Лекция 1

Ilya Yaroshevskiy

14 января 2021 г.

Содержание

1 Мультииндекс

Обозначение.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m = \sum_{c_1=1}^{m} \sum_{c_2=1}^{m} \dots \sum_{c_n=1}^{m} a_{c_1} a_{c_2} \dots a_{c_n} \tag{1}$$

$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$ — мультииндекс

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \tag{2}$$

$$x \in \mathbb{R}^m \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \tag{3}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! \tag{4}$$

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} \tag{5}$$

$$(1) = \sum_{\alpha : |\alpha| = r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha \tag{6}$$

2 Дифференцирование

Лемма 1. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $f \in C^r(E)$ - *r раз дифференцируема на* E, $a \in E$
$h \in \mathbb{R}^m$ $\forall t \in [-1, 1]$ $a + th \in E$
$\varphi(t) := f(a + th)$
Тогда при $1 \le k \le r$

$$\varphi^{(r)}(0) = \sum_{j : |j| = r} \frac{r!}{j!} h^j \frac{\partial^r f}{\partial x^j}(a) \tag{7}$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \dots \sum_{i_r=1}^{m} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a + th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_3} \tag{8}$$

Пример. $\varphi'(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)}_{\text{Производная в точке } a+th} \cdot h_i$

$\varphi'' = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a+th) \cdot h_i h_{i_2}$

$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}h_m^2 + 2(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}h_1h_3 + \dots)$

3 Теорема (формула Тейлора)

Теорема 3.1. $f \in C^{r+1}(E)$ $E \subset \mathbb{R}^m,\ f: E \to \mathbb{R},\ a \in E$
$x \in B(a,R) \subset E$
Тогда $\exists \theta \in (0,1)$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \le |\alpha| \le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r}(\sum_{\substack{(\alpha_1\dots\alpha_m):\alpha_i \ge 0 \\ \sum \alpha_1 = k}} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_m!}\frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\dots(\partial x_m)^{\alpha_m}}(x_1-a_1)^{\alpha_1}\dots(x_m-a_m)^{\alpha_m}) + \text{аналогичный остаток}$$

$$f(a+h) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\dots}\frac{1}{\alpha_1!\dots\alpha_m!}\frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\dots(\partial x_m)^{\alpha_m}}(a)h_1^{\alpha_1}\dots h_m^{\alpha_m} + \text{остаток}$$

Доказательство. $\varphi(t) = f(a+th)$, где $h = x-a$, $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(x)$
Из леммы

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1} \tag{9}$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}\underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=k} k!\frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}h^\alpha}_{\text{однородный многочлен степени } k} + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1}\frac{f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))}{\alpha!}h^\alpha \tag{10}$$

$$f(x) = \sum \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}h^\alpha + o(|h|^r) \tag{11}$$

Где однородный многочлен степени k это k -ый дифференциал функции f в точке a, обозначается $d^k f(a,h)$

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{r}\frac{d^k f(a,h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(a+\theta h, h)$

$\square$

Примечание. $d^2 f = f''_{x_1x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_2x_2}(a)h_2^2 + \dots + f''_{x_mx_m}(a)h_m^2 + 2\sum_{i<j} f''_{x_ix_j}(a)h_ih_j$ $d^{k+1}f = d(d^k f)$
$df = f'_{x_1}h_1 + f'_{x_2}h_2 + \dots + f'_{x_m}h_m$
$d^2 f = (f''_{x_1x_1}h_1 + f''_{x_1x_2}h_2 + \dots + f''_{x_1x_m}h_m)h_1 + (f''_{x_2x_1}h_1 + f''_{x_2x_2}h_2 + \dots + f''_{x_2x_m}h_m)h_2 + \dots$

4 Линейные отображения

4.1 Определение

Определение. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - множество линейных отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - это линейное простарнство
$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ $\quad \|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m: |x|=1} |Ax|$

Примечание.
1. $\sup \leftrightarrow \max$, т.к. сфера компактна
2. $A = (a_{ij})$ $\quad \|A\| \le \sqrt{\sum a_{ij}^2}$ - по Лемме об оценке нормы линейного отображения

3. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \le \|A\| \cdot |x|$ $x = 0$ - тривиально
   $x \neq 0 \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \quad |Ax| = |A(|x| \cdot \tilde{x})| = \big||x| \cdot A\tilde{x}\big| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \le \|A\| \cdot |x|$

4. Если $\exists C > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R}^m |Ax| \le C \cdot |x|$, то $\|A\| \le C$

Пример. 1. $m = l = 1$
   A - линейный оператор - задается числом a $x \mapsto ax$ $\|A\| = |a|$

2. $m = 1$ $l -$ любое
   $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix}$ $\|A\| = |a|$

3. $m -$ любое $l = 1$
   $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $A \leftrightarrow \vec{a}$
   $x \mapsto (\vec{a}, x)$ $\|A\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1} |\langle \vec{a}, x \rangle| = |\vec{a}|$

4. $m -$ любое $l -$ любое
   $\|A\| = \sup\limits_{x : |x| = 1} |Ax| =$:(

4.2 Лемма

Лемма 2. X, Y *- линейные нормированные пространства* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

1. *A - ограниченый оператор, т.е. $\|A\|$ - конечное*
2. *A - непрерывен в нуле*
3. *A - непрерывен всюду в X*
4. *A - равномерно непрерывен*
   $f : X \to Y$ - метрические пространства, равномерно непрерывно
   $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x, x_0 : \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
   $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x_0, x_1 : \; |x_1 - x_0| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$

Доказательство.

$(4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2)$ очевидно

$(2 \Rightarrow 1)$ непрерывность в нуле:
   для $\varepsilon = 1$ $\exists \delta : \forall x : |x - 0| \le \delta \quad |Ax - A \cdot 0| < 1$
   при $|x| = 1 \quad |Ax| = |A\frac{1}{\delta}(\delta \cdot x)| = \frac{1}{\delta} \cdot |A \cdot \delta x| \le \frac{1}{\delta}$

$(1 \Rightarrow 4)$ $|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \le \|A\| \cdot |x_1 - x_0|$
   $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 \; |x_1 - x_0| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_0| \le \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$

$\square$

4.3 Теорема о пространстве линейных отображений

Теорема 4.1.

1. Отображение $A \to \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ является нормой, т.е выполнятеся
   (a) $\|A\| \ge 0$, если $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{m,n}$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
   (c) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \; B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad \|AB\| \le \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

1. (a) $\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$, очев
   (b) очев
   (c) $|(A+B) \cdot x| = |Ax+Bx| \leq |Ax|+|Bx| \leq (\|A\|+\|B\|) \cdot |x|$ по замечанию 3 $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$
2. $|BAx| = |B \cdot (Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|$ по замечанию 3

$\square$

Примечание. в $\dim(X, Y)$
$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |Ax| = \sup\limits_{|x|<1} |Ax| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall x \ |Ax| \leq C \cdot |x|\}$