

Вопросы к экзамену

Илья Yaroshevskiy

14 января 2021 г.

Содержание

1 Теоремы	1
1.1 Лемма о дифференцировании сдвига	1
1.2 ФИХМЕ Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)	1
1.3 Теорема о пространстве линейных отображений	2
1.4 TODO Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора	2
2 Определения и формулировки	3
2.1 Мультииндекс и обозначения с ним	3
2.2 Формула Тейлора (различные виды записи)	3
2.3 n -й дифференциал	3
2.4 Норма линейного оператора	3

1 Теоремы

1.1 Лемма о дифференцировании сдвига

Лемма 1. $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^r(E)$ - r раз дифференцируема на E , $a \in E$
 $h \in \mathbb{R}^m \forall t \in [-1, 1] a + th \in E$
 $\varphi(t) := f(a + th)$
Тогда при $1 \leq k \leq r$

$$\varphi^{(r)}(0) = \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j!} h^j \frac{\partial^r f}{\partial x^j}(a) \quad (1)$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_r=1}^m \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a + th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_3} \quad (2)$$

1.2 **ФИХМЕ** Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

Теорема 1.1. $f \in C^{r+1}(E)$ $E \subset \mathbb{R}^m$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E$
 $x \in B(a, R) \subset E$
Тогда $\exists \theta \in (0, 1)$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \left(\sum_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_m): \alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = k}} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (x_m - a_m)^{\alpha_m} \right) + \text{аналогичный остаток}$$

$$f(a+h) = \sum_{k=1}^r \sum_{\dots} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}}(a) h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m} + \text{остаток}$$

Доказательство. $\varphi(t) = f(a + th)$, где $h = x - a$, $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(x)$

Из [леммы](#)

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1} \quad (3)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{однородный многочлен степени } k} + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha \quad (4)$$

$$f(x) = \sum \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r) \quad (5)$$

Где однородный многочлен степени k это k -ый дифференциал функции f в точке a , обозначается $d^k f(a, h)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \theta h, h)$$

□

1.3 Теорема о пространстве линейных отображений

Примечание. 1. $\sup \leftrightarrow \max$, т.к. сфера компактна

2. $A = (a_{ij}) \quad \|A\| \leq \sqrt{\sum a_{ij}^2}$ - по Лемме об оценке нормы линейного отображения

3. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$ $x = 0$ - тривиально
 $x \neq 0 \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \quad |Ax| = |A(|x| \cdot \tilde{x})| = |x| \cdot |A\tilde{x}| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \leq \|A\| \cdot |x|$

4. Если $\exists C > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R}^m |Ax| \leq C \cdot |x|$, то $\|A\| \leq C$

Теорема 1.2.

1. Отображение $A \rightarrow \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ является нормой, т.е. выполняются

(a) $\|A\| \geq 0$, если $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{m,n}$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$

(c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad \|AB\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

1. (a) $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$, очев

(b) очев

(c) $|(A+B) \cdot x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|) \cdot |x|$ по замечанию 3 $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2. $|BAx| = |B \cdot (Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|$ по замечанию 3

□

1.4 TODO Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

Лемма 2. X, Y - линейные нормированные пространства $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

1. A - ограниченный оператор, т.е. $\|A\|$ - конечное

2. A - непрерывен в нуле

3. A - непрерывен всюду в X

4. A - равномерно непрерывен

$f : X \rightarrow Y$ - метрические пространства, равномерно непрерывно

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x_0 : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0, x_1 : |x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow |Ax_1 - Ax_0| < \varepsilon$

Доказательство.

(4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2) очевидно

(2 \Rightarrow 1) непрерывность в нуле:

для $\varepsilon = 1 \exists \delta : \forall x : |x - 0| \leq \delta \Rightarrow |Ax - A \cdot 0| < 1$

при $|x| = 1 \quad |Ax| = |A \frac{1}{\delta}(\delta \cdot x)| = \frac{1}{\delta} \cdot |A \cdot \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$

(1 \Rightarrow 4) $|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0|$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 : |x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow |Ax_1 - Ax_0| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$

□

2 Определения и формулировки

2.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Обозначение.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m = \sum_{c_1=1}^m \sum_{c_2=1}^m \dots \sum_{c_n=1}^m a_{c_1} a_{c_2} \dots a_{c_n} \quad (6)$$

$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$ — мультииндекс

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \quad (7)$$

$$x \in \mathbb{R}^m \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \quad (8)$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! \quad (9)$$

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} \quad (10)$$

$$(6) = \sum_{\alpha: |\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha \quad (11)$$

2.2 Формула Тейлора (различные виды записи)

Смотри [формула Тейлора](#)

2.3 n - й дифференциал

Смотри [однородный многочлен степени \$k\$](#) , в доказательстве

Примечание. $d^2 f = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + f''_{x_2 x_2}(a) h_2^2 + \dots + f''_{x_m x_m}(a) h_m^2 + 2 \sum_{i < j} f''_{x_i x_j}(a) h_i h_j$ $d^{k+1} f = d(d^k f)$

$df = f'_{x_1} h_1 + f'_{x_2} h_2 + \dots + f'_{x_m} h_m$

$d^2 f = (f''_{x_1 x_1} h_1 + f''_{x_1 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_1 x_m} h_m) h_1 + (f''_{x_2 x_1} h_1 + f''_{x_2 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_2 x_m} h_m) h_2 + \dots$

2.4 Норма линейного оператора

Определение. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - множество линейных отображений $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ - это линейное пространство

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^m: |x|=1} |Ax|$$