

Dispensa di sistemi

Sebastiano Fregnan

26 giugno 2021

Indice

1	Segnali	5
1.1	Segnali e successioni	5
1.2	Segnali continui	6
1.3	Segnali discreti	8
1.4	Potenza ed energia	8
1.5	Sistemi	8
2	Regime tempo-continuo	11
2.1	Sistemi LTI SISO	11
2.1.1	Evoluzione libera $v_\ell(t)$	12
2.1.2	Modi elementari $m_{i,l}(t)$	12
2.1.3	Risposta impulsiva $h(t)$	12
2.1.4	Evoluzione forzata $v_f(t)$	14
2.1.5	Risposta totale	14
2.1.6	Esercizio svolto	14
2.2	Analisi nei complessi	15
2.2.1	Trasformata di Laplace	15
2.2.1.1	Proprietà della TdL unilatera	16
2.2.1.2	Trasformate notevoli	17
2.2.2	Antitrasformata di Laplace	19
2.2.3	Esercizio svolto	20
2.3	Stabilità dei sistemi LTI	21
2.3.1	Funzione di trasferimento $H(s)$	21
2.3.2	Risposta in frequenza $H(j\omega)$	21
2.3.3	Stabilità dei sistemi LTI continui	22
2.3.3.1	Stabilità asintotica	22
2.3.3.2	Stabilità BIBO	23
2.3.4	Esempio svolto	23
2.4	Diagrammi di Bode	24
2.4.1	Diagrammi dei fattori elementari	25
2.4.1.1	Diagramma del termine costante	25
2.4.1.2	Diagramma del termine monomio	26
2.4.1.3	Diagramma del termine binomio	27
2.4.1.4	Diagramma del termine trinomio	29
2.4.2	Cheatsheet diagrammi di Bode	32
2.4.2.1	Termine costante $H(j\omega) = K_B$	32
2.4.2.2	Termine monomio $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\nu}$	32
2.4.2.3	Termine binomio $H(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^\mu$	32
2.4.2.4	Termine trinomio $H(j\omega) = \left(1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$	33
3	Regime frequenziale	35
3.1	Serie di Fourier	35
3.2	Analisi nelle frequenze	35
3.2.1	Trasformata di Fourier	35
3.2.2	Proprietà della TdF	36

3.2.3	Trasformate notevoli	37
3.3	Conversione tra continuo e discreto	39
3.3.1	Replicazione e campionamento di un segnale	39
3.3.2	Teorema del campionamento	39
4	Regime tempo-discreto	41
4.1	Sistemi LTI SISO	41
4.1.1	Evoluzione libera $v_\ell(k)$	41
4.1.2	Modi elementari discreti $m_{i,l}$	42
4.1.3	Risposta impulsiva $h(k)$	42
4.1.4	Evoluzione forzata $v_f(k)$	43
4.1.5	Risposta totale	43
4.1.6	Esercizio svolto	43
4.2	Analisi in \mathcal{Z}	45
4.2.1	Trasformata Zeta	45
	4.2.1.1 Proprietà della TZ	45
	4.2.1.2 Trasformate notevoli	46
4.2.2	Antitrasformata Zeta	47
4.2.3	Esercizio svolto	48
4.3	Stabilità dei sistemi LTI discreti	49
4.3.1	Stabilità asintotica	49
4.3.2	Stabilità BIBO	49

Capitolo 1

Segnali

1.1 Segnali e successioni

Un *segnale* è una qualsiasi grandezza definita come una funzione nel tempo. Distinguiamo i segnali per il loro dominio in

- **segnali tempo-continui** (o per brevità **continui**) che sono definiti nei reali \mathbb{R}
- **segnali tempo-discreti** (o **discreti**) che sono definiti negli interi \mathbb{Z} oppure negli interi non negativi \mathbb{Z}_+ (quindi compreso 0) e spesso chiamati **successioni**

per il loro codominio in

- **segnali ad ampiezza continua** (o **analogici**) che hanno valori in \mathbb{R} o \mathbb{C}
- **segnali ad ampiezza discreta** (o **digitali**) che hanno valori in \mathbb{Z}

e per la loro classificazione in

- **segnali deterministici**, completamente descritti da espressioni matematiche specificate dalle variabili indipendenti
- **segnali aleatori**, formati da insiemi di segnali deterministici ognuno con la propria “probabilità di occorrenza”.

I segnali inoltre possono essere **periodici** se ripetono lo stesso andamento dopo un certo intervallo temporale detto **periodo**, ovvero se con $T \in \mathbb{R}_+$ nel continuo

$$\forall t \in \mathbb{R}. v(t) = v(t + T)$$

oppure se con $N \in \mathbb{Z}_+$ nel discreto

$$\forall k \in \mathbb{Z}. v(k) = v(k + N).$$

La trasformazione di un segnale da continuo a discreto è detta **campionamento** ed è semplicemente la successione dei campioni di un segnale presi con un certo periodo; la conversione di un segnale da analogico a digitale è detta **quantizzazione** e si effettua scegliendo una certa scala finita di valori e approssimando il segnale campionato su quella scala, su cui successivamente viene applicata una **codifica** per rappresentare tutti i valori in stringhe di bit a lunghezza fissa. Il campionamento, se effettuato utilizzando un periodo sufficientemente piccolo, può essere un’operazione reversibile, ovvero è possibile ricostruire il segnale originale a partire da quello campionato; la quantizzazione invece è sempre un processo irreversibile, dato che non è possibile risalire all’approssimazione utilizzata per quantizzare il segnale ad ogni istante: quantizzando quindi si avrà sempre una perdita di “informazioni”.

Alcune classi segnali meritano particolare attenzione a causa delle loro proprietà e vengono detti *segnali elementari*.

1.2 Segnali continui

Un **segnale esponenziale** è definito da una funzione

$$v(t) = Ae^{j\phi}e^{\lambda t}$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{R}_+$ è detta **ampiezza**, $\phi \in \mathbb{R}$ è detta **fase**. Questi segnali possono essere visti, ponendo $\lambda = \sigma + j\omega$ con $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ e usando la formula di Eulero, come

$$v(t) = Ae^{j\phi}e^{\lambda t} = Ae^{\sigma t}e^{j(\omega t + \phi)} = Ae^{\sigma t}(\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)).$$

I segnali esponenziali tali che $\lambda = j\omega$ sono detti **fasori**, si trovano nella forma

$$v(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)}$$

e possono essere visti come numeri complessi in rotazione attorno all'origine del piano immaginario sfasati di ϕ radianti rispetto all'asse reale, ruotanti a ω radianti al secondo e distanti A dall'origine.

Un **segnale sinusoidale** è definito da una funzione

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

dove A è l'**ampiezza**, ω è detta **pulsazione** e ϕ è la **fase**. La scelta di utilizzare il coseno per la definizione è totalmente arbitraria, in quanto è possibile rimpiazzarlo con la funzione seno aggiungendo un opportuno sfasamento di $+\frac{\pi}{2}$ rad. Si vuole far notare che un segnale sinusoidale è rappresentabile come combinazione lineare di fasori, infatti

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \frac{A}{2}e^{j\omega t} + \frac{A}{2}e^{-j\omega t}.$$

I segnali sinusoidali sono periodici di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ovvero si ripetono nel tempo ad una frequenza di $f = \frac{1}{T}$ volte (nell'unità di tempo). La **pulsazione** ω è una grandezza legata al **periodo** T e alla **frequenza** f dalle relazioni

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Il periodo è misurato in secondi (s), la frequenza in Hertz (Hz) e, come già visto, la pulsazione in radianti al secondo (rad/s) e la fase in radianti (rad).

Un'altra funzione di interesse è la cosiddetta **finestra rettangolare** unitaria

$$\Pi(t) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che può essere estesa per il **segnale box** di ampiezza A , durata T e centrata in t_0 scrivendo

$$A \cdot \Pi\left(\frac{t - t_0}{T}\right),$$

mentre la **finestra triangolare** unitaria è definita come

$$\Lambda(t) \doteq \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1 \\ 1 - |t| & \text{se } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

Vedremo in seguito che il segnale box è strettamente legato al **segnale seno cardinale**, definito come

$$\text{sinc}(t) \doteq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}.$$

La particolarità di questo segnale è che per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\text{sinc}(k) = 0$.

Nello studio dei segnali un ruolo importante viene giocato dall'impulso ideale unitario o **impulso di Dirac** $\delta(t)$, che rappresenta un *segnale canonico* fondamentale, dato che un qualsiasi segnale continuo può essere approssimato mediante somma impulsi nel tempo. L'impulso unitario è una *distribuzione* definita intuitivamente come

$$\delta(t) \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

dove la successione di funzioni

$$f_n(t) = \frac{n}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2/n}\right) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

permette al segnale impulso di avere altezza infinita, area unitaria e supporto (ovvero il punto di applicazione) nell'origine. Importante è far notare che l'impulso è una funzione pari, dato che $\delta(-t) = \delta(t)$ per definizione, e che

$$\int_a^b \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{se } a < 0 < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Nella stessa famiglia di segnali troviamo il **segnale gradino** unitario, definito come

$$\delta_{-1}(t) \doteq \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

e il **segnale rampa** unitaria, definito come

$$\delta_{-2}(t) \doteq \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) d\tau = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Questa famiglia di segnali vengono generalizzati nei **segnali polinomiali**, per ogni $k \in \mathbb{N}$, mediante la definizione

$$\delta_{-k}(t) \doteq \int_{-\infty}^t \delta_{-k+1}(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Evidenziamo per l'impulso due proprietà essenziali per studi successivi:

prop. di campionamento : un segnale $v(t)$ all'istante t_0 può essere visto come integrale di quel segnale per l'impulso traslato a quell'istante

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(t_0 - \tau) dt$$

prop. di riproducibilità : essendo l'impulso un segnale pari che ha valore solo in $t = 0$ è possibile traslare ambo i lati mantenendo invariato il risultato dell'integrale con un qualsiasi segnale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(\tau - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \delta(t - \tau) dt$$

o equivalentemente

$$v(t) \delta(t - t_0) = v(t_0) \delta(t - t_0).$$

Infine troviamo un segnale che permette di eseguire il campionamento di un segnale, ovvero il **treno campionatore ideale** di periodo T

$$\tilde{\delta}_T(t) \doteq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT).$$

1.3 Segnali discreti

Come per il regime tempo-continuo, anche a tempo-discreto avremo dei segnali fondamentali, analoghi in nomenclatura e comportamento, ma definiti con istanti temporali $k \in \mathbb{Z}$:

segnale esponenziale $v(k) = Ae^{j\phi}\lambda^k$ con $A \in \mathbb{R}_+$, $\phi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

segnale sinusoidale $v(k) = A \cos(\theta k + \phi)$ con $A \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, $\phi \in \mathbb{R}$ Nel regime discreto il segnale sinusoidale non è periodico, dato che si ripete identico ogni π , che è un numero reale; per renderlo periodico è necessario porre $\theta = 2\pi \frac{n}{N}$, dove $N \in \mathbb{N}$ è il periodo e $n \in \mathbb{N}$ il passo nel periodo, così da poter definire la **frequenza discreta** come

$$\nu \doteq \frac{\theta}{2\pi}$$

e ridefinire il segnale sinusoidale come $v(k) = A \cos(\theta k + \phi) = A \cos(2\pi\nu k + \phi)$, periodico se e solo se la frequenza discreta ν è razionale.

impulso di Kronecker $\delta(k) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

gradino unitario $\delta_{-1}(k) \doteq \sum_{i=-\infty}^k \delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$

rampa unitario $\delta_{-2}(k) \doteq \sum_{i=-\infty}^{k-1} \delta_{-1}(i) = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \sum_{j=-\infty}^i \delta(j) = \begin{cases} k & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$.

Va inoltre fatto notare che ogni segnale discreto è rappresentabile come combinazione di impulsi discreti

$$v(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v(i)\delta(i-k).$$

1.4 Potenza ed energia

Definiamo l'energia di un segnale $v(t)$ (o $u(k)$) con il valore

$$\mathcal{E}_v \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt \quad \mathcal{E}_u \doteq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |v(k)|^2$$

e la sua potenza con il valore

$$\mathcal{P}_v \doteq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |v(t)|^2 dt \quad \mathcal{P}_u \doteq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |v(k)|^2.$$

Diciamo **segnale di energia** un segnale $v(t)$ tale che \mathcal{E}_v converge diverso da zero (tale segnale avrà potenza nulla), mentre diciamo **segnale di potenza** un segnale $v(t)$ tale che \mathcal{P}_v converge diverso da zero (tale segnale avrà energia infinita); le stesse definizioni varranno per il segnale discreto $u(k)$. Notiamo inoltre che un segnale è o di energia o di potenza o nessuna delle due.

1.5 Sistemi

I segnali, come già detto, di per sé sono informazioni definite nel tempo che descrivono una certa grandezza. Il concetto di **sistema dinamico** (o semplicemente **sistema**) ci permette di modellare, nel modo più preciso possibile nei limiti del computabile, i fenomeni (fisici o astratti) nei quali tali segnali si presentano. I sistemi si possono categorizzare in **sistemi a tempo continuo** e **sistemi a tempo discreto** in base al tipo di segnali che modellano; inoltre, possiamo categorizzare i sistemi in

- **sistemi SISO** ad ingresso ed uscita scalari, ovvero ad un solo ingresso ed una sola uscita (*Single Input, Single Output*)

- **sistemi MIMO** ad ingresso ed uscita vettoriali, ovvero a più ingressi e più uscite (*Multiple Input, Multiple Output*).

Lo studio della dinamica dei sistemi sarà condotto a partire da un istante iniziale t_0 , nel quale il sistema si troverà già sottoposto agli effetti delle sollecitazioni iniziali, effetti che chiameremo *condizioni iniziali*. Raccogliamo questi concetti nelle proprietà basilari:

Linearità se un sistema risponde alla causa 1 con l'effetto 1 e alla causa 2 con l'effetto 2 allora risponde alla somma delle cause 1 e 2 con la somma degli effetti 1 e 2

Tempo-Invarianza se ogni traslazione nel tempo delle cause provoca una medesima traslazione nel tempo degli effetti, ovvero se i parametri descrittivi del sistema non variano nel tempo

Causalità se ogni causa non viene mai preceduta dal corrispondente effetto, ovvero se l'uscita del sistema ad un certo istante non dipende dall'evoluzione del segnale d'ingresso negli istanti successivi

Stabilità se un sistema, dopo aver raggiunto la “situazione di equilibrio”, alla sollecitazione di piccole cause risponde con piccoli effetti, che tendono ad annullarsi nel tempo. Distingueremo la stabilità in *asintotica*, quando il sistema all'infinito tende ad annullare l'uscita, e *BIBO* (*Bounded Input, Bounded Output*), quando il sistema all'infinito limita l'uscita in un certo range contiguo di valori.

Prenderemo in considerazione solo sistemi SISO LTI (lineari tempo-invarianti) causali, di cui studieremo l'eventuale stabilità.

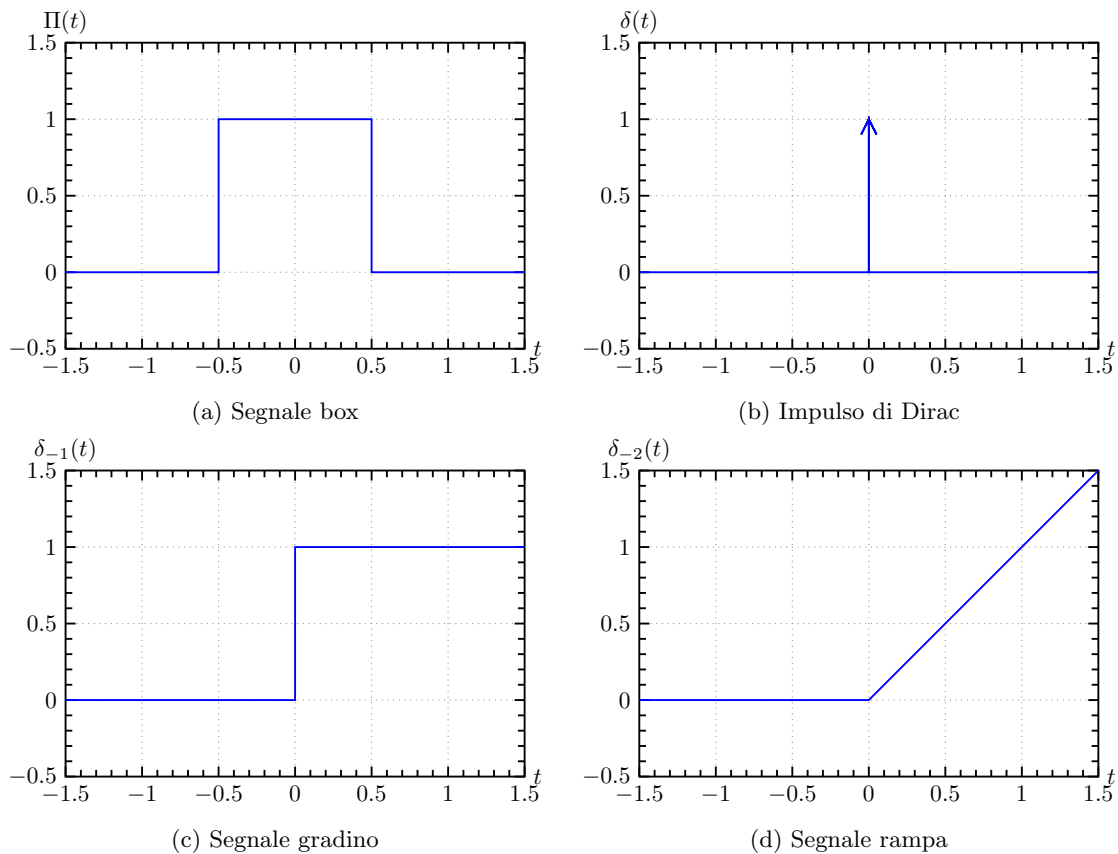


Figura 1.1: Grafici di alcuni segnali nel tempo

Capitolo 2

Regime tempo-continuo

2.1 Sistemi LTI SISO

Un *sistema tempo-continuo* (o semplicemente *continuo*) è una qualsiasi funzione definita come $S: [\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}] \rightarrow [\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}]$ tale che, dato un segnale di ingresso $u(t)$, si ottiene il segnale di uscita $v(t)$ mediante la definizione $v(t) = (S(u))(t)$. Per descrivere sistemi continui SISO è possibile usare un modello a equazione differenziale a coefficienti costanti nella forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \quad (2.1)$$

dove $u(t)$ e $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ sono grandezze note.

Un sistema continuo è **proprio** se $n \geq m$, mentre lo diciamo **strettamente proprio** se $n > m$.

Molti dei sistemi fisici più comuni vengono rappresentati mediante equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti, quindi con la forma

$$a_2 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = b_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t).$$

Esempi di sistemi fisici sono

filtro RL in un circuito elettrico	$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{R}{L}v(t) = \frac{R}{L}u(t)$
movimento orizzontale con attrito viscoso	$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k_f}{M}v(t) = \frac{1}{M}u(t)$
sistema Massa-Molla-Smorzatore	$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{D}{M} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{K}{M}v(t) = \frac{1}{M}u(t)$

Per $n = 1$ il sistema ha una sola soluzione

$$v(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 v(t),$$

mentre per $n \geq 1$ il sistema non ha soluzione univoca ed è quindi necessario conoscere delle condizioni iniziali sulle sue derivate, ovvero i valori di

$$v(t)|_{t=0^-}, \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0^-}, \left. \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right|_{t=0^-}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

dove

$$\left. \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right|_{t=0^-} \doteq \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{d^i v(t)}{dt^i}.$$

Per poter calcolare la risposta $v(t)$ di un sistema dobbiamo prima porci in una delle due situazioni possibili, ovvero nel caso in cui venga sollecitato da un segnale in ingresso $u(t)$ o nel caso in cui venga lasciato libero di rispondere in base alle condizioni iniziali.

2.1.1 Evoluzione libera $v_\ell(t)$

In assenza del segnale di ingresso, quindi nella situazione in cui $u(t) = 0$, il sistema risponde solo in base alle condizioni iniziali e si trova nella forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0.$$

La risoluzione consiste nel cercare una soluzione del tipo $v(t) = e^{\lambda t}$ a partire dalla equazione omogenea associata, ovvero il polinomio

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0,$$

il quale può essere scomposto usando il teorema fondamentale dell'algebra come

$$a_n (s - \lambda_1)^{\mu_1} (s - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (s - \lambda_{r-1})^{\mu_{r-1}} (s - \lambda_r)^{\mu_r} = 0$$

con $\sum_{i=1}^r \mu_i = n$, $r \leq n$ e i vari $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ noti, le cui soluzioni sono linearmente indipendenti e raggruppabili nella forma

$$v_\ell(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} c_{i,\ell} e^{\lambda_i t} \frac{t^\ell}{\ell!}, \quad (2.2)$$

che è detta **evoluzione libera** $v_\ell(t)$ del sistema. Ora per ottenere i valori $c_{i,\ell}$ dobbiamo derivare $n-1$ volte l'evoluzione libera appena trovata ed eguagliare ad ogni derivata il valore corrispondente tra le condizioni iniziali, risolvendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\ell(t)|_{t=0^-} = v(t)|_{t=0^-} \\ \frac{dv_\ell(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} = \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \\ \vdots \\ \frac{d^i v_\ell(t)}{dt^i} \Big|_{t=0^-} = \frac{d^i v(t)}{dt^i} \Big|_{t=0^-} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} v_\ell(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0^-} = \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0^-} \end{array} \right.$$

nel quale, dato che $t = 0^-$, tutti vari termini $e^{\lambda_i t}$ prendono valore 1 ed è quindi possibile procedere per sostituzione e ricavare i coefficienti.

2.1.2 Modi elementari $m_{i,\ell}(t)$

L'evoluzione libera 2.2 è nella forma $v(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} c_{i,\ell} m_{i,\ell}$ dove i vari

$$m_{i,\ell} = \frac{t^\ell}{\ell!} e^{\lambda_i t} \quad (2.3)$$

vengono detti **modi elementari** del segnale $v(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Questi elementi fondamentali del segnale saranno importanti per attribuire la stabilità asintotica e BIBO del sistema, che tratteremo più avanti. Per introdurre l'argomento, diciamo che un modo elementare è

- *convergente* a zero per $t \rightarrow +\infty$ se e solo se $\text{Re}(\lambda_i) < 0$
- *limitato* in $[0, +\infty)$ se e solo se $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ e $\ell = 0$
- *divergente* per $t \rightarrow +\infty$ per tutti gli altri casi.

2.1.3 Risposta impulsiva $h(t)$

Prima di trattare l'evoluzione forzata, dove l'ingresso è un segnale qualsiasi, è utile soffermarsi qualche istante sulla risoluzione di un caso "più semplice", ovvero quello in cui l'ingresso è la funzione impulso $\delta(t)$. La **risposta impulsiva** $h(t)$ è il segnale di uscita di un sistema quando ad esso viene applicato in ingresso

il segnale impulso, cioè $h(t) = S(\delta(t))$. Da questa semplice considerazione otteniamo un risultato molto importante, ovvero che

$$v_f(t) = (h * u)(t) = \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)u(t-\tau) d\tau = \int_{0^-}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

nel quale la convoluzione è troncata da entrambi i lati poiché i due segnali $h(t)$ e $u(t)$ sono causali e quindi per $\tau < 0$ e $\tau > t$ sono nulli. Inoltre, dato che sistema è causale, anche il segnale in uscita lo sarà (un ulteriore accorgimento di cui non dovevamo preoccuparci durante la ricerca dell'evoluzione libera).

DIM. Impostato il sistema, è facile arrivare alla conclusione sopra:

$$\begin{aligned} h(t) &= S(\delta(t)) \\ h(t-\tau) &= S(\delta(t-\tau)) \\ u(\tau)h(t-\tau) &= S(u(\tau)\delta(t-\tau)) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau) d\tau &= S\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau) d\tau\right) \\ (h * u)(t) &= S(u(t)) \\ (h * u)(t) &= v_f(t) \end{aligned} \quad \square$$

Ricordiamo che la **convoluzione** è un'operazione che descrive la “somiglianza” tra due funzioni ed è definita con

$$(u_1 * u_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)u_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t-\tau)u_2(\tau) d\tau.$$

Per trovare la risposta impulsiva utilizziamo il sistema 2.1 impostando $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ e, dato che il sistema preso in considerazione è causale, limitando $t \in [0, +\infty)$. Questo rende tutte le condizioni iniziali per $h(t)$ nulle (poiché definite come il limite a 0^-) e il segnale finale causale, quindi si aggiunge una funzione gradino al risultato. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} &= \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i \delta(t)}{dt^i} && [\text{sistema}] \\ \forall i \in [0, n-1], \frac{d^i h(t)}{dt^i} \Big|_{t=0^-} &= 0 && [\text{condizioni iniziali nulle}] \end{aligned}$$

il che porta ad un risultato familiare

$$a_n \frac{d^n h(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 h(t) = 0,$$

la cui soluzione, come visto per l'evoluzione libera, sarà nella forma

$$h(t) = \underbrace{d_0 \delta(t)}_{\text{se } m=n} + \sum_{i=1}^r \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} d_{i,\ell} e^{\lambda_i t} \frac{t^\ell}{\ell!} \delta_{-1}(t) \quad (2.5)$$

in cui il termine $d_0 \delta(t)$ è aggiunto per gestire il caso di $t = 0$, dove le derivate di $h(t)$ sono nulle ma non quelle degli impulsi. I coefficienti $d_{i,\ell}$ vengono ottenuti sostituendo le derivate di $h(t)$ all'interno del sistema e raccogliendo ogni derivata di $\delta(t)$, ottenendo una equazione nella forma

$$(\dots) \frac{d^{n-1} \delta(t)}{dt^{n-1}} + \dots + (\dots) \frac{d \delta(t)}{dt} + (\dots) \delta(t) + (\dots) \delta_{-1}(t) = 0,$$

composta da funzioni linearmente indipendenti grazie alle derivate, e quindi raggruppabili in un sistema

$$\begin{cases} \delta_{-1}(t)(\dots)|_{t=0} = 0 \\ \delta(t)(\dots)|_{t=0} = 0 \\ \frac{d\delta(t)}{dt}(\dots)|_{t=0} = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}\delta(t)}{dt^{n-1}}(\dots)|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

nel quale, fissato $t = 0$, $\delta_{-1}(t) = 1$ e i termini $e^{\lambda_i t}$ valgono 1. Tutte le derivate di $\delta(t)$ avranno un certo valore in $t = 0$, ma questo non ci interessa, infatti per annullare l'intera espressione a cui corrispondono basta annullare il coefficiente (\dots) che le moltiplica. Inoltre, è dimostrabile che il coefficiente per $\delta_1(t)$ vale sempre 0, quindi tale espressione è eliminabile dal sistema. Come per l'evoluzione libera, possiamo procedere per sostituzione e arrivare ai valori.

2.1.4 Evoluzione forzata $v_f(t)$

Differentemente da quanto visto per l'evoluzione libera, in presenza del segnale di ingresso vengono ad annullarsi le condizioni iniziali. Come abbiamo visto, dato un ingresso noto, la risposta in uscita è data da 2.4 ed è quindi necessario calcolare prima la risposta impulsiva $h(t)$ e poi convoluirlo con l'ingresso, quindi

$$v_f(t) = \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)u(t-\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

soluzione che viene detta **evoluzione forzata** $v_f(t)$ del sistema ad un ingresso $u(t)$.

2.1.5 Risposta totale

Dopo aver trovato l'evoluzione libera e quella forzata, possiamo sommarle ed ottenere la risposta del sistema per ogni sua possibile evoluzione, ovvero la **risposta totale**

$$v(t) = v_\ell(t) + v_f(t). \quad (2.7)$$

2.1.6 Esercizio svolto

Negli esercizi, per praticità, si usa la notazione $\dot{v}(t)$ per indicare la derivata prima della funzione $v(t)$, $\ddot{v}(t)$ per la seconda ed in generale si porranno n puntini sopra ad una funzione per indicarne la derivata n -esima. Prendiamo in esempio il sistema

$$\ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 4v(t) = \dot{u}(t) - 3u(t)$$

avente le condizioni iniziali

$$v(0^-) = 0, \dot{v}(0^-) = 1$$

e sottoposto alla sollecitazione dell'ingresso

$$u(t) = e^t \delta_{-1}(t).$$

L'equazione caratteristica associata al sistema è

$$s^2 - 5s + 4 = 0$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$, entrambe di molteplicità singola.

L'evoluzione libera e la sua derivata sono quindi

$$\begin{aligned} v_\ell(t) &= c_1 e^{4t} + c_2 e^t \\ \dot{v}_\ell(t) &= 4c_1 e^{4t} + c_2 e^t \end{aligned}$$

e messe a sistema coi i valori delle condizioni iniziali

$$\begin{cases} v(0^-) = c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{v}(0^-) = 4c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

si ottengono i valori $c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = -\frac{1}{3}$, quindi $v_\ell(t) = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t$.

L'evoluzione forzata si ottiene trovando la risposta impulsiva e le sue derivate

$$\begin{aligned} h(t) &= (d_1 e^{4t} + d_2 e^t) \delta_{-1}(t) \\ \dot{h}(t) &= (4d_1 e^{4t} + d_2 e^t) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{4t} + d_2 e^t) \delta(t) \\ \ddot{h}(t) &= (16d_1 e^{4t} + d_2 e^t) \delta_{-1}(t) + 2(4d_1 e^{4t} + d_2 e^t) \delta(t) + (d_1 e^{4t} + d_2 e^t) \dot{\delta}(t) \end{aligned}$$

e sostituendole in

$$\ddot{h}(t) - 5\dot{h}(t) + 4h(t) = \dot{\delta}(t) - 3\delta(t)$$

si ricava il sistema

$$\begin{cases} \delta_{-1}(t)((16d_1 + d_2) - 5(4d_1 + d_2) + 4(d_1 + d_2)) = 0 \\ \delta(t)(2(4d_1 + d_2) - 5(d_1 + d_2) + 3) = 0 \\ \dot{\delta}(t)((d_1 + d_2) - 1) = 0 \end{cases}$$

dal quale emergono i valori $d_1 = 0, d_2 = 1$, quindi $h(t) = e^t \delta_{-1}(t)$. Ora per finire si convoluisce la risposta impulsiva con l'ingresso $u(t)$

$$\begin{aligned} v_f(t) &= \int_0^t \underbrace{(e^\tau \delta_{-1}(\tau))}_{=1} \underbrace{(e^{(t-\tau)} \delta_{-1}(t-\tau))}_{=1} d\tau \\ &= e^t \left(\int_0^t e^0 d\tau \right) \delta_{-1}(t) \\ &= e^t (t - 0) \delta_{-1}(t) \\ &= te^t \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Si noti come i gradini $\delta_{-1}(\tau)$ e $\delta_{-1}(t - \tau)$ prendano valore costante 1 all'interno dell'integrale: questo si verifica perché $\delta_{-1}(\tau) = 1 \iff \tau \geq 0$, condizione sempre soddisfatta per $\tau \in [0, t]$, che è l'intervallo di integrazione, e perché $\delta_{-1}(t - \tau) = 1 \iff \tau \leq t$, altra condizione sempre soddisfatta per $\tau \in [0, t]$. Inoltre, viene aggiunto un gradino $\delta_{-1}(t)$ fuori dall'integrale per mantenere $v_f(t)$ causale, come da definizione.

In conclusione, la risposta totale del sistema è dunque

$$v(t) = v_\ell(t) + v_f(t) = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t + te^t \delta_{-1}(t).$$

2.2 Analisi nei complessi

2.2.1 Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è un operatore funzionale che rientra nella categoria delle trasformate integrali e permette di associare una funzione variabile reale a una funzione variabile complessa. La trasformata di Laplace (bilatera) di una funzione $f(t)$ è definita come

$$F(s) = \mathcal{L}_b[f](s) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

dove $s = \sigma + j\omega$ è una variabile complessa.

La potenza di questa trasformata risiede nel suo effetto intrinseco, ovvero nella possibilità di trasformare equazioni esponenziali in equazioni algebriche. Vedremo che un sistema nel dominio del tempo può essere trasformato nel dominio dei complessi, risolto algebricamente e antitrasformato nuovamente nel dominio temporale, evitando quindi lo svolgimento di calcoli differenziali ed integrali.

La TdL bilatera è più adatta a sistemi non causali poiché considera anche istanti temporali negativi. Nel nostro caso è sufficiente utilizzare la **trasformata di Laplace unilatera**, definita come

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) \doteq \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.8)$$

la quale è definita per quei valori di s (se esistono) in corrispondenza ai quali l'integrale è ben definito, ovvero esiste finito; tale regione del piano è chiamata **regione di convergenza** e viene indicata con l'acronimo RdC. Si può dimostrare che la regione di convergenza contiene sempre un semipiano aperto $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > c \in \mathbb{R}\}$ e che pertanto

$$a \doteq \inf\{\operatorname{Re}(s_0) : s_0 \in \mathbb{C} \text{ e l'integrale (2.8) converge in } s_0\} \quad (2.9)$$

definisce la frontiera sinistra della RdC e prende il nome di **ascissa di convergenza**.

2.2.1.1 Proprietà della TdL unilatera

Elenchiamo ora le più importanti proprietà della TdL unilatera ricordando che siamo nell'ipotesi che $v(t)$ sia la somma di una funzione localmente sommabile in $[0, +\infty)$ e di una famiglia finita di segnali impulsivi. Noteremo inoltre che per tutte le trasformate derivanti dalla TdL varranno le stesse proprietà.

Linearità : $au(t) + bv(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$.

DIM.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[au(t) + bv(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} (au(t) + bv(t))e^{-st} dt \\ &= a \int_{0^-}^{+\infty} u(t)e^{-st} dt + b \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt = aU(s) + bV(s) \end{aligned}$$

□

Time shifting : $v(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} V(s)$.

DIM. Spezzando l'integrale esattamente in t_0 , notiamo che la prima parte è sempre nulla perché presenta estremi nei quali $v(t)$, che è causale, è definita nulla, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v(t - t_0)] &= \underbrace{\int_{0^-}^{t_0} v(t - t_0)e^{-st} dt}_{=0, v(t) \text{ è causale}} + \int_{t_0}^{+\infty} v(t - t_0)e^{-st} dt \\ &\xrightarrow[x=dt]{x=t-t_0} \int_{0^-}^{+\infty} v(x)e^{-s(x+t_0)} dx = e^{-st_0} \int_{0^-}^{+\infty} v(x)e^{-sx} dx = e^{-st_0} V(s) \end{aligned} \quad \square$$

Frequency shifting : $e^{\lambda t} v(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} V(s - \lambda)$.

DIM.

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} v(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{\lambda t} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-(s-\lambda)t} dt = V(s - \lambda) \quad \square$$

Cambiamento di scala : $v(rt) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right)$.

DIM.

$$\mathcal{L}[v(rt)] = \int_{0^-}^{+\infty} v(rt)e^{-st} dt \xrightarrow[x=rdt]{x=rt} \int_{0^-}^{+\infty} v(x)e^{-\frac{s}{r}x} \frac{1}{r} dx = \frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right) \quad \square$$

Derivata nel tempo : $\frac{dv(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sV(s) - v(0^-)$ se $\exists v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) \in \mathbb{R}$.

DIM. Risolviamo per parti l'integrale della trasformata

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] &= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dv(t)}{dt} e^{-st} dt = v(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-s)v(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)e^{-st} - v(0^-) + sV(s) = sV(s) - v(0^-)\end{aligned}$$

□

Possiamo estendere la definizione con

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = s^i V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-}.$$

Integrale nel tempo : $\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{V(s)}{s}$.

DIM. Poniamo $f(t) = \int_{0^-}^t v(\tau) d\tau$, quindi $f(0^-) = 0$, e trasformiamo $v(t)$:

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[f(t)] - \cancel{f(0^-)} = s\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right] \iff \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t v(\tau) d\tau\right] = \frac{V(s)}{s} \quad \square$$

Derivata nei complessi : $tv(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{dV(s)}{ds}$.

DIM.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tv(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} tv(t)e^{-st} dt = - \int_{0^-}^{+\infty} -te^{-st}v(t) dt = - \int_{0^-}^{+\infty} \frac{\partial e^{-st}}{\partial s} v(t) dt \\ &= -\frac{d}{ds} \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt = -\frac{dV(s)}{ds}\end{aligned}$$

□

In generale:

$$\mathcal{L}[t^i v(t)] = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

Integrale nei complessi : $\frac{v(t)}{t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^{+\infty} V(s) ds$ se $\exists \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t} \in \mathbb{R}$.

DIM.

$$\begin{aligned}\int_s^{+\infty} V(s) ds &= \int_s^{\infty} \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt ds = \int_{0^-}^{+\infty} \int_s^{\infty} e^{-st} ds v(t) dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} -\frac{1}{t} e^{-st} \Big|_s^{+\infty} v(t) dt = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{t} v(t) dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right]\end{aligned}$$

□

Valore iniziale : $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sV(s)$ se esiste $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ finito.

Valore finale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sV(s)$ se esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$ finito.

Convolvere : $(f * g)(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)G(s)$.

Modulazione : $f(t)g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (F * G)(s)$.

2.2.1.2 Trasformate notevoli

Applichiamo la TdL alle funzioni più comuni nel contesto dei sistemi continui e dimostriamone le trasformate notevoli (si fa notare che la costante A posta solo nel primo esempio è sempre estraibile dall'integrale in quanto costante e quindi applicabile ad ogni altra trasformata in elenco):

funzione costante A : basta semplicemente sviluppare integrale

$$\mathcal{L}[A] = \int_{0^-}^{+\infty} A \cdot e^{-st} dt = A \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{0^-}^{+\infty} = A \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-st}}{-s} - A \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^{-st}}{-s} = \frac{A}{s}$$

funzione impulso $\delta(t)$: è sufficiente ricordare che $\delta(t) = 1 \iff t = 0$, quindi l'unico risultato diverso da 0 nell'integrale si avrà per $t = 0$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

lo stesso risultato era ottenibile sfruttando la proprietà di campionamento dell'impulso, esprimibile come

$$v(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-0)v(t) dt$$

funzione impulso traslato $\delta(t-t_0)$: in questo caso, analogo al precedente ma più generale, l'integrale avrà valore non nullo solo per $t = t_0$

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

lo stesso risultato era ottenibile sfruttando la proprietà di time shifting dove $v(t) = \delta(t)$

funzione gradino $\delta_{-1}(t)$: dalla definizione del gradino abbiamo $\delta_{-1}(t) = 1 \iff t \geq 0$, quindi è sempre costante nei limiti d'integrazione (tranne in $t = 0^-$, dove è nullo)

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = e^{-st_0} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-s \cdot 0}}{-s} = \frac{1}{s}$$

inoltre è immediato dedurre che

$$\mathcal{L}[\delta_i(t)] = s^i$$

funzione esponenziale (causale) $e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$: raccogliamo l'esponente nell'integrale e otteniamo uno shift nel dominio dei complessi

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-(s-\lambda)t} dt = \frac{1}{s-\lambda}$$

il medesimo risultato era ottenibile sfruttando la proprietà di frequency shifting dove $v(t) = \delta_{-1}(t)$

funzione esponenziale polinomiale (causale) $\frac{t^\ell}{\ell!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$: in questo caso è molto più semplice usare immediatamente la proprietà di derivata nei complessi

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^\ell}{\ell!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right] = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{(-1)^i}{\ell!} \frac{d^i}{ds^i} \left(\mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)] \right) = \frac{1}{(s-\lambda)^{\ell+1}}$$

funzione coseno $\cos(t)$: ricordiamo che il coseno è descritto analiticamente anche usando la formula di Eulero, il che semplifica notevolmente i calcoli

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s+j\omega + s-j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

funzione seno $\sin(t)$: come per il coseno, usiamo la formula di Eulero per riscrivere il seno

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}(\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Segnale	Trasformata \mathcal{L}	Segnale	Trasformata \mathcal{L}
A	$\frac{A}{s}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$A\delta(t - t_0)$	Ae^{-st_0}	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$A\delta_{-1}(t)$	$\frac{A}{s}$	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$	$\frac{A}{s - \lambda}$	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$A\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$	$\frac{A}{(s - \lambda)^{l+1}}$		

Tabella 2.1: Le principali trasformate notevoli di Laplace

2.2.2 Antitrasformata di Laplace

Una volta applicata la TdL e aver svolto i calcoli necessari nel dominio dei complessi, per tornare a quello temporale si applica l'antitrasformata, ovvero

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V](t), \quad (2.10)$$

la quale ha come antitrasformate notevoli quelle nella tabella qui sopra ma viste a partire dalla TdL del segnale. Applichiamo quindi la TdL al sistema 2.1 e ricordiamo che $\forall i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \Big|_{t=0^-} = 0$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ e che vogliamo ottenere $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$, quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] &= \mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}\right] \\ \sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] &= \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right] \\ a_0 V(s) + \sum_{i=1}^n a_i \left(s^i V(s) - \underbrace{\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-}}_{=0, \forall i}\right) &= \sum_{i=0}^m b_i \left(s^i U(s) - \underbrace{\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} \frac{d^k u(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-}}_{=0, \forall i}\right) \\ \left(\sum_{i=0}^n a_i s^i\right) V(s) - \left(\sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-}\right) &= \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i\right) U(s) \\ d(s)V(s) &= p(s) + n(s)U(s) \\ V(s) &= \frac{p(s)}{d(s)} + \frac{n(s)}{d(s)}U(s).\end{aligned}$$

dove i vari polinomi sono definiti come

$$p(s) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \quad (2.11)$$

$$n(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i \quad (2.12)$$

$$d(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i. \quad (2.13)$$

A questo punto, riconosciamo che $\frac{p(s)}{d(s)} = V_\ell(s)$ e che $\frac{n(s)}{d(s)} = H(s)$, e quindi che $H(s)U(s) = V_f(s)$, poiché

$$\begin{aligned} V(s) &= V_\ell(s) + V_f(s) \\ &= V_\ell(s) + H(s)U(s) \\ \mathcal{L}^{-1}[V(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[V_\ell(s)] + \mathcal{L}^{-1}[H(s)U(s)] \\ v(t) &= v_\ell(t) + (h * u)(t) \\ v(t) &= v_\ell(t) + v_f(t) \end{aligned}$$

e nella quale $H(s)$ prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema.

La risoluzione di un sistema risulta ora essere molto più semplice, infatti basta trasformare l'intero sistema 2.1 con Laplace, poi esprimere l'equazione in funzione di $V(s)$ e raccogliere tutto in un'unica frazione

$$V(s) = \frac{n(s)}{\prod_{i=1}^{r'} (s - \lambda'_i)^{\mu'_i}} = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{\ell=1}^{\mu'_i} \frac{C_{i,\ell}}{(s - \lambda'_i)^\ell} \doteq V'(s)$$

per poi ottenere i coefficienti $C_{i,\ell}$ mediante il metodo dei fratti semplici

$$C_{i,\ell} = \frac{d^{\mu'_i - \ell}}{ds^{\mu'_i - \ell}} \left((s - \lambda'_i)^{\mu'_i} V'(s) \right) \Big|_{\lambda'_i}.$$

quindi un fratto di grado non massimo viene derivato un numero di volte pari ai gradi mancanti dal massimo; il numero di radici uniche r' non sempre è uguale a r , poiché $U(s)$ può aggiungerne di nuove.

2.2.3 Esercizio svolto

Prendiamo in esempio lo stesso sistema già visto in precedenza, ovvero

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 4v(t) = \dot{u}(t) - 3u(t) \\ \dot{v}(0^-) = 1 \\ v(0^-) = 0 \\ u(t) = e^t \delta_{-1}(t). \end{cases}$$

La trasformata di Laplace del sistema è

$$\begin{aligned} (s^2 V(s) - s v(0^-) - \dot{v}(0^-)) - 5(s V(s) - v(0^-)) + 4V(s) &= (s U(s) - u(0^-)) - 3U(s) \\ s^2 V(s) - 1 - 5s V(s) + 4V(s) &= s U(s) - 3U(s) \\ (s^2 - 5s + 4)V(s) &= 1 + (s - 3)U(s) \\ V(s) &= \frac{1}{(s - 1)(s - 4)} + \frac{s - 3}{(s - 1)(s - 4)} U(s), \end{aligned}$$

dove possiamo riconoscere le funzioni

$$V_\ell(s) = \frac{1}{(s - 1)(s - 4)} \quad H(s) = \frac{s - 3}{(s - 1)(s - 4)} \quad U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s - 1}.$$

Da qui per trovare la risposta finale si procede accorrendo $V(s)$ in un'unica frazione

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-4)} + \frac{s-3}{(s-1)(s-4)} \cdot \frac{1}{s-1} \\ &= \frac{2(s-2)}{(s-4)(s-1)^2} \doteq F(s) \\ &= \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

e risolvendo mediante il metodo dei fratti semplici i coefficienti

$$\begin{aligned} A &= (s-4)F(s)\Big|_{s=4} = \frac{2(s-2)}{(s-1)^2}\Big|_{s=4} = \frac{4}{9} \\ B &= \frac{d}{ds}\left((s-1)^2 F(s)\right)\Big|_{s=1} = 2\frac{d}{ds}\left(\frac{s-2}{s-4}\right)\Big|_{s=1} = 2\frac{-2}{(s-4)^2}\Big|_{s=1} = -\frac{4}{9} \\ C &= (s-1)^2 F(s)\Big|_{s=1} = \frac{2(s-2)}{s-4}\Big|_{s=1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

si ottiene la risposta totale nei complessi

$$V(s) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{s-4} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}.$$

che, applicando l'antitrasformata di Laplace $\frac{A}{(s-\lambda)^{\ell+1}} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} A \frac{t^\ell}{\ell!} e^{\lambda t}$, diventa la risposta totale del sistema

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V](t) = \left(\frac{4}{9}e^{4t} - \frac{4}{9}e^t + \frac{2}{3}te^t\right)\delta_{-1}(t).$$

Come si può notare il risultato è differente da quello calcolato nel tempo (senza la TdL), ma questo non va confuso per un errore: i risultati possibili sono infatti somme di fratti semplici linearmente indipendenti e per questo la risposta del sistema può presentarsi in più forme.

2.3 Stabilità dei sistemi LTI

2.3.1 Funzione di trasferimento $H(s)$

Dall'analisi nei complessi abbiamo ottenuto la funzione $H(s)$, ovvero la trasformata di Laplace della risposta impulsiva $h(t)$, esprimibile nelle forme

$$H(s) = \mathcal{L}[h](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (2.14)$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (2.15)$$

$$= K \frac{\prod_{i=0}^m (s - z_i)}{\prod_{i=0}^n (s - p_i)} \quad (2.16)$$

dove i termini p_i sono detti **poli** e gli z_i sono detti **zeri** di $H(s)$ (nell'equazione non sono necessariamente distinti, si noti infatti che vengono mantenuti i valori m ed n per i limiti superiori delle produttorie). Osservando le due forme, è possibile vedere come $H(s)$ sia espressa come rapporto tra l'equazione caratteristica associata alle entrate e l'equazione caratteristica associata alle uscite (2.15) oppure come frazione delle fattorizzazioni delle equazioni caratteristiche appena citate (2.16).

2.3.2 Risposta in frequenza $H(j\omega)$

Ponendo $s = j\omega$ come parametro della funzione di trasferimento $H(s)$ otteniamo la funzione

$$H(j\omega) = \mathcal{L}[h](j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.17)$$

detta **risposta in frequenza** del sistema, in quanto esprime come il sistema risponde ad una certa frequenza f (più propriamente, come risponde ad una certa pulsazione, ma abbiamo visto che $\omega = 2\pi f$) in termini di ampiezza e fase della risposta in uscita. Definiamo quindi le funzioni di **ampiezza** $A(\omega)$ e **fase** $\Phi(\omega)$ come

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} \\ A(\omega) &\doteq |H(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \right| \\ \Phi(\omega) &\doteq \angle H(j\omega) = \arg \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \right) \end{aligned}$$

ed è immediato riconoscere che $H(j\omega)$ è gode della proprietà di simmetria coniugata, infatti

$$H(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{+j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t)e^{-j\omega t}} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt} = \overline{H(j\omega)}$$

Grazie a questa proprietà l'ampiezza risulta essere una funzione pari

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2} = |H(j\omega)| = A(-\omega)$$

mentre la fase una funzione dispari

$$\Phi(-\omega) = \arg(a - jb) = -\arg(a + jb) = -\Phi(\omega)$$

a condizione che $a \geq 0$.

La funzione $\arg(z)$ è chiamata **argomento** ed è definita, per $z = a + jb \in \mathbb{C}$, come

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0 \wedge b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0 \wedge b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{se } a < 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

ma viene spesso resa semplicemente come

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right).$$

Le proprietà di $\arg(z)$ sono analoghe a quelle dei logaritmi, ovvero

$$\arg(xy) = \arg(x) + \arg(y) \quad \arg\left(\frac{x}{y}\right) = \arg(x) - \arg(y) \quad \arg(x^y) = y \arg(x).$$

2.3.3 Stabilità dei sistemi LTI continui

2.3.3.1 Stabilità asintotica

Diciamo che un sistema è *asintoticamente stabile* quando all'infinito tende a 0, cioè quando $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_\ell(t) = 0$, definizione dalla quale ricaviamo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} v_\ell(t) = 0 &\iff \forall m_{i,l}, \lim_{t \rightarrow +\infty} m_{i,l}(t) = 0 \\ &\iff \forall i, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_i t} = 0 \\ &\iff \forall i, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\text{Re}(\lambda_i)t} e^{j \text{Im}(\lambda_i)t} = 0, \end{aligned}$$

la quale mostra come sia possibile solo nel caso in cui $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, dato che $e^{j \text{Im}(\lambda_i)t}$ è una fasore unitario e quindi rimane costante a 1.

Possiamo quindi affermare che

un sistema LTI è asintoticamente stabile se $\forall i. \text{Re}(\lambda_i) < 0$.

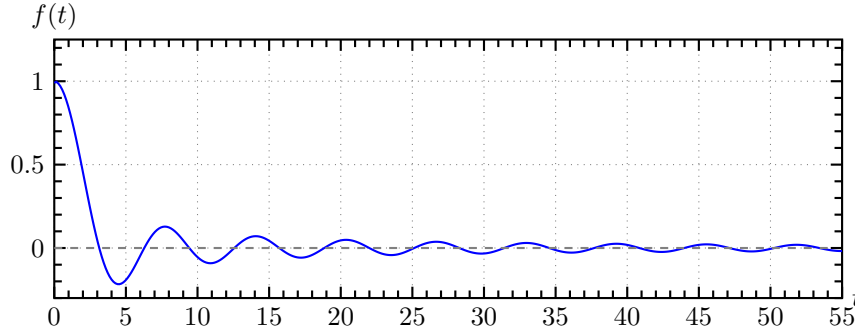


Figura 2.1: Il grafico del segnale $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, chiaramente asintoticamente stabile.

2.3.3.2 Stabilità BIBO

Diciamo che un sistema è *BIBO stabile* quando, per un ingresso limitato superiormente ed inferiormente da un certo punto in poi, anch'esso all'infinito è limitato superiormente ed inferiormente da quel punto in poi, ovvero quando $\forall t \in [t_0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$\exists M_u > 0: |u(t)| < M_u \implies \exists M_v > 0: |v(t)| < M_v.$$

Si può dimostrare che la definizione è equivalente ad avere la risposta impulsiva *sommabile* (o *assolutamente integrabile*), cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$.

Dando un taglio netto alla teoria sottostante, è possibile dire che

un sistema LTI è *BIBO stabile* se, dopo aver semplificato tra loro poli e zeri di $H(s)$, si ha $\forall i. \operatorname{Re}(p_i) < 0$.

Inoltre, anche se piuttosto intuitibile per via grafica, è dimostrabile che

$$\text{stabilità asintotica} \implies \text{stabilità BIBO}.$$

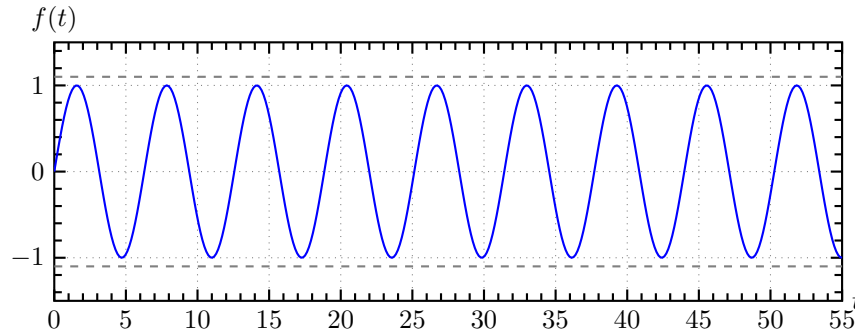


Figura 2.2: Il grafico del segnale $f(t) = \sin(t)$, chiaramente BIBO stabile ma non asintoticamente stabile, poiché all'infinito non tende a 0.

2.3.4 Esempio svolto

Prendiamo nuovamente in esempio lo stesso sistema già visto in precedenza e due di nuovi, ovvero

$$S_1: \dot{v}(t) - 3v(t) = \ddot{u}(t) - 5\dot{u}(t) + 4u(t)$$

$$S_2: \ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t) = \ddot{u}(t) - 4\dot{u}(t) + 3u(t)$$

$$S_3: \ddot{v}(t) + 7\dot{v}(t) - 2\ddot{u}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) - 4u(t)$$

e studiamone la stabilità. Per i due sistemi si ottengono le radici

$$S_1: \lambda_1 = 3$$

$$S_2: \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$S_3: \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$$

e, dopo aver applicato la TdL, le funzioni di trasferimento

$$S_1: H(s) = \frac{(s-1)(s-4)}{s-3} \quad S_2: H(s) = \frac{(s-3)(s-1)}{(s+2)(s+1)} \quad S_3: H(s) = \frac{(s+4)(s-1)}{(s+3)(s+2)(s-1)}$$

Per lo studio della stabilità asintotica ci concentriamo sulle radici dei sistemi e diciamo che essi sono asintoticamente stabili se ogni λ_i ha parte reale negativa, quindi solo S_2 risulta esserlo. Per la stabilità BIBO invece è necessario prima semplificare le funzioni di trasferimento e poi studiarne i poli rimanenti, i quali devono avere tutti parte reale negativa, quindi in questo caso solo S_3 risulta esserlo, oltre ovviamente a S_2 , che essendo asintoticamente stabile è anche BIBO stabile.

Ricapitolando, S_1 non possiede alcun tipo di stabilità, S_2 è asintoticamente stabile (e quindi anche BIBO stabile), mentre S_3 è solamente BIBO stabile.

2.4 Diagrammi di Bode

La risposta in frequenza $H(j\omega)$ di un sistema LTI esprime come si comporta il sistema data una certa frequenza in ingresso, espressa come pulsazione nella forma $\omega = 2\pi f$.

Come visto nella 2.15, la risposta in frequenza è scrivibile come

$$H(j\omega) = K \frac{(j\omega - z_1) \cdots (j\omega - z_i) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1) \cdots (j\omega - p_i) \cdots (j\omega - p_n)}$$

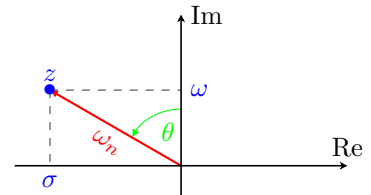
dove poli e zeri non sono necessariamente distinti. Data questa forma, è possibile raggruppare i termini in tre categorie (vengono trattati i casi per gli zeri, per i poli il procedimento è analogo ma con molteplicità negativa):

- $(j\omega - z_i)$ con z_k reale nullo: il termine, presente ν volte in $H(s)$, è quindi rappresentabile come $\frac{1}{(j\omega)^\nu}$. Se presenti sia al numeratore che al denominatore, i termini in questa forma si semplificano tra loro e il risultato viene rappresentato comunque al denominatore, impostando adeguatamente ν ;
- $(j\omega - z_i)$ con z_i reale non nullo: il termine è riscrivibile nella forma $(-z_i)(1 + j\omega\tau_i)$ dove $\tau_i = \frac{1}{-z_i}$ è detto **costante di tempo** del termine;
- $(j\omega - z_k)(j\omega - \bar{z}_k)$ coppia con z_i complesso non reale: si procede portando i termini nella forma

$$\begin{aligned} (j\omega - z_k)(j\omega - \bar{z}_k) &= |z_k|^2 - j(z_k + \bar{z}_k)\omega - \omega^2 \\ &= |z_k|^2 \left(1 - j \frac{2 \operatorname{Re}(z_k)}{|z_k|^2} \omega - \frac{\omega^2}{|z_k|^2} \right) = |z_k|^2 \left(1 + j2\zeta_k \frac{\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right) \end{aligned}$$

dove $\zeta_k = -\frac{\operatorname{Re}(z_k)}{|z_k|}$ è detta **coefficiente di smorzamento** e $\omega_{nk} = |z_k|$ è detta **pulsazione naturale** dei termini.

Questi due valori hanno dunque un significato geometrico: dato il punto $z = \sigma + j\omega$, si nota come ω_n sia la lunghezza del vettore che, nel piano complesso, va dall'origine a z (ovvero il suo modulo, $\omega_n = |z|$), mentre invece ζ è il seno dell'angolo θ che va dal semiasse complesso positivo e al vettore ω_n (quindi $\zeta = \sin \theta = -\sigma/\omega_n = -\operatorname{Re}(z)/|z|$).



Arrivati a questo punto, riscriviamo $H(j\omega)$ con i termini sopra analizzati:

$$H(j\omega) = K_B \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_k \left(1 + j2\zeta'_k \frac{\omega}{\omega'_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{nk}} \right)^{\mu'_k}}{(j\omega)^\nu \prod_i (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_k \left(1 + j2\zeta_k \frac{\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right)^{\mu_k}} \quad (2.18)$$

dove K_B è costante e tiene conto di tutti gli $-z_i, -p_i, |z_k|^2, |p_k|^2$ estratti e viene detta **guadagno di Bode**.

Vogliamo ora graficare il comportamento dell'ampiezza e della fase della risposta in frequenza al variare della pulsazione in ingresso e nel farlo notiamo che

$$\ln(H(j\omega)) = \ln(A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}) = \ln(A(\omega)) + j\Phi(\omega)$$

e che quindi risulta comodo rappresentare nel **diagramma dell'ampiezza** il logaritmo del modulo della risposta in frequenza ($A(\omega)$) in funzione del logaritmo della pulsazione ($\log_{10}(\omega)$) mentre nel **diagramma della fase** l'argomento della risposta in frequenza ($\Phi(\omega)$) sempre in funzione del logaritmo della pulsazione. Per rendere la visualizzazione delle informazioni più uniforme grafichiamo entrambi i diagrammi su scale semilogaritmiche, dove $20 \log_{10} A(\omega)$ e $\Phi(\omega)$ sono rappresentate su scala lineare, mentre ω è rappresentata su scala logaritmica (si fa notare che graficare il logaritmo in base 10 anziché il logaritmo naturale risulta solo in un cambiamento di scala di rappresentazione di ampiezza e fase). Da ora in poi inoltre ometteremo il pedice 10 nell'indicazione del logaritmo in base 10, per ridurre il carico di notazione. *In pratica i diagrammi di Bode sono le rappresentazioni della parte reale e immaginaria di $\ln(H(j\omega))$, con l'ampiezza espressa in dB, ovvero $20 \log A(\omega)$, e la fase $\Phi(\omega)$ espressa in gradi centigradi.*

Graficare direttamente il segnale 2.18 richiede uno sforzo non banale, ma si può dimostrare che il suo grafico dell'ampiezza risulta essere la somma dei grafici delle ampiezze dei termini che la formano e lo stesso principio vale per la fase, grazie alla proprietà rispettivamente dei logaritmi e dell'argomento. Ci concentreremo quindi prima sui grafici dei cosiddetti *fattori elementari* di $H(j\omega)$ e poi basterà sommarli tra loro in ampiezza ed in fase per ottenere i grafici totali della risposta in frequenza.

2.4.1 Diagrammi dei fattori elementari

2.4.1.1 Diagramma del termine costante

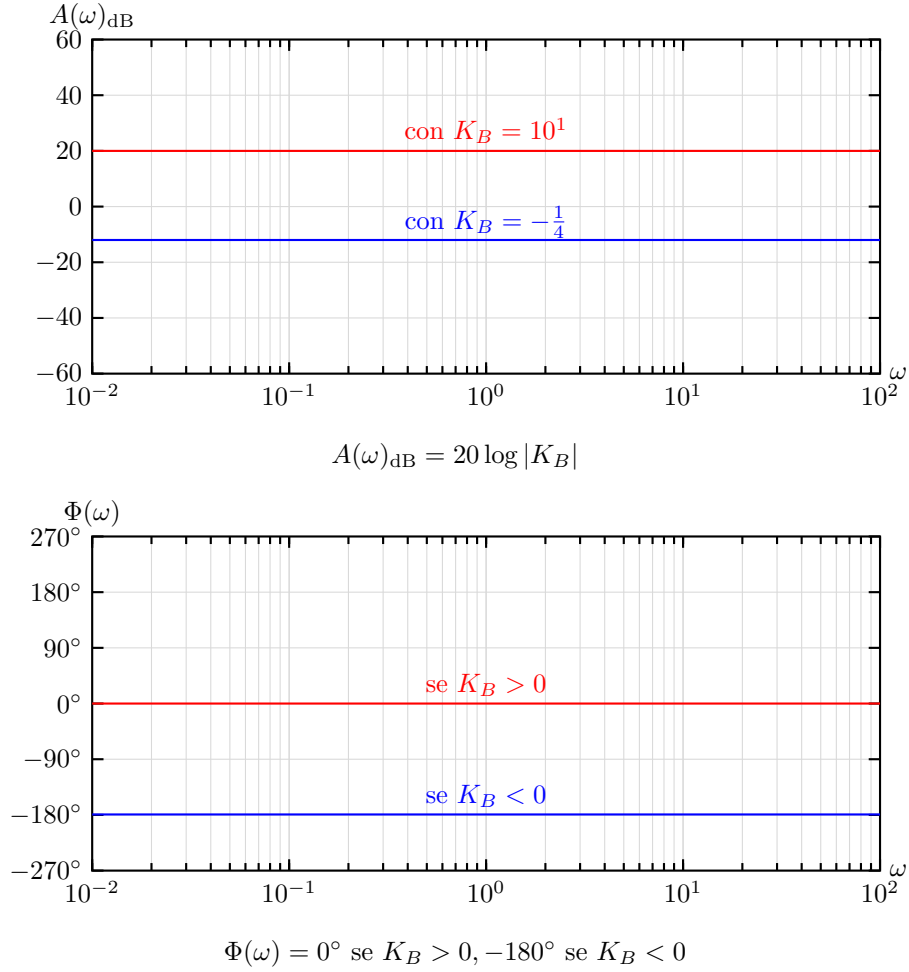
Quando la risposta in frequenza si presenta come un valore reale costante

$$H(j\omega) = K_B$$

è facile calcolare che sia l'ampiezza che la fase saranno costanti per tutte le pulsazioni in ingresso, con valori

$$A(\omega)_{\text{dB}} = 20 \log |K_B|$$

$$\Phi(\omega) = \arg(K_B + j0) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } K_B > 0 \\ -180^\circ & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$$

Figura 2.3: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = K_B$

2.4.1.2 Diagramma del termine monomio

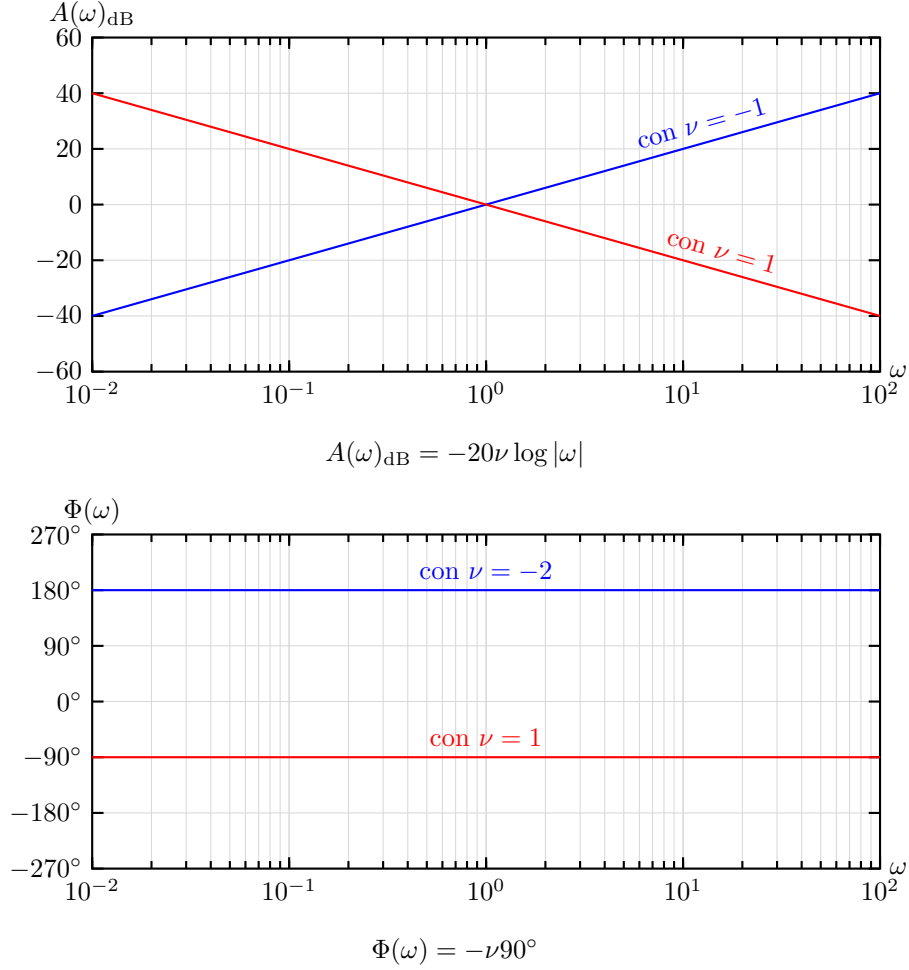
Quando la risposta in frequenza si presenta come

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\nu}$$

basta ricordare che ω è sempre positivo e che quindi

$$\begin{aligned} A(\omega)_{\text{dB}} &= 20 \log |(j\omega)^{-\nu}| = -20\nu \log |j\omega| = -20\nu \log |\omega| \\ \Phi(\omega) &= \arg((j\omega)^{-\nu}) = -\nu \arg(0 + j\omega) = -\nu 90^\circ \end{aligned}$$

il cui grafico risulta essere molto semplice.

Figura 2.4: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\nu}$

2.4.1.3 Diagramma del termine binomio

Quando la risposta in frequenza si presenta come

$$H(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^\mu$$

sviluppando i calcoli vediamo subito che

$$A(\omega)_{\text{dB}} = 20 \log |(1 + j\omega\tau)^\mu| = 20\mu \log \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$\Phi(\omega) = \arg((1 + j\omega\tau)^\mu) = \mu \arg(1 + j\omega\tau)$$

si ottengono dei risultati che variano in base al valore di τ . Dobbiamo quindi prima considerare il comportamento asintotico dei grafici, verso zero e verso infinito, al variare di ω e poi tracciare approssimativamente il grafico reale della funzione. Separiamo i casi $|\omega\tau| \ll 1$ e $|\omega\tau| \gg 1$, nell'ipotesi di avere solo pulsazioni non negative, riscrivibili come $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$ e $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$.

Per $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$ abbiamo

$$A(\omega)_{\text{dB}} \approx 20\mu \log \sqrt{1 + (0)^2} = 0$$

$$\Phi(\omega) \approx \mu \arg(1 + j0) = 0^\circ$$

mentre per $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$ abbiamo

$$A(\omega)_{\text{dB}} \approx 20\mu \log |\omega\tau| = 20\mu(\log \omega + \log |\tau|)$$

$$\Phi(\omega) \approx \mu \arg(j\omega\tau) = \mu \operatorname{sgn}(\tau) 90^\circ.$$

Dobbiamo ora fare alcune considerazioni: nell'ampiezza i due asintoti si toccano in $\omega_t = \frac{1}{|\tau|}$, intuitivamente chiamata **pulsazione di taglio**, mentre il grafico reale è una curva che li segue; nella fase invece possiamo unire i due asintoti orizzontali mediante un segmento di pendenza $\mu \operatorname{sgn}(\tau) 45^\circ/\text{decade}$ a partire da una decade prima e terminante una dopo ω_t , ovvero possiamo congiungere $(\frac{1}{10}\omega_t, 0^\circ)$ con $(10\omega_t, \mu \operatorname{sgn}(\tau) 90^\circ)$. Un segmento ancora migliore, poiché, oltre che passante, anche perfettamente tangente al grafico reale in $(\omega_t, \mu \operatorname{sgn}(\tau) 45^\circ)$, si ottiene congiungendo $(\frac{1}{5}\omega_t, 0^\circ)$ con $(5\omega_t, \mu \operatorname{sgn}(\tau) 90^\circ)$.

In conclusione possiamo riassumere l'andamento asintotico con

$$A(\omega)_{\text{dB}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \omega_t \\ 20\mu(\log \omega + \log |\tau|) & \text{se } \omega \gg \omega_t \end{cases}$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } 0 < \omega \leq \frac{1}{5}\omega_t \\ \mu \operatorname{sgn}(\tau) 45^\circ/\text{decade} & \text{se } \frac{1}{5}\omega_t < \omega < 5\omega_t \\ \mu \operatorname{sgn}(\tau) 90^\circ & \text{se } 5\omega_t \leq \omega < +\infty \end{cases}$$

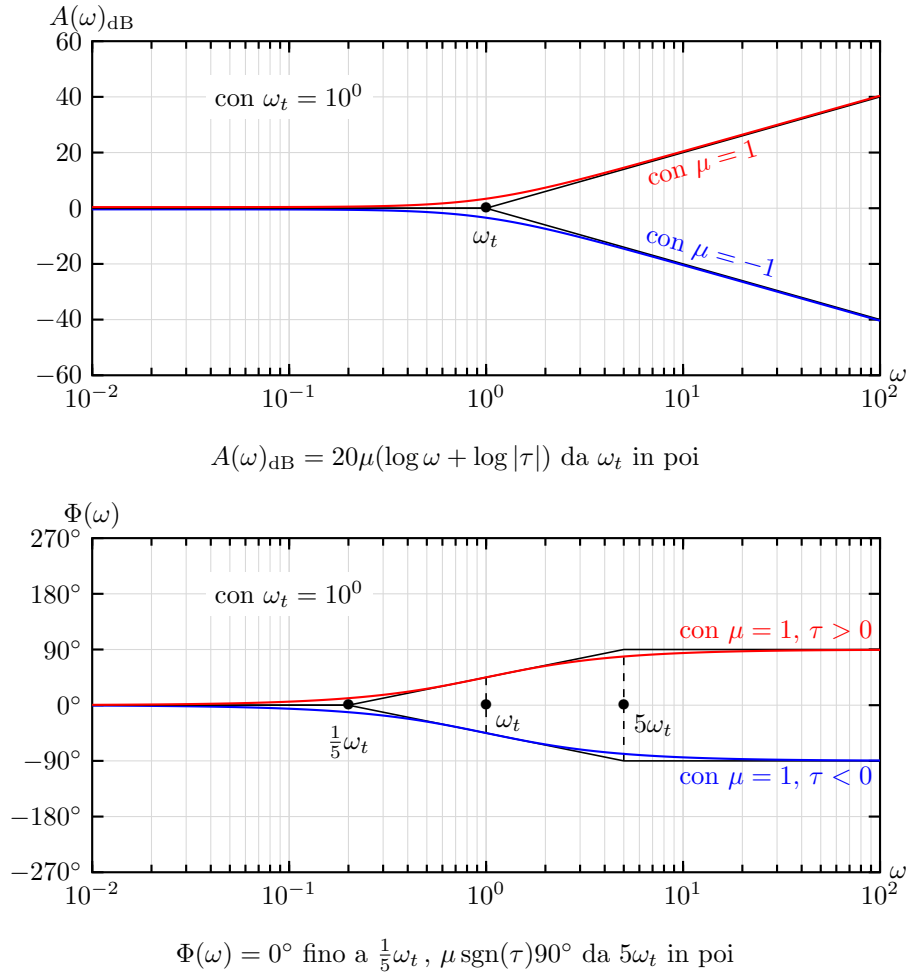


Figura 2.5: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^\mu$

2.4.1.4 Diagramma del termine trinomio

Quando infine la risposta in frequenza si presenta come

$$H(j\omega) = \left(1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$$

sviluppando i calcoli

$$\begin{aligned} A(\omega)_{\text{dB}} &= 20 \log \left| \left(1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu \right| = 20\mu \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ \Phi(\omega) &= \arg \left(\left(1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu \right) = \mu \arg \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right) \\ &= \mu \begin{cases} \arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) & \text{se } \omega < \omega_n \\ \text{sgn}(\zeta) \frac{\pi}{2} & \text{se } \omega = \omega_n \\ \arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) + \text{sgn}(\zeta)\pi & \text{se } \omega > \omega_n \end{cases} \end{aligned}$$

vediamo che anche in questo caso dobbiamo studiare l'andamento asintotico.

Per $\omega \ll \omega_n$ abbiamo

$$\begin{aligned} A(\omega)_{\text{dB}} &\approx 20\mu \log \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 0 \\ \Phi(\omega) &\approx \mu \arctan \left(\frac{0}{1} \right) = 0^\circ \end{aligned}$$

mentre per $\omega \gg \omega_n$ abbiamo

$$\begin{aligned} A(\omega)_{\text{dB}} &\approx 20\mu \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = 40\mu (\log \omega - \log |\omega_n|) \\ \Phi(\omega) &\approx \mu \text{sgn}(\zeta)\pi = \mu \text{sgn}(\zeta)180^\circ \end{aligned}$$

una situazione del tutto analoga al caso del termine binomio, dove gli asintoti questa volta si incontrano nel punto $(\omega_n, 0)$.

Per quanto riguarda il grafico reale, per la fase abbiamo un comportamento analogo a quello del termine binomio, se non che questa volta il segmento migliore che raccorda gli asintoti congiunge i punti $(\frac{1}{5|\zeta|}\omega_n, 0^\circ)$ e $(5|\zeta|\omega_n, \mu \text{sgn}(\zeta)180^\circ)$. Notiamo inoltre che se ζ tende a 0 il segmento tende a stringersi fino a diventare un gradino su ω_n per $\zeta = 0$; in questo caso, come calcolabile dalla formula, la fase ha comportamento asintotico:

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega < \omega_n \\ \pm\mu 180^\circ & \text{se } \omega \geq \omega_n \end{cases}$$

ed il segno è arbitrario poiché $\text{sgn}(0) = \pm 1$.

Volendo ora trattare l'ampiezza, incontriamo finalmente la peculiarità di questo termine: la presenza del coefficiente ζ ; è possibile dimostrare che l'andamento reale del grafico è definito in base a queste casistiche:

- $\zeta = 0$: introduce un picco asintotico su ω_n verso $\text{sgn}(\mu)(-\infty)$, quindi il grafico passa sotto gli asintoti se $\mu > 0$ altrimenti passa sopra se $\mu < 0$;
- $0 < |\zeta| < \frac{1}{2}$: il grafico interseca l'asse delle ascisse a destra di ω_n e come prima passa sotto gli asintoti se $\mu > 0$ oppure sopra se $\mu < 0$;
- $|\zeta| = \frac{1}{2}$: il grafico interseca l'asse delle ascisse esattamente in ω_n ;
- $\frac{1}{2} < |\zeta| < \frac{\sqrt{2}}{2}$: il grafico interseca l'asse delle ascisse a sinistra di ω_n ;
- $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |\zeta| < 1$: il grafico non interseca l'asse delle ascisse e passa sotto gli asintoti se $\mu < 0$ altrimenti passa sopra se $\mu > 0$.

Inoltre, quando il grafico interseca l'asse delle ascisse, ovvero nelle casistiche $0 < |\zeta| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, il grafico ha un punto di massimo (o di minimo, dipende da μ) di coordinate (ω_r, M_r) , dove ω_r è detta **pulsazione di risonanza** e M_r è detto **picco di risonanza** e sono calcolati rispettivamente con

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = |H(j\omega_r)| = \left(2|\zeta|\sqrt{1 - \zeta^2}\right)^\mu$$

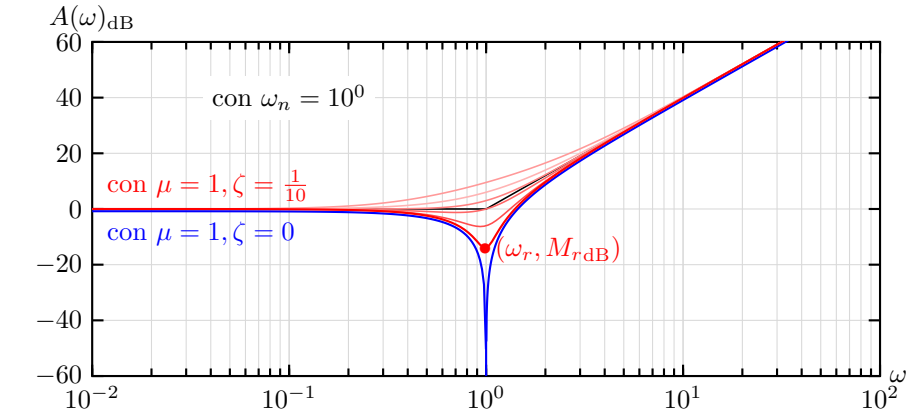
ponendo attenzione al fatto che M_r NON è espresso in dB ed andrà quindi applicata l'opportuna scalatura

$$M_{r\text{dB}} = 20 \log M_r = 20\mu \log\left(2|\zeta|\sqrt{1 - \zeta^2}\right).$$

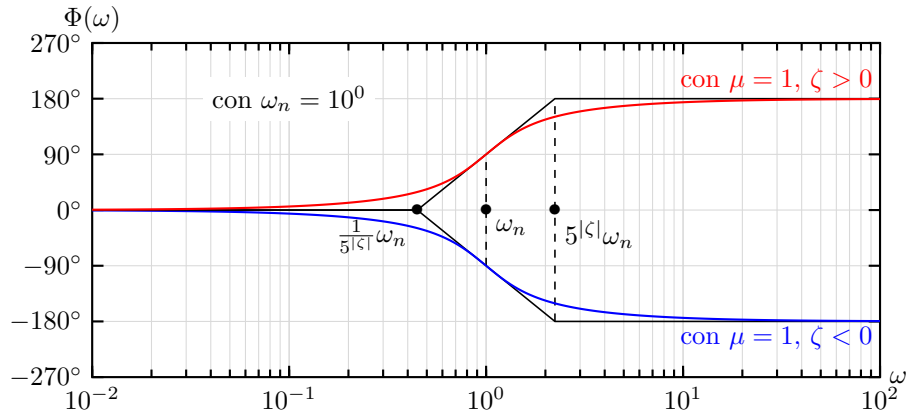
In conclusione possiamo riassumere l'andamento asintotico con

$$A(\omega)_{\text{dB}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ 40\mu(\log \omega - \log |\omega_n|) & \text{se } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } 0 < \omega \leq \frac{1}{5|\zeta|}\omega_n \\ \mu \operatorname{sgn}(\zeta) 90^\circ \text{ dB/decade} & \text{se } \frac{1}{5|\zeta|}\omega_n < \omega < 5|\zeta|\omega_n \\ \mu \operatorname{sgn}(\zeta) 180^\circ & \text{se } 5|\zeta|\omega_n \leq \omega < +\infty \end{cases}$$



$A(\omega)_{\text{dB}} = 40\mu(\log \omega - \log |\omega_n|)$ da ω_n in poi
(in rosa i grafici per $\zeta = 1, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, in rosso per $\zeta = \frac{1}{10}$)

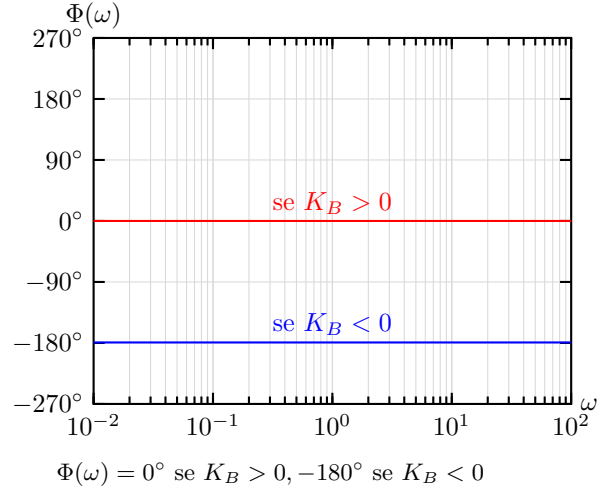
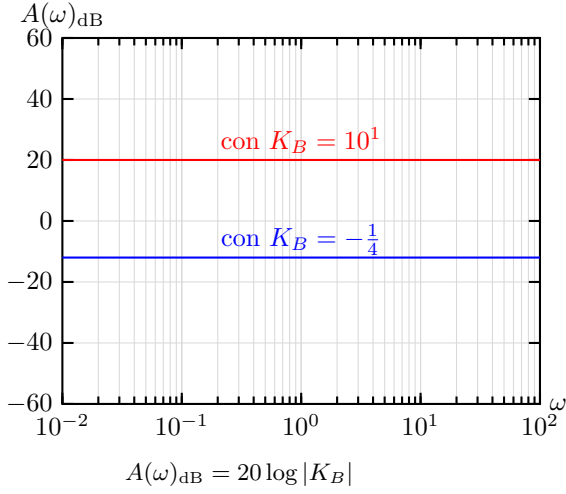


$\Phi(\omega) = 0^\circ$ fino a $\frac{1}{5|\zeta|}\omega_n$, $\mu \operatorname{sgn}(\zeta) 180^\circ$ da $5|\zeta|\omega_n$ in poi

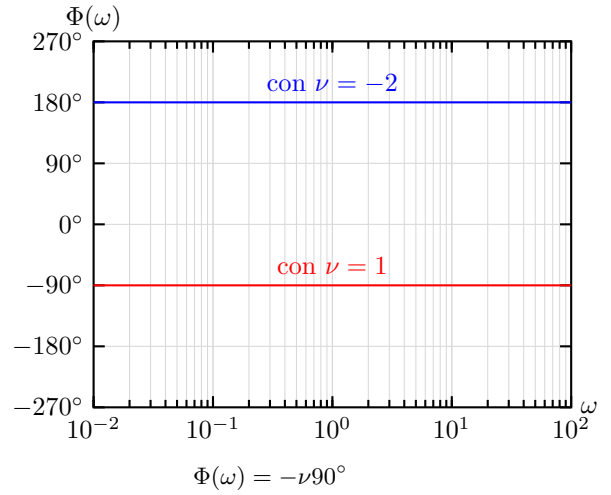
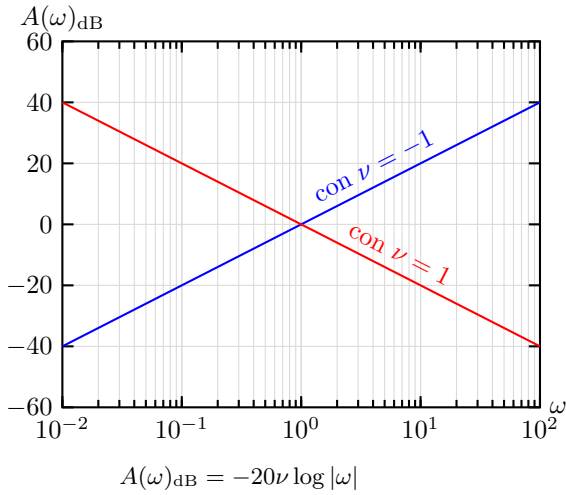
Figura 2.6: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = \left(1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$

2.4.2 Cheatsheet diagrammi di Bode

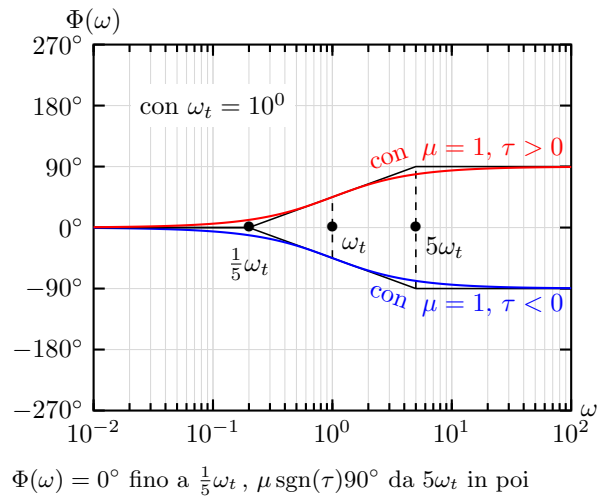
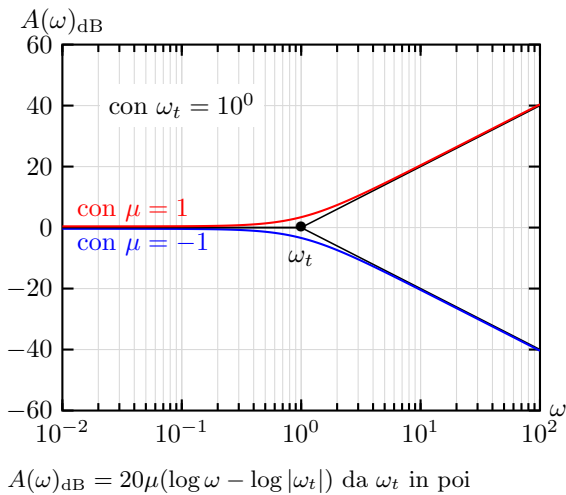
2.4.2.1 Termine costante $H(j\omega) = K_B$



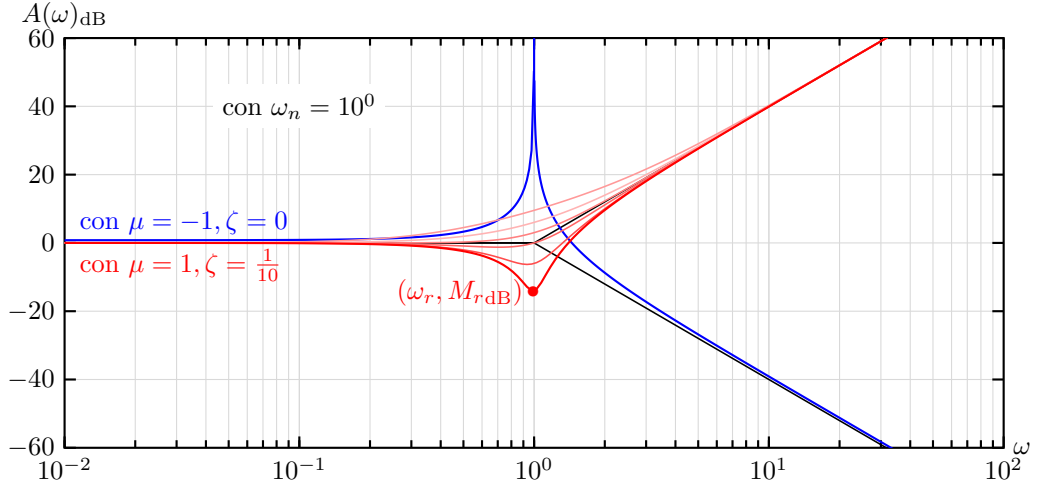
2.4.2.2 Termine monomio $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\nu}$



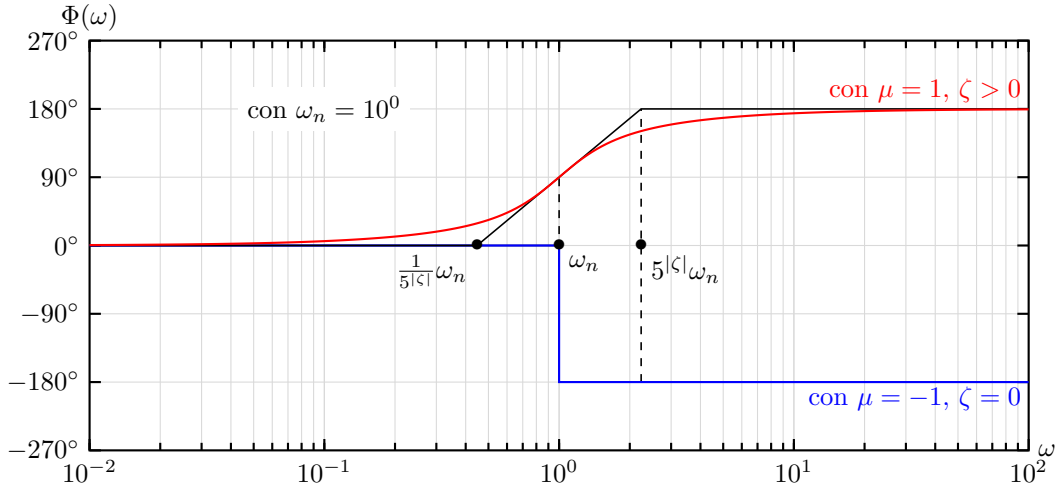
2.4.2.3 Termine binomio $H(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^\mu$



2.4.2.4 Termine trinomio $H(j\omega) = \left(1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$



$A(\omega)_{\text{dB}} = 40\mu(\log \omega - \log |\omega_n|)$ da ω_n in poi (in rosa i grafici per $\zeta = \frac{3}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, in rosso per $\zeta = \frac{1}{10}$; notiamo che per $\zeta \geq 1$ il trinomio è riscrivibile come binomio)



$\Phi(\omega) = 0^\circ$ fino a $\frac{1}{5|\zeta|}\omega_n$, $\mu \operatorname{sgn}(\zeta)180^\circ$ da $5|\zeta|\omega_n$ in poi

Il grafico reale dell'ampiezza varia in base al valore del coefficiente di smorzamento:

- con $\zeta = 0$: picco asintotico su ω_n verso $\operatorname{sgn}(\mu)(-\infty)$, quindi passa sotto se $\mu > 0$, sopra se $\mu < 0$
- con $0 < |\zeta| < \frac{1}{2}$: il grafico interseca l'asse x a destra di ω_n , passa sotto se $\mu > 0$, sopra se $\mu < 0$
- con $|\zeta| = \frac{1}{2}$: il grafico interseca l'asse x esattamente in ω_n
- con $\frac{1}{2} < |\zeta| < \frac{\sqrt{2}}{2}$: il grafico interseca l'asse x a sinistra di ω_n
- con $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |\zeta| < 1$: il grafico non interseca l'asse x , passa sotto se $\mu < 0$, sopra se $\mu > 0$.

Nelle casistiche $0 < |\zeta| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, il grafico reale dell'ampiezza ha un punto di massimo (o di minimo) in (ω_r, M_r) , dove dobbiamo ricordarci di esprimere su scala logaritmica M_r :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad M_{r\text{dB}} = 20\mu \log(2|\zeta|\sqrt{1 - \zeta^2})$$

Capitolo 3

Regime frequenziale

Nell'analisi dei sistemi LTI abbiamo visto che la risposta totale può essere espressa come somma di fasori di varie ampiezze e ci chiediamo quindi se ogni segnale si possa esprimere in questo modo. Nelle considerazioni fatte nel dominio complesso abbiamo utilizzato sempre la pulsazione ω , ma per questo capitolo adottiamo come variabile la frequenza f , ottenuta come già visto da $f = \frac{\omega}{2\pi}$, quindi per riformulare nel dominio delle frequenze i risultati precedentemente ottenuti basterà sostituire $2\pi f$ a ω . Inoltre, rappresenteremo i fasori nella forma $e^{j2\pi f_0 t}$, ovvero come numeri complessi che compiono f_0 giri attorno all'origine ogni secondo.

3.1 Serie di Fourier

Per cominciare vogliamo porre la nostra attenzione sui segnali periodici. Possiamo notare che la somma di segnali periodici è anch'essa un segnale periodico solo quando il rapporto tra i due periodi è un numero razionale. In conseguenza a questo possiamo dire che ogni combinazione lineare finita di fasori di frequenze multiple di una fondamentale $f_0 = 1/T_0$ è un segnale periodico di periodo T_0 , ovvero che, in un intervallo $[t_0, t_0 + T_0)$, per qualsiasi $v(t)$ periodico,

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad \text{eq. di sintesi} \quad (3.1)$$

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} v(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad \text{eq. di analisi} \quad (3.2)$$

chiamata la **serie di Fourier** del segnale $v(t)$.

Va immediatamente notato che

$$v_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} v(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt = \overline{v_k}$$

e che quindi $|v_{-k}| = |v_k|$ e invece $\arg(v_{-k}) = -\arg(v_k)$.

3.2 Analisi nelle frequenze

3.2.1 Trasformata di Fourier

Prendiamo ora in esame i segnali non periodici, per i quali non esiste la serie di Fourier. In questo caso useremo uno strumento più potente, la **trasformata di Fourier**

$$V(f) = \mathcal{F}[v](f) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (3.3)$$

che descrive un segnale in base alle sue componenti frequenziali mediante fasori, usando come variabile reale f nel dominio delle frequenze. L'antitrasformata, per tornare dal dominio frequenziale a quello temporale, è

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V](t) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (3.4)$$

Su un segnale $v(t)$ è possibile applicare la trasformata di Fourier se almeno una delle tre seguenti condizioni viene soddisfatta:

- $v(t)$ è *sommabile* e a varianza limitata, cioè si può esprimere come differenza di funzioni limitate non decrescenti, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)| dt < +\infty$$

- $v(t)$ è *al quadrato sommabile* ed è un segnale di energia, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt < +\infty$$

- $v(t)$ è un segnale di potenza, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = +\infty \text{ ma } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |v(t)|^2 dt < +\infty.$$

In quest'ultimo caso, dato che l'energia di un segnale di potenza è infinita, per calcolare la trasformata è necessario "finestrare" il segnale $v(t)$. Per farlo, utilizziamo un segnale finestra (rettangolare o triangolare, nel nostro caso la prima)

$$w_T(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

di area T e ampiezza unitaria, e finestriamo il segnale, quindi

$$v_T(t) \doteq v(t) \cdot w_T(t).$$

Notiamo subito che quest'ultimo segnale è di energia, dato che ha supporto compatto, e che al limite $T \rightarrow +\infty$ riotteniamo il segnale $v(t)$; la trasformata può quindi essere schematizzata come

$$v(t) \xrightarrow{\text{FIN}} v_T(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} V_T(f) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} V(f).$$

3.2.2 Proprietà della TdF

Dato che la trasformata di Fourier non è altro che la trasformata di Laplace bilatera specializzata con $s = j\omega$ (ovvero $s = j2\pi f$), tutte le proprietà che abbiamo già trattato in 2.2.1.1 vengono ereditate, aggiustando opportunamente i risultati con il corretto valore di s .

Linearità : $af(t) + bg(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aF(f) + bG(f)$

Riflessione e coniugazione :

- $v(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V(-f)$

DIM.

$$\mathcal{F}[v(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v(-t)e^{-2\pi ft} dt \xrightarrow[x=-dt]{x=-t} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)e^{-2\pi(-f)x} dx = V(-f) \quad \square$$

- $\overline{v(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \overline{V(-f)}$

DIM.

$$\mathcal{F}[\overline{v(t)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(t)}e^{-2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(t)e^{-2\pi(-f)t}} dx = \overline{V(-f)} \quad \square$$

- $\overline{v(-t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \overline{V(f)}$

DIM.

$$\mathcal{F}[\overline{v(-t)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(-t)}e^{-2\pi ft} dt \xrightarrow[x=-dt]{x=-t} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(x)}e^{2\pi fx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(x)e^{-2\pi fx}} dx = \overline{V(f)} \quad \square$$

Time shifting : $v(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_0} V(f)$

Frequency shifting : $e^{j2\pi f_0 t} v(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V(f - f_0)$

Cambiamento di scala : $v(rt) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{r} V\left(\frac{f}{r}\right)$

Derivazione : $\frac{dv(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f) V(f)$

Possiamo estendere la definizione per le derivate di ordine i con

$$\frac{d^i v(t)}{dt^i} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f)^i V(f)$$

Integrazione : $\int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{V(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} V(0) \delta(f)$

Convoluzione : $(f * g)(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(f)G(f)$

Modulazione : $f(t)g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (F * G)(f)$

3.2.3 Trasformate notevoli

Applichiamo la TdF ai vari segnali elementari e studiamone le trasformate. Molte di quelle già viste per la trasformata di Laplace rimangono identiche, basta solo impostare $s = j2\pi f$, e quindi verranno omesse. Studieremo in particolare le funzioni periodiche, seno e coseno, e di filtro, box.

funzione impulso $\delta(t)$: usiamo la proprietà di campionamento dell'impulso

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1$$

funzione impulso traslato $\delta(t - t_0)$: caso analogo a quello sopra, ma avremo valore solo per $t = t_0$

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0}$$

finestra rettangolare $\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$: il supporto della finestra va a limitare gli estremi di integrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \left. \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f (T/2)} - e^{-j2\pi f (-T/2)} \right) = T \frac{1}{\pi T f} \left(\frac{e^{j(\pi T f)} - e^{-j(\pi T f)}}{2j} \right) \\ &= T \cdot \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \operatorname{sinc}(T f) \end{aligned}$$

funzione costante A : questo è il più banale dei segnali di potenza ed è quindi necessario finestrarlo in $v_T(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ e poi trasformarlo come visto sopra

$$V_T(f) = \mathcal{F}[A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)] = A \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-j2\pi f t} dt = AT \operatorname{sinc}(T f).$$

A questo punto facciamo tendere $T \rightarrow +\infty$ e otteniamo il risultato voluto

$$\mathcal{F}[A] = V(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} V_T(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} AT \operatorname{sinc}(T f) = A\delta(f).$$

fasore (funzione esponenziale) $e^{j2\pi f_0 t}$: anche questo è un segnale di potenza, quindi va finestrato in $v_T(t) = e^{j2\pi f_0 t} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ e poi trasformato

$$V_T(f) = \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)] = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-j2\pi (f - f_0) t} dt = T \operatorname{sinc}(T(f - f_0)).$$

Come prima, ora facciamo tendere $T \rightarrow +\infty$ e otteniamo

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = V(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} V_T(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} T \operatorname{sinc}(T(f - f_0)) = \delta(f - f_0).$$

funzione coseno $\cos(2\pi f_0 t)$: sfruttando la formula di Eulero, notiamo che avremo come risultato due impulsi traslati nel dominio frequenziale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] + \mathcal{F}[e^{j2\pi(-f_0)t}] \right) = \frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \end{aligned}$$

funzione seno $\sin(2\pi f_0 t)$: come per il seno, sfruttiamo la formula di Eulero e notiamo anche in questo caso che il risultato saranno due impulsi traslati nel dominio frequenziale, di cui uno negativo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \right) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] - \mathcal{F}[e^{j2\pi(-f_0)t}] \right) = \frac{1}{2j} (-\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \end{aligned}$$

treno campionatore ideale $\tilde{\delta}_T(t)$: trasformiamo semplicemente ogni impulso che compone il treno e definiamo $f_T = 1/T$. Otteniamo quindi la serie di Fourier di un segnale periodico $v(t)$ di periodo f_T in cui tutti i v_k sono pari a 1, ovvero del segnale $v(t)$ formato da infiniti impulsi nelle frequenze distanziati f_T tra loro scalati di f_T

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{\delta}_T(t)] &= \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\delta(t - kT)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f kT} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi f kT} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k\frac{1}{T}) = f_T \cdot \tilde{\delta}_{f_T}(f) \end{aligned}$$

Segnale	Trasformata \mathcal{F}	Segnale	Trasformata \mathcal{F}
A	$A\delta(f)$	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} (-\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$
$Ae^{j2\pi f_0 t}$	$A\delta(f - f_0)$	$\Pi(\frac{t}{T})$	$T \operatorname{sinc}(Tf)$
$Ae^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$	$\frac{A}{j2\pi f - \lambda}$	$\Lambda(\frac{t}{T})$	$T \operatorname{sinc}^2(Tf)$
		$\tilde{\delta}_T(t)$	$f_T \cdot \tilde{\delta}_{f_T}(f)$

Tabella 3.1: Le principali trasformate notevoli di Fourier

3.3 Conversione tra continuo e discreto

3.3.1 Replicazione e campionamento di un segnale

Definiamo la **versione replicata di passo T del segnale $v(t)$** il segnale periodico

$$[\text{rep}_T v](t) \doteq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t) * \delta(t - kT)$$

mentre invece definiamo la **versione campionata di passo T del segnale $v(t)$** il segnale

$$[\text{samp}_T v](t) \doteq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot \delta(t - kT) = v(t) \cdot \tilde{\delta}_T(t).$$

Con quest'ultima definizione vediamo come il segnale di partenza, campionato con passo T , sia stato trasformato in un segnale discreto. Trasformiamo ora i due segnali appena definiti e scopriamone il legame

$$\begin{aligned} [\text{rep}_T v](t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} f_T [\text{samp}_{f_T} V](f) \\ [\text{samp}_T v](t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} f_T [\text{rep}_{f_T} V](f). \end{aligned}$$

Questo significa che un segnale campionato nel tempo, quando trasformato in Fourier, è un segnale scalato di f_T e replicato ogni f_T nelle frequenze. Sorge spontaneo pensare alla dimensione della frequenza di campionamento f_T in quanto, se presa troppo piccola, rischia di sovrapporre le repliche del segnale nelle frequenze, provocando il fenomeno di **aliasing**, dopo il quale non è più possibile ricostruire il segnale iniziale (poiché “corrotto” nelle parti sovrapposte).

3.3.2 Teorema del campionamento

Dato un segnale $v_0(t)$ campionato con periodo T_c (e quindi con frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$) nel segnale $v(t) = [\text{samp}_T v_0](t)$, è possibile trasformarlo in Fourier ed applicarne filtri e operazioni in frequenza per poi riportarlo nel dominio temporale. Il segnale in frequenza però non può essere ricostruito se si presenta il fenomeno di *aliasing*, riscontrabile quando la frequenza di campionamento viene scelta arbitrariamente. Affinché il segnale campionato trasformato possa essere ricostruito nel segnale originale $v_0(t)$ è necessario fare delle considerazioni: il segnale $v_0(t)$ deve essere limitato in banda, ovvero deve esistere una frequenza $B > 0$ (la più piccola possibile) tale che $\forall f. |f| > B \implies V_0(f) = 0$.

Appurato questo, il **teorema di Shannon-Nyquist** enuncia che, dato un segnale limitato in banda, esso può essere ricostruito da un segnale campionato $v(t)$ solo se la frequenza di campionamento è $f_c > 2B$, dove $2B$ è detta la **frequenza di Nyquist** del segnale trasformato. Per la ricostruzione sarà necessario un **filtro di ricostruzione** $H_r(f)$, il quale dovrà essere costruito per permettere la selezione del solo segnale replicato in $f = 0 \cdot f_c$; esso sarà una box larga almeno $2B$ definita come

$$H_r(f) = T_c \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right)$$

dove f_L soddisfa il vincolo $B < f_L < f_c - B$.

A questo punto la ricostruzione di $v_0(t)$ è piuttosto immediata, infatti basta applicare il filtro al segnale in frequenza e antitrasformare con Fourier

$$\begin{aligned} v_0(t) &\xrightarrow{\text{samp}} v(t) = [\text{samp}_{T_c} v_0](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_0(t) \delta(t - kT) \\ &\xrightarrow{\mathcal{F}} V(f) = f_c [\text{rep}_{f_c} V](f) \\ &\xrightarrow{H_r(f)} f_c [\text{rep}_{f_c} V](f) \cdot T_c \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(f) * \delta(f - kf_c) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) \\ &\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right) \end{aligned}$$

per ottenere la **formula di interpolazione ideale o di Shannon**, che ricostruisce un segnale come somma di segnali sinc applicati ai valori del segnale campionato.

Capitolo 4

Regime tempo-discreto

4.1 Sistemi LTI SISO

Un *sistema tempo-discreto* (o semplicemente *discreto*) è una qualsiasi funzione $S: (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ che trasforma segnali discreti in segnali discreti, analogamente ai sistemi continui. In questo caso non possiamo esprimere le condizioni iniziali con le derivate dell'uscita, infatti il modello che meglio descrive questi sistemi sono le equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti.

Un sistema discreto è quindi definito come

$$\sum_{i=0}^n a_i v(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i). \quad (4.1)$$

dove le condizioni iniziali saranno la **memoria** del sistema, ovvero gli n istanti antecedenti a k di cui il sistema ha bisogno per definire lo “stato iniziale” all'istante 0, cioè i valori

$$v(-1), v(-2), \dots, v(-n).$$

Esempi di sistemi discreti possono essere l'andamento della borsa, che viene predetto per il giorno successivo con una certa probabilità in base ai giorni precedenti, la successione di Fibonacci, che è definita per il prossimo valore in base ai due valori precedenti.

Possiamo analizzare ulteriori casistiche a partire dal sistema 4.1: nel caso di $n = 0$ si ha il **modello a media mobile (MA)**, nella forma

$$v(k) = \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{a_0} u(k-i)$$

mentre nel caso di $m = 0$ si ha il **modello auto regressivo (AR)**, nella forma

$$v(k) = \frac{b_0}{a_0} u(k) - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_0} v(k-i).$$

Un **sistema ARMA** è la concatenazione di un sistema *MA* ed un sistema *AR* e non altro che una riproposizione della 4.1 nella forma

$$v(k) = \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{a_0} u(k-i) - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_0} v(k-i).$$

Un sistema discreto è **proprio** se $a_0 \neq 0$ mentre è detto **strettamente proprio** se $a_0 \neq 0, b_0 = 0$.

Vediamo ora per analogia le considerazioni fatte per i sistemi continui, anche qui prendendo in esame solo sistemi LTI causali.

4.1.1 Evoluzione libera $v_\ell(k)$

Consideriamo il caso in cui valgono solo le condizioni iniziali e l'ingresso è quindi nullo. Il sistema si troverà nella forma

$$\sum_{i=0}^n a_i v(k-i) = 0$$

ed avrà equazione caratteristica

$$a_{n-i}z^i + a_{n-i-1}z^{i-1} + \cdots + a_{n+1}z + a_n = 0$$

la cui soluzione sarà l'**evoluzione libera**

$$v_\ell(k) = \sum_{i=1}^r \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} c_{i,\ell} \lambda_i^\ell \frac{k^\ell}{\ell!}. \quad (4.2)$$

dove i vari λ_i sono le radici dell'equazione caratteristica. Anche in questo caso dovremo calcolare i coefficienti $c_{i,\ell}$ impostando il sistema

$$\begin{cases} v_\ell(-1) = v(-1) \\ v_\ell(-2) = v(-2) \\ \vdots \end{cases}$$

4.1.2 Modi elementari discreti $m_{i,\ell}$

Come visto nella 4.2, dato che i segnali esponenziali discreti sono nella forma $A\lambda^k$, i modi elementari sono rappresentati come

$$m_{i,\ell} = \frac{k^\ell}{\ell!} \lambda_i^k$$

per i quali, definendo $\lambda_i = \rho_i e^{j\phi_i}$, possiamo calcolare

$$m_{i,\ell} = \frac{k^\ell}{\ell!} (\rho_i e^{j\phi_i})^k = \frac{k^\ell}{\ell!} (e^{\ln \rho_i} e^{j\phi_i})^k = \frac{k^\ell}{\ell!} e^{(\ln \rho_i + j\phi_i)k} = \frac{k^\ell}{\ell!} e^{\sigma_i k}$$

dove $\sigma_i = \ln \rho_i + j\phi_i$; notiamo in quest'ultimo risultato la somiglianza con i modi elementari tempo-continui e che, seppur espressi in una forma differente, i segnali esponenziali discreti sono del tutto analoghi a quelli continui. Riassumendo,

$$m_{i,\ell} = \frac{k^\ell}{\ell!} \lambda_i^k = \frac{k^\ell}{\ell!} e^{k \ln \rho_i} (\cos(\phi_i k) + j \sin(\phi_i k))$$

4.1.3 Risposta impulsiva $h(k)$

Quando al sistema viene posto come segnale di ingresso l'impulso $\delta(k)$ la risposta prodotta viene detta *impulsiva*, come abbiamo già visto, ed è dimostrabile

$$v(k) = (h * u)(k) \doteq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)u(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(k-i)u(i),$$

ovvero che anche la risposta di un sistema discreto è data dalla convoluzione (discreta) tra la risposta impulsiva con l'ingresso.

Possiamo fare delle considerazioni sugli estremi di integrazione: dato che $h(k)$ e $u(k)$ sono segnali causali essi valgono 0 per $k < 0$ e questo ci permette di limitare i con $i > 0$ e $i < k$ (analogamente a quanto fatto nel tempo-continuo), così da riscrivere la convoluzione come

$$v(k) = (h * u)(k) = \sum_{i=0}^k h(i)u(k-i). \quad (4.3)$$

Per calcolare la risposta impulsiva procediamo ponendo $v(k) = h(k)$ e $u(k) = \delta(k)$ nel sistema discreto 4.1 ottenendo

$$\sum_{i=0}^n a_i h(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i \delta(k-i). \quad (4.4)$$

Ora dobbiamo considerare i casi al variare di n ma riassumendo possiamo esprimere la risposta impulsiva nel seguente modo:

$$\text{se } n = 0 : \quad h(k) = \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^m d_i \delta(k-i) \quad (4.5)$$

$$\text{se } n > m : \quad h(k) = \sum_{i=1}^r \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} d_{i,\ell} \lambda_i^k \frac{k^\ell}{\ell!} \delta_{-1}(k) \quad (4.6)$$

$$\text{se } n \leq m : \quad h(k) = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \delta(k-i) + \sum_{i=1}^r \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} d_{i,\ell} \lambda_i^k \frac{k^\ell}{\ell!} \delta_{-1}(k-m+n-1) \quad (4.7)$$

Valutiamo l'equazione del sistema 4.4 con k impostato crescente, cioè:

con $k = 0$,

$$S : a_0 h(0) + \cancel{a_1 h(-1)} + \cancel{a_2 h(-2)} + \dots = b_0 \delta(0) + \cancel{b_1 \delta(-1)} + \cancel{b_2 \delta(-2)} + \dots,$$

con $k = 1$,

$$S : a_0 h(1) + a_1 h(0) + \cancel{a_2 h(-1)} + \dots = \cancel{b_0 \delta(1)} + b_1 \delta(0) + \cancel{b_2 \delta(-1)} + \dots,$$

con $k = 2$,

$$S : a_0 h(2) + a_1 h(1) + a_2 h(0) + \dots = \cancel{b_0 \delta(2)} + \cancel{b_1 \delta(1)} + b_2 \delta(0) + \dots$$

e così via fino a $k = n$, eliminando i vari $h(k)$ con $k < 0$ (perché causale) e i vari $\delta(k)$ quando $k \neq 0$ (perché definito solo in $k = 0$). Ora impostiamo un sistema con le equazioni ottenute

$$\begin{cases} a_0 h(0) = b_0 \\ a_0 h(1) + a_1 h(0) = b_1 \\ a_0 h(2) + a_1 h(1) + a_2 h(0) = b_2 \\ \vdots \end{cases}$$

e calcoliamo i valori di $h(0), h(1), \dots, h(n)$. A questo punto basta impostare un sistema dove associamo questi valori alla giusta formula per $h(k)$ per poter finalmente calcolare i vari coefficienti d_i e $d_{i,\ell}$.

4.1.4 Evoluzione forzata $v_f(k)$

Nel caso in cui le condizioni iniziali del sistema siano nulle e venga fornito in ingresso un segnale, il sistema si comporta anche in questo regime producendo l'**evoluzione forzata** nella forma

$$v_f(k) = (h * u)(k) = \sum_{i=0}^k h(i) u(k-i).$$

Calcolare questa sommatoria risulta comunque arduo, ma possiamo adoperare la stessa tecnica usata per la risposta impulsiva, ovvero impostare vari valori per k e, per sostituzione, trovare una $v_f(k)$ in base alle equazioni ottenute; qui non esiste un metodo preciso ed è utile saper riconoscere pattern ricorrenti.

4.1.5 Risposta totale

Come nel regime tempo-continuo, la risposta totale del sistema è data dalla somma delle evoluzioni, ovvero

$$v(k) = v_\ell(k) + v_f(k).$$

4.1.6 Esercizio svolto

Dato il sistema discreto con condizioni iniziali e ingresso qualsiasi (vedremo che non è necessario conoscerlo)

$$\begin{cases} v(k) - v(k-2) = u(k-1) + 2u(k-2) \\ v(-1) = 1 \\ v(-2) = 2 \end{cases}$$

cominciamo calcolando le radici dell'equazione caratteristica

$$z^2 - 1 = 0,$$

che sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

Ora scriviamo l'evoluzione libera

$$v_\ell(k) = c_1(1)^k + c_2(-1)^k$$

e impostiamo il sistema

$$\begin{cases} v(-1) = c_1 - c_2 = 1 \\ v(-2) = c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

dal quale si ottengono $c_1 = \frac{3}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$ e quindi $v_\ell(k) = \frac{3}{2}(1)^k + \frac{1}{2}(-1)^k$.

Per calcolare l'evoluzione forzata cominciamo trovando $h(k)$, quindi imposto il sistema come

$$h(k) - h(k-2) = \delta(k-1) + 2\delta(k-2)$$

e dato che $n = m$ scriviamo

$$h(k) = d_0\delta(k) + (d_1(1)^k + d_2(-1)^k)\delta_{-1}(k-1).$$

Ora si calcolano i valori di $h(k)$ nel sistema

con $k = 0$,

$$h(0) - \cancel{h(-2)} = \delta(\cancel{-1}) + \cancel{2\delta(-2)},$$

con $k = 1$,

$$h(1) - \cancel{h(-1)} = \delta(0) + \cancel{2\delta(-1)},$$

con $k = 2$,

$$h(2) - h(0) = \cancel{\delta(1)} + 2\delta(0)$$

e quindi $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ e $h(2) = 2$; impostiamo il sistema

$$\begin{cases} h(0) = d_0\delta(0) + (d_1(1)^0 + d_2(-1)^0)\delta_{-1}(-1) = 0 \rightarrow d_0 = 0 \\ h(1) = d_0\delta(1) + (d_1(1)^1 + d_2(-1)^1)\delta_{-1}(0) = 1 \rightarrow d_1 - d_2 = 1 \\ h(2) = d_0\delta(2) + (d_1(1)^2 + d_2(-1)^2)\delta_{-1}(1) = 2 \rightarrow d_1 + d_2 = 2 \end{cases}$$

e otteniamo $d_0 = 0$, $d_1 = \frac{3}{2}$ e $d_2 = \frac{1}{2}$, quindi $h(k) = (\frac{3}{2}(1)^k + \frac{1}{2}(-1)^k)\delta_{-1}(k-1)$.

Per trovare l'evoluzione forzata si deve calcolare $v(k)$ nel sistema

con $k = 0$,

$$v(0) - \cancel{v(-2)} = \cancel{u(-1)} + \cancel{2u(-2)},$$

con $k = 1$,

$$v(1) - \cancel{v(-1)} = u(0) + \cancel{2u(-1)},$$

con $k = 2$,

$$v(2) - v(0) = u(1) + 2u(0)$$

con $k = 3$,

$$v(3) - v(1) = u(2) + 2u(1)$$

con $k = 4$,

$$v(4) - v(2) = u(3) + 2u(2)$$

ricordando che per valori di $k < 0$ abbiamo $v(k) = u(k) = 0$ perché causali; vediamo che

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 \\ v(1) &= u(0) \\ v(2) &= u(1) + 2u(0) \\ v(3) &= u(2) + 2u(1) + u(0) \\ v(4) &= u(3) + 2u(2) + u(1) + 2u(0) \end{aligned}$$

quindi il pattern $v_f(k) = u(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k/2} u(k-2i) + \sum_{i=1}^{(k-1)/2} u(k-1-2i)$ è l'evoluzione forzata.

4.2 Analisi in \mathcal{Z}

4.2.1 Trasformata Zeta

Nel regime tempo-continuo abbiamo visto la potenza della trasformata di Laplace e pertanto vogliamo avere uno strumento altrettanto potente anche per il regime discreto, che ci permetta di evitare di svolgere lunghi calcoli per sostituzione. A questo serve la trasformata Zeta bilatera, che è definita come

$$V(z) = \mathcal{Z}_b[v](z) \doteq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k)z^{-k}$$

dove $z = \sigma + j\omega$ è una variabile complessa.

Come per la TdL, noi trattiamo solo sistemi causali e quindi possiamo restringere gli estremi della sommatoria e utilizzare la definizione di **trasformata Zeta unilatera**

$$V(z) = \mathcal{Z}[v](z) \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} v(k)z^{-k}. \quad (4.8)$$

Utilizzeremo la trasformata Zeta per svolgere allo stesso modo dei sistemi continui anche i sistemi discreti, trasformando l'intero sistema e moltiplicandolo per z^n , perché come si può intuire dalla definizione della trasformata avremo a che fare con potenze a esponente negativo, di scomoda notazione. Dopo aver fatto ciò basterà seguire esattamente quanto dimostrato per il regime tempo-continuo e poi antitrasformare, ottenendo la risposta finale nel tempo discreto.

4.2.1.1 Proprietà della TZ

Vengono elencate le principali proprietà della trasformata Zeta; di particolare importanza sarà la proprietà di *ritardo temporale*, sulla quale baseremo l'analisi in Zeta dei sistemi discreti.

Linearità : $af(k) + bg(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} aF(z) + bG(z)$

DIM.

$$\mathcal{Z}[af(k) + bg(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} (af(k) + bg(k))z^{-k} = a \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} + b \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)z^{-k} = aF(z) + bG(z)$$

□

Moltiplicazione per k : $kv(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{d}{dz}(V(z))$

DIM.

$$\begin{aligned} -z \frac{d}{dz} V(z) &= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{+\infty} v(k)z^{-k} = -z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dz} (v(k)z^{-k}) = -z \sum_{k=0}^{+\infty} (\cancel{v(k)z^{-k}} + v(k)(-k)z^{-k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} kv(k) \cdot z^{-k} = \mathcal{Z}[kv(k)] \end{aligned}$$

□

Moltiplicazione per k^2 : $k^2v(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z \frac{d}{dz}(V(z)) + z^2 \frac{d^2}{dz^2}(V(z))$

DIM.

$$\mathcal{Z}[k^2v(k)] = \mathcal{Z}[k(kv(k))] = -z \frac{d}{dz} \left(\mathcal{Z}[kv(k)] \right) = -z \frac{d}{dz} \left(-z \frac{d}{dz} V(z) \right) = z \frac{d}{dz} (V(z)) + z^2 \frac{d^2}{dz^2} (V(z))$$

□

Moltiplicazione per λ^k : $\lambda^k v(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} V\left(\frac{z}{\lambda}\right)$

DIM.

$$\mathcal{Z}[\lambda^k v(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k v(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} v(k) \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-k} = V\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

□

Ritardo temporale $v(k-i) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-i} V(z) + \sum_{k=-i}^{-1} v(k) z^{-k-i}$

DIM.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[v(k-i)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} v(k-i) z^{-k} \xrightarrow{x=k-i} \sum_{x=-i}^{+\infty} v(x) z^{-x-i} \xrightarrow{k=x} z^{-i} \sum_{k=-i}^{+\infty} v(k) z^{-k} \\ &= z^{-i} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v(k) z^{-k} + \sum_{d=-i}^{-1} v(d) z^{-d} \right) = z^{-i} V(z) + \sum_{d=1}^i v(-d) z^{d-i} \end{aligned}$$

□

Anticipo temporale $v(k+i) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^i V(z) - \sum_{d=0}^{i-1} v(d) z^{i-d}$

DIM.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[v(k+i)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} v(k+i) z^{-k} \xrightarrow{x=k+i} \sum_{x=i}^{+\infty} v(x) z^{-x+i} \xrightarrow{k=x} z^i \sum_{k=i}^{+\infty} v(k) z^{-k} \\ &= z^i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v(k) z^{-k} - \sum_{d=0}^{i-1} v(d) z^{i-d} \right) = z^i V(z) - \sum_{d=0}^{i-1} v(d) z^{i-d} \end{aligned}$$

□

Convoluzione : $(f * g)(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} F(z)G(z)$

Modulazione : $f(k)g(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} (F * G)(z)$

4.2.1.2 Trasformate notevoli

Applichiamo la trasformata Zeta alle funzioni più comuni nel contesto dei sistemi discreti e dimostriamo le trasformate notevoli (si fa notare che la costante A posta solo nel primo esempio è sempre estraibile dall'integrale in quanto costante e quindi applicabile ad ogni altra trasformata in elenco):

successione costante A : basta semplicemente raccogliere e accorgersi della serie geometrica di ragione $q = z$

$$\mathcal{Z}[A] = \sum_{k=0}^{+\infty} A \cdot z^{-k} = A \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = A \frac{1}{1 - z^{-1}} = A \frac{z}{z - 1}$$

successione impulso $\delta(k)$: è sufficiente ricordare che $\delta(k) = 1 \iff k = 0$, quindi l'unico risultato diverso da 0 nella sommatoria si avrà per $k = 0$

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) \cdot z^{-k} = z^{-0} = 1$$

successione impulso traslato $\delta(k-i)$: in questo caso, analogo al precedente ma più generale, la sommatoria avrà valore non nullo solo per $k = i$

$$\mathcal{Z}[\delta(k-i)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k-i) \cdot z^{-k} = z^{-i}$$

successione gradino $\delta_{-1}(k)$: dalla definizione del gradino abbiamo $\delta_{-1}(k) = 1 \iff k \geq 0$, quindi è sempre costante nella sommatoria

$$\mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{-1}(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

successione esponenziale (causale) $\lambda^k \delta_{-1}(k)$: sfruttiamo la proprietà di moltiplicazione per λ^k con $v(k) = \delta_{-1}(k)$

$$\mathcal{Z}[\lambda^k \delta_{-1}(k)] = \mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] \left(\frac{z}{\lambda} \right) = \frac{\frac{z}{\lambda}}{\frac{z}{\lambda} - 1} = \frac{z}{z - \lambda}$$

successione sinusoidale (causale) $\cos(\theta k + \phi) \delta_{-1}(k)$: ricordiamo la formula di Eulero, valida anche nel regime discreto

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\cos(\theta k + \phi) \delta_{-1}(k)] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j(\theta k + \phi)} + e^{-j(\theta k + \phi)}}{2} \delta_{-1}(k)\right] = \frac{1}{2} \left(e^{j\phi} \mathcal{Z}[(e^{j\theta})^k \delta_{-1}(k)] + e^{-j\phi} \mathcal{Z}[(e^{-j\theta})^k \delta_{-1}(k)] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{ze^{j\phi}}{z - e^{j\theta}} + \frac{ze^{-j\phi}}{z - e^{-j\theta}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 e^{j\phi} - ze^{j(\phi-\theta)} + z^2 e^{-j\phi} - ze^{-j(\phi-\theta)}}{z^2 - ze^{j\theta} - ze^{-j\theta} + 1} \right) \\ &= \frac{z(\cos(\phi)z - \cos(\phi - \theta))}{z^2 - 2\cos(\theta)z + 1} \end{aligned}$$

Segnale	Trasformata \mathcal{Z}	Segnale	Trasformata \mathcal{Z}
A	$A \frac{z}{z-1}$	$\lambda^k \delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{z-\lambda}$
$A\delta(k)$	A	$k\lambda^k \delta_{-1}(k)$	$\frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$
$A\delta(k-i)$	Az^{-i}	$k^2 \lambda^k \delta_{-1}(k)$	$\frac{\lambda z(z+\lambda)}{(z-\lambda)^3}$
$A\delta_{-1}(k)$	$A \frac{z}{z-1}$	$\binom{k}{\ell} \lambda^{k-\ell} \delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{\ell+1}}$

Tabella 4.1: Le principali trasformate notevoli Zeta

4.2.2 Antitrasformata Zeta

Per tornare dal dominio dei complessi al dominio degli interi si applica l'antitrasformata Zeta, analogamente a quella di Laplace, ovvero

$$v(k) = \mathcal{Z}^{-1}[V](k) \quad (4.9)$$

Anche qui la risposta sarà nella forma

$$\begin{aligned} V(z) &= V_\ell(z) + V_f(z) \\ &= \frac{p(z)}{d(z)} + H(z)U(z) \\ &= \frac{p(z)}{d(z)} + \frac{n(z)}{d(z)}U(z) \end{aligned} \quad (4.10)$$

dove tutte le funzioni sono esattamente come quelle viste per Laplace (2.2.2).

Per trovare la risposta totale si utilizzerà nuovamente la forma

$$V(z) = \frac{n(z)}{\prod_{i=1}^{r'} (z - \lambda'_i)^{\mu'_i}} = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{\ell=1}^{\mu'_i} C_{i,\ell} \frac{z}{(z - \lambda'_i)^\ell} \doteq V'(s)$$

composta di elementi elementari di cui conosciamo la trasformata, facendo attenzione al numeratore z , necessario per l'antitrasformata finale, dove utilizzeremo la trasformata notevole dell'impulso scalato. I coefficienti $C_{i,\ell}$ si otterranno ancora mediante il metodo dei fratti semplici

$$C_{i,\ell} = \frac{d^{\mu'_i - \ell}}{dz^{\mu'_i - \ell}} \left((z - \lambda'_i)^{\mu'_i} \frac{V'(z)}{z} \right) \Big|_{z=\lambda'_i}$$

facendo attenzione al denominatore z che divide $V'(z)$, necessario appunto per la buona riuscita del metodo.

4.2.3 Esercizio svolto

Rivediamo il sistema discreto dell'esempio precedente, che necessita in questo caso di un ingresso, descritto con

$$\begin{cases} v(k) - v(k-2) = u(k-1) + 2u(k-2) \\ v(-1) = 1 \\ v(-2) = -2 \\ u(k) = (-1)^k \delta_{-1}(k) \end{cases}$$

Le radici dell'equazione caratteristica rimangono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ e ora applichiamo la trasformata Zeta al sistema

$$\begin{aligned} z^0 V(z) - z^{-2}(V(z) + z^1 v(-1) + z^2 v(-2)) &= z^{-1}(U(z) + z^1 u(-1)) + 2z^{-2}(U(z) + z^1 u(-1) + z^2 u(-2)) \\ z^0 V(z) - z^{-2} V(z) - z^{-1} + 2z^0 &= z^{-1} U(z) + 2z^{-2} U(z) \end{aligned}$$

e moltiplichiamo tutto per z^n , ovvero per z^2 , ottenendo

$$\begin{aligned} z^2 V(z) - z^0 V(z) - z^1 + 2z^2 &= z^1 U(z) + 2z^0 U(z) \\ (z^2 - 1)V(z) &= (-2z^2 + z) + (z + 2)U(z) \\ V(z) &= \frac{z(-2z + 1)}{(z - 1)(z + 1)} + \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 1)} U(z) \end{aligned}$$

dove possiamo riconoscere le funzioni

$$V_\ell(z) = \frac{z(-2z + 1)}{(z - 1)(z + 1)} \quad H(z) = \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 1)} \quad U(z) = \mathcal{Z}[u(k)] = \frac{z}{z + 1}$$

e la cui risposta finale è quindi

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{z(-2z + 1)}{(z - 1)(z + 1)} + \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 1)} \cdot \frac{z}{z + 1} \\ &= \frac{z(-2z^2 + 3)}{(z - 1)(z + 1)^2} \\ &= A \frac{z}{z - 1} + B \frac{z}{z + 1} + C \frac{z}{(z + 1)^2} \end{aligned}$$

che, risolta mediante il metodo dei fratti semplici,

$$\begin{aligned} A &= (z - 1) \frac{V(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{-2z^2 + 3}{(z + 1)^2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{4} \\ B &= \frac{d}{dz} \left((z + 1)^2 \frac{V(z)}{z} \right) \Big|_{z=-1} = \frac{d}{dz} \left(\frac{-2z^2 + 3}{z - 1} \right) \Big|_{z=-1} = \frac{-2z^2 + 4z - 3}{(z - 1)^2} \Big|_{z=-1} = -\frac{9}{4} \\ C &= (z + 1)^2 \frac{V(z)}{z} \Big|_{z=-1} = \frac{-2z^2 + 3}{z - 1} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

risulta essere nella forma

$$V(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{z - 1} - \frac{9}{4} \cdot \frac{z}{z + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{(z + 1)^2}.$$

Ora applicando l'antitrasformata Zeta e otteniamo la risposta totale

$$v(k) = \mathcal{Z}^{-1}[V](k) = \left(\frac{1}{4}(1)^k - \frac{9}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}k(-1)^k \right) \delta_{-1}(k).$$

4.3 Stabilità dei sistemi LTI discreti

4.3.1 Stabilità asintotica

Come per il caso tempo-continuo, diciamo che un sistema è *asintoticamente stabile* quando all'infinito tende a 0, ovvero quando $\lim_{k \rightarrow +\infty} v(k) = 0$. Da questa definizione possiamo ottenere

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0 &\iff \forall m_{i,l}, \lim_{t \rightarrow +\infty} m_{i,l}(t) = 0 \\ &\iff \forall i, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{k \ln \rho_i} = 0 \end{aligned}$$

che è possibile solo nel caso in cui $\ln \rho_i < 0$, ovvero quando $0 < \rho_i < 1$, senza dimenticare che $\lambda_i = \rho_i e^{j\phi_i}$. Possiamo quindi affermare che

un sistema discreto LTI è *asintoticamente stabile* se $\forall i, |\lambda_i| < 1$.

4.3.2 Stabilità BIBO

Richiamando la definizione già trattata nel regime continuo, un sistema è *BIBO stabile* quando $\forall t \in [t_0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$\exists M_u > 0: |u(t)| < M_u \implies \exists M_v > 0: |v(t)| < M_v.$$

Anche in questo caso daremo un taglio netto alla teoria sottostante e diremo che è possibile affermare che

un sistema discreto LTI è *BIBO stabile* se, dopo aver semplificato tra loro poli e zeri di $H(z)$, si ha $\forall i, |\lambda_i| < 1$.

Nuovamente, anche per il regime discreto, è dimostrabile che

$$\text{stabilità asintotica} \implies \text{stabilità BIBO}.$$