Лекция 2

Ilya Yaroshevskiy

15 января 2021 г.

Содержание

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

$$|Ax| \le \|A\| \cdot |x|$$

1 Теорема лагранжа(для отображений)

Теорема 1.1. $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ дифф $E \quad a, b \in E$
Тогда $\exists c \in [a, b] \quad c = a + \Theta(b - a)\ \Theta \in (0, 1)$
$|F(b) - F(a)| \le \|F'(c)\| \cdot |b - a|$

Доказательство. $f(t) = F(a + t(b - a)),\ t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = F'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$
Тогда $\exists \Theta \in [0, 1] :\ |f(1) - f(0)| \le |f'(\Theta)| \cdot |1 - 0|$ - это т. Лагранжа для векторнозначных функций
т.е $|F(b) - F(a)| \le |F'(a + \Theta(b - a)) \cdot (b - a)| \le \|F'(\underbrace{a + \Theta(b - a)}_{\in[a,b]})\| \cdot |b - a|$ □

2 Лемма

Лемма 1. $\mathcal{L}m, m,\ \Omega_m = \{L \in \mathcal{L}_{m,m} : \exists L^{-1}\},\ A \mapsto A^{-1}$
$B \in \mathcal{L}_{m,m}$ Пусть $\exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^m\ |Bx| \ge c|x|$
Тогда $B \in \Omega_m$ и $\|B^{-1}\| \le \frac{1}{c}$

Доказательство. B - биекция(конечномерный эффект???), $\exists B^{-1}$
$|Bx| \ge c|x| \qquad x := B^{-1}y$
$|y| \ge c \cdot |B^{-1}y|$
$|B^{-1}y \le \frac{1}{c}|y| \Rightarrow \|B^{-1}\| \le \frac{1}{c}$ □

Примечание. $A \in \Omega_m$ Тода $\exists c : |Ax| \ge c \cdot |x|$
$x = |A^{-1}Ax| \le \|A^{-1}\| \cdot |Ax| \qquad c := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

3 Теорема об обратимости оператора близкого к обратимому

Теорема 3.1. $L \in \Omega_m$ $M \in \mathcal{L}_{m,m}$ $\quad \|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$ (M – близкий к L)
Тогда

1. $M \in \Omega_m$, т.е. Ω_m - открытое множество в $\mathcal{L}_{m,m}$
2. $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L-M\|}$
3. $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L-M\|} \cdot \|L - M\|$

Доказательство. $|a + b| \geq |a| - |b|$

1. $|Mx| = |Lx + (M-L)x| \geq |Lx| - |(M-L)x| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} \cdot |x| - \|M-L\| \cdot |x| \geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|) \cdot |x| \Rightarrow$ M - обратим(по Лемме)
   $L \in \Omega_m \Rightarrow \exists c = \frac{1}{\|L^{-1}\|}: \ |Lx| \geq c \cdot |x|$ (по замечанию к Лемме)
2. Из пункта 1 $c = \|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|$, тогда Лемма утверждает, что $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|}$
3. $M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$
   $\|M^{-1} - L^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|L - M\| \cdot \|L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L-M\|} \cdot \|L - M\|$

□

Примечание. $A \mapsto A^{-2}$ - непрерывное отображение $\Omega_m \to \Omega_m$
$B_k \to L \Rightarrow$ при больших k $B_k \in B(L, \frac{1}{\|L^{-1}\|}) \Rightarrow B_k$ - обратимо
$\|L^{-1} - B_k^{-1}\| \leq \frac{\|L^1\|}{\|L^{-1}\| - \|B_k^{-1}\|} \cdot \|L - B_k\| \underset{k \to +\infty}{\to} 0$

4 Теорема о непрерывно диффернцируемых отображениях

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ - дифф на E
$F' : E \to \mathcal{L}_{m,l}$

Теорема 4.1. Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ - дифф на E
Тогда эквивалентны:

1. $F \in C^1(E)$ т.е существуют все частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ - непрерывные на E
2. $F' : E \to \mathcal{L}_{m,l}$ - непрерывно
   т.е $\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \ \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$

Доказательство.

$(1 \Rightarrow 2)$ матричные элементы $F'(x) - F'(\bar{x})$ - это $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x})$
$\|A\| \leq \sqrt{\sum \alpha_{i,j}^2}$
Берем x, ε $\exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} \ \ldots \ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ - сразу для всех i, j
$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$

$(2 \Rightarrow 1)$ Проверяем непрывность в точке x
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$
$h = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots)$
$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot \underbrace{|h|}_{1} < \varepsilon$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \ \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

5 Экстремумы

5.1 Определение

Определение. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad a \in E$
a - точка локального максимума: $\exists U(a) \subset E \ \forall x \in U(a) \ f(x) \leq f(a)$ (аналогично для минимума)
экстремум - максимум или минимум

5.2 Теорема Ферма

Теорема 5.1. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \ a \in \mathrm{Int}E$ - точка экстремума, f - дифф в точке a
<u>Тогда</u> $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \ \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f|_{\text{прямая}(a,u)}$ точка a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма □

Следствие 5.1.1. Небходимое условие экстремума a - локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие 5.1.2. теорема Ролля $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$K \subset E$ - компакт f - дифф на $\mathrm{Int}K$; f - непрерывна на K
$f|_{\partial K} = \mathrm{const}$ (на границе K)
<u>Тогда</u> $\exists a \in \mathrm{Int}K \ f'(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)) = 0$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда:

- $f = \mathrm{const}$ на $K \Rightarrow f' \equiv 0$
- $\exists a \in \mathrm{Int}K$ — точка экстремума
  по Т. Ферма $f'(a) = 0$

□

5.3 Квадратичная форма

5.3.1 Определение

Определение. $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$Q(h) = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq m} a_{ij} h_i h_j$

- Положительно определенная квадратичная фомра $\forall h \neq 0 \ Q(h) > 0$
  Пример. $Q(h) = h_1^2 + h_2^2 + \cdots +_m^2$
- Отрицательно определенная квадратичная фомра $\forall h \neq 0 \ Q(h) < 0$
- Незнакоопределенная квадратичная фомра $\exists \bar{h} \ Q(\bar{h}) < 0$
  Пример. $\exists \bar{\bar{h}} \ Q\bar{\bar{h}} > 0 \qquad Q(h) = h_1^2 - h_2^2$
- Полуопределенная(положительно опрделенная вырожденная) $\exists \bar{h} \neq 0 : Q(h) = 0$
  Пример. $Q(h) = h_1^2 \qquad Q((0, 1, 1, \ldots)) = 0$

5.3.2 Лемма

Лемма 2.

1. *Q - положительно определенная.*
   <u>*Тогда*</u> $\exists \gamma_Q > 0 \ \forall h \ Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$
2. *$p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - норма*
   <u>*Тогда*</u> $\exists C_1, C_2 > 0 \ \forall x \ C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

Доказательство. $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ — компакт $\Rightarrow$ по Т. Вейерштрасса минимум и максимум достигаются
Для $x = 0$ оба утверждения очевидны. Пусть $x \neq 0$

1. $\gamma_Q := \min\limits_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$
   Тогда $Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$, $Q(h) = Q(|h| \cdot \frac{h}{|h|}) = |h|^2 \cdot Q(\frac{h}{|h|}) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$

2. $C_2 := \min\limits_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_1 := \max\limits_{x \in S^{m-1}} p(x)$
   $p(x) = p(|x|\frac{x}{|x|}) = |x| p(\frac{x}{|x|}) \begin{array}{l} \geq C_2|x| \\ \leq C_1|x| \end{array}$
   Проверим, что $p(x)$ - непрерывная функция(для Т. Вейерштрасса), e_k — базисный вектор
   $p(x-y) = p(\sum\limits_{k=1}^{m}(x_k - y_k)e_k) \leq \sum p((x_k - y_k)e_k) = \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq |x-y| \cdot M$
   где $M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$, $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$

$\square$

5.4 Достаточное условие экстремума

$d^2 f(a,h) = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + \dots + f''_{x_m x_m} h_m^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq m} f''_{x_i x_j} h_i h_j$
$f(x) = f(a) + df(a, x-a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a, x-a) + o(|x-a|^2)$
$f(a+h) = f(a) + df(a,h) + \frac{1}{2!} d^2 f(a + \theta h, h), \quad 0 \leq \theta \leq 1$

5.4.1 Теорема о достаточном условии экстремума

Теорема 5.2. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $a \in \mathrm{Int} E \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0, \; f \in C^2(E)$
$Q(h) := d^2 f(a,h)$, Тогда, если:

- $Q(h)$ - положительно определено, то a - точка локального минимума
- $Q(h)$ - отрицательно определено, то a - локальный максимум
- $Q(h)$ - незнакоопределено, то a - не экстремум
- $Q(h)$ - полож/отриц вырожденная - недостаточно информации

Доказательство.

- Для положит. опр.
  $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \theta h, h) =$
  $$= \frac{1}{2}\left(Q(h) + \left(\sum_{i=1}^{m}\left(\underbrace{f''_{x_i x_i}(a+\theta h) - f''_{x_i x_i}(a)}_{\text{б.м } h \to 0}\right)\underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2} + 2\sum_{i<j}\left(\underbrace{f''_{x_i x_j}(a+\theta h) - f''_{x_i x_j}(a)}_{\text{б.м}}\right)\underbrace{h_i h_j}_{\leq |h|^2}\right)\right)$$
  $f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}(\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2) \geq \frac{1}{4}\gamma_Q |h|^2 > 0$

- Для отр. опр аналогично

- $\sphericalangle \bar{h} \quad Q(\bar{h}) > 0 \quad f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 =$
  $$= \frac{1}{2}\left(t^2 Q(\bar{h}) + t^2 \left(\underbrace{\sum \left(f''_{x_i x_i}(a + \Theta t h) - f''_{x_i x_i}(a)\right)\bar{h_i}^2 + 2\sum_{i<j}\left(\dots\right)}_{\text{б.м при } t \to 0}\right)\right) \geq$$
  $\geq \frac{1}{2} t^2 (Q(h) - \frac{1}{2} Q(h)) > 0$, т.е $f(a + t\bar{h}) > f(a)$, при $t \to 0$
  Аналогично $f(a + t\bar{\bar{h}}) < f(a)$, при малых t

$\square$

Пример. $f(x_1, x_2, \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 - \dots \quad f'_{x_1}(a) = 0, \; f'_{x_2} = 0$
$\bar{f}(x_1, x_2, \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 + \dots \quad d^2 f(a,h) = 2h_1^2, \; d^2 \bar{f}(a,h) = 2h_1^2$
$a = (0, 0, 0, \dots)$
f - не имеет экстремума в точке a
$\bar{f}$ - имеет минимум в точке a
Примечание. Если f как в теореме, $d^2 f(a,h)$ - положительно определенный вырожденный $\Rightarrow$ a - не точка локального максимума