Лекция 8

Ilya Yaroshevskiy

24 апреля 2021 г.

Содержание

1 Стандартное абсолютно непрерывное распределение

1.1 Равномерное распределение

Определение. Случайная величина ξ **равномерно** распределена на $[a, b]$ если ее плотность постоянна на этом отрезке

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a}dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a} \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

Обозначение. $\xi \in U_{[a,b]}$

Примечание. Датчики случайных чисел имеют равномерное распределение, и с их помощью можно смоделировать другие распределения, если знаем их функции распределения

1.2 Экспоненциальное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет **показательное** распределение, если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_0^{\infty} x^k \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^{\infty} \alpha (\alpha x)^k e^{-\alpha x} dx = \frac{k!}{\alpha^k}$$

$$E\xi = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\xi^2 = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(a < \xi < b) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

Примечание. **Свойство нестарения**. Если $\xi \in E_\alpha$, то $p(\xi > x + y | \xi > x) = p(\xi > y)$

Примечание. Гамма функция Эйлера:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda - 1} e^{-t} dt$$

- $$\Gamma(\lambda - 1) = \lambda! \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

Обозначение. $\xi \in E_\alpha$

Пример. Время работы прибора до поломки

Пример. Время между появлениями двух соседних редких событий в простейшем потоке событий

1.3 Нормальное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет **нормальное** распределение с параметрами $a, \sigma > 0$, если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Смысл параметров распределения: $a = E\xi$, σ — среднее квадратичное отклонения. $D = \sigma^2$
Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Обозначение. $\xi \in N_{a,\sigma}$

1.4 Стандартное нормальное распределение

Определение. Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a = 0,\ \sigma = 1$ т.е. $\xi \in N_{0,1}$. Плотность

$$\varphi(x) = \frac{1\sqrt{2\pi}^{-\frac{x^2}{2}}}{e}$$

Функция распределения

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Примечание.

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.5 + \Phi(x) \text{ — функция Лапласса}$$

Примечание. Интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

1.5 Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями и ее следствия

Свойство 1. $\xi \in N_{a,\sigma}$. *Тогда*

$$F_\xi(x) = \Phi_\xi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Доделать □

Свойство 2. *Если* $\xi \in N_{a,\sigma}$, *тогда* $\eta = \frac{1-a}{\sigma} \in N_{0,1}$

Доказательство. Доделать □

Свойство 3. $\xi \in N_{a,\sigma}$. *Тогда* $E\xi = a,\ D\xi = \sigma^2$

Доказательство.

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1} \Rightarrow E\eta = 0,\ D\eta = 1$$

$$\xi = \sigma\eta + a$$

$$E\xi = \sigma \cdot 0 + a = a$$

$$D\xi = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

□

Свойство 4. *Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал*

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \left(0,5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right)\right) - \left(0,5 + \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

□

Свойство 5. *Вероятность отклонения случайной величины от ее среднего значения или попадание в интервал симметричный относительно a*

$$p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$P(|\xi - a| < t) = p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi a + t) = \Phi\left(\frac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - t - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

□

Доказательство. При замене в этой формуле $Phi(x)$ на $\Phi_0(x)$ получится

$$p(|\xi - a| < t) = 2\Phi_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$$

□

Свойство 6 (Правило трех σ).

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$$

1.6 Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Определение. Асимметрией распределения называется число

$$A_\xi = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{N_{a,\sigma}}{\sigma^3}\boxed{\text{Исправить}}$$

Определение. Эксцессом распределения называется число

$$E_\xi = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{N_{a,\sigma}}{\sigma^4} - 3\boxed{\text{Исправить}}$$

Примечание. Если $\xi \in N_{a,\sigma^2}$, то $A\xi = 0$ и $E\xi = 0$. Таким образом эти коэффициенты показывают насколько сильно данное распределение отличается от нормального

1.7 Гамма функция и гамма распределение

Определение. Гамма функцией Гаусса называется функция

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt$$

Свойство 1.

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1)\cdot\Gamma(\lambda - 1)$$

Свойство 2.

$$\Gamma(1) = 1$$

Свойство 3.

$$\Gamma(x) = (x-1)! \quad x \in \mathbb{N}$$

Свойство 4.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Определение. Случайная величина ξ имеет гамма распределение с параметрами $\alpha, \lambda > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}\boxed{\text{Исправить}}$$

$$F_\xi(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^x t^{\lambda-1}e^{-\alpha t}dt \quad x \geq 0$$

Если $\lambda \in \mathbb{N}$, то

$$F_\xi(x) = \sum_{k=\lambda}^{\infty}\frac{(\alpha x)^k}{x^k}e^{-\alpha x}\boxed{\text{Исправить}}$$

Обозначение. $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$

Свойство 1. $E\xi = \frac{\lambda}{\alpha}$, $D\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$

Свойство 2. $\Gamma_{\alpha,\lambda} = E_\alpha$

Свойство 3. $\boxed{\textit{Доделать}}$

Свойство 4. *Если* $\xi \in N_{0,1}$, *то* $\xi^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$