Лекция 7

Ilya Yaroshevskiy

27 марта 2021 г.

Содержание

1 Стандартное дискретное распределение

1.1 Распределение Бернулли

Обозначение. $B_p,\ 0 < p < 1$

Определение.

- ξ — число успехов при одном испытии
- p — вероятность успеха при одном испытании

ξ	1	0
p	p	$1-p$

$$E\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$
$$D\xi = pq$$

1.2 Биноминальное распределение

Обозначение. $B_{n,p}$

Определение.

- ξ — число успехов при n испытаниях
- p — вероятность успеха при одном испытании

$$\xi \in B_{n,p} \Leftrightarrow p(\xi = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Примечание. $B_p = B_{1,p}$

ξ	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
p	q^n	$\binom{n}{1} p \cdot q^{n-1}$	$\dots$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$$

, при $\xi_i \in B_{n,p}$

$$E\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$D\xi = pq$$

$$E\xi = \sum_{i=0}^{n} E\xi_i = np$$

$$D\xi = \sum_{i=0}^{n} D\xi_i = npq$$

1.3 Геометрическое распределение

Обозначение. G_p

Определение.

- ξ — номер первого успешного испытания
- p — вероятность успеха при одном испытании

$$\xi\ inG_p \Leftrightarrow p(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad ,1 \leq k \leq \infty$$

xi	1	2	$\dots$	k	$\dots$
p	p	$(1-p) \cdot p$	$\dots$	$(1-p)^{k-1} \cdot p$	$\dots$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{\infty}(q^k)' = p\left(\sum_{n=0}^{\infty} q\right)' = p \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{p}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 q^{k-1} p = p\sum_{k=1}^{\infty}(k \cdot (k-1) + k) \cdot q^{k-1} + p\sum_{k=1}^{\infty} k\dot{q}^{k-1} = \frac{22q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

1.4 Распределение Пуассона

Определение. Слкчайная величина ξ имеет распределение ПУассона с парметром $k > 0$, если

$$p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad ,0 \leq k < \infty$$

ξ	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$	$\dots$

$$E\xi = \lambda$$

$$E\xi^2 = \lambda^2 + \lambda$$

$$D\xi = \lambda$$

$$= \sqrt{\lambda}$$

1.5 Функция распределения

Определение. $F\xi(x)$ случайной величины ξ называется функция

$$F\xi(x) = p(\xi < x)$$

Пример.

ξ	0	1
p	1 - p	p

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1-p & 0 < x \leq 1p, x > 1 \end{cases}$$

1.5.1 Свойства функции распределения

Свойство 1. *$F(x)$ — ограниченая функция*

Свойство 2. *$F(x)$ — неубывающая функция*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Свойство 3.

$$p(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Следствие 1.0.1. Т.к. Борелевская σ-алгебра порождается интервалами, то зная функцию распределения можем найти вероятнсоть попадания случайной величины в любое Борелевское ножество $B \in \mathfrak{B}$, а значит полностью задается функцией распределения

Свойство 4.

$$\lim_{x \to 0} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Т.к. функция $F(x)$ — ограничена и монотонна, то эти пределы существуют.

Свойство 5. $x_n \to \pm\infty$

$$]A_n = \{\omega \in \Omega | n - 1 \leq \xi(\omega) < n\}$$

$$1 = p(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (F(n) - F(n-1) = \lim_{n \to 0}) = \lim_{N \to 0} \sum_{-N}^{N} (F(n) - F(n-1)) =$$

$$= \lim_{N \to 0} (F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N \to 0} F(N) - \lim_{N \to \infty} F(-N-1) = 1 \Rightarrow \lim_{N \to \infty} F(N) = 1$$

$\boxed{\textit{Доделать}}$

Свойство 6. *$F(x)$ — непрерывна слева, т.е. $F(x_0 - 0) = F(x_0)$*

Доказательство.

- $]B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < x_o\}$

$$B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \emptyset$$

Следовательно по аксиоме непрерывности

$$\lim_{n \to \infty} p(B_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} p(B_n) = \lim_{n \to \infty} (F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) =$$

$$= F(x_0) - \lim_{n \to \infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = F(x_0) \Rightarrow F(x_0 - 0) = F(x_0)$$

□

Свойство 7. *Скачок в точке x_0 равен вероятности в этой точке.*

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$$

или

$$F(x_0 + 0) = F(x_0) + p(\xi = x_0) = p(\xi \leq x_0)$$

Доказательство.

- $C_n = \{x_0 < \xi < x_0 + \frac{1}{n}\}$

По аксиоме непрерывности $\lim\limits_{n\to\infty} p(C_n) = 0$

$$p(C_n) + p(\xi < x_0) = p(\xi = x_0)$$

$$p(x_0 \le \xi < x_0 + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$$

□

Свойство 8. *Если $F(x)$ непрерывна в точке x_0, то $p(\xi = 0) = 0$. Следствие из 6*

Свойство 9. *Если $F(x)$ непрерывна то, $p(x_1 \le \xi < x_2) = p(x_1 < \xi < x_2) = p(x_1 \le \xi \le x_2) = p(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$*

Свойство 10. *Случайная величина ξ имеет дискретное распредление $\Leftrightarrow$ ее функция распределения – ступенчатая функция*

2 Абсолютно непрерывные случайные величины

Определение. Случайная величина ξ имеет **абсолютно непрерывное** распределение, если для любового Борелевского множества $B \in \mathfrak{B}$

$$p(\xi \in B) = \int\limits_B f_\xi(x)dx$$

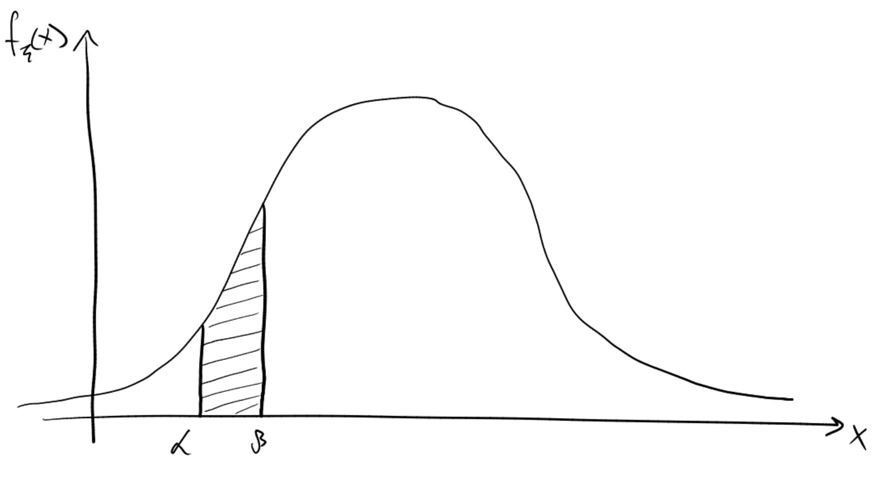
для некоторой функции $f_\xi(x)$. Интеграл Лебега а не Римана.

Определение. $f_\xi(x)$ — **плотность распределения** случайной величины ξ

2.1 Свойства плотности и функции распределения

Свойство 1. ***Вероятностный геометрический*** *смысл плотности.*

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \int\limits_\alpha^\beta f_\xi(x)dx$$



$$S = p(\alpha < \xi < \beta)$$

Доказательство. Из определения распределения $B = (\alpha, \beta)$ □

Свойство 2. ***Условие нормировки***

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Доказательство. По определению $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1$ а $B = \mathbb{R} \in \mathfrak{B}$ Исправить □

Свойство 3.

$$F\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Доказательство. По поределению

$$F_\xi(x) = p(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad B = (-\infty, x)$$

□

Свойство 4. *$F_\xi(x)$ — непрерывная функция. Как интеграл с переменным верхним пределом*

Свойство 5. *$F_\xi(x)$ — дифференцируема почти всюду и*

$$f_\xi(x) = F'(x)$$

почти для всех x

Доказательство. Теорема Барроу. □

Примечание. Почти для всех, кроме возможно x из множества нулевой меры Лебега.

Свойство 6. $f_\xi(x) > 0$

Доказательство. Из определения или из 5 □

Свойство 7. $p(\xi = x_0) = 0$

Свойство 8. $p(x_1 < / \leq \xi < / \leq x_2) = F(x_2) - f(x_1)$

Свойство 9. *Если для $f(x)$ выолнено свойства 2 и 6 то она является плотностью некоторой случайной величины*

2.2 Числовые характеричтики

Определение. **Математическим ожиданием** абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

при условии что данный интеграл сходится абсолютно, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$

Определение. **Дисперсией** абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 f(x)dx$$

при условии что интеграл сходится абсолютно

Примечание.

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E\xi)^2$$

Определение. **Среднее квадратическое отклонение** $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Примечание. Смысл свойств этих числовых характеристик полоностью идентичны дискретной случайной величины