

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA

---

## **Appunti di Sistemi Dinamici**

---

*Sebastiano Fregnan*

4 novembre 2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Modelli . . . . .	5
1.2	Richiami . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modello a stati</b>	<b>7</b>
2.1	Definizione . . . . .	7
2.2	Evoluzione libera degli stati e delle uscite (nel tempo) . . . . .	10
2.2.1	Diagonalizzazione di una matrice . . . . .	10
2.2.2	Jordanizzazione di una matrice . . . . .	11
2.2.3	Esponenziale di una matrice . . . . .	12
2.3	Evoluzione forzata degli stati e delle uscite (nel tempo) . . . . .	14
2.4	Evoluzione degli stati e delle uscite (in Laplace) . . . . .	15
2.5	Commutazione arbitraria di stato . . . . .	16
2.6	Stabilità . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Realizzazione</b>	<b>19</b>
3.1	Realizzazioni equivalenti . . . . .	19
3.2	Realizzazioni notevoli . . . . .	20
3.2.1	Forme di disaccoppiamento di stato . . . . .	20
3.2.2	Forma di controllo canonica . . . . .	22
3.2.3	Forma di osservazione canonica . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Analisi dei sistemi</b>	<b>25</b>
4.1	Raggiungibilità . . . . .	25
4.2	Controllabilità . . . . .	27
4.3	Osservabilità . . . . .	28
4.4	Proprietà di dualità . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Sintesi in retroazione</b>	<b>33</b>
5.1	Retroazione sullo stato . . . . .	33
5.2	Stima dello stato . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Sintesi del controllore</b>	<b>37</b>
6.1	Sintesi in forma canonica . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Sistemi a tempo discreto</b>	<b>39</b>
7.1	Evoluzioni . . . . .	41
7.2	Modi naturali . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Stabilità alla Lyapunov</b>	<b>45</b>
8.1	Criterio ridotto di Lyapunov . . . . .	45
8.2	Criterio diretto di Lyapunov . . . . .	46



# 1 | Introduzione

## 1.1 Modelli

Un fenomeno fisico è **modellabile** tramite equazioni differenziali in due modalità:

**Modello classico:** il sistema è espresso come un'eguaglianza tra l'equazione differenziale degli ingressi e quella delle uscite;

**Modello a stati:** il sistema è espresso in funzione dello *stato*, cioè un'astrazione del concetto di energia immagazzinata nel sistema.

Il modello a stati ci permette di studiare con facilità sistemi MIMO e analizzare particolari proprietà intrinseche del sistema, come l'*osservabilità* e la *controllabilità*, oppure alterarle, introducendo *stabilizzatori* e *osservatori*. Chiameremo la fase di studio **analisi**, mentre quella di alterazione **sintesi**.

## 1.2 Richiami

### Sistema SISO LTI causale

Un sistema SISO (Single Input, Single Output) LTI (Lineare, Tempo Invariante) causale (che da valori solo per istanti successivi ad uno stabilito come “iniziale”) è definito tramite equazioni differenziali ordinarie del primo ordine nella forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \quad \text{con} \quad \frac{d^i v(0^-)}{dt^i} = k_i \quad \forall i \in [0, n-1],$$

con  $u(t)$  il **segnale ingresso**,  $v(t)$  il **segnale uscita** e  $k_i$  le **condizioni iniziali** del sistema.

Dal polinomio caratteristico  $P(s)$  associato all'equazione differenziale dell'uscita otteniamo le **radici**  $\lambda_i$  del sistema, tali che  $P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = (s - \lambda_1)^{\mu_1} (s - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (s - \lambda_r)^{\mu_r}$  con  $r$  numero di radici *distinte* e  $\mu_i$  la molteplicità aritmetica per  $\lambda_i$ , tale che  $\sum_{i=1}^r \mu_i = n$ .

Diciamo che la **risposta totale**  $v(t)$  del sistema è definita come la somma della sua **evoluzione libera**  $v_\ell(t)$  e della sua **evoluzione forzata**  $v_f(t)$ , ovvero

$$v(t) = v_\ell(t) + v_f(t) \quad \text{con} \quad v_f(t) = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau$$
$$h(t) = \underbrace{d_0 \delta(t)}_{\text{se } n=m} + \sum_{i=1}^r \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} \underbrace{d_{i,\ell} e^{\lambda_i t} \frac{t^\ell}{\ell!}}_{m_{i,\ell}} \delta_{-1}(t)$$

dove  $m_{i,\ell} = e^{\lambda_i t} \frac{t^\ell}{\ell!}$  sono detti i **modi naturali** del sistema e  $h(t)$  è la **risposta impulsiva** del sistema, ovvero come varia il sistema quando l'ingresso è un segnale impulso  $\delta(t)$ .

### Sistema dinamico

Un sistema è **dinamico** se tiene conto del suo “storico”, ovvero se possiede componenti in grado di immagazzinare energia. Un sistema dinamico è sempre modellato con equazioni differenziali ed esse sono dette la **dinamica del sistema**, in quanto ne descrivono l'evoluzione.

### Stabilità di un sistema

Un sistema è **stabile** quando la sua uscita non esplode esponenzialmente. Dato un sistema con modi naturali  $m_{i,\ell} = e^{\lambda_i t} \frac{t^\ell}{\ell!} = e^{\sigma_i t} e^{j\phi_i t} \frac{t^\ell}{\ell!}$ , esso gode di:

- **Stabilità asintotica:** se e solo se  $\sigma_i < 0$  e  $\forall i, \Re(\lambda_i) < 0$
- **Stabilità BIBO:** se esiste  $M_u > 0$  tale che  $\forall t, |u(t)| < M_u$  ed esiste  $M_v > 0$  tale che  $\forall t, |v(t)| < M_v$
- **Stabilità semplice:** se e solo se  $\sigma_i = 0, \ell = 0$  e  $\forall i, \Re(\lambda_i) = 0 \wedge \mu_i = 1$
- **Instabilità (polinomiale):** se  $\sigma_i = 0, \ell > 0$  e  $\forall i, \Re(\lambda_i) = 0 \wedge \mu_i > 1$
- **Instabilità (esponenziale):** se  $\sigma_i > 0$  e  $\forall i, \Re(\lambda_i) > 0 \wedge \mu_i > 1$

### Funzione di Trasferimento

La trasformata di Laplace della risposta impulsiva è chiamata funzione di trasferimento (in breve FdT) di un sistema e ne descrive l'andamento nel dominio complesso, in base all'ingresso. Viene definita mediante

$$H(s) = \mathcal{L}[h](s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,\ell}}{(s - \lambda_i)^{\ell+1}}$$

dove  $p_i$  sono detti i **poli** e  $z_i$  gli **zeri** della FdT e non sono necessariamente distinti tra loro.

## 2 | Modello a stati

### 2.1 Definizione

Permettiamo ai sistemi di avere più entrate e più uscite: un sistema MIMO (Multiple Input, Single Output) è descrivibile al meglio utilizzando delle equazioni matriciali di funzioni differenziali che rappresentano il concetto di **stato**, ovvero descrivono l'evoluzione dell'energia del sistema nel tempo.

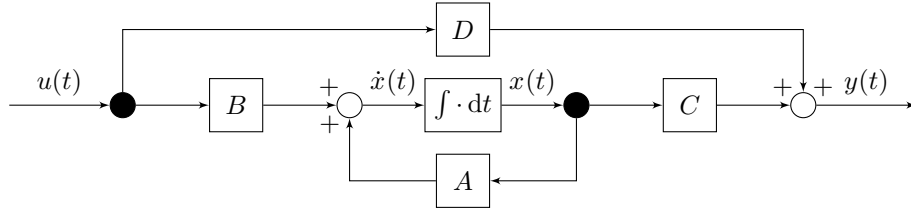
Dato un sistema MIMO di  $p$  uscite  $y_i(t)$  ed  $m$  ingressi  $u_i(t)$ , esso è rappresentabile con l'equazione matriciale

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + \underbrace{D u(t)} \end{cases} = \{A, B, C, D\}$$

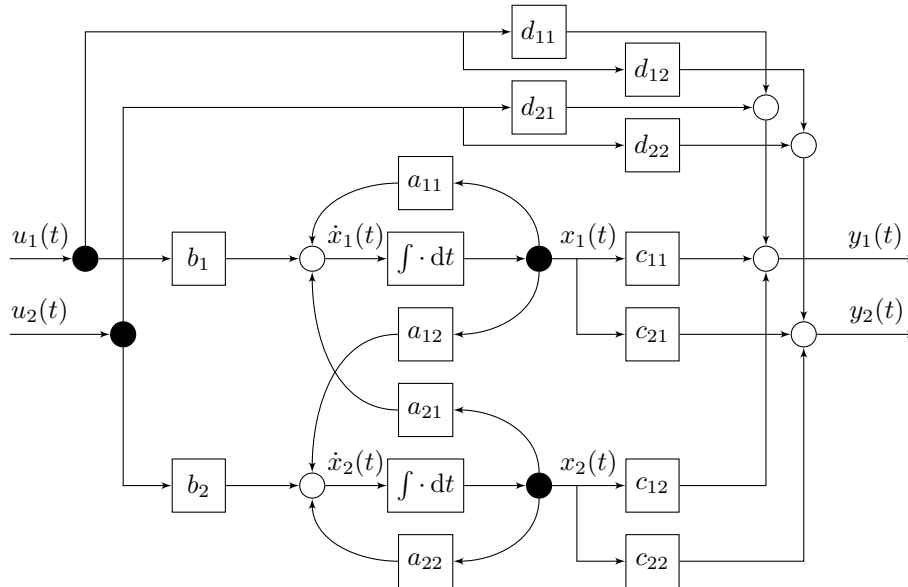
se  $u(t)$  e  $y(t)$  sono di uguale grado

dove i vari elementi sono

- $u(t)_{m \times 1}$  è il vettore degli ingressi,
- $y(t)_{p \times 1}$  è il vettore delle uscite,
- $x(t)_{n \times 1}$  è il vettore degli stati, con  $\dot{x}(t)_{n \times 1}$  la sua derivata,
- $A_{n \times n}$  è la matrice di commutazione di stato,
- $B_{n \times m}$  è il vettore dei contributi dell'ingresso sullo stato,
- $C_{p \times n}$  è la matrice dei contributi dello stato sull'uscita,
- $D_{p \times m}$  è il vettore dei contributi dell'ingresso sull'uscita.



(a) Diagramma a blocchi di un sistema dinamico in forma matriciale



(b) Diagramma a blocchi delle singole funzioni nelle matrici di un sistema a 2 ingressi, 2 stati e 2 uscite

Figura 2.1: Esempi di diagrammi a blocchi di un sistema

### Autovalori, autovettori e autospazi

La matrice quadrata  $A_{n \times n}$  è una applicazione lineare e per alcuni vettori può apparire come una semplice scalatura, ovvero

$$Av^i = \lambda_i v^i ;$$

tali scalature sono dette **autovalori**  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  di  $A$  ed i loro corrispondenti vettori sono detti **autovettori**  $v^i_{n \times 1}$  di  $\lambda_i$ . Per trovare gli autovettori il ragionamento è semplice:

$$Av^i = \lambda_i v^i \implies (A - \lambda_i \mathbb{I})v^i = \mathbf{0} \implies \{v^i\} = \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})$$

mentre per gli autovalori è leggermente più complesso: quando abbiamo  $v^i \in \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})$  significa che la matrice  $A - \lambda_i \mathbb{I}$  non ha rango massimo, e che quindi non è invertibile, cioè  $\det(A - \lambda_i \mathbb{I}) = 0$ ; gli autovalori sono quindi tutti quei  $\lambda$  tali che  $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ . Definiamo dunque il **polinomio caratteristico** di  $A$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = (-1)^n \det(\lambda \mathbb{I} - A)$$

che come radici ha gli  $r$  autovalori distinti  $\lambda_i$  di  $A$  (o in generale  $n$  autovalori ripetuti).

Tutti gli autovettori  $v^i_j$  (compreso quello nullo) di un certo autovalore  $\lambda_i$  formano uno spazio vettoriale  $U_i$  detto **autospazio** di  $A$  associato a  $\lambda_i$ .

In definitiva, si ha

autovalori	$\lambda_i$	radici di	$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$
autovettori	$v^i_j$	vettori in	$\ker(A - \lambda_i \mathbb{I})$
autospazi	$U_i$	spazi	$\text{span}\{v^i_j\}$

L'insieme  $\Lambda(A)$  è detto lo **spettro** di  $A$  ed è l'insieme dei suoi autovalori  $\lambda_i$ .

### Molteplicità di una radice

Data una matrice  $A_{n \times n}$  con polinomio caratteristico  $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_{a_1}} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\mu_{a_i}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\mu_{a_r}}$ , con  $r$  numero di autovalori distinti di  $A$ , diciamo che per ogni autovalore  $\lambda_i$ , la sua

- **Molteplicità algebrica**  $\mu_{a_i}$ : è il numero di volte in cui compare  $\lambda_i$  in  $P_A(\lambda)$  e vale  $\sum_{i=1}^r \mu_{a_i} = n$ . Si ottiene semplicemente contando le occorrenze.
- **Molteplicità geometrica**  $\mu_{g_i}$ : è il numero di autovettori per  $\lambda_i$ , cioè è la dimensione del nucleo di  $A - \lambda_i \mathbb{I}$ , quindi per il teorema nullità-rango

$$\mu_{g_i} = \text{Null}(A - \lambda_i \mathbb{I}) = \dim \ker(A - \lambda_i \mathbb{I}) = n - \text{rank}(A - \lambda_i \mathbb{I})$$

### Teorema di Cayley-Hamilton

Data  $A_{n \times n}$  con  $P_A(\lambda)$  il suo polinomio caratteristico,  $P_A(A) = 0$ .

### Inversa di matrice

Data una matrice  $A_{n \times n}$  non singolare, cioè tale che  $\det(A) \neq 0$ , la sua matrice inversa  $A_{n \times n}^{-1}$  è tale per cui  $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_n$ . La matrice inversa di  $A$  è facilmente calcolabile mediante

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj } A = \frac{1}{\det(A)} (\text{cof } A)^T$$

dove  $\text{adj } A$  è la matrice aggiunta di  $A$  ed è definita come la trasposta di  $\text{cof } A$ , che è la matrice dei cofattori di  $A$ , i cui elementi sono definiti da

$$\text{cof}_{i,j}(A) \doteq (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

dove  $\det(A_{i,j})$  è detto il minore di  $A$  ottenuto cancellando la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna.



## Esempio di sistema dinamico

Un ipotetico evento fisico è descritto internamente dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= 4v(t) - 5w(t) \\ \dot{w}(t) &= 2v(t) - 3w(t) \end{aligned} \quad \text{con C.I.} \quad \begin{aligned} v(0^-) &= 8 \\ w(0^-) &= 5. \end{aligned}$$

la cui forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \implies \dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{con} \quad x(0^-) = x_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

e vogliamo trovare le funzioni  $v(t)$  e  $w(t)$  che lo soddisfano, o equivalentemente il vettore  $x(t)$ . Essendo questa una equazione differenziale omogenea (EDO) del primo ordine (l'ingresso  $u(t)$  è assente), innanzitutto troviamo la famiglia di soluzioni usando gli autovalori di  $A$  ed i relativi autovettori:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

$$\begin{aligned} p_1 \in \ker(A - \lambda_1 I) &\implies (A - \lambda_1 I)p_1 = 0 \implies \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} p_1 = 0 \implies p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ p_2 \in \ker(A - \lambda_2 I) &\implies (A - \lambda_2 I)p_2 = 0 \implies \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} p_2 = 0 \implies p_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cerchiamo ora soluzioni particolari dell'equazione differenziale per l'ingresso nella forma  $x_i(t) = e^{\lambda_i t} p_i$  composte da  $v_i(t) = e^{\lambda_i t} p_{i1}$  e  $w_i(t) = e^{\lambda_i t} p_{i2}$ , dove  $p_i = [p_{i1}, p_{i2}]^\top$ . Sostituiamo le forme di  $v(t)$  e  $w(t)$  nell'equazione di stato e troviamo

$$\begin{aligned} \text{da } \lambda_1 \quad \begin{bmatrix} v_1(t) \\ w_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} p_{11} \\ e^{\lambda_1 t} p_{12} \end{bmatrix} \iff x_1(t) = e^{\lambda_1 t} p_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{da } \lambda_2 \quad \begin{bmatrix} v_2(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_2 t} p_{21} \\ e^{\lambda_2 t} p_{22} \end{bmatrix} \iff x_2(t) = e^{\lambda_2 t} p_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che poi combiniamo linearmente nella soluzione totale

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Per trovare i coefficienti impostiamo  $t = 0$  e, usando le condizioni iniziali, otteniamo

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \implies C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \implies C_1 = 3, C_2 = 1$$

e dunque

$$x(t) = 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} + 5e^{2t} \\ 3e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}.$$

Così facendo ho trasformato il modello classico in quello a stati e ho trovato anche le componenti della dinamica  $x(t)$  del sistema. Il sistema iniziale prevede solo evoluzione libera, infatti manca l'ingresso  $u(t)$ , e quindi dipende solo dallo stato del sistema.

## 2.2 Evoluzione libera degli stati e delle uscite (nel tempo)

Per calcolare l'evoluzione degli stati (linearmente indipendenti) in assenza di ingresso separiamo l'equazione di stato vista sopra e, saltando un po' di teoria e facendo un abuso enorme di notazione, otteniamo

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \implies \frac{1}{x(t)} dx(t) = A dt \implies \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x(t)} dx(t) = A \int_{t_0}^t dt \implies \ln(x(t)) - \ln(x(t_0)) = A(t-t_0)$$

e lasciando libero  $t_0$ , definendo **condizioni iniziali**  $x_0 = x(t_0)$ , otteniamo,

$$x_\ell(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$$

Per calcolare l'evoluzione libera delle uscite usiamo il risultato appena ottenuto

$$y_\ell(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0$$

Per ottenere i risultati raggiunti dobbiamo quindi definire l'esponenziale di una matrice.

### 2.2.1 Diagonalizzazione di una matrice

#### Matrice diagonalizzabile

Data una matrice  $A_{n \times n}$  con  $n$  autovalori  $\lambda_i$  ed un solo autovettore  $v^i \in \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})$  per ognuno di essi, ponendo questi ultimi ordinatamente in colonna in una matrice di trasformazione  $S_{n \times n} = [v^1, \dots, v^n]$ , possiamo diagonalizzare  $A$  con

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbb{A} \quad \text{dove} \quad \forall i, Av^i = \lambda_i v^i \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v^1 & \dots & v^n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Elenchiamo alcune proprietà:

- se  $Ax = \lambda x$ , allora  $A^k v = \lambda^k v$ , e se  $S^{-1}AS = \mathbb{A}$ , allora

$$S^{-1}A^k S = \mathbb{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

- se  $\lambda$  è un autovalore per  $A$ , allora  $\frac{1}{\lambda} \equiv A^{-1}$  rispettivamente al suo autovettore  $v$ ;
- date  $A$  e  $B$  con autovalori rispettivamente  $\lambda$  e  $\mu$ ,  $AB$  ha autovalore  $\lambda\mu$  solo se  $\lambda$  e  $\mu$  hanno lo stesso autovettore  $v$ ;
- se  $A$  e  $B$  sono diagonalizzabili, esse hanno la stessa matrice di trasformazione  $S$  se e solo se  $AB = BA$ ;

**Osservazione:** le condizioni necessarie e sufficienti equivalenti affinché una matrice  $A_{n \times n}$  sia diagonalizzabile sono:

- $\forall \lambda_i, \mu_{a_i} = \mu_{g_i}$  (cioè ogni autovalore ha un sottospazio di dimensione "completa");
- $A$  ha esattamente  $n$  autovalori (cioè sono tutti distinti);
- $A$  è simmetrica ( $A^\top = A$ ), hermitiana ( $A^\top = A^*$ ), involutoria ( $A^{-1} = A$ ) unitaria ( $A^{-1} = A^*$ ) o ortogonale ( $A^\top = A^{-1}$ ).

Diagonalizzando possiamo trasformare un sistema  $\Sigma = \{A, B, C\}$  (quindi con le variabili di stato legate tra loro) in un sistema  $\Sigma' = \{A', B', C'\}$  con  $A' = \mathbb{A}_A$ , dove ogni variabile è responsabile solo di se stessa. Questo permette di vedere il sistema come tanti sotto-sistemi messi in parallelo, e quindi riduce la complessità del problema. La diagonalizzazione però non è sempre possibile, e quindi è necessario trovare un altro metodo per semplificare i sistemi in modo simile alla diagonalizzazione. Inoltre, essendo la diagonalizzazione una trasformazione di similitudine,  $\mathbb{A}_A$  ha gli stessi autovalori di  $A$  e lo stesso polinomio caratteristico.

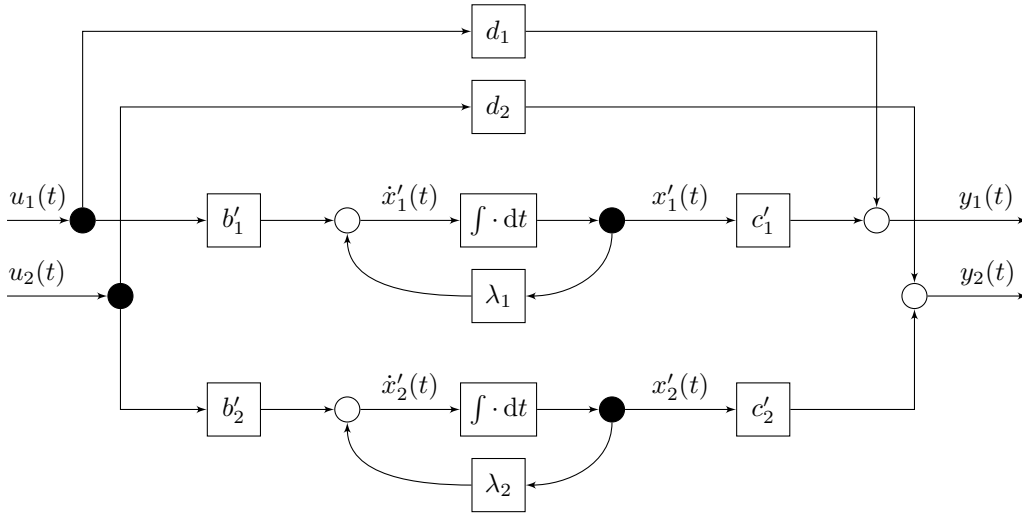


Figura 2.2: Diagramma a blocchi del sistema precedente diagonalizzato (notiamo che i fattori  $d_i$  sono inalterati)

### 2.2.2 Jordanizzazione di una matrice

#### Matrice di Jordan (in forma canonica)

Data una matrice  $A_{n \times n}$  di  $r$  autovalori distinti  $\lambda_i$  diciamo che  $A$  è “genericamente” diagonalizzata tramite una matrice a blocchi  $J$  con  $r$  blocchi detta la sua **forma di Jordan**

$$J^i \doteq \begin{bmatrix} J^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J^r \end{bmatrix}_{n \times n}$$

dove ogni blocco  $J^i$  è detto **blocco di Jordan** ed è una matrice a blocchi con  $\mu_{g_i}$  blocchi definita come

$$J^i \doteq \begin{bmatrix} J_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\mu_{g_i}}^i \end{bmatrix}_{\mu_{a_i} \times \mu_{a_i}}$$

dove ogni blocco  $J_j^i$  è detto **miniblocco di Jordan** ed è definito come la matrice triangolare superiore

$$J_j^i \doteq \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{q \times q}$$

dove  $q$  è la lunghezza della *catena di Jordan* legata a quel miniblocco (adesso ti spiego tutto eh, promesso). Definiamo **autospazio generalizzato** di ordine  $j$  l'autospazio  $\ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^j$  generato dagli **autovettori generalizzati**  ${}^{(j)}v_k^i \in \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^j$ . Tali autovettori sono legati tra loro dalla relazione  ${}^{(j-1)}w_k^i = (A - \lambda_i \mathbb{I}) {}^{(j)}w_k^i$ , detta **catena di Jordan**.

Vediamo che, per costruzione, la matrice di Jordan di  $A$  è  $J = \mathbb{A}_A + N$ , ovvero è la somma della matrice diagonale degli autovalori di  $A$  e di una **matrice nilpotente**  $N$ , cioè una matrice tale che  $N^p = 0 \forall p > r$ , dove  $r$  è detto il suo *ordine di nilpotenza*. Inoltre, anche la jordanizzazione è una trasformazione di similitudine, quindi  $J$  ha gli stessi autovalori di  $A$  e lo stesso polinomio caratteristico.

### Jordanizzazione

L'algoritmo è composto dalle seguenti fasi:

1.  $\forall \lambda_i$  distinto, troviamo le basi degli autospazi generalizzati di  $A - \lambda_i \mathbb{I}$  (formate dai vettori  $^{(j)}v_k^i$ , dove  $i$  è l'indice dell'autovalore,  $j$  l'ordine dell'autospazio e  $k = 1 \dots \delta_j^i$  un semplice contatore), come segue

$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda \mathbb{I}) &= \text{span}\{^{(1)}v_1^i, \dots, ^{(1)}v_{\delta_1^i}^i\} \\ \ker(A - \lambda \mathbb{I})^2 &= \text{span}\{^{(1)}v_1^i, \dots, ^{(1)}v_{\delta_1^i}^i, ^{(2)}v_1^i, \dots, ^{(2)}v_{\delta_2^i}^i\} \\ &\vdots \\ \ker(A - \lambda \mathbb{I})^{m_i} &= \text{span}\{^{(1)}v_1^i, \dots, ^{(1)}v_{\delta_1^i}^i, \dots, ^{(j)}v_1^i, \dots, ^{(j)}v_{\delta_j^i}^i, \dots, ^{(m_i)}v_1^i, \dots, ^{(m_i)}v_{\delta_{m_i}^i}^i\} \end{aligned}$$

tenendo traccia dei contributi di ogni ordine tramite le variabili di dimensione

$$\delta_j^i = \dim\{\ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^j\} - \delta_{j-1}^i, \quad \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^i = \mu_{a_i}$$

fino a trovare l'esponente  $m_i$  che rende stazionaria la catena degli autospazi, ovvero tale che

$$\ker(A - \lambda_i \mathbb{I}) \subset \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^2 \subset \dots \subset \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{m_i} = \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{m_i+1}$$

Trovando gli autovettori, dato che ogni ordine successivo contiene gli autovettori dell'ordine precedente, scriviamo tutti gli autovettori in ordine cronologico, così da semplificare notevolmente la fase successiva. A scopo informativo,  $m_i$  è il grado di  $\lambda_i$  nel polinomio minimo di  $A$ .

2.  $\forall \lambda_i$  distinto, costruiamo ricorsivamente la base per  $\ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{m_i}$  snocciolando la catena degli autovettori generalizzati al contrario. A partire dagli autovettori di ordine più alto (quindi partendo da  $q = m_i$ ), costruiamo le catene

$$\mathcal{B}_k^i \doteq \{^{(1)}w_k^i, ^{(2)}w_k^i, \dots, ^{(q)}w_k^i\} \quad \text{dove} \quad ^{(j-1)}w_k^i = (A - \lambda_i \mathbb{I}) ^{(j)}w_k^i \quad \text{e} \quad ^{(q)}w_k^i = ^{(q)}w_k^i$$

per  $k$  crescente, andando a rimuovere da  $\ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{m_i}$  tutti i vettori  $^{(j)}w_k^i$  trovati durante l'operazione. L'indice  $q$  cambia di volta in volta, essendo l'ordine più grande rimasto man mano che gli autovettori vengono eliminati. Consumati tutti i vettori, costruiamo il blocco finale giustapponendo le catene

$$\mathcal{B}^i = \mathcal{B}_1^i \cup \mathcal{B}_2^i \cup \dots$$

3. a concludere, giustapponiamo i blocchi per ottenere la matrice di trasformazione

$$T = \mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \dots \cup \mathcal{B}^r$$

che descrive la similitudine

$$A = T J T^{-1}$$

ed è detta la **matrice modale** o **jordanizzante** (in forma canonica) di  $A$ .

### 2.2.3 Esponenziale di una matrice

#### Esponenziale di matrice

Data una matrice  $A_{n \times n}$  il suo esponenziale  $e^A$  è calcolato mediante l'espansione in serie di Taylor:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{I}_{n \times n} + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Distinguiamo tre casi, gli ultimi due riconducibili al primo:

- se  $A$  è una matrice diagonale:

$$\begin{aligned} e^A &= \mathbb{I}_{n \times n} + \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \frac{1}{1!} + \begin{bmatrix} a_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^2 \end{bmatrix} \frac{1}{2!} + \begin{bmatrix} a_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^3 \end{bmatrix} \frac{1}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_1^2}{2!} + \dots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \frac{a_n}{1!} + \frac{a_n^2}{2!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e nel caso di  $\mathbb{A}$

$$e^{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

- se  $A$  è una matrice diagonalizzabile come  $A = T\mathbb{A}T^{-1}$  è possibile estrarre  $T$  e  $T^{-1}$  dalla sommatoria e ottenere l'esponenziale di una matrice diagonale:

$$e^A = e^{T\mathbb{A}T^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T\mathbb{A}T^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T\mathbb{A}T^{-1})(T\mathbb{A}T^{-1}) \dots (T\mathbb{A}T^{-1})}{k!} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^k}{k!} T^{-1} = T e^{\mathbb{A}} T^{-1}$$

- se  $A$  non è diagonalizzabile usiamo la sua forma di Jordan  $A = TJT^{-1}$  dove per costruzione  $J = \mathbb{A} + N$  con  $N$  matrice nilpotente di ordine  $\rho$ , quindi

$$e^A = e^{TJT^{-1}} = Te^JT^{-1} = Te^{\mathbb{A}+N}T^{-1} = Te^{\mathbb{A}}e^NT^{-1}$$

dove la serie di Taylor per  $e^N$  è troncabile alla potenza  $r$  poiché per esponenti maggiori  $N$  vale sempre  $\nearrow$ , quindi

$$e^N = \sum_{k=0}^r \frac{N^k}{k!} = \mathbb{I}_{n \times n} + \frac{N}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^r}{r!}.$$

In particolare, vediamo alcune proprietà legate ad  $e^{At}$ :

- $e^{At}|_{t=0} = \mathbb{I}_{n \times n} + \cancel{\frac{At}{1!}} + \cancel{\frac{A^2t^2}{2!}} + \cancel{\frac{A^3t^3}{3!}} + \dots$
- $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
- $e^{At}e^{(-A)t} = e^{(-A)t}e^{At} = \mathbb{I}_{n \times n}$
- $(e^{At})^\top = e^{A^\top t}$
- se  $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{bmatrix}$  è una matrice a blocchi, allora  $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{A_n t} \end{bmatrix}$  è anch'essa a blocchi
- se  $A = T^{-1}BT$  allora  $e^{At} = T^{-1}e^{Bt}T$
- se  $v$  è un autovettore per  $\lambda$ , allora  $e^{At}v = e^{\lambda t}v$
- $e^{\lambda \mathbb{I}t} = e^{\lambda t}\mathbb{I}$
- se  $J_\lambda$  è un miniblocco di Jordan, quindi scomponibile in  $J_\lambda = \lambda \mathbb{I}_{n \times n} + N_{n \times n}$ , allora  $e^{J_\lambda t} = e^{\lambda \mathbb{I}t}e^{Nt} = e^{\lambda t} \mathbb{I} \left( \mathbb{I}_{n \times n} + \frac{N}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^n}{n!} \right)$

Con questi risultati, vediamo quanto sia naturale la trasformazione del sistema di partenza  $\Sigma$  in un sistema diagonalizzato/jordanizzato  $\Sigma'$ , così da poter calcolare facilmente l'esponenziale  $e^{At}$ . Vedremo in seguito più in dettaglio le trasformazioni dei sistemi, perché al momento moltiplichiamo ancora per  $T$  e  $T^{-1}$ , ma smetteremo presto!

## 2.3 Evoluzione forzata degli stati e delle uscite (nel tempo)

Per calcolare l'evoluzione forzata degli stati, cioè in presenza di ingresso e assenza di condizioni iniziali, usiamo l'equazione di stato vista sopra

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) &\implies e^{-At} \left( \frac{dx(t)}{dt} - Ax(t) \right) = e^{-At} Bu(t) \\
 &\implies \frac{d}{dt} (e^{-At} x(t)) = e^{-At} Bu(t) \\
 &\implies \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} (e^{-A\tau} x(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \\
 &\implies e^{-A\tau} x(\tau) \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

per ottenere l'*equazione di commutazione di stato*

$$e^{-At} x(t) - e^{-At_0} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

nella quale, sapendo che  $x(t_0) = x_0 = 0$  per premessa, otteniamo,

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Per calcolare l'evoluzione forzata delle uscite usiamo l'equazione sopra

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

e otteniamo

$$y_f(t) = \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

oppure equivalentemente usando la *risposta impulsiva*  $h(t)$  del sistema

$$y_f(t) = (h * u)(t) \quad \text{con} \quad h(t) = C e^{At} B \delta_{-1}(t) + D \delta(t)$$

## 2.4 Evoluzione degli stati e delle uscite (in Laplace)

Applicando la trasformata di Laplace all'intero sistema, otteniamo le singole funzioni  $U(s) = \mathcal{L}[u](s)$  per l'ingresso in frequenza,  $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$  per l'uscita in frequenza e  $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$  per lo stato in frequenza.

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

che porta alle soluzioni

$$\begin{aligned} X(s) &= \underbrace{(s\mathbb{I} - A)^{-1}x_0}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(s\mathbb{I} - A)^{-1}BU(s)}_{X_f(s)} \\ Y(s) &= \underbrace{C(s\mathbb{I} - A)^{-1}x_0}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{(C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D)U(s)}_{Y_f(s)} \end{aligned}$$

Definiamo la **funzione di trasferimento** come la trasformata di Laplace della risposta impulsiva del sistema, ovvero come la relazione che lega l'entrata e l'uscita del sistema in frequenza:

$$\boxed{H(s) \doteq C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathcal{L}[h](s).$$

Nei sistemi che tratteremo avremo sempre  $D = \emptyset$  quindi per semplicità spesso scriveremo  $H(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B$ .

Notiamo l'importanza del termine  $(s\mathbb{I} - A)^{-1}$  nelle equazioni, e definiamo quindi l'**evoluzione di stato** del sistema come

$$\boxed{\Phi(s) \doteq (s\mathbb{I} - A)^{-1}} = \mathcal{L}[\phi](s)$$

La sua antitrasformata è detta **matrice di transizione dello stato** ed è nella forma

$$\boxed{\phi(t) = e^{A(t-t_0)}}$$

e tutte le equazioni viste finora possono essere riscritte come

### RISPOSTE DI UN SISTEMA SISO

Elenchiamo i risultati visti finora, sapendo che solitamente  $t_0 = 0^-$  e usando la notazione  $x_0 = x(t_0)$

nel dominio temporale	nel dominio di Laplace
$\phi(t) \doteq e^{A(t-t_0)}$	$\Phi(s) \doteq e^{At_0}(s\mathbb{I} - A)^{-1}$
$h(t) \doteq Ce^{At}B\delta_{-1}(t) + D\delta(t)$	$H(s) \doteq C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D$
$x_\ell(t) = \phi(t)x_0$	$X_\ell(s) = \Phi(s)x_0$
$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$	$X_f(s) = (s\mathbb{I} - A)^{-1}BU(s)$
$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$	$X(s) = X_\ell(s) + X_f(s)$
$y_\ell(t) = Cx_\ell(t)$	$Y_\ell(s) = CX_f(s)$
$y_f(t) = Cx_f(t) + Du(t) \quad [= (h * u)(t)]$	$Y_f(s) = CX_f(s) + DU(s) \quad [= H(s)U(s)]$
$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$	$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$

## 2.5 Commutazione arbitraria di stato

Dato un sistema  $\Sigma$  **controllabile**, utilizzando uno specifico input  $u(t)$  possiamo passare da un qualsiasi stato  $x(t_0)$  allo stato  $x(t_1)$ , entrambi noti, con  $t_0 \leq t_1$ . Tale l'ingresso  $u(t)$  si trova a partire dall'equazione di commutazione di stato

$$\underbrace{e^{-At_1}x(t_1) - e^{-At_0}x(t_0)}_{\text{vettore calcolabile}} = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau} B \underbrace{u(\tau)}_{\text{incognita}} d\tau$$

nella quale calcoliamo il vettore noto di sinistra

$$\bar{x} \doteq e^{-At_1}x(t_1) - e^{-At_0}x(t_0).$$

Ora espandiamo il termine  $e^{-A\tau}B$  esprimendolo come vettore colonna di funzioni  $f_i(\tau)$  e cerchiamo una soluzione  $u(t)$  in una forma scomponibile

$$e^{-A\tau}B = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\tau) \\ \vdots \\ f_n(\tau) \end{bmatrix}}_{\text{funzioni calcolabili}} \quad u(\tau) = \sum_{k=1}^n \zeta_k \phi_k(\tau) = \underbrace{[\phi_1(\tau) \cdots \phi_n(\tau)]}_{\text{funzioni note}} \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix}}_{\text{incognite}}$$

dove  $\{\phi_k(\tau)\}$  è una famiglia di funzioni linearmente indipendenti nell'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$  scelte arbitrariamente, e quindi note. Fatto ciò abbiamo che

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} f_1(\tau) \\ \vdots \\ f_n(\tau) \end{bmatrix} [\phi_1(\tau) \cdots \phi_n(\tau)] \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} f_1(\tau)\phi_1(\tau) & \cdots & f_1(\tau)\phi_n(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(\tau)\phi_1(\tau) & \cdots & f_n(\tau)\phi_n(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} d\tau$$

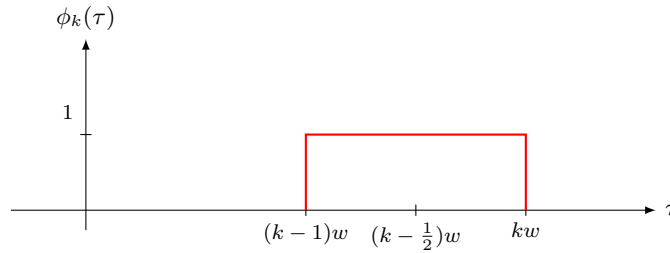
e in definitiva si ha

$$\bar{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \cdots & \Phi_{nn} \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix}}_{\zeta} \quad \text{dove} \quad \Phi_{ik} = \int_{t_0}^{t_1} f_i(\tau)\phi_k(\tau) d\tau$$

dove per ottenere le incognite  $\zeta_k$  in  $\zeta$  basta invertire  $\Phi$

$$\zeta = \Phi^{-1}\bar{x} \quad \text{e concludere con} \quad u(t) = \sum_{k=1}^n \zeta_k \phi_k(t).$$

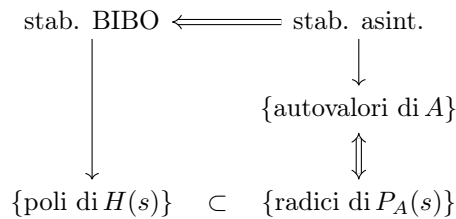
Per un controllo ideale, detto “bang-bang”, vengono solitamente scelte funzioni box shiftate; siccome ci saranno  $n$  box nell'intervallo da  $t_0$  a  $t_1$ , la famiglia sarà descritta con  $\phi_k(\tau) = \Pi\left(\frac{\tau}{w} - (k - \frac{1}{2})\right)$  dove  $w = \frac{t_1 - t_0}{n}$





## 2.6 Stabilità

Ricordiamo che la stabilità asintotica è data dalle radici del polinomio caratteristico delle uscite  $P_A(s)$ , mentre la stabilità BIBO è legata ai poli di  $H(s)$  dopo averla semplificata, dunque  $\{\text{poli di } H(s)\} \subset \{\text{radici di } P_A(s)\}$  e dato che  $P_A(s) = \det(s\mathbb{I} - A)$  si ha che  $\{\text{radici di } P_A(s)\} = \{\text{autovalori di } A\}$ . Possiamo riassumere tutto in



Diamo le definizioni di stabilità per un sistema  $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ :

- **Stabilità interna:** è legata alle condizioni iniziali del sistema.
  - **Stabilità asintotica:** un sistema MIMO è asintoticamente stabile se l'evoluzione libera dello stato del sistema converge asintoticamente a zero per qualsiasi condizione iniziale. Sono dunque proposizioni equivalenti:
    - \*  $\Sigma$  è asintoticamente stabile;
    - \* tutti i modi elementari di  $A$  convergono a zero;
    - \* gli autovalori di  $A$  hanno parte reale minore di 0;
    - \* le radici del polinomio caratteristico  $P_A(s)$  hanno tutte parte reale minore di 0.
  - **Stabilità semplice:** un sistema MIMO è semplicemente stabile se l'evoluzione libera dello stato del sistema è una funzione per qualsiasi condizione iniziale. Sono dunque proposizioni equivalenti:
    - \*  $\Sigma$  è stabile;
    - \* tutti i modi elementari di  $A$  sono limitati;
    - \* gli autovalori di  $A$  hanno tutti parte reale minore o uguale a 0, e agli autovalori a parte reale nulla sono associati solo miniblocchi unitari della matrice di Jordan;
    - \* gli autovalori di  $A$  hanno tutti parte reale minore o uguale a 0, e gli autovalori a parte reale nulla sono radici semplici del polinomio minimo;
    - \* le radici del polinomio caratteristico  $P_A(s)$  hanno tutti parte reale minore o uguale a 0, e alle radici a parte reale nulla viene associato un singolo modo.
- **Stabilità esterna:** è legata all'ingresso del sistema.
  - **Stabilità BIBO:** un sistema MIMO è *Bounded Input - Bounded Output* stabile se  $\forall t_0$  e  $\forall M_y > 0$  esiste  $M_u > 0$  tale che per  $\|u(t)\| < M_u, t \geq t_0$  vale  $\|y(t)\| < M_y, \forall t \geq t_0$ . Sono dunque proposizioni equivalenti:
    - \*  $\Sigma$  è BIBO stabile;
    - \* la risposta impulsiva del sistema  $h(t)$  è sommabile in norma;
    - \* la risposta impulsiva del sistema  $h(t)$  ha tutte le componenti sommabili;
    - \* tutti i modi elementari che compaiono nella  $h(t)$  con coefficiente non nullo sono convergenti;
    - \* i poli della matrice di trasferimento  $h(t)$  hanno tutti parte reale minore di 0;
    - \* la regione di convergenza di  $h(t)$  contiene l'asse immaginario  $j\mathbb{R}$ .



### 3 | Realizzazione

Come abbiamo visto, dal modello di un fenomeno otteniamo un sistema di equazioni differenziali, le quali possono essere espresse in forma matriciale. Tale sistema può essere scritto in **forma di realizzazione** come

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

poiché tutte le risposte del sistema sono facilmente computabili con la semplice moltiplicazione matriciale

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Ogni sistema può essere espresso nella sua realizzazione ed una realizzazione non è necessariamente l'unica possibile per quel sistema, tantomeno per quel modello, quindi possiamo trovare delle rappresentazioni alternative per lo stesso problema.

#### 3.1 Realizzazioni equivalenti

##### Sistema equivalente

Per un sistema  $\Sigma = \{A, B, C, D\}$  esiste un sistema algebricamente equivalente  $\bar{\Sigma} = \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$  ottenuto da un cambiamento di base. Siano  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  gli spazi rispettivamente per lo stato, l'ingresso e l'uscita; data  $v = (v_1, \dots, v_n)$  una base per lo spazio  $\mathcal{X}$  che permette di rappresentare il sistema  $\Sigma$ , definiamo una nuova base  $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$  per  $\mathcal{X}$ . Tramite la matrice (non singolare) di cambiamento di base  $T$  possiamo scrivere  $v = T\bar{v}$  e, dato uno stato  $x$  nella base  $v$ , si scrive

$$x = T\bar{x} \quad \text{o equivalentemente} \quad \bar{x} = T^{-1}x$$

per ottenere lo stato  $\bar{x}$  nella base  $\bar{v}$ , quindi dato il sistema

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

scriviamo il sistema equivalente a partire da

$$\begin{aligned} \bar{x} = T^{-1}x &\implies \dot{\bar{x}} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}(Ax + Bu) = T^{-1}(AT\bar{x} + Bu) \implies \dot{\bar{x}} = (T^{-1}AT)\bar{x} + (T^{-1}B)u \\ \bar{y} = y &\implies \bar{y} = Cx + Du = C(T\bar{x}) + Du \implies \bar{y} = (CT)\bar{x} + Du \end{aligned}$$

##### SISTEMA EQUIVALENTE

$$\bar{\Sigma} = \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT \\ \bar{B} &= T^{-1}B \\ \bar{C} &= CT \\ \bar{D} &= D \end{aligned} \quad \text{e} \quad \bar{x} = T^{-1}x$$

Se anziché cambiare solo la base dello stato fosse necessario cambiare anche le basi dell'ingresso e dell'uscita, rispettivamente con  $T_x$ ,  $T_u$  e  $T_y$ , il sistema equivalente generico avrebbe le matrici

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T_x^{-1}AT_x & \bar{C} &= T_y^{-1}CT_x \\ \bar{B} &= T_x^{-1}BT_u & \bar{D} &= T_y^{-1}DT_u \end{aligned}$$

ma ci concentreremo principalmente su cambi di base dello stato.

Come possiamo vedere, la matrice di cambiamento di base  $T$  dello spazio degli stati può essere la matrice diagonalizzante di  $A$  (o jordanizzante nel caso in cui  $A$  non fosse diagonalizzabile); così facendo abbiamo la convenienza di slegare le dipendenze tra stati (o di crearne catene) e quindi spezzare il sistema in sotto-sistemi più semplici da studiare (che è il motivo per cui prima abbiamo studiato le forme diagonali e di Jordan).

Notiamo che la funzione di trasferimento è invariante alle trasformazioni algebriche, infatti per  $\bar{\Sigma}$  si ha

$$\begin{aligned}\bar{H}(s) &= \bar{C}(s\mathbb{I} - \bar{A})^{-1}\bar{B} = CT(s\mathbb{I} - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B \\ &= CT(T(s\mathbb{I} - T^{-1}AT))^{-1}B = C(T(s\mathbb{I} - T^{-1}AT)T^{-1})^{-1}B \\ &= C(sTT^{-1} - A)^{-1}B = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B \\ &= H(s)\end{aligned}$$

dunque la stabilità del sistema equivalente sarà identica a quella del sistema di partenza, cioè

$$\Sigma \equiv \bar{\Sigma} \implies H(s) = \bar{H}(s).$$

### Realizzazione minima

Una realizzazione  $\Sigma = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$  della funzione di trasferimento  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  è detta **minima** se non esiste un'altra realizzazione  $\bar{\Sigma}$  di  $H(s)$  di dimensione inferiore a  $\Sigma$  (cioè se non esiste un'altra  $A_{\bar{n} \times \bar{n}}$  tale che  $\bar{n} < n$ , con  $A_{n \times n}$ ).  $H(s)$  è detta in **forma minima** se è possibile darne una realizzazione minima. Inoltre, una realizzazione  $\Sigma$  è minima per  $H(s)$  e solo se è raggiungibile ed osservabile.

Con la definizione sopra possiamo fare due considerazioni:

- se  $H(s)$  è **irriducibile**, cioè se si hanno  $N(s)$  e  $D(s)$  coprimi (non si semplificano tra loro), allora tutti i poli di  $H(s)$  sono autovalori di  $A$  nella realizzazione  $\Sigma$  della funzione di trasferimento;
- se  $\Sigma$  è la realizzazione minima di  $H(s)$  allora tutti i poli di  $H(s)$  sono i soli ed unici autovalori di  $A$ .

## 3.2 Realizzazioni notevoli

Tra le infinite possibili realizzazioni di un sistema, alcune sono indubbiamente più utili di altre. Tra queste, qui ne presentiamo quattro: due sono state già incontrate (subdolamente) nel capitolo precedente, mentre le ultime due avranno un importante ruolo nella fase di sintesi, che incontreremo più avanti. Inoltre, svilupperemo altre due realizzazioni nel capitolo successivo, in cui verrà presentata la fase di analisi.

### 3.2.1 Forme di disaccoppiamento di stato

Come abbiamo visto, dato un sistema  $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ , per calcolare  $e^{-At}$  ricorriamo alle forme diagonali  $A = TMT^{-1}$ , dove  $M$  è matrice diagonale o di Jordan. Da qui possiamo scrivere  $M = T^{-1}AT$  e, dalla definizione di sistema equivalente appena data, notiamo che possiamo definire il sistema  $\Sigma_M = \{M, T^{-1}B, CT, D\}$ , avente le stesse proprietà di  $\Sigma$ , ma con il vantaggio di aver isolato (o meglio, disaccoppiato) il più possibile le variabili di stato  $x_i$ . Da questa considerazione definiamo le due prime realizzazioni:

#### FORMA DIAGONALE

$$\Sigma_{\mathbb{A}} = \{A_{\mathbb{A}}, B_{\mathbb{A}}, C_{\mathbb{A}}, D_{\mathbb{A}}\} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mathbb{A}}x(t) + B_{\mathbb{A}}u(t) \\ y(t) = C_{\mathbb{A}}x(t) + D_{\mathbb{A}}u(t) \end{cases}$$

dove la matrice  $A_{\mathbb{A}}$  è diagonale. Per questa realizzazione, la funzione di trasferimento è scrivibile come

$$H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s) \quad \text{dove} \quad H_i(s) = \frac{b_i c_i}{s - \lambda_i}$$

e valgono le seguenti proprietà (spiegate in dettaglio più avanti):

**raggiungibilità** totale se e solo se  $\forall i, b_i \neq 0 \wedge \forall i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$

**osservabilità** totale se e solo se  $\forall i, c_i \neq 0 \wedge \forall i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$

**irriducibilità** di  $H(s)$  se  $\forall i, b_i c_i \neq 0 \wedge \forall i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$

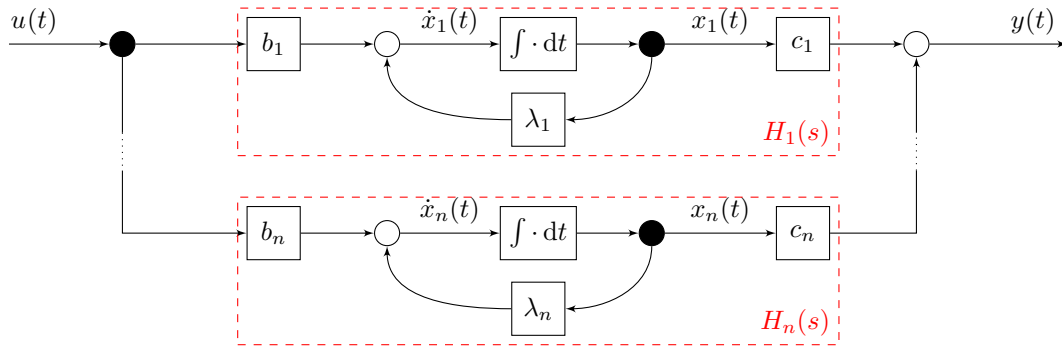


Figura 3.1: Diagramma a blocchi di un sistema SISO in forma diagonale (per maggiore chiarezza, i fattori  $d_i$  sono stati omessi)

#### FORMA DI JORDAN

$$\Sigma_J = \{A_J, B_J, C_J, D_J\} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_J x(t) + B_J u(t) \\ y(t) = C_J x(t) + D_J u(t) \end{cases}$$

dove la matrice  $A_J$  è di Jordan. Per questa realizzazione, la funzione di trasferimento è scrivibile come

$$H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s) \quad \text{dove} \quad H_i(s) = \sum_{j=1}^{q_i} \frac{\alpha_j}{(s - \lambda_i)^j}$$

e valgono le seguenti proprietà (spiegate in dettaglio più avanti):

**raggiungibilità** totale se e solo se  $\forall i, b_n^i \neq 0$

**osservabilità** totale se e solo se  $\forall i, c_1^i \neq 0$

**irriducibilità** di  $H(s)$  se  $\alpha_n \neq 0$

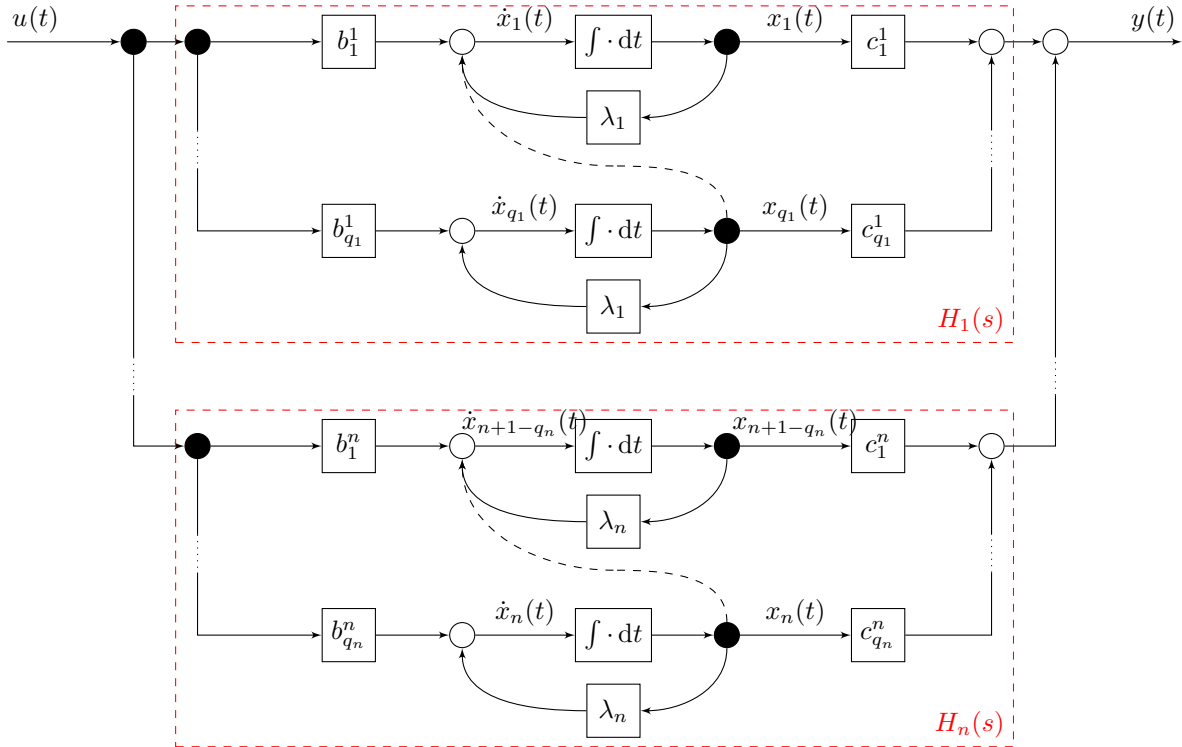


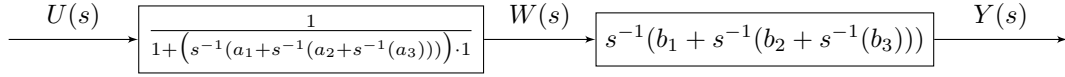
Figura 3.2: Diagramma a blocchi di un sistema SISO in forma di Jordan (per maggiore chiarezza, i fattori  $d_i$  sono stati omessi)

### 3.2.2 Forma di controllo canonica

Dato un *sistema SISO* con funzione di trasferimento  $H(s)$ , possiamo riscrivere la sua equazione in una forma più esplicita, per poi passare agli schemi a blocchi. Per esempio, data

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \xrightarrow{\text{riscrittura}} H(s) = \frac{s^{-3}}{s^{-3}} H(s) = \frac{b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_3 s^{-3}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3}}$$

disegniamo lo schema a blocchi del sistema che rappresenta come formato da un blocco di feedback con funzione



$a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3}$  e uno di feedforward con funzione  $b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_3 s^{-3}$ , entrambe rappresentabili tramite serie di blocchi integratori in frequenza con coefficienti tra essi:

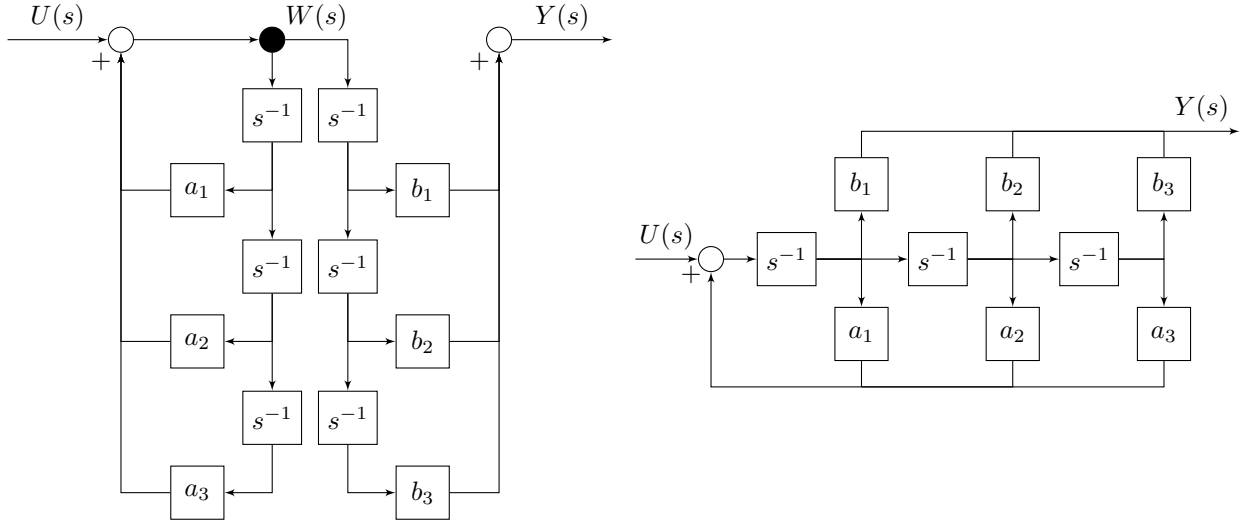


Figura 3.3: A sinistra il diagramma a blocchi della realizzazione in Laplace del sistema, a destra una rappresentazione equivalente più compatta, senza esplicitare il segnale  $W(s)$ .

In generale, per un qualsiasi sistema SISO nella forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \quad \text{con} \quad H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

possiamo descrivere lo stato con

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} y(t) \\ \frac{d}{dt} \dot{y}(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

e definire la **forma di controllo** del sistema, in equazione matriciale, come il sistema equivalente

## FORMA DI CONTROLLO CANONICA

$$\Sigma_C = \{A_C, B_C, C_C, D_C\} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_C x(t) + B_C u(t) \\ y(t) = C_C x(t) + D_C u(t) \end{cases}$$

dove le matrici sono definite

$$A_C \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_C \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_C \doteq [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \dots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})] \quad D_C \doteq b_n$$

e dove il polinomio caratteristico è

$$P_{A_C}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (\text{se } a_n \neq 1 \text{ usiamo } a_i \leftarrow a_i/a_n)$$

Questa forma risulta essere estremamente utile per fornire una realizzazione ad una generica funzione di trasferimento  $H(s)$ , in quanto a partire da questa è possibile estrarre facilmente i coefficienti  $a_i$  e  $b_i$ . Oltre a questa funzione, la forma di controllo canonica tornerà utile nella fase di sintesi, in quanto sarà possibile retroazionare sullo stato aggiungendo dei semplici coefficienti  $k_i$  ai coefficienti  $a_i$  (giuro che poi ti spiego tutto).

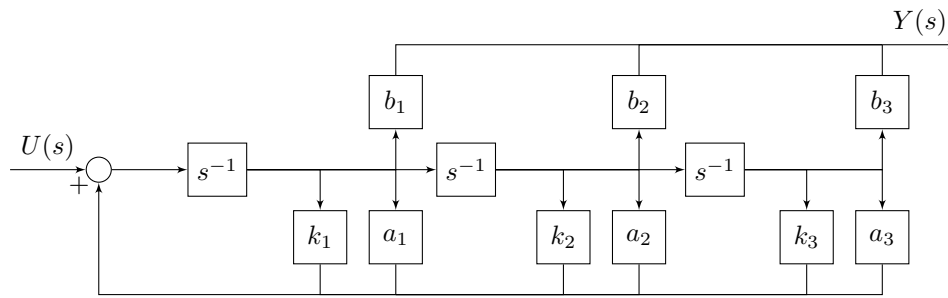


Figura 3.4: Rispetto al diagramma sopra, notiamo i nuovi blocchi  $k_i$  di fianco ai soliti coefficienti  $a_i$ .

### 3.2.3 Forma di osservazione canonica

Analogamente, da un sistema SISO otteniamo un sistema equivalente

## FORMA DI OSSERVAZIONE CANONICA

$$\Sigma_O = \{A_O, B_O, C_O, D_O\} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_O x(t) + B_O u(t) \\ y(t) = C_O x(t) + D_O u(t) \end{cases}$$

dove le matrici sono definite

$$A_O \doteq \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_O \doteq \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_O \doteq [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad D_O \doteq b_n$$

e dove il polinomio caratteristico è

$$P_{A_O}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (\text{se } a_n \neq 1 \text{ usiamo } a_i \leftarrow a_i/a_n)$$

Anche in questo caso, questa forma risulta essere estremamente utile per fornire una realizzazione ad una generica funzione di trasferimento  $H(s)$ . Nuovamente, la forma di controllo canonica tornerà utile nella fase di sintesi, in quanto sarà possibile osservare lo stato aggiungendo dei semplici coefficienti  $l_i$  ai coefficienti  $a_i$ .





## 4 | Analisi dei sistemi

Spesso i sistemi sono costruiti come delle scatole chiuse, nel senso che note le caratteristiche interne  $A, B, C, D$ , dato un certo input essi restituiscono un certo output, ma non è possibile avere accesso direttamente allo stato del sistema. Con le seguenti proprietà strutturali del sistema vedremo come si può interagire con il suo stato, stimandone lo stato iniziale, studiandone l'uscita e aggiustandone opportunamente l'ingresso.

### 4.1 Raggiungibilità

Vogliamo capire se, dato un sistema  $\Sigma$  nel suo stato iniziale, è possibile raggiungere un certo stato nel futuro dato uno specifico ingresso  $u(t)$ .

#### Stato Raggiungibile

Uno stato  $x(t)$  del sistema continuo

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{con } x_0 = x(t_0) = 0 \text{ poiché in presenza di ingresso,}$$

si dice raggiungibile al tempo  $t > t_0$ , con  $t_0 = 0$ , se esiste una funzione di ingresso  $u(t)$  tale che

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Introduciamo l'operatore lineare  $R_t$  nello spazio degli ingressi  $\mathcal{U}$

$$R_t : \mathcal{U}([0, t]) \rightarrow \mathcal{X}$$

$$u(t) \mapsto x = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

la cui immagine è composta dagli stati raggiungibili del sistema e forma un sottospazio dello spazio degli stati detto *sottospazio raggiungibile al tempo  $t$* ,

$$\mathcal{X}_t^{\mathcal{R}} = \text{Im}(R_t).$$

Lavorare con l'immagine di un operatore integrale non è facile, quindi spostiamo il problema sull'*operatore aggiunto* di  $R_t$ .

#### Operatore aggiunto

Dati due spazi  $V$  e  $W$  con prodotto interno rispettivamente

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

e un operatore  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ ,  $v \mapsto w = Av$ , definiamo  $\mathcal{A}^* : W \rightarrow V$ ,  $w \mapsto v = \mathcal{A}^*w$  l'**operatore aggiunto** di  $\mathcal{A}$  come l'unico operatore, se esiste, per cui  $\langle \mathcal{A}v, w \rangle_W = \langle v, \mathcal{A}^*w \rangle_V$  (in pratica si può vedere  $\mathcal{A}^*$  come l'operatore inverso di  $\mathcal{A}$  e rappresenta una versione spazio-infinita della matrice trasposta coniugata).

Per gli spazi  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $W = \mathbb{R}^m$  l'operatore  $\mathcal{A}$  con matrice associata  $A$  ha operatore aggiunto  $\mathcal{A}^*$  con matrice associata  $A^\top$  (nel caso del campo  $\mathbb{C}$  invece si ha  $A^*$ ).

Nel nostro caso, l'operatore aggiunto di  $R_t$  è

$$R_t^* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}([0, t])$$

$$x \mapsto u(\tau) = B^\top e^{A^\top(t-\tau)} x \quad \text{con } \tau \in [0, t]$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton, raggiunto l'istante  $r \leq n$  la catena di sottospazi  $\mathcal{X}_t^{\mathcal{R}}$  continuerà ad avere la stessa immagine, ovvero

$$\mathcal{X}_1^{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{X}_2^{\mathcal{R}} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}_i^{\mathcal{R}} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}_r^{\mathcal{R}} = \mathcal{X}_n^{\mathcal{R}} = \mathcal{X}_{n+1}^{\mathcal{R}} = \dots \doteq \mathcal{X}^{\mathcal{R}}$$

e quindi possiamo semplicemente considerare l'immagine del **sottospazio di raggiungibilità**  $\mathcal{X}^{\mathcal{R}}$ . Sfruttiamo quindi il fatto che  $\text{Im}(R_t) = \ker(R_t^*)$  per ottenere la matrice di raggiungibilità al tempo  $t$  e successivamente, con il teorema di Cayley-Hamilton, la **matrice di raggiungibilità**  $\mathcal{R}$ :

$$x \in \ker(R_t^*)$$

$$0 = B^\top e^{A^\top(t-\tau)} x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^i}{i!} B^\top (A^\top)^i x \quad \text{con } \tau \in [0, t]$$

$$0 = B^\top (A^\top)^i x \quad \text{con } i \in [0, +\infty) \text{ equazioni}$$

$$0 \stackrel{\text{CH-th}}{=} B^\top (A^\top)^i x \quad \text{con } i \in [0, n-1] \text{ equazioni}$$

$$0 = \begin{bmatrix} B^\top \\ B^\top A^\top \\ \vdots \\ B^\top (A^\top)^{n-1} \end{bmatrix} x$$

$$x \in \ker [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B]^\top = \ker(\mathcal{R}^\top)$$

#### MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ

$$\mathcal{R} \doteq [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B]$$

$$\text{con } n = \dim \mathcal{X}$$

Diciamo che un sistema MIMO è raggiungibile (in ogni suo stato), dato un qualsiasi ingresso  $u(t)$ , se la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}$  ha rango pieno; in generale, l'**indice di raggiungibilità**  $\text{rank}(\mathcal{R})$  del sistema ci dice quante componenti dello stato sono raggiungibili quando il sistema non è pienamente raggiungibile. Se un sistema  $\Sigma = \{A, B, -, -\}$  è raggiungibile si dice che la coppia  $(A, B)$  è raggiungibile.

#### Raggiungibilità di un sistema equivalente

Dato un sistema  $\Sigma$  e un suo sistema equivalente  $\bar{\Sigma}$ , entrambi sono raggiungibili o nessuno dei due lo è:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}} &= [\bar{B} \ \bar{A}\bar{B} \ \dots \ \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \\ &= [T^{-1}B \ T^{-1}ATT^{-1}B \ \dots \ T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B] \\ &= T^{-1}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \\ &= T^{-1}\mathcal{R} \end{aligned}$$

Nel caso di sistemi Single-Input la matrice di cambiamento di base è  $T = \mathcal{R}\bar{\mathcal{R}}^{-1}$

#### Forma standard di raggiungibilità

Dato un sistema  $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ , esiste un sistema equivalente  $\bar{\Sigma} = \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, -\}$  con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [\bar{C}_1 \ \bar{C}_2]$$

detta **forma standard di raggiungibilità** tale che

- $\bar{\Sigma}_{\mathcal{R}} = \{\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1, -\}$  è un sotto-sistema di  $\Sigma$  raggiungibile e descrive completamente la dinamica del sistema  $\Sigma$  quando  $\bar{x}(0) \in \bar{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}$ , che riscriviamo come  $\bar{x}_{\mathcal{R}}(0)$ .
- $\bar{\Sigma}_{n\mathcal{R}} = \{\bar{A}_{22}, 0, \bar{C}_2, -\}$  è un sotto-sistema di  $\Sigma$  non raggiungibile e la sua dinamica dipende solo da  $\bar{x}_{n\mathcal{R}}(0)$

dove  $\bar{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} \bar{x}_{\mathcal{R}} \\ \bar{x}_{n\mathcal{R}} \end{bmatrix}$  è lo stato del sistema equivalente e  $\bar{x}_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^{d_{\mathcal{R}}}$  e  $\bar{x}_{n\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^{n-d_{\mathcal{R}}}$  gli stati dei relativi sotto-sistemi, con  $d_{\mathcal{R}} = \dim(\mathcal{X}^{\mathcal{R}})$  è la dimensione dello spazio raggiungibile.

La matrice  $\bar{A}_{11}$  ha dimensione  $d_{\mathcal{R}} \times d_{\mathcal{R}}$ , la matrice  $\bar{B}_1$  ha dimensione  $d_{\mathcal{R}} \times m$  mentre la matrice  $\bar{C}_1$  ha dimensione  $p \times d_{\mathcal{R}}$ . La matrice di trasformazione  $T$  è ottenuta mediante

$$T = [\mathcal{X}^{\mathcal{R}} \ w_1 \ \dots \ w_{n-d_{\mathcal{R}}}]$$

dove  $w_i$  sono vettori linearmente indipendenti rispetto alla base di  $\mathcal{X}^{\mathcal{R}} = \text{Im}(\mathcal{R})$ , ovvero  $\text{span}\{\text{Im}(\mathcal{R})\}$ .

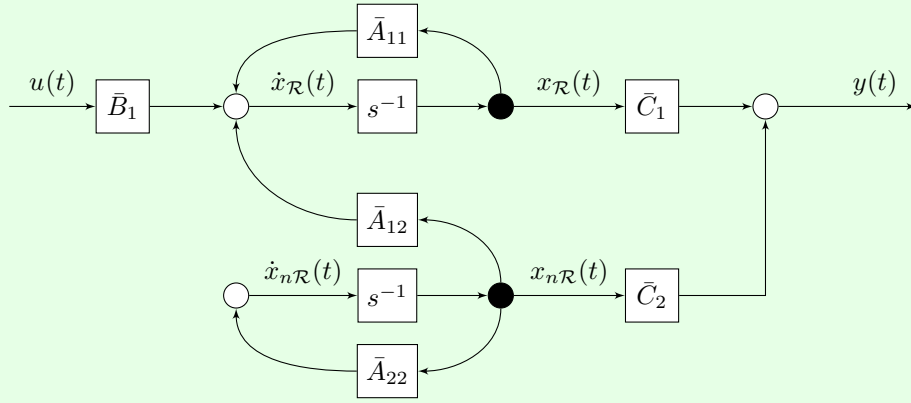


Figura 4.1: Sistema scomposto nel suo sotto-sistema raggiungibile  $\bar{\Sigma}_{\mathcal{R}}$  e non raggiungibile  $\bar{\Sigma}_{n\mathcal{R}}$

Ancora una volta notiamo la convenienza di diagonalizzare/jordanizzare il sistema, in quanto la matrice  $\bar{A}$  ottenuta è triangolare superiore e quindi spezzabile a blocchi come richiesto dalla forma standard. Inoltre, il sistema  $\bar{\Sigma}_{\mathcal{R}}$  ha la stessa funzione di trasferimento di  $\Sigma$  e di  $\bar{\Sigma}$ , infatti

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \bar{H}(s) = \bar{C}(s\mathbb{I} - \bar{A})^{-1}\bar{B} \\
 &= [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2] \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ 0 & s\mathbb{I} - \bar{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2] \begin{bmatrix} (s\mathbb{I} - \bar{A}_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (s\mathbb{I} - \bar{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \bar{C}_1(s\mathbb{I} - \bar{A}_{11})^{-1}\bar{B}_1 \\
 &= H_{\mathcal{R}}(s)
 \end{aligned}$$

e quindi vale l'equivalenza algebrica  $\Sigma \equiv \bar{\Sigma} \equiv \bar{\Sigma}_{\mathcal{R}}$ .

#### MATRICI CICLICHE, SOTTOSPAZIO DI KRYLOV E RELAZIONE CON $A_C$

##### Criterio PBH (per la raggiungibilità)

Dato un sistema MIMO  $\Sigma = \{A, B, -, -\}$  di dimensione  $n$ , esso è raggiungibile se e solo se la matrice PBH (Popov, Belevitch, Hautus)

$$PBH(s) = [A - s\mathbb{I} \quad B]$$

ha rango pieno  $\forall s \in \mathbb{C}$ . Possiamo dire che

- per qualsiasi  $s \in \mathbb{C}$  tale che  $s \notin \Lambda(A)$ ,  $PBH(s)$  ha rango massimo;
- in corrispondenza degli autovalori che appartengono ad  $\bar{\Sigma}_{n\mathcal{R}}$ ,  $PBH(s)$  non ha rango massimo;

quindi per verificare la raggiungibilità di  $(A, B)$  basta dimostrare che applicando ogni autovalore di  $A$  in  $PBH(s)$  il suo rango è sempre massimo; se al contrario un certo autovalore dovesse produrre un rango di  $PBH(s)$  non massimo, tale autovalore sarebbe tra quelli del sotto-sistema non raggiungibile  $\bar{\Sigma}_{n\mathcal{R}}$ , dimostrando che il sistema  $\Sigma$  non è (completamente) raggiungibile.

## 4.2 Controllabilità

Vogliamo capire se, dato un sistema  $\Sigma$  in uno stato qualsiasi, è possibile ritornare allo stato iniziale dato uno specifico ingresso  $u(t)$ . Nei sistemi LTI raggiungibilità e controllabilità si implicano a vicenda, quindi per  $\Sigma$ , si avrà che  $\mathcal{R} = \mathcal{C}$ ; quando parliamo di controllore usiamo sempre la matrice di raggiungibilità, essendo essa identica alla matrice di controllabilità.

### 4.3 Osservabilità

Vogliamo capire se, dato un sistema  $\Sigma$ , è possibile conoscerne lo stato corrente a partire solamente dall'ingresso e dall'uscita. Algebricamente, l'osservabilità è *duale* rispetto alla raggiungibilità, e questo permette di risparmiare spesso diversi passaggi e dimostrazioni.

#### Stato osservabile

Uno stato  $x(t)$  del sistema continuo

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{con } x_0 \text{ non noto}$$

si dice osservabile nell'intervallo  $[0, \tau]$  se conoscere una qualsiasi sequenza di input  $u(t)$  e output  $y(t)$ , con  $t \in [0, \tau]$ , è sufficiente per determinare univocamente qualsiasi stato iniziale  $x_0$ .

Utilizziamo l'equazione di uscita totale

$$y(t) = x_\ell(t) + x_f(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

dove  $t_0$  è l'istante iniziale del sistema e  $x_0 = x(t_0)$  è lo stato iniziale, e concentriamoci sul caso  $t_0 = 0$  (possiamo comunque generalizzare tutto il procedimento a  $t_0$  qualsiasi grazie alla proprietà di tempo invarianza). Se il sistema è osservabile allora riusciamo a distinguere due stati iniziali *distinti*  $x_1(0)$  e  $x_2(0)$ , quindi calcoliamo la differenza delle due equazioni di uscita a loro legate

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x_1(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \\ y(t) &= Ce^{At}x_2(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = Ce^{At}(x_1(0) - x_2(0))$$

e definiamo l'operatore lineare nello spazio degli stati  $\mathcal{X}$

$$\begin{aligned} O_t : \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{C}([0, t]) \\ x &\mapsto Ce^{A\tau}x \quad \text{con } \tau \in [0, t] \end{aligned}$$

Per definizione, il sistema non è pienamente osservabile quando non riusciamo a distinguere  $x_1(0)$  e  $x_2(0)$ , ovvero quando otteniamo la stessa  $y(t)$  da  $x_1(0) \neq x_2(0)$ . Questo accade quando il nucleo di  $O_t$  contiene altri vettori oltre a quello nullo: tali vettori sono gli stati non osservabili del sistema e formano un sottospazio dello spazio degli stati detto *sottospazio non osservabile al tempo  $t$* , cioè

$$\mathcal{X}_t^{n\mathcal{O}} = \ker(O_t).$$

Per come abbiamo definito il sottospazio non osservabile al tempo  $t$ , esso conterrà tutti i vettori per i quali non riusciamo a distinguere l'evoluzione dall'istante iniziale, quindi si ha che  $\mathcal{X}_t^{n\mathcal{O}} \supseteq \mathcal{X}_{t+1}^{n\mathcal{O}}$  e per il teorema di Cayley-Hamilton, raggiunto l'istante  $r \leq n$  la catena di sottospazi  $\mathcal{X}_t^{n\mathcal{O}}$  continuerà ad avere lo stesso nucleo, ovvero

$$\mathcal{X}_1^{n\mathcal{O}} \supseteq \mathcal{X}_2^{n\mathcal{O}} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{X}_i^{n\mathcal{O}} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{X}_r^{n\mathcal{O}} = \mathcal{X}_n^{n\mathcal{O}} = \mathcal{X}_{n+1}^{n\mathcal{O}} = \dots \doteq \mathcal{X}^{n\mathcal{O}}$$

e quindi possiamo semplicemente considerare l'immagine del **sottospazio di osservabilità**  $\mathcal{X}^{n\mathcal{O}}$ .

$$x \in \ker(O_t)$$

$$0 = Ce^{A\tau}x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} CA^i x \quad \text{con } \tau \in [0, t]$$

$$0 = CA^i x \quad \text{con } i \in [0, +\infty) \text{ equazioni}$$

$$0 \stackrel{\text{CH-th}}{=} CA^i x \quad \text{con } i \in [0, n-1] \text{ equazioni}$$

$$0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x$$

$$x \in \ker(\mathcal{O})$$

#### MATRICE DI OSSERVABILITÀ

$$\mathcal{O} \doteq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } n = \dim \mathcal{X}$$

Diciamo che un sistema MIMO è osservabile (per ogni suo stato), dato un qualsiasi ingresso  $u(t)$ , se la matrice di osservabilità  $\mathcal{O}$  ha rango pieno; in generale, l'**indice di osservabilità**  $\text{rank}(\mathcal{O})$  del sistema ci dice quante componenti dello stato sono osservabili quando il sistema non è pienamente osservabile. Se un sistema  $\Sigma = \{A, -, C, -\}$  è osservabile si dice che la coppia  $(A, C)$  è osservabile.

Notiamo inoltre che derivando  $n - 1$  volte  $y(t) = Cx(t)$  e impostando  $t = 0$ , imponendo quindi al sistema di essere “appena partito”, otteniamo le equazioni

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) \\ \dot{y}(t) &= C\dot{x}(t) = CAx(t) \\ \ddot{y}(t) &= C\ddot{x}(t) = CA\dot{x}(t) = CA^2x(t) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= CA^{(n-1)}x(t) \end{aligned} \implies \underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}}_{\text{matrice } Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{matrice } \mathcal{O}} x(0) \quad \text{con } x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

e possiamo dunque ottenere lo stato iniziale  $x(0) = \mathcal{O}^{-1}Y(0)$ , a partire dalla matrice delle derivate dell'uscita. In generale possiamo sapere lo stato del sistema a tempo  $t$  se la matrice  $\mathcal{O}$  è invertibile, cioè se ha rango pieno.

#### Osservabilità di un sistema equivalente

Dato un sistema  $\Sigma$  e un suo sistema equivalente  $\hat{\Sigma}$ , entrambi sono osservabili o nessuno dei due lo è:

$$\hat{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CTT^{-1}A^{n-1}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T = \mathcal{O}T$$

Nel caso di sistemi Single-Input la matrice di cambiamento di base è  $T = (\hat{\mathcal{O}}^{-1}\mathcal{O})^{-1}$

#### Forma standard di osservabilità

Dato un sistema  $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ , esiste un sistema equivalente  $\hat{\Sigma} = \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, -\}$  con

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [\hat{C}_1 \quad 0]$$

detta **forma standard di osservabilità** tale che

- $\hat{\Sigma}_{\mathcal{O}} = \{\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, -\}$  è un sotto-sistema di  $\Sigma$  osservabile e descrive completamente la dinamica del sistema  $\Sigma$  quando  $\hat{x}(0) \in \hat{\mathcal{X}}^{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{X}} \setminus \hat{\mathcal{X}}^{n_{\mathcal{O}}}$
- $\hat{\Sigma}_{n_{\mathcal{O}}} = \{\hat{A}_{22}, 0, \hat{C}_2, -\}$  è un sotto-sistema di  $\Sigma$  non osservabile e la sua dinamica non influenza l'uscita

dove  $\hat{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathcal{O}} \\ \hat{x}_{n_{\mathcal{O}}} \end{bmatrix}$  è lo stato del sistema equivalente e  $\hat{x}_{\mathcal{O}} \in \mathbb{R}^{d_{\mathcal{O}}}$  e  $\hat{x}_{n_{\mathcal{O}}} \in \mathbb{R}^{n-d_{\mathcal{O}}}$  gli stati dei relativi sotto-sistemi, con  $d_{\mathcal{O}} = n - \dim(\mathcal{X}^{n_{\mathcal{O}}})$  è la dimensione dello spazio osservabile.

La matrice  $\hat{A}_{11}$  ha dimensione  $d_{\mathcal{O}} \times d_{\mathcal{O}}$ , la matrice  $\hat{B}_1$  ha dimensione  $d_{\mathcal{O}} \times m$  mentre la matrice  $\hat{C}_1$  ha dimensione  $p \times d_{\mathcal{O}}$ . La matrice di trasformazione  $T$  è ottenuta mediante

$$T = [w_1 \dots w_{d_{\mathcal{O}}} \quad \mathcal{X}^{n_{\mathcal{O}}}]$$

dove  $w_i$  sono vettori linearmente indipendenti rispetto alla base di  $\mathcal{X}^{n_{\mathcal{O}}} = \ker(\mathcal{O})$ , ovvero  $\text{span}\{\ker(\mathcal{O})\}$ .

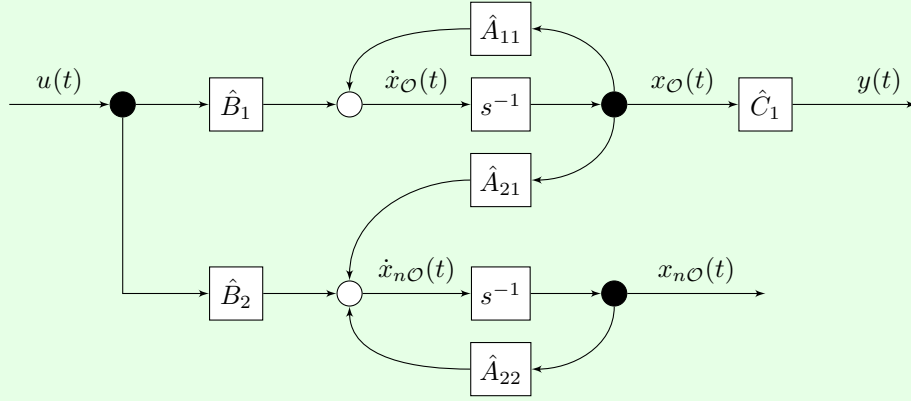


Figura 4.2: Sistema scomposto nel suo sotto-sistema osservabile  $\hat{\Sigma}_{\mathcal{O}}$  e non osservabile  $\hat{\Sigma}_{n\mathcal{O}}$

Ancora una volta notiamo la convenienza di diagonalizzare/jordanizzare il sistema, in quanto la matrice  $\hat{A}$  ottenuta è triangolare inferiore e quindi spezzabile a blocchi come richiesto dalla forma standard. Inoltre, il sistema  $\hat{\Sigma}_{\mathcal{O}}$  ha la stessa funzione di trasferimento di  $\Sigma$  e di  $\hat{\Sigma}$ , infatti

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \hat{H}(s) = \hat{C}(s\mathbb{I} - \hat{A})^{-1}\hat{B} \\
 &= [\hat{C}_1 \ 0] \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \hat{A}_{11} & 0 \\ -\hat{A}_{21} & s\mathbb{I} - \hat{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \\
 &= [\hat{C}_1 \ 0] \begin{bmatrix} (s\mathbb{I} - \hat{A}_{11})^{-1} & 0 \\ \star & (s\mathbb{I} - \hat{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \hat{C}_1(s\mathbb{I} - \hat{A}_{11})^{-1}\hat{B}_1 \\
 &= H_{\mathcal{O}}(s)
 \end{aligned}$$

e quindi vale l'equivalenza algebrica  $\Sigma \equiv \hat{\Sigma} \equiv \hat{\Sigma}_{\mathcal{O}}$ .

#### Criterio PBH (per l'osservabilità)

Dato un sistema MIMO  $\Sigma = \{A, B, -, -\}$  di dimensione  $n$ , esso è osservabile se e solo se la matrice PBH

$$PBH(s) = \begin{bmatrix} A - s\mathbb{I} \\ C \end{bmatrix}$$

ha rango pieno  $\forall s \in \mathbb{C}$ . Possiamo dire che

- per qualsiasi  $s \in \mathbb{C}$  tale che  $s \notin \Lambda(A)$ ,  $PBH(s)$  ha rango massimo;
- in corrispondenza degli autovalori che appartengono ad  $\hat{\Sigma}_{n\mathcal{O}}$ ,  $PBH(s)$  non ha rango massimo;

quindi per verificare l'osservabilità di  $(A, C)$  basta dimostrare che applicando ogni autovalore di  $A$  in  $PBH(s)$  il suo rango è sempre massimo; se al contrario un certo autovalore dovesse produrre un rango di  $PBH(s)$  non massimo, tale autovalore sarebbe tra quelli del sotto-sistema non osservabile  $\hat{\Sigma}_{n\mathcal{O}}$ , dimostrando che il sistema  $\Sigma$  non è (completamente) osservabile.

## 4.4 Proprietà di dualità

#### Dualità tra $\mathcal{R}$ e $\mathcal{O}$

Osservabilità e raggiungibilità sono proprietà duali, infatti dato un sistema  $\Sigma = \{A, B, C, D\}$  e il suo duale  $\Sigma_d = \{A, {}^\top C, {}^\top B, {}^\top D\}$  si ha:

- $\mathcal{R}_d = \mathcal{O}^\top$  e  $\mathcal{O}_d = \mathcal{R}^\top$
- $\Sigma$  è osservabile (oppure raggiungibile) se e solo se  $\Sigma_d$  è raggiungibile (oppure osservabile).

**Composizione di realizzazioni**

Date le funzioni di trasferimento  $H_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$  e  $H_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$  poste già **in forma minima**, la loro composizione  $H_1(s)H_2(s)$  sarà

- raggiungibile se non avvengono cancellazioni tra  $N_1(s)$  ed  $D_2(s)$ , cioè in direzione  $\searrow$ ;
- osservabile se non avvengono cancellazioni tra  $D_1(s)$  ed  $N_2(s)$ , cioè in direzione  $\nearrow$ .





# 5 | Sintesi in retroazione

## 5.1 Retroazione sullo stato

Con il concetto di raggiungibilità si vuole introdurre un elemento esterno nel sistema, così da permettere, tramite una retroazione di tale elemento sullo stato, di ottenere delle specifiche caratteristiche, in particolare:

**Stabilizzazione (o controllo):** se si vuole portare il sistema in uno stato di equilibrio (di solito lo stato iniziale), modificando l'input nella forma  $u(t) = Kx(t) + v(t)$  in modo tale da rendere stabile il sistema;

**Tracking:** se si vuole seguire una traiettoria assegnata a priori nel diagramma degli stati;

**Reiezione dei disturbi:** se si vuole portare asintoticamente a zero l'effetto di segnali esterni al sistema che non sono sotto il controllo del progettista.

Ci concentriamo sullo stabilizzatore e da ora assumeremo che *lo stato sia noto privo di errori* e che  $u(t)$  possa assumere qualunque valore in  $\mathbb{R}^m$ .

### Retroattore sullo stato

Dato un sistema SISO  $\Sigma = \{A, B, C, -\}$  di dimensione  $n$ , raggiungibile e con **stato noto**, tale che

$$P_A(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{con } a_n = 1$$

lo possiamo controllare (o **stabilizzare**) con una retroazione  $K$  impostata tramite  $n$  autovalori arbitrari  $\bar{\lambda}_i$  nel polinomio caratteristico *desiderato*

$$d(s) = \prod_{i=1}^n (s - \bar{\lambda}_i) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0 \quad \text{con } d_n = 1$$

Tale matrice  $K$  ha forma

$$K = (a - d)\mathbb{A}^{-1}\mathcal{R}^{-1}$$

dove

- $d = [d_{n-1} \dots d_0]$  è il vettore dei coefficienti desiderati per il sistema retroazionato
- $a = [a_{n-1} \dots a_0]$  è il vettore dei coefficienti del sistema originale

$$\bullet \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{è la matrice di Toeplitz composta dai coefficienti del sistema}$$

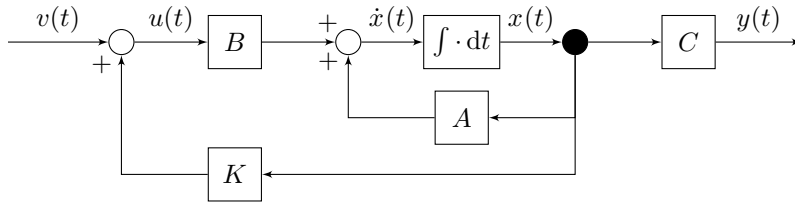
Il sistema così controllato ha forma

$$\bar{\Sigma} = \{A + BK, B, C, -\}.$$

### Formula di Ackermann (controllore)

Dato un sistema SISO  $\Sigma = \{A, B, -, -\}$  completamente raggiungibile, cioè tale per cui  $\text{rank}(\mathcal{R}) = n$ , per stabilizzarlo sul polinomio desiderato  $d(s)$  la matrice  $K$  da utilizzare è calcolabile facilmente tramite

$$K = -e_n^\top \cdot \mathcal{R}^{-1} \cdot d(A).$$

Figura 5.1: Sistema con retroazione di stato  $\bar{\Sigma}$ 

## 5.2 Stima dello stato

Con il concetto di osservabilità si vuole creare un sistema identico a quello originale, sul quale è possibile avere uno stato  $\hat{x}(t)$  inizialmente posto arbitrariamente a  $\hat{x}_0$  che si avvicini sempre di più a  $x(t)$  del sistema originale, con stato iniziale  $x_0$  ignoto. Tale sistema stimatore è detto **stimatore di Luenberger**.

### Stimatore di stato

Dato un sistema SISO  $\Sigma = \{A, B, C, -\}$  di dimensione  $n$ , osservabile e con **stato ignoto**, tale che

$$P_A(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{con } a_n = 1$$

lo possiamo osservare con un osservatore parallelo  $\hat{\Sigma}$  identico a  $\Sigma$ , con  $n$  autovalori arbitrari  $\hat{\lambda}_i$  e polinomio caratteristico

$$d(s) = \prod_{i=1}^n (s - \hat{\lambda}_i) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0 \quad \text{con } d_n = 1$$

I due sistemi in parallelo sono collegati dalla matrice  $L$  e formano il sistema totale  $\tilde{\Sigma}$ : questo ci permette di stimare lo stato di  $\Sigma$  riducendo l'errore  $\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  con un andamento dettato dai modi definiti dagli autovalori  $\hat{\lambda}_i$ .

Tale matrice  $L$  ha forma

$$L = \mathcal{O}^{-1}(\mathbb{A}^{-1})^\top (a - d)^\top$$

dove

- $d = [d_{n-1} \dots d_0]$  è il vettore dei coefficienti desiderati per il sistema stimato
- $a = [a_{n-1} \dots a_0]$  è il vettore dei coefficienti del sistema originale

$$\bullet \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{è la matrice di Toeplitz composta dai coefficienti del sistema}$$

Il sistema osservatore ha forma

$$\hat{\Sigma} = \{A + LC, [B \quad -L], \mathbb{I}, -\} \quad \text{con input } \hat{y}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

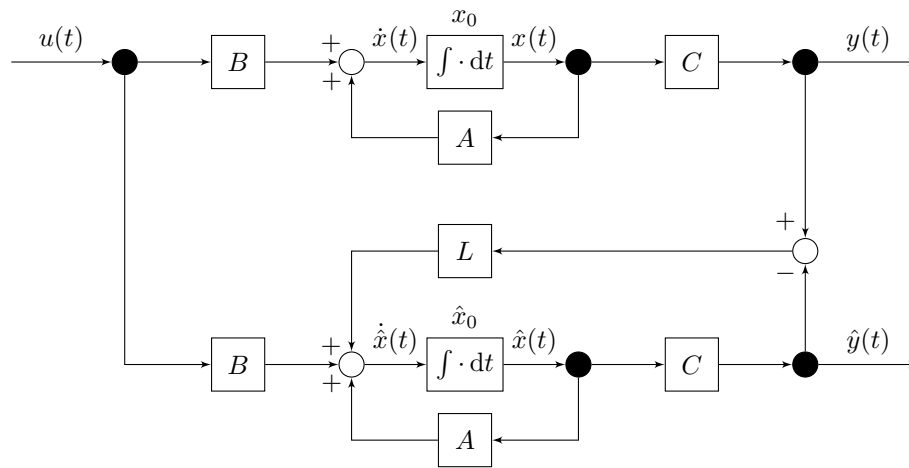
mentre il sistema totale ( $\Sigma$  e  $\hat{\Sigma}$  in catena chiusa con  $L$ ) ha forma

$$\tilde{\Sigma} = \{A + LC, 0, C, -\} \quad \text{con input } u(t) \text{ e output } \tilde{y}(t).$$

### Formula di Ackermann (osservatore)

Dato un sistema  $\Sigma = \{A, -, C, -\}$  completamente osservabile, cioè tale per cui  $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$ , per osservarlo sul polinomio desiderato  $d(s)$  la matrice  $L$  da utilizzare è calcolabile facilmente tramite

$$L = -d(A) \cdot \mathcal{O}^{-1} \cdot e_n.$$

Figura 5.2: Sistema ad anello chiuso con stimatore di stato  $\hat{\Sigma}$ 

**Osservazione:** in realtà per stabilizzare o stimare un sistema con le matrici  $K$  o  $L$  non sono necessarie le proprietà *forti* di controllabilità e osservabilità, ma le loro controparti *deboli*, ovvero **stabilizzabilità** e **rilevabilità** (detectability).

**Stabilizzabilità:** quando un sistema non è controllabile, questo si dice *stabilizzabile* se tutti i modi non controllabili sono asintoticamente stabili. Quindi,

$$\text{controllabilità} \implies \text{stabilizzabilità};$$

**Rilevabilità:** quando un sistema non è osservabile, questo si dice *rilevabile* (o *detectable*) se tutti i modi non osservabili sono asintoticamente stabili. Quindi,

$$\text{osservabilità} \implies \text{rilevabilità}.$$

Per verificare quali sono i modi non controllabili/osservabili possiamo usare i criteri  $PBH(s)$ . Quando un sistema è stabilizzabile/rilevabile, per stabilizzarne/stimarne lo stato ci basta concentrarci solamente sul sottosistema controllabile/osservabile, poiché la rimanente porzione dello stato tenderà asintoticamente a 0, e quindi, seppur non controllabile/osservabile, non influirà sulla stabilità del sistema.



## 6 | Sintesi del controllore

Quando un sistema è instabile o non si comporta nel modo in cui vogliamo possiamo cambiarne i comportamenti in base a quella che è la nostra *specific*a, aggiungendo dei *moduli* al sistema in modo da poterlo *controllare*. Per capire quando intervenire ho bisogno di conoscere lo stato del sistema istante per istante, ma dato che solitamente un sistema è una scatola chiusa non possiamo far altro se non costruire prima uno *stimatore* dello stato e poi applicare uno *stabilizzatore* sullo stato stimato, dirigendo l'effetto all'ingresso originale; abbiamo ora un sistema stabile e con stato sempre noto parallelo a quello originale. Chiamiamo il sistema originale *impianto* e il sistema parallelo stimatore-stabilizzatore *controllore*.

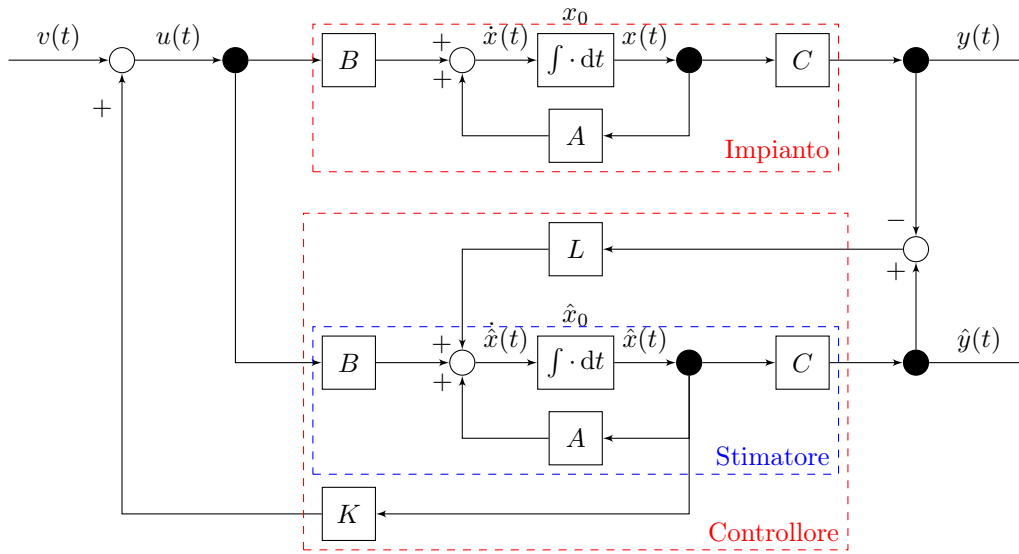


Figura 6.1: Sintesi del controllore tramite uno stimatore e uno stabilizzatore dello stato. Per semplicità, nel controllore vengono usate stime *esatte* dei parametri  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  dell'impianto.

Si può dimostrare che anche se con lo stabilizzatore stiamo agendo sull'impianto in base allo stato stimato, che può presentare errore, asintoticamente l'impianto si comporterà come da specifica, poiché l'errore andrà via via a diminuire fino ad idealmente annullarsi.

Data la natura di scatola chiusa dell'impianto, non possiamo conoscere con esattezza i parametri  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (a meno che non ci vengano forniti direttamente dal produttore dell'impianto, cosa che però di solito non avviene a causa di brevetti o segreti aziendali). Nei casi reali quindi, è necessario effettuare prima una *stima dei parametri* dell'impianto, così da ottenere le stime  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{D}$ , da usare poi nel controllore. Per semplicità di esposizione, queste stime non verranno qui utilizzate, ma è comunque dimostrabile che, se stimati entro un certo margine di errore, anche questi parametri permettono di controllare l'impianto come desiderato.

### 6.1 Sintesi in forma canonica

Calcolare le matrici  $K$  ed  $L$  direttamente è possibile, ma non consigliato, in quanto oneroso dal punto di vista computazionale. Possiamo invece portare sempre un sistema raggiungibile (osservabile) nella sua forma canonica di raggiungibilità (osservabilità) e sfruttare la loro struttura per semplificare di molto i calcoli usando

$$\mathcal{C}_c^{-1} = \mathcal{O}_c^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & & & & 0 \\ a_{n-2} & \dots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matrice di Hankel}} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

## ALLOCAZIONE AUTOVALORI PER LO STABILIZZATORE CANONICO DELLO STATO

La procedura per l'allocazione degli autovalori di un sistema SI segue i seguenti passi:

1. calcolare la matrice di controllabilità  $\mathcal{C}$  di  $(A, B)$  e verificare che il sistema sia controllabile;
2. calcolare il polinomio caratteristico  $P_A(s)$ ;
3. determinare il polinomio

$$d(s) = \prod_{i=1}^n (s - \bar{\lambda}_i) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0 \quad \text{con } d_n = 1$$

corrispondente agli autovalori desiderati  $\bar{\lambda}_i$  per il sistema in anello chiuso;

4. (*EXTRA*) scrivere il modello in forma canonica di controllo  $\Sigma_{\mathcal{C}} = \{A_{\mathcal{C}}, B_{\mathcal{C}}, C_{\mathcal{C}}, D_{\mathcal{C}}\}$ ;
5. determinare il vettore di retroazione dallo stato  $K_{\mathcal{C}}$  per il sistema  $\Sigma_{\mathcal{C}}$  usando

$$K_{\mathcal{C}} = [(a_0 - d_0) \dots (a_{n-1} - d_{n-1})] = (a - d) \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

6. determinare facilmente la matrice di controllabilità  $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^{-1}$  di  $(A_{\mathcal{C}}, B_{\mathcal{C}})$  dalla formula;
7. calcolare la matrice di cambiamento di base  $T_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^{-1}$ ;
8. ricavare la matrice di retroazione dallo stato per il sistema originario  $K = K_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{C}}^{-1}$

## ALLOCAZIONE AUTOVALORI PER LO STIMATORE CANONICO DELLO STATO

La procedura per l'allocazione degli autovalori dello stimatore per un sistema SO segue i seguenti passi:

1. calcolare la matrice di osservabilità  $\mathcal{O}$  di  $(A, C)$  e verificare che il sistema sia osservabile;
2. calcolare il polinomio caratteristico  $P_A(s)$ ;
3. determinare il polinomio

$$d(s) = \prod_{i=1}^n (s - \hat{\lambda}_i) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0 \quad \text{con } d_n = 1$$

corrispondente agli autovalori desiderati  $\hat{\lambda}_i$  per l'osservatore asintotico;

4. (*EXTRA*) scrivere il modello in forma canonica di osservazione  $\Sigma_{\mathcal{O}} = \{A_{\mathcal{O}}, B_{\mathcal{O}}, C_{\mathcal{O}}, D_{\mathcal{O}}\}$ ;
5. determinare il vettore di iniezione dell'uscita  $L_{\mathcal{O}}$  per il sistema  $\Sigma_{\mathcal{O}}$  usando

$$L_{\mathcal{O}} = [(a_0 - d_0) \dots (a_{n-1} - d_{n-1})]^{\top} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}^{\top} (a - d)^{\top}$$

6. determinare facilmente la matrice di osservabilità  $\mathcal{O}_{\mathcal{O}}^{-1}$  di  $(A_{\mathcal{O}}, C_{\mathcal{O}})$  dalla formula;
7. calcolare la matrice di cambiamento di base  $T_{\mathcal{O}} = (\mathcal{O}_{\mathcal{O}}^{-1}\mathcal{O})^{-1}$ ;
8. ricavare la matrice di iniezione dell'uscita per il sistema originario  $L = T_{\mathcal{O}}L_{\mathcal{O}}$

Dualità tra  $K$  e  $L$ 

Quando un sistema  $\Sigma$  è completamente raggiungibile e completamente osservabile, le sue forme di osservazione  $\Sigma_{\mathcal{O}}$  e controllo  $\Sigma_{\mathcal{R}}$  canoniche sono duali

$$A_{\mathcal{C}} = A_{\mathcal{O}}^{\top} \quad B_{\mathcal{C}} = C_{\mathcal{O}}^{\top} \quad C_{\mathcal{C}} = B_{\mathcal{O}}^{\top} \quad D_{\mathcal{C}} = D_{\mathcal{O}}$$

e le matrici  $K$  ed  $L$ , per lo stesso polinomio  $d(s)$  (cioè per gli stessi autovalori) sono anch'esse duali

$$K_{\mathcal{C}} = L_{\mathcal{O}}^{\top} \quad L_{\mathcal{O}} = K_{\mathcal{C}}^{\top}.$$

# 7 | Sistemi a tempo discreto

A differenza dei sistemi a tempo continuo  $t \in \mathbb{R}$ , quelli a tempo discreto  $k \in \mathbb{Z}$ , in cui ogni istante è distante dal precedente di un valore temporale  $T \in \mathbb{R}$  detto *passo*, sono estremamente intuitivi da introdurre. L'equazione dinamica di un sistema a tempo discreto è ottenuta dalla fusione dei modelli *auto-regressivo* (**Auto Regressive**)

$$v = \Sigma_{AR}(u) : \quad \sum_{i=0}^n a_i v(k-i) = u(k)$$

e a *media mobile* (**Mobile Average**)

$$v = \Sigma_{MA}(u) : \quad v(k) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j).$$

Il primo descrive un sistema in cui la somma degli ultimi  $n$  valori dell'output sia esattamente il valore dell'input al tempo  $k$ ; da qui, il nome del modello, che regredisce sull'output stesso, in quanto il nuovo valore dipende dai precedenti  $n-1$ . Il secondo sistema invece descrive l'output come la semplice media ponderata dei valori in input degli  $m$  istanti precedenti; da qui il nome, che media sulla finestra mobile dell'input. La composizione dei due sistemi come mostrato nella figura sottostante, ovvero  $y = \Sigma_{MA}(\Sigma_{AR}(u))$ , dà origine al **modello ARMA**

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j).$$

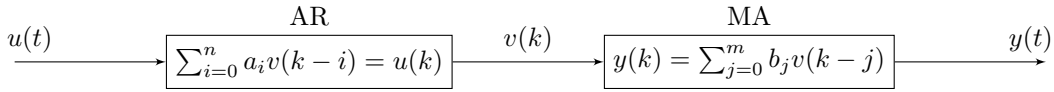


Figura 7.1: Sistema ARMA, composto da una regressione iniziale ed una successiva media.

Per raggiungere il modello a stati di Kalman procediamo a partire dal sistema AR. Con un abuso di notazione definiamo innanzitutto

$$v(k-i) \doteq z^{-i}v(k)$$

dove  $z$  rappresenta uno shift temporale. A questo punto riscriviamo AR come

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i z^{-i}v(k) &= u(k) \\ v(k) &= u(k) - a_1 z^{-1}v(k) - a_2 z^{-2}v(k) - \dots - a_n z^{-n}v(k) \\ &= u(k) - a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \dots - a_n x_1(k) \\ &= u(k) - \sum_{i=1}^n a_{n-i+1}x_i(k) \end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$x_{n-i}(k) \doteq z^{-i-1}v(k).$$

Notiamo che grazie a questa definizione

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= z^{-n}v(k+1) = z^{-n}z^1v(k) = z^{-(n-1)}v(k) = x_2(k) \\ x_2(k+1) &= \dots = x_3(k) \\ x_i(k+1) &= \dots = x_{i+1}(k) \\ x_{n-1}(k+1) &= \dots = x_n(k) \\ x_n(k+1) &= z^{-1}v(k+1) = z^{-1}z^1v(k) = v(k) \\ &= u(k) - \sum_{i=1}^n a_{n-i+1}x_i(k) \end{aligned}$$

e che quindi possiamo, raggruppando i vari  $x_i(k)$  in un singolo vettore  $x(k)$ , ottenere un risultato simile ad un altro precedentemente incontrato

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k).$$

Ora proseguiamo con il sistema MA e, utilizzando la definizione di  $v(k)$  data sopra, riscriviamo

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} v(k) \\ &= b_0 v(k) + b_1 z^{-1} v(k) + b_2 z^{-2} v(k) + \dots + b_m z^{-m} v(k) \\ &= b_0 \left( u(k) - \sum_{i=1}^n a_{n-i+1} x_i(k) \right) + b_1 x_n(k) + b_2 x_{n-1}(k) + \dots + b_m x_{n-(m-1)}(k) \\ &= b_0 u(k) - b_0 [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + [b_m \ b_{m-1} \ \dots \ b_1] \begin{bmatrix} x_{n-(m-1)}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e notiamo che lo stato  $x_{n-(m-1)}(k)$  per valori  $m > n$  avrebbe bisogno di informazioni sull'input impossibili da avere per segnali  $u(k)$  generici e che quindi, come nel caso continuo, affinché il sistema sia *proprio*, è necessario che  $m \leq n$ . Avendo posto questo vincolo, prima di proseguire assumiamo senza perdita di generalità il caso estremo  $m = n$ , in quanto per valori di  $m$  più piccoli è comunque possibile impostare i coefficienti maggiori  $b_m, b_{m-1}, \dots = 0$ . A questo punto, l'equazione si presenta nella forma

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 u(k) - b_0 [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \\ &= [b_n - b_0 a_n \ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \ \dots \ b_1 - b_0 a_1] x(k) + b_0 u(k). \end{aligned}$$

Notiamo di aver appena ottenuto la forma di controllo canonica per il caso tempo discreto, ovvero

#### FORMA DI CONTROLLO CANONICA

$$\Sigma_C = \{A_C, B_C, C_C, D_C\} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} x(k+1) = A_C x(k) + B_C u(k) \\ y(k) = C_C x(k) + D_C u(k) \end{cases}$$

dove le matrici sono definite

$$\begin{aligned} A_C &\doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} & B_C &\doteq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_C &\doteq [(b_n - b_0 a_n) \ (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) \ \dots \ (b_1 - b_0 a_1)] & D_C &\doteq b_0 \end{aligned}$$

e dove il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} P_{A_C}(z) &= z^0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ &\text{(se } a_0 \neq 1 \text{ basta usare } a_i/a_0 \text{ anziché } a_i) \end{aligned}$$

Notiamo che l'unica differenza con la sua versione continua risiede nell'ordine dei pedici dei coefficienti  $a_i$ , che sono disposti al contrario. A concludere, la forma di osservazione canonica è al solito il sistema duale della forma di controllo canonica, ovvero

#### FORMA DI OSSERVAZIONE CANONICA

$$\Sigma_O = \{A_O, B_O, C_O, D_O\} = \{A_C, {}^T C_C, {}^T B_C, {}^T D_C\}$$



## 7.1 Evoluzioni

Diamo inizialmente un'intuizione per comprendere poi i risultati che otterremo. Come sappiamo da noti teoremi del calcolo, abbiamo una stretta correlazione tra integrali (somme «continue») e sommatorie (somme «discrete»)

$$\int_{t_0}^t \longleftrightarrow \sum_{i=k_0}^{k-1}$$

e quindi i vari integrali nelle espressioni delle evoluzioni tempo-continue li ritroveremo sotto forma di sommatorie, e il mistico esponenziale di matrice si trasformerà in una più semplice e mansueta potenza di matrice, infatti discretizzando il tempo continuo con  $t = kT, k \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}$ , otteniamo

$$e^{A(t-t_0)} = e^{A(kT-k_0T)} = e^{AT(k-k_0)} = (e^{AT})^{k-k_0} \rightarrow A^{k-k_0}$$

dove  $e^{At} \rightarrow A$  è la matrice di commutazione di stato discreta e  $k_0 = t_0T$  è l'istante iniziale discreto.

Vediamo ora come queste considerazioni rientrano nell'evoluzione dei sistemi: come noto, l'evoluzione libera è ottenuta in assenza di input, ovvero

$$\begin{aligned} x_\ell(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ &= A^2x(k-1) \\ &= A^{k+1} \underbrace{x(0)}_{x_0}. \end{aligned}$$

Come per il caso continuo, aggiungiamo la possibilità di impostare l'istante iniziale  $k_0$ , e definiamo l'evoluzione libera dello stato come

$$x_\ell(k) = A^{k-k_0}x_0, \quad \text{con } x_0 = x(k_0)$$

e quella dell'uscita come

$$y_\ell(k) = Cx_\ell(k).$$

Per l'evoluzione forzata invece assumiamo che il sistema abbia input ma non condizioni iniziali. Iniziamo impostando i valori temporali man mano, quindi

$$\begin{aligned} x_f(0) &= A\cancel{x(-1)} + B\cancel{u(-1)} = 0 \\ x_f(1) &= A\cancel{x(0)} + Bu(0) = Bu(0) \\ x_f(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) \\ x_f(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(0) \end{aligned}$$

e notiamo che il pattern segue la formula

$$x_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)$$

che, aggiustata con il termine  $k_0$ , è l'evoluzione forzata dello stato

$$x_f(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)$$

mentre quella dell'uscita è

$$y_f(k) = Cx_f(k) + Du(k).$$

Al solito, le evoluzioni totali sono date dalla somma delle libere e forzate, quindi

$$\begin{aligned} x(k) &= x_\ell(k) + x_f(k) \\ y(k) &= y_\ell(k) + y_f(k). \end{aligned}$$

Come abbiamo già visto, la risposta forzata può essere ottenuta anche dalla convoluzione con la risposta impulsiva, che si ottiene impostando  $u(k) = \delta(k)$

$$\begin{aligned}x_f(0) &= A\cancel{x(-1)} + B\delta(-1) = 0 \\x_f(1) &= A\cancel{x(0)} + B\delta(0) = B \\x_f(2) &= Ax(1) + B\delta(1) = AB \\x_f(3) &= Ax(2) + B\delta(2) = A^2B.\end{aligned}$$

A questo punto basta generalizzare il risultato e inserirlo nell'equazione delle uscite per ottenere la risposta impulsiva

$$h(k) = CA^{k-1}B\delta_{-1}(k-1) + D\delta(k)$$

dove il gradino è stato aggiunto al solito per forzare la causalità. Da qui ricordiamo semplicemente che

$$y_f(k) = [h * u](k) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i).$$

Per quanto riguarda la trasformata di Laplace, esiste anche nel tempo discreto: la **trasformata Zeta**

$$F(z) \doteq \mathcal{Z}[f(k)](z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

e quindi possiamo ottenere la funzione di trasferimento analogamente al caso continuo

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\zX(z) - zx_0 &= AX(z) + BU(z) \\zX(z) - AX(z) &= zx_0 + BU(z) \\(z\mathbb{I} - A)X(z) &= zx_0 + BU(z) \\X(z) &= \underbrace{(z\mathbb{I} - A)^{-1}zx_0}_{X_\ell(z)} + \underbrace{(z\mathbb{I} - A)^{-1}BU(z)}_{X_f(z)} \\ \downarrow \\ Y(z) &= \underbrace{C(z\mathbb{I} - A)^{-1}zx_0}_{Y_\ell(z)} + \underbrace{C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + DU(z)}_{\underbrace{H(z)}_{Y_f(z)}}\end{aligned}$$

dove

$$H(z) \doteq C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + D = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}[h](z).$$

Anche qui definiamo l'evoluzione di stato con

$$\Phi(s) \doteq (z\mathbb{I} - A)^{-1} = \mathcal{Z}[\phi](z)$$

la cui antitrasformata, la matrice di transizione dello stato, è

$$\phi(t) = A^{k-k_0}$$

A concludere, raggruppiamo tutti i risultati nella tabella sottostante

## RISPOSTE DI UN SISTEMA SISO

Elenchiamo i risultati visti finora, sapendo che solitamente  $k_0 = 0$  e usando la notazione  $x_0 = x(k_0)$

<u>nel dominio temporale</u>	<u>nel dominio Zeta</u>
$\phi(k) \doteq A^{k-k_0}$	$\Phi(z) \doteq A^{k_0}(z\mathbb{I} - A)^{-1}$
$h(k) \doteq CA^{k-1}B\delta_{-1}(k-1) + D\delta(k)$	$H(z) \doteq C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + D$
$x_\ell(k) = \phi(k)x_0$	$X_\ell(z) = \Phi(z)x_0$
$x_f(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i)$	$X_f(z) = (z\mathbb{I} - A)^{-1}BU(z)$
$x(k) = x_\ell(k) + x_f(k)$	$X(z) = X_\ell(z) + X_f(z)$
$y_\ell(k) = Cx_\ell(k)$	$Y_\ell(z) = CX_\ell(z)$
$y_f(k) = Cx_f(k) + Du(k) \quad [= [h * u](k)]$	$Y_f(z) = CX_f(z) + DU(z) \quad [= H(z)U(z)]$
$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k)$	$Y(z) = Y_\ell(z) + Y_f(z)$

## 7.2 Modi naturali

Come abbiamo visto per l'esponenziale di matrice, anche i modi naturali subiscono la stessa trasformazione:

$$m_{i,j}(k) = \lambda_i^{k-j} \binom{k}{j}$$

e questi sono

- convergenti  $\iff |\lambda_i| < 1$ ;
- limitati  $\iff |\lambda_i| \leq 1$  oppure  $|\lambda_i| \leq 1$  con  $j = 0$ ;
- divergenti altrimenti.



## 8 | Stabilità alla Lyapunov

Fino ad ora abbiamo visto solamente sistemi dinamici lineari tempo invarianti (tempo continuo), la cui equazione di stato era nella forma

$$\Sigma : \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

ma questi sono solamente un caso particolare dei sistemi dinamici tempo invarianti, che appaiono in forma generale come

$$\Sigma : \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , che sono a loro volta un caso particolare dei sistemi dinamici, la cui forma è

$$\Sigma : \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

Studiare le risposte e le proprietà degli ultimi due è generalmente un problema difficile, spesso attaccabile solo numericamente. Per il secondo caso però, possiamo studiare in particolare il caso **autonomo**, ovvero quando l'evoluzione dipende solamente dallo stato, che quindi avranno forma

$$\Sigma : \dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Di questi sistemi (quindi anche per i sistemi lineari) possiamo studiare con una certa facilità la stabilità dei punti di equilibrio, ovvero

### Punto di equilibrio

Dato un sistema  $\Sigma : \dot{x}(t) = f(x(t))$ , lo stato  $x_e$  è un *punto (o stato) di equilibrio* per  $\Sigma$  se  $f(x_e) = 0$

Secondo i **criteri di Lyapunov**, abbiamo due possibilità di studiare la stabilità nei punti di equilibrio:

1. linearizzando la dinamica del sistema nel punto di equilibrio;
2. trovare una funzione simile a  $f(x(t))$  ma con proprietà semplici da studiare.

Il primo metodo è più semplice e viene detto **criterio ridotto**, mentre il secondo è più complesso e viene detto **criterio diretto**; quando il primo non riesce a dare un risultato «sicuro», è necessario usare il secondo.

### 8.1 Criterio ridotto di Lyapunov

Il sistema  $\Sigma : \dot{x}(t) = f(x(t))$  è stabile nei suoi punti di equilibrio  $x_e$  se la sua versione linearizzata in  $x_e$  è stabile. Per linearizzare  $\Sigma$  usiamo la serie di Taylor centrata in  $x_e$ , ovvero

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \underbrace{f(x_e)}_{0 \text{ per def.}} (x(t) - x_e)^0 + \frac{1}{1!} J(f(x_e))(x(t) - x_e)^1 + \underbrace{\frac{1}{2!} J(J(f(x_e)))(x(t) - x_e)^2 + \dots}_{\text{ignorabile se } f(x_e) \text{ contiene al massimo quadrati}} \\ &\approx J(f(x_e)) \end{aligned}$$

dove  $J(f(x))$  è la matrice Jacobiana di  $f(x)$ , cioè

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

A questo punto studiamo la stabilità del sistema linearizzato  $\Sigma' : \dot{x}(t) = J(f(x_e))(x(t) - x_e)$  attorno al punto  $x_e$ : per piccole perturbazioni  $x_\delta(t)$  attorno a  $x_e$ , la traiettoria sarà

$$x(t) = x_e + x_\delta(t)$$

e la sua derivata sarà  $\dot{x}(t) = \dot{x}_\delta(t)$ . A questo punto l'equazione di stato della perturbazione diventa

$$\dot{x}_\delta(t) = \dot{x}(t) = J(f(x_e))(x(t) - x_e) = J(f(x_e))((x_e + x_\delta(t)) - x_e) = J(f(x_e))x_\delta(t)$$

ovvero il sistema della perturbazione linearizzata sarà

$$\Sigma_\delta : \dot{x}_\delta(t) = \underbrace{J(f(x_e))}_{A_e} x_\delta(t).$$

Ora come al solito studiamo la stabilità del sistema trovando gli autovalori della matrice di commutazione di stato  $A_e$ , che questa volta però descriverà la stabilità del sistema *solamente* attorno allo stato  $x_e$ .

L'unica piccola nota è che *ora la stabilità semplice non vale più!* Infatti nei casi in cui  $\lambda_i = 0$  non sappiamo nulla sulla stabilità, perché avendo approssimato attorno a  $x_e$  possiamo scoprire proprietà solamente locali, e quando  $\lambda_i = 0$  siamo esattamente sull'asse immaginario, e le dinamiche di ordine superiore che prima abbiamo ignorato potrebbero influenzare il sistema in  $x_e$ , rendendolo un punto di equilibrio instabile. In questi casi abbiamo bisogno di usare un metodo più forte: il criterio diretto.

## 8.2 Criterio diretto di Lyapunov

Siano  $\Sigma : \dot{x}(t) = f(x(t))$  il sistema in questione e  $x_e$  un suo punto di equilibrio. Per studiare la stabilità del sistema attorno al punto  $x_e$  lo approssimiamo con una **funzione candidata di Lyapunov**  $V(x) \succ x_e$  (definita positiva attorno a  $x_e$ ) e

- $\Sigma$  è asintoticamente stabile attorno ad  $x_e$  se  $\dot{V}(x) \prec 0$  (definita negativa attorno a  $\mathbf{0}$ );
- $\Sigma$  è stabile attorno ad  $x_e$  se  $\dot{V}(x) \preceq 0$  (semi-definita negativa attorno a  $\mathbf{0}$ );
- $\Sigma$  è instabile attorno ad  $x_e$  altrimenti.

Dato che nelle condizioni sopra  $V(x)$  va derivata nel tempo, possiamo sfruttare la chain-rule per ottenere

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV(x)}{dx} \dot{x}(t)$$

in cui ricordiamo che  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  per definizione e che

$$\frac{dV(x)}{dx} = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right].$$

### Funzione [semi-]definita positiva (o negativa)

Una funzione  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è [semi-]definita positiva attorno ad un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se

- $V(x_0) = 0$
- $V(x) > 0$  [ $V(x) \geq 0$ ]  $\forall x \in W \subseteq \mathbb{C}^n \setminus \{x_0\}$

Per essere [semi-]definita negativa si usano le stesse condizioni ma con  $<$  anziché  $>$ . La differenza intuitiva tra definita e semi-definita è che la prima tocca 0 *solamente* in  $x_0$ , mentre la seconda tocca 0 *almeno* in  $x_0$ .

Esempi notevoli di funzioni definite positive sono  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ,  $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - x^5$  o anche  $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + y^2}$ . In particolare, tutte le **forme quadratiche**

$$V(x) = x^\top M x$$

con  $M$  matrice [semi-]definita positiva (o negativa) sono funzioni [semi-]definite positive (o negative). Ricordiamo che la definizione di matrice [semi-]definita positiva è

### Matrice [semi-]definita positiva (o negativa)

Una matrice quadrata  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è [semi-]definita positiva attorno ad un punto  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  se

$$x^* M x > [\geq] 0 \quad \forall x \in W \subseteq \mathbb{C}^n \setminus \{x_0\}.$$

Per essere [semi-]definita negativa si usano le stesse condizioni ma con  $<$  anziché  $>$ .

Qualsiasi matrice  $M$  può essere espressa come