Лекция 8

Ilya Yaroshevskiy

January 11, 2021

Contents

1 Потенциальные векторные поля

$$\int_\gamma \sum V_i dx_i = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

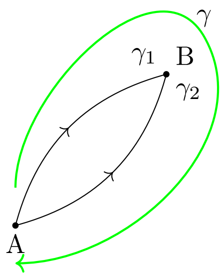
Определение. Интеграл V не зависит от пути в области O:
$\forall A, B \in O\ \forall \gamma^1, \gamma^2$ - кусочно гладкие пути из A в B
$\displaystyle\int_{\gamma^1} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma^2} \sum V_i dx_i$

Теорема 1 (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)**.** V - векторное поле в области O. Тогда эквивалентны:

1. V - потенциально
2. $\displaystyle\int_\gamma \sum V_i dx_i$ не зависит от пути в области O
3. $\forall \gamma$ - кусочно гладкого, замкнутого в O $\displaystyle\int_\gamma \sum V_i dx_i = 0$

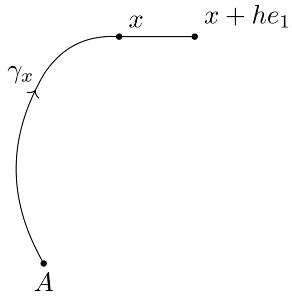
Proof.

- $1 \Rightarrow 2$: обобщенная формула Ньютона-Лейбница
- $2 \Rightarrow 3$: γ - петля: $[a, b] \to O \quad \gamma(a) = \gamma(b) = A$
  Рассмторим простой птуь $\tilde{\gamma} : [a, b] \to O \quad \gamma(t) = A$
  по свойству 2 $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} = 0(= \int \langle V, \underbrace{\gamma'}_{0} \rangle dt)$
- $3 \Rightarrow 2$: γ_1, γ_2 - пути с общим началом и концом



$\gamma := \gamma_2^- \gamma_1$ - кусочно гладкая петля $0 = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$

- $2 \Rightarrow 1$: Фиксируем $A \in O$
  $\forall x \in O$ выберем кусочно гладкий путь γ_x, который ведет из A в x
  $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i$ - проверим что это потенциал
  Достаточно проверить $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в O
  Фиксируем $x \in O$



$\gamma_0(t) = x + the_1 \quad, t \in [0,1]$
$\gamma_0'(t) = (h, 0, \dots, 0) = he_1$
$f(x+he_1) - f(x) = \int_{\gamma_{x+he_1}} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_0} = \displaystyle\int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) \cdot hdt =$
$= h \cdot V_1(x_1 + ch, x_2, \dots, x_n)$
Таким образом $\frac{f(x+he_1)-f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} V_1(x)$

$\square$

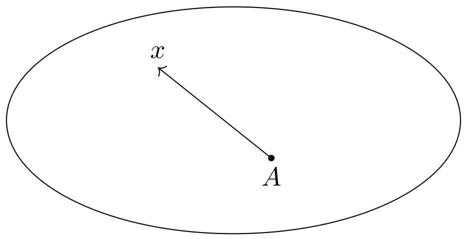
1.1 Локально потенциальные векторные поля

Лемма 1. *V - гладкое, отенциальное в O*
Тогда $\forall x \in O$ $\forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}$

Proof. $\dots = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$ $\square$

Теорема 2 (лемма Пуанкаре)**.** $O \in \mathbb{R}^m$ - выпуклая область $V : O \to \mathbb{R}^m$ - векторное поле
V - удовлетворяет условиям леммы(V - гладкое)
Тогда V - потенциальное

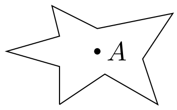
Proof. Фиксируем $A \in O$
$\forall x \in O$ $\gamma_x(t) := A + t \cdot (x - a) \quad, t \in [0,1]$



$\gamma_x'(t) = x - A$ - постоянный вектор
$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x-A)) \cdot (x_k - A_k)dt$
Проверим, что f - потенциал
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \langle\text{правило Лейбница}\rangle = \displaystyle\int_0^1 V_j(A + t(x-A)) + \sum_{k=1}^m \underbrace{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}}_{\frac{\partial V_j}{\partial x_k}}(\dots) \cdot t(x_k - A_k)dt =$

$$= \int_0^1 (tV_j(A + t(x-A))_t' dt) = t \cdot V_j(A + t(x-A)) \Big|_{t=0}^{t=1} = V_j(x)$$ $\square$

Примечание. Это же доказательство проходит для "звездных" областей



Существует точка из которой видны все остальные

Определение. V - локально потенциальное векторное поле в O, если $\forall x \in O\ \exists U(x)\ V$ потенциально в $U(x)$

Следствие 1 (лемма Пуанкаре). $O \subset \mathbb{R}^m$ - любая область
$V \in C^1(O)$, удовлетворяет Лемме 1
Тогда V - локально потенциально

2 Равномерная сходимость функциональных рядов(продолжение)

Теорема 3' (о дифференцировании ряда по параметру). $u_n \in C^1(\langle a, b\rangle)$
Путсть:

1. $\sum u_n(x) = S(x)$ - поточенчная сходимость
2. $\sum u_n'(x) = \varphi(x)$ - равномерно сходится на $\langle a, b\rangle$

Тогда:

1. $S(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$
2. $S' = \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

т.е $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

Proof.
- $f_n \to f$ — поточечно
- $f_n' \rightrightarrows f$

  Тогда $f' = \varphi,\ f \in C^1$
- $S_n \to S$ — поточечно
- $S_n' \rightrightarrows \varphi$

□

Пример. Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \cdot \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + \frac{x}{k})e^{\frac{x}{k}}$$

, где γ - постоянная Эйлера

$$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{l=1}^{+}(\ln(1 + \frac{x}{k}) - \frac{x}{k})$$

фиксируем x_0 $u_k'(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$
Пусть $M > x_0$ Тогда

$$\left|\frac{-x}{(x+k)k}\right| \leq \frac{M}{k^2}, \text{ при } x \in (0, M)$$

$\sum \frac{M}{k^2}$ - сходится
Тогда $\sum \frac{-x}{(x+k)k}$ равномерно сходится на $(0, M)$
Значит $\ln\Gamma(x) \in C^1(0, M) \Rightarrow \Gamma \in C^1(0, M)$

Примечание. Фактически теорема устанавливает, что $\sum u_n'(x)$ - непрерывна

Примечание (к примеру).

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k+1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x) \cdot (\frac{1}{x} + \gamma - \sum \dots) \tag{1}$$

$$\Gamma''(x) = \dots$$

Теорема 4' (о почленном переходе в суммах)**.** $u_n : E \subset \underset{\text{м.п.}}{X} \to \mathbb{R}, \quad x_0$ - предельная точка E

Пусть:

1. $\forall n\ \exists$ конечный $\lim_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$
2. $\sum u_n(x)$ — равномерно сходится на E

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lim_{x \to x_0} u_n(x)) \tag{2}$$

Proof. 1. $\sum a_n$ - сходится

x_n - фундаментальная

$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall m, n > N \quad |x_m - x_m| < \varepsilon$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x), \quad S_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{3}$$

Проверим, что S_n^a - фундаментальная

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \le |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a| \tag{4}$$

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x) : \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$

Это критерий Больциано-Коши для равномерной сходимости

Зададим ε, по N выберем $n,\ n+p$ и возьмем x близко к x_0:

$$|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

$$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

Тогда выполнено (4), т.е. $|S_{n+p}^a - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Это фундаментальность последовательности $S_n^a \Rightarrow \sum a_n$ - сходится

2. $\sum a_n = \lim_{x \to x_0} \sum u_n(x)$

Сводим к теореме Стокса-Зайдля:

$$\tilde{u}_n(x) = \left[\begin{array}{ll} u_n(x) & x \in E \backslash \{x_0\} \\ a_n & x = x_0 \end{array} \right. \tag{7}$$

— задана на $E \cup \{x_0\}$, непрерывна в x_0 (переход (8) $\to$ (9))

$\sum \tilde{u}_n(x)$ - равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в x_0

$$\lim_{x \to x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \tag{8}$$

$$= \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n \tag{9}$$

$$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \le \sup_{x \in E \backslash \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \right| \tag{10}$$

В (10) в правой части оба слагаемых $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ отсюда равномерная сходимость ряда $\sum \tilde{u}_n(x)$

□

Примечание. Теорема 4' верна для случая, когда $u_n : E \subset X \to Y$, где Y - полное нормированное пространство

Теорема 4 (о перестановке двух предельных переходов)**.** $f_n : E \subset X \to \mathbb{R},\ x_0$ - предельная точка E

Пусть:

1. $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} S(x)$ на E
2. $f_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, "n\to+\infty", Rightarrow] \arrow[d, "x\to x_0"'] & S(x) \arrow[d, dashed, "x\to x_0"] \\
A_n \arrow[r, dashed, "n\to+\infty"'] & A
\end{tikzcd}$$

Proof. $u_1 = f_1,\ \dots,\ u_k = f_k - f_{k-1}, \dots$ Тогда $f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
$a_1 = A_1,\ \dots,\ a_k = A_k - A_{k-1}, \dots, A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
В этих обозначениях: $\sum u_k(x)$ — равномерно сходится к сумме $S(x)$
$u_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$
Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ — имеет конечный предел, при $n \to +\infty$
$\sum a_k$ - *сходится*

$$\lim_{x\to x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = \sum a_k = A \tag{11}$$

□

Примечание. Здесь можно было бы вместо n рассматривать "непрерывный параметр" t
$f_n(x) \leftrightarrow f(x,t)$
$n \to +\infty \leftrightarrow t \to t_0$
$f_n S$ на $E \leftrightarrow f(x,t)[t \to t_0]S(x)$ — при $x \in E$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t : t \neq t_0,\ |t - t_0| < \delta\ \forall x \in E \quad |f(x,t) - S(x)| < \varepsilon$