

Test #3

Ilya Yaroshevskiy

November 25, 2020

Contents

1 Test #3 (Случайные графы)	1
1.1 Метод 1 момента	1
1.2 Метод 2 момента	1
1.3 Распределение степеней вершин	1
1.4 Теорема Эрдём Рейли	2
1.5 Теорема об изолированных вершинах	2
1.6 Заметки	2

1 Test #3 (Случайные графы)

Модель $G(n, p)$, размер вероятностного пространства $2^{\binom{n}{2}}$

Вероятность графа из m ребер $p^m q^{\binom{n}{2}-m}$

Пороговая вероятность свойства A графа $G(n, p)$ - $t(n)$

- $p(n) = o(t(n))$ - A а.п.н не выполняется
- $p(n) = \omega(t(n))$ - A а.п.н выполняется

1.1 Метод 1 момента

$$A = \{G \mid x \in G\}$$

x - например треугольники

X - колчество x в графе G

Если $EX \rightarrow 0$, то A а.п.н не выполнено

1.2 Метод 2 момента

$$P(|X - EX| \geq EX) \leq \frac{DX}{(EX)^2}$$

Если $EX \rightarrow \infty$, хотим чтобы $\frac{DX}{(EX)^2} \rightarrow 0$, если выполнено то A а.п.н выполнено

$$\begin{aligned} DX &= E(X^2) - (EX)^2 \\ \frac{DX}{(EX)^2} &= \frac{E(X^2) - (EX)^2}{(EX)^2} = \frac{E(X^2)}{(EX)^2} - 1 \\ E(X^2) &= (EX)^2 \underbrace{(1 + o(1))}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

1.3 Распределение степеней вершин

Граница Чернова *Пример нечестной монеты:* 1 с вероятностью p , 0 с вероятностью q
 pn - мат. ожидание количества единиц

$$P(|\xi - np| \geq \alpha \sqrt{np}) \leq 3e^{-\frac{\alpha^2}{8}}$$

, где $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\xi_i = \begin{cases} 1, p \\ 0, q \end{cases}$

$p = \text{const}$, u - вершина, $\deg u = \xi$

$p = \frac{1}{n}$ $G(n, p)$ $P(\exists u : \deg u \geq \frac{\ln n}{\ln \ln n}) \geq c > 0$

$c = 1 - e^{-\frac{1}{e}}$

1.4 Теорема Эрдём Рейли

$$p = c \frac{\ln n}{n} + \frac{d}{n}$$

1. $c < 1 \Rightarrow G$ а.п.н не связан
2. $c > 1 \Rightarrow G$ а.п.н связан
3. $c = 1 \Rightarrow G$ связан асимптотически с вероятностью $e^{-e^{-d}}$

1.5 Теорема об изолированных вершинах

$$p = c \frac{\ln n}{n}$$

1. $c < 1$ а.п.н $\exists v : \deg v = 0$
2. $c > 1$ а.п.н $\forall v : \deg v > 0$

1.6 Заметки

- Дисперсия $D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2$
- Неравенство Маркова
 $P(\xi > cE\xi) \leq \frac{1}{c}$
- Неравенство Чернова
 $P(|\xi - E\xi| \geq c) \leq \frac{D\xi}{c^2}$
- Треугольники
 $P(T_{n,p} = 0) \leq P(|T_{n,p} - ET_{n,p}| \geq |ET_{n,p}|)$
- Предел $(1 \pm \frac{1}{n})^n \rightarrow e^{\pm 1}$