

Лекции по Математической логике 4 семестр

Пуга Yaroshevskiy

22 апреля 2021 г.

Оглавление

1		3
1.1	Исчисление высказываний	3
1.1.1	Язык	3
1.1.2	Мета и предметные	3
1.1.3	Сокращение записи	4
1.1.4	Теория моделей	4
1.1.5	Теория доказательств	5
1.1.6	Правило Modus Ponens и доказательство	5
2		6
2.1	Интуиционистская логика	8
3		10
3.1	Правила вывода	10
4	5 марта	14
4.1	Табличные модели	14
4.2	Модели Крипке	15
4.3	Доказательство нетабличности	16
5	12 марта	18
5.1	Программы	18
5.1.1	Исчисление предикатов	20
5.1.2	Теория моделей	20
5.1.3	Теория доказательств	22
6	19 марта	23
6.1	Исчисление предикатов	23
6.1.1	Расставление скобок	23
6.1.2	Вхождение	24
6.1.3	Свободные подстановки	24
6.1.4	Пример доказательства	25
6.1.5	Теорема о дедукции	25

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
7 2 апреля	26
7.1 Полнота исчисления предикатов	26
8 9 апреля	29
8.1 Исчисление предиктов	29
9 16 апреля	32
9.1 Теория первого порядка	32
9.1.1 Формальная арифметика	34

Лекция 1

1.1 Исчисление высказываний

1.1.1 Язык

1. Пропозициональные переменные
 A_i — большая буква начала латинского алфавита

2. Связки

$\underbrace{\alpha}_{\text{метաперемєнная}}, \beta$ — высказывания

Тогда $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg \alpha)$ — высказывания

1.1.2 Мета и предметные

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi, \dots$ — метапеременные для выражений
- X, Y, Z — метапеременные для предметных переменных

Метавыражение: $\alpha \rightarrow \beta$

Предметное выражение: $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (заменяли α на A , β на $(A \rightarrow A)$)

Пример. Черным — предметные выражения, Синим — метавыражения

$$(\text{синий } X \rightarrow \text{синий } Y)[\text{синий } X := \text{синий } A, \text{синий } Y := \text{синий } B] \equiv \text{черный } A \rightarrow \text{черный } B$$

$$(\text{синий } \alpha \rightarrow (A \rightarrow \text{синий } X))[\text{синий } \alpha := \text{синий } A, \text{синий } X := \text{синий } B] \equiv \text{черный } A \rightarrow (A \rightarrow \text{черный } B)$$

$$(\text{синий } \alpha \rightarrow (A \rightarrow \text{синий } X))[\text{синий } \alpha := (A \rightarrow \text{синий } P), \text{синий } X := \text{синий } B] \equiv (A \rightarrow \text{синий } P) \rightarrow (A \rightarrow \text{черный } B)$$

1.1.3 Сокращение записи

- $\vee, \&, \neg$ — скобки слева направо (лево-ассоциативная)
- \rightarrow — правоассоциативная
- Приоритет по возрастанию: $\rightarrow, \vee, \&, \neg$

Пример. Расставление скобок

$$(A \rightarrow ((B \& C) \rightarrow D))$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

1.1.4 Теория моделей

- \mathcal{P} — множество предметных переменных
- $\llbracket \cdot \rrbracket : \mathcal{T} \rightarrow V$, где \mathcal{T} — множество высказываний, $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$ — множество истинностных значений

1. $\llbracket x \rrbracket : \mathcal{P} \rightarrow V$ — задается при оценке $\llbracket \cdot \rrbracket^{A:=v_1, B:=v_2}$:

- $\mathcal{P} = v_1$
- $\mathcal{P} = v_2$

2. $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket$  $\llbracket \beta \rrbracket$, где $\star \in [\&, \vee, \neg, \rightarrow]$
определенно
естественным образом

Пример.

$$\llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = \llbracket A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} \rightarrow \llbracket A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = \text{И} \rightarrow \text{И} = \text{И}$$

Также можно записать так:

$$\llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = f_{\rightarrow}(\llbracket A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}, \llbracket A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}) = f_{\rightarrow}(\text{И}, \text{И}) = \text{И}$$

, где f_{\rightarrow} определена так:

a	b	f_{\rightarrow}
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

1.1.5 Теория доказательств

Определение. Схема высказывания — строка соответствующая определению высказывания, с:

- метaperеменными α, β, \dots

Определение. Аксиома — высказывания:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
3. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
5. $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

1.1.6 Правило Modus Ponens и доказательство

Определение. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где α_i :

- аксиома
- существует $k, l < i$, что $\alpha_k = \alpha_l \rightarrow \alpha$

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Пример. $\vdash A \rightarrow A$

1	$A \rightarrow A \rightarrow A$	(схема аксиом 1)
2	$A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$	(схема аксиом 1)
3	$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$	(схема аксиом 2)
4	$(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$	(М.Р. 1 и 3)
5	$A \rightarrow A$	(М.Р. 2 и 4)

Определение. Доказательством высказывания β — список высказываний $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — доказательство
- $\alpha_n \equiv \beta$

Лекция 2

Обозначение. Γ, Δ, Σ — списки высказываний

Определение. Следование: $\Gamma \models \alpha$, если

- $\Gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_n$
- Всегда когда все $\llbracket \gamma_i \rrbracket = \text{И}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$

Пример. $\models \alpha \rightarrow \alpha$ общезначимо

Определение. Теория Исчисление высказываний корректна, если при любом α из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$

Определение. Исчисление полно, если при любом α из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$

Теорема 2.0.1 (о дедукции). $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Т.е. существует доказательство $\delta_1, \dots, \delta_n$, где $\delta_n = \alpha \rightarrow \beta$

Построим новое доказательство: $\delta_1, \dots, \delta_n, \alpha$ (гипотеза), β (М.Р.)

Эта новая последовательность — доказательство $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

(\Rightarrow) Рассмотрим $\delta_1, \dots, \delta_n$ — доказательство $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 & \alpha \rightarrow \delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_n & \alpha \rightarrow \delta_n \end{array}$$

Утверждение: последовательность $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ можно дополнить до доказательства, т.е. каждый σ_i — аксиома, гипотеза или получается по М.Р. Докажем по индукции:

База: $n = 0$

Переход: пусть $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ — доказательство. тогда $\sigma_{n+1} = \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$ по трем вариантам:

1. δ_{n+1} — аксиома или гипотеза $\neq \alpha$
2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
3. $\delta_k \equiv \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}$, $k, l \leq n$

Докажем каждый из трех вариантов

1.

$$\begin{array}{l|l} (n + 0.2) & \delta_{n+1} \quad (\text{аксиома или гипотеза}) \\ (n + 0.4) & n+1 \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1} \quad (\text{сх. акс. 1}) \\ (n + 1) & \alpha \rightarrow \delta_{n+1} \quad (\text{М.Р. } n + 0.2, n + 0.4) \end{array}$$

2. $(n + 0.2, n + 0.4, n + 0.6, n + 0.8, n + 1)$ — доказательство $\alpha \rightarrow \alpha$

3.

$$\begin{array}{ll} (k) & \alpha \rightarrow (\sigma_l \rightarrow \sigma_{n+1}) \\ (l) & \alpha \rightarrow \sigma_l \\ (n + 0.2) & (\alpha \rightarrow \delta_l) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\delta_l \rightarrow \delta_{n+1})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1}) \quad (\text{сх. 2}) \\ (n + 0.4) & (\alpha \rightarrow \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1}) \quad (\text{М.Р. } n + 0.2, l) \\ (n + 1) & \alpha \rightarrow \delta_{n+1} \quad (\text{М.Р. } n + 0.4, k) \end{array}$$

□

Теорема 2.0.2 (о корректности). Пусть $\vdash \alpha$

Тогда $\models \alpha$

Доказательство. Индукция по длине доказательства: каждая $\llbracket \delta_i \rrbracket = \text{И}$, если $\delta_1, \dots, \delta_k$ — доказательство α

Пусть $\llbracket \delta_1 \rrbracket = \text{И}, \dots, \llbracket \delta_n \rrbracket = \text{И}$. Тогда осн. δ_{n+1} :

1. δ_{n+1} — аксиома

(а) $\delta_{n+1} \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ (Существуют α, β , что)

Пусть $\delta_{n+1} = A \rightarrow B \rightarrow A$. Тогда $\alpha \equiv A, \beta \equiv B$
 $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rrbracket^{\llbracket \alpha \rrbracket := a, \llbracket \beta \rrbracket := b} = \text{И}$

a	b	$\beta \rightarrow \alpha$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
Л	Л	И	И
Л	И	Л	И
И	Л	И	И
И	И	И	И

2. δ_{n+1} — М.Р. $\delta_k = \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}$

Фиксируем оценку $\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rrbracket = \text{И}$, тогда $\llbracket \delta_l \rightarrow \delta_{n+1} \rrbracket = \text{И}$

$\llbracket \delta_l \rrbracket$	$\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket$	$\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rightarrow \delta_{n+1} \rrbracket$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Т.е. $\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket = \text{И}$

□

Теорема 2.0.3 (о полноте). Пусть $\models \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

Обозначение.

$$[\beta]^\alpha \equiv \begin{cases} \alpha & \llbracket \beta \rrbracket = \text{И} \\ \neg \alpha & \llbracket \beta \rrbracket = \text{Л} \end{cases}$$

Доказательство. Фиксируем набор переменных из α : P_1, \dots, P_n . Рассмотрим $\llbracket \alpha \rrbracket^{P_1 := x_1, \dots, P_n := x_n} = \text{И}$. Докажем, что $\underbrace{[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n}}_{\Delta} \vdash [\alpha]^\alpha$.

Индукция по длине формулы (по структуре)

База: $\alpha \equiv P_i$ $[P_i]^{P_i} \vdash [P_i]^{P_i}$

Переход: пусть η, ζ : $\Delta \vdash [\eta]^\eta, \Delta \vdash [\zeta]^\zeta$. Покажем, что $\Delta \vdash [\eta \star \zeta]^{\eta \star \zeta}$, где \star — все связки

Используя **лемму**: $\models \alpha$, т.е. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash [\alpha]^\alpha$. Но $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ при любой оценке,

т.е. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash \alpha$ при всех x_i

$$\left[\begin{array}{l} [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}}, P_n \vdash \alpha \\ [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}}, \neg P_n \vdash \alpha \end{array} \right] \xrightarrow{\text{лемма}} [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}} \vdash \alpha$$

□

Лемма 1.

- $\Gamma, \eta \vdash \zeta$
- $\Gamma, \neg \eta \vdash \zeta$

Тогда $\Gamma \vdash \zeta$

Лемма 2. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash \alpha$, то $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}} \vdash \alpha$

2.1 Интуиционистская логика

$A \vee B$ — плохо

Пример. Докажем: существует a, b , что $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, но $a^b \in \mathbb{Q}$

Пусть $a = b = \sqrt{2}$. Рассмотрим $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Если да, то ОК
- Если нет, то возьмем $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}, a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

ВНК-интерпретация. α, β

- $\alpha \& \beta$ — есть α, β

- $\alpha \vee \beta$ — есть α либо β и мы знаем какое
- $\alpha \rightarrow \beta$ — есть способ перестроить α в β
- \perp — конструкция без построения $\neg\alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$

Лекция 3

3.1 Правила вывода

Сверху посылки, снизу заключения

- Аксиома

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

- Введение \rightarrow

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

- Удаление \rightarrow

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Введение $\&$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$$

- Удаление $\&$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Введение \vee

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

- Удаление \vee

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}$$

- Удаление \perp

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Пример.

$$\frac{\overline{A \vdash A}^{(\text{акс.})}}{\vdash A \rightarrow A} (\text{вв. } \rightarrow)$$

Пример. Докажем $\overline{\vdash A \& B \rightarrow B \& A}$

$$\frac{\frac{\overline{A \& B \vdash A \& B}^{(\text{акс.})}}{A \& B \vdash B} (\text{уд. } \&) \quad \frac{\overline{A \& B \vdash A \& B}^{(\text{акс.})}}{A \& B \vdash A} (\text{уд. } \&)}{\frac{A \& B \vdash B \& A}{\vdash A \& B \rightarrow B \& A} (\text{вв. } \rightarrow)}$$

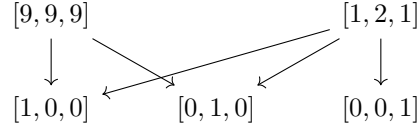
Определение. Фиксируем A

Частичный порядок — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное отношение

Линейный — сравнимы любые 2 элемента

- $a \leq b \vee b \leq a$
- **Наименьший элемент** S — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \leq x$
- **Минимальный элемент** S — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \leq k$

Пример.



Нет наименьшего, но есть 3 минимальных. Стрелка из a в b обозначает $b \leq a$

Определение.

- **Множество верхних граней** a и b : $\{x \mid a \leq x \& b \leq x\}$
- **Множество нижних граней** a и b : $\{x \mid x \leq a \& x \leq b\}$

Определение.

- $a + b$ — наименьший элемент множества верхних граней
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней

Определение. Решетка $= \langle A, \leq \rangle$ — структура, где для каждого a, b есть как $a + b$, так и $a \cdot b$,

т.е. $a \in A, b \in B \implies a + b \in A$ и $a \cdot b \in A$

Определение. Дистрибутивная решетка если всегда $a \cdot (b + c) = ab + a \cdot c$

Лемма 3. В дистрибутивной решетке $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$

Определение. Псевдодополнение $a \rightarrow b = \text{наиб.}\{c \mid a \cdot c \leq b\}$

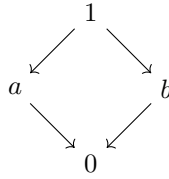
Определение. Импликативная решетка — решетка, где для любых a, b есть $a \rightarrow b$

Определение. 0 — наименьший элемент решетки, 1 — наибольший элемент решетки

Определение. Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга) — импликативная решетка с 0

Определение. Булева алгебра — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \rightarrow 0) = 1$

Пример.



- $a \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot b = b$
- $a \cdot b = 0$
- $a + b = 1$
- $a \rightarrow b = \text{наиб.}\{x \mid a \cdot x \leq b\} = b$
 $\{x \mid a \cdot x \leq\} = \{0, b\}$
- $a \rightarrow 1 = 1$
- $a \rightarrow 0 = 0$

Можем представить в виде пары $\langle x, y \rangle$

- $a = \langle 1, 0 \rangle$
- $b = \langle 0, 1 \rangle$
- $1 = \langle 1, 1 \rangle$
- $0 = \langle 0, 0 \rangle$

Лемма 4. В импликативной решетке всегда есть 1.

Теорема 3.1.1. Любая алгебра Гейтинга — модель ИИВ

Теорема 3.1.2. Любая булева алгебра — модель КИВ

Определение. Рассмотрим множество X — **носитель**. Рассмотрим $\Omega \subseteq 2^X$ — подмножество подмножеств X — **топология**.

1. $\bigcup X_i \in \Omega$, где $X_i \in \Omega$
2. $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \Omega$, если $X_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

Определение.

$$(X)^\circ = \text{наиб.}\{w \mid w \subseteq X, w \text{ — откр.}\}$$

Пример. Дискретная топология: $\Omega = 2^X$ — любое множество открыто. Тогда $\langle \Omega, \subseteq \rangle$ — булева алгебра

Теорема 3.1.3.

- $a + b = a \cup b$
- $a \cdot b = a \cap b$
- $a \rightarrow b = ((X \setminus a) \cup b)^\circ$
- $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a \subseteq b$

Тогда $\langle \Omega, \subseteq \rangle$ — алгебра Гейтинга

Определение. X — все формулы логики

- $\alpha \leq \beta$ — это $\alpha \vdash \beta$
- $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$
- $[\alpha]_\approx = \{\gamma \mid \gamma \approx \alpha\}$ — класс эквивалентности

Свойство 1. $\langle X/\approx, \leq \rangle$ — алгебра Линденбаума, где $X/\approx = \{[\alpha]_\approx \mid \alpha \in X\}$

Теорема 3.1.4. Алгебра линденбаума — полная модель ИИВ

Лекция 4

5 марта

Определение. Предпорядок — транзитивное, рефлексивное

Определение. Отношение порядка (частичный) — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное

Определение. Линейный порядок — порядок в котором $a \preceq b$ или $b \preceq a$

Определение. Полный порядок — линейный, каждое подмножество имеет наименьший элемент.

Пример. \mathbb{N} — вполне упорядоченное множество

Пример. \mathbb{R} — не вполне упорядоченное множество

- $(0, 1)$ не имеет наименьшего
- \mathbb{R} не имеет наименьшего

4.1 Табличные модели

Определение. Назовем модель **табличной** для ИИВ:

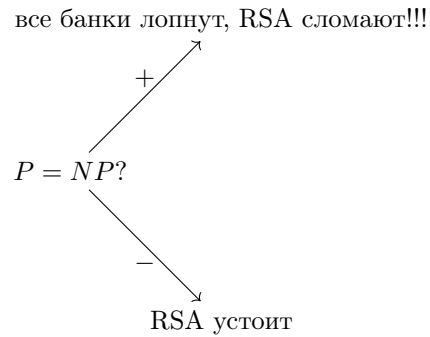
- V — множество истинностных значений
 $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_V : V^2 \rightarrow V, f_{\neg} : V \rightarrow V$
Выделенные значения $T \in V$
 $\llbracket p_i \rrbracket \in V, f_p : p_i \rightarrow V$
- $p_i = f_p(p_i)$
 $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$
 $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$

Если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$ означает, что $\llbracket \alpha \rrbracket = T$, при любой f_p

Определение. Конечная модель: модель где V — конечно

Теорема 4.1.1. У ИИВ не существует полной табличной модели

4.2 Модели Крипке



1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок (\succeq)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
 $(\Vdash) \subseteq W \times \mathcal{P}$
 При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_k \Vdash p_i$

Определение.

1. $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда (и только тогда) $W_i \Vdash \alpha \& \beta$
2. $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
3. Пусть во всех $W_i \preceq W_j$ всегда когда $W_j \Vdash \alpha$ имеет место $W_j \Vdash \beta$
 Тогда $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$
4. $W_i \Vdash \neg \alpha$ — α не вынуждено нигде, начиная с W_i : $W_i \preceq W_j$, то $W_j \nVdash \alpha$

Теорема 4.2.1. Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$

Определение. Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\models \alpha$

Теорема 4.2.2. ИИВ корректна в модели Крипке

Доказательство. 1. $\langle W, \Omega \rangle$ — топология, где $\Omega = \{w \subseteq W \mid \text{если } W_i \in w, W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in w\}$

2. $\{W_k \mid W_k \Vdash p_j\}$ — открытое множество
 Примем $\llbracket p_j \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash p_j\}$
 Аналогично $\llbracket \alpha \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash \alpha\}$

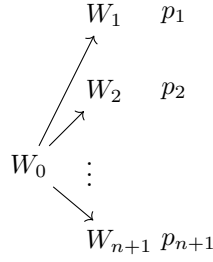
□

4.3 Доказательство нетабличности

Пусть существует конечная табличная модель $|V| = n$

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} (p_i \rightarrow p_j \& p_j \rightarrow p_i)$$

1. $\not\models \varphi$



$$W_1 \not\models (p_i \rightarrow p_k) \& (p_k \rightarrow p_1), \quad k \neq 1$$

Значит

$$\begin{aligned} & \not\models (p_i \rightarrow p_j) \& (p_j \rightarrow p_i) \\ & \not\models \bigvee (p_i \rightarrow p_j) \& (p_j \rightarrow p_i) \\ & \not\models \varphi_n \end{aligned}$$

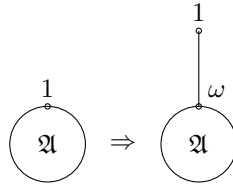
2. $\models_V \varphi_n$: по признаку Дирихле найдутся $i \neq j : \llbracket p_i \rrbracket = \llbracket p_j \rrbracket$
 $\llbracket p_i \rightarrow p_j \rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket \varphi_n \rrbracket = \text{И}$
 Значит $\vdash \varphi_n$ — противоречие

Определение. Дизъюнктивность ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

Определение. Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

Определение. Пусть \mathfrak{A} — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathfrak{A})$



Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathfrak{A})}$ переименуем $1_{\mathfrak{A}}$ в ω

Теорема 4.3.1.

- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — алгебра Гейтинга
- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — Геделева

Определение. Гомоморфизм алгебр Гейтинга

- $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$
- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{B}}$
- $\varphi(0_{\mathfrak{A}}) = 0_{\mathfrak{B}}$

Теорема 4.3.2. $a \leq b$, то $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

Определение.

- α — формула ИИВ
- f, g : оценки ИИВ
- f : ИИВ $\rightarrow \mathfrak{A}$
- g : ИИВ $\rightarrow \mathfrak{B}$

φ согласованы f, g , если $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

Теорема 4.3.3. если $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ согласована с f, g и оценка $\llbracket \alpha \rrbracket_g \neq 1_{\mathfrak{B}}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket_f \neq 1_{\mathfrak{A}}$

Теорема 4.3.4. ИИВ дизъюнктивно

Доказательство. Рассмотрим алгебру Линденбаума: \mathcal{L}
Рассмотрим $\Gamma(\mathcal{L})$

- $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}} & , x \stackrel{x=\omega}{=} 1_{\Gamma(\mathcal{L})} \\ x & , \text{иначе} \end{cases}$$

φ — гомоморфизм

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$, тогда $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$

$\llbracket \alpha + \beta \rrbracket = 1$, и т.к. $\Gamma(\mathcal{L})$ — Геделева то $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$ или $\llbracket \beta \rrbracket = 1$

Пусть $\not\vdash \alpha$ и $\not\vdash \beta$, тогда $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket) \neq 1_{\mathcal{L}}$ и $\varphi(\llbracket \beta \rrbracket) \neq 1_{\mathcal{L}}$, т.е. $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}} \neq 1_{\mathcal{L}}$ и $\llbracket \beta \rrbracket_{\mathcal{L}} \neq 1_{\mathcal{L}}$, тогда $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$ и $\llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\Gamma(\mathcal{L})} \Rightarrow$ Противоречие \square

Лекция 5

12 марта

5.1 Программы

программа(функция)

- $P : \alpha \rightarrow \beta$ — берет α , возвращает β
- P — доказательство, что из α следует β

Пример.

```
1 f a = a
```

$f : A \rightarrow A$ — f доказывает что, из A следует A

логическое исчисление	Типизированное λ -исчисление
логическая формула	тип
доказательство	значение
доказуемая формула	обитаемый тип(имеет хотя бы один экземпляр)
\rightarrow	функция
$\&$	упорядоченная пара
\vee	алг. тип(тип-сумма)

Пример. 5 доказывает Int

Пример. Список:

```
1 Type list = Record
2   Nul: boolean;
3   case Nul of
4     True  : ;
5     False : Next: ^list;
6 end;
```

```

1 struct list {
2     *list next;
3 };

```

Если `next == NULL` — то конец

Пример. Дерево:

```

1 struct tree {
2     tree* left;
3     tree* right;
4     int value;
5 };

```

Определение. Отмеченное(дизъюнктное) объединение множеств:

- A, B — множества
- $A \sqcup B = \{\langle "A", a \rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle "B", a \rangle \mid a \in B\}$

Пусть $S \in A \sqcup B$. Мы знаем откуда S

```

1 data List a = Nil | Cons a (List a)
2 example = Cons 1 (Cons 2 (Cons 3 Nil)) -- [1; 2; 3]

```

```

1 union {
2     int a;
3     char b;
4 };

```

Пример.

$$\frac{\Gamma \vdash \overset{\text{Nil}}{\alpha} \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \overset{\text{Cons}}{\beta} \rightarrow \gamma \quad \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \underset{\text{int}}{\gamma}}$$

```

1 let rec count l (* α + β *) =
2 match l with
3   | Nil (* α *) -> 0 (* α → int *)
4   | Cons(hd, tl) (* β *) -> 1 + count tl (* β → int *)

```

5.1.1 Исчисление предикатов

Определение. Язык исчисления предикатов

- логические выражения “предикаты”/“формулы”
- предметные выражения “термы”

Θ — метапеременные для термов

Термы:

- Атомы:
 - a, b, c, d, \dots — предметные переменные
 - x, y, z — метапеременные для предметных переменных
- Функциональные Символы
 - f, g, h — Функциональные символы (метапеременные)
 - $f(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ — применение функциональных символов
- Логические выражения:

Если $n = 0$, будем писать f, g — без скобок

 - P — метапеременные для предикатных символов
 - A, B, C — предикатный символ
 - $P(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ — применение предикатных символов
 - $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ — Связки
 - $\forall x.\varphi$ и $\exists x.\varphi$ — кванторы

“<квантор> <переменная>.<выражение>”

1. Сокращение записи И.В + жадность \forall, \exists

Метавыражение:

$$\forall x.(P(x) \& (\forall y.P(y)))$$

Квантор съедает все что дают, т.е. имеет минимальный приоритет.

Правильный вариант (настоящее выражение):

$$\forall a.B(A) \& \forall b.B(b)$$

5.1.2 Теория моделей

Оценка формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множество
2. Каждому $f_i(x_1, \dots, x_n)$ сопоставим функцию $D^n \rightarrow D$

3. Каждому $P_j(x_1, \dots, x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^2 \rightarrow V$

4. Каждой x_i сопоставим элемент из D

Пример.

$$\forall x. \forall y. E(x, y)$$

Чтобы определить формулу сначала определим $D = \mathbb{N}$

$$E(x, y) = \begin{cases} \text{И} & , x = y \\ \text{Л} & , x \neq y \end{cases}$$

- $\llbracket x \rrbracket = f_{x_i}$
- $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket$ — смотри ИИБ
- $\llbracket P_i(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \rrbracket = f_{P_i}(\llbracket \Theta_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \Theta_n \rrbracket)$
- $\llbracket f_j(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \rrbracket = f_{f_j}(\llbracket \Theta_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \Theta_n \rrbracket)$

$$\llbracket \forall x. \varphi \rrbracket = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } \llbracket \varphi \rrbracket^{f_x=k} = \text{И} \text{ при всех } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

$$\llbracket \exists x. \varphi \rrbracket = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } \llbracket \varphi \rrbracket^{f_x=k} = \text{И} \text{ при некотором } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

$$\llbracket \forall x. \forall y. E(x, y) \rrbracket = \text{Л}$$

т.к. $\llbracket E(x, y) \rrbracket^{x:=1, y:=2} = \text{Л}$

Пример.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Синим отмечены функциональные конструкции(термы), зеленым предикатные

$$\forall \varepsilon. (\varepsilon > 0) \rightarrow \exists N. \forall n. (n > N) \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначим:

- $(>)(a, b) = G(a, b)$ — предикат
- $|\bullet|(a) = m_+(a)$
- $(-)(a, b) = m_-(a, b)$
- $0() = m_0$
- $a_\bullet(n) = m_a(n)$

$$\forall \varepsilon. G(e, m_0) \rightarrow \exists n_0. \forall n. G(n, n_0) \rightarrow G\left(e, m_+\left(m_-(m_a(n), a)\right)\right)$$

5.1.3 Теория доказательств

Все аксиомы И.В + М.Р.

(схема 11) $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \Theta]$

(схема 12) $\varphi[x := \Theta] \rightarrow \exists x.\varphi$

Если Θ свободен для подстановки вместо x в φ .

Определение. Свободен для подстановки — никакое свободное вхождение x в Θ не станет связанным

Пример.

```

1  int y;
2  int f(int x) {
3      x = y;
4  }
```

Заменяем $y := x$. Код сломается, т.к. у нас нет свобод для подстановки

(Правило \forall)

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x.\psi}$$

(Правило \exists)

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{\exists x.\psi \rightarrow \varphi}$$

В обоих правилах x не входит свободно в φ

Пример.

$$\frac{x = 5 \rightarrow x^2 = 25}{x = 5 \rightarrow \forall x.x^2 = 25}$$

Между x и x^2 была связь, мы ее разрушили. Нарушено ограничение

Пример.

$$\exists y.x = y$$

$$\forall x.\exists y.x = y \rightarrow \exists y.y + 1 = y$$

Делаем замену $x := y+1$. Нарушено требование свобод для подстановки. y входит в область действия квантора \exists и поэтому свободная переменная x стала связанная.

Лекция 6

19 марта

6.1 Исчисление предикатов

6.1.1 Расставление скобок

Кванторы имеют наименьший приоритет

Пример.

$$\forall x.A \& B \& y.C \& D \vee \exists z.E$$
$$(\forall x.(A \& B \& \forall y.(C \& D \vee \exists z.(E))))$$

Еще раз про правила только со скобками

1.

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\exists.\varphi) \rightarrow \psi}$$

2.

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{\psi \rightarrow (\forall x.\varphi)}$$

Пример.

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x.(\varphi \rightarrow \psi)}$$

— можно доказать, но это не правило вывода для \exists

Определение. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — доказательство

- если α_i — аксиома
- либо существует $j, k < i$, что $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$
- либо существует $\alpha_j : \alpha_j = \varphi \rightarrow \psi$ и $\alpha_i = (\exists x.\varphi) \rightarrow \psi$ причем x не входит свободно в ψ
- либо существует $j : \alpha_j = \psi \rightarrow \varphi$ и $\alpha_i = \psi \rightarrow \forall x.\varphi$ причем x не входит свободно в ψ

6.1.2 Вхождение

Пример.

$$(P(x_1) \vee Q(x_2)) \rightarrow (R(x_3) \& (\underbrace{\forall x_4. P_1(x_5)}_{\text{область } \forall \text{ по } x}))$$

1, 2, 3 — свободные, 5 — связанное, по переменной 4

Пример.

$$\underbrace{\forall x. \forall y. \forall x. \forall y. \forall x. P(x)}_{\text{область } \forall \text{ по } x}$$

Здесь x в $P(x)$ связано. x не входит свободно в эту формулу, потому что нет свободных вхождений

Определение. Переменная x входит свободно если существует свободное вхождение

Определение. Вхождение свободно, если не связано

Можно относиться к свободно входящим переменным как к переменным из библиотеки, т.е. мы не имеем права их переименовывать

Пример. Некорректная формула

$$\alpha_1 \quad x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\alpha_2 \quad (\exists x. x = 0) \rightarrow (x = 0) \text{ — не доказано}$$

$$\alpha'_2 \quad (\exists t. x = 0) \rightarrow (x = 0) \text{ — (правило } \exists)$$

Пример.

$$(n) \quad x = 0 \rightarrow y = 0 \text{ — откуда то}$$

$$(n+1) \quad (\exists x. x = 0) \rightarrow (y = 0) \text{ — (правило } \exists)$$

6.1.3 Свободные подстановки

Определение. Θ свободен для подстановки вместо x в φ , если никакая свободная переменная в Θ не станет связанной в $\varphi[x := \Theta]$

Определение. $\varphi[x := \Theta]$ — "Заменить все свободные вхождения x в φ на Θ "

Пример.

$$(\forall x. \forall y. \forall x. P(x))[x := y] \equiv \forall x. \forall y. \forall x. P(x)$$

Пример.

$$P(x) \vee \forall x. P(x) [x := y] \equiv P(y) \vee \forall x. P(y)$$

Пример.

$$(\forall y.x = y) [x := \underbrace{y}_{\equiv \Theta}] \equiv \forall y.y = y$$

$FV(\Theta) = \{y\}$ — свободные переменные в Θ . Вхождение y с номером 1 стало связанным

Пример.

$$P(x) \& \forall y.x = y [x := y + z] \equiv P(y + z) \& \forall y.y + z = y$$

Здесь при подстановке вхождение y с номером 1 стало связанным. x — библиотечная функция, переименовали x во что-то другое.

6.1.4 Пример доказательства

Лемма 5. Пусть $\vdash \alpha$. Тогда $\vdash \forall x.\alpha$

Доказательство.

1. Т.к. $\vdash \alpha$, то существует $\gamma_1, \dots, \gamma_n : \gamma_n = \alpha$

(1)	γ_1	
\vdots	\vdots	
(n)	$\gamma_n (\equiv \alpha)$	
(n + 1)	$A \& A \rightarrow A$	(акс)
(n + 2)	$\alpha \rightarrow ((A \& A \rightarrow A) \rightarrow \alpha)$	(акс)
(n + 3)	$(A \& A \rightarrow A) \rightarrow \alpha$	(М.Р. n, n + 2)
(n + 4)	$(A \& A \rightarrow A) \rightarrow \forall x.\alpha$	(введение \forall n + 3)
(n + 5)	$\forall x.\alpha$	(М.Р. n + 1, n + 4)

□

6.1.5 Теорема о дедукции

Теорема 6.1.1. Пусть задана Γ, α, β

1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, при условии, если b в доказательстве $\Gamma, \alpha \rightarrow \beta$ не применялись правила для \forall, \exists по переменным, входящим свободно в α
2. Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

Лекция 7

2 апреля

- $\Gamma \models \alpha \rightarrow \alpha$ следует из Γ при всех оценках, что все $\gamma \in \Gamma \quad \llbracket \gamma \rrbracket = \text{И}$, выполнено $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$
- $x = 0 \vdash \forall x. x = 0$
- $x = 0 \not\vdash \forall x. x = 0$

Определение (Условие для корректности). Правила для кванторов по свободным переменным из Γ запрещены.

Тогда $\Gamma \vdash \alpha$ влечет $\Gamma \models \alpha$

7.1 Полнота исчисления предикатов

Определение. Γ — **непротиворечивое** множество формул, если $\Gamma \not\vdash \alpha \& \neg \alpha$ ни при каком α

Пример. Непротиворечивые:

- \emptyset
- $A \vee \neg A$

Противоречивые:

- $A \& \neg A$

Примечание. Непротиворечивое множество замкнутых (не имеющих свободных переменных) бескванторных формул

Пример. $\{A\}, \{0 = 0\}$

Определение. Моделью для непротиворечивого множества замкнутых бескванторных формул Γ — такая модель, что каждая формула из Γ оценивается в И

Определение. Полное непротиворечивое замкнутых бескванторных формул — такое, что для каждой замкнутой бескванторной формулы α : либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$

Обозначение. з.б. — замкнутая бескванторная. **непр. мн** — непротиворечивое множество

Теорема 7.1.1. Если Γ — непротиворечивое множество з.б. формул и α — з.б. формула.

То либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ — непр. мн. з.б. формул

Доказательство. Пусть и $\Gamma \cup \{\alpha\}$ и $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ Доделать □

Теорема 7.1.2. Если Γ — непр. мн. з.б. формул, то можно построить Δ — полное непр. мн. з.б. формул. $\Gamma \subseteq \Delta$ и в языке — счетное количество формул

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ — формулы з.б.

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$ либо $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi_1\}$ — смотря что непротиворечивое
- $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\varphi_2\}$ либо $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi_2\}$

$$\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$$

Свойство 2. Γ^* — полное

Свойство 3. Γ^* — непрерывное

Доказательство. Пусть $\Gamma^* \vdash \beta \& \neg\beta$

Конечное доказательство $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, часть из которых гипотезы: $\gamma_1, \dots, \gamma_k$
 $\gamma_i \in \Gamma_{R_i}$. Возьмем $\Gamma_{\max R_i}$. Правда ли $\Gamma_{\max R_i} \vdash B \& \neg B$ □

Теорема 7.1.3. Любое полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул Γ имеет модель, т.е. существует оценка $\llbracket \cdot \rrbracket$: если $\gamma \in \Gamma$, то $\llbracket \gamma \rrbracket = \text{И}$

Доказательство. D — все записи из функциональных символов.

- $\llbracket f_0^n \rrbracket$ — константа \Rightarrow “ f_0^n ”
- $\llbracket f_k^m(\Theta_1, \dots, \Theta_k) \rrbracket \Rightarrow$ “ f_k^m (“ + $\llbracket \Theta_1 \rrbracket$ + “ , “ + \dots + “ , “ + $\llbracket \Theta_k \rrbracket$ + “)”
- $\llbracket P(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \rrbracket = \begin{cases} \text{И} & P(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \in \Gamma \\ \text{Л} & \text{иначе} \end{cases}$
- свободные переменные: \emptyset

Так построенная модель — модель для Γ . Индукция по количеству связок. База очев.

Переход $\alpha \& \beta$. При этом

1. Если $\alpha, \beta \in \Gamma$ $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket \beta \rrbracket = \text{И}$ то $\alpha \& \beta \in \Gamma$
2. Если $\alpha, \beta \notin \Gamma$ $\llbracket \alpha \rrbracket \neq \text{И}$ или $\llbracket \beta \rrbracket \neq \text{И}$ то $\alpha \& \beta \notin \Gamma$

Аналогично для других операций □

Теорема 7.1.4 (Геделя о полноте). Если Γ — полное непротиворечивое множество замкнутых (не бескванторных) формул, то оно имеет модель

Следствие 7.1.4.1. Пусть $\models \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

Доказательство. Пусть $\models \alpha$, но $\not\vdash \alpha$. Значит $\{\neg \alpha\}$ — непротиворечивое множество замкнутых формул. Тогда $\{\alpha\}$ или $\{\neg \alpha\}$ — непр. мн. з. ф. Пусть $\{\alpha\}$ — непр. мн. з. ф., а $\{\neg \alpha\}$ — противоречивое. При этом $\neg \alpha \vdash \beta \& \neg \beta$, $\neg \alpha \vdash \alpha$, $\beta \& \neg \beta \models \alpha$. $\neg \alpha \vdash \alpha$, $\alpha \vdash \alpha$. Значит $\vdash \alpha$ □

- Γ — п.м.з.ф.
- перестроим Γ в Γ^Δ — п.н.м. б. з. ф.
- по теореме о существовании модели: M^Δ — модель для Γ^Δ
- покажем, что M^Δ — модель для Γ — M

$\Gamma_0 = \Gamma$, где все формулы — в предварительной нормальной форме

Определение. ПНФ — формула, где $\forall \exists \forall \dots (\tau)$, τ — формула без кванторов

Теорема 7.1.5. Если φ — формула, то существует ψ — в п.ф., то $\varphi \rightarrow \psi$ и $\psi \rightarrow \varphi$

Доказательство. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots \subseteq \Gamma^*$. $\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$

Переход: $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i+1}$

Рассмотрим: $\varphi_j \in \Gamma_i$

Построим семейство ф.с. d_i^j — новые переменные

1. φ_j без кванторов — не трогаем
2. $\varphi_j \equiv \forall x. \psi$ — добавим все формулы вида $\psi[x := \Theta]$, где Θ — терм, состоящий из $f: d_0^e, d_1^{e'}, \dots, d_{i-1}^{e' \dots'}$
3. $\varphi_j \equiv \exists x. \psi$ — добавим $\psi[x := d_i^j]$

$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\text{все добавленные формулы}\}$ — счетное количество □

Теорема 7.1.6. Если Γ_i — непротиворечиво, то Γ_{i+1} — непротиворечиво

Теорема 7.1.7. Γ^* — непротиворечиво

Следствие 7.1.7.2. $\Gamma^\Delta = \Gamma^*$ без формул с \forall, \exists

Лекция 8

9 апреля

8.1 Исчисление предиктов

Теорема 8.1.1 (Геделя о полноте ИП). У любого н.м.з.ф. (непротиворечивого множества замкнутых формул) ИП существует модель

Теорема 8.1.2. Если формула ϕ — замкнутая формула ИП
Тогда найдется ψ — замкнутая формула ИП, что $\vdash \phi \rightarrow \psi$ и $\psi \rightarrow \phi$. ψ — с поверхностными кванторами

Доказательство. См. ДЗ □

Примечание. Рассмотрим Γ — н.м.з.ф. — рассмотрим Γ' — полное расширение Γ . Пусть ϕ — формула из Γ' , тогда найдется $\psi \text{ in } \Gamma'$, что ψ — с поверхностными кванторами и $\vdash \phi \rightarrow \psi$, $\vdash \psi \rightarrow \phi$

Доказательство теоремы Геделя о полноте ИП. Рассмотрим множество констант (нуль местных функциональных символов) — d_j^i . Построим $\{\Gamma_j\}$:

$$\Gamma' = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_j \subseteq \dots$$

Переход $\Gamma_j \Rightarrow \Gamma_{j+1}$: рассмотрим все формулы из Γ_j : $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots\}$

1. γ_i — формула без кванторов — оставим на месте
2. $\gamma_i \equiv \forall x. \phi$ — добавим к Γ_{j+1} все формулы вида $\phi[x := \Theta]$, где Θ — составлен из всех ф.с. ИП и констант вида d_1^k, \dots, d_j^k
3. $\gamma_i \equiv \exists x. \phi$ — добавим одну формулу — $\phi[x := d_{j+1}^i]$

Утв. 1 Γ_{i+1} непр., если Γ_i — непр.

Докажем от противного. $\Gamma_{i+1} \vdash \beta \& \neg \beta$

$$\Gamma_i, \gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \beta \& \neg \beta \quad \gamma_i \in \Gamma_{i+1} \setminus \Gamma_i$$

$$\Gamma_i \vdash \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow \beta \& \neg \beta$$

γ_i — замкнутое \implies т. о дедукции. Докажем что $\Gamma_i \vdash \beta \& \neg \beta$ по индукции.

$$\Gamma_i \vdash \gamma \rightarrow \varepsilon$$

Покажем $\Gamma_i \vdash \varepsilon$, т.е. γ получен из $\forall x.\xi$ или $\forall x.\xi \in \Gamma_i$

($\forall x.\xi$) Заметим, что $\Gamma_i \vdash \forall x.\xi$

$$\begin{array}{ll} \vdots & \text{по условию} \\ \gamma \rightarrow \varepsilon & \text{по построению } \Gamma_{i+1} \\ \forall x.\xi \rightarrow \underbrace{(\xi[x := \Theta])}_{\gamma} & (\text{акс. 11}) \\ (\forall x.\xi) \rightarrow \varepsilon & \left| \begin{array}{l} \eta \rightarrow \xi \\ \xi \rightarrow \kappa \end{array} \right. \implies \eta \rightarrow \kappa \\ \forall x.\xi & \\ \varepsilon & (\text{M.P.}) \end{array}$$

($\exists x.\xi$)

$$\Gamma_i \vdash \overbrace{\xi[x := d_{i+1}^k]}^{\gamma} \rightarrow \varepsilon$$

Заметим, что d_{i+1}^k не входит в ε . Заменяем все d_{i+1}^k в доказательстве на y — новая переменная

$$\Gamma_i \vdash \xi[x := y] \rightarrow \varepsilon$$

$$\begin{array}{l} \exists y.\xi[x := y] \rightarrow \varepsilon \\ (\exists x.\xi x) \rightarrow (\exists t.\xi[x := y]) \\ (\exists x.\xi) \rightarrow \varepsilon \\ \exists x.\xi \end{array}$$

Исправить

Утв. 2 Γ^* — непр. $\Gamma_0 \vdash \gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow \beta \& \neg \beta$

$$\Gamma_{\max_i(0..n)} \vdash \beta \& \neg \beta$$

Значит Γ_{\max} — противоречиво, $\Gamma^\Delta = \Gamma^*$ без кванторов

Значит у Γ^Δ есть модель M

Утв. 3 $\gamma \in \Gamma'$, то $\llbracket \gamma \rrbracket_M = \text{И}$

Индукция по количеству кванторов в γ . Рассмотрим:

1. $\gamma \equiv \forall x.\delta$

$\llbracket \forall x.\delta \rrbracket$, если $\llbracket \delta \rrbracket^{x:=\kappa} = \text{И}, \kappa \in D$. Рассмотрим $\llbracket \delta \rrbracket^{x:=\kappa}$, $k \in D$. κ содержит константы и ф-с, κ осмысленно Γ_p . δ добавлена на шаге q . Рассмотрим шаг $\Gamma_{\max(p,q)} \forall x.\delta : \Gamma_{\max(p,q)+1}$ добавлена $\delta[x := \kappa]$. $\delta[x := \kappa]$ — меньше на 1 квантор, $\llbracket \delta[x := \kappa] \rrbracket = \text{И}$

2. $\gamma \equiv \exists x.\delta$ — аналогично

□

Теорема 8.1.3. ИП неразрешимо

Определение. Язык — множество слов. Язык \mathcal{L} разрешим, если существует A — алгоритм, что по слову w :

$A(w)$ — останавливается в '1', если $w \in \mathcal{L}$ и '0', если $w \notin \mathcal{L}$

Примечание. Проблема останова: не существует алгоритма, который по программе для машины Тьюринга ответит, остановится она или нет.

Пусть \mathcal{L}' — язык всех остановов программы для машины Тьюринга. \mathcal{L}' неразрешим

Примечание. $[a, b, c, d, e] = \text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{cons}(c, \text{cons}(d, \text{cons}(e, \text{nil}))))))$

A — алфавит ленты

$\left. \begin{array}{l} S_x, x \in A \\ e - \text{nil} \end{array} \right\}$ — 0-местные функциональные символы

$C(a, b)$ — 2-местные функциональные символы

$b_s, s \in \mathcal{S}$ — множество всех состояний, b_0 — начальное состояние.

$$C(s_c, C(s_b, C(s_a, e))) \quad C(s_d, C(s_e, e))$$

Заведем предикат, которых отвечает было ли состояние в процессе. Начальное состояние — машина Тьюринга запущена на строке α :

$$R(\alpha, e, b_0)$$

Переход:

$$(s_x, b_s) \rightarrow (s_y, b_t, \leftrightarrow)$$

$$(s_x, b_s) \rightarrow (s_y, b_t, \leftarrow)$$

Если перемещение законно, то можем построить для каждого такие правила:

$$\forall z. \forall w. R(C(s_x, z), w, b_s) \rightarrow R(C(s_y, z), w, b_t)$$

$$\dots R(z, C(s_y, w), b_t)$$

Сделаем конъюнкцию всех эти правил: $R(\dots) \& R(\dots) \& \dots \& R(\dots) \rightarrow \exists z. \exists w. R(z, w, b_\Delta)$

Исправить

Пример.

1. $R(C(s_k, e), e, b_0)$ — доказуемо(мы так сказали) Двинем голвку вправо:

$$\forall x. \forall y. R(C(s_k, x), y, b_0) \rightarrow R(x, C(s_k, y), b_1)$$

Лекция 9

16 апреля

9.1 Теория первого порядка

Определение. Теория I порядка — Исчисление предикатов + нелогические функции + предикатные символы + нелогические (математические) аксиомы.

Определение. Будем говорить, что N соответствует **аксиоматике Пеано** если:

- задан $(') : N \rightarrow N$ — инъективная функция (для разных элементов, разные значения)
- задан $0 \in N$: нет $a \in N$, что $a' = 0$
- если $P(x)$ — некоторое утверждение, зависящее от $x \in N$, такое, что $P(0)$ и всегда, когда $P(x)$, также и $P(x')$. Тогда $P(x)$

Свойство 1. 0 единственный

Доказательство. $P(x) = x = 0$ либо существует $t : t' = x$

- $P(0) : 0 = 0$
- $P(x) \rightarrow P(x')$. Заметим, что x' — не ‘ноль’

$P(x)$ выполнено при всех $x \in N$

□

Определение.

$$a + b = \begin{cases} a & b = 0 \\ (a + c)' & b = c' \end{cases}$$

Можем определить это опираясь на [доказательство](#)

Определение. • $1 = 0'$

- $2 = 0''$
- $3 = 0'''$
- $4 = 0''''$
- ...

Задача 1. $2 + 2 = 4$

Решение.

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' = ((0'' + 0)')' = ((0'')')' = 0'''' = 4$$

Определение.

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ (a \cdot c) + a & b = c' \end{cases}$$

Определение.

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ (a^c) \cdot a & b = c' \end{cases}$$

Свойство 1. $a + 0 = 0 + a$

Доказательство. $P(a) = (a + 0 = 0 + a)$

База $P(0) : 0 + 0 = 0 + 0$

Переход $P(x) \rightarrow P(x')$

$$x + 0 = 0 + x$$

$$x' + 0 \stackrel{?}{=} 0 + x'$$

$$0 + x' = (0 + x)' \quad \text{определение} +$$

$$(0 + x)' = (x + 0)' \quad \text{предположение}$$

$$(x + 0)' = x' \quad \text{определение} +$$

$$x' = x' + 0 \quad \text{определение} +$$

□

Свойство 2. $a + b' = a' + b$

Доказательство.

$$b = 0 \quad a + 0' = a' + 0$$

$$a' = (a + 0)' = a + 0' = a' + 0 = a'$$

$b = c'$ Есть: $a + c' = a' + c$. Покажем: $a + c'' = a' + c'$

$$(a + c')' = (a' + c)' = a' + c$$

□

Свойство 3. $a + b = b + a$

Доказательство. База $b = 0$ — свойство

Переход $a + c'' = c'' + a$, если $a + c' = c' + a$

$$a + c'' = (a + c')' = (c' + a)' = c' + a' = c'' + a$$

□

9.1.1 Формальная арифметика

Определение. Исчисление предикатов:

- Функциональные символы:
 - 0 — 0-местный
 - $()$ — 1-местный
 - (\cdot) — 2-местный
 - $(+)$ — 2-местный
- $(=)$ — 2-местный предикатный символ

Аксиомы:

1. $a = b \rightarrow a' = b'$
2. $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$
3. $a' = b' \rightarrow a = b$
4. $\neg a' = 0$
5. $a + b' = (a + b)'$
6. $a + 0 = a$
7. $a \cdot 0 = 0$
8. $a \cdot b' = a \cdot b + a$
9. Схема аксиом индукции:

$$(\psi[x := 0]) \& (\forall x. \psi \rightarrow (\psi[x := x'])) \rightarrow \psi$$

x входит свободно в ψ

Свойство 1.

$$((a + 0 = a) \rightarrow (a + 0 = a) \rightarrow (a = a))$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c \\ & (\forall a. \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow \forall b. \forall c. (a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c) \\ & \forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c \\ & (\forall b. \forall c. a + 0 = b \rightarrow a + 0 = c \rightarrow b = c) \rightarrow \forall c. (a + 0 = a \rightarrow a + 0 = c \rightarrow a = c) \\ & \forall c. a + 0 = a \rightarrow a + 0 = c \rightarrow a = c \\ & (\forall c. a + 0 = a \rightarrow a + 0 = c \rightarrow a = c) \rightarrow a + 0 = a \rightarrow a + 0 = a \rightarrow a = a \\ & a + 0 = a \rightarrow a + 0 = a \rightarrow a = a \\ & a + 0 = a \\ & a + 0 = a \rightarrow a = a \\ & a = a \\ & \forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c \\ & (0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0) \\ & (\forall b. \forall c. a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c) \rightarrow (0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0) \rightarrow \phi \end{aligned}$$

Исправить

□

Определение. $\exists! x. \varphi(x) \equiv (\exists x. \varphi(x)) \& \forall p. \forall q. \varphi(p) \& \varphi(q) \rightarrow p = q$
 Можно также записать $\exists! x. \neg \exists s. s' = x$ или $(\forall q. (\exists x. x' = q) \vee q = 0)$

Определение. $a \leq b$ — сокращение для $\exists n. a + n = b$

Определение.

$$\begin{aligned} \bar{n} &= 0^{(n)} \\ 0^{(n)} &= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 0^{(n-1)'} & n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Определение. $W \subseteq \mathbb{N}_0^n$. W — выразимое в формальной арифметике. отношение, если существует формула ω со свободными переменными x_1, \dots, x_n . Пусть $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$

- $(k_1, \dots, k_n) \in W$, тогда $\vdash \omega[x_1 := \overline{k_1}, \dots, x_n := \overline{k_n}]$
 - $(k_1, \dots, k_n) \notin W$, тогда $\vdash \neg \omega[x_1 := \overline{k_1}, \dots, x_n := \overline{k_n}]$
- $$\omega[x_1 := \Theta_1, \dots, x_n := \Theta_n] \equiv \omega(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$$

Определение. $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ — представим в формальной арифметике, если найдется φ — формула с $n + 1$ свободными переменными $k_1, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$

- $f(k_1, \dots, k_n) = k_{n+1}$, то $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_{n+1}})$
- $\vdash \exists! x. \varphi(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, x)$