Лекция 1

Ilya Yaroshevskiy

January 7, 2021

Contents

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m = \sum_{c_1=1}^{m} \sum_{c_2=1}^{m} \dots \sum_{c_n=1}^{m} a_{c_1} a_{c_2} \dots a_{c_n} \ (1)$$

1 Мультииндекс

$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$
$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$
$x \in \mathbb{R}^m$ $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$
$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!$
$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}}$
$(1) \ = \displaystyle\sum_{\alpha : |\alpha| = r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha$

2 Дифференцирование

2.1 Лемма

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to R$ $f \in C^r(E)$ - r раз дифференцируема на E, $a \in E$
$h \in \mathbb{R}^m$ $\forall t \in [-1, 1]$ $a + th \in E$
$\varphi(t) = f(a + th)$ Тогда при $1 \le k \le r$
$\varphi^{(r)}(0) = \displaystyle\sum_{j : |j| = r} \frac{r!}{j!} h^j \frac{\partial^r f}{\partial x^j}(a)$

Пример $\varphi'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th)}_{\text{Производная в точке } a + th} \cdot h_i$

$\varphi'' = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) \cdot h_i h_{i_2}$
$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots)$

Продолжение $\varphi^k(t) = \displaystyle\sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \dots \sum_{i_r=1}^{m} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a + th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_3}$

3 Теорема (формула Тейлора)

$f \in C^{r+1}(E)$ $E \subset \mathbb{R}^m,\ f: E \to \mathbb{R},\ a \in E$
$x \in B(a, R) \subset E$ Тогда $\exists \theta \in (0,1)$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \le |\alpha| \le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \theta(x-a))}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \Big(\sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_m): \alpha_i \ge 0, \sum \alpha_1 = k} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (x_m - a_m)^{\alpha_m} \Big) + \text{аналогичный остаток}$$

$$f(a+h) = \sum_{k-1}^{r} \sum_{\dots} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}}(a) h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m} + \text{остаток}$$

Доказательство $\varphi(t) = f(a + th)$, где $h = x - a$, $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(x)$
$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1}$
Из леммы $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha| = k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{однородный многочлен степени } k} + \sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$

Примечание о дифференциале
Где однородный многочлен степени k это k -ый дифференциал функции f в точке a, обозначается $d^k f(a,h)$
$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \theta h, h)$
$d^2 f = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + f''_{x_2 x_2}(a) h_2^2 + \dots + f''_{x_m x_m}(a) h_m^2 + 2 \sum_{i<j} f''_{x_i x_j}(a) h_i h_j$ $d^{k+1} f = d(d^k f)$
$df = f'_{x_1} h_1 + f'_{x_2} h_2 + \dots + f'_{x_m} h_m$
$d^2 f = (f''_{x_1 x_1} h_1 + f''_{x_1 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_1 x_m} h_m) h_1 + (f''_{x_2 x_1} h_1 + f''_{x_2 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_2 x_m} h_m) h_2 + \dots$
Продолжение
$f(x) = \sum \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$

4 Линейные отображения

4.1 Определение

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - множество линейных отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - это линейное простарнство
Обозначение $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ $\quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^m: |x| = 1} |Ax|$

Замечания

1. sup $\leftrightarrow$ max, т.к. сфера компактна
2. $A = (a_{ij})$ $\quad \|A\| \le \sqrt{\sum a_{ij}^2}$ - по Лемме об оценке нормы линейного отображения
3. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \le \|A\| \cdot |x|$ $x = 0$ - тривиально
   $x \ne 0 \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \quad |Ax| = |A(|x| \cdot \tilde{x})| = \big||x| \cdot A\tilde{x}\big| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \le \|A\| \cdot |x|$
4. Если $\exists C > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R}^m |Ax| \le C \cdot |x|$, то $\|A\| \le C$

Примеры

1. $m = l = 1$
   A - линейный оператор - задается числом a $x \mapsto ax$ $\|A\| = |a|$
2. $m = 1$ $l -$ любое
   $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix}$ $\|A\| = |a|$

3. m – любое $l = 1$
$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $A \leftrightarrow \vec{a}$
$x \mapsto (\vec{a}, x)$ $\|A\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1} |\langle \vec{a}, x \rangle| = |\vec{a}|$

4. m – любое l – любое
$\|A\| = \sup\limits_{x : |x| = 1} |Ax| =$:(

4.2 Лемма

X, Y - линейные нормированные пространства $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

1. A - ограниченый оператор, т.е. $\|A\|$ - конечное
2. A - непрерывен в нуле
3. A - непрерывен всюду в X
4. A - равномерно непрерывен
$f : X \to Y$ - метрические пространства, равномерно непрерывно
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, x_0 : \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x_0, x_1 :\ |x_1 - x_0| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$

Доказательство

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ - очевидно
2. $2 \Rightarrow 1$ непрерывность в нуле: Для $\varepsilon = 1\ \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < 1$ при $|x| = 1 \quad |Ax| = |A \frac{1}{\delta}(\delta \cdot x)| = \frac{1}{\delta} \cdot |A \cdot \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$
3. $1 \Rightarrow 4$ $|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0|$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0\ |x_1 - x_0| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_0| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$

4.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение $A \to \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ является нормой, т.е выполнятеся
   (a) $\|A\| \geq 0$ если $\|A\| = 0 \Rightarrow A - 0_{m,n}$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
   (c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),\ B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad \|AB\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство

1. (a) $\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$, очев
   (b) очев
   (c) $|(A+B) \cdot x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|) \cdot |x|$ по замечанию 3 $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2. $|BAx| = |B \cdot (Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|$ по замечанию 3

Замечание в $\dim(X, Y)$

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x|<1} |Ax| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall x\ |Ax| \leq C \cdot |x|\}$$