Лекция 2

Ilya Yaroshevskiy

6 апреля 2021 г.

Содержание

1 Производящие функции

Определение. Полином — степенныой ряд, у которого начиная с некоторого места n все коэффиценты 0.

Обозначение. $\deg p = n$

Определение. $\frac{P(t)}{Q(t)}$ — **дробно рациональная функция**

1.1 Рекурентные соотношения

Определение.

$$m : a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$$

$k \leq m, n \geq m$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + a_k a_{n-k}$$

, где $c_1, \dots, c_k$ — коэффиценты рекурентности

Пример.

- $m = 2,\ k = 2$
- $f_0 = f_1 = 1$
- $c_1 = c_2 = 1$

$\mathrm{f_n = f_{n - 1} + f_{n - 2}}$ — числа Фибоначи

Определение. Квазиполином

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) r_i^n$$

, где p_i — полином, r_i — числа

Теорема 1.1. • $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$
Тогда эквивалентны:

1. $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, P, Q — полиномы, $q_0 \neq 0$
2. для $n \geq m$ a_n задается линейным рекурентным соотношением: $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$, причем:
   - $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$
   - $\deg P \leq m - 1$

3. a_n — квазиполином

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) r_i^n \tag{1}$$

причем:

- r_i — обратные величины корням $Q(t)$
- k — число различных его корней
- $\deg p_i =$ (кратность корня$(r_i^{-1})) - 1$
  (1 кроме $\leq m$ первых членов)

1.2 Рекурента в рациональную ПФ

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \cdots + c_k f_{n-k}$$

$$m = \deg P + 1 \quad k = \deg Q$$

$$p_i = a_i - \sum_{j=1}^{\min(k,i)} a_{i-j} c_j$$

$$a_n = \frac{p_n - \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} q_i}{q_0}$$

$$c_i = -q_i$$

$$f_i = a_i$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{\min(n,k)} c_i a_{n-i} [+p \text{ если } n < m]$$