

# Лекция 4

Илья Yaroshevskiy

11 марта 2021 г.

## Содержание

1 Табличные модели	1
2 Модели Крипке	1
3 Доказательство нетабличности	2

**Определение. Предпорядок** — транзитивное, рефлексивное

**Определение. Отношение порядка** (частичный) — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное

**Определение. Линейный порядок** — порядок в котором  $a \preceq b$  или  $b \preceq a$

**Определение. Полный порядок** — линейный, каждое подмножество имеет наименьший элемент.

*Пример.*  $\mathbb{N}$  — вполне упорядоченное множество

*Пример.*  $\mathbb{R}$  — не вполне упорядоченное множество

- $(0, 1)$  не имеет наименьшего
- $\mathbb{R}$  не имеет наименьшего

## 1 Табличные модели

**Определение.** Назовем модель **табличной** для ИИВ:

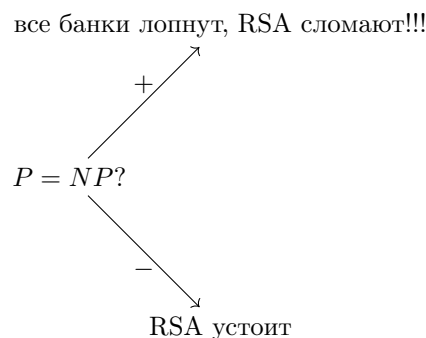
- $V$  — множество истинностных значений  
 $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_V : V^2 \rightarrow V, f_{\neg} : V \rightarrow V$   
Выделенные значения  $T \in V$   
 $\perp \in V, f_p : p_i \rightarrow V$
- $p_i = f_p(p_i)$   
 $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$   
 $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$

Если  $\vdash \alpha$ , то  $\models \alpha$  означает, что  $\llbracket \alpha \rrbracket = T$ , при любой  $f_p$

**Определение.** Конечная модель: модель где  $V$  — конечно

**Теорема 1.1.** У ИИВ не существует полной табличной модели

## 2 Модели Крипке



1.  $W = \{W_i\}$  — множество миров
2. частичный порядок ( $\succeq$ )
3. отношение вынужденности:  $W_j \Vdash p_i$   
 $(\Vdash) \subseteq W \times \mathcal{P}$   
 При этом, если  $W_j \Vdash p_i$  и  $W_j \preceq W_k$ , то  $W_j \Vdash p$

**Определение.**

1.  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \Vdash \beta$ , тогда (и только тогда)  $W_i \Vdash \alpha \& \beta$
2.  $W_i \Vdash \alpha$  или  $W_i \Vdash \beta$ , то  $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
3. Пусть во всех  $W_i \preceq W_j$  всегда когда  $W_j \Vdash \alpha$  имеет место  $W_j \Vdash \beta$   
 Тогда  $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$
4.  $W_i \Vdash \alpha$  —  $\alpha$  не вынуждено нигде, начиная с  $W_i$ :  $W_i \preceq W_j$ , то  $W_j \nVdash \alpha$

**Теорема 2.1.** Если  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \preceq W_j$ , то  $W_j \Vdash \alpha$

**Определение.** Если  $W_i \Vdash \alpha$  при всех  $W_i \in W$ , то  $\models \alpha$

**Теорема 2.2.** ИИВ корректна в модели Крипке

*Доказательство.* 1.  $\langle W, \Omega \rangle$  — топология, где  $\Omega = \{w \subseteq W \mid \text{если } W_i \in w, W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in w\}$

2.  $\{W_k \mid W_k \Vdash p_j\}$  — открытое множество  
 Примем  $\llbracket p_j \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash p_j\}$   
 Аналогично  $\llbracket \alpha \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash \alpha\}$

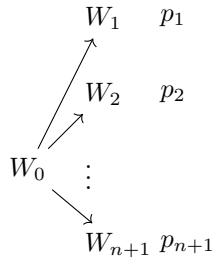
□

### 3 Доказательство нетабличности

Пусть существует конечная табличная модель  $|V| = n$

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} (p_i \rightarrow p_j \& p_j \rightarrow p_i)$$

1.  $\nVdash \varphi$



$$W_1 \nVdash (p_i \rightarrow p_k) \& (p_k \rightarrow p_1), \quad k \neq 1$$

Значит

$$\begin{aligned} & \nVdash (p_i \rightarrow p_j) \& (p_j \rightarrow p_i) \\ & \nVdash \bigvee (p_i \rightarrow p_j) \& (p_j \rightarrow p_i) \\ & \nVdash \varphi_n \end{aligned}$$

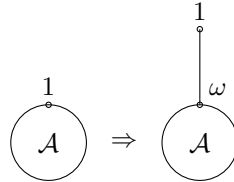
2.  $\models_V \varphi_n$ : по признаку Дирихле найдутся  $i \neq j : \llbracket p_i \rrbracket = \llbracket p_j \rrbracket$   
 $\llbracket p_i \rightarrow p_j \rrbracket = \text{И}$  и  $\llbracket \varphi_n \rrbracket = \text{И}$   
 Значит  $\vdash \varphi_n$  — противоречие

**Определение.** Дизъюнктивность ИИВ:  $\vdash \alpha \vee \beta$  влечет  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \beta$

**Определение.** Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из  $\alpha + \beta = 1$  следует что  $\alpha = 1$  или  $\beta = 1$

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра Гейтинга, тогда:

1.  $\Gamma(\mathcal{A})$



Добавим новый элемент  $1_{\Gamma(\mathcal{A})}$  переименуем  $1_{\mathcal{A}}$  в  $\omega$

**Теорема 3.1.**

- $\Gamma(\mathcal{A})$  — алгебра Гейтинга
- $\Gamma(\mathcal{A})$  — Гёделева

**Определение.** Гомоморфизм алгебр Гейтинга

- $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$
- $\varphi(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$

**Теорема 3.2.**  $a \leq b$ , то  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

**Определение.**

- $\alpha$  — формула ИИВ
- $f, g$ : оценки ИИВ
- $f$ : ИИВ  $\rightarrow \mathcal{A}$
- $g$ : ИИВ  $\rightarrow \mathcal{B}$

$\varphi$  согласованы  $f, g$ , если  $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

**Теорема 3.3.** если  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  согласована с  $f, g$  и оценка  $\llbracket \alpha \rrbracket_g \neq 1_{\mathcal{B}}$ , то  $\llbracket \alpha \rrbracket_f \neq 1_{\mathcal{A}}$

**Теорема 3.4.** ИИВ дизъюнктивно

*Доказательство.* Рассмотрим алгебру Линденбаума:  $\mathcal{L}$   
Рассмотрим  $\Gamma(\mathcal{L})$

- $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}} & , x = 1_{\Gamma(\mathcal{L})} \\ x & , \text{иначе} \end{cases}$$

$\varphi$  — гомоморфизм

Пусть  $\vdash \alpha \vee \beta$ , тогда  $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$

$\llbracket \alpha + \beta \rrbracket = 1$ , и т.к.  $\Gamma(\mathcal{L})$  — Гёделева то  $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$  или  $\llbracket \beta \rrbracket = 1$

Пусть  $\not\vdash \alpha$  и  $\not\vdash \beta$ , тогда  $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket) \neq 1_{\mathcal{L}}$  и  $\varphi(\llbracket \beta \rrbracket) \neq 1_{\mathcal{L}}$ , т.е.  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}} \neq 1_{\mathcal{L}}$  и  $\llbracket \beta \rrbracket_{\mathcal{L}} \neq 1_{\mathcal{L}}$ , тогда  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$  и  $\llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\Gamma(\mathcal{L})} \Rightarrow$  Противоречие  $\square$