Лекция 2

Ilya Yaroshevskiy

15 февраля 2021 г.

Содержание

1 Теореия меры **1**
1.1 Измеримые функции 1
1.2 Сходимость почти везде и по мере 3

2 Интеграл **6**

1 Теореия меры

1.1 Измеримые функции

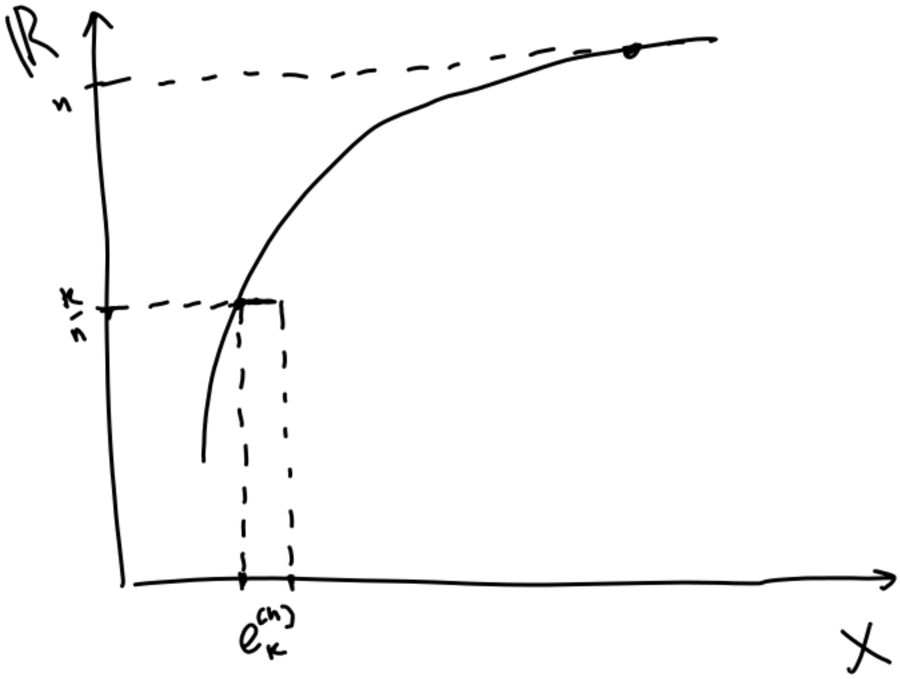
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{R}$ имзмерима
- $\forall a \in R \quad X(f < a) \in \mathfrak{A}$
- $\mathcal{X}_E \quad \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$

Теорема 1.1 (характеризация измеримости функции с помощью ступенчатых)**.**

- $f : X \to \overline{R}$
- $f \geq 0$
- f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2. $\forall x f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$



Доказательство.

$$e_k^{(n)} = X(\frac{k-1}{n} \le f \le \frac{k}{n}) \quad k = 1, \dots, n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \le f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \ge 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

Следствие 1.1.1. f — имзерима
Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая, $f_n \xrightarrow{n \to +\infty} f$ всюду и $|f_n| \le |f|$

Следствие 1.1.2. f, g — измеримы
Тогда fg — измемрима $(0 \cdot \infty = 0)$

Доказательство. $f_n \to f \quad g_n \to g$, (f_n, g_n) — ступенафчтые
$f_n g_n$ — ступенчатая $f_n g_n \to fg$ □

Следствие 1.1.3. f, g — измеримы
Тогда $f + g$ — измерима

Доказательство. $f_n \to f \quad g_n \to g$, (f_n, g_n) — ступенафчтые
$f_n + g_n$ — ступенчатая $f_n + g_n \to f + g$
Считаем что $\forall x$, не может быть $f(x) = \pm\infty,\ g(x) = \mp\infty$ □

- $A \subset X$
- A — полная мера
- $\mu(X \setminus A) = 0$

Теорема 1.2 (об измеримости непрерывной на множестве полной меры)**.**

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset R$

- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима

Доказательство. f — измерима на E'
$E'(f < a)$ — открыто в E'

$$\left.\begin{array}{l} e(f<a) \subset e \\ \lambda_n \text{ — полная} \end{array}\right\} \Rightarrow e(f<a) \text{ — измерима в} E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

Пример.

- $E = \mathbb{R}$
- $f = \mathcal{X}_{\mathrm{Irr}}$

Следствие 1.2.4.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : E \to \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $E' = E \setminus e$
- f — измерима на E'

Тогда модно так переопределить f на множестве e, что полученая функция $\tilde{f}$ будет измерима на E

Доказательство. Пусть:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in E \\ \text{const} & , x \in e \end{cases}$$

$$E(\tilde{f} < a) = E'(\tilde{f} < a) \cup e(\tilde{f} < a)$$

□

Следствие 1.2.5. $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — монотонна
Тогда f — измерима

Доказательство. f — непрерывна на $\langle a, b \rangle$ за исключением возможно счетного числа точек □

1.2 Сходимость почти везде и по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верное при почти всех $x \in E$

$=$ почти всюду на E

$=$ почти везде на E

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$ — истино при $x \in E \setminus e$

Пример. $x = \mathbb{R}$, x — иррационально

Пример. $f_n(x) \to n \to +\infty f(x)$ при почти всех $x \in E$
$\exists e, \mu e = 0$, при $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

Примечание. Свойства:

1. μ — полная $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
   $f_n(x) \to f(x)$ почти везде на X | Тогда f — измерима
   f_n — измерима

   Доказательство. $f_n \to f$ на X', где $e = X \setminus X', \mu e = 0$
   f — измерима на X'
   μ — полная $\Rightarrow$ f — измерима на X

$$X(f < a) = \underset{\text{изм.}}{X'(f < a)} \cup e(f < a)$$

□

2. В условии п. 1
   Можно переопределить f на e. Получится $\hat{f}$
   $f_n(x) \to \hat{f}(x)$ почти везде
   $\hat{f}$ — измкрима

   Определение. $f = g$ почти везде
   Будем говорить что f и g эквивалентны

3. Пусть $\forall n\ W_n(x)$ — истинно при почти всех x
   Тогда утверждение " $\forall n\ W_n(x)$ — истинно " — верно при почти всех x
   Это высказывание верно при

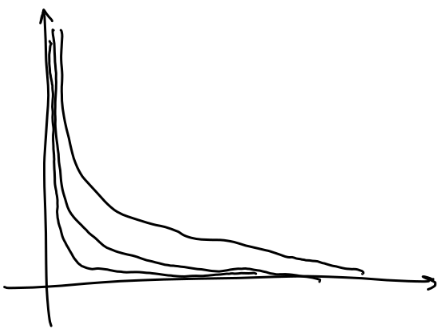
$$x \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i) \quad \mu(\bigcup e_i) = 0$$

- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечные

- f_n сходится к f по мере
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f : \forall \varepsilon > 0\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

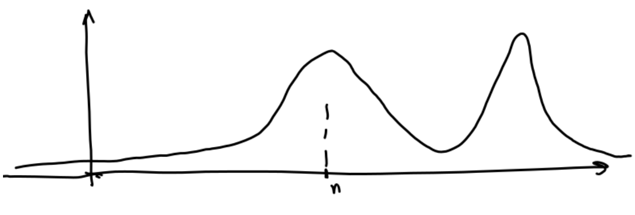
Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0
Т.е. предел не задан однозначно

Пример.



$f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0$
$X\ \mathbb{R}_+\ \lambda$
$f_n \to f$ всюду на $(0, +\infty)$
$f_n \underset{\lambda}{\Rightarrow} f$

Пример.



$f_n(x) := e^{-(n-x)^2}\ x \in \mathbb{R}$
$f_n(x) \to 0$ при всех x
$f_n(x) \to 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\to 0$$

, при $0 < \varepsilon < 1$

Пример. $n = 2^k + e, 0 \leq e < 2^k$
$X = [0,1]\ \lambda$
$f_n(x) := \mathcal{X}_{[\frac{e}{2^k}, \frac{e+1}{2^k}]}$
$\lim f_n(x)$ — не существует ни при каких x

$$\lambda X(f_n > \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
$$f_n \underset{\lambda}{\Rightarrow} 0$$

Теорема 1.3 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- μX — конечна

Тогда $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду Частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0(т.е. $f < 0$)

$$\left.\begin{array}{c} X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывность меры сверху}$$

Общий случай: $f_n \to f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда $\varphi_n \to 0$, монотонна

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$
$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

Теорема 1.4 (Рисс)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Тогда $\exists n_k f_{n_k} \to f$ почти везде

Доказательство. $\forall k\ \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \to 0$
$\exists n_k$: при $n > n_k\ \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$
можно считать: $n_1 < n_2 < n_3$
Проверим $f_{n_k} \to f$ почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$
$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

При $x \notin E$ $f_{n_k} \to f$

$$x \notin E \ \exists N \ x \notin E_k$$

при $k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, т.е. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ $\square$

Следствие 1.4.6.

- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $|f_n| \le g$ почти везде

Тогда $|f| \le g$ почти везде

Доказательство. $\exists n_k : \ f_{n_k} \to f$ почти везде $\square$

Теорема 1.5 (Егорова)**.**

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \to f$ почти везде

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset X, \ \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$

@1A[r]$^{>} > +B$

2 Интеграл

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Определение. $f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$ $\quad E_k$ — дополнительное разбиение

$$\alpha_k \ge 0$$

$$\int_X f d\mu = \sum \alpha_k \mu E_k$$

, считаем $0 \cdot +\infty = 0$

Примечание. Свойства:

1. Не зависит от представления f в виде сумме

$$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k} = \sum \alpha'_k \mathcal{X}_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k \cap E'_j}$$

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. $f \le g \quad \int f \le \int g$, f, g — ст.

Определение. $f \ge 0$ — измерима

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \le g \le f}} \int g d\mu$$

Примечание. Свойства:

1. Если f — ступенчатая то Опр. 2 = Опр. 1
2. $0 \le \int f \le +\infty$
3. $g \le f$, f — измерима, g — ступенчатая $\Rightarrow \int_X g \le \int_X f$

Определение.

- f — измерима
- $\int_X f^+$ или $\int_x f^-$ конечный

Тогда

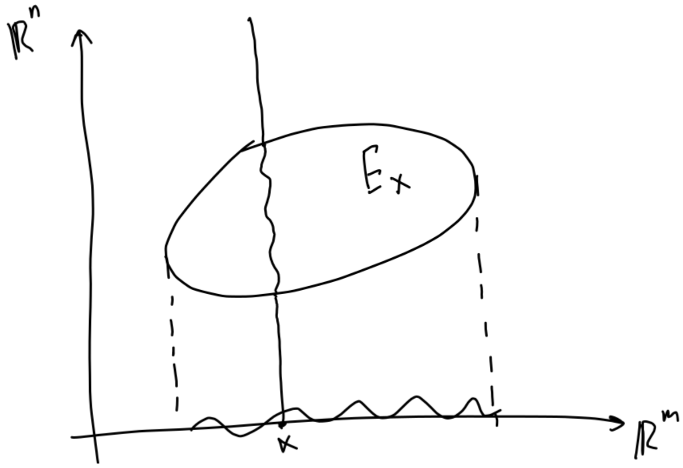
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Теорема 2.1 (Тонедди)**.**

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$ — измерима
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$

Тогда



1. при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ — измерима на $\mathbb{R}^n$
2. функция
$$x \mapsto \int_{E_k} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$$
3.
$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y d\lambda_n(y)) \right) d\lambda_m(x)$$