Лекция 5

Ilya Yaroshevskiy

15 марта 2021 г.

Содержание

1 Плотности

Плотность $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера
Плотность меры ν онсительно μ — это функция $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\forall B \in A \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$

Теорема 1.1 (критерий плотности)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, ν — еще одна мера
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая

Тогда ω — плотность ν отнсительно μ $\Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathfrak{A}\ \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A \omega$$

Пример (нет плотности).

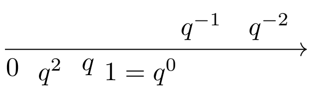
- $X = \mathbb{R}$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}'$
- $\mu = \lambda_1$
- ν — одноточечная мера $\nu(A) = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{, если } 0 \in A \\ 0 & \text{, иначе} \end{array}\right.$
  считаем $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$

Теорема 1.2 (Необходимое условие существования плотности)**.** $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Теорема 1.3 (теорема Радона-Никодина)**.** Это так-же достаточное условие

Доказательство критерия плотности. $(\Rightarrow)$ очевидно

$(\Leftarrow)$ Не умаляя общности $\omega > 0 : e = X(\omega = 0)$
$\nu(e) = \int_e \omega d\mu = 0$
Для случая когда $A \cup e = \emptyset$ все только лучше
Фиксируем $q \in (0, 1)$
$A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$



$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \nu A_j \leq \mu A_i \cdot q^{j-1} \tag{1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq \mu A_j \cdot q^{j-1} \tag{2}$$

Тогда

$$q \cdot \int_A \omega d\mu \leq q \cdot \sum \int_{A_j} \leq \sum q^j \mu A_j \leq \sum \nu A_j \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} = \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

то есть:

$$q \int_A \omega d \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

и $q \to 1 - 0$

□

Лемма 1.

- *f, g — суммируемые*
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\forall A \in \mathfrak{A}$
- $\int_A f = \int_A g$

Тогда *$f = g$ почти везде*

Доказательство. $g := f - g$
Дано $\forall A \int_A h = 0$
Доказать $h = 0$ почти везде

- $A_+ := X(h \geq 0)$
- $A_- := X(h < 0)$

$X = A_+ \sqcup A_-$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$$

$$\int_{A_-} |h| = -\int_{A_-} h = 0$$

тогда

$$\int_X |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ почти везде □

Примечание. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство отображений $l_A : f \mapsto \int_A f d\mu$ — линейный функционал
Таким образом множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ — разделяет точки
$\forall f, g \in \mathcal{L}(X) \exists A l_A(f) \neq l_A(g)$

2 Мера лебега

Лемма 2 (о мере образа малых кубических ячеек)**.**

- *$O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое*
- $a \in O$
- $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$

Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$
Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall$ *куба* $Q \subset B(a, \delta),\ a \in Q$
выполняется неравенство $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Примечание. Здесь можно считать что кубы замкнутые

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L \cdot (x-a) + o(x-a) \quad x \to a$$
$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o(x-a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар} B_\varepsilon(a)\ \forall x \in B_\varepsilon(A)\ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a) a \in Q$ — куб со стороной h. При $x \in Q:\ |x-a| \leq \sqrt{m} h$

$$|\Psi(x) - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1+2\varepsilon)h$: при $x, y \in Q$

$$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \leq (1+2\varepsilon)h$$
$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq \underbrace{|\det L| \cdot (1+2\varepsilon)^m}_{\text{выбираем } \varepsilon \text{ чтобы } \ldots < c} \lambda Q$$

потом берем $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ ☐

Лемма 3.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $f : O \to \mathbb{R}$ — *непрерывное*
- $Q \subset \overline{Q} \subset O$ — *кубическая ячейка*
- $A \subset Q$

Тогда

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — открытое } \subset O}} \left(\lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Теорема 2.1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \in O$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)|\, d\lambda(x)$$

Доказательство. Обозначим якобиан $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
$\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера. Т.е. надо доказать: J_Φ — плотность ν относительно λ. Тогда достаточно проверить условие критерия плотности

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{3}$$

Достаточно проверить только правое неравенство. левое — это "правое для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1}"

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

1. Проверяем второе неравенство 3 для случая когда A — кубическая ячейка. $A \subset \overline{A} \subset O$. От противного:
$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$$
Возьмем $C > \sup_Q J_\Phi : \ C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$. Запускаем процесс половинного деления:
Режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую"ячейку $Q_1 \subset Q : \ C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берем $Q_2 : \ \mathbb{C} \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и так далее
$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{4}$$
$$a \in \bigcap \overline{Q_i} \quad c > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi, \text{ в частности } c > |\det \Phi'(a)|$$
Получаем противоречие с леммой: с скол угодно малой окрестности a имеются кубы $\overline{Q_n}$, где выполняется 4. **Противоречие**

2. Проверим второе неравенство 3 для открытых множеств $A \subset O$
Это очевидно $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q_j} \subset A$
$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5}$$

3. По лемме второе неравенство 3 выполнено для всех измеримых A
$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — куба } Q_j \subset \overline{Q_j} \subset O$$
$$A = \bigsqcup \underbrace{A \cup Q_j}_{A_j} \quad A \subset G \text{ — открытое}$$
$$JA_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \int_G (\sup J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$
Аналогично 5 получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

$\square$

Теорема 2.2.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое

Тогда $\forall f$ — измеримых, ≥ 0, заданная на $O' = \Phi(O)$
$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda$$
, где $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$. То же верно для суммируемых функций f

Доказательство. Применяем теорему о взвешенном образе меры.
Дано:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(T, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$ — с сохранением измеримости
- $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$
- $\omega : Y \to \mathbb{R}, \ \geq 0$, измеримый
- ν — взвешенный образ μ с весом ω:
$$\mu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Тогда
$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$
В нашем случае

- $X = Y - \mathbb{R}^m$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$
- Φ — диффеоморфизм
- $\mu = \lambda$
- $\nu(A) = \lambda\Phi(A)$

Под действием гладкого отображния Φ, σ-аглебра $\mathfrak{M}^m$ сохраняется
По теореме

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(A)} J_\Phi d\lambda$$

т.е. λ — взвешенный образ исходной меры Лебега по отношению к Φ $\square$

Пример. Полярные координаты в R^2.
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $, \Phi : \{(r,\varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \to \mathbb{R}^2$
диффеоморфизм

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_\Omega f(x,y) = d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r \underset{d\lambda_r(r,\varphi)}{d\lambda_r}$$

Пример. Сферические координаты в R^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \quad \left[\begin{array}{c} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi? & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = r^2(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi) = r^2\cos\psi = J_\Phi$$

— для географических координат: r — растояние от центра Земли, ψ — угол к плоскости экватора