

Лекция 15

Илья Yaroshevskiy

22 января 2021 г.

Содержание

1 Мера Лебега	1
1.1 Преобразования меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях	2

1 Мера Лебега

Следствие 1.0.1. $\forall A \in \mathfrak{M}^m \exists B, C$ — борелевские
 $B \subset A \subset C \quad \lambda(C \setminus A) = 0, \lambda(A \setminus B) = 0$

Доказательство.

$$C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_{\frac{1}{n}} \quad (2)$$

□

Следствие 1.0.2. $\forall A \subset \mathfrak{M}^m \exists B, \mathcal{N} \subset B$ — борелевское, $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}^m, \lambda \mathcal{N} = 0$
 $A = B \cup \mathcal{N}$

Доказательство. B — из следствия 1, $\mathcal{N} := A \setminus B$

□

Примечание. Обозначим $|X|$ — мощность множества X

$\forall X \quad |2^X| > |X|$

$X = \mathbb{R}^m \quad |2^{\mathbb{R}^m}| > \text{континуум}$

$\mathfrak{B} \subset 2^{\mathbb{R}^m}$ — борелевская σ -алгебра, $|\mathfrak{B}| = \text{континуум}$

$|M^m| > \text{континуума}$

\mathfrak{K} — канторово множество. $|\mathfrak{K}| = \text{континуум}, \lambda \mathfrak{K} = 0$

$\forall D \subset \mathfrak{K} \quad D \in \mathfrak{M}^m, \lambda D = 0$ (полнота λ)

$2^{\mathfrak{K}} \subset M^m$

Следствие 1.0.3. $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K \text{ — компакт.}}} \lambda(K) \quad (*) \quad (3)$$

Доказательство. $(*)$ следует из σ -конечности

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q(0, n) \quad (4)$$

$$Q(a, R) = \bigtimes_{i=1}^n [a_i - R, a_i + R]$$

$$\lambda(A \cap Q(0, n)) \rightarrow \lambda A \text{ — по непрерывности снизу} \quad (5)$$

□

Определение. Свойства из следствия 3 называются **регулярностью меры Лебега**

1.1 Преобразования меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях

Лемма 1. $(X', \mathfrak{A}', \mu')$ — пространство с мерой

(X, \mathfrak{A}, \cdot) — "заготовка" пространства

$T : X \rightarrow X'$ — биекция; $\forall A \in \mathfrak{A} \quad TA \in \mathfrak{A}' \quad (T\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset)$

Положим $\mu A = \mu'(TA)$

Тогда μ — мера

Доказательство. Проверим счетную аддитивность:

$$A = \bigsqcup A_i \quad \mu A = \mu'(TA) = \mu'(\bigsqcup TA_i) = \sum \mu'(TA_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \mu A_i \quad (6)$$

□

Примечание. $T : X \rightarrow X'$ — произвольное отображение, $T\mathfrak{A}$ вообще говоря не алгебра $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ — всегда σ -алгебра (если исходное σ -алгебра)

Лемма 2. $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное

Пусть $\forall E \in \mathfrak{M}^m : \lambda E = 0$ выполняется $\lambda(T E) = 0$

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad TA \in \mathfrak{M}^n$

Доказательство.

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N} \quad (7)$$

, где K_j — компактное множество, $\lambda(\mathcal{N}) = 0$

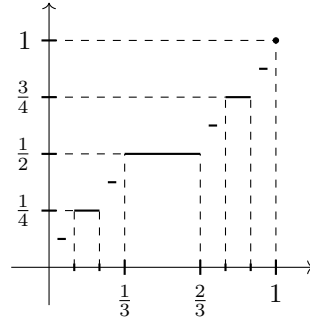
$$TA = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \underbrace{TK_j}_{\text{комп.}} \cup \underbrace{T\mathcal{N}}_{\lambda(T\mathcal{N})=0} \quad (8)$$

TK_j — компактно, как образ компакта при непрерывном отображении

(8) $\Rightarrow TA$ — измеримо

□

Пример. Канторова лестница



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in \Delta \setminus \mathfrak{K}_1 \\ \frac{1}{4} & x \in \Delta_0 \setminus \mathfrak{K}_2 \\ \frac{3}{4} & x \in \Delta_1 \setminus \mathfrak{K}_3 \\ \vdots & \\ \sup f(t) & t \leq x, \quad t \notin \mathfrak{K} \end{cases}$$

, где $\Delta = [0, 1]$, $\Delta_0 = [0, \frac{1}{3}]$, $\Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1]$, $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, ..., а $\mathfrak{K}_0 = \Delta$, $\mathfrak{K}_1 = \Delta_0 \cup \Delta_1$, $\mathfrak{K}_2 = \Delta_{00} \cup \Delta_{01} \cup \Delta_{10} \cup \Delta_{11}$, $\mathfrak{K}_i = \bigcup_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} \Delta_{\varepsilon_0 \dots \varepsilon_n}$

$f([0, 1] \setminus \mathfrak{K})$ — счетное = множество двоично рациональных чисел из $[0, 1]$

$\lambda f([0, 1] \setminus \mathfrak{K}) = 0$

$\lambda f(\mathfrak{K}) = 1$, т.к. $\forall y \in [0, 1] \exists x : f(x) = y$, при этом f — непрерывна, т.к. образом функции является весь промежуток

Тогда пусть $E \subset [0, 1] \notin \mathfrak{M}^m$

$f^{-1}(E)$ = подмножество множества $\mathfrak{K} \cup$ промежутки прообраза двоично рациональных точек из E — измеримо, т.к. $\lambda \mathfrak{K} = 0$

Еще наблюдение $x \notin \mathfrak{K} \Rightarrow f$ — дифференцируема в x и $f' = 0$

Теорема 1.1. $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^1(O)$

Тогда $\forall A \subset O$, $A \in \mathfrak{M}^m$ $\Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$

Доказательство. Достаточно проверить свойство: $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$

$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ шары $B_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon$

(\Rightarrow) из Т. о лебеговском продолжении меры

(\Leftarrow) используем полноту меры Лебега

1. $E \subset \underset{\text{ячейка}}{P} \subset \bar{P} \subset O$, $\lambda E = 0$

$$L := \max_{x \in \bar{P}} \|\Phi'(x)\| \quad (9)$$

Тогда $\forall x, y \in P \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$ — неравенство Лагранжа

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr) \quad (10)$$

$$Q(x_0, \frac{r}{\sqrt{m}}) \subset B(x_0, r) \Rightarrow \left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m < \lambda B(x_0, r) \quad (11)$$

$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr) \subset \bigcup Q(y_i, Lr) \quad (12)$$

$$\sum \lambda \Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = L^m \sum (2r_i)^m \quad (13)$$

$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow \sum \left(\frac{2r_i}{\sqrt{m}}\right)^m < \varepsilon \Rightarrow \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m})^m \quad (14)$$

$$\sum \lambda B(y_i, Lr) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m}L)^m \quad (15)$$

, где $B_i = B(x_i, r_i)$, $y_i = \Phi(x_i)$

2. $E \subset O$ — произвольное, $\lambda E = 0$

$O = \bigcup Q_i$, где Q_i — кубические ячейки, $Q_i \subset \bar{Q}_i \subset O$

$E = \bigcup (E \cap Q_i)$ по п.1 $\lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$

$\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$

□

Следствие 1.1.4. λ — инвариантна относительно сдвигов (и \mathfrak{M}^m тоже инвариантна)
т.е. $\forall a \in \mathbb{R}^m$: $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad A + a \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda A = \lambda(A + a)$

Доказательство. $\Phi : x \mapsto x + a \quad \Phi \in C^1(\mathbb{R}^m)$ по теореме $\Rightarrow A + a \in \mathfrak{M}^m$,

$\lambda A = \lambda(A + a)$ следует из теоремы о лебеговском продолжении:

$A \subset \bigcup P_k \Leftrightarrow A + a \subset \bigcup (P_k + a)$

очевидно, что для ячейки при сдвиге $\lambda P_k = \lambda(P_k + a)$

$\Rightarrow \lambda A = \inf(\sum \lambda P_k) = \inf(\sum \lambda(P_k + a)) = \lambda(A + a)$

□

Теорема 1.2. μ — мера на \mathfrak{M}^m :

1. μ — инвариантна относительно сдвига

$\forall a \in \mathbb{R}^m \quad \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E + a) = \mu E$

2. Для любого ограниченного множества $E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E) < +\infty$

Тогда $\exists k \in [0, +\infty) : \mu = k \cdot \lambda$

т.е. $\forall E \quad \mu E = k \cdot \lambda E \quad (0 \cdot \infty = 0)$

Примечание. $\mu A := \lambda_1 A$, если $\exists y_0 \quad A \subset \{(x, y_0) | x \in \mathbb{R}\}$

Доказательство. Нет

Посмотрим как мера μ задается на рациональных ячейках

В \mathbb{R}^2 Q_1 — единичная квадратная ячейка $\mu Q_1 = V$

Q_2 — ячейки со стороной 2 $\mu Q_2 = 4V \quad \mu Q_n = n^2 V \quad \mu Q_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} V$

На \mathcal{P}^m μ пропорциональна λ , $k = V$

□

Теорема 1.3 (инвариантность меры Лебега относительно линейных ортогональных преобразований). $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — ортогональное преобразование
Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

1. $TA \in \mathfrak{M}^m$
2. $\lambda(TA) = \lambda A$

Доказательство.

1. $T \in C^1$ — поэтому измеримость сохраняется
2. $\mu A := \lambda(TA)$, μ — мера на \mathfrak{M}^m по Лемме 1, при этом μ — инвариантна относительно сдвигов
 $\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \lambda A$
 A — ограничена $\Rightarrow TA$ — ограничена $\Rightarrow \mu A < +\infty$
по теореме $\lambda(TA) = k \cdot \lambda A$
Найдем k : возьмем шар B , TB — шар того же радиуса $= B + x_0$, таким образом $\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$

□

Следствие 1.3.5. $\lambda(\text{прямоугольного параллелепипеда}) = \text{произведению сторон}$

Следствие 1.3.6. Любое собственное линейное подпространство в \mathbb{R}^m имеет меру 0

Доказательство. Достаточно доказать, что $\lambda\{x | x_m = 0\} = 0$

$\{x | x_m = 0\} \simeq \mathbb{R}^{m-1} = \bigsqcup Q_i$ — единичные кубы $L \subset \bigsqcup Q_i \times [-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}]$
 $\lambda_{\mathfrak{M}}(Q_i \times [-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}]) = \frac{2\varepsilon}{2^i}$

□