

Лекции по Теории вероятностей 4 семестр

Илья Yaroshevskiy

19 марта 2021 г.

Оглавление

1		2
1.1	Статистическая вероятность	2
1.1.1	Пространство элементарных исходов. Случайные со- бытия	2
1.1.2	Операции над событиями	3
1.1.3	Классическое определение вероятности	3
1.1.4	Геометрическое понятие вероятности	5
2		7
2.1	Аксиоматическое определение вероятности	7
2.1.1	Свойства операция сложения, умножения	10
2.1.2	Независимые события	11
3		13
3.1	Условная вероятность	13
3.1.1	Формула умножения вероятности	13
3.1.2	Полная группа событий	14
3.1.3	Формула полной вероятности	14
4		17
4.1	Схема Бернулли	17
4.1.1	Наиболее вероятное число успехов	18
4.1.2	Предельные теоремы в схеме Бернулли	19
4.2	Статистическое определение вероятности	20
4.2.1	Вероятность отклонения относительной частоты	21
4.2.2	Закон больших чисел Бернулли	21
5		22
5.1	Схемы испытаний и соответствующие распределения	22
5.1.1	Схема до первого успешного испытания	22
5.1.2	Испытание с несколькими исходами	23
5.1.3	Урновая схема	24
5.1.4	Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли	25

Лекция 1

1.1 Статистическая вероятность

n — число экспериментов

n_A — число выполнения события A Отношение $\frac{n_A}{n}$ — частота события A

$P(A) \approx \frac{n_A}{n}, n \rightarrow +\infty$

1.1.1 Пространство элементарных исходов. Случайные события

Определение. Пространством элементарных исходов называется множество содержащее все возможные результаты данного эксперимента из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются **элементарными исходами**

Обозначение.

- Пространство элементарных исходов — Ω
- Элементарный исход $w \in \Omega$

Определение. Случайными событиями называются подмножества $A \subset \Omega$. Событие A **наступило** если в ходе эксперимента произошел один из элементарных исходов $w \in A$. w — благоприятный к A

Пример. Бросаем один раз монету. $\Omega = \{H, T\}$.

H — Head(орел), T — Tail(решка)

Пример. Бросаем кубик. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Выпало четное число очков. $A = \{2, 4, 6\}$

Пример. Монета бросается дважды

- Учитываем порядок. $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- Не учитываем порядок. $\Omega = \{HH, HT, TT\}$

Пример. Бросается дважды кубик. Учитывем порядок.

Число очков кратно 3. $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), \dots\}$

Пример. Монета бросается до выпадения герба. $\Omega = \{(H), (T, H), (T, T, H), \dots\}$ — счетное число исходов

Пример. Монета бросается на плоскость. $\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ — нечетное число исходов

1.1.2 Операции над событиями

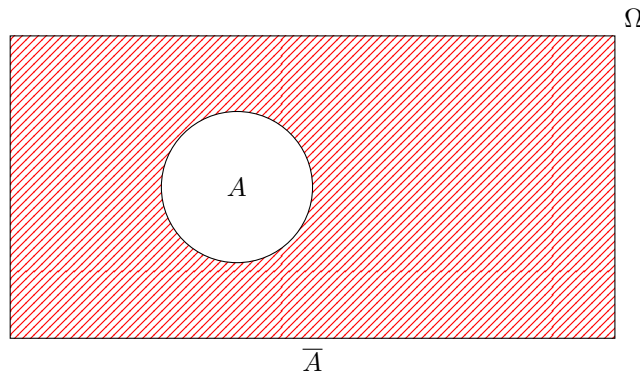
Определение. Ω — универсальное событие, достоверное, наступает всегда, т.к. содержит все элементарные исходы

\emptyset — невозможное событие, никогда не выполняется, т.к. не одержит элементарных исходов

Определение. Суммой событий $A + B$ называется событие $A \cup B$ — событие состоящее в том что произошло событие A или событие B , т.е. хотя бы одно из них

Определение. Произведением $A \cdot B$ называется событие $A \cap B$ — событие состоящее в том что произошло событие A и событие B , т.е. оба из них

Определение. Противоположным к A называется событие \bar{A} — состоящее в том событие A не произошло



Определение. Дополнение

Определение. События A и B называются **несовместными** если $A \cdot B = \emptyset$, т.е. в ходе эксперимента может наступить только одно из них

Определение. Событие A **влечет** событие B , если $A \subset B$

Определение. $P(A) \leq 1$ — вероятность наступления события A

1.1.3 Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число исходов, при чем их можно считать равновероятными. Тогда применимо классическое определение вероятности

Определение. Вероятность события A $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$, где n — число всех возможных элементарных исходов, m — число элементарных исходов благоприятных событию A . В частности, если $|\Omega| = n$, а A — элементарный исход, то $P(A) = \frac{1}{n}$

Примечание. Свойства:

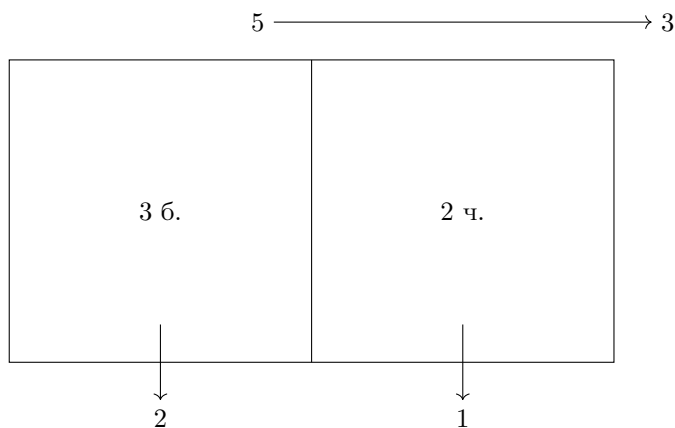
1. $0 \leq P(A) \leq 1$
4. Если события A и B несовместны то вероятность $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Доказательство. $|A| = m_1, |B| = m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$
 $P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$ □

Пример. Найти вероятность того, что при бросании кости выпадет четное число очков

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 5\}$, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Пример. В ящике 3 белых и два черных шара. Вынули 3 шара, найти вероятность того что из них 2 белых и 1 черных



$$n = C_5^3 = 10$$

$$m = C_3^2 \cdot C_2^1 = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{10}$$

1.1.4 Геометрическое понятие вероятности

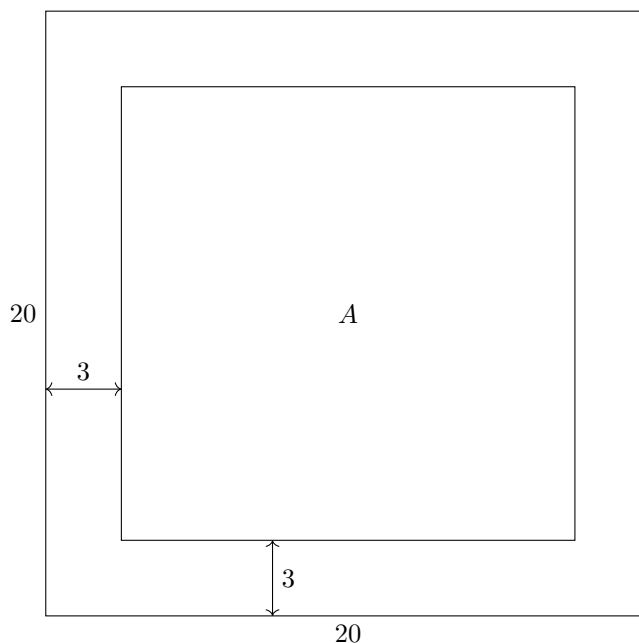
Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$ — конечная мера множества Ω (например мера Римана, т.е. длина, площадь, объем) В эту область *наугад* бросаем точку. Термин *наугад* означает, что вероятность попадания в область A зависит только от меры этой области, но не зависит от ее положения. Вероятности попадания в любые точки равновозможны. Тогда применимо геометрическое определение вероятности.

Определение. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где $\mu(\Omega)$ — мера Ω , $\mu(A)$ — мера благоприятной области A

Примечание. Заметим что по этому определению, мера точки равна 0 и вероятность попадания в конкретную точку равна 0, хотя это событие не является невозможным.

Пример. Игра. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того что монета целиком окажется на одной плитке



$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$

$$S(A) = 14^2 = 196$$

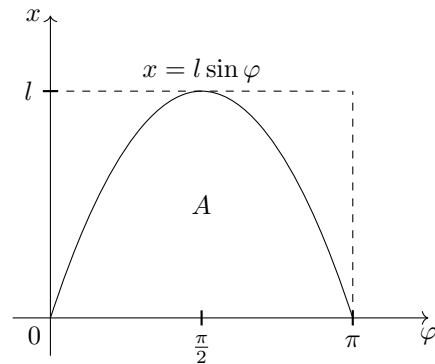
$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$

Задача 1. Пол выложен ламинатом. На пол бросается игла длиной равной ширине доски. Найти вероятность того что она пересечет стык

Решение. $2l$ — длина иглы, x — расстояние от центра иглы до ближайшего края, φ — угол к ближайшему краю

Игла пересечет край если $x \leq |AB|$, $|AB| = l \sin \varphi$

Можно считать что положение от центра и угол, независимы друг от друга.
 $x \in [0, l], \varphi \in [0, \pi]$



$$A : x \leq l \sin \varphi$$

$$S(\Omega) = \pi \cdot l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = 2l$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$

Лекция 2

2.1 Аксиоматическое определение вероятности

Колмагоров

- Ω — пространство элементарных исходов

Систему $\mathcal{F} \subset \Omega$ называем **σ -алгеброй событий** если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\bar{A} \in \mathcal{F}$
3. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Примечание. Свойства:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, т.к. $\bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Доказательство.

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F} \quad \square$$

3. (a) $F = \{\Omega, \emptyset\}$
(b) $F = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$

Определение. Ω — пространство элементарных исходов \mathcal{F} — его σ -алгебра. **Вероятностью** на (Ω, \mathcal{F}) обозначается функция $P(A) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $P(A) \geq 0$ — свойство **неотрицательности**

2. Если события A_1, A_2, \dots — попарно несовместны ($\forall i, j : A_i \cap A_j = \emptyset$), то:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

— свойство **счетной аддитивности**

3. $P(\Omega) = 1$ — свойство **нормированности**

Определение. Тройка (Ω, \mathcal{F}, P) — **вероятностное пространство**

Примечание. Свойства:

1. $P(\emptyset) = 0$

Доказательство. \emptyset и Ω — несовместные события

$$P(\underbrace{\emptyset + \Omega}_{\Omega}) = P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) + 1 = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

□

2. Формула обратной вероятности

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Доказательство. A и \bar{A} — несовместные, $A \cup \bar{A} = \Omega$

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

□

3. $0 \leq P(A) \leq 1$

Доказательство.

$$(a) \quad P(A) \geq 0$$

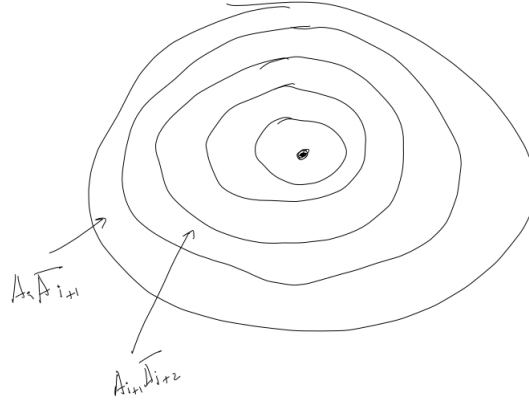
$$(b) \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$$

□

Аксиома 1. Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset$
Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Примечание. При непрерывном изменении области $A \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность также должна изменяться непрерывно. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

Доказательство.



$$A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i \overline{A_{i+1}} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$$

т.к. эти события несовместны

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}}) + P\left(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$$

т.к. $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = 0$ и $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}})$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}}) = P(A_1)$$

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

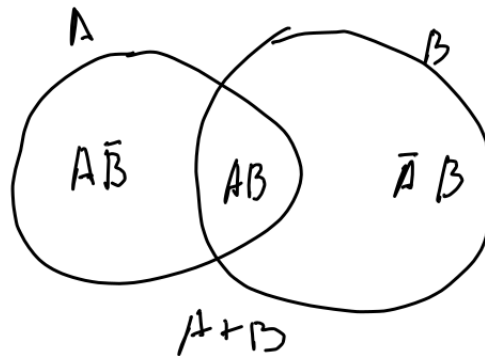
Примечание. Аксиома счетной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности

2.1.1 Свойства операция сложения, умножения

Определение.

1. Свойство дистрибутивности $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения. Если A и B — несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$
если совместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Доказательство.



$$\begin{aligned} A + B &= A\bar{B} + AB + \bar{A}B \Rightarrow P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) = \\ &= P(A\bar{B}) + P(AB) + (P(\bar{A}B) + P(AB)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

□

Задача 2. n писем раскладываются в n конвертов. Найти вероятность того что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт. Чему равна эта вероятность при $n \rightarrow +\infty$

Решение. A_i — i письмо попало в свой конверт
 A — хотя бы одно письмо попало в свой конверт

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad P(A_i A_j) = \frac{1}{A_n^2}, \quad P(A_i A_j A_k) = \frac{1}{A_n^3}, \dots, P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{A_n^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

$$P(A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-1}$$

2.1.2 Независимые события

Примечание. $\Omega = n$, $|A| = m_1$, $|B| = m_2$
 $|\Omega \times \Omega| = n^2$, $AB = m_1 m_2$

Определение. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Примечание. Свойство: если A и B — независимы, то A и \bar{B} — независимы

Доказательство. $P(A) = P(A(B + \bar{B})) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) \Rightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow A$ и \bar{B} — независимы \square

Определение. События A_1, A_2, \dots, A_n называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$ $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$

Примечание. Если события независимы в совокупности, то события независимы попарно (при $k = 2$). Обратное неверно

Пример (Берштейна). Три грани правильного тетраэдра покрашены в красный, синий, зеленый цвета, а четвертая грань во все эти три цвета
 A — грань содержит красный цвет, B — синий, C — зеленый

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

\Rightarrow все события попарно независимы

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

\Rightarrow события не независимы в совокупности

Примечание. Если в условии есть “хотябы”, т.е. требуется найти вероятность совместных независимых событий, то применяем формулу обратной вероятности

Задача 3. Найти вероятность того, что при 4 бросаниях кости, хотябы один раз выпадет шестерка.

Решение. A_1 — при 1 броске “6”, A_2 — при 2х бросках “6”, \dots , A — хотя бы один раз “6”

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = P(\overline{A_4}) = \frac{5}{6}$$

\overline{A} — ни разу не выпадет

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Задача 4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого — 0.6, второго — 0.8

Решение. A_1 — 1й попал

A_2 — 2й попал

A — один попал

$$A = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2)$$

Лекция 3

3.1 Условная вероятность

Обозначение. $P(A|B)$ — вероятность наступления события A , вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Пример. Кубик подбрасывается один раз. Известно что выпало больше трех очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков.

- A — четное число очков
- B — больше 3 очков

Тогда:

- $n = 3$ (4, 5, 6)
- $m = 2$ (4, 6)

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

При интерпретация с геометрическим определением вероятностей также получаем формулу $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$

Определение. Условной вероятностью события A при условии того что имело место событие B называется величина:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

— формула условной вероятности

3.1.1 Формула умножения вероятности

Как следствие формулы условной вероятности получаем:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) \text{ или } P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Теорема 3.1.1.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

Доказательство. По индукции □

Примечание. $P(A) \neq 0$ и поэтому формула умножения удовлетворяет

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) \neq 0$$

Примечание.

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Доказательство. Очевидно □

Задача 5. В коробке 3 красных карандаша и 2 синих. Вынули 3 карандаша. Найти вероятность того что первые два красные а третий синий.

Решение.

- A_1 — 1-й красный
- A_2 — 2-й красный
- A_3 — 3-й синий

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Примечание. Применяем когда учитывается порядок

3.1.2 Полная группа событий

Определение. События $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ образуют полную группу событий если они попарно несовместны, и содержат все элементарные исходы:

- $P(H_i H_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
- $\sum_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$

Примечание. Часто события из полной группы называются гипотезами

3.1.3 Формула полной вероятности

Теорема 3.1.2 (Баеса). $]H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ — полная группа событий
Тогда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

Пример. В первой коробке 4 белых и два черных шара, во второй 1 белый и два черных. Из первой коробки во вторую переложили два шара, затем из второй коробки достали шар. Найти вероятность того что он оказался белый

Решение.

- $]H_1$ — переложили 2 белых
- $]H_2$ — переложили 2 черных
- $]H_3$ — переложили 1 черный и 1 белый
- $]A$ — из второй коробки достали белый

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\sum P(H_i) = 1 \text{ — верно}$$

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(A|H_2) = \frac{1}{5}$$

$$P(A|H_3) = \frac{2}{5}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)(A|H_1) + P(H_2)(A|H_2) + P(H_3)(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

Задача 6. По статистике 1% населения болен раком. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительным. Найти вероятность того что человек болен.

Решение. $\left. \begin{array}{l} H_1 \text{ — болен} \\ H_2 \text{ — здоров} \end{array} \right\}, A \text{ — тест положительный}$

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(A|H_1) = 0.99$
- $P(A|H_2) = 0.01$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{1}{2}$$

Сделаем второй тест:

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(AA|H_1) = 0.99^2$
- $P(AA|H_2) = 0.01^2$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

Лекция 4

4.1 Схема Бернулли

Определение. Схемой Бернулли называется серия независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, каждое интересующее нас событие либо произошло либо не произошло.

- n — число испытаний
- p — вероятность события A при одном испытании
- $q = 1 - p$
- ν_k — число успехов при k испытаниях
- $P_n(k) = P(\nu_k = k)$

Теорема 4.1.1. Вероятность того что при n испытаниях произойдет ровно k успехов равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Доказательство. Рассмотрим один из исходов благоприятных событию A :
 $A_1 = \underbrace{УУ \dots У}_k \underbrace{НН \dots Н}_{n-k}$ — независимые события

- $P(У) = p$
- $P(Н) = q$

$$P(A_1) = \underbrace{pp \dots p}_k \underbrace{qq \dots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

□

Задача 7. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Найти вероятность того что при 5 выстрелах будут 3 попадания

Решение.

- $n = 5$
- $p = 0.8$
- $q = 0.2$
- $k = 3$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

4.1.1 Наиболее вероятное число успехов

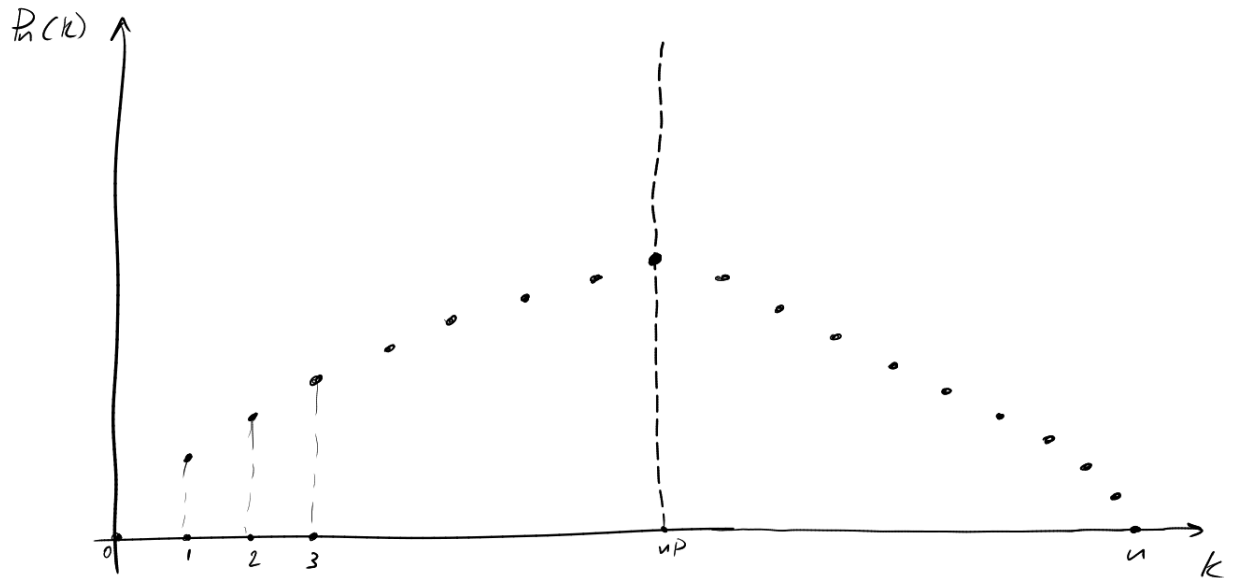
Выясним при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k - 1$ будет не больше чем вероятность k успехов

$$\begin{aligned} P_n(k-1) &\leq P_n(k) \\ C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} &\leq C_n^k p^k q^{n-k} \\ \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q &\leq \frac{n!}{k!(n-k)!} p \\ \frac{k!}{(k-1)!} q &\leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!} p \\ k(1-p) &\leq (n-k+1)p \\ k &\leq np + p \end{aligned}$$

Так как k — целое то выполняется: $np + p - 1 \leq k \leq np + p$

Рассмотрим три ситуации:

1. np — целое. Тогда $np + p$ — целое и $k = np$ — наиболее вероятное число исходов
2. $np + p$ — не целое. Тогда $k = [np + p]$
3. $np + p$ — целое. Тогда $np + p - 1$ — целое и $P_n(k-1) = P_n(k)$ и имеем два наиболее вероятных числа успехов:
 - $k = np + p$
 - $k = np + p - 1$



4.1.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли

Определение. Локальная формула Муавра-Лапласа. Применяем когда требуется найти вероятность точного числа успехов.

$$P_n(\nu_n = x) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ — функция Гауса.

Свойства функции Гауса $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ — четная
2. при $x > 5$, $\varphi(x) \approx 0$

Определение. Интегральная формула Лапласа. Применяем если число успехов лежит в некоем диапазоне.

$$P_n(x_1 \leq \nu_n \leq x_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

— функция Лапласа

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства $\Phi(x)$:

1. $\Phi(-x) = \Phi(x) - \text{нечетная}$
2. при $x > 5$, $\Phi(x) \approx 0.5$

Примечание. В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевается несколько иная функция, чаще всего:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2} 2dz$$

$$F_0(x) = 0.5 + \Phi(x) \text{ или } \Phi(x) = F_0(x) - 0.5$$

Примечание. Формулу применяем при $n \geq 100$ и $p, q \geq 0.1$

Задача 8. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того что

1. произошло ровно 330 попаданий
2. произошло от 312 до 336 попаданий

Решение.

1. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 1.25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

2. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k_1 = 312, k_2 = 336$

$$x_1 = \frac{312 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2$$

$$P_{400}(312 \leq \nu_n \leq 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8185$$

4.2 Статистическое определение вероятности

- n_A — число появления события A при n испытаниях
- $\frac{n_A}{n}$ — частота события A

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}, \text{ при } n \rightarrow \infty$$

4.2.1 Вероятность отклонения относительной частоты

p — вероятность события A , $\frac{n_A}{n}$ — частота A

По интегральной формуле Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon) = P(-n\varepsilon \leq n_A - np \leq n\varepsilon) = P(np - n\varepsilon \leq n_A \leq np + n\varepsilon)$$

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

4.2.2 Закон больших чисел Бернулли

Более точно последняя формула выглядит так:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

при $n \rightarrow \infty$ $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon \rightarrow \infty$ и $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right) \rightarrow 0.5$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 2 \cdot 0.5 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

— закон больших чисел Бернулли

То есть при большом числе испытаний, будет близко к реальной вероятности

Лекция 5

5.1 Схемы испытаний и соответствующие распределения

- n — число испытаний
- p — вероятность при одном испытании
- $q = 1 - p$ — вероятность неудачи при одном испытании

Определение.

$$k \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}$$

— биномиальное распределение с параметрами n и p

Обозначение. $B_{n,p} = B(n, p)$

5.1.1 Схема до первого успешного испытания

Определение. Схема до первого успешного испытания. Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успеха под номером τ

Теорема 5.1.1. $p(\tau = k) = q^{k-1}p$

Доказательство.

$$p(\tau = k) = p(\underbrace{\text{НН} \dots \text{Н}}_{k-1} \text{У}) = q^{k-1}p$$

□

Определение. $k \rightarrow q^{k-1}p$, $1 \leq k \leq \infty$ — называется **геометрическим распределением** с параметром t

Обозначение. $G(p)$

Примечание. Это распределение обладает так называемым свойством отсутствия после действия или свойством нестарения

Теорема 5.1.2. $]p(\tau = k) = q^{k-1}p$

Тогда $\forall n, k \in \mathbb{N} \ p(\tau > n + k | \tau > n) = p(\tau > k)$

Доказательство. По формуле условной вероятности:

$$p(\tau > n + k | \tau > k) = \frac{p(\tau > n + k \text{ и } \tau > j)}{p(\tau > n)} = \frac{p(\tau > n + k)}{p(\tau > n)} \quad (5.1)$$

$$p(\tau > m) = p(\text{первые } m \text{ неудач}) = q^m$$

$$5.1 = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$$

□

Примечание. То, проработет ли девайс k часов после этого, не зависит от того сколько проработал до этого

Примечание. Также $p(\tau = n + k | \tau > n) = p(\tau = k)$

5.1.2 Испытание с несколькими исходами

Пусть при n испытаниях могут произойти m несовместных исходов

- p_i — вероятность i -го исхода при одном отдельном испытании

Теорема 5.1.3. Вероятность того, что при n испытаниях первый исход появится n_1 раз, второй n_2 раз, ..., m -й n_m раз. $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$

Тогда

$$p(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

$$\text{Доказательство. } A_1 = \underbrace{11 \dots 1}_{n_1} \underbrace{22 \dots 2}_{n_2} \dots \underbrace{m \dots m}_{n_m}$$

$$p(A_1) = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$$

Остальные благоприятные исходы отличаются лишь расположением i -х исходов по n местам, а вероятности будут те-же. Всего таких исходов будет:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n_m}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

— формула для перестановок с повторениями

□

Задача 9. Два одинаковых по силе шахматиста играют матч из 6 партий. Вероятность ничьи при одной партии — 0.5. Найти вероятность того, что второй игрок две партии выиграл, а три партии свел в ничью

Решение. Исходы:

1. первый выиграл

2. второй выиграл

3. ничья

$$p_3 = \frac{1}{2}; p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}; n = 6$$

$$P(1, 2, 3) = \frac{6!}{1!2!3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{2^7}$$

5.1.3 Урновая схема

В урне N шаров. Из них K белых, а черных $N - K$. Из нее выбираем n шаров без учета порядка. k — число вынутых белых

Теорема 5.1.4 (Схема с возвратом). Вероятность вынуть белый шар не меняется.

Тогда

$$p = \frac{K}{N} \quad p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

— биномиальное распределение

Теорема 5.1.5 (Схема без возврата). Тогда

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

Определение.

$$k \rightarrow \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k \leq K$$

называется **гипергеометрическим** распределением вероятности

Лемма 1.

$$C_K^k \sim \frac{K^k}{k!}$$

, при $K \rightarrow \infty, K = \text{const}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} C_K^k &= \frac{K!}{k!(K-k)!} = \frac{K(K-1)\dots(K-k+1)}{K^k} \cdot \frac{K^k}{k!} = \\ &= 1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{K}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{K}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{K}\right)}_{\downarrow 1} \cdot \frac{K^k}{k!} \sim \frac{K^k}{k!} \end{aligned}$$

□

Теорема 5.1.6.

- $N \rightarrow \infty$
- $K \rightarrow \infty$
- $\frac{K}{N} \rightarrow p \in (0, 1)$
- n и $0 \leq k \leq K$ — фиксированны

Тогда

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P_{N,K}(n, k) &= \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{K^k}{k!} \cdot \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{N^n} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{K^k}{N^k} \cdot \frac{(N-K)^{n-k}}{N^{n-k}} = \\ &= C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

□

5.1.4 Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Схема: вероятность успеха при одном отдельном испытании зависит от числа испытаний n таким образом, чтобы $n \cdot p_n = \lambda$ (точнее $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$)

Появление очень редких событий в длинном потоке испытаний

Теорема 5.1.7 (Формула Пуассона). Пусть $n \rightarrow \infty$, $p_n \rightarrow 0$, так что $np_n \rightarrow \lambda > 0$

Тогда вероятность k успехов при n испытаниях

$$p(\nu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Доказательство. Положим $\lambda_n = np_n$

$$\begin{aligned} p(\nu_n = k) &= C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{\lambda_n^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right)^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

□

1. Оценка погрешности в формуле Пуассона

Теорема 5.1.8. Пусть ν_n – число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью p

$\lambda = np$ $A \subset \{0, 1, 2, \dots, n\}$ – произвольное подмножество

Тогда погрешность

$$\left| p(\nu_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \min(p, \lambda p) = \min(p, np^2) = \min\left(p, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

Примечание. Формулу Пуассона иногда называют формулой редких событий. Применяем при малых p , $n \geq 100$

Задача 10. Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого элемента $\frac{1}{1000}$. Какова вероятность отказа больше двух элементов

Решение.

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

, где $\lambda = np$

- $n = 1000$
- $p = 0.001$
- $\lambda = np = 1$
- $k > 2$

$$\begin{aligned} p(\nu_n > 2) &= 1 - p(\nu_n \leq 2) = 1 - (p(0) + p(1) + p(2)) \approx 1 - \left(\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= 1 - 2.5e^{-1} \approx 0.0803 \end{aligned}$$

Погрешность $\varepsilon \leq \min(p, \lambda p) = 0.001$