Лекции по Теории вероятностей 4 семестр

Ilya Yaroshevskiy

3 апреля 2021 г.

Оглавление

Лекция 1

1.1 Статистическая вероятность

n — чсло экспериментов
n_A — число выполнения события A Отношение $\frac{n_A}{n}$ — частота события A
$P(A) \approx \frac{n_A}{n},\ n \to +\infty$

1.1.1 Пространство элементарных исходов. Случайные события

Определение. Пространством элементарных исходов называется множество содержащее все возможные результаты данного эксперимента из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются **элементарными исходами**

Обозначение.

- Пространство элементарных исходов — Ω
- Элементарный исход $w \in \Omega$

Определение. Случайными событиями называются подмножества $A \subset \Omega$. Событие A **наступило** если в ходе эксперимента произошел один из элементарных исходов $w \in A$. w — благоприятный к A

Пример. Бросаем один раз монету. $\Omega = \{H, T\}$.
H — Head(орел), T — Tail(решка)

Пример. Бросаем кубик. $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Выпало четное число очков. $A = \{2, 4, 6\}$

Пример. Монета бросается дважды

- Учитываем порядок. $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- Не учитываем порядок. $\Omega = \{HH, HT, TT\}$

Пример. Бросается дважды кубик. Учитывем порядок.
Число очков кратно 3. $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), \dots\}$

Пример. Монета бросается до выпадения герба. $\Omega = \{(H), (T, H), (T, T, H), \dots\}$ — счетное число исходов

Пример. Монета бросается на плоскость. $\Omega = \{(x, y) \big| x, y \in \mathbb{R}\}$ — нечетное число исходов

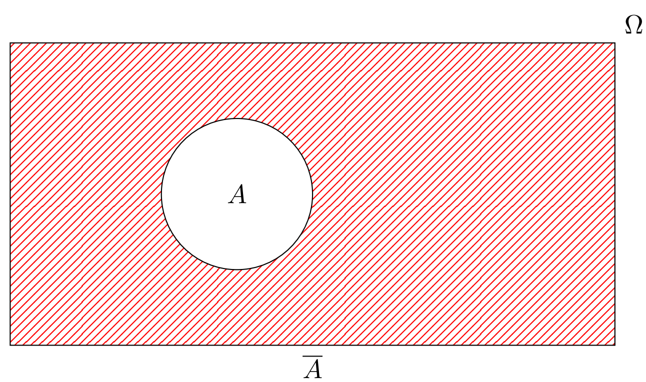
1.1.2 Операции над событиями

Определение. Ω — универсальное событие, достоверное, наступает всегда, т.к. содержит все элементарные исходы
$\emptyset$ — невозможное событие, никогда не выполняется, т.к. не одержит элементарных исходов

Определение. Суммой событий $A + B$ называется событие $A \cup B$ — событие состоящее в том что произошло событие A или событие B, т.е. хотя бы одно из них

Определение. Произведением $A \cdot B$ называется событие $A \cap B$ — событие состоящее в том что произошло событие A и событие B, т.е. оба из них

Определение. Противоположным к A называется событие $\overline{A}$ — состоящее в том событие A не произошло



Определение. Дополнение

Определение. События A и B называются **несовместными** если $A \cdot B = \emptyset$, т.е. в ходе эксперимента может наступить только одно из них

Определение. Событие A **влечет** событие B, если $A \subset B$

Определение. $P(A) \leq 1$ — вероятность наступления события A

1.1.3 Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число исходов, при чем их можно считать равновозможным. Тогда применимо классическое определение вероятности

Определение. Вероятность события A $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$, где n — число всех возможных элеметарных исходов, m — число элементарных исходов благоприятных событию A. В частности, если $|\Omega| = n$, а A — элементарный исход, то $P(A) = \frac{1}{n}$

Примечание. Свойства:

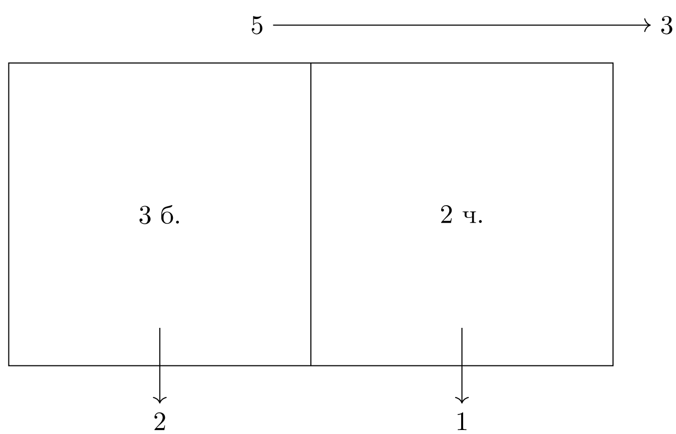
1. $0 \leq P(A) \leq 1$

4. Если события A и B несовместны то вероятность $P(A+B) = P(A) + P(B)$

   Доказательство. $]|A| = m_1, |B| = m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$
   $P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$ □

Пример. Найти вероятность того, что при бросании кости выпадет четное число очков
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ A = \{2, 4, 5\}, \ P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Пример. В ящике 3 белых и два черных шара. Вынули 3 шара, найти вероятность того что из них 2 белых и 1 черных



$$n = C_5^3 = 10$$

$$m = C_3^2 \cdot C_2^1 = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{10}$$

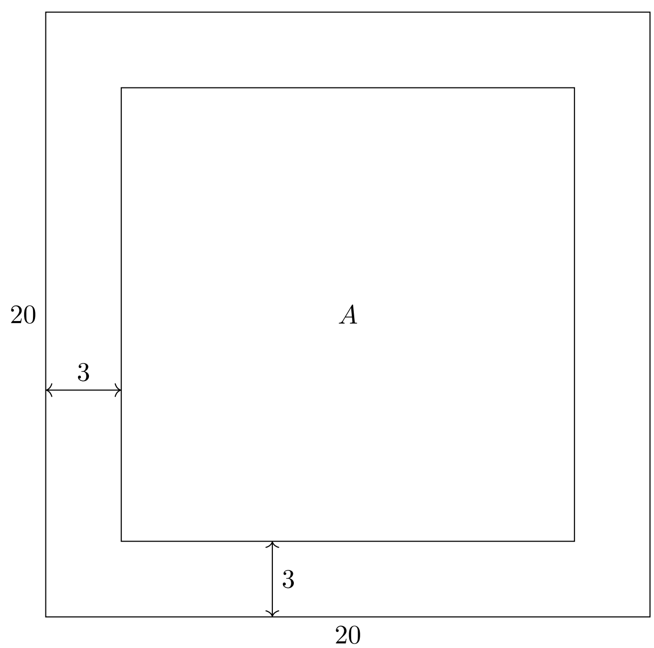
1.1.4 Геометрическое понятие вероятности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченая область
$\mu(\Omega)$ — конечная мера множества Ω (например мера Римана, т.е длина, площадь, объем) В эту область *наугад* бросаем точку. Термин *наугад* означает, что вероятность попадания в область A зависит только от меры этой области, но не зависит от ее положения. Вероятности попадания в любые точки равновозможны. Тогда применимо геометрическое определение вероятности.

Определение. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где $\mu(\Omega)$ — мера Ω, $\mu(A)$ — мера благоприятной области A

Примечание. Заметим что по этому определению, мера точки равна 0 и веротяность попадания в конкретную точку равна 0, хотя это событие не является невозможным.

Пример. Игра. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того что монета целиком окажется на одной плитке



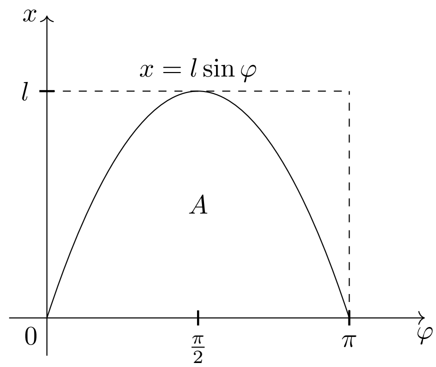
$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$

$$S(A) = 14^2 = 196$$

$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$

Задача 1. Пол выложен ламинатом. На пол бросается игла длиной равной ширине доски. Найти вероятность того что она пересечет стык

Решение. $2l$ — длина иглы, x — расстояние от центра иглы до ближайшего края, φ — угол к ближайшему краю
Игла пересечет край если $x \le |AB|$, $|AB| = l\sin\varphi$
Можно считать что положение от центра и угол, независимы друг от друга. $x \in [0, l].\varphi \in [0, \pi]$



$$A : x \le l\sin\varphi$$

$$S(\Omega) = \pi \cdot l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l\sin\varphi d\varphi = 2l$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$

Лекция 2

2.1 Аксиоматическое определние верояности

Колмагоров

- Ω — пространство элементарных исходов

Систему $\mathcal{F} \subset \Omega$ называем **σ-алгеброй событий** если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Примечание. Свойства:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, т.к. $\overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   Доказательство.
   $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$ □

3. (a) $F = \{\Omega, \emptyset\}$
   (b) $F = \{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$

Определение.]Ω — пространство элементарных исходовб $\mathcal{F}$ – его σ-алгебра. **Вероятностью** на $(\Omega, \mathcal{F})$ обозначается функция $P(A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $P(A) \geq 0$ — свойство **неотрицательности**

2. Если события $A_1, A_2, \ldots$ — попарно несовместны($\forall i, j: \ A_i \cap A_j = \emptyset$), то:

$$P(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

— свойство **счетной аддитивности**

3. $P(\Omega) = 1$ — свойство **нормированности**

Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — **вероятностное пространство**

Примечание. Свойства:

1. $P(\emptyset) = 0$

   Доказательство. $\emptyset$ и Ω — несовместные события

$$P(\underbrace{\emptyset + \Omega}_{\Omega}) = P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) + 1 = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

□

2. Формула обратной вероятнсоти

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

   Доказательство. A и $\overline{A}$ — несовместные, $A \cup \overline{A} = \Omega$

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

□

3. $0 \le P(A) \le 1$

   Доказательство.

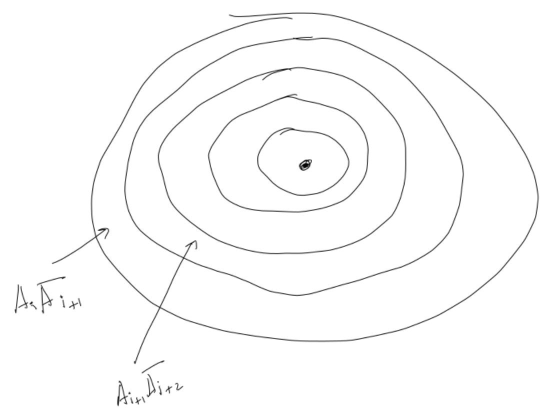
   (a) $P(A) \ge 0$
   (b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \le 1$

□

Аксиома 1. *Пусть имеется убывающая цепочка событий* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset$
Тогда $P(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Примечание. При непрерывном изменении области $A \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность также должна изменяться непрерывно. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

Доказательство.



$$A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i \overline{A_{i+1}} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$$

т.к. эти события несовместны

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}}) + P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i)$$

т.к. $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \emptyset$ и $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}})$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}}) = P(A_i)$$

$$P(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

□

Примечание. Аксимома счетной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности

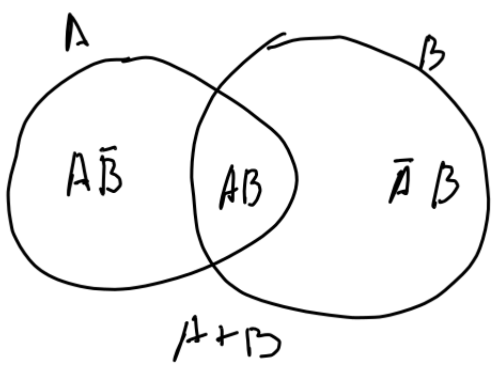
2.1.1 Свойства операция сложения, умножения

Определение.

1. Свойство дистрибутивности $A \cdot (B + C) = AB + AC$

2. Формула сложения. Если A и B — несовместны, то $P(A+B) = P(A)+P(B)$
   если совместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

   Доказательство.



$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B \Rightarrow P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) =$$
$$= P(A\overline{B})+P(AB)+(P(\overline{A}B)+P(AB))-P(AB) = P(A)+P(B)-P(AB)$$

□

Задача 2. n писем раскладываются в n конвертов. Найти вероятнсоть того что хотя бы одно письмо попадет в свой коверт. Чему равна эта вероятность при $n \to +\infty$

Решение. A_i — i письмо попало в свой коверт
A — хотя бы одно письмо попало в свой конверт

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n},\ P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2},\ P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3}, \dots P(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{A_n^2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

$$P(A) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - e^{-1}$$

2.1.2 Независимые события

Примечание. $\Omega = n$, $|A| = m_1$, $|B| = m_2$
$|\Omega \times \Omega| = n^2$, $AB = m_1 m_2$

Определение. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Примечание. Свойство: если A и B — независимы, то A и $\overline{B}$ — независимы

Доказательство. $P(A) = P(A(B+\overline{B})) = P(AB+A\overline{B}) = P(AB)+P(A\overline{B}) \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow A$ и $\overline{B}$ — независимы □

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n$ $P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$

Примечание. Если события независимы в совокупности, то события независимы попарно(при $k = 2$). Обратное неверно

Пример (Берштейна)*.* Три грани правильного тетраэдра выкрашены в красный, синий, зленый цвета, а четвертая грань во все эти три цвета
$]A$ — грань содержит красный цвет, B — синий, C — зеленый

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$\Rightarrow$ все события попарно независимы

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \ne P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ события не независимы в совокупности

Примечание. Если в условии есть "хотябы", т.е. требуется найти вероятность совместных независимых событий, то применяем формулу обратной вероятности

Задача 3. Найти веротяность того, что при 4 бросаниях кости, хотябы один раз выпадет шестерка.

Решение. $]A_1$ — при 1 броске "6", A_2 — при 2х бросках "6", ..., A — хотя бы один раз "6"

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = P(\overline{A_4}) = \frac{5}{6}$$

$\overline{A}$ — ни разу не выпадет

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Задача 4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого — 0.6, второго — 0.8

Решение. A_1 — 1й попал
A_2 — 2й попал
A — один попал

$$A = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$$

$$P(A) = P(A) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2)$$

Лекция 3

3.1 Условная вероятность

Обозначение. $P(A|B)$ — вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Пример. Кубик подбрасывается один раз. Известно что выпало больше трех очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков.

- A — четное число очков
- B — больше 3 очков

Тогда:

- $n = 3$ $(4, 5, 6)$
- $m = 2$ $(4, 6)$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

При интерпретация с геометрическим определением вероятностей также получаем формулу $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$

Определение. Условной вероятностью события A при условии того что имело место событие B называется величина:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

— формула условной вероятности

3.1.1 Формула умножения вероятности

Как следствие формулы условной вероятности получаем:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) \text{ или } P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Теорема 3.1.1.

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

Доказательство. По индукции □

Примечание. $P(A) \neq 0$ и поэтому формула умножения удовлетворяет

$$P(A_1A_2\ldots A_n) \neq 0$$

Примечание.

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B)$$

Доказательство. Очевидно □

Задача 5. В коробке 3 красных крандаша и 2 синих. Вынули 3 карандаша. Найти вероятность того что первые два красные а третий синий.

Решение.

- A_1 — 1-й красный
- A_2 — 2-й красный
- A_3 — 3-й синий

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_2A_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Примечание. Прменяем когда учитывается порядок

3.1.2 Полная группа событий

Определение. События $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ образуюти полную группу событий если они попарно несовместны, и содержат все элементарные исходы:

- $P(H_iH_j) = \emptyset\ \forall i \neq j$
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$

Примечание. Часто события из полной группы называются гипотезами

3.1.3 Формула полной вероятности

Теорема 3.1.2 (Баеса)**.** $]H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — полная группа событий <u>Тогда</u>

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

Пример. В первой коробке 4 белых и два черных шара, во второй 1 белый и два черных. Из первой коробки во вторую переложили два шара, затем из второй коробки достали шар. Найти вероятность того что он оказался белый

Решение.

- $]H_1$ — переложили 2 белых
- $]H_2$ — переложили 2 черных
- $]H_3$ — переложили 1 черный и 1 белый
- $]A$ — из второй коробки достали белый

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$
$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$
$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$
$$\sum P(H_i) = 1 \text{ — верно}$$
$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}$$
$$P(A|H_2) = \frac{1}{5}$$
$$P(A|H_3) = \frac{2}{5}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)(A|H_1)+P(H_2)(A|H_2)+P(H_3)(A|H_3) = \frac{6}{15}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{5}+\frac{8}{15}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

Задача 6. По статистике 1% населения болен раком. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительным. Найти веротяность того что человек болен.

Решение. $] \left.\begin{array}{l} \text{H}_1 \text{ — болен} \\ \text{H}_2 \text{ — здоров} \end{array}\right\}, A$ — тест положительный

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(A|H_1) = 0.99$
- $P(A|H_2) = 0.01$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{1}{2}$$

Сделаем второй тест:

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(AA|H_1) = 0.99^2$
- $P(AA|H_2) = 0.01^2$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

Лекция 4

4.1 Схема Бернулли

Определение. Схемой Бернулли называется серия независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, каждое интересующее нас событие лиибо произошло либо не произошло.

- n — число испытаний
- p — вероятность события A при одном испытании
- $q = 1 - p$
- ν_k — число успехов при k испытаниях
- $P_n(k) = P(\nu_k = k)$

Теорема 4.1.1. Вероятность того что при n испытаниях произойдет ровно k успехов равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Доказательство. Рассмотрим один из исходов благоприятных событию A: $A_1 = \underbrace{\text{УУ}\ldots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{n-k}$ — независмые события

- $P(\text{У}) = p$
- $P(\text{Н}) = q$

$$P(A_1) = \underbrace{pp\ldots p}_{k}\underbrace{qq\ldots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

□

Задача 7. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Найти вероятность того что при 5 выстрелах будут 3 попадания

Решение.

- $n = 5$
- $p = 0.8$
- $q = 0.2$
- $k = 3$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

4.1.1 Наиболее вероятное число успехов

Выясним при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k-1$ будет не больше чем веротяность k успехов

$$P_n(k-1) \leq P_n(k)$$

$$C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \leq C_n^k p^k qn - k$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q \leq \frac{n!}{(k!(n-k)!)} p$$

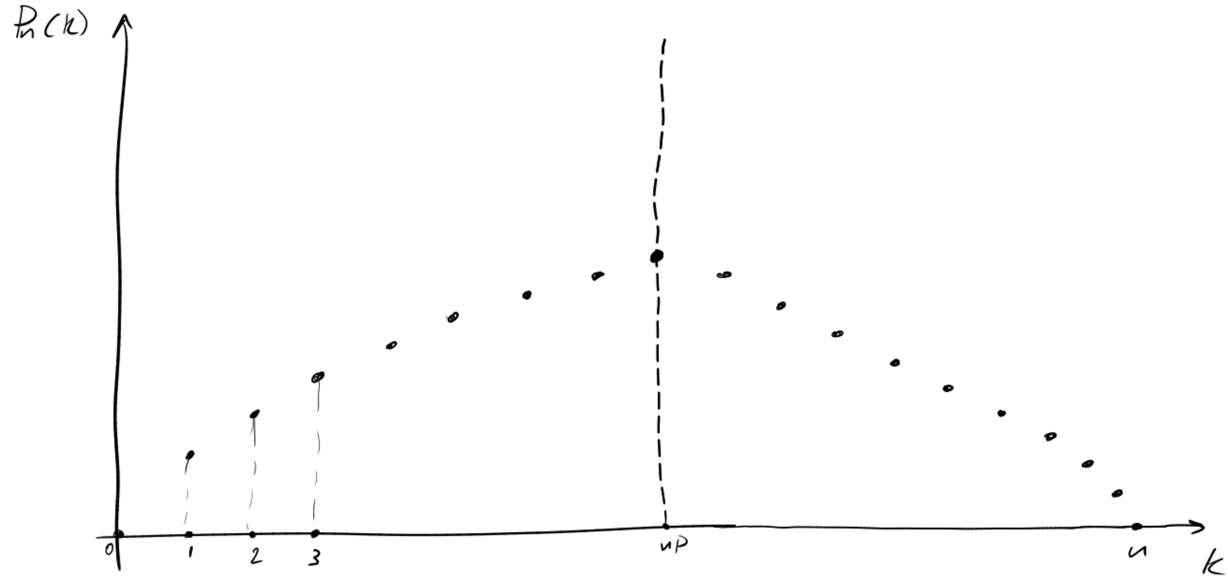
$$\frac{k!}{(k-1)!} q \leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!} p$$

$$k(1-p) \leq (n-k+1)p$$

$$k \leq np + p$$

Так как k — целое то выполняется: $np + p - 1 \leq k \leq np + p$
Рассмотрим три ситуации:

1. np — целое. Тогда $np+p$ — целое и $k = np$ — наиболее вероятное число исходов
2. $np + p$ — не целое. Тогда $k = [np + p]$
3. $np + p$ — целое. Тогд $np + p - 1$ — целое и $P_n(k-1) = P_n(k)$ и имеем два наиболее вероятных числа успехов:
   - $k = np + p$
   - $k = np + p - 1$



4.1.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли

Определение. Локальная формула Муавра-Лапласса. Применяем когда требуется найти вероятноть точного числа успехов.

$$P_n(\nu_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ — функция Гауса.
Свойства функции Гауса $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ — четная
2. при $x > 5,\ \varphi(x) \approx 0$

Определение. Интегральная формула Лапласса. Применяем если число успехов лежит в неком диапозоне.

$$P_n(k_1 \le \nu_n \le k_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$$

, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

— функция Лапласса

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства $\Phi(x)$:

1. $\Phi(-x) = \Phi(x)$ — нечетная
2. при $x > 5,\ \Phi(x) \approx 0.5$

Примечание. В некоторых источниках под функцией Лапласса подразумевается несколько иная функция, чаще всего:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{z^2} 2dz$$

$$F_0(x) = 0.5 + \Phi(x) \text{ или } \Phi(x) = F_0(x) - 0.5$$

Примечание. Формулу применяем при $n \geq 100$ и $p, q \geq 0.1$

Задача 8. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того что

1. произошло ровно 330 попаданий
2. произошло от 312 до 336 попаданий

Решение.

1. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 1.25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{8} \cdot \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

2. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k_1 = 312, k_2 = 336$

$$x_1 = \frac{312 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2$$

$$P_{400}(312 \leq \nu_n \leq 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8185$$

4.2 Статистическое определение вероятности

- n_A — число появления события A при n испытаниях
- $\frac{n_A}{n}$ — частота события A

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}, \text{при } n \to \infty$$

4.2.1 Вероятность отклонения относительной частоты

]p — веротяность события A, $\frac{n_A}{n}$ — частота A
По интегральной формуле Лапласса:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) = P(-\varepsilon \le \frac{n_A}{n} - p \le \varepsilon) = P(-n\varepsilon \le n_a - np \le n\varepsilon) = P(np - n\varepsilon \le n_A \le np + n)$$

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n}{\sqrt{npq}}$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

4.2.2 Закон больших чисел Бернулли

Более точно последняя формула выглядит так:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

при $n \to \infty$ $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon \to \infty$ и $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \to 0.5$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \to 2 \cdot 0.5 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

— закон больших чисел Бернулли
То есть при большом числе испытаний, будет близко к реальной вероятности

Лекция 5

5.1 Схемы испытаний и соответствующие распределения

- n — число испытаний
- p — вероятность при одном испытании
- $q = 1 - p$ — вероятность неудачи при одном испытании

Определение.

$$k \to C_n^k p^k q^{n-k}$$

— биноминальное распределение с параметрами n и p

Обозначение. $B_{n,p} = B(n, p)$

5.1.1 Схема до первого успешного испытания

Определение. Схема до первого успешного испытания. Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успеха под номером τ

Теорема 5.1.1. $p(\tau = k) = q^{k-1}p$

Доказательство.

$$p(\tau = k) = p(\underbrace{\text{НН} \dots \text{Н}}_{k-1} \underset{\underset{k}{\uparrow}}{\text{У}}) = q^{k-1}p$$

□

Определение. $k \to q^{k-1}p,\ 1 \leq k \leq \infty$ — называется **геометрическим распределением** с параметром t

Обозначение. G(p)

Примечание. Это распределение обладает так назыаемым свойством отсутствия после действия или свойством нестарения

Теорема 5.1.2. $]p(\tau = k) = q^{k-1}p$
Тогда $\forall n, k \in \mathbb{N}\ p(\tau > n + k | \tau > n) = p(\tau > k)$

Доказательство. По формуле условной вероятности:

$$p(\tau > n + k | \tau > k) = \frac{p(\tau > n + k \text{ и } \tau > j)}{p(\tau > n)} = \frac{p(\tau > n + k)}{p(\tau > n)} \tag{5.1}$$

$p(\tau > m) = p(\text{первые } m \text{ неудач}) = q^m$

$$5.1 = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$$

□

Примечание. То, проработет ли девайс k часов после этого, не зависит от того сколько проработал до этого

Примечание. Также $p(\tau = n + k | \tau > n) = p(\tau = k)$

5.1.2 Испытание с несколькими исходами

Пусть при n испытаниях могут произойти m несовместных исходов

- p_i — вероятность i-го исхода при одном отдельном испытании

Теорема 5.1.3. Вероятность того, что при n испытаниях первый исход появится n_1 раз, второй n_2 раз, …, m-й n_m раз. $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$
Тогда

$$p(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Доказательство. $A_1 = \underbrace{11\dots1}_{n_1}\underbrace{22\dots2}_{n_2}\dots\underbrace{m\dots m}_{n_m}$

$$p(A_1) = p_1^{n_1} \dots p_n^{n_m}$$

Остальные благоприятные исходы отличаются лишь расположением i-х исходов по n местам, а веротяности будут те-же. Всего таких исходов будет:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n_m}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

— формула для перестановок с повторениями □

Задача 9. Два одинаковых по силе шахматиста играют матч из 6 партий. Вероятность ничьи при одной партии — 0.5. Найти веротяность того, что второй игрок две партии выиграл, а три партии свел в ничью

Решение. Исходы:

1. первый выиграл

2. второй выиграл
3. ничья

$$p_3 = \frac{1}{2};\ p_1 = p_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4};\ n = 6$$

$$P(1,2,3) = \frac{6!}{1!2!3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{2^7}$$

5.1.3 Урновая схема

В урне N шаров. Из них K белых, а черных $N - K$. Из нее выбираем n шаров без учета порядка. k — число вынутых белых

Теорема 5.1.4 (Схема с возвратом)**.** Вероятность вынуть белый шар не менятеся.
Тогда

$$p = \frac{K}{N} \quad p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

— биноминальное распределение

Теорема 5.1.5 (Схема без возврата)**.** Тогда

$$P_{N,K}(n,k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

Определение.

$$k \to \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},\ k \le K$$

назвается **гипергеометрическим** распределением веротяности

Лемма 1.

$$C_K^k \sim \frac{K^k}{k!}$$

, при $K \to \infty, K = const$

Доказательство.

$$C_K^k = \frac{K!}{k!(K-k)!} = \frac{K(K-1)\dots(K-k+1)}{K^k} \cdot \frac{K^k}{k!} =$$

$$= \underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{K}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{K}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{K}\right)}_{\downarrow \atop 1} \cdot \frac{K^k}{k!} \sim \frac{K^k}{k!}$$

□

Теорема 5.1.6.

- $N \to \infty$
- $K \to \infty$
- $\frac{K}{N} \to p \in (0,1)$
- n и $0 \le k \le K$ — фиксированны

Тогда

$$P_{N,K}(n,k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \to C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Доказательство.

$$P_{N,K}(n,k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{K^k}{k!}\cdot\frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{n!}{N^n} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{K^k}{N^k}\cdot\frac{(N-K)^{n-k}}{N^{n-k}} =$$

$$= C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1-\frac{K}{N}\right)^{n-k} \xrightarrow[N\to\infty]{} C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

□

5.1.4 Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Схема: вероятность успеха при одном отдельном испытании зависит от числа испытаний n таким образом, чтобы $n \cdot p_n = \lambda$(точнее $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$)
Появление очень редких событий в длинном потоке испытаний

Теорема 5.1.7 (Формула Пуассона)**.** Пусть $n \to \infty,\ p_n \to 0$, так что $np_n \to \lambda > 0$
Тогда вероятность k успехов при n испытаниях

$$p(\nu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Доказательство. Положим $\lambda_n = np_n$

$$p(\nu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{n^k}{k!}\cdot\frac{\lambda_n^k}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda_n^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda_n^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda_n^k}{k!}\cdot\left(\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right)^{-\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

□

1. Оценка погрешности в формуле Пуссона

Теорема 5.1.8. Пусть ν_n – число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью p

$$\lambda = np \quad A \subset \{0, 1, 2, \cdots n\} \text{ — произвольное подмножество}$$

Тогда погрешность

$$\left| p(\nu_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda_k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \min(p, \lambda p) = \min(p, np^2) = \min\left(p, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

Примечание. Формулу Пуасснона иногда называют формулой редких событий. Применяем при малых p, $n \geq 100$

Задача 10. Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого элемента $\frac{1}{1000}$. Какова вероятность отказа больше двух элементов

Решение.

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

, где $\lambda = np$

- $n = 1000$
- $p = 0.001$
- $\lambda = np = 1$
- $k > 2$

$$p(\nu_n > 2) = 1 - p(\nu_n \leq 2) = 1 - (p(0) + p(1) + p(2)) \approx 1 - \left(\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}\right) =$$

$$= 1 - 2.5e^{-1} \approx 0.0803$$

Погрешность $\varepsilon \leq \min(p, \lambda p) = 0.001$

Лекция 6

6.1 Случайные величины

Обозначение. ξ — **Случаная величина**

Пример. ξ — число выпавших очков. $\xi \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Пример. ξ — время работы микросхемы до отказа

1. Время работы в часах
   $\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$

2. Время работы измеряем точно
   $\xi \in [0, +\infty]$

Пример. ξ — температура воздуха в случайный момент вермени. $\xi \in (-50°, 50°)$

Пример. Индикатор события A.

$$I_A(\omega) \in \begin{cases} 0 & ,\omega \notin A \\ 1 & ,\omega \in A \end{cases}$$

Определение. Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется $\mathcal{F}$**-измеримой**, если $\forall x \in \mathbb{R} : \ \{\omega | \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Т.е прообраз $\xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}$

Определение. Случаной величиной ξ заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ назывется $\mathcal{F}$-измеримая функция Исправить, ставящая в соответсвие каждому элементарному исходу ω некоторое вещественное число

Пример. Бросаем кость.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$
- $]\xi(i) = i$

Если $x = 4$, то $\{\omega | \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \Rightarrow \xi$ не является $\mathcal{F}$-измеримой

6.1.1 Смысл измеримости

Пусть случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая. Тогда $P(\xi < x) = P(\{\omega|\xi(\omega) < x\})$, т.к. $A_x = \{\omega|\xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\overline{A_x} = \{\omega|\xi(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$$

$$A_x \setminus B_y = \{\omega|t \leq \xi(\omega)lex\} \in \mathcal{F}$$

$$B_x = \boxed{\text{Доделать}}$$

$$B_x \setminus A_x = \{\omega|\xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

Отсюда видим, по теореме Каво? Исправить можно однозначно продолжить до любого Борелевского множества на прямой. $B \in \mathcal{B}$ — Борелевская σ-алгебра. $P(B \in \mathcal{B}) = P\{\omega|\xi(\omega) \in B\}$
Пусть случаная величина задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Тогда:

1. $(\Omega, \mathcal{F}, p) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, p)$ — новое веротяностное пространство
2. $\xi^{-1}(B)\ \forall B \in \mathcal{B}$
   $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$
   $\mathcal{F}_\xi$ — σ-алгебра порожденная величной ξ

Задача 11. Найти σ-алгебру порожденную индикатором

Определение. Функция $P(B)$ $B \in \mathcal{B}$ называется **распределнием вероятностей** случаной величниы $\xi(\omega)$. Т.е. распределение случайной величны это соответсвие множествами на вещественной прямой и вероятностями случаной величны попасть в это множество

6.1.2 Типы распределения

- Дискретные
- Абсолютно непрерывные
- Смешанные
- Сингулярные (непрерывные но не абсолютно непрерывные)

1. Дискретные Случайная величина ξ имеет дискретное распределение, если она принимает не более чем счетное число значений, т.е. существует конечный или счетный набор чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, такой что
   (a) $p_i = p(\xi = x_i) > 0$
   (b) $\sum\limits_i p_i = 1$

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Доделать

Пример. Кость

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Доделать

(a) Основные числовые характеристики

i. Математическое ожидание(среднее значение) **Математическим ожиданием** случаной величины ξ называется число:

$$E\xi = \sum_i x_i p_i$$

при условии что данный ряд сходится абсолютно, иначе говрят что что математическое ожидание не существует

Обозначение. Eξ

Примечание. Смысл: среднее значение, число вокруг которого группируеются значения случаной величины. Физический смысл: центр масс. Статистический смысл: среднее арифметическое наблюдаемых значений при большои значении реальных экспериментов

ii. Дисперсия

Определение. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется среднее квадратов отклонений ее от математического ожидания

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

или

$$D\xi = \sum_i (x_i - E\xi)^2 p_i$$

При условии что данное среднее значение существует(конечно)

Примечание. Вычислять дисперсию удобнее по формуле

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (E\xi)^2$$

Примечание. Смысл: квадрат среднего разброса(рассейния) случайной величины около ее математического ожидания

iii. Среднее квадратическое отклонение

Определение. Средним квадратическим отклонением ($\sigma_\xi = \sigma(\xi)$) случайной величины ξ называется число

$$\sigma = \sqrt{D\xi}$$

Примечание. Смысл: характеризует средний разброс случайной величины около ее математического ожидания

Пример. Бросаем кость

$$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$$D\xi = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = 2.92$$

$$\sigma = \sqrt{2.92} \approx 1 \neq 1$$

(b) Свойства математического ожидания и дисперсии

Определение. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, если $\xi(\omega) = C = \text{const}\ \forall \omega \in \Omega$ или $p(\xi = C) = 1$

$$E\xi = C = \text{const}$$

$$D\xi = 0$$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Определение (Свойство сдвига)**.**

$$E(\xi + C) + E\xi + C$$

$$D(\xi + C) = D\xi$$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Определение.

$$E(C\xi) = CE\xi$$

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Определение.

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

Доказательство.

- Пусть x_i, y_i — соответсвующие значения случайных величин xi и mu

$$E(\xi+\eta) = \sum_{i,j}(x_i+y_j)p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi = x_i, \eta = y_j)+\sum_j y_j \sum p(\xi = x_i, \eta = y_j)$$

Доделать □

Определение. Дискретные случаные величины **независимы** если $\forall i, j$ $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j)$

Примечание. Если xi и η независимы, то

$$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$$

обратное не верно

Доказательство.

$$E(\xi\eta) = \sum_{ij}(x_i y_j)p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_j)p(\eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i) \cdot \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

Доказательство.

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E(E\xi)^2 =$$

$$E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

Примечание.

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\mathrm{Cov}(\xi, eta)$$

, где $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$ — **ковариация**

Доказательство.

$$D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^2 - (E(\xi+\eta))^2 = E\xi^2 + 2E\xi\eta + E\eta^2 - (E\xi)^2 - 2E\xi \cdot E\eta - (E\eta)^2 =$$

$$D\xi + D\eta + 2(E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta)$$

□

Примечание. Если случайные величины ξ и η независимые, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + \eta$$

Доказательство. По свойству $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0$ □

Примечание. Среднее квадратическое отклонение — минимум отклонения случайной величины от точек вещественной прямой, т.е.

$$D\xi = \min_a (y - a) \boxed{\text{Исправить}}$$

Доказательство.

$$E(\xi - a)^2 = E((\xi - E\xi) + (E\xi - a))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + \underbrace{2E(\xi - E\xi) \cdot (E\xi - a)}_{0} + (E\xi - a)^2 =$$

$$= D\xi + (E\xi - a)^2 \leq D\xi$$

□

(c) Другие числовые характеристики

Примечание.

$$m_k = E\xi^k$$

— момент k-того порядка
В частности $m_1 = E\xi$

Примечание.

$$E|\xi|^k$$

— абсолютный момент k-того порядка

Примечание.

$$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$$

— центральный момент k-того порядка
В частности $\mu_2 = D\xi$

Примечание.

$$E|\xi - E\xi|^2$$

— абсолютный центральный момент k-того порядка

Примечание. Центральные моменты можно выразить через относительные моменты $\boxed{\text{Доделать}}$

Примечание. **Модой** Mo называется такое значение случайной величины, где вероятность события является наибольшей

$$p(\xi = \mathrm{Mo}) = \max_i p_i$$

Определение. Медианой Me называется значение случайной величины такое что,

$$p(\xi < \mathrm{Me}) = p(\xi > \mathrm{Me}) = \frac{1}{2}$$

Лекция 7

7.1 Стандартное дискретное распределение

7.1.1 Распределение Бернулли

Обозначение. $B_p,\ 0 < p < 1$

Определение.

- ξ — число успехов при одном испытии
- p — вероятность успеха при одном испытании

ξ	1	0
p	p	$1-p$

$$E\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$
$$D\xi = pq$$

7.1.2 Биноминальное распределение

Обозначение. $B_{n,p}$

Определение.

- ξ — число успехов при n испытаниях
- p — вероятность успеха при одном испытании

$$\xi \in B_{n,p} \Leftrightarrow p(\xi = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Примечание. $B_p = B_{1,p}$

ξ	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
p	q^n	$\binom{n}{1} p \cdot q^{n-1}$	$\dots$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$$

, при $\xi_i \in B_{n,p}$

$$E\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$
$$D\xi = pq$$
$$E\xi = \sum_{i=0}^{n} E\xi_i = np$$
$$D\xi = \sum_{i=0}^{n} D\xi_i = npq$$

7.1.3 Геометрическое распределение

Обозначение. G_p

Определение.

- ξ — номер первого успешного испытания
- p — вероятность успеха при одном испытании

$$\xi\ inG_p \Leftrightarrow p(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad ,1 \leq k \leq \infty$$

xi	1	2	...	k	...
p	p	$(1-p) \cdot p$	...	$(1-p)^{k-1} \cdot p$	...

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{\infty}(q^k)' = p\left(\sum_{n=0}^{\infty} q\right)' = p \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{p}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty}(k \cdot (k-1) + k) \cdot q^{k-1} + p\sum_{k=1}^{\infty} k\dot{q}^{k-1} = \frac{22q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

7.1.4 Распределение Пуассона

Определение. Слкчайная величина ξ имеет распределение ПУассона с парметром $k > 0$, если

$$p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad ,0 \leq k < \infty$$

ξ	0	1	2	...	k	...
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$	...

$$E\xi = \lambda$$
$$E\xi^2 = \lambda^2 + \lambda$$
$$D\xi = \lambda$$
$$= \sqrt{\lambda}$$

7.1.5 Функция распределения

Определение. $F\xi(x)$ случайной величины ξ называется функция

$$F\xi(x) = p(\xi < x)$$

Пример.

ξ	0	1
p	1 - p	p

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - p & 0 < x \leq 1 p, x > 1 \end{cases}$$

1. Свойства функции распределения

   Свойство 1. $F(x)$ — *ограниченая функция*

   Свойство 2. $F(x)$ — *неубывающая функция*

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

   Доказательство. Доделать □

   Свойство 3.

   $$p(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

   Доказательство. Доделать □

   Следствие 7.1.0.1. Т.к. Борелевская σ-алгебра порождается интервалами, то зная функцию распределения можем найти вероятнсоть попадания случайной величины в любое Борелевское ножество $B \in \mathfrak{B}$, а значит полностью задается функцией распределения

   Свойство 4.

   $$\lim_{x \to 0} F(x) = 0$$

   $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

   Т.к. функция $F(x)$ — ограничена и монотонна, то эти пределы существуют.

   Свойство 5. $x_n \to \pm\infty$

   $$]A_n = \{\omega \in \Omega | n - 1 \leq \xi(\omega) < n\}$$

   $$1 = p(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (F(n) - F(n-1) = \lim_{n \to 0}) = \lim_{N \to 0} \sum_{-N}^{N} (F(n) - F(n-1)) =$$

   $$= \lim_{N \to 0} (F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N \to 0} F(N) - \lim_{N \to \infty} F(-N-1) = 1 \Rightarrow \lim_{N \to \infty} F(N) = 1$$

   Доделать

Свойство 6. *$F(x)$ — непрерывна слева, т.е. $F(x_0 - 0) = F(x_0)$*

Доказательство.

- $]B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \le \xi < x_o\}$

$$B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \emptyset$$

Следовательно по аксиоме непрерывности

$$\lim_{n\to\infty} p(B_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(B_n) = \lim_{n\to\infty} (F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) =$$
$$= F(x_0) - \lim_{n\to\infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = F(x_0) \Rightarrow F(x_0 - 0) = F(x_0)$$

□

Свойство 7. *Скачок в точке x_0 равен вероятности в этой точке.*

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$$

или

$$F(x_0 + 0) = F(x_0) + p(\xi = x_0) = p(\xi \le x_0)$$

Доказательство.

- $C_n = \{x_0 < \xi < x_0 + \frac{1}{n}\}$

По аксиоме непрерывности $\lim_{n\to\infty} p(C_n) = 0$

$$p(C_n) + p(\xi < x_0) = p(\xi = x_0)$$
$$p(x_0 \le \xi < x_0 + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(\xi = x_0)$$
$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(\xi = x_0)$$
$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$$

□

Свойство 8. *Если $F(x)$ непрерывна в точке x_0, то $p(\xi = 0) = 0$. Следствие из 6*

Свойство 9. *Если $F(x)$ непрерывна то, $p(x_1 \le \xi < x_2) = p(x_1 < \xi < x_2) = p(x_1 \le \xi \le x_2) = p(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$*

Свойство 10. *Случайная величина ξ имеет дискретное распредление $\Leftrightarrow$ ее функция распределения – ступенчатая функция*

7.2 Абсолютно непрерывные случайные величины

Определение. Случайная величина ξ имеет **абсолютно непрерывное** распределение, если для любового Борелевского множества $B \in \mathfrak{B}$

$$p(\xi \in B) = \int\limits_B f_\xi(x)dx$$

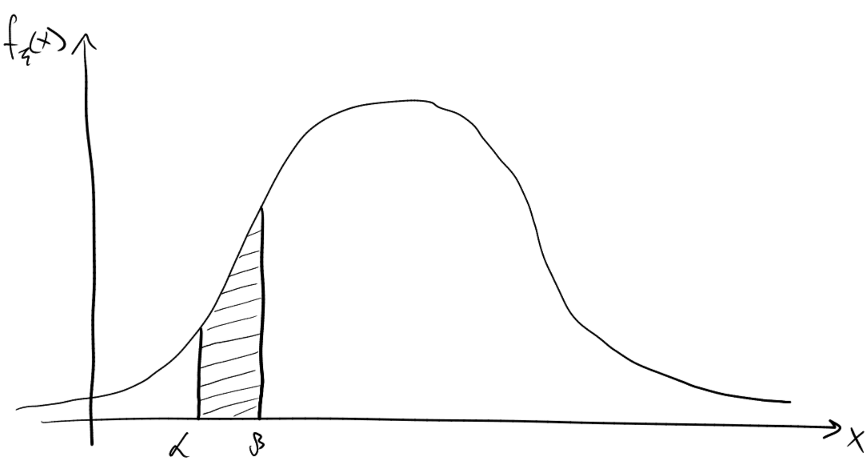
для некоторой функции $f_\xi(x)$. Интеграл Лебега а не Римана.

Определение. $f_\xi(x)$ — **плотность распределения** случайной величины ξ

7.2.1 Свойства плотности и функции распределения

Свойство 1. ***Вероятностный геометрический*** *смысл плотности.*

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \int\limits_\alpha^\beta f_\xi(x)dx$$



$$S = p(\alpha < \xi < \beta)$$

Доказательство. Из определения распределения $B = (\alpha, \beta)$ □

Свойство 2. ***Условие нормировки***

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Доказательство. По определению $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1$ а $B = \mathbb{R} \in \mathfrak{B}$ Исправить □

Свойство 3.

$$F\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Доказательство. По пореденению

$$F_\xi(x) = p(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad B = (-\infty, x)$$

□

Свойство 4. $F_\xi(x)$ — *непрерывная функция. Как интеграл с переменным верхним пределом*

Свойство 5. $F_\xi(x)$ — *дифференцируема почти всюду и*

$$f_\xi(x) = F'(x)$$

почти для всех x

Доказательство. Теорема Барроу. □

Примечание. Почти для всех, кроме возможно x из множества нулевой меры Лебега.

Свойство 6. $f_\xi(x) > 0$

Доказательство. Из определения или из 5 □

Свойство 7. $p(\xi = x_0) = 0$

Свойство 8. $p(x_1 < / \leq \xi < / \leq x_2) = F(x_2) - f(x_1)$

Свойство 9. *Если для* $f(x)$ *выолнено свойства 2 и 6 то она является плотностью некоторой случайной величины*

7.2.2 Числовые характеричтики

Определение. Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

при условии что данный интеграл сходится абсолютно, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$

Определение. Дисперсией абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 f(x) dx$$

при условии что интеграл сходится абсолютно

Примечание.

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (E\xi)^2$$

Определение. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Примечание. Смысл свойств этих числовых характеристик полоностью идентичны дискретной случайной величины

Лекция 8

8.1 Стандартное абсолюютно непрерывное распределение

8.1.1 Равномерное распределение

Определение. Случайная величина ξ **равномерно** распределена на $[a, b]$ если ее плотность постоянна на этом отрезке

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a} \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

Обозначение. $\xi \in U_{[a,b]}$

Примечание. Датчики случайных чисел имеют равномерное распределение, и с их помощью можно смоделировать другие распределения, если знаем их функции распределения

8.1.2 Экспоненциальное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет **показательное** распределение, если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_0^{\infty} x^k \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^{\infty} \alpha (\alpha x)^k e^{-\alpha x} dx = \frac{k!}{\alpha^k}$$

$$E\xi = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\xi^2 = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(a < \xi < b) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

Примечание. **Свойство нестарения**. Если $\xi \in E_\alpha$, то $p(\xi > x + y | \xi > x) = p(\xi > y)$

Примечание. Гамма функция Эйлера:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda - 1} e^{-t} dt$$

- $$\Gamma(\lambda - 1) = \lambda! \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

Обозначение. $\xi \in E_\alpha$

Пример. Время работы прибора до поломки

Пример. Время между появлениями двух соседних редких событий в простейшем потоке событий

8.1.3 Нормальное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет **нормальное** распределение с параметрами $a, \sigma > 0$, если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Смысл параметров распределения: $a = E\xi$, σ — среднее квадратическое отклонения. $D = \sigma^2$
Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Обозначение. $\xi \in N_{a,\sigma}$

8.1.4 Стандартное нормальное рапределение

Определение. Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a = 0,\ \sigma = 1$ т.е. $\xi \in N_{0,1}$. Плотность

$$\varphi(x) = \frac{1\sqrt{2\pi}}{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функиця распределения

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Примечание.

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.5 + \Phi(x) \text{ — функция Лапласса}$$

Примечание. Интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

8.1.5 Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями и ее следствия

Свойство 10. $\xi \in N_{a,\sigma}$. *Тогда*

$$F_\xi(x) = \Phi_\xi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Доделать □

Свойство 11. *Если* $\xi \in N_{a,\sigma}$, *тогда* $\eta = \frac{1-a}{\sigma} \in N_{0,1}$

Доказательство. Доделать □

Свойство 12. $\xi \in N_{a,\sigma}$. *Тогда* $E\xi = a,\ D\xi = \sigma^2$

Доказательство.

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1} \Rightarrow E\eta = 0,\ D\eta = 1$$

$$\xi = \sigma\eta + a$$

$$E\xi = \sigma \cdot 0 + a = a$$

$$D\xi = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

□

Свойство 13. *Вероятность попадания случайной величины в заданый интервал*

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \left(0,5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right)\right) - \left(0,5 + \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

□

Свойство 14. *Вероятность отклонения случайной величины от ее среднего значения или попадание в интервал симметричный относительно a*

$$p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$P(|\xi - a| < t) = p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi a + t) = \Phi\left(\frac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - t - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

□

Доказательство. При замене в этой формуле $Phi(x)$ на $\Phi_0(x)$ получится

$$p(|\xi - a| < t) = 2\Phi_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$$

□

Свойство 15 (Правило трех σ)**.**

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$$

8.1.6 Коэффиценты асимметрии и эксцесса

Определение. Асимметрией распределения называется число

$$A_\xi = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{N_{a,\sigma}}{\sigma^3} \boxed{\text{Исправить}}$$

Определение. Эксцессом распределения называется число

$$E_\xi = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{N_{a,\sigma}}{\sigma^4} - 3 \boxed{\text{Исправить}}$$

Примечание. Если $\xi \in N_{a,\sigma^2}$, то $A\xi = 0$ и $E\xi = 0$. Таким образом эти коэффиценты показывают насколько сильно данное распределение отличается от нормального

8.1.7 Гамма функция и гамма распределение

Определение. Гамма функцией Гаусса называется функия

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

Свойство 1.

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \Gamma(\lambda - 1)$$

Свойство 2.

$$\Gamma(1) = 1$$

Свойство 3.

$$\Gamma(x) = (x-1)! \quad x \in \mathbb{N}$$

Свойство 4.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Определение. Случайная величина ξ имеет гамма распределение с параметрами $\alpha, \lambda > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases} \boxed{\text{Исправить}}$$

$$F_\xi(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt \quad x \geq 0$$

Если $\lambda \in \mathbb{N}$, то

$$F_\xi(x) = \sum_{k=\lambda}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{x^k} e^{-\alpha x} \boxed{\text{Исправить}}$$

Обозначение. $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$

Свойство 1. $E\xi = \frac{\lambda}{\alpha}$, $D\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$

Свойство 2. $\Gamma_{\alpha,\lambda} = E_\alpha$

Свойство 3. $\boxed{\textit{Доделать}}$

Свойство 4. *Если* $\xi \in N_{0,1}$, *то* $\xi^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$