For test

Ilya Yaroshevskiy

December 24, 2020

Contents

1 Задание 1 **1**

2 Задание 2 **1**

3 Задание 3 **2**

4 Задание 4 **2**

5 Задание 5 **2**

5.1 Алгоритм . . . 2

5.2 Нахождение интегрирующего множителя . . . 2

6 Задание 6 **3**

7 Задание 8 **3**

8 Полезные техники **4**

8.1 Линейное однородное уравнение n-го порядка . . . 4

1. задача
2. разделяющиеся переменные
3. линейное
4. Бернулли
5. УПД
6. понижение порядка
7. понижение порядка
8. метод последовательных приближений Пикара

1 Задание 1

Фезека

2 Задание 2

Уравнения приводящиеся в вид

$$f(x)dx = g(y)dy$$

$$\Downarrow$$

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

$$\Downarrow$$

$$F(x) = G(y)$$

3 Задание 3

Линейные уравнения первого порядка

$$y' + a(x)y = f(x)$$
$$u(x) = \exp \int a(x)dx$$
$$y = \frac{\int u(x)f(x)dx + C}{u(x)}$$

4 Задание 4

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)y^m$
При $m = 0$ - линейное уравнение
$m = 1$ - уравнение с разделяющими переменными
Иначе сводится к линейному подстановкой $z = y^{1-m}$ в уравнение $z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x)$

5 Задание 5

Уравнения вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

уравнение в полных диффернциалах если $\exists u(x,y) : du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
И $Q'_x = P'_y$
Тогда решение $u(x,y) = C$

5.1 Алгоритм

1. Запишем систему
$\begin{cases} u'_x = P(x,y) \\ u'_y = Q(x,y) \end{cases}$

2. Проинтегрируем первое уравнение по x, считая y константой, так-же примем C за $\varphi(y)$

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$$

3. Продифиренцируем полученное $u(x,y)$ по y и подставим во второе уравнение

$$u'_y(x,y) = \left(\int P(x,y)dx\right)'_y + \varphi'_y(y) = Q(x,y)$$

4. Проинтегрируем полученное уранение и найдем $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \int \left[Q(x,y) - \left(\int P(x,y)dx\right)'_y\right] dy$$

5. Подставим $\varphi(y)$ в $u(x,y)$, получим итоговое решение

$$u(x,y) = C$$

5.2 Нахождение интегрируещего множителя

Если $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$
Находим такое $\varphi(x,y)$, что:

$$Q\varphi'_x - P\varphi'_y = \varphi(P'_y - Q'_x)$$

1. Если $\varphi(x,y) = \varphi(x)$, то найдем его из уравнения

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x)$$

2. Если $\varphi(x,y) = \varphi(y)$, то найдем его из уравнения

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{1}{P}(P'_y - Q'_x)$$

3. Если φ зависит от обоих переменных, тогда если $\exists z : \varphi(z) = \varphi(x,y)$, то найдем φ из уравнения

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dz} = \frac{P'_y - Q'_x}{Qz'_x - Pz'_y}$$

6 Задание 6

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

1. $y'' = f(x)$
   Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$
   Тогда решим $p' = f(x)$, затем решим $y' = p(x)$

2. $y'' = f(y)$
   Возьмем новую функцию $p(y) : y' = p(y)$
   Тогда решим $\frac{dp}{dy}p = f(y)$, затем решим $y' = p(y)$

3. $y'' = f(y')$
   Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$
   Тогда решим $p' = f(p)$, затем решим $y' = p(x)$

4. $y'' = f(x, y')$
   Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$
   Тогда решим $p' = f(x, p)$, затем решим $y' = p(x)$

5. $y'' = f(y, y')$
   Возьмем новую функцию $p(y) : y' = p(y)$
   Тогда решим $\frac{dp}{dy}p = f(y, p)$, затем решим $y' = p(y)$

6. $F(x, y, y', y'')$ - одннородная функция аргументов y, y', y''
   $F(x, ky, ky', ky'') = k^m F(x, y, y', y'') \Rightarrow$ однородная
   Используем подстановку $y = e^{\int z dx}$
   Находим z, затем находим $y(x) = C_2 e^{\int z dx}$

7. $F(x, y, y', y'')$ - точная производная
   Если найдем $\Phi(x, y, y') : F(x, y, y', y'') = \Phi'_x(x, y, y')$, то решение: $\Phi(x, y, y') = C$

7 Задание 8

Метод Пикара
Дано x_0, $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{k-1}(\xi))d\xi$$

- **Пример**

  $$t_0 = 0 \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = tx \end{cases}$$

  Прим. $\dot{u} = u'_t$

$$x(0) = 0, y(0) = 0$$
$$x_n = x_0 + \int_0^t (x_{n-1}(\xi) - y_{n-1}(\xi))d\xi$$
$$y_n = y_0 + \int_0^t (\xi x_{n-1}(\xi))d\xi$$

$$x_1 = 1 + t$$
$$y_1 = \frac{t^2}{2}$$
$$x_2 = 1 + t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}$$
$$y_2 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

- **Пример**

$$y'' - y' \sin x - x^2 = 0$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = z \sin x + x^2 \end{cases}$$

$$y_0 = 1, z_0 = 0$$
$$y_n = y_0 + \int_0^x z_{n-1}(\xi)d\xi$$
$$z_n = z_0 + \int_0^x (z_{n-1}(\xi) \sin \xi + \xi^2)d\xi$$
$$z_1 = \frac{x^3}{3}$$
$$y_2 = 1 + \frac{x^4}{12}$$

8 Полезные техники

8.1 Линейное однородное уравнение n-го порядка

Имеем уравнение: $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n y(x) = 0$
Решим такое уравнение: $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

1. Все корни различные
   Тогда решение: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$

2. Есть кратные корни
   Есть n корней
   Различные корни: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$
   Степени корней: $k_1, \ldots, k_m$
   Тогда решение:

   $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{k_1} x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{n-k_m+1} e^{\lambda_m x} + C_{n-k_m+2} x e^{\lambda_m x} + \cdots + C_n x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x}$$