Лекция 14

Ilya Yaroshevskiy

16 января 2021 г.

Содержание

1 Теория меры

Определение. $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}} \quad \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \quad \mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ — **продолжает** $u_0 \quad \mu\Big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$

Теорема 1.1 (о Лебеговском продлжении меры)**.** $\mathcal{P}_0$ — полукольцо подмножеств пространства X, $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ — δ-конечная мера
Тогда $\exists$ σ-алгебра $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}_0$, $\exists \mu$ — мера на $\mathfrak{A}$:

1. μ — продолжение μ_0 на $\mathfrak{A}$
2. μ — полная мера
3. Если $\tilde{\mu}$ — полная мера на σ-алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$ и $\tilde{\mu}$ — продолжение μ_0, то $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$ и при этом $\tilde{\mu}$ — продолжение меры μ : $\tilde{\mu}\Big|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо: $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$, мера ν — продолжение μ_0 на $\mathcal{P}$
   Тогда $\forall A \in \mathcal{P} \quad \nu(A) = \mu(A)$
5. $$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A = \inf\{\sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \big| A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k\} \tag{1}$$

Доказательство. нет
$\forall \mu^\star = \inf\{\dots\} \quad \mu^\star s^X \to \overline{\mathbb{R}}$ — не аддитивна
$A \subset \bigcup A_k \quad \mu^\star A \le \sum \mu^\star A_k$ ☐

Следствие 1.1.1. $A \in \mathfrak{A},\ \mu A < +\infty,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists P_k \in \mathcal{P} :\ A \subset \bigcup P_k \quad \mu A < \sum \mu P_k < \mu A + \varepsilon$

1.1 Мера Лебега

Теорема 1.2. $\mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$ — классический объем в $\mathbb{R}^m$
Тогда μ — σ-конечная мера

Доказательство. σ-конечность очевидна
Проверим, что μ — счетно аддитивна, для этого достаточно проверить счетную полуаддитивность
$P = [a, b),\ P_n = [a_n, b_n)\ P \subset \bigcup P_n$, проверить $\mu P \le \sum \mu P_n$

$P = \emptyset\ \Rightarrow$ утверждение тривиально

$P \neq \emptyset$ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Чуть уменьшим координаты вектора b: $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\mu P - \mu[a, b') < \varepsilon$
Уменьшим слегка координаты векторов a_n:

- $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n] \quad \mu[a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$
- $\underset{\text{комп.}}{[a, b']} \subset \bigcup (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие: $[a, b'] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b') \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} [a'_n, b_n)$

Тогда

$$\mu[a,b') \le \sum_{1\le n\le N} \mu[a'_n, b_n) \tag{2}$$

$$\mu P - \varepsilon \le \sum_{n=1}^{N} (\mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) \tag{3}$$

$$\mu P - \varepsilon \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon \tag{4}$$

□

Определение. Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ — Лебеговское продлжение классического объема получается σ-алгебра $\mathfrak{M}^m$, на которой задана мера Лебега — **множества измеримые по Лебегу**

Обозначение. Мера Лебега — λ или λ_m

Свойства меры Лебега

1. (a) $A_1, A_2, \ldots$ — измеримые $\Rightarrow A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ — измеримые
   $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots,\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ — измеримые
   (b) $\forall n\ \lambda A_n = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup A_n) = 0$
   (c) $\lambda A = 0,\ B \subset A \Rightarrow B$ — измеримо, $\lambda B = 0$

   Пример. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ — измеримо, $\lambda_1 \mathbb{Q} = 0$

   Доказательство. $\forall x \in R \quad \{x\} = \bigcap_n [x, x + \frac{1}{n})$

$$0 \le \lambda\{x\} \le \lambda\left[x, x + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda\{x\} = 0 \tag{5}$$

   $\mathbb{Q}$ — счетное объединение одноточечных множеств □

2. $\mathfrak{M}^m$ содержит все открытые и замкнцтые множества

   Лемма 1.

   (a) $O \subset \mathbb{R}^m$ — открыто
   Тогда $O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — ячейки с рациональными координатами(можно считать Q_i — кубические ячейки, двоичные рациональные координаты)
   (b) Можно считать, что $\overline{Q_i} \subset O$
   (c) E — измеримо, $\lambda E = 0$
   Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad E \subset \bigcup Q_i :\ Q_i$ — кубическая ячейка и $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$

   Примечание. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (B_i)$ — шары: $E \subset \bigcup B_i,\ \sum \lambda B_i M \varepsilon$
   $Q(x, \frac{R}{\sqrt{m}}) \subset B(x,R) \subset Q(x,R)$
   $\left(\frac{2R}{\sqrt{m}}\right)^m \le \lambda B \le \lambda Q(x,R) = (2R)^m$

   Доказательство.

   (a) $\forall x \in O$, пусть $Q(x)$ — какая-то ячейка с рациональными координатами, $Q(x) \subset O$(можно потребовать $\overline{Q(x)} \subset O$; Q — куб; двоично рациональные координаты)
   $O = \bigcup_{x\in O} Q(x)$ — здесь не более чем счетное множество различных ячеек
   $\Rightarrow O = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$ — сделаем ячейки дизъюнктными

$$Q_1 := Q(x_1) \quad Q(x_2) \setminus Q(x_1) \xlongequal{\text{св-во п/к}} \bigsqcup D_j \tag{6}$$

   Переобозначим D_j как $Q_2, Q_3, \ldots, Q_k$

$$Q(x_3) \setminus (\bigsqcup_{i=1}^{k} Q_i) = \bigsqcup P_l \tag{7}$$

переобозначим P_l, как $Q_{k+1}, \dots, Q_s$ и так далее.
Можно считать что координаты всех ячеек двоично рациональны
В $\bigsqcup Q_i$ — можно подразбить эти ячейки, чтобы они стали кубическими
$[a_i, b_i)$ — двоично рациональные координаты. $\frac{1}{2^l}$ — самый крупный знаенатель
$[a_i, b_i]$ — конечное объединение кубических ячеек со стороной $\frac{1}{2^l}$

(b) уже доказано

(c) Следует из теоремы о Лебеговском продолжении(п. 5)
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ ячейки $P_k \quad E \subset P_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda P_k \leq \varepsilon$
$\exists \tilde{P}_k$ — двоично рациональные ячейки: $P_k \subset \tilde{P}_k \ 0 = \lambda E \leq \sum \lambda_k \tilde{P}_k \leq 2\varepsilon$
Можно разбить P_k на конечное число кубов

$\square$

Определение. $\mathfrak{B}$ — **борелевская σ-алгебра** (в $\mathbb{R}^m$ или в метрическом пространстве) — минимальная σ-алгебра, которая содержит все открытые множества
$\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$

Пример. Канторово множество в $\mathbb{R}$ — последовательность множетсв вида:
$K_0 = [0, 1] \quad K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \quad K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{3}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

$\mathfrak{K} = \bigcap K_i$ — измеримо $\lambda \mathfrak{K} = 0$
$\lambda(K_i) = (\frac{2}{3})^i$
$\mathfrak{K} = \{x \in [0, 1] \big| x$ можно записать в троичной системе использую только цифры 0 и 2$\}$
При этом $\mathfrak{K}$ — континуум
$\mathfrak{K}$ — замкнутое

3. $\exists$ неизмеримые по Лебегу множества(т.е. не принадлежат $\mathfrak{M}$)
$x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y$ если $x - y \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}\big|_{\mathbb{Q}} = A$ — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать $A \subset [0, 1]$
Очевидно, что:
$$\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R} \tag{8}$$
$$[0, 1] \overset{(1*)}{\subset} \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q) \overset{(2*)}{\subset} [-1, 2] \tag{9}$$
Верно ли что A измеримо? т.е. $A \in \mathfrak{M}^1$?
Допустим, что да: очевидно $\forall q \ \lambda A = \lambda(A + q)$ (по п.5 Т. о продолжении меры)
из (1*): $\lambda[0, 1] = 1 \leq \sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \lambda(A) \Rightarrow \lambda A > 0$
из (2*): $\lambda((A + q)) = \sum_q \lambda A \leq \lambda[-1, 2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$
Противречие $\Rightarrow A$ — не измеримо

4. $A \in \mathfrak{M}$

   - A — ограничено $\Rightarrow \lambda A < +\infty$
   - A — открыто $\Rightarrow \lambda A > 0$ — из леммы
   - $\lambda A = 0 \Rightarrow A$ не имеет внутренних точек

5. $A \in \mathfrak{M}^m$ — измеримое множество
Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

   - $\exists$ открытое $G_\varepsilon \supset A : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
   - $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon \subset A : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство. (a) λA — конечная

$\lambda A = \inf\{\sum \lambda P_i \big| A \subset \bigcup P_i,\ \ P_i \in \mathcal{P}\}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists P_i \quad \lambda A \le \sum \lambda P_i \le \lambda A + \varepsilon,\ \ A \subset \bigcup P_i$

Чуть увеличим эти $P_i = [a_i, b_i) \to (a_i', b_i) \subset [a_i', b_i)$

$$\lambda[a_i', b_i) \le \lambda P_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \tag{10}$$

$$A \subset \underbrace{\bigcup (a_i', b_i)}_{G_{2\varepsilon}} \subset \bigcup [a_i, b_i) \tag{11}$$

$$\lambda A \le \lambda G_{2\varepsilon} \le \sum \lambda[a_i', b_i) \le \sum \lambda(P_i + \frac{\varepsilon}{2^i}) \le \lambda A + 2\varepsilon \tag{12}$$

(b) $\lambda A = +\infty$ используем σ-конечность

$$\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{j-1}^{+\infty} Q_j \tag{13}$$

$\exists G_{\varepsilon,j}$ — открытое $(A \cup Q_j) \subset G_{\varepsilon,j}$

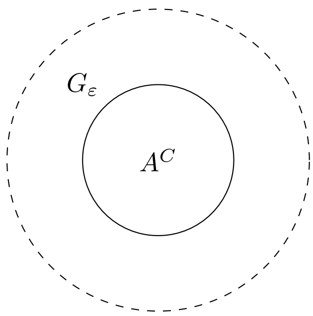
$$\lambda(G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cup Q_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j} \tag{14}$$

$$A = \bigsqcup (A \cup Qj) \subset \bigcup G_{\varepsilon,j} = G_\varepsilon \tag{15}$$

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus A) \le \sum \lambda(G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cup Q_j)) \le \varepsilon \tag{16}$$

$$G_\varepsilon \setminus A \subset \bigcup_j (G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cup Q_j)) \tag{17}$$

(c) Для F_ε переходим к дополнению A^C — для него подбираем G_ε



$$A^C \subset G_\varepsilon \tag{18}$$

$$A \supset (G_\varepsilon)^C =: F_\varepsilon \tag{19}$$

$$G_\varepsilon \setminus A^C = A \setminus (G_\varepsilon)^C \tag{20}$$

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus A^C) < \varepsilon \Rightarrow \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \tag{21}$$

□