Практика 10

Ilya Yaroshevskiy

13 апреля 2021 г.

Содержание

1 Правило трех σ

1.1 Равномерное распределение

$\xi \in U_{a,b}$

$$E\xi = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$
$$p(E\xi - 3\sigma < \xi < E\xi + 3\sigma = 1$$

1.2 Показательное распределение

$\xi \in E_\alpha$

$$p(E\xi - 3\sigma < \xi < E\xi + 3\sigma) = p\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{\alpha} < \xi < \frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha}\right) =$$
$$= p\left(-\frac{2}{\alpha} < \xi < \frac{4}{\alpha}\right) = p(0 < \xi < \frac{4}{\alpha}) = 1 - e^{-4} \approx 0.9817$$

2 Задачи

Задача 1.

- $E\xi = 2$
- $E\eta = -3$
- $D\xi = 1$
- $D\eta = 4$
- $\gamma = 3\xi - 5\eta$

Найти $E\gamma$, $D\gamma$, если ξ и η независимы

Решение.

$$E\gamma = 3E\xi - 5E\eta = 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 21$$
$$D\gamma = 3D\xi + 5D\eta = 3^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 4 = 109$$

Задача 2.

$$p_\xi = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}\sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

- $\eta = -2\xi + \pi$

Найти p_η

Решение. $\xi \in [0;\pi]$, тогда $\eta \in [-\pi, \pi]$

$$p_\eta = \frac{1}{|a|} \cdot f_\xi \left(\frac{x-b}{a} \right)$$

$$f_\eta = \begin{cases} 0 & x < -\pi \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \left(\frac{x-\pi}{-2} \right) = \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} & -\pi \le x \le pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

Задача 3.

- $\xi \in N_{0,1}$
- $\eta = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}}$

Найти f_η

Решение. $\eta \in (0, +\infty)$

$$f_\eta = \frac{1}{|h'(x)|} \cdot f_\xi(h(x))$$

$$g(x) = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \implies x = -\sqrt{2} \ln g(x) \implies h(x) = -\sqrt{2} \ln x$$

$$f_\eta = \frac{1}{\left| \frac{-\sqrt{2}}{x} \right|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-\sqrt{2}\ln x)^2}{2}} = \frac{|x|}{2\sqrt{\pi}} \cdot x^{\ln x}$$

Теорема 2.1 (Смирнова)**.** Пусть функция не является монотонной, тогда ‘обратная‘ функция распадается на несколько ветвей.

$$f_\eta(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|h_i'(x)|} \cdot f_\xi(h_i(x))$$

Пример.

$$f_\xi = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{4}{3x^2} & 1 \le x \le 4 \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

- $\eta = |\xi - 2|$

Решение. $\xi \in [1, 4]$, $\eta \in [0, 2]$

- $h_1(\eta) = \eta + 2$
- $h_2(\eta) = -\eta + 2$

$$f_\eta = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(2-x)^2} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} & 1 < x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$