3) \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi = (2,1,3) \end{cases}$$

Donde $r:\ x=1 \to \begin{cases} y-z=-2 \\ 2y+z=-1 \end{cases} \to y=-1;\ z=1 \to P_{r_1}(1,-1,1)$

$r:\ x=4 \to \begin{cases} y-z=-5 \\ 2y+z=-4 \end{cases} \to y=-3;\ z=2 \to P_{r_2}(4,-3,2)$

$\vec{v}_r=\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(3,-2,1) \quad \vec{n}_\pi=(2,-1,3)$

—— a) $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \to \pi:\ 5x+7y-z+3=0$

—— b) $s:\ \begin{cases} \pi:\ 5x+7y-z+3=0 \\ \sigma:\ 2x-y+3z+1=0 \end{cases}$

$y=0 \to \begin{cases} 5x-z=-3 \\ 2x+3z=-1 \end{cases} \to P_{s_1}(-10/17,0,1/17)$

$y=1 \to \begin{cases} 5x-z=-10 \\ 2x+3z=0 \end{cases} \to P_{s_1}(-30/17,1,20/17)$

$\vec{v}_s=\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(-20/17,1,19/17) \rightsquigarrow (-20,17,19)$

$s:\ \begin{cases} P_s(-10/17,0,1/17) \\ \vec{v}_s=(-20,17,19) \end{cases} \to s:\ \begin{cases} x=-10/17-20\lambda \\ y=17\lambda \\ z=1/17+19\lambda \end{cases}$

—— c) $\measuredangle(r,\sigma)=\varphi=90^o-\measuredangle(\vec{v}_r,\vec{n}_\sigma)=90^o-\theta$

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r|\ |\vec{n}_\pi|}=\dfrac{|(3,-2,1)\cdot(2,-1,3)|}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2} \to \theta=60^o \Rightarrow \varphi=30^o$

◇

Ejercicio resuelto 11.19. *Sea* $r:\ \begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-z-4=0 \end{cases}$ *y* $\pi:\ x+2y+3z-1=0$. *Encuentra la ecuación de la recta* s *situada en* π*, que pase por* $P(2,1,-1)$ *y que sea perpendicular a* r*.*

$r: \; z = 0 \to y = 4, \; x = -3: \; P_{r_1}(-3, 4, 0); \quad z = 1 \to y = 5, \; x = -1:$ $P_{r_2}(-1, 5, 1) \Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (2, 1, 1)$

$\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi$, así, $s \perp r$ y $s \subset \pi$.

También podríamos haber hallado $\vec{v}_r$ buscando una solución particular del SEL homogéneo asociado a r o mediante el producto vectorial de los dos vectores directores de los planos que definen a r.

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1, -5, 3)$$

$$s: \begin{cases} P \\ \subset \pi \\ \perp r \end{cases} \equiv \begin{cases} P \\ \vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi \end{cases} \to X = (2, 1, -1) + \lambda(1, -5, 3) \qquad \diamond$$

Ejercicio resuelto 11.20. *Encuentra la recta perpendicular común a las rectas:*

$$r: \begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Determina, también, el plano que equidista de ambas rectas.

Busquemos punto y vector director de cada recta para escribirlas en paramétricas.

$$r: \begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} P_{r_1}(1, 3, 0) \\ P_{r_2}(3, 2, 1) \end{cases} \to \vec{v}_r = (2, -1, 1)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} P_{s_1}(2, -3, 0) \\ P_{s_2}(2, -3, 1) \end{cases} \to \vec{v}_s = (0, 0, 1)$$

r y s en paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases}$$

Tomamos un punto genérico de cada recta para formar el vector móvil ('elástico') que los une:

$$\begin{cases} R(\lambda) = (1+2\lambda, 3-\lambda, \lambda) \\ S(\mu) = (2, -3, \mu) \end{cases} \rightarrow$$

$$\overrightarrow{RS}(\lambda, \mu) = (1+2\lambda, -6+\lambda, \mu-\lambda)$$

Exigimos ahora que $\overrightarrow{RS}$ sea perpendicular a r y a s:

$$\overrightarrow{RS} \perp r \leftrightarrow \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0$$

$$\overrightarrow{RS} \perp s \leftrightarrow \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0$$

$$\begin{cases} -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \mu - \lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = \mu = \frac{8}{5}$$

Determinamos, con estos valores de los parámetros, los puntos de r y s que están 'frente a frente':

$$R_\perp = R(\lambda = 8/5) = (21/5,\ 7/5,\ 8/5)$$

$$S_\perp = S(\mu = 8/5) = (2, -3,\ 8/5)$$

$$\vec{v}_t = \overrightarrow{R_\perp S_\perp} = (-11/5, -22/5, 0) \rightsquigarrow (1, 2, 0); \quad t : \begin{cases} \perp r \\ \perp s \end{cases}$$

Finalmente, la recta perpendicular común a las dos rectas dadas es: $t : (2, -3,\ 8/5) + \theta(1, 2, 0)$

Se sugiere que el/la lector/a encuentren la recta perpendicular común a r y s por el método de los dos planos.

El plano π que equidista de ambas rectas es el que pasa por el punto medio de los puntos que están 'frente a frente', $M_{R_\perp S_\perp} = \dfrac{R_\perp + S_\perp}{2} = (31/10,\ -4/5,\ 0)$ y tiene por vector asociado el vector que los une, $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{R_\perp S_\perp} \rightsquigarrow (1, 2, 0)$

$$1(x - 31/10) + 2(y + 4/5) + 0(z) = 0 \rightarrow \pi :\ 10x + 20y - 47 = 0 \qquad \diamond$$

Ejercicio resuelto 11.21. *Determina el valor de t para que las rectas $r:\ (2\lambda, 1-\lambda, \lambda)$ y $s:\ x-1=\dfrac{y-t}{t-1}=\dfrac{z-3}{3}$ sean perpendiculares. Calcular, en este caso, el punto de corte y el plano que las contiene.*

$r:\ P_r(0,1,0);\ \vec{v}_r=(2,-1,1);\quad s:\ P_s(1,t,3);\ \vec{v}_s=(1,t-1,3)$

$r \perp s \leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \to 2-(t-1)+3=0 \to t=6$

Para encontrar el punto de corte $P = r\cap s$, igualaremos las ecuaciones paramétricas de ambas rectas (en el caso $t=6$):

$$\begin{cases} 2\lambda & = 1+\mu \\ 1-\lambda & = 6+5\mu \to \mu=-1;\ \ \lambda=0 \\ \lambda & = 3+3\mu \end{cases}$$

Punto de corte: $P = r\cap s = P_r(\lambda=0) = P_s(\mu=-1) = (0,1,0)$

Plano que las contiene: $\pi:\ \begin{cases} \subset r \\ \subset s \end{cases} \equiv \begin{cases} P(0,1,0) \\ \vec{u}=\vec{v}_r=(2,-1,1) \\ \vec{v}=\vec{v}_s=(1,5,3) \end{cases}$

$\pi:\ (x,y,z)=(0,1,0)+\theta(2,-1,1)+\varphi(1,5,3)$ ◇

Ejercicio resuelto 11.22. *Encontrar el punto de la recta $r:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=\dfrac{z}{3}$ y que equidiste de los planos $\pi:\ x+y+z+3=0$ y $\sigma:\ (3+\lambda, -\lambda+\mu, -6+\mu)$*

Preparemos el problema escribiendo r en paramétricas y σ en general.

$r:\ (1+2\lambda, -1+\lambda, 3\lambda)$

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \pi:\ x-y-z-3=0$$

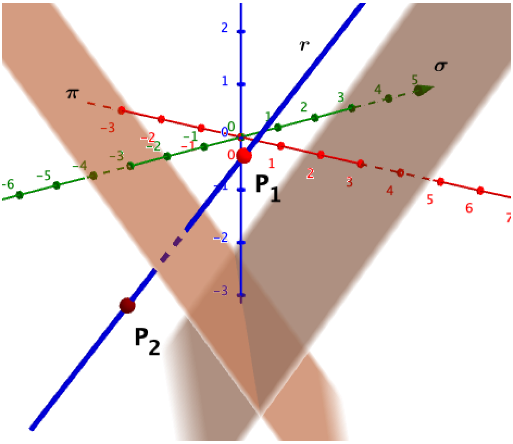
Buscamos un punto de la recta r genérico, $R((1+2\lambda, -1+\lambda, 3\lambda$ cuya distancia a cada plano coincida: $d(R,\pi)=d(R,\sigma)$.

Usando la fórmula de distancia de un punto a un plano:

$$\frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1+2\lambda-1+\lambda-3\lambda-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\rightarrow$$

$$\rightarrow |6\lambda+3|=3\rightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=-1\end{cases}$$

Tenemos dos posibles soluciones: $P_1(1,-1,0)$ y $P_2(-1,-2,-3)$



◇

Ejercicio resuelto 11.23. *Encuentra el plano paralelo a* $\pi:\ 2x+6y-3z+17=0$ *que diste* 2 *unidades del origen de coordenadas.*

$\sigma :\parallel \pi \rightarrow 2x+6y-3z+k=0$, el origen de coordenadas es $\mathcal{O}(0,0,0)$.

$$d(\mathcal{O},\sigma)=\frac{|2\cdot 0+6\cdot 0-3\cdot 0+k|}{\sqrt{2^2+6^3+(-3)^2}}=\frac{|K|}{7}=2\rightarrow k=\pm 14$$

Hay dos soluciones:

$\sigma_1: 2x+6y-3z+14=0;\quad \sigma_2: 2x+6y-3z-14=0$ ◇

Ejercicio resuelto 11.24. *Encuentra los simétricos de* $P(1,2,3)$ *respecto de la recta* $r:\begin{cases}x-y+3=0\\ 4x-z=0\end{cases}$ *y del plano* $\pi:\ x-3y-2z+4=0.$

Para buscar los simétricos necesitamos antes las proyecciones ortogonales. *Notación:* llamaremos Q_r y Q_π a las proyecciones ortogonales de P sobre r y π y P'_r y P'_π a las respectivos simétricos de P respecto de recta y plano.

Haciendo $z = \lambda$ en las ecuaciones generales de r obtenemos sus ecuaciones paramétricas: $r:\ (\lambda, 3+\lambda, 4\lambda)$

—— P'_r: simétrico de P respecto de r:

$$\sigma : \begin{cases} P(1,2,3) \\ \perp r \to \vec{n}_\sigma = \vec{v}_r = (1,1,4) \end{cases} \to$$

$$\to 1(x-1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0 \Rightarrow \sigma :\ x + y + 4z - 15 = 0$$

Q_r, proyección ortogonal de P sobre r:

$$Q_r = r \cap \sigma \to 1(\lambda) + 1(3+\lambda) + 4(4\lambda) - 15 = 0 \to \lambda = 2/3$$

$$Q_r = P_r(\lambda = 2/3) = (2/3,\ 11/3,\ 8/3)$$

P'_r, simétrico de p respecto de r:

$$P'_r \ / \ \frac{P + P'_r}{2} = Q_r \to P'_r\ (1/3,\ 16/3,\ 7/3)$$

—— P'_π: simétrico de P respecto de π:

$$s : \begin{cases} P(1,2,3) \\ \perp \pi \to \vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (1,-3,-2) \end{cases} \to$$

$$s :\ (1+\mu, 2-3\mu, 3-2\mu)$$

Q_π, proyección ortogonal de P sobre π

$$Q_\pi = \pi \cap s \to 1(1+\mu) - 3(2-3\mu) - 2(3-2\mu) + 4 = 0 \to \mu = 1/2$$

$$Q_\pi = P_s(\mu = 1/2) = (3/2,\ 1/2,\ 2)$$

P'_π, simétrico de P respecto de π:

$$P'_\pi \ / \ \frac{P + P'_\pi}{2} = Q_\pi \to P'_\pi\ (2,-1,1))$$ ◇

Ejercicio resuelto 11.25. .

a) Encuentra los puntos de $r:\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ *que disten* $\dfrac{1}{3}$ *del plano* $\pi:\ 2x-y+2z+1=0$

b) Busca los puntos de π *que disten* $\dfrac{1}{3}$ *de los puntos encontrados en el apartado anterior.*

r en paramétricas: $\begin{cases} y=-x \\ z=x \end{cases} \to r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$

$$R(\lambda)=(\lambda,-\lambda,\lambda)\to d(R,\pi)=\frac{|2\lambda+\lambda+2\lambda+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\to$$

$$\to\frac{|5\lambda+1|}{3}=\frac{1}{3}\to\begin{cases} 5\lambda+1=1 & \to\lambda=0 \\ 5\lambda-1=1 & \to\lambda=-2/5 \end{cases}$$

Hy dos soluciones, $P_1=(R\lambda=0)=(0,0,0)$ y $P_2=R(\lambda=-2/5)=(-2/5,2/5,-2/5)$.

P_1 y P_2 están a $\frac{1}{3}$ de π, los puntos buscados, puntos de π que estén a distancia $\frac{1}{3}$ de P_1 y P_2, son las proyecciones ortogonales de éstos, Q_1 y Q_2 $(Q_i=Proy_\pi\ (P_i))$.

— Para $P_1(0,0,0)$:

$$s_1\begin{cases} P_1 \\ \perp\pi \end{cases}\to(2\mu,-\mu,2\mu)$$

$$\pi\cap s_1\to 4\mu+\mu+4\mu+1=0\to\mu=-1/9$$

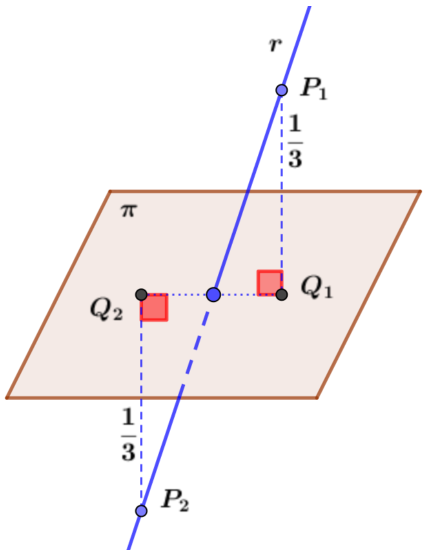
$$Q_1=S(\mu=-1/9)=(-2/9,\ 1/9,\ -2/9)$$

— Para $P_2(-2/5,2/5,-2/5)$:

$$s_1\begin{cases} P_2 \\ \perp\pi \end{cases}\to(-2/5+2\mu,2/5-\mu,-2/5+2\mu)$$

$$\pi\cap s_2\to\to 2(-2/5+2\mu)-(2/5-\mu)+2(-2/5+2\mu)+1=0\to\mu=1/9$$

$$Q_2=S(\mu=1/9)=(-8/45,\ 13/45,\ -8/45)$$



◇

Ejercicio resuelto 11.26. .

Sean $A(2,1,1)$, $B(1,4,1)$ y $C(1,3,1)$. Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que forman.

Considera el punto $D(1,1,-1)$ desde el que se trazan vectores a los puntos A, B y C para formar una pirámide. Calcula su volumen.

$\overrightarrow{AB} = (-1,3,2)$; $\overrightarrow{AC} = (-1,2,2)$; $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2,0,1) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5} \rightarrow A_{\Delta ABC} =$
$A_{base} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5}\, u^2$

La pirámide pedida tiene por base el triángulo ABC contenida en el plano $\pi : \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \equiv \begin{cases} A(2,1,1) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2,0,1) \end{cases} \rightarrow \cdots \rightarrow \pi : \; 2x + z - 3 = 0$ y tiene por altura $h = d(D,\pi) = \dfrac{|2-1-3|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\ u$, por o que el volumen será:

$V = \dfrac{1}{3}\, A_{base} \cdot h = \dfrac{1}{3}\, \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{3}\ u^3$

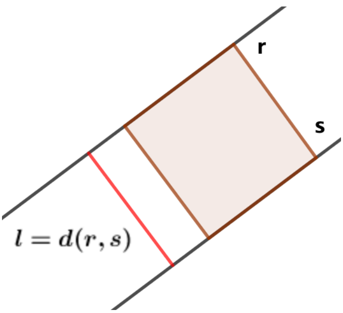
De otro modo:

$\overrightarrow{DA} = (1,0,0);\ \ \overrightarrow{DB} = (0,3,2);\ \ \overrightarrow{DC} = (0,2,2) \rightarrow$

$[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow V = \dfrac{|2|}{6} = \dfrac{1}{3}\ u^3$ ◇

Ejercicio resuelto 11.27. *Sean las rectas $r : (1+\lambda, -1+2\lambda, 2+\lambda)$ y $s : (\mu, 1+2\mu, 3+\mu)$, determina su posición relativa y calcula el área de un cuadrado que tuviera dos lados sobres estas rectas.*

$\vec{v}_r = (1,2,1) = \vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_r$, $P_r(1,-1,2) \notin s \rightarrow r \parallel s$, las rectas son paralelas.



El lado del cuadrado será la distancia entre ambas rectas que, al ser paralelas, coincidirá con la distancia de una de ellas a la otra (fórmula).

$d(r,s) = d(P_r, s) = \dfrac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|}$

$P_r(1,-1,2);\ P_s(0,1,3) \rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,2,1)$

$\vec{v}_s = (1,2,1) \rightarrow |\vec{v}_s| = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 4\vec{k} = (0,2,-4)$

$\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{20}$

Lado del cuadrado: $l = d(r,s) = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{3}\ u$

Área del cuadrado: $A = l^2 = \dfrac{10}{3}\ u^2$ $\diamond$

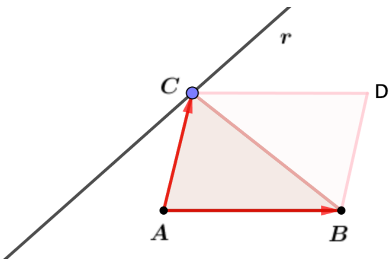
Ejercicio resuelto 11.28. *Determina el parámetro k para que la distancia al origen del plano $\pi : kx + y + z - (k+1) = 0$ sea de 1 unidad.*

$$d(\mathcal{O},\pi) = \frac{|m\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 - (k+1)|}{\sqrt{k^2+1^2+1^2}} = \frac{k+1}{\sqrt{k^2+2}} = 1\ u$$

$$\left(\left|k^2+1\right|\right)^2 = \left(\sqrt{k^2+2}\right)^2 \to (k+1)^2 = k^2+2 \to 2k = 1$$

$\Rightarrow k = 1/2$ $\diamond$

Ejercicio resuelto 11.29. *Sean $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$ y C un punto de la recta $r : \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$. Determina las coordenadas de C para que el triángulo ABC tenga área $\sqrt{2}/2\ u^2$.*



El área del triángulo ABC es la mitad de la del paralelogramo $ABCD$ y ésta última se puede obtener como valor absoluto del producto vectorial del vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$Area = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,1,1)$$

$$R_1 :\ x = 0 \to y = 0,\ z = 1\ \ R_2 :\ x = 2 \to y = 1,\ z = 1$$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r = R_1 = (0,0,1) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{R_1R_2} = (2,1,0) \end{cases}$$

$$\to C \in r :\quad C(2\lambda,\lambda,1) \quad \wedge \quad \overrightarrow{AC} = (2\lambda,\lambda,1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2\lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda,\ 2\lambda-1,\ -\lambda)$$

Aplicando la fórmula y exigiendo que el área sea $\sqrt{2}/2$,

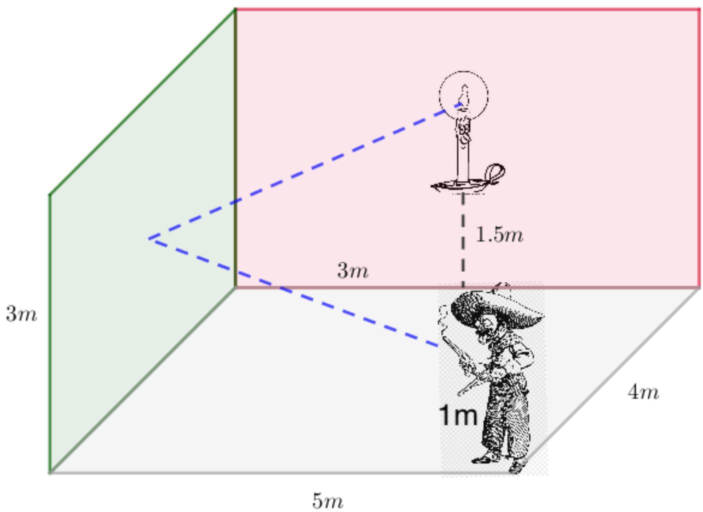
$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(1-\lambda)^2 + (2\lambda-1)^2 + (-\lambda)^2} = \dfrac{\sqrt{6\lambda^2 - 6\lambda + 2}}{2} \to 6\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

Hay dos soluciones: $C_1(2,1,1)$ y $C_2(0,0,1)$

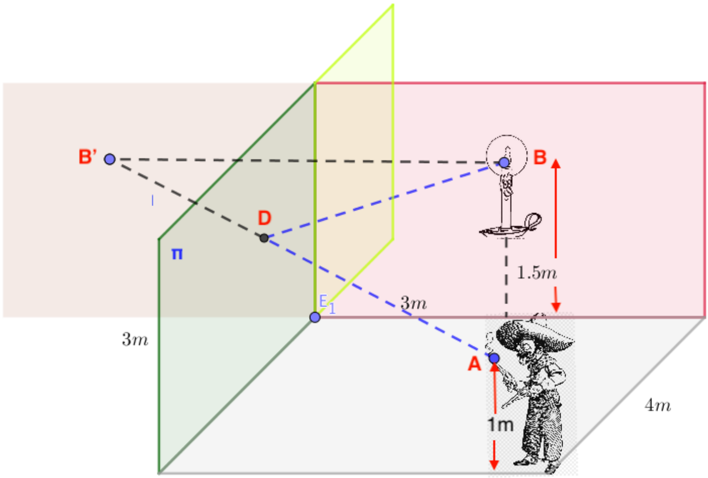
$\diamond$

Ejercicio resuelto 11.30. *Un vaquero se encuentra en la posición que aparece en la figura y pretende hacer blanco en la vela, para ello apunta a ña pared que tiene en frente para que la bala rebote en ella y apague la vela de la otra pared. Las distancias aparecen en la figura.*

Determina las coordenadas del punto de la pared frente al vaquero a donde debe disparar para que esto suceda.



Aunque el problema parece difícil es más sencillo de lo que parece si tenemos en cuenta la simetría del problema: 'simétrico de un punto B respecto de pu plano $\pi \equiv XZ$'



De la figura se desprende que $A(5,4,1)$, $B(0,3,1.5)$

El vaquero debe apuntar a un punto D, siendo D la intersección de la recta $r : AB'$ con el plano$\pi : XZ$.

El punto B' no es más que el simétrico de B respecto de $\pi : \; y = 0$. No es difícil ver que $B'(0,-3,1.)$

$\overrightarrow{AB'} = B' - A = (-5,-7,0.5) \rightsquigarrow \vec{v}_r = (10,14,-1)$

$$r : \begin{cases} A \\ \vec{v}_r \end{cases} \rightarrow (5+10\lambda, 4+14\lambda, 1-\lambda)$$

$D = r \cap \pi \rightarrow 4 + 14\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -2/7)$

Luego el punto de impacto de la bala con la pared que tiene en frente el vaquero es: $D(15/7, \; 0, \; 9/7)$

$\diamond$

Ejercicio resuelto 11.31. $\circledast$

Estudia las posiciones relativas de:

$$r:\ \frac{x-1}{4}=\frac{y}{a}=\frac{z}{-1};\qquad \pi:\ 2x-y+bz=0$$

VECTORIAL:

$P_r(1,0,0)$; $\vec{v}_r=(4,a,-1)$; $\qquad \vec{n}_\pi=(2,-1,b)$

$\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\pi=8-a-b=0\leftrightarrow a+b=8$

Hemos de distinguir dos casos:

- $a+b\neq 8\rightarrow r\cap\pi=P$, la recta cort al plano en un punto.
- $a+b=8\rightarrow P_r(1,0,0):\ 2(1)-0+b(0)=2\neq 0\rightarrow$

  $P_r\notin\pi\Rightarrow r\,||\,\pi$, la recta es paralela al plano.

ALGEBRÁICAMENTE:

OJO, si no nos fijamos bien podemos cometer un SUTIL ERROR.

$$(*)\ r:\ \begin{cases}\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{a} & \rightarrow ax-4y=a\\ \dfrac{z}{-1}=\dfrac{y}{a} & \rightarrow y+az=0\end{cases}\qquad\longrightarrow\qquad r\cap\pi:$$

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}a&-4&0&a\\0&1&a&0\\2&-1&b&0\end{array}\right]\leftarrow A^*\Rightarrow |A|=a(a+b-8)=0$$

$\rightarrow\ a=0\ \vee\ a+b=0$

Hemos de distinguir tres casos:

- $a\neq 0\ \wedge\ a+b\neq 8\rightarrow rg(A)=3=rg(A^*):\ SCD\rightarrow r\cap\pi=P$ la recta y el plano se cortan en un punto.
- $a+b=8\rightarrow\begin{vmatrix}0&1\\2&-1\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow\begin{vmatrix}a&-4&a\\0&1&0\\2&-1&0\end{vmatrix}=-2a=0\leftrightarrow a=0$

  Hemos de distingir dos subcasos:

- $a = 0 \to rg(A) = rg(A^*) = 2 :\ \ SCI \to \cancel{r \in \pi}$ la recta y el plano tienen infinitos puntos en común (~~La recta esta contenida en el plano~~.(El menor que dicta el plano no está formado por las ecuaciones de la recta.)
- $a \neq 0 \to rg(A) = 3 \neq 3 = rg(A^*) :\ \ SI \to r \parallel \pi$, la recta es paralela al plano.

▪ $a = 0 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & b & 0 \end{array}\right] \to$ Sistema homogéneo / $rg(A) = 2 = rg(A**) :\ \ SCI \to \cancel{r \in \pi}$, ~~la recta es paralela al plano~~.

¿DÓNDE ESTÁ EL ERROR?, por el método algebraico parece que hemos obtenido más soluciones al problema.

El SUTIL ERROR está en $(*)$, al tomar las ecuaciones de r que hemos tomado. ¡NO PUEDE SER $a = 0$!, si lo fuese:

$(*)\ r:\ \begin{cases} \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{\mathbf{0}} & \to y = 0 \\ \dfrac{z}{-1} = \dfrac{y}{\mathbf{0}} & \to y = 0 \end{cases} \to y = 0 :\ \ \sigma$ No tendríamos una recta sino un plano. En el caso de $a = 0 \to \nexists\, r$

. Una forma de eludir algebraicamente este problema es, de las igualdades de r en forma continua, $r:\ \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z}{-1}$, tomar para la forma general las ecuaciones que se obtienen al igualar primer con segundo miembro y primero con tercero:

$$r:\ \begin{cases} \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{a} & \to ax - 4y - a = 0 \\ \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{z}{-1} & \to x + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

Ahora, $r \cap \pi :\ A = \left[\begin{array}{ccc|c} a & -4 & 0 & a \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & b & 0 \end{array}\right] \leftarrow A^* \Rightarrow |A| = 4(a + b - 8) = 0 \leftrightarrow a + b = 8$

Con lo que ahora solo tendríamos que distinguir entre dos casos, $a + b = 8$ y $a + b \neq 8$, y obtendríamos solo los dos resultados que obtuvimos en el método vectorial.

◇

Ejercicio resuelto 11.32. .

$$P(1,1,1); \quad r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases} \quad ; \quad \pi: x+y+z-1=0$$

a) Plano que contiene a r y a P

b) s, recta que pasa por P y es perpendicular a π.

c) $d(P,\pi)$

d) $Q = r \cap \pi$

e) σ, plano que contiene a r y es perpendicular a π

—— a) Llamamos τ al plano buscado, $\tau = \begin{cases} P \\ \subset r \end{cases}$

Escribamos r es forma paramétrica:

Restando las ecuaciones, $r:\ y=2 \to x=z-3 \to \begin{cases} x=0;\ z=3 \\ x=1;\ z=4 \end{cases}$

$r:\ (x,y,z)=(0,2,3)+\lambda(1,0,1)$

El plano buscado pasará por P y tendrá como vectores directores, el vector director de r y uno formado por P y un punto cualquiera de r, p.e., el $P_{r_1}=P_r$.

$$r: \begin{cases} P_{r_1}(0,2,3) \\ P_{r_2}(1,2,4) \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r = P_{r_1} = (0,2,3) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (1,0,1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{PP_r} = (0,2,3)-(1,1,1)=(-1,1,2)$

$$\tau = \begin{cases} P \\ \subset r \end{cases} \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{u}=\vec{v}_r=(1,0,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{PP_r}=(-1,1,2) \end{cases}$$

$\tau:\ (x,y,z)=(1,1,1)+\theta(1,0,1)+\varphi(-1,1,2)$

—— b) $s \begin{cases} P(1,1,1) \\ \perp\pi \rightarrow \vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (1,1,1) \end{cases}$

$s: \ (x,y,z) = (1,1,1) + \mu(1,1,1)$

—— c) $d(P,\pi) = \dfrac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ u$

—— d) $Q = r \cap \pi$

Sustituiremos las ecuaciones paramétricas de r, en la ecuación general de π

$1\cdot(\lambda) + 1\cdot(2) + 1\cdot(3+\lambda) - 1 = 0 \rightarrow \lambda = -2$

$Q = r \cap \pi = P_r(\lambda = -2) = (-2,2,1)$

—— $e: \begin{cases} \subset r \\ \perp\pi \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r(0,2,3) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1,0,1) \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi = (1,1,1) \end{cases}$

$\sigma: (x,y,z) = (0,2,3) + \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1)$

◇

Ejercicio resuelto 11.33. .

$A(0,0,1); \quad B(1,0,-1); \quad C(0,1,-2); \quad D(1,2,0)$

a) Ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

b) Justifíquese que los cuatro puntos no son coplanarios.

c) Distancia de D a π.

d) Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

e) Área del triángulo ABC

—— a) $\pi \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \equiv \begin{cases} A(0,0,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,0,-2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,1,-3) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

—— b) Veamos si $D \in \pi$:

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 1 \neq 0 \rightarrow D \notin \pi$, los cuatro puntos no son coplanarios.

Hubiera sido mejor contestar a esta apartado después de cualquiera de los apartados posteriores ya que si $d(D, \pi) \neq 0$ o $Vol_{ABCD} \neq 0$, indica que $D \notin \pi$ y los cuatro puntos no son coplanarios.

—— c) $d(D, \pi) = \dfrac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}\ u$

—— d) $Vol_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|Det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix}\right\| = \dfrac{7}{6}\ u^3$

—— e) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2, 3, 1) \rightarrow$

$\rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{14} \ \Rightarrow \ A_{ABC} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$ ◇

Ejercicio resuelto 11.34. .

$$r : \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad ; \quad \pi : \ 2x + y + mz = n$$

Determina los valores de m y n para que r y π: a) se corten en un punto, b) sean paralelos, c) la recta esté contenida en el plano.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & n \end{array}\right] \leftarrow A^* \Rightarrow |A| = 2m + 15 = 0 \leftrightarrow m = -3$$

- $m \neq -3 \longrightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) : \ SCD \rightarrow r \cap \pi = P$, la recta y el plano se cortan en un punto.

- $m=-3 \longrightarrow rg(A)=2 \rightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & 1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} =$

  $= 5n-10 = 0 \leftrightarrow n=2$

  - $n \neq 2 \rightarrow rg(A) = \boxed{2} \neq 3 = rg(A^*):\ SI \rightarrow r \cap \pi = \phi \rightarrow r \,||\, \pi$, la recta es paralela al plano.
  - $n = 2 \rightarrow rg(A) = \boxed{2} = rg(A^*):\ SCI \rightarrow r \cap \pi = \boxed{r} \rightarrow r \subset \pi$, la recta está contenida en el plano.

VECTORIALMENTE: Se busa un punto y un vector director de r, $(P_r(1,0,0);\ \vec{v}_r = (8,-1,5))$. Hallamos $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 15+5m$

Si $m \neq -3 \rightarrow r \cap \pi = P$. En el caso $m=-3$, comprobamos que $P_r \in \pi$ si $n=2$, por lo que si $n=2 \rightarrow r \subset \pi$; si $n \neq 2 r \,||\, \pi$.

◇

Ejercicio resuelto 11.35. .

$\pi: 6x+3y+2z-12=0; \quad A(1,0,0);\ B(0,2,0);\ C(0,0,3)$

a) Plano σ que pasa por A, B y C y posiciones relaticas de π y σ.

b) Área triángulo ABC.

c) ⋇ P, punto de π, que junto a A, B y C determinan un tetraedro $ABCP$ de volumen $1; u^3$

$$\sigma : \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \equiv \begin{cases} A(1,0,0) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,2,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,0,3) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

—— a) $\sigma: 6x+3y+2z-6=0$

$\vec{n}_\pi = \vec{n}_\sigma;\ P_\pi(2,0,0) \notin \sigma \rightarrow \pi \ \|\ \sigma$. Los planos son paralelos.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 7$$

——b) $\Rightarrow Area_{ABC} = \dfrac{7}{2}\, u^2$

$x = \theta;\ y = \varphi \rightarrow P\pi = (\theta, \varphi, 6 - 3\theta - \frac{3}{2}\phi)$

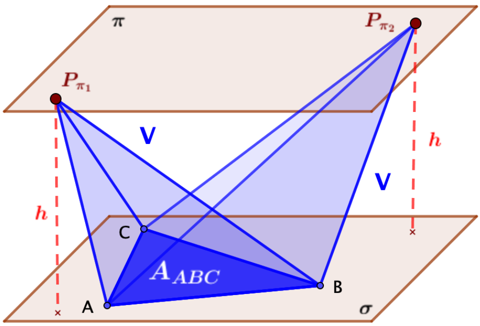
$\rightarrow \overrightarrow{AP} = (\theta - 1, \varphi, 6 - 3\theta - \frac{3}{2}\phi)$

$$V_{ABCP} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ \theta - 1 & \varphi & 6 - 3\theta - \frac{3}{2}\phi \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{6}\,|6| =$$

$1\ u^3 \quad \forall\theta, \forall\varphi$

—— c) ⋇ Cualquiera de los infinitos puntos de π determina un tetraedro que junto con el triángulo $ABC \in \sigma$ tiene volumen 1 u^3. **¿Cómo se explica esto?**

El volumen de una pirámide o tetraedro se puede calcular como un tercio del área de la base (depende solo del triángulo dado ABC, si la suponemos como base) por la altura, que será la distancia de P_π a σ. Como π y σ son paralelos, todos los puntos de uno de ellos están a la mista distancia del otro (distancia de un punto a un plano).



◇

Ejercicio resuelto 11.36. $r:\ \dfrac{x-\alpha}{-1} = \dfrac{}{-4} = \dfrac{}{\beta};\quad \pi:\ x + 2y + 3z = 6$

a) Posición relativa de r y π.

b) Distancia entre ellos cuando $\alpha = 3$ y $\beta = 6$.

c) Ecuación del plano σ que pasa por $P(0,0,0)$ y no cortan al plano π.

—— a) $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1, -4, \beta) \cdot (1, 2, 3) = -9 + 3\beta = 0 \leftrightarrow \beta = 3$

- $\beta \neq 3 \to r \cap \pi = Q$, la recta y el plano se cortan en un punto.
- $\beta = 3 \to r \mid\mid \pi \;\vee\; r \equiv \pi$

  $P_r(\alpha, 0, 0) \to 2 \cdot \alpha + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6 \leftrightarrow \alpha = 3$

  - $\alpha \neq 3 \to P_r \notin \pi \to r \mid\mid \pi$, la recta es paralela al plano.
  - $\alpha = 3 \to P_r \in \pi \to r \subset \pi$, la recta está contenida en el plano.

—— b) $\alpha = 6 \;\wedge\; \beta = 3 \to r \subset \pi \Rightarrow d(r, \pi) = 0$

—— c) σ no cortará a $\pi \leftrightarrow \sigma \mid\mid \pi$

$$\sigma : \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{n}_\sigma = \vec{n}_\pi = (1,2,3) \end{cases} \to \sigma : x + 2y + 3z = 0$$

◇

Ejercicio resuelto 11.37. $\pi : 2x + y + 2z = 8$ $P(10, 0, 10$

a) Calcula la distancia de P a π.

b) Calcula el área del triángulo ABC, siendo estos puntos los de intersección de π con los ejes coordenados.

c) Calcula el volumen del tratraedro de vértices A, B, C y P.

— a) $d(P, \pi) = \dfrac{|2(10) + 1(0) + 2(10) - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{32}{3}\, u$

— b) Busquemos los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados.

$\pi \cap OX \; (y = z = 0) \to x = 4 \to A(4, 0, 0)$

$\pi \cap OY \; (x = z = 0) \to y = 4 \to A(0, 8, 0)$

$\pi \cap OZ \; (x = y = 0) \to x = 4 \to A(0, 0, 4)$

Más sencillo hubiese sido encontrar la ecuación segmentaria de π: $\dfrac{x}{\mathbf{4}} + \dfrac{y}{\mathbf{8}} + \dfrac{x}{\mathbf{4}} - 1 = 0$.

$\overrightarrow{AB} = (-4, 8, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-4, 0, 4) \to \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (32, 16, 32)$

$Area_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{32^2+16^2+32^2} = \frac{48}{2} = 24\ u^2$

— c) $\overrightarrow{AP} = P - A = (6,0,10) \to [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}] = 512$

$V_{ABCP} = \frac{1}{6}\ |256| = \frac{256}{3}\ u^3$

Más sencillo hubiese sido considerar:

$V_{tetraedro} = V_{ABCP} = \frac{1}{3}\ A_{base=ABC} \cdot h(altura)$,

siendo la altura $h = d(P,\pi) \to V_{ABCP} = \frac{1}{3}\ 24\ \frac{32}{3} = \frac{256}{3}\ u^3$. ◇

Ejercicio resuelto 11.38. .

$$r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z-3=0 \end{cases} \quad ; \qquad s:\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

a) Calcula el plano π que contiene a las dos rectas.

b) Busca la ecuación de la recta t que pasa por $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a r.

c) Determina los valores de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\sigma:\ x-2y+az=b$.

$$r: \begin{cases} x=0 \begin{cases} y=3 \\ z=3 \end{cases} & P_{r_1}(0,3,3) \\ x=1 \begin{cases} y=4 \\ z=5 \end{cases} & P_{r_2}(1,4,5) \end{cases} \qquad \vec{v}_r = (1,4,5)$$

$s:\ P_s(0,-1,2);\quad \vec{v}_s = (1,1,2)$

— a) $\pi: \begin{cases} \supset r \\ \supset s \end{cases} \equiv \begin{cases} P_r = P_{r_1} = (0,3,3) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1,4,5) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1,1,2) \end{cases} \to \begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to \pi:$

$7x + y - 4z + 9 = 0$

— b) $t: \begin{cases} P(0,-1,2) \\ \text{corta } \perp r \end{cases} \equiv \begin{cases} P(0,-1,2) \\ Q = Proy_{\,r}(P) = (-1,2,1)(*) \end{cases} \equiv \begin{cases} P(0,-1,2) \\ \vec{v}_t = \overrightarrow{PQ} = (-1,3,-1 \end{cases}$

$t: \ -x = \dfrac{y+1}{3} = 2 - z$

(*) $Q = Proy_{\,r}(P):$ $\quad$ **1º)** $\tau \begin{cases} P(0,-1,2) \\ \perp r \to \vec{n}_\tau = \vec{v}_r = (1,1,2) \end{cases} \to 1(x-0)+$

$1(y+1)+2((z-2)=0 \Rightarrow \tau: x+y+2z-3=0$

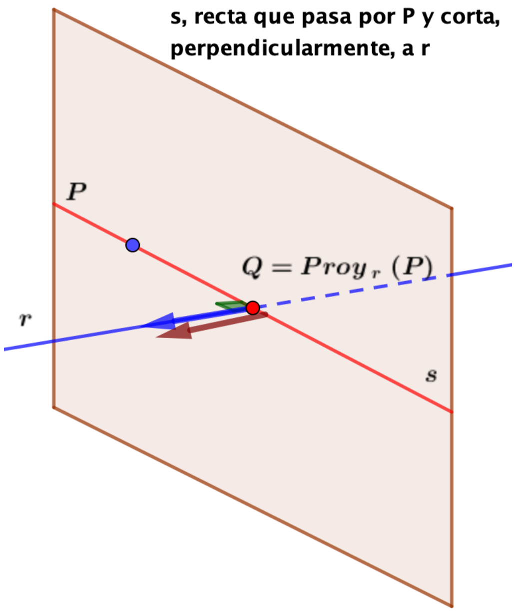
2º) $Q = r \cap \tau \to (\lambda)+(3+3\lambda)+2(3+2\lambda)-3=0 \to \lambda=-1$

$Q = Proy_{\,r}(P) = P_r(\lambda=-1) = (-1,2,1)$

— c) $s \subset \sigma$ si:

1º) $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\sigma = 0 \to (1,1,2)\cdot(1,-2,a)=0 \Rightarrow a = 1/2$

y **2º)** $P_s \in \sigma \to 0-(-1)+\dfrac{1}{2}(2)-b=0 \to b=2$ $\diamond$



Ejercicio resuelto 11.39. $A(5,7,3)$; $B(1,1,1)$; $r:\dfrac{z-3}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$ $\pi:\begin{cases}C(3,-1,0)\\ \perp r\end{cases}$

a) Recta s que pasa por P, corta a r y es perpendicular a r.

b) Distancia de A a r.

c) Distancia de B a π

$Q=proy_{\,r}(A)$

1^o) $\sigma:\begin{cases}A(5,7,3)\\ \perp r\to\vec{n}_\sigma=\vec{v}_r=(-1,3,2)\end{cases}$

$-1(x-5)+3(y-7)+2(z-3)=0\to\tau:x-3y-2z+22=0$

y **2^o)** $Q=proy_{\,r}(A)=r\cap\sigma\to(3-\lambda)-3(-1+3\lambda)-2(2\lambda)+22=0\to\lambda=2$

$Q=proy_{\,r}(A)=r\cap\sigma=P_r(\lambda=2)=(1,5,4)$

— a) $s:\begin{cases}A\\ \text{corta }\perp r\end{cases}\equiv\begin{cases}A\\ Q=proy_{\,r}(A)\end{cases}\equiv\begin{cases}A(5,7,3)\\ \overrightarrow{AQ}=(-4,-2,1)\end{cases}$

$\to r:\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$

— b) Como $Q=proy_{\,r}(A)\to d(A,r)=d(A,Q)=|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{21}\ u$

— c) $\pi:\begin{cases}C(3,-1,0)\\ \perp r\to\vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(-1,3,2)\end{cases}\to$

$\to-1(x-3)+3(y+1)+2z=0\to\pi:\ x+3y+2z+6=0$

$$d(B,\pi)=\frac{|-1\cdot1+3\cdot1+2\cdot1+6|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{7}\ u$$

◇

Ejercicio resuelto 11.40. .

Considera $A(-1,2,t)$; $B(2,3,5)$; $C(3,5,3)$

a) Determina el valor de t para que el segmento $\overline{AB}$ sea la hipotenusa del triángulo de vértices ABC.

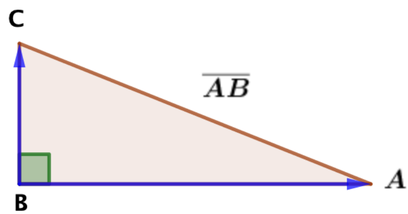
b) Calcula el área del triángulo ABC cuando $t = 6$.

c) Calcula el plano que contiene al triángulo ABC cuando $t = 6$.

— a) $\overline{AC}$ es la hipotenusa de ABC si $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA} = (-3, -1, t-5)$

$\overrightarrow{BC} = (1, 2-2)$



$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 - 2 - 2(t-5) = 0 \leftrightarrow t = 5/2$

— b) $t = 6 \to \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 1) \to \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -5, -5) \to Area_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}\ u$

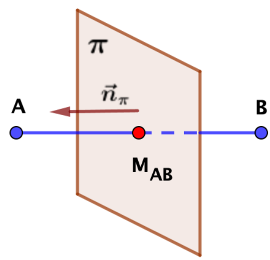
— c) $\pi : \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \begin{cases} B(2,3,5) \\ \overrightarrow{BA} = (-3, -1, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, 2, -2) \end{cases} \to \pi:\ y + z - 8 = 0$ ◇

Ejercicio resuelto 11.41. *Considera los puntos $A(2,3,1)$ y $B(0,1,1)$. Encuentra la ecuación del plano para el cual A y B son simétricos.*

$$\pi : \begin{cases} M_{AB} = (1, 2, 1) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} \rightsquigarrow (1, 1, 0) \end{cases}$$

$1(x-1) + 1(y-2) + 0(z-1) = 0$

$\pi:\ x + y = 3$



◇

11.4.2. Ejercicios propuestos

1. Hallar el ángulo que forman las rectas $r : \dfrac{x+1}{2} = -y = z-3$ y $s : x = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+5}{-1}$.

   Solución: 60^o .

2. Determinar m para que las rectas sean perpendiculares: $r : (1+\lambda, -1+2\lambda, \lambda)$ y $s : (-2-3\mu, 2\mu, -7+m\mu)$.

   Solución: $m = -1$.

3. Hallar el ángulo que forman los planos $x+2y-z = 3$ y $2x-y+3z = 0$.

   Solución: 71^o .

4. Dados los planos $3x-2y+5z-2 = 0$ y $kx+7y+z = 0$, hallar el valor de 3 para que sean perpendiculares.

   Solución: $k = 3$.

5. Hallar el ángulo formado por el plano $\pi : x+2y-z-3 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x-2y+3 = 0 \\ x-y-z = 0 \end{cases}$

   Solución: 30^o .

6. Hallar el ángulo formado por el plano $\pi : 2x+3z = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x-2y+3z = 0 \\ 3x+7y+3z+8 = 0 \end{cases}$

   Solución: 8^o .

7. Hallar el ángulo formado por la recta $r : \begin{cases} x-2y+z = 0 \\ 3x+y-z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x+3y-2z+5 = 0$

   Solución: 0^o .

8. Hallar la distancia del punto $A(1,2,5)$ al plano $\pi : 2x+2y-z-5 = 0$

   Solución: $4/3\ u$.

9. Hallar la distancia del plano $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$ al plano $\sigma : 4x + 2y - 2z - 7 = 0$

Solución: $\sqrt{6}/15\ u$.

10. Demostrar que el punto $A(-1, 1, 0)$ no es coplanario con los puntos $B(0, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(1, 2, 1)$ y hallar la mínima distancia del punto A al plano determinado por B, C y D.

Solución: $\sqrt{2}/2\ u$.

11. Dadas las rectas $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = -z$ y $s : -3 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{2}$

a) Hallar la ecuación general del planoπ que contiene a r y es paralelo a s

b) Determinar la distancia de s al plano π

Solución: $9x - y + 15z - 8 = 0$; $\quad 25/\sqrt{307}\ u$.

12. Calcular el valor de c para que la recta $r : \begin{cases} 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ sea paralela al plano $\pi : 2x - y + cz - 2 = 0$. Para el valor de c obtenido, calcular la distancia entre r y π.

Solución: $c = -2$; $\quad 7/3\ u$.

13. Dado el plano $\pi : 2x - 2y + z - 3 = 0$, hallar un punto P de la recta $r : (3 + \lambda, -2 + 3\lambda, -1 + \lambda)$ de manera que la distancia de P al plano π sea 1 u.

Solución: Hay dos soluciones: $P_1(8/3,\ -1,\ -4/3)$; $\ P_2(2, 1, -2)$.

14. Calcular las coordenadas de un punto de la recta $r : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{2}$ que equidiste de los planos $\pi : 3x + 4z - 1 = 0$ y $\sigma : 4x - 3z - 1 = 0$

Solución: Hay dos soluciones: $P_1(0, -4, 0)$; $\ P_2(1/4,\ -29/8,\ 1/4)$.

15. Hallar la ecuación del plano paralelo $2x - 2y + z - 8 = 0$ y que diste seis unidades del mismo.

Solución: Hay dos soluciones: $2x - 2y + z = -10$; $\ 2x - 2y + z = 26$.

16. Encontrar la ecuación del plano paralelo al de ecuación $x+y+z=1$, determinado por la condición de que el punto $A(3,2,1)$ equidiste de ambos.

Solución: $x+y+z-11=0$.

17. Calcular la distancia del punto $P(1,-3,1)$ a la recta
$$r:\begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ 3x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

Solución: $\sqrt{6}/3\ u$.

18. Se consideran la recta $r:\begin{cases} x=0 \\ y=4z \end{cases}$ y el punto y el punto $P(3,4,1)$. Hallar el plano π que contiene a la recta r y al punto P. Calcular la distancia de P a r.

Solución: $y-4z=0$; $3\ u$.

19. Se considera la recta $r:\begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$ y el punto $P(0,1,3)$. Se pide:

a) Hallar la distancia de P a r.

b) Determinar el plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

Solución: $2\sqrt{5}\ u$; $2x+y-1=0$.

20. Dados en el espacio los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,1,1)$, $C(1,2,1)$, $D(0,1,1)$, calcular:

a) El área del triángulo ABC.

b) La distancia del punto A a la recta CD.

Solución: $\sqrt{3}/2\ u$; $\sqrt{6}/2\ u$.

21. Dado el triángulo de vértices $A(1,1,1)$, $B(0,3,5)$ y $C(4,0,2)$, hallar su área y las longitudes de sus tres alturas (distancia de un vértice al lado opuesto).

Solución: $\sqrt{230}/2\ u^2$; $h_A=\sqrt{115}/17\ u$; $h_B=\sqrt{230}/11\ u$; $h_C=\sqrt{230}/21\ u$.

22. Hallar la distancia entre las rectas $r : \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z-8}{-2}$ y $s : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$

Solución: $3\ u$.

23. Escribir las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas $r : x = y = z$ y $s : x = y = 3z - 1$.

Solución: $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - 6z + 200 \end{cases}$.

24. Se consideran las rectas $r : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s

b) Hallar la mínima distancia entre ambas

Solución: Se cruzan; $11\sqrt{5}/5\ u$.

25. Dadas las rectas $r : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-4}{2} = z - 2$ y $s : \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, hallar las ecuaciones de la recta que las corta perpendicularmente.

Solución: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{cases}$.

26. Dadas las rectas $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ y $s : \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$:

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.

b) Hallar la distancia entre ellas.

Solución: Se cruzan; $51/\sqrt{237}\ u$.

27. Dadas las rectas $r : \dfrac{x-4}{2} = y - 4 = z$ y $s : \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 3 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$:

a) Comprobar que las dos rectas se cruzan

b) Determinar un punto A de la recta r y un punto B de la recta s de manera que el vector que une A y B sea perpendicular a las rectas r : y s :.

Solución: $A(42/11,\ 43/11,\ -1/11);\quad B(32/11,\ 3,\ 29/11)$.

28. Encontrar los puntos situados a distancia cinco del origen y pertenecientes a la recta que pasa por $A(1,2,5)$ y $B(6,5,6)$.

Solución: $(32/7,\ 29/7,\ 40/7);\quad (0,\ 7/5,\ 24/5)$.

29. La distancia del punto $P(1,2,3)$ a otro A del eje de abscisas es 7. Hallar las coordenadas del punto A.

Solución: Hay dos soluciones: $A_1(7,0,0)$ y $A_2(-5,0,0)$.

30. Hallar el punto del plano $x+y+z=1$ que equidista de los puntos $A(1,-1,2)$, $B(3,1,2)$, $C(1,1,0)$.

Solución: $(4,-2,-1)$.

31. Encontrar en la recta que pasa por los puntos $A(-1,0,1)$ y $B(1,2,3)$ un punto tal que su distancia al punto $C(2,-1,1)$ sea de tres unidades.

Solución: Hay dos soluciones: $(0,1,2)$ y $(-2/3,\ 1/3,\ 4/3)$.

32. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son las intersecciones de $\pi : 2x+y+3z=6$ con los ejes coordenados.

Solución: $3\sqrt{14}\ u^2$.

33. Dados $\pi : 2x+5=0$ y $\sigma : 3x+3y-4=0$, calcula el ángulo que forman y encuentra el plano τ que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos anteriores.

Ayuda: $\vec{n_\tau} = \vec{n_\pi} \times \vec{n_\sigma}$

Solución: $45^o \qquad z=0$.

34. Encuentra los puntos de la recta $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que disten $1/3$ del plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$.

Solución: $(0, 0, 0)$; $(-2/5,\ 2/5,\ -2/5)$.

35. Dados $A(2, 1, 2)$, $B(0, 4, 1)$ y $r : x = y - 2 = (z - 3)/2$, encuentra un punto C de r que equidiste de A y B y calcula el área del triángulo ABC.

Solución: $C(-1, 1, 1)$; $\sqrt{91}/2\ u^2$.

36. Calcula el ángulo formado por los planos $\pi : x + 3y + 2z - 5 = 0$ y $\sigma : -2x + y + 3z + 3 = 0$. Calcula, también, el volumen del tetraedro que limita π con los planos coordenados.

Solución: 60^0; $125/36\ u^3$.

37. Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$. Calcula la distancia de r al origen y la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

Solución: $\sqrt{6}/2\ u$; $s : (7\lambda, -\lambda, -2\lambda)$.

38. Sean $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(3, 2, 0)$ y sea π el plano que los contiene, encontrar la ecuación de la recta r, contenida en π, para la cual A y B son simétricos. Calcula, también, la distancia de A a r.

Ayuda: Haz un dibujo $\left(\vec{u_r} = \vec{n_\pi} \times \overrightarrow{AB}\right)$

Solución: $r : x/4 = (y - 1)/5 = (z - 1/2)/2$; $d(A, r) = 3/2\ u$.

39. Sean $\pi : (-2 + \lambda, -2\lambda + \mu, 7 - \mu)$ y $\sigma : 2x + y - z + 5 = 0$ y sea $r : x = y + 1 = (1 - z)/3$, determina los puntos de r que equidistan de π y σ.

Solución: $(0, -1, 1)$ y $(-1, -2, 4)$.

40. Sean $r : \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 1}{m} = z$ y $s : \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$

a) Determinar m y n para que r y s se corten perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación del plano que contiene a r y s.

Solución: $m = 4, \ n = 5/2; \qquad 2x - 3y + 5z - 5 = 0$.

41. Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ dos vértices opuestos de un rombo situado en el plano $z = 0$. Determina los otros dos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}\ u$ del punto medio del rombo.

Ayuda: Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio

Solución: $(3,3,0)$ y $(1,1,0)$.

42. $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C pertenece a la recta $r : \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Además la recta que une a A y C es perpendicular a la recta r. Determina las coordenadas de C y el área del triángulo.

Solución: $C(4,1,1); \qquad 5/2\ u^2$.

43. Determina la posición relativa del plano $\pi : x + y + z = 1$ con la recta $r : x - 1 = y - 1 = \dfrac{z-1}{-2}$ y calcula su proyección ortogonal sobre el plano.

Solución: $\pi \parallel r; \qquad (1/3 + \lambda, 1/3 + \lambda, 1/3 - 2/\lambda)$.

44. Sea $\pi : 2x + ay + z - 2 = 0$ y $r : X = (0,0,0) + \lambda(2,1,1)$

a) Determina a para que $r \perp \pi$.

b) Determina a para que $r \parallel \pi$ y determina la distancia de r a π en este caso.

Solución: $a = 1; \qquad a = -5, \ d(r,\pi) = \sqrt{15}/15\ u$.

45. $A(1,2,0)$, $B(0,-1,2)$, $C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$.

a) Encuentra la ecuación del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D.

b) Determina el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

Solución: $x - y - z - 1 = 0; \qquad 2/3\ u^3$.

46. $A(-1,2,0)$, $B(1,0,-4)$, $s:(1-\lambda,\lambda,3+\lambda)$.

    a) Encuentra C, un punto de r que forma con A y B un triángulo isósceles de lado desigual $\overline{AB}$.

    b) Encuentra la ecuación de la recta s sabiendo que es perpendicular a r y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto A.

Ayuda: $d(A,C)=d(B,C)$, $C\in r$, $\vec{v}_s=\vec{v}_r\times\overrightarrow{AB}$

Solución: $C(3,-2,1)$; $s:(1+$ $lambda, 2+\lambda, 0)$.

47. Un dron se encuentra en el punto de coordenadas $P(2,-3,1)$ y se pretende dirigirlo, en línea recta, hasta el punto más próximo del plano $\pi: 3x+4y+15=0$.

    a) Calcula la ecuación de la recta que debe seguir el dron y la distancia a recorrer hasta llegar al plano.

    b) Encuentra las coordenadas del punto de llegada.

Solución: $(2+3\lambda,-3,1+4\lambda)$; $5\ u$; $(-1,-3,-1)$.

48. Dos vértices consecutivos de un triángulo son $P(2,2,1)$ y $Q(0,0,-1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por $A(5,4,3)$.

    a) Determina la ecuación de r.

    b) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

Solución: $(5+2\lambda,4+2\lambda,3+2\lambda)$; $y-z=1$.

49. Sean $\pi: 2x+3y-z04$, $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$ y $s:(1+\lambda,2,3+\lambda)$.

    a) Encuentra el simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.

    b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto de intersección de r y s.

    c) Calcular el ángulo que forman r y s.

Solución: $(5/7,\ 11/7,\ 22/7)$; $(-1+2\mu,2+3\mu,1-\mu)$; 60^o .

50. $A(2,1,0)$, $\pi: 2x+3y+4z=36$

    a) Distancia de P a π

b) Coordenadas del punto de π más próximo a P.

c) Simétrico de P respecto de π

Solución: $\sqrt{29}\ u$; $(4,4,4)$; $(6,7,8)$.

51. $A(2.-3,2)$ y $B(0,1,-2)$ son los vértices del lado desigual de un triángulo isósceles cuyo tercer vértice está en la recta $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$. Determina las coordenadas de este tercer vértice sabiendo que el área del triángulo son 18 u^2.

Solución: $(5,3,2)$.

52. $\divideontimes$ $P(1,-1,1)$, $Q(5,-3,5)$ y $R(7,-7,1)$ son los vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

Solución: Depende del lado hacia el que se construya el cubo, $(6,-2,0)\ \vee\ (2,-6,2)$.

53. . $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,3)$ son tres vértices de un tetraedro. Calcular la ecuación del plano que contiene a A, B y C y determínese cuales deben ser las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro $ABCD$ es de 18 u^3.

Solución: $x+y+z=3$; $(5,5,5)\ \vee\ (-3,-3,-3)$.

54. $r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\-x+y=4\end{cases}$, $P(1,1,3)$, $Q(1,5,0)$.

a) Probar que $P\notin r$ y que $Q\in s$.

b) Encuentra $R\in r$ tal que el área del triángulo PQR sea rectángulo en P.

c) Calcula su área.

Solución: Es muy fácil; $(-9,-5,-5)$; $25\sqrt{2}\ u^2$.

55. Encuentra la recta que pasa por $P(-1,1,0)$ y es perpendicular a las rectas $r:\begin{cases}x=0\\x=z\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x+3y=2\\y-z01\end{cases}$.

Solución: $(x+1)/(-1)=(y-1)/(-4)=z$.

56. ⋇ Encuentra la recta perpendicular e incidente al eje OZ que pasa por $P(1,2,3)$.

Solución: $x+1=y-1=-z$.

57. Escribe la recta perpendicular común a las rectas $x=y=z$ y $x=y=3z-1$

Solución: $2x-1=1-2y=2z-1$.

58. ⋇ Encuentra la ecuación del plano que contiene al eje OX y dista 6 unidades del punto $(0,10,0)$.

Ayuda:Busca el haz de planos de eje OX

Solución: Hay dos soluciones: $3y+4z=0 \quad 3y-4z=0$.

59. Sea $r: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ y $P(1,2,1)$. Calcular:

a) Ecuación de la recta s que pasa por P y corta, perpendicularmente, a r.

b) Intersección de las rectas r y s.

c) Simétrico de P respecto de r.

Solución: $(x-1)/(-7)=(y-2)/(-1)=(z-1)/(2)$.
$(-4/3,\ 5/3,\ 6/3)$; $\quad (-11/3,\ 4/3,\ 7/3)$.

60. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$, hallar a, b, c y d sabiendo que:

- El vector cuyas componentes aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector $(1,-1,1)$.
- El producto vectorial del vector cuyas componentes son las de la tercera columna de A por el vector $(1,0,1)$ es el vector $(-2,3,2)$.
- El rango de la matriz A es 2.

Solución: $a=-6/5$; $b=-2$; $c=1$; $d=-4$.

61. Sean $r: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=z+3$ y $\pi: ax+2y-4z+b=0$.

a) Encuentra para qué valores de a y b la recta está contenida en el plano.

b) ¿Existe algú. valor de a y b para que r sea perpendicular a π?

Solución: $a = 3, \quad b = -23;$ No .

62. $A(3,3,5)$, $B(3,3,2)$ son vértices consecutivos de un triángulo rectángulo $ABCD$. El vértice C, consecutivo al B, está en la recta de ecuaciones $r : x = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$. Determina los vértices C y D.

Solución: $C(3/2,\ 9/2,\ 2);\ \ D(3/2,\ 9/2,\ 5)$.

63. Encuentra la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas:
$$r : x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{-2}; \qquad s : \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

Solución: $(-1 + 2\lambda, 2, \lambda)$.

64. Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x - 2y + z = 1$ y $2x - y + z = 5$.

Solución: $64/27\ u^3$.

65. $A(1,0,3)$, $B(3,-1,0)$, $C(0,-1,2)$ y $D(a,b,-1)$. Determina a y b para que la recta que pasa por A y B corte perpendicularmente a la recta que pasa por C y D.

Solución: $a = -27/4, \ \ b = -11/2$.

66. $r : x = y = z; \qquad s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$.

r y s se cruzan, encontrar los puntos $A \in r$ y $B \in s$ que están a mínima distancia.

Ayuda: A y B están 'frente a frente'

Solución: $A(1,1,1);\ \ B(0,2,1)$.

67. $\pi : 2x + y - z + 2 = 0; \qquad r : \dfrac{x-5}{-2} = y = \dfrac{z-6}{m}$

a) Posición relativa de r y π en función de los valores del parámetro m.

b) Para $m = -3$, encuentra el plano σ que contiene a r y es perpendicular a π.

c) Para $m = -3$, encuentra el plano τ que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Solución: $a)$ $m = -3$, paralelos , $m \neq -3$, se cortan ,
$b)$ $x - 4y - 2z + 7 = 0$; $c)$ $2x + y - z - 4 = 0$.

68. Sean $\pi : x - y + z = 0$ y $\sigma : x + y - z = 2$.

a) Determina la recta que pasa por $A(1, 2, 3)$ y no corta a ninguno de los planos anteriores.

b) Determina los puntos que equidistan de $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 1, 0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Solución: $r : (1, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$; $P(1,\ 17/8,\ 9/8)$.

69. EL PROBLEMÓN (repaso):

Dados los puntos de coordenadas $A(1, 0, -1)$, $B(3, 0, 2)$ y $C(2, 0, 1)$, el plano de ecuación $\pi : x - 2y + z + 1 = 0$ y las rectas $r : x + 1 = \dfrac{y-1}{2} = -z$; $s : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$, se pide:

a) Ecuación vectorial y general de la recta que pasa por A y B.

b) La recta anterior expresada como intersección de dos planos.

c) Recta que pasa por A paralela a r.

d) Plano que pasa por A paralela a π.

e) Recta que pasa por A perpendicular a π.

f) Recta que pasa por A y corta y es perpendicular a r.

g) Plano que contiene a A y a B y es perpendicular a π.

h) Punto de intersección de r y π.

i) Plano que contiene a r y que su intersección con π es una recta perpendicular a r.

j) Recta que pasa por A es paralela a π y corta a r.

k) Recta contenida en π que corta y es perpendicular a r .

l) Plano que pasa por A y que sus intersecciones con los ejes coordenados son los vértices de un triángulo equilátero.

m) Intersección del plano π con el plano $z = 0$.

n) Plano que pasa por A, B y C.

ñ) Plano que contiene a r y pasa por A.

o) Plano que pasa por A y es perpendicular a r.

p) ¿La recta AC , pasa por el origen?

q) Posición relativa de las rectas r y s.

r) Encuentra el parámetro k tal que la recta $\dfrac{x-k}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ corte a la recta s.

s) Recta paralela al eje OZ que pase por B.

t) Encontrar a y b para que el punto $(2, a, b)$ sea un punto de la recta s.

u) Plano paralelo al eje OZ que contiene a r.

v) Recta que corta y es perpendicular a r y s.

w) Plano que equidista de las rectas r y s

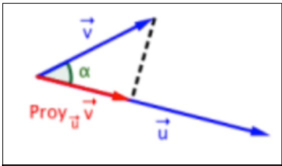
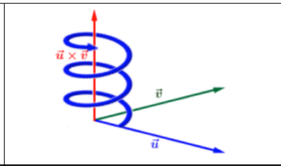
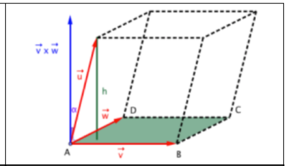
x) Ángulo de las recta r y s.

y) Ángulo que forman r y π.

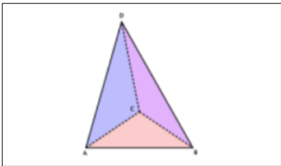
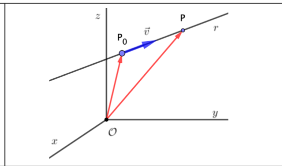
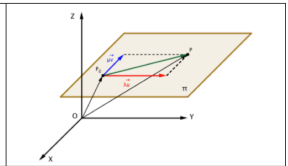
z) Distancia de r a s.

11.4.3. Cuestiones

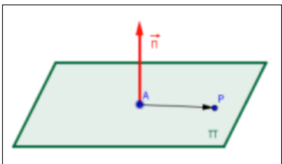
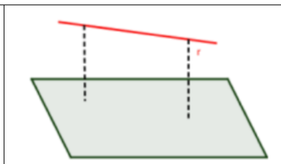
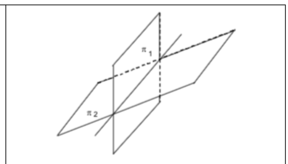
Q1. Describe lo que te sugieren las siguientes imágenes:

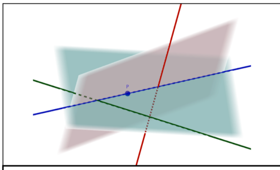
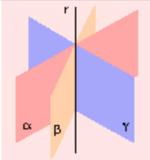
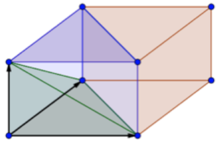
. Interpretación P.E., regla sacacorchos P.V., Volumen paralelepípedo P.M.

. Volumen tetraedro, Recta P, $\vec{v}$, Plano P, $\vec{u}$, $\vec{v}$

. Vector asociado a un plano, Recta paralela a un plano, Recta dada como intersección de dos planos

Recta pasa P y se apoya en r y s, Haz de planos eje r, V(tetra)=1/3[V(prism)=1/2 V(paralelep)]

Q2. Asegúrate que sabes responder correctamente a las siguientes preguntas.

1.- ¿Cómo sabes si tres puntos están o no alineados? Da dos métodos distintos.

2.- ¿Cómo sabes si 4 puntos son o no coplanarios? Da dos métodos distintos.

3.- Si te dan 3 puntos no alineados, forman un triángulo. ¿Qué harías para clasificarlo? Según los lados: equilátero, isósceles o escaleno. Según los ángulos: acutángulo, rectángulo u obtusángulo. ¿Qué harías para calcular su área?

4.- ¿Como divides un segmento en, p.e., 5 pastes iguales?

5.- Describe como encuentras la recta que pasa por dos puntos.

6.- Describe como encuentras la recta que pasa por un punto y es paralela a otra.

7.- Describe como encuentras la recta que pasa por un punto y es perpendicular a un plano.

8.- Describe como encuentras la recta que pasa por un punto y corta a otras dos rectas.

9.- Describe como encuentras la recta perpendicular comun a otras dos rectas que se cruzan en el espacio.

10.- Describe como encuentras el plano que pasa por tres puntos.

11.- Describe como encuentras el plano que pasa por un punto y es perpendicular a un vector.

12.- Describe como encuentras el plano que pasa por un punto y es perpendicular a una recta.

13.- Describe como encuentras el plano que pasa por un punto y es paralelo a otro plano.

14.- Describe como encuentras el plano que pasa por un punto y es paralelo a dos rectas no paralelas entre sí.

15.- Describe como encuentras el plano que contiene a dos rectas paralelas.

16.- Describe como encuentras el plano que que contiene a una recta y es paralelo a otra recta.

17.- Describe como encuentras el plano que contiene a una recta y es perpendicular a otro plano.

18.- Describe como encuentras el plano que equidista de dos rectas que se cruzan.

19.- Describe como encuentras el ángulo que forman dos rectas.

20.- Describe como encuentras el ángulo que forman dos planos.

21.- Describe como encuentras el ángulo que forman una recta y un plano.

22.- Describe como mides la distancia entre dos puntos.

23.- Describe como mides la distancia entre punto y recta.

24.- ¿Cómo se obtiene la proyección ortogonal de un punto sobre una recta? ¿Y el simétrico de un punto respecto de una recta?

25.- Describe como mides la distancia entre un punto y un plano.

26.- ¿Cómo se obtiene la proyección ortogonal de un punto sobre un plano? ¿Y el simétrico de un punto respecto de un plano?

27.- ¿Cómo obtendrías la proyección de una recta sobre un plano?

28.- Describe como mides la distancia entre una recta y un plano.

29.- Describe como mides la distancia entre dos planos.

30.- Describe como mides la distancia entre dos rectas.

31.- ¿Cómo deben estar dos rectas para que determinen un plano?

32.- Sea $r \subset \pi$ y $s \subset \sigma$ y sea $\pi \,||\, \sigma$. ¿Cuál es la posición relativa de r y s?

33.- ¿Qué debe ocurrir para que hayan infinitos planos que contiene a tres puntos?

Q3. Asegúrate de que sabes resolver estos (entre otros) TIPOS BÁSICOS DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO:

<u>Problemas De Geometría Afín</u>

Halla el punto intersección de dos rectas (secantes).

Halla el punto intersección de una recta y un plano (no paralelos).

Halla el punto intersección de tres planos (no paralelos dos a dos).

Halla la recta que contiene a un punto y es paralela a otra recta.

Halla la recta que contiene a dos puntos.

Halla la recta que contiene a un punto y es perpendicular a un plano.

Halla la recta determinada por dos planos (secantes).

Halla la recta que contiene a un punto, es paralela a dos planos.

Halla la recta que contiene a un punto, es paralela a un plano y perpendicular a otra recta.

Halla la recta que contiene a un punto y es perpendicular a otras dos rectas.

Halla la recta que corta perpendicularmente a otras dos rectas (que se cruzan).

Halla la recta que contiene a un punto y corta perpendicularmente a otra recta.

Halla el plano que contiene a un punto y es paralelo a dos rectas.

Halla el plano que contiene a una recta y es paralelo a otra recta.

Halla el plano que contiene a un punto y contiene a una recta.

Halla el plano que contiene a dos puntos y es paralelo a una recta.

Halla el plano que contiene a un punto y es paralelo a dos rectas.

Halla el plano que contiene a tres puntos (no alineados).

Halla el plano que contiene a dos rectas que se cortan en un punto.

Halla el plano que contiene a dos rectas paralelas.

Halla el plano que contiene a un punto y es paralelo a otro plano.

Halla el plano que contiene a un punto y es perpendicular a una recta.

Halla el plano que contiene a un punto y que es perpendicular a otros dos planos.

Halla el plano que contiene a un punto, es perpendicular a otro plano y es paralelo a una recta.

Halla el plano que es perpendicular a otro plano y contiene a una recta.

Dados dos planos que se cortan sobre una recta, halla la ecuación del haz de planos al que pertenecen.

Dada una recta, halla la ecuación del haz de planos que la contienen.

Posiciones Relativas

Estudia la posición relativa de un punto y una recta.

Estudia la posición relativa de un punto y un plano.

Estudia la posición relativa de dos rectas.

Estudia la posición relativa de una recta y un plano.

Estudia la posición relativa de dos planos.

Estudia la posición relativa de tres planos.

Problemas De Geometría Euclídea

Halla el ángulo determinado por dos rectas.

Halla el ángulo determinado por una recta y un plano.

Halla el ángulo determinado por dos planos.

Halla la distancia entre dos puntos.

Halla la distancia entre un punto y un plano.

Halla la distancia entre un punto y una recta.

Halla la distancia entre dos rectas paralelas.

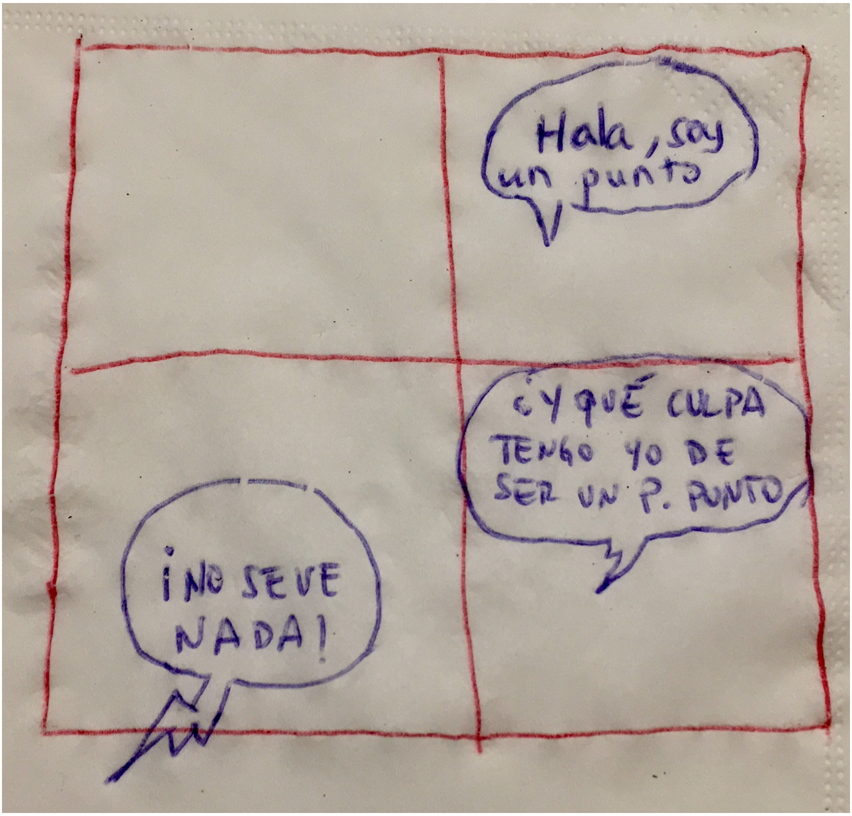
Halla la distancia entre dos rectas que se cruzan.

Halla la distancia entre dos planos paralelos.

Halla la distancia entre una recta y un plano paralelo a ella.

Halla el área de un triángulo.

Halla el volumen de un paralelepípedo, de un prisma y de un tetraedro.


Hala, soy un punto
¡NO SE VE NADA!
¿Y QUÉ CULPA TENGO YO DE SER UN P. PUNTO

11.5. Resumen

Resumen espació euclideo

Ángulos:

- $\theta = \measuredangle(r,s) \equiv \measuredangle(\vec{v}_r, \vec{v}_s) \;\rightarrow\; \cos\theta = \dfrac{|\ \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s\ |}{|\vec{v}_r|\ |\vec{v}_s|}$
- $\theta = \measuredangle(\pi,\sigma) \equiv \measuredangle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_\sigma) \;\rightarrow\; \cos\theta = \dfrac{|\ \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma\ |}{|\vec{n}_\pi|\ |\vec{n}_\sigma|}$
- $\varphi = \measuredangle(r,\pi) \equiv 90^o - \theta,\ \theta = \measuredangle(\vec{v}_r, \vec{n}_\pi) \;\rightarrow$
  $\rightarrow \cos\theta = \dfrac{|\ \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi\ |}{|\vec{v}_r|\ |\vec{n}_\pi|}$

Distancias:

- $d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$
- $d(P,r) = \dfrac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{PP_r}|}{|\vec{v}_r|}$
- $d(P,\pi) = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{|\vec{n}_\pi|}$
- $d(r,\pi : \ r\ ||\ \pi) = d(P_r,\pi);\quad d(\pi,\sigma : \ \pi\ ||\ \sigma) = d(P_\pi,\sigma)$
- $d(r,s) = \dfrac{|\ [\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \overrightarrow{P_rP_s}]\ |}{|\ \vec{v_r} \times \vec{v_s}\ |}$

Proyecciones ortogonales y simétricos.
Recta perpendicular común y plano equidistante de dos rectas que se cruzan.

Capítulo 12

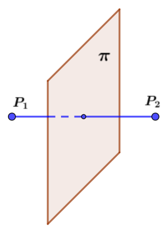
Superificies ⋇

Se llama ***superficie*** al conjunto de puntos cuyas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfacen una ecuación de la forma: $\boldsymbol{F(x, y, z) = 0}$. Por ejemplo, $2x - y + 3z - 1 = 0$ es una superficie 'plana', un plano, en el espacio.

Así como las coordenadas de un punto P los valores de x, y, z han de ser número reales, del mismo modo, las superficies estarán formadas por puntos-ternas de números reales que satisfagan su ecuación $F(x, y, z) = 0$.

12.0.1. Simetrías

Decimos que dos puntos P_1 y P_2 son 'simétricos' respecto de un plano π si el plano es perpendicular al segmento $\overline{P_1P_2}$ en su punto medio $M = (P_1 + P_2)/2$.



Decimos que una superficie es simétrica respecto de un plano (llamado plano de simetría) si el simétrico de cada punto de la superficie también es un punto de la superficie.

- Si la ecuación de una superficie no varía cuando se cambia de signo a dos de sus variables, la superficie es simétrica respecto al eje coordenado de esa variable.
- Si la ecuación de una superficie no varía cuando se cambia de signo una de sus variables, la superficie es simétrica respecto al plano de la variable que no se cambia.
- Si la ecuación de una superficie no varía cuando se cambian de signo sus tres variables, la superficie es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Las pruebas que verifican la simetría de una superficie a partir de su ecuación se muestran en la siguiente tabla:

Si F no se altera al cambiar x, y, z por:	**La superficie es simétrica respecto al:**
$-x,\ y,\ z$	Plano YZ
$x,\ -y,\ z$	Plano XZ
$x,\ y,\ -z$	Plano XY
$-x,\ -y,\ z$	Eje Z
$x,\ -y,\ -z$	Eje X
$-x,\ y,\ -z$	Eje Y
$-x,\ -y,\ -z$	Origen $\mathcal{O}$

12.1. Superficie esférica

Se define la ***superficie esférica*** como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo. La distancia constante se llama **radio** y el punto fijo, **centro**. $\boldsymbol{Esf(C,r)}$

Ecuación de la Esfera (superficie esférica): $P(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ es un punto de la esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio r $\quad(Esf(C,r))$ si: $d(P,C)=r\rightarrow$ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r\rightarrow$ Forma ordinaria de la ecuación de la esfera:

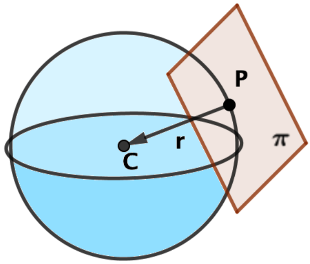
$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$$

Desarrollando la ecuación y ordenando los términos tenemos la Forma general de la ecuación de la esfera:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0}$$

Ecuación que contiene cuatro constantes arbitrarias independientes, por lo que una superficie esférica queda unívocamente determinada por cuatro condiciones independientes, por ejemplo, cuatro puntos no coplanarios determinan una superficie esférica.

Conviene hacer notar que *el **plano tangente** a una esfera en cualquiera de sus puntos es **perpendicular** al **radio** correspondiente al punto de tangencia.* Es decir, el vector normal al plano tangente π a una esfera en uno de sus puntos $P \in Esf(C, r)$ es $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{PC}$.



Ejemplo 12.1. *Encuentra la ecuación ordinaria y general de la esfera que tiene su centro en $C(0, 1, -3)$ y tiene radio $r = 4$*

$x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4^2$ Forma ordinaria, desarrollando:

$x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 - 16 = 0 \to x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z - 6 = 0$ Forma general.

Ejemplo 12.2. *Encuentra el centro y el radio de la circunferencia dada por* $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z - 6 = 0$.

Se trata de 'completar cuadrados':

$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z - 6 = 0 \to x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 6z - 6 = 0 \to x^2 + (y-1)^2 - 1^2 + (z+3)^2 - 3^2 - 6 = 0 \to x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 - 16 = 0 \to x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4^2 \to \begin{cases} C(0, 1, .3) \\ r = 4 \end{cases}$

Ejemplo 12.3. *Encuentra la ecuación de una esfera de centro $C(2,-1,3)$, sabiendo que uno de sus puntos es $P(5,-1,-1)$*

Por definición de esfera, $r = d(C,P) = |\overrightarrow{CP}| = |(3,0,-4)| = \sqrt{25} = 5$

Luego, la esfera es: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 5^2$

Ejemplo 12.4. *Encuentra la ecuación de la esfera que pasa por $P(1,4,3)$, $Q(5,2,3$, $R(6,-1,3)$ y $S(1,-1,8)$*

Usaremos la formula general, $Esf \equiv x^2 + y*2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + k = 0$, donde sustituyendo los puntos P, Q, R, S encontraremos cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} P \in Esf \to 1+16+9+E+4F+3G+H=0 \\ Q \in Esf \to 25+4+9+5E+2F+3G+H=0 \\ R \in Esf \to 36+1+9+6E-F+3G+H=0 \\ S \in Esf \to 1+1+64+E-F+8G+H=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} E & F & G & H & \\ 1 & 4 & 3 & 1 & -26 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & -38 \\ 6 & -1 & 3 & 1 & -46 \\ 1 & -1 & 8 & 1 & -66 \end{array}\right] \to \text{Resolviendo por Gauss,}$$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z - 14 = 0$, completando cuadrados:

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 5^2 \to Esf\{C(1,-1,3);\ r=5\}$

Ejemplo 12.5. *Encuentra el plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2=3$ en el punto $P(1,1,-1)$*

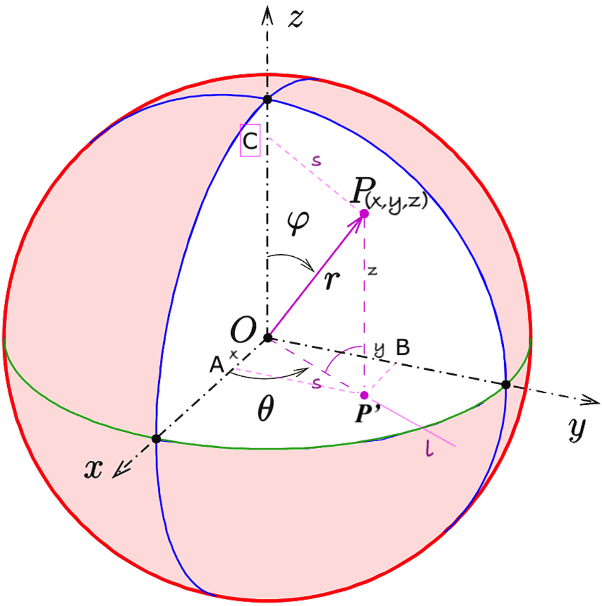
El plano tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de contacto P. Como, evidentemente, el centro de la esfera es $\mathcal{O}(0,0,0)$, el vector director del plano buscado será: $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{\mathcal{O}P} = (1,1,-1)$.

$$\pi : \begin{cases} P(1,1,-1) \\ \vec{n}_\pi = (1,1,-1) \end{cases} \quad 1(x-1)+1(y-1)-1(z+1)=0 \to x+y-z-3=0$$

12.1.1. Coordenadas esféricas

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de una superficie esférica de centro en el origen de coordenadas y radio r:

$P(x, y, z) \in Esf(\mathcal{O}, r) : \; x^2 + t^2 + z^2 = r^2$



La porción de esfera comprendida en el primer 'octante' aparece el la figura. El punto P y ej eje OZ determinan un plano que corta al plano XY en la recta l.

Llamamos θ al ángulo formado por l y la parte positiva del eje OX y llamamos ϕ al formado por el radio OP y la parte positiva del eje OZ. P', A, B, C son, respectivamente, las proyecciones de P sobre XY y sobre los ejes X, Y, Z. Sea $\overline{OP'} = \overline{CP} = s$. Del triángulo OPC se tiene que: $s = r \sin \phi$.

De los triángulos OAP', $= BP'$ y $= PP'$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x = s\cos\theta = r\sin\phi\cos\theta}\\
&\boldsymbol{y = s\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta}\\
&\boldsymbol{z = \overline{PP'} = r\sin(90^o - \phi) = r\cos\phi}
\end{aligned}$$

De las relaciones $x = r\sin\phi\cos\theta$; $y = r\sin\phi\sin\theta$; $z = r\cos\phi$, es posible localizar cualquier punto P sobre la $Esf(\mathcal{O}, r)$ conocidos los valores de r, θ, ϕ. Estas cantidades, $\boldsymbol{(r, \theta, \phi)}$ se llaman **coordenadas esféricas**. θ se llama 'longitud', ϕ es la 'colatitud' y r es el 'radio vector' del punto $P(r, \theta, \phi)$. Sus valores están restringidos a los intervalos:

$$r \geq 0; \quad 0 \leq \pi < \pi; \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Despejando en las relaciones anteriores, se obtiene:

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \phi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}}$$

Ecuaciones que, junto a las anteriores, sirven para pasar de coordenadas esféricas $P(r, \phi, \theta)$ a rectangulares $P(x, y, z)$ y viceversa,

Coordenadas Esféricas: resumen

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x = s\cos\theta = r\sin\phi\cos\theta}\\
&\boldsymbol{y = s\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta}\\
&\boldsymbol{z = \overline{PP'} = r\sin(90^o - \phi) = r\cos\phi}
\end{aligned}$$

$$r \geq 0; \quad 0 \leq \phi < \pi; \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\
&\boldsymbol{\phi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}\\
&\boldsymbol{\theta = \arctan\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

12.2. Superficie cilíndrica

En general, son ecuaciones del tipo f (x, y) = 0 (análogamente, g(x, z) = 0, h(y,z) = 0); en el plano se corresponden con curvas, en el espacio queda una coordenada libre, luego se corresponden con cilindros, es decir, superficies formadas por rectas que se "levantan" sobre la curva f(x,y) = 0. Los más habituales:

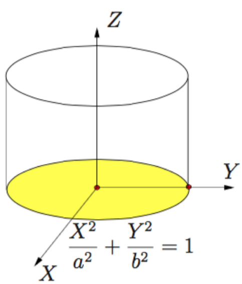
- Elípticos: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Si $a=b$, se trata de un cilindro circular.
  Si el eje del cilindro está desplazado, pero es paralelo al eje z, se tiene $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.
  Análogamente en x, z ó en y, z.

- Parabólicos: $y^2=2px$.

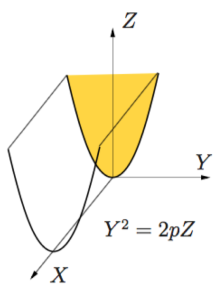
  Si el eje está desplazado, pero es paralelo al eje z, $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

  Análogamente en x, z ó en y, z.

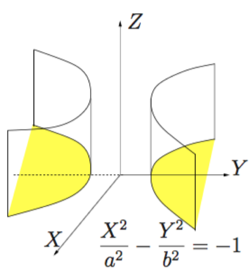
- Hiperbólicos: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
  Si el eje del cilindro est á desplazado, pero es paralelo al eje z, se tiene: : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.
  Análogamente en x, z ó en y, z.



Cilindro Elíptico

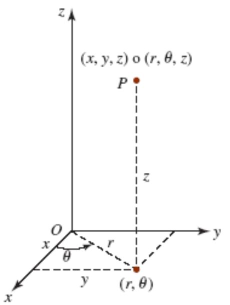


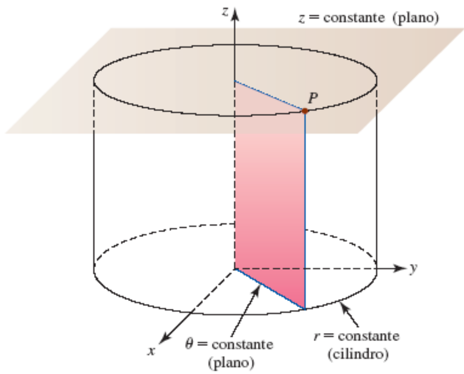
Cilindro parabólico



Cilindro hiperbólico

12.2.1. Coordenadas cilíndricas





Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la superficie de 'un cilindro circular recto' de radio r y cuyo eje es OZ. La ecuación de la superficies es $x^2 + y^2 = r^2;\ forallz$.

Por P y el eje OZ hacemos pasar un plano que corta a la superficie en una generatriz cuya intersección con XY es P'. Sea $\overline{PP'} = r$ y llamando θ al ángulo formado por OP' y la paret positiva del eje OX, tenemos:

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad z = z$$

Relaciones que permiten localizar cualquier punto del cilindro conocidos $r,\ \theta,\ z$: $\boldsymbol{P(r, \theta, z)}$ son las **coordenadas cilíndricas**.

Para que las coordenadas cilíndricas, $r,\ \theta,\ z$, describan un único punto del espacio, adoptamos las siguientes restricciones:

$$r \geq 0; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Despejando estas relaciones, tenemos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ecuaciones que, junto a las anteriores, sirven para pasar de coordenadas cilíndricas $P(r, \theta, z)$ a rectangulares $P(x, y, z)$ y viceversa,

Coordenadas Cilíndricas: resumen

$$\boldsymbol{r \geq 0; \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}; \qquad \forall z}$$

$$r \geq 0; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad \forall z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$
$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

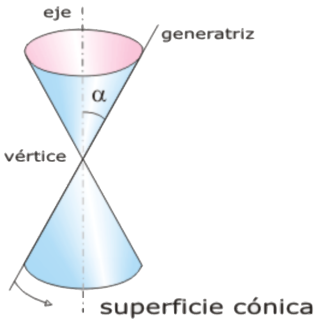
$$r \geq 0; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$
$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En el apéndice E se muestra la forma de expresar el 'vector de posición' de un punto en coordenadas cilíndricas y esféricas.

12.3. Superficie cónica

Es la generada por una recta que se mueve pasando por una curva fija y un punto fijo, no contenido en el plano de esa curva. La recta móvil se llama 'generatriz', la curva fija es la 'directriz' y el punto fijo es el 'vértice' de la cónica, que divide a ésta en dos porciones distintas llamadas 'hojas' de la cónica.



12.4. Cuádricas

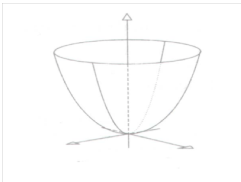
Son superficies cuya ecuación es de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

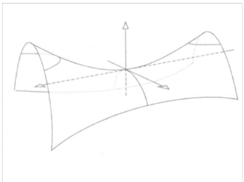
,

donde al menos una de las constantes $A, \cdots, F$ es distinta de cero. No todos los posibles valores de las constantes dan lugar a una superficie.

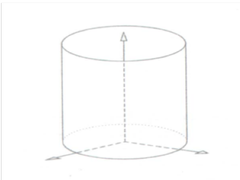
Si una cuádrica se corta por un. plano cualquiera, la curva de intersección es una cónica.



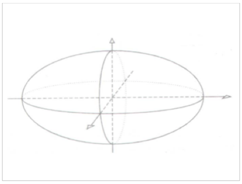
paraboloide elíptico



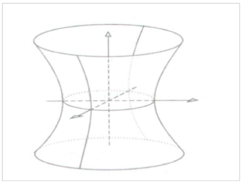
paraboloide hiperbólico



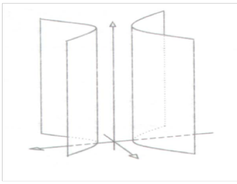
cilindro elíptico



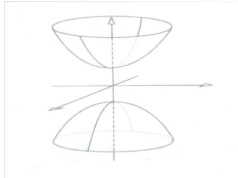
elipsoide real



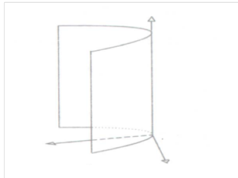
hiperboloide hiperbólico



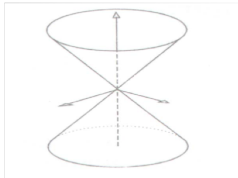
cilindro hiperbólico



hiperboloide elíptico



cilindro parabólico



cono afín real

Parte III

APÉNDICES

Apéndice A

Símbolos matemáticos

En la siguiente página hay una imagen con los símbolos matemáticos más usados.

Fuente: 3con14.com

Símbolos

Símbolo	Significado
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los reales positivos
$\{a,b,\ldots\}$	conjunto de elementos a,b,...
$\varnothing$	conjunto vacio
$\cap, \bigcap$	intersección de conjuntos
$\cup, \bigcup$	unión de conjuntos
$\subset$	incluido en el conjunto
$\not\subset$	*no* incluido en el conjunto
$\in$	pertenece a un conjunto
$\notin$	*no* pertenece a un conjunto
$A \setminus B,\ A-B$	conjunto diferencia
$\wp(A)$	conjunto de partes
$n(A)$	cardinal del conjunto
$A',\ \overline{A}$	conjunto complementario de A
$A \times B$	producto cartesiano
$\{x \mid x \in P\}$	todos los x que satisfacen P
$\{x:\ldots\}$	todos los x tales que … es cierto
(a,b)	intervalo abierto
$[a,b]$	intervalo cerrado
$[a,b),(a,b]$	intervalo semiabierto
$(a,\infty),[a,\infty)$	semirrecta derecha
$(-\infty,a),(-\infty,a]$	semirrecta izquierda
$(-\infty,\infty)$	recta real

Símbolo	Significado
$=$	igual
$<$	menor que...
$\leq$	menor o igual que...
$>$	mayor que...
$\geq$	mayor o igual que...
$\neq$	distinto
$\propto$	proporcional a
$\approx$	aproximadamente igual
$\equiv$	idénticamente igual
$\pm, \mp$	más menos / menos más
Σ	sumatorio
Π	producto
$\forall$	para todo, cuantif. universal
$\exists$	existe, cuantif. existencial
$\Rightarrow$	implica (si…entonces…)
$\Leftrightarrow$	equivale (si y solo si)
$/$	tal que
$\therefore$	por lo tanto, por consiguiente
$\because$	porque, puesto que
$\neg$	negación
$\wedge$	conjunción ("y", "además")
$\vee$	disyunción ("o")
∞	infinito
$:$	razón
$::$	proporción
$a=\dot{b}$	a es múltiplo de b
$\div$	progresión aritmética
$\div\div$	progresión geométrica

Símbolo	Significado
$n!$	factorial
$\lvert x \rvert$	valor absoluto
$\sqrt{\ }$	raíz cuadrada
$\%$	tanto por ciento
‰	tanto por mil
π	número pi, $\pi = 3{,}1415\ldots$
e	número e, $e = 2{,}7182\ldots$
ϕ	número fi (áureo), $\phi = 1{,}6180\ldots$
$\parallel$	paralelo
$\perp$	perpendicular
$\measuredangle$	ángulo
$\binom{m}{n}$	número combinatorio
C_m^n	combinaciones
P_m	permutaciones
V_m^n	variaciones
$\Pr(A)$	probabilidad
$\Pr(A \mid B)$	probabilidad condicional
$\log$	logaritmo decimal (base 10)
$\log_a$	logaritmo de base a
$\ln$	logaritmo neperiano (base e)
$\sin\alpha$	seno de α
$\cos\alpha$	coseno de α
$\tan\alpha$	tangente de α
$\cot\alpha$	cotangente α
$\sec\alpha$	secante α
$\csc\alpha$	cosecante α
(a_n)	sucesión con término n-ésimo
Δ	incremento
σ	desviación típica
$\mathrm{Var}(X)$	varianza

Símbolo	Significado
$f', y', \frac{dy}{dx}$	derivada
$x \to c$	x tiende a c
$\lim\limits_{x\to c}$	límite cuando x tiende a c
$\int$	signo de integral
$A_{m\times n}$	matriz A de dimensión mxn
A_m	matriz cuadrada de orden m
a_{ij}	elementos a_{ij} de una matriz
$\mathrm{rang}\, A$	rango de una matriz
A^T	matriz transpuesta
A^{-1}	matriz inversa
$\lvert A \rvert$, $\det A$	determinante de una matriz
$f: X \to Y$	función, aplicación
$[x]$	parte entera
$\circ$	composición de funciones
f^{-1}	función inversa
$Dom\, f$	dominio de f
i	unidad imaginaria, $i^2=-1$
$\mathrm{Re}\, z$	parte real de un número complejo
$\mathrm{Im}\, z$	parte imaginaria de un complejo
$\lvert z \rvert$	módulo de un número complejo
$\overline{z}$	conjugado de un complejo
$\mathrm{Arg}\, z$	argumento de un complejo
Ox, Oy, Oz	ejes de coordenadas
$\vec{v}$	vector
$\lvert \vec{v} \rvert$	módulo de un vector
$\lVert P \rVert$	norma
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	base ortonormal en un espacio
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	producto escalar de vectores
$\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}$	producto vectorial de vectores

Math Quick Reference Card – **SÍMBOLOS** 1.1 –

Apéndice B

Sumatorios y Productorios

El ‘sumatorio’ y el ‘productorio’ son un operadores matemáticos, representados, respectivamente, por las letras griegas sigma mayúscula (Σ correspondiente a la S latina) y pi mayúscula (Π correspondiente a la P latina) que permiten representar de manera abreviada sumas con muchos sumandos y productos con muchos factores, con un número indeterminado (representado por alguna letra) de ellos, o incluso con infinitos.

B.1. Sumatorios

Definición B.1. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales, se define:*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$\textit{Si } r, s \in \mathbb{N} \textit{ con } m \leq n \rightarrow \sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_m$$

Ejemplo B.1. .

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3 * 2 + 4^2 {}^{\text{‘}} 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\sum_{i=1}^{5} 3 = 3+3+3+3+3 = 3\cdot 5 = 15$$

$$\sum_{i=3}^{7} 8 = 8+8+8+8+8 = 8\cdot 5 = 8\cdot(7-3\mathbf{+1}) = 40$$

$$\sum_{i=3}^{6}(2i+3) = (2(3)+3)+(2(4)+3)+(2(5)+3)+(2(6)+3) = 9+11+13+15 = 53$$

Proposición B.1. *Propiedades del Sumatorio*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k = n\,k \qquad \sum_{i=m}^{n} k = (n-m+1)\,k$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k\,a_i = k\,\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \sum_{i=m}^{n} k\,a_i = k\,\sum_{i=m}^{n} a_i$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \cdots$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \qquad \cdots$
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1} \qquad \sum_{i=m}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_m - a_{n+1}$

   'Propiedad telescópica'.

Demostración. Las demostraciones son inmediatas teniendo en cuenta las propiedades de la suma de números reales. □

B.1.1. Algunos sumatorios básicos

$$\sum_{i=1}^{n} = (PA) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{i=1}^{n} r^i = (PG) = \frac{r^{n+1}-1}{r-1};\ r \neq 0 \wedge r \neq 1$$

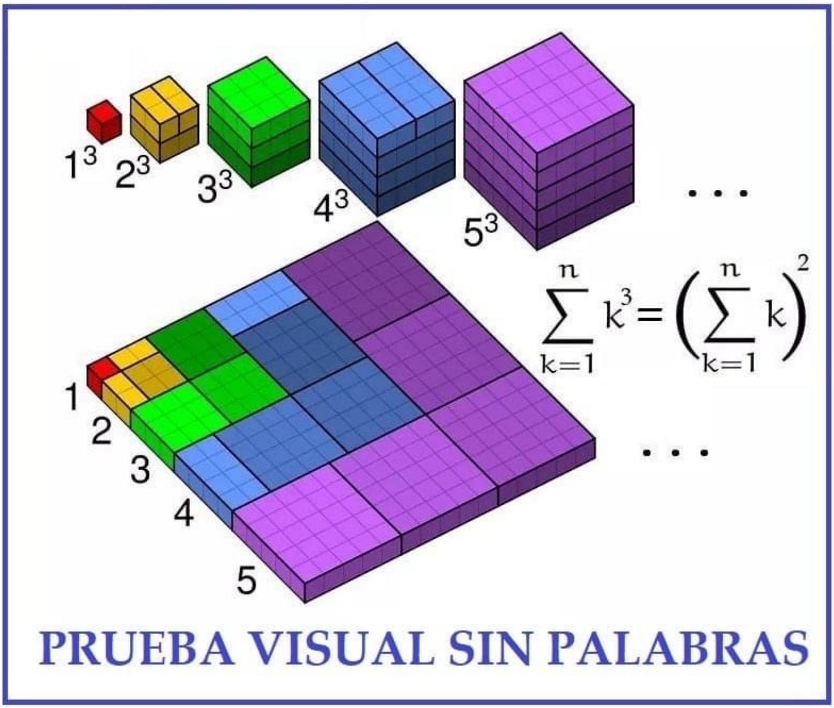
B.1.2. Doble sumatorio

Aparece con frecuencia en cálculo matricial.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj} =$$

$$= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2m}) + \cdots + (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm}) =$$

$$\text{(reordenando)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$



B.2. Productorios

Definición B.2. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales, se define:*

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

$$\text{Si } r, s \in \mathbb{N} \text{ con } m \leq n \to \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \cdots \cdot a_m$$

Ejemplo B.2. .

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$$

$$\prod_{i=3}^{5} \frac{n+1}{n} = \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{6}{\cancel{5}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\prod_{i=5}^{8} 3^{2i+1} = 3^{11} \cdot 3^{13} \cdot 3^{15} \cdot 3^{17} = 3^{56}$$

Proposición B.2. *Propiedades del Productorio*

1. $\prod_{i=1}^{n} k = k^n; \quad \prod_{i=m}^{n} k = k^{n-m+1}$
2. $\prod_{i=1}^{n} k\ a_i = k\ \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \cdots$
3. $\prod (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i \qquad \cdots$
4. $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=m+1}^{n} a_i$
   'Propiedad telescópica'

B.2.1. Algunos productorios básicos

$$\prod_{i=1}^{n} k = k^n$$

$$\prod_{i=1}^{n}(i+p) = \frac{(n+p)!}{p!}$$

$$\prod_{i=1}^{n} i = n!$$

$$\prod_{i=m}^{n} i = \frac{n!}{(m-1)!}$$

Apéndice C

El método de inducción

El *Principio de inducción matemática* es un método de demostración que se usa para probar que ciertas propiedades matemáticas se verifican para todo número natural. Por ejemplo:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Podemos comprobar fácilmente que se cumple esta relación para los valores n concretos que se nos ocurra, pero queremos *demostrar* que la relación es válida $\forall n \in \mathbb{N}$ y para ello usaremos el *Principio de inducción matemática*, que podemos considerar como un axioma y lo entenderemos as:

Axioma C.1 (Principio de inducción matemática)**.** *Queremos probar que la propiedad $P(n)$ se verifica $\forall n \in \mathbb{N}$. Tendremos que seguir dos pasos:*

1. *Comprobaremos que el número 1 cumple la propiedad, es decir, $P(1)$ es cierta.*

2. *Comprobaremos que si un número n cumple la propiedad,* entonces *también la satisface el número $n+1$. Es decir, si comprobamos que $P(n)$ es cierta,* entonces *también lo es $P(n+1)$*

"Si tengo una escalera infinita y quiero poder llegar a cualquier peldaño, necesito dos cosas: un primer escalón y saber cómo dar un paso"

Ejemplo C.1. *Probar que* $\forall n \in \mathbb{N}$, *se cumple:* $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Evidentemente, para $n = 1$ se cumple: $1 = 1$

Apliquemos el método de inducción. Supongamos ahora que la propiedad es cierta para n, hemos de conseguir demostrar que también lo ha de ser para $n+1$, es decir, se ha de cumplir la propiedad cambiando la n por $n+1$:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$ (*)

Vamos a por ello, sumemos $(n+1)^2$ a ambos lados de la ecuación que suponemos válida para n:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \quad + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad + (n+1)^2 =$ (sacando $n+1$ factor común:) $= (n+1)\left(\frac{1}{6}n(2n+1) + (n+1)\right) =$

$= (n+1)\frac{1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) =$

$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ que es la expresión (*) que queramos demostrar. □

Es necesario subrayar la importancia de la demostración de las dos partes del principio de inducción. Veamos un ejemplo de la importancia de la primera parte:

Ejemplo C.2. *Todo número natural es igual al número natural siguiente.*

Mala aplicación del principio de inducción. Aplicando la parte 2 del principio de inducción, resulta que si esto es cierto para n, es decir, $n = n+1$, basta con sumar 1 a cada parte de la igualdad y escribir $n+1 = n+1+1 = n+2$, también será cierto para $n+1$.

Obviamente la demostración no está acabada y el teorema es falso, pues falta comprobar la primera parte del método de inducción: la propiedad se cumple para $n = 1$: falso, $1 \neq 2$ □

Vamos a ver unos ejemplos a continuación que nos convenzan de la importancia de no quedarse con una conjetura encontrada sino que hay que demostrarla siempre.

Ejemplo C.3. *Sea* $p(x) = x^4+x+41$, *trinomio estudiado ya por Euler. Se tiene que* $p(0) = 41$, *primo;* $p(1) = 43$, *primo, y hasta* $x = 10$ *se obtienen los números 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131 y 151 respectivamente, todos primos. Estaríamos tentados a afirmar que en este trinomio, al sustituir* x *por cualquier número natural se obtiene un número primo, pero no es así, ya que, p.e., para* $x = 40$ *tenemos* $p(40) = 40^2+40+41 = 40(40+1)+41 = 40 \cdot 41 + 41 = (40 + 1) \cdot 41 = 41^2$, *que evidentemente no es un número primo.*

Ejemplo C.4. *Consideremos los números de la forma* $N(n) = 2^{2^n} + 1$. *Para* $n = 0, 1, 2, 3, 4$ *se obtienen* $3, 5, 17, 257, 65537$, *que son números primos. Fermat (s.XVII) aceptaba que todos los números obtenidos por esta fórmula eran primos. Fue Euler (s. XVIII) encontró* $N(5) = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$, *compuesto.*

Ejemplo C.5. *Leibniz (s. XVII) demostró que para cualquier número natural* n, *el número* $n^3 - n$ *es siempre divisible por* 3, *el número* $n^5 - n$ *divisible por* 5, $n^7 - n$ *divisible por* 7. *De ahí, supuso que si* k *era un número natural impar,* $n^k - n$ *seria divisible por* k, *pero pronto observó que* $2^9 - 2 = 510$ *que no es divisible por* 9.

Ejemplo C.6. $F(n) = 991n^2 + 1$ *no da nunca un cuadrado perfecto para* $n = 1, 2, 3, ...$, *por muchos das o años que nos dediquemos a ello. En efecto, el primer número natural para el que* $F(n)$ *resulta un cuadrado perfecto es:*

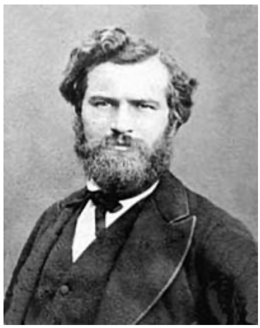
$$n = 12055735790331359447442538767.$$

Con estos ejemplos podemos llegar a una sencilla pero importante conclusión: una conjetura puede ser cierta en muchos casos particulares pero si no hay demostración, nunca será un teorema.

Apéndice D

Determinante de Vandermonde

Alexandre-Théophile Vandermonde (28 de febrero de 1735, París-1 de enero de 1796) fue un músico y químico francés que trabajó con Bézout y Lavoisier, aunque en la actualidad su nombre vaya principalmente asociado a la teoría de los determinantes en matemáticas. Nació y vivió toda su vida en París.



En este apéndice veremos una de las muchas aplicaciones de la matriz (o determinante) de Vandermonde a la interpolación polinómica.

D.1. Determinante de Vandermonde de orden n

Llamamos matriz de Vandermonde generada por los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$:

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = [x_i^{j-1}]_{i,j=1}^{n}$$

*** Determinante orden-1: $det(\ V(x_1)\ ) = |1| = 1$

*** Determinante orden-2:

$$det(\ V(x_1, x_2)\ ) = \begin{vmatrix} 1 & 1x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

*** Determinante orden-3:

$$det(\ V(x_1, x_2, x_3)\ ) = \begin{vmatrix} 1 & 1x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C3 \to C3 - x_3C2 \\ C2 \to C2 - x_3C1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1x_1 - x_3 & x_1^2 - x_1x_3 \\ 1 & x_2 - x_3 & x_2^2 - x_2x_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\text{Desarrollo Laplace adjuntos última fila}) =$$

$$1\ \ (-1)^{3+1}\ \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_1^2 - x_1x_3 \\ x_2 - x_3 & x_2^2 - x_2x_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{factor común } x_1 - x_3 \text{ por F1} \\ \text{factor común } x_2 - x_3 \text{ por F2} \end{bmatrix} =$$

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)$$

*** Determinate orden-n:

$$det(\ V(x_1, x_2, \cdots, x_n\ ) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

<u>Demostración</u> por inducción:

— La fórmula es correcta para $n = 2$ (el caso $n = 1$ es degenerado)

$$det(\ V(x_1, x_2)\ ) = \begin{vmatrix} 1 & 1x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{i \leq i < j \leq 2}(x_j - x_i)$$

— Supongamos la fórmula correcta para $n-1$ y la demostraremos para n. Para ello usaremos la misma 'astucia' que en el caso $n=3$:

(*) $C_n \to C_n - x_n C(n-1);\ \cdots;\ C3 \to C3 - x_n C2;\ C2 \to C2 - x_n C1$:

$det(\ V(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ ) = (*) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_x & x_1^2 - x_1 x_n & \cdots & x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

Desarrollo Laplace última fila:

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_x & x_1^2 - x_1 x_n & \cdots & x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n \end{vmatrix}$$

Sacamos $x_i - x_n$ de cada fila-i

$$= (-1)^2 \cdot (-1)^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_i - x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} =$$

El factor $(-1)^{n-1}$ nos permite cambiar los signos de los factores $x_i - x_n$, con $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

Nótese que el último determinante es $det(\ V(x_1, \cdots, x_{n-1})\ )$. Luego:

$$det(\ V(x_1, \cdots, x_n)\ ) = \prod_{1 \leq i \leq n-1} (x_n - x_i) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) =$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_j - x_i)$$

□

D.2. Polinomio interpolador

En la interpolación lineal se parte de n-puntos iniciales:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \cdots,\ (x_n, y_n),$$

y nuestro objetivo consiste en encontrar un polinomio de grado $\leq n$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

que pase poe esos puntos, es decir, que cumpla $n+1$ condiciones:

$$P(x_k) = y_k,\ \forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$$

Si los valors de x_k son distintos, entonces se puede garantizar que existe un único polinomio de grado $\leq n$ que cumple las condiciones fijadas (pasar por los $n+1$ puntos).

Si los valores $x_0, x_1, \cdots, x_n$ están ordenados ($x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), podemos usar el polinomio encontrado, 'polinomio interpolador' para calcular el valor de y en posiciones intermedias de x dentro del intervalo de interpolación, $[x_0, x_n]$.

D.3. Matriz de Vandermonde

Para encontrar el polinomio interpolador hay que resolver un sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas (SEL):

— $n+1$ puntos: $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \cdots,\ (x_n, y_n)$

— Polinomio a determinar: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

— $n+1$ condiciones: $P(x_k) = y_k,\ \forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Entonces, se tiene el siguiente SEL:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

La matriz de los coeficientes se llama 'matriz de Vandermonde' asociada a los puntos $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$. Es una matriz cuadrada de orden $n+1$).

Si en la solución del sistema se usa la regla de Cramer, el denominador de las incógnitas sería el determinante de Vandermonde que vimos, para orden cuatro en uno de los ejercicios resueltos del tema de determinantes.

$$\boxed{V(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}$$

D.4. Ejemplo

Consideremos la siguiente tabla de valores:

x	-1	1/2	1	2
y	1	2	0	3

La matriz de Vandermonde correspondiente a las abcisas $x_0 = -1;\ x_1 = 1/2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2$ es:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

El polinomio interpolador de grado ≤ 3 será de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Los coeficientes a_k se obtienen al resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solución del mismo es: $a_0 = 4$; $a_1 = -17/6$; $a_2 = -7/2$; $a_3 = 7/3$, con lo que el polinomio interpolador es:

$$P(x) = 4 - \frac{17}{6}x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{3}x^3$$

,

que permite aproximar el valor de $y = P(x)$ para cualquier $x \in [-1, 2]$

Fuente: Francisco Palacios. Escuela Politécnica Superior de Ingeniería Manresa. Universidad Politécnica de Catalunya. Dep. Matemática Aplicada III. Abril 2008.

Apéndice E

Vectores en diferentes sistemas de coordenadas

En coordenadas cartesianas o rectangulares, las componentes del vector de posición de un punto $P(x, y, z)$ son: $\boldsymbol{\vec{r}} = \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}$

E.1. Sistema de coordenadas cilíndricas

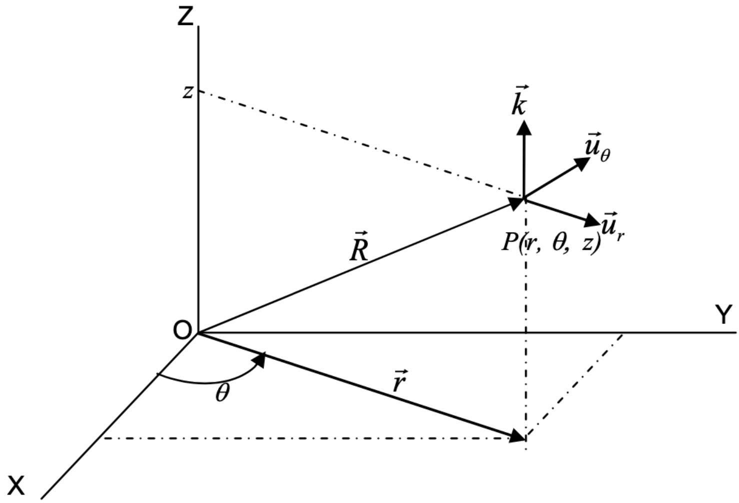
La posición de un punto P viene dado, en cilíndricas, por dos distancias y un ángulo $P(r, \theta, z)$ y los vectores unitarios son $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\vec{k}$.

El vector unitario $\vec{k}$, se aplica en el punto P y es paralelo al eje OZ.

El vector unitario $\overrightarrow{u_r}$ se aplica en P y es paralelo al vector $\vec{r}$ dibujado en el plano XY, estando determinado por la proyección de P sobre el citado plano.

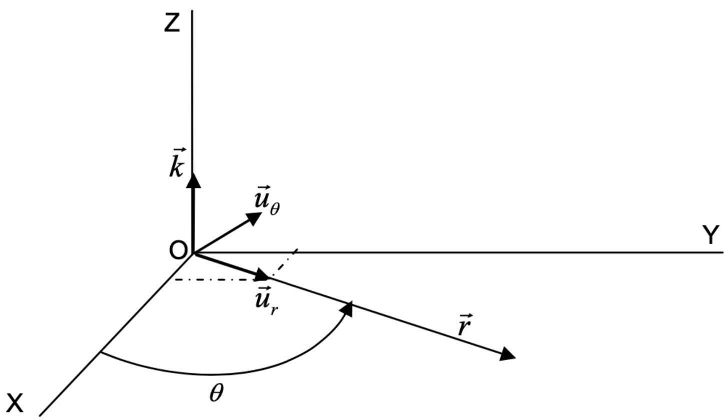
El vector unitario $\overrightarrow{u_\theta}$ se aplica en P y es perpendicular a los otros dos verificando $\vec{k} \times \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\theta}$.

El vector de posición de un punto P viene determinado por $\vec{R} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$, no quedando unívocamente determinado.



RELACIÓN DE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS Y RECTANGULARES.

Buscamos las relaciones de $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ con los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$, pues $\vec{k}$ es el mismo en ambos sistemas de coordenadas. Para ello, trasladamos $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\theta}$ al plano XY:



Como $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\theta}$ son unitarios $\rightarrow |\overrightarrow{u_r}| = |\overrightarrow{u_\theta}| = 1$

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{k} = \vec{k}$$

Ejemplo E.1. *Un punto tiene por coordenadas cartesianas $P(4,3,2)$, ¿cuáles son sus coordenadas cilíndricas?*

$$|\vec{r}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \rightarrow \quad P_C = r\vec{\ }u_r + z\,\vec{k} = 5\,\vec{u_r} + 2\,\vec{k}$$

Ejemplo E.2. *Expresa el vector $\vec{v} = -8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}$ en coordenadas cilíndricas si su punto de aplicación está en $P(4,3,2$*

Calculemos primero los vectores unitarios $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k}$ en el punto $P(4,3,2)$:

$\cos\theta = x/r = 4/5 = 0.8; \quad \sin\theta = y/r = 3/5 = 0.6$

$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} = 0.8\vec{i} + 0.6\vec{j},$

$\overrightarrow{u_\theta} = sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = -0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}$

Para expresar $\vec{v}$ en cilíndricas, $\vec{v_C}$, hemos de calcular sus componentes en las direcciones de $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$y $\vec{k}$ que no es más que la proyección del vector sobre los vectores unitarios, que por serlo, coincide con el producto escalar ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ forman una BON):

$\vec{v} \cdot \vec{u_r} = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot (0.8\vec{i} + 0.6\vec{j}) = -6.4 + 6 = -0.4$

$\vec{v} \cdot \vec{u_\theta} = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot (-0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}) = 4.8 + 8 = 12.8$

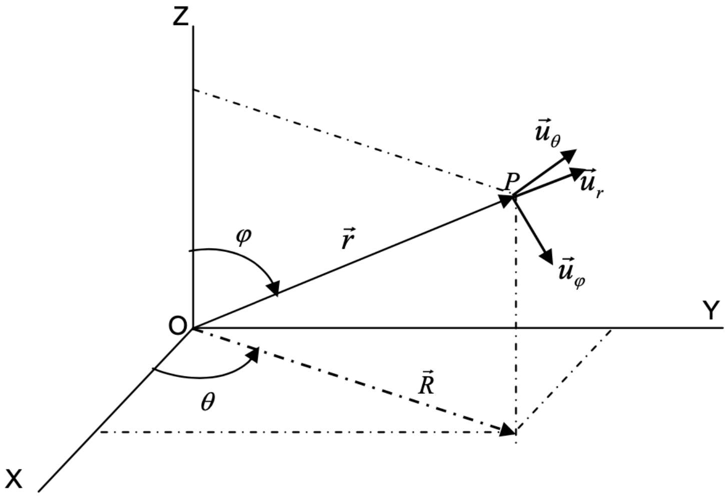
$\vec{v} \cdot \vec{k} = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot (1\vec{k}) = -12$

Por lo que: $\quad \vec{a_C} = -0.4\,\vec{u_r} + 12.8\,\vec{u_\theta} - 12\,\vec{k}$

Compruébese que $|\vec{v_c}| = \sqrt{308} = |\vec{v}|$. El módulo es el mismo, obviamente, independientemente del sistema de coordenadas elegido.

E.2. Sistema de coordenadas esféricas

La posición de un punto P queda determinado por una distancia r y dos ángulos θ y ϕ, $P(r, \theta, \phi)$. Los vectores unitarios son $\vec{u}_r$ $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\phi$.



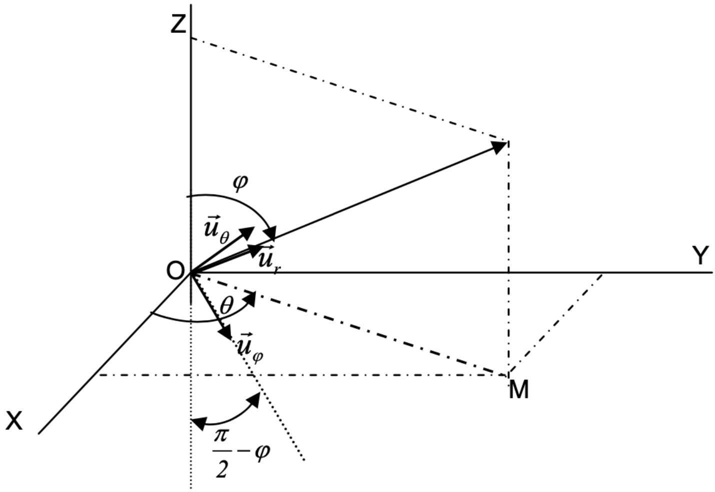
El vector director $\vec{u}_r$ está en la dirección $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$.

l vector unitario $\vec{u}_\phi$ es perpendicular a $\vec{u}_r$ y su sentido es aquel en que ϕ crece.

l vector unitario $\vec{u}_\theta$ es perpendicular a los dos anteriores verificándose: $\vec{u}_r \times \vec{u}_\phi = \vec{u}_\theta$.

Un punto P tiene un vector de posición que se encuentra en la dirección OP. En esféricas: $\vec{r} = r\ \vec{u}_r$. No determina unívocamente su posición, solo indica que P está a distancia r del origen.

RELACIÓN DE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS ESFÉRICAS Y RECTANGULARES.



Buscaremos las relaciones entre los vectores unitarios $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_{phi}$ y los $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Trasladamos los vectores unitarios al origen para facilitar el cálculo.

El vector $\vec{u}_r$ debe proyectarse previamente sobre el plano XY, dirección OM, antes de hacerlo sobre los ejes X e Y. Esta proyección vale $|\vec{u}_r|\sin\phi = 1\ \sin\phi = \sin\phi$. Para proyectar $\vec{u_\phi}$ observamos que forma con el eje Z un ángulo $(\frac{\pi}{2}-\phi)$ pero también debe ser proyectado antes sobre el plano XY y después sobre los ejes.

Para proyectar $\vec{u_\theta}$ vemos que forma con el eje X, un ángulo $(\theta+\frac{\pi}{2})$.

$$\vec{u_r} = \sin\phi\cos\theta\ \vec{i} + \sin\phi\sin\theta\ \vec{j} + \cos\phi\ \vec{k}$$

$$\vec{u_\phi} = \sin\Big(\frac{\pi}{2}-\phi\Big)\cos\theta\ \vec{i} + \sin\Big(\frac{\pi}{2}-\phi\Big)\sin\theta\ \vec{j} - \cos\Big(\frac{\pi}{2}-\phi\Big)\ \vec{k} =$$

$$= \cos\phi\cos\theta\ \vec{i} + \cos\phi\sin\theta\ \vec{j} - \sin\phi\ \vec{k}$$

$$\vec{u_\theta} = \cos\Big(\frac{\pi}{2}+\theta\Big)\ \vec{i} + \sin\Big(\frac{\pi}{2}+\theta\Big)\ \vec{j} + 0;\vec{k} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Ejemplo E.3. *Un punto tiene por coordenadas cartesianas $P(4,3,2)$, expresar su vector de posición en coordenadas esféricas.*

$$|\vec{r})| = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{29}; \qquad \vec{r} = r\,\vec{u}_r = 29\,\vec{u}_r$$

Ejemplo E.4. *Expresar el vector $\vec{v} = -8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}$ en coordenadas esféricas si su punto de aplicación está en $P(4,3,2)$.*

Calculemos los vectores unitarios $\vec{u}_r$ $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\phi$ en el punto $P(4,3,2)$. Obsérvese el vector $\vec{R}$ de la figura anterior a la anterior.

$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{4^2+3^2} = 5;\quad \cos\theta = 4/5 = 0.8;\quad \sin\theta = 3/5 = 0.6;\quad \cos\phi = 2/\sqrt{29};\quad \sin\phi = 5/\sqrt{29}$

$$\vec{u}_r = \frac{5}{\sqrt{29}}\cdot 0.8\,\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\cdot 0.6\,\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{29}}\,\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{29}}\,(4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})$$

$$\vec{u_\phi} = \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot 0.8\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot 0.6\,\vec{j} - \frac{5}{\sqrt{29}}\,\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{29}}\,(1.6\vec{i}+1.2\vec{j}-5\vec{k})$$

$$\vec{u_\theta} = -0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}$$

Calcularemos las componentes del vector a$\vec{v}$ en las direcciones de los vectores unitarios $\vec{u}_r$ $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\phi$ multiplicando escalarmente el vector por cada uno de estos unitarios.

$$\vec{v}\cdot\vec{u_r} = (-8,10,-12)\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(4,3,2) = \frac{-26}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u_\phi} = (-8,10,-12)\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(1.6,1.2,-5) = \frac{59.2}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u_\theta} = (-8,10,-12)\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(-0.6,0.8,0) = 12.8$$

Por lo que $\quad \vec{v_E} = \frac{-26}{\sqrt{29}}\,\vec{u_r} + \frac{59.2}{\sqrt{29}}\,\vec{u_\phi} + 12.8\,\vec{u_\theta}.$