

Лекция 3

Илья Yaroshevskiy

22 апреля 2021 г.

Содержание

1 Правила вывода

1

1 Правила вывода

Сверху посылки, снизу заключения

- Аксиома

$$\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

- Введение \rightarrow

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

- Удаление \rightarrow

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Введение $\&$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$$

- Удаление $\&$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Введение \vee

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

- Удаление \vee

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}$$

- Удаление \perp

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Пример.

$$\frac{\overline{A \vdash A}^{(\text{акс.})}}{\vdash A \rightarrow A}^{(\text{вв. } \rightarrow)}$$

Пример. Докажем $\overline{\vdash A \& B \rightarrow B \& A}$

$$\frac{\frac{\overline{A \& B \vdash A \& B}^{(\text{акс.})}}{A \& B \vdash B}^{(\text{уд. } \&)} \quad \frac{\overline{A \& B \vdash A \& B}^{(\text{акс.})}}{A \& B \vdash A}^{(\text{уд. } \&)}}{\frac{A \& B \vdash B \& A}{\vdash A \& B \rightarrow B \& A}}^{(\text{вв. } \&)}^{(\text{вв. } \rightarrow)}$$

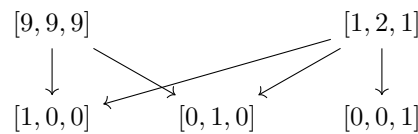
Определение. Фиксируем A

Частичный порядок — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное отношение

Линейный — сравнимы любые 2 элемента

- $a \leq b \vee b \leq a$
- **Наименьший элемент** S — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \leq x$
- **Минимальный элемент** S — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \leq k$

Пример.



Нет наименьшего, но есть 3 минимальных. Стрелка из a в b обозначает $b \leq a$

Определение.

- **Множество верхних граней** a и b : $\{x \mid a \leq x \& b \leq x\}$
- **Множество нижних граней** a и b : $\{x \mid x \leq a \& x \leq b\}$

Определение.

- $a + b$ — наименьший элемент множества верхних граней
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней

Определение. Решетка $= \langle A, \leq \rangle$ — структура, где для любых a, b есть как $a + b$, так и $a \cdot b$, т.е. $a \in A, b \in B \implies a + b \in A$ и $a \cdot b \in A$

Определение. Дистрибутивная решетка если всегда $a \cdot (b + c) = ab + a \cdot c$

Лемма 1. В дистрибутивной решетке $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$

Определение. Псевдодополнение $a \rightarrow b = \text{наиб.} \{c \mid a \cdot c \leq b\}$

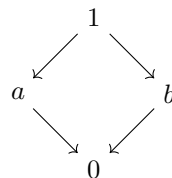
Определение. Импликативная решетка — решетка, где для любых a, b есть $a \rightarrow b$

Определение. 0 — наименьший элемент решетки, **1** — наибольший элемент решетки

Определение. Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга) — импликативная решетка с 0

Определение. Булева алгебра — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \rightarrow 0) = 1$

Пример.



- $a \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot b = b$
- $a \cdot b = 0$
- $a + b = 1$
- $a \rightarrow b = \text{наиб.} \{x \mid a \cdot x \leq b\} = b$
 $\{x \mid a \cdot x \leq\} = \{0, b\}$

- $a \rightarrow 1 = 1$
- $a \rightarrow 0 = 0$

Можем представить в виде пары $\langle x, y \rangle$

- $a = \langle 1, 0 \rangle$
- $b = \langle 0, 1 \rangle$
- $1 = \langle 1, 1 \rangle$
- $0 = \langle 0, 0 \rangle$

Лемма 2. В импликативной решетке всегда есть 1.

Теорема 1.1. Любая алгебра Гейтинга — модель ИИВ

Теорема 1.2. Любая булева алгебра — модель КИВ

Определение. Рассмотрим множество X — **носитель**. Рассмотрим $\Omega \subseteq 2^X$ — подмножество подмножеств X — **топология**.

1. $\bigcup X_i \in \Omega$, где $X_i \in \Omega$
2. $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \Omega$, если $X_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

Определение.

$$(X)^\circ = \text{наиб.}\{w \mid w \subseteq X, w \text{ — откр.}\}$$

Пример. Дискретная топология: $\Omega = 2^X$ — любое множество открыто. Тогда $\langle \Omega, \leq \rangle$ — булева алгебра

Теорема 1.3.

- $a + b = a \cup b$
- $a \cdot b = a \cap b$
- $a \rightarrow b = ((X \setminus a) \cup b)^\circ$
- $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a \subseteq b$

Тогда $\langle \Omega, \leq \rangle$ — алгебра Гейтинга

Определение. X — все формулы логики

- $\alpha \leq \beta$ — это $\alpha \vdash \beta$
- $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$
- $[\alpha]_\approx = \{\gamma \mid \gamma \approx \alpha\}$ — класс эквивалентности

Свойство 1. $\langle X/\approx, \leq \rangle$ — алгебра Линденбаума, где $X/\approx = \{[\alpha]_\approx \mid \alpha \in X\}$

Теорема 1.4. Алгебра линденбаума — полная модель ИИВ