

Лекция 5

Илья Yaroshevskiy

13 марта 2021 г.

Содержание

1	Схемы испытаний и соответствующие распределения	1
1.1	Схема до первого успешного испытания	1
1.2	Испытание с несколькими исходами	2
1.3	Урновая схема	2
1.4	Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли	3
1.4.1	Оценка погрешности в формуле Пуассона	4

1 Схемы испытаний и соответствующие распределения

- n — число испытаний
- p — вероятность при одном испытании
- $q = 1 - p$ — вероятность неудачи при одном испытании

Определение.

$$k \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}$$

— биномиальное распределение с параметрами n и p

Обозначение. $B_{n,p} = B(n, p)$

1.1 Схема до первого успешного испытания

Определение. Схема до первого успешного испытания. Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успеха под номером τ

Теорема 1.1. $p(\tau = k) = q^{k-1}p$

Доказательство.

$$p(\tau = k) = p(\underbrace{\text{НН} \dots \text{Н}}_{k-1} \text{У}) = q^{k-1}p$$

□

Определение. $k \rightarrow q^{k-1}p$, $1 \leq k \leq \infty$ — называется **геометрическим распределением** с параметром p

Обозначение. $G(p)$

Примечание. Это распределение обладает так называемым свойством отсутствия после действия или свойством нестарения

Теорема 1.2. $p(\tau = k) = q^{k-1}p$

Тогда $\forall n, k \in \mathbb{N} \quad p(\tau > n + k | \tau > n) = p(\tau > k)$

Доказательство. По формуле условной вероятности:

$$p(\tau > n + k | \tau > k) = \frac{p(\tau > n + k \text{ и } \tau > k)}{p(\tau > k)} = \frac{p(\tau > n + k)}{p(\tau > n)} \quad (1)$$

$p(\tau > m) = p(\text{первые } m \text{ неудач}) = q^m$

$$p(\tau > n + k) = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$$

□

Примечание. То, проработет ли девайс k часов после этого, не зависит от того сколько проработал до этого

Примечание. Также $p(\tau = n + k | \tau > n) = p(\tau = k)$

1.2 Испытание с несколькими исходами

Пусть при n испытаниях могут произойти m несовместных исходов

- p_i — вероятность i -го исхода при одном отдельном испытании

Теорема 1.3. Вероятность того, что при n испытаниях первый исход появится n_1 раз, второй n_2 раз, ..., m -й n_m раз. $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ Тогда

$$p(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Доказательство. $A_1 = \underbrace{11\dots 1}_{n_1} \underbrace{22\dots 2}_{n_2} \dots \underbrace{m\dots m}_{n_m}$

$$p(A_1) = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$$

Остальные благоприятные исходы отличаются лишь расположением i -х исходов по n местам, а вероятности будут те-же. Всего таких исходов будет:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n_m}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

— формула для перестановок с повторениями □

Задача 1. Два одинаковых по силе шахматиста играют матч из 6 партий. Вероятность ничьи при одной партии — 0.5. Найти вероятность того, что второй игрок две партии выиграл, а три партии свел в ничью

Решение. Исходы:

1. первый выиграл
2. второй выиграл
3. ничья

$$p_3 = \frac{1}{2}; p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}; n = 6$$

$$P(1, 2, 3) = \frac{6!}{1!2!3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{2^7}$$

1.3 Урновая схема

В урне N шаров. Из них K белых, а черных $N - K$. Из нее выбираем n шаров без учета порядка. k — число вынутых белых

Теорема 1.4 (Схема с возвратом). Вероятность вынуть белый шар не меняется.

Тогда

$$p = \frac{K}{N} \quad p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

— биномиальное распределение

Теорема 1.5 (Схема без возврата). Тогда

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

Определение.

$$k \rightarrow \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k \leq K$$

называется **гипергеометрическим** распределением вероятности

Лемма 1.

$$C_K^k \sim \frac{K^k}{k!}$$

, при $K \rightarrow \infty, K = \text{const}$

Доказательство.

$$C_K^k = \frac{K!}{k!(K-k)!} = \frac{K(K-1)\dots(K-k+1)}{K^k} \cdot \frac{K^k}{k!} = 1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{K}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{K}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{K}\right)}_{\downarrow 1} \cdot \frac{K^k}{k!} \sim \frac{K^k}{k!}$$

□

Теорема 1.6.

- $N \rightarrow \infty$
- $K \rightarrow \infty$
- $\frac{K}{N} \rightarrow p \in (0, 1)$
- n и $0 \leq k \leq K$ — фиксированны

Тогда

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P_{N,K}(n, k) &= \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{K^k}{k!} \cdot \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{N^n} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{K^k}{N^k} \cdot \frac{(N-K)^{n-k}}{N^{n-k}} = \\ &= C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

□

1.4 Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Схема: вероятность успеха при одном отдельном испытании зависит от числа испытаний n таким образом, чтобы $n \cdot p_n = \lambda$ (точнее $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$)

Появление очень редких событий в длинном потоке испытаний

Теорема 1.7 (Формула Пуассона). Пусть $n \rightarrow \infty, p_n \rightarrow 0$, так что $np_n \rightarrow \lambda > 0$

Тогда вероятность k успехов при n испытаниях $p(\nu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Доказательство. Положим $\lambda_n = np_n$

$$\begin{aligned} p(\nu_n = k) &= C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{\lambda_n^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right)^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

□

1.4.1 Оценка погрешности в формуле Пуассона

Теорема 1.8. Пусть ν_n – число успешных про k в схеме Бернулли с вероятностью p

$$\lambda = np \quad A \subset \{0, 1, 2, \dots, n\} \text{ — произвольное подмножество}$$

Тогда погрешность

$$\left| p(\nu_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \min(p, \lambda p) = \min(p, np^2) = \min\left(p, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

Примечание. Формулу Пуассона иногда называют формулой редких событий и применяем при малых p , $n \geq 100$

Задача 2. Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого элемента $\frac{1}{1000}$. Какова вероятность отказа больше двух элементов

Решение.

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

, где $\lambda = np$

- $n = 1000$
- $p = 0.001$
- $\lambda = np = 1$
- $k > 2$

$$\begin{aligned} p(\nu_n > 2) &= 1 - p(\nu_n \leq 2) = 1 - (p(0) + p(1) + p(2)) \approx 1 - \left(\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= 1 - 2.5e^{-1} \approx 0.0803 \end{aligned}$$

Погрешность $\varepsilon \leq \min(p, \lambda p) = 0.001$