Лекция 2

Ilya Yaroshevskiy

19 апреля 2021 г.

Содержание

Обозначение. Γ, Δ, Σ — списки высказываний

Определение. Следование: $\Gamma \models \alpha$, если

- $\Gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_n$
- Всегда когда все $[\![\gamma_i]\!] = \text{И}$, то $[\![\alpha]\!] = \text{И}$

Пример. $\models \alpha$ — α общезначимо

Определение. ~~Теория~~ Исчисление высказываний корректна, если при любом α из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$

Определение. Исчисление полно, если при любом α из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$

Теорема 0.1 (о дедукции)**.** $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.
Т.е. существует доказательство $\delta_1, \dots, \delta_n$, где $\delta_n = \alpha \to \beta$
Построим новое доказательство: $\delta_1, \dots, \delta_n, \alpha(\text{гипотеза}), \beta(\text{М.Р.})$
Эта новая последовательность — доказательство $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

($\Rightarrow$) Рассмотрим $\delta_1, \dots, \delta_n$ — доказательство $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 & \alpha \to \delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_n & \alpha \to \delta_n \end{array}$$

Утверждение: последовательность $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ можно дополнить до доказательства, т.е. каждый σ_i — аксиома, гипотеза или получается по М.Р. Докажем по индукции:
База: $n = 0$
Переход: пусть $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ — доказательсво. тогда $\sigma_{n+1} = \alpha \to \delta_{n+1}$ по трем вариантам:

1. δ_{n+1} — аксиома или гипотеза $\not\equiv \alpha$
2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
3. $\delta_k \equiv \delta_l \to \delta_{n+1},\ k, l \le n$

Докажем каждый из трех вариантов

1.
$$\begin{array}{l|ll} (\text{n} + 0.2) & \delta_{n+1} & \text{(аксиома или гипотеза)} \\ (\text{n} + 0.4) & {}_{n+1} \to \alpha \to \delta_{n+1} & \text{(сх. акс. 1)} \\ (\text{n} + 1) & \alpha \to \delta_{n+1} & (\text{М.Р. } n+0.2, n+0.4) \end{array}$$

2. $(n + 0.2, n + 0.4, n + 0.6, n + 0.8, n + 1)$ — доказательтво $\alpha \to \alpha$
3.

(k)	$\alpha \to (\sigma_l \to \sigma_{n+1})$	
(l)	$\alpha \to \sigma_l$	
$(n+0.2)$	$(\alpha \to \delta_l) \to (\alpha \to (\delta_l \to \delta_{n+1})) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	(сх. 2)
$(n+0.4)$	$(\alpha \to \delta_l \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	(M.P. $n+0.2, l$)
$(n+1)$	$\alpha \to \delta_{n+1}$	(M.P. $n+0.4, k$)

□

Теорема 0.2 (о корректности)**.** Пусть $\vdash \alpha$
Тогда $\vDash \alpha$

Доказательство. Индукция по длине доказательства: каждая $[\![\delta_i]\!] =$ И, если $\delta_1, \dots, \delta_k$ — доказательство α
Пусть $[\![\delta_1]\!] =$ И$, \dots, [\![\delta_n]\!] =$ И. Тогда осн. δ_{n+1}:

1. δ_{n+1} — аксиома

   (a) $\delta_{n+1} \equiv \alpha \to \beta \to \alpha$ (Сущесвуют α, β, что)
   Пусть $\delta_{n+1} = A \to B \to A$. Тогда $\alpha \equiv A, \beta \equiv B$
   $[\![\alpha \to \beta \to \alpha]\!]^{[\![\alpha]\!]:=a, [\![\beta]\!]:=b} =$ И

a	b	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to \beta \to \alpha$
Л	Л	И	И
Л	И	Л	И
И	Л	И	И
И	И	И	И

2. δ_{n+1} — M.P. $\delta_k = \delta_l \to \delta_{n+1}$
   Фиксируем оценку $[\![\delta_k]\!] = [\![\delta_l]\!] =$ И, тогда $[\![\delta_l \to \delta_{n+1}]\!] =$ И

$[\![\delta_l]\!]$	$[\![\delta_{n+1}]\!]$	$[\![\delta_k]\!] = [\![\delta_l \to \delta_{n+1}]\!]$
~~Л~~	~~Л~~	~~И~~
~~Л~~	~~И~~	~~И~~
~~И~~	~~Л~~	~~Л~~
И	И	И

   Т.е. $[\![\delta_{n+1}]\!] =$ И

□

Теорема 0.3 (о полноте)**.** Пусть $\vDash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

Обозначение.

$$[\beta]^\alpha \equiv \begin{cases} \alpha & [\![\beta]\!] = \text{И} \\ \neg\alpha & [\![\beta]\!] = \text{Л} \end{cases}$$

Доказательство. Фиксируем набор перменных из α: $P_1, \dots, P_n$
Рассмотрим $[\![\alpha]\!]^{P_1 := x_1, \dots P_n := x_n} =$ И. Докажем, что $\underbrace{[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n}}_{\Delta} \vdash [\alpha]^\alpha$.

Индукция по длине формулы (по структуре)
База: $\alpha \equiv P_i$ $[P_i]^{P_i} \vdash [P_i]^{P_i}$
Переход: пусть η, ζ: $\Delta \vdash [\eta]^\eta, \Delta \vdash [\zeta]^\zeta$. Покажем, что $\Delta \vdash [\eta \star \zeta]^{\eta \star \zeta}$, где $\star$ — все связки
Используя лемму: $\vDash \alpha$, т.е. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash [\alpha]^\alpha$. Но $[\![\alpha]\!] =$ И при любой оценке, т.е. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash \alpha$ при всех x_i

$$\left.\begin{array}{r} [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}}, P_n \vdash \alpha \\ [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}}, \neg P_n \vdash \alpha \end{array}\right| \xRightarrow{\text{лемма}} [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}} \vdash \alpha$$

□

Лемма 1.

- $\Gamma, \eta \vdash \zeta$
- $\Gamma, \neg\eta\zeta$

Тогда $\Gamma \vdash \zeta$

Лемма 2. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash \alpha$, *то* $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}} \vdash \alpha$

1 Интуиционистская логика

$A \vee B$ — плохо

Пример. Докажем: существует a, b, что $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, но $a^b \in \mathbb{Q}$

Пусть $a = b = \sqrt{2}$. Рассмотрим $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Если да, то ОК
- Если нет, то возьмем $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

ВНК-интерпретация. α, β

- $\alpha \& \beta$ — есть α, β
- $\alpha \vee \beta$ — есть α либо β и мы знаем какое
- $\alpha \to \beta$ — есть способ перестроить α в β
- $\perp$ — конструкция без построения $\neg\alpha \equiv \alpha \to\perp$