

Лекции по Дискретной математике 4 семестр

Пуга Yaroshevskiy

14 апреля 2021 г.

Оглавление

1	10 февраля	3
1.1	Производящие функции	3
2	17 февраля	5
2.1	Производящие функции	5
2.1.1	Рекуррентные соотношения	5
2.1.2	Рекуррента в рациональную ПФ	6
3	24 февраля	7
3.1	Асимптотическое поведение линейных рекуррент	7
3.1.1	Квазимногчлен в рациональную ПФ	7
3.1.2	Рациональная ПФ в квазимногчлен	8
3.1.3	Оценка асимптотического поведения	8
4	3 марта	10
4.1	Производящие функции для объектов	10
5	10 марта	12
5.1	Производящие функции для регулярных языков	12
5.2	Автомат КМП и автокор. многочлен	14
5.2.1	Пентагональная формула Эйлера	14
6	17 марта	16
6.1	Помеченные КО и экспоненциальные производящие функции	16
6.1.1	Помеченные объекты	17
6.1.2	Операции	17
6.1.3	Обобщение	19
7	24 марта	20
7.1	Производящая функция от нескольких переменных	21
7.1.1	Числа Стирлинга I рода	21
7.1.2	Числа Стирлинга II рода	22
7.1.3	Средняя стоимость	22

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
8 14 апреля	24
8.1 Теория вычислимости	24

Лекция 1

10 февраля

1.1 Производящие функции

Последовательность a_0, a_1, a_2, \dots . Запишем в виде ряда

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

, где $A(t)$ — производящая функция

Свойство 1.

- $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$
- $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$

$$A(t) + B(t) = C(t)$$

$$c_n = a_n + b_n$$

$$C(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

Свойство 2.

- $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$
- $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$

$$A(t) \cdot B(t) = C(t)$$

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 t + b_2 t^2) = \\ & = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) t^2 + \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$C(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

Свойство 3.

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t + \dots$
- $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t + \dots, b_0 \neq 0$

$$\frac{A(t)}{B(t)} = C(t)$$

$$C(t) \cdot B(t) = A(t)$$

$$c_n = a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k}$$

Если $b_0 = 1$ и $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, то $c_i \in \mathbb{Z}$

Свойство 4.

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t + \dots$

$$A'(t) = a_1 + 2 \cdot a_2t + 3 \cdot a_3t^2 + \dots$$

$$a'_n = n \cdot a_n t^{n-1}$$

Свойство 5.

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t + \dots$

$$\int A(t) = a_0t + \frac{1}{2}a_1t^2 + \frac{1}{3}a_2t^3 + \dots$$

$$a'_n = \frac{1}{n+1} \cdot a_n t^{n+1}$$

Свойство 6.

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t + \dots$
- $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t + \dots, b_0 = 0$

$$C(t) = A(B(t))$$

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_i \sum_{n=k_1+k_2+\dots+k_i} \prod_{j=1}^i b_{k_j}$$

Лекция 2

17 февраля

2.1 Производящие функции

Определение. Полином — степенной ряд, у которого начиная с некоторого места n все коэффициенты 0.

Обозначение. $\deg p = n$

Определение. $\frac{P(t)}{Q(t)}$ — дробно рациональная функция

2.1.1 Рекуррентные соотношения

Определение.

$$m : a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$$

$$k \leq m, n \geq m$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + a_k a_{n-k}$$

, где c_1, \dots, c_k — коэффициенты рекуррентности

Пример.

- $m = 2, k = 2$
- $f_0 = f_1 = 1$
- $c_1 = c_2 = 1$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ — числа Фибоначи

Определение. Квазиполином

$$f(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n) r_i^n$$

, где p_i — полином, r_i — числа

Теорема 2.1.1. • $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

Тогда эквивалентны:

1. $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, P, Q — полиномы, $q_0 \neq 0$
2. для $n \geq m$ a_n задается линейным рекуррентным соотношением: $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$, причем:
 - $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$
 - $\deg P \leq m - 1$
3. a_n — квазиполином

$$a_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) r_i^n \quad (2.1)$$

причем:

- r_i — обратные величины корням $Q(t)$
- k — число различных его корней
- $\deg p_i = (\text{кратность корня}(r_i^{-1})) - 1$
(2.1 кроме $\leq m$ первых членов)

2.1.2 Рекуррента в рациональную ПФ

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

$$m = \deg P + 1 \quad k = \deg Q$$

$$p_i = a_i - \sum_{j=1}^{\min(k,i)} a_{i-j} c_j$$

$$a_n = \frac{p_n - \sum_{i=1}^n a_{n-i} q_i}{q_0}$$

$$c_i = -q_i$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{\min(n,k)} c_i a_{n-i} [+p \text{ если } n < m]$$

Лекция 3

24 февраля

3.1 Асимптотическое поведение линейных рекуррент

3.1.1 Квазимногчлен в рациональную ПФ

Лемма 1.

- $a_n = n^k r^n$
- $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$

Тогда $Q(t) = (1 - rt)^{k+1}$

$$A(t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{P'_k(t)(1 - rt) + r(k+1)P_k(t) - \sum_{i=0}^k r \binom{k+1}{i} P_i(t)(1 - rt)^{k-i+1}}{(1 - rt)^{k+2}}$$

Доказательство.

Доделать

□

Лемма 2.

- $a_n = p(n)r^n$
- $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$

Тогда $Q(t) = (1 - rt)^{\deg p + 1}$

Следствие 3.1.0.1. Квазимногчлен \Rightarrow Рациональная ПФ:

Корни $Q(t)$: $\frac{1}{r_i}$ кратности $\deg p_i + 1$

3.1.2 Рациональная ПФ в квазимногочлен

- $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$

$$Q(t) = \prod_{i=1}^s (1 - r_i t)^{f_i}$$

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \sum_{i=1}^s \frac{P_i(t)}{(1 - r_i t)^{f_i}}$$

Лемма 3.

$$A(t) = \frac{P(t)}{(1 - rt)^{k+1}}$$

Тогда

$$a_n = p(n)r^n$$

, p — полином, $\deg p = k$

$$A(t) = P(t)U(t)$$

$$U(t) = (1 + rt + r^2 t^2 + \dots)^{k+1}$$

$$a_n = \sum_{i=0}^n p_i u_{n-i}$$

Следствие 3.1.0.2.

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n} r^n = \binom{n+1+k-1}{k} r^n = \binom{n+k}{k} r^n = \\ &= \frac{1}{k!} (n+k)(n+k-1) \dots (n+1) r^n = p_k(n) r^n \\ \sum_{i=0}^n p_i u_i &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{p_{n-i}(n)}{r^i} \right) r^n \end{aligned}$$

3.1.3 Оценка асимптотического поведения

	r_1	f_1
	r_2	f_2
Обратные корни:	\vdots	\vdots
	r_s	f_s

Свойство 1.

- $\exists r_i : |r_i| = \max$
- $\forall j \neq i : |r_j| < |r_i|$

 r_i вещественные $a_n \sim n^{f_i-1} \cdot r_i^n$

Свойство 2. Несколько r_i имеют $\max |r_i|$

1. $r_i \in \mathbb{R}$, $r_i = \pm r$. Если разной кратности у r_i, r_j , соответственно $f_i > f_j$
 Тогда $a_n \sim n^{f_i-1} r_i^n (+n^{f_i-1} r_j^n)$
 Если одинаковой кратности $f_i = f_j$
 Тогда $a_n \sim c_1 n^{f_i-1} r^n + c_2 n^{f_j-1} (-r)^n$

Свойство 3. r_1, r_2, \dots, r_l — обратные корни максимальной степени $\max |r_i|$ и $\max f_i$

$$r_i = z_i e^{i\phi_i}$$

$$a_n \sim n^{f_i} z^n \sum_{j=1}^l e^{i\phi_j}$$

Если $\phi_j = \frac{2\pi a_j}{b_j}$, n делится на $\text{LCM}(b_j)$ классов

Пример. Числа каталана:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$$

$$C(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

$$C(t)^2 = c_0^2 + (c_0 c_1 + c_1 c_0) t + \dots$$

$$C(t)^2 \cdot t + 1 = C(t)$$

$$t \cdot C(t)^2 - C(t) + 1 = 0$$

$$C(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$$

Примечание. Рассмотрим $(1-t)^\alpha$:

$$(1-t)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} t^i = P_\alpha(t)$$

$$\binom{\alpha}{t} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot (\alpha-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot i}$$

$$P_{\frac{1}{2}}(-4t) = 1 - 2t - 2t^2 - 4t^3 - 10t^4$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{16}$$

Лекция 4

3 марта

4.1 Производящие функции для объектов

- Оюъединение

$$A, B \quad A \cap B = \emptyset \quad C = A \cup B$$

$$A(t) \quad B(t)$$

$$C(t) = A(t) + B(t)$$

$$c_n = a_n + b_n$$

- Пара

$$C = A \times B \quad \text{Pair}(A, B)$$

$$C(t) = A(t) \cdot B(t)$$

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

- Последовательности

$$C = \text{Seq } A = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots \quad a_0 = 0$$

$$C(t) = 1 + A(t) + A(t) \cdot A(t) + A(t)^3 + \dots$$

$$C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$

- Множества

ε вес 0

$$\text{Set } A = \prod_{a \in A} (\varepsilon \cup a)$$

$$C(t) = \prod_{a \in A} (1 + t^{\omega(a)}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + t^k)^{a_k}$$

Пример. Set $\{\square, \boxplus\}$ $a_1 = 1, a_2 = 1$

$$C(t) = (1 + t)(1 + t^2) = t^3 + t^2 + t + 1$$

- Мультимножества

$$\text{MSet } A = \bigtimes_{a \in A} (\varepsilon \cup a \cup a^2 \cup \dots) = \prod_{a \in A} \text{Seq}\{a\}$$

$$C(t) = \prod_{a \in A} \frac{1}{1 - t^{\omega a}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^k} \right)^{a_k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)^{-a_k}$$

Пример. $\text{MSet}\{\square, \boxminus\}$

$$C(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t^2)(1+t)}$$

$$c_n = dn + e + f \cdot (-1)^n$$

Пример. $\text{Seq}_{=k}(A) = A^k$ — ровно 3 элемента

$$\text{Seq}_{\geq k}(A) = A^k \times \text{Seq}(A) \frac{A(t)^k}{1-A(t)}$$

$$\text{Seq}_{\leq k}(A) = \frac{1}{1-A(t)} - \frac{A(t)^{k+1}}{1-A(t)} = \frac{1-A(t)^{k+1}}{1-A(t)}$$

Лекция 5

10 марта

5.1 Производящие функции для регулярных языков

L — регулярный язык

$$|L \cap \Sigma^n| = a_n$$

$$L(t) = a_0 + a_1 t + \dots$$

Примечание. L — регулярная спецификация
 ψ — регулярное выражение:

1. $L(\psi) = L$
2. $\forall x \in \mathbb{L} \exists!$ способ x удовлетворяющий ψ

Лемма 4. Σ — конечный алфавит, $L \subset \Sigma^*$
 L — регулярная спецификация $\Leftrightarrow L$ получается из Σ :

1. Дизъюнктное объединение $+$
2. Прямое произведение \times
3. Последовательность Seq

Доказательство. Общее рассуждение: по индукции рассмотрим для каждой операции во что она перейдет, надо показать что единственность вывода сохраняется **Не работает** \square

Пример.

$$ab^*|a^*b$$

$$a \times Seq\ b|Seq\ a \times b$$

объединение дизъюнктное? \Rightarrow не регулярная спецификация

Пример.

$$(ab^*)^*$$

$$\text{Seq}(a \times \text{Seq } b)$$

Теорема 5.1.1. Если у L есть регулярная спецификация, то L — дробно рациональная

Теорема 5.1.2 (Производящая функция регулярного языка). L — регулярный язык над Σ , ДКА A :

- Состояния Q , $|Q| = n$
- $s \in Q$ — стартовое состояние
- $T \subset Q$ — терминальные

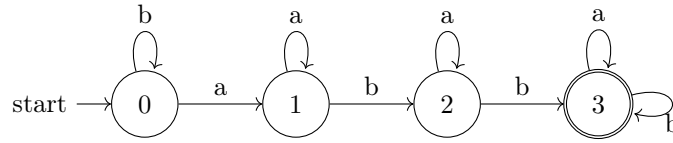
$$u = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_s, 0, \dots, 0)$$

$$v = (0, \underbrace{1}_{\in T}, 0, \underbrace{1}_{\in T}, \dots, \underbrace{1}_{\in T}, 0)$$

$$D = (d_{ij})^T, \quad d_{ij} = |\{c | i \xrightarrow{c} j\}|$$

$$L(t) = \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v}$$

Пример. Язык из слов, которые содержат abb как подстроку



$$\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)}$$

5.2 Автомат КМП и автокор. многочлен

Конструкция Гуибаса-Одлызко

$$p = \boxed{p_1, p_2, \dots, p_k}$$

$$c_i = [p[i+1 \dots k] = p[1 \dots k-i]]$$

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{k-1} t^{k-1}$$

Пример. $p = \text{aabbaa}$

$$c = (1, 0, 0, 0, 1, 1)$$

$$c(t) = 1 + t^4 + t^5$$

Теорема 5.2.1.

- $\Sigma, |\Sigma| = m$

S_n — количество слов длины n , не содержащих p

$$S(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \dots$$

$$S(t) = \frac{c(t)}{t^k + (1 - mt)c(t)}$$

Пример. $p = \text{abb}$

$$c(t) = 1$$

$$\frac{1}{t^3 + (1 - 2t) \cdot 1} = \frac{1}{1 - 2t + t^3}$$

5.2.1 Пентагональная формула Эйлера

$$p_0 \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n \ \dots$$

p_n — количество разбиений n на слагаемые из \mathbb{N} . Порядок не важен

- $U = \{0\}, u_1 = 1, U(t) = t$
- $N = \text{Seq}^+ U = \text{положительно целые числа}$
- $P = \text{MSet } N$

$$P(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t^k}$$

$$Q(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)$$

$$R(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + t^k) \quad [t^n]R \rightarrow r_n$$

r_n — количество разбиений на различные слагаемые

$$[t^n]Q = \sum_{\substack{\text{разбиение } n \text{ на} \\ \text{различные слагаемые}}} (-1)^{\text{число слагаемых}}$$

$$q_n = e_n - o_n$$

e_n — число разбиений на четное число различных слагаемых, o_n — число разбиений на нечетное число различных слагаемых,

Теорема 5.2.2.

$$Q(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (t^{\frac{3k^2-k}{2}} + t^{\frac{3k^2+k}{2}})$$

Лемма 5.

$$n \neq \frac{ek^2 \pm k}{2}, \text{ то } e_n = o_n$$

$$n = \frac{ek^2 \pm k}{2}, \text{ то } e_n = o_n + (-1)^k$$

Лекция 6

17 марта

6.1 Помеченные КО и экспоненциальные производящие функции

$$a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ \dots \quad A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

Определение. Экспоненциальная производящая функция:

$$a(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot t + \frac{a_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

Обозначение. Мы будем обозначать ЭПФ так-же большой буквой

Пример. 1, 1, 1, 1, , 1, 1, 1, 1, 1

ОПФ $\frac{1}{1-t}$

$$\text{ЭПФ} \quad 1 + 1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot t^n = e^t = \exp(t)$$

Пример. 1, 1, 2, 6, 24, ..., $n!$, ... $a_n = n!$

$$\text{ОПФ} \quad 1 + t + 2 \cdot t^2 + 6 \cdot t^3 + \dots + n! \cdot t^n + \dots$$

$$\text{ЭПФ} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n!} \cdot t^n = \frac{1}{1-t}$$

$$A(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot t + \frac{a_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

$$B(t) = \frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!} \cdot t + \frac{b_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{b_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

Свойство 4.

$$C(t) = A(t) \pm B(t) \quad c_n = a_n \pm b_n$$

Свойство 5.

$$C(t) = a(t) \cdot B(t)$$

$$\frac{C_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

Свойство 6.

$$C(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k} + b_0 c_n$$

$$c_n = \frac{a - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k}}{b_0}$$

Далее все производящие функции — экспоненциальные, а объекты помечены

6.1.1 Помеченные объекты

Пример. Перестановки. $P_n = n!$ — количество перестановок из n элементов

Пример. Пустые графы. $E_n = 1$ — количество графов с n вершинами
ЭПФ: $\exp(t)$

Пример. Циклы. $C_n = (n-1)!$ — количество циклов из n вершин. Направление обхода фиксировано.

ЭПФ: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}$

6.1.2 Операции

1. Дизъюнктное объединение (сумма)

- A
- B
- $A \cap B = \emptyset$
- $C = A \cup B$

$$c_n = a_n + b_n \quad C(t) = A(t) + B(t)$$

2. Пара (произведение)

- A
- B

- $C = A \times B$

$$C = \{ \langle \underbrace{a}_{k \text{ атомов}}, \underbrace{b}_{n-k \text{ атомов}} \rangle \}$$

Получим последовательность $c_1 c_2 \dots c_n$. Перенумеруем элементы:

Первые k в $d_1 d_2 \dots d_k$, где $d_i = |\{c_j | 1 \leq j \leq k, c_k \leq c_i\}|$.

А остальные $c_{k+1} \dots c_n$ в $e_1 \dots e_{n-k}$, где $e_i = |\{c_j | k+1 \leq j \leq n, c_j \leq c_{i+k}\}|$.

Пусть $d_i = a_i$, а $e_i = b_i$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \quad C(t) = A(t) \cdot B(t)$$

Пример. Пары перестановок. $C(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Тогда $c_n = (n+1)n!$

3. Последовательность

$$C = \text{Seq } A = \emptyset + A \times \text{Seq } A$$

$$C(t) = 1 + A(t) \cdot C(t)$$

$$C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$

Пример.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$
- $\text{Seq } U = P$

$$P(t) = \frac{1}{1-t}$$

4. Множества (Set)

- $\text{Set}_k A$ — множества, содержащие k объектов

$$B_k = \text{Seq}_k A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k \quad B_k(t) = A(t)^k$$

$$\text{Set}_k A = \text{Seq}_k A / \sim$$

$$[x_1 x_2 \dots x_k] \sim [y_1 y_2 \dots y_k]. \exists \text{ перестановка } \pi : x_i = y_{\pi[i]}$$

$$C_k(t) = \frac{1}{k!} \quad B_k(t) = \frac{A(t)^k}{k!}$$

$$\text{Set } A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Set}_k A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(t)^k}{k!} = e^{A(t)}$$

Пример.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$

$$\text{Set } U = E \quad E(t) = e^t$$

, где E — пустые графы

Пример. Циклы.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$
- $B = \text{Set Cyc } U$

$$B(t) = e^{C(t)} = e^{\ln \frac{1}{1-t}} = \frac{1}{1-t}$$

Набор помеченных циклов является престановкой

5. Циклы

- $\text{Cyc}_k A$ — количество циклов длины k

$$C = \text{Cyc}_k A = \text{Seq}_k A / \sim$$

, где классы эквивалентности с точностью до циклических сдвигов.

$$[x_1 \dots x_k] \sim [y_1 \dots y_k]. \exists i : x_j = y_{(i+j) \bmod k+1}$$

$$\text{Cyc } U = \ln \frac{1}{1-t}$$

$$C_k(t) = \frac{1}{k} A(t)^k$$

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A(t)^k = \ln \frac{1}{1-A(t)}$$

$$\text{Set Cyc } U = P$$

$$\text{Set Cyc } A \simeq \text{Seq } A$$

6.1.3 Обобщение

Теорема 6.1.1 (о подстановке).

- A — помеченные КО — $A(t)$
- B — помеченные КО — $B(t)$

$C = A[B]$ — вместо каждого атома A подставляем КО B , перенумеруем получившиеся атомы произвольным образом

$$C(t) = A(B(t))$$

Пример. $A \times A$ — пара атомов. Их две $B(t) = t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2$. Подставляем $B(A(t)) = A(t)^2$

Лекция 7

24 марта

Рассмотрим деревья:

$$T = t \times Seq T$$

, где t — корень

$$A(t) = t \cdot \phi(A(t))$$

$$\phi(s) = \frac{1}{1-s}$$

Решить это уравнение в общем виде можно с помощью формулы Лагранжа

Теорема 7.0.1 (формула обращения Лагранжа).

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}] (\phi(s))^n$$

, где $[s^n]A(s)$ — коэффициент при s^n в $A(s)$

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Пример. Применим ее для деревьев

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}] \left(\frac{1}{1-s} \right)^n$$

$$\left(\frac{1}{1-s} \right)^n = (1 + s + s^2 + s^3 + \dots + s^k + \dots)^n$$

$$(1-s)^{-n} = 1 - \binom{-n}{1}s + \binom{-n}{2}s^2 - \binom{-n}{3}s^3$$

$$\binom{-n}{n-1} = \frac{-n \cdot (-n-1) \cdot (-n-2) \cdot \dots \cdot (-n-(n-1)+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}$$

$$\frac{1}{n}(-1)^{n-1} \binom{-n}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \binom{2n-2}{n-1}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\phi(s) &= e^s \\ \frac{a_n}{n!} &= \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}]e^{ns} \\ e^{ns} &= 1 + \frac{1}{1!}(ns) + \frac{1}{2!}(ns)^2 + \frac{1}{3!}(ns)^3 + \dots \\ [s^{n-1}]e^{ns} &= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

7.1 Производящая функция от нескольких переменных

$\binom{n}{k}$ образуют таблицу:

$n \setminus k$					
	1				
	1	1			
	1	2	1		
	1	3	3	1	
	1	4	6	4	1

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} t^n$$

$$B_n(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n}{l} t^l$$

$$C(u, z) = \sum_{n, k} \binom{n}{k} z^n u^k = \frac{1}{1 - z - uz}$$

Посмотрим на $C(u, z)$ так: n — вес, k — стоимость. Будем считать, что z — не берем объект, uz — берем объект

$$\text{Seq}\{z, uz\} = [], [z], [uz], [z, z], [z, uz], [uz, z], [uz, uz], \dots$$

$$A(u, z) = z + uz$$

7.1.1 Числа Стирлинга I рода

Исправить

Помеченные перестановки, $\text{Set Cyc } Z$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Set}_{=k} \text{Cyc } Z$$

$$\text{Set Cyc } Z = e^{\ln \frac{1}{1-Z}} = \frac{1}{1-Z}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Set}_{=k} (u \times \text{Cyc } Z) \mapsto \sum_{n,k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n!} z^n u^k$$

$$\text{Set}_{=k}(A) =$$

$$k! = A(Z)^k \frac{1}{k!}$$

$$u \times \text{Cyc } Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(u \ln \left(\frac{1}{1-Z}\right)\right)^k}{k!} = e^{u \ln \frac{1}{1-Z}} = (1-Z)^{-u}$$

$$(1-Z)^{-u} = \sum_{n,k} \frac{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}}{n!} Z^n u^k$$

7.1.2 Числа Стирлинга II рода

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \quad \text{Set Set}_{>0} Z$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Set}_{=k}(u \times \text{Set}_{>0} Z)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u(e^Z - 1))^k}{k!} = e^{ue^Z - u} = \sum_{n,k} \frac{\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}}{n!} z^n u^k$$

7.1.3 Средняя стоимость

- $A \quad a_{n,k} = [z^n u^k] A(u, z)$ — количество объектов веса n стоимости k

$$w_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k a_{n,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}} = \frac{[z^n] \left(\frac{\partial}{\partial u} A(u, z) \right) \Big|_{u=1}}{[z^n] A(1, z)}$$

1. Разбиение на слагаемые, порядок важен Аналогично рассотовке перегорожек, $\text{Seq Seq}_{>0} Z$

$$\text{Seq } (u \times \text{Seq}_{>0} Z)$$

$$\frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$$

$$A(u, z) = \frac{1}{1 - \frac{uz}{1-z}} = \frac{1-z}{1-z-uz}$$

$$\frac{\partial A(u, z)}{\partial u} \Big|_{u=1} = \frac{z(1-z)}{(1-z-uz)^2} \Big|_{u=1} = \frac{z(1-z)}{(1-2z)^2}$$

Числитель

$$[z^n] \frac{z(1-z)}{(1-2z)^2} = \frac{2^n(n+1)}{4}$$

Знаменатель

$$[z^n] \frac{1-z}{1-2z} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

Среднее число слагаемых:

$$\frac{2^n(n+1)}{2^{n-1} \cdot 4} = \frac{n+1}{2}$$

2. Среднее число циклов в перестановке

$$A(u, z) = (1-z)^{-u}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} A(u, z) = \frac{\partial}{\partial u} e^{u \ln \frac{1}{1-z}} = \ln \frac{1}{1-z} \cdot e^{u \ln \frac{1}{1-z}}$$

Подставляем $u = 1$:**Числитель**

$$[z^n] \frac{\ln \left(\frac{1}{1-z} \right)}{1-z} = B(z)$$

Знаменатель

$$(1-z)^{-u} u = 1 = \frac{1}{1-z}$$

$$[z^n] \frac{1}{1-z} = 1$$

$$\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots + \frac{1}{k}z^k + \dots \right) \cdot (1 + z + z^2 + \dots)$$

$$[z^n] B(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \sim \log n$$

Лекция 8

14 апреля

8.1 Теория вычислимости

Σ — алфавит, $\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$. $L \subset \Sigma^*$ — формальный язык.

Определение. L — разрешимый (рекурсивный), если \exists программа P , такая что:

- $x \in L \implies P(x) = 1$
- $x \notin L \implies P(x) = 0$

Примечание. Раньше называли рекурсивным, так как использовали рекурсивные функции. Это определение появилось до языков программирования

Примечание. Множество разрешимых языков счетно

```
1 fn p(x: Word) -> Res {  
2     loop { }  
3     return 1;  
4 }
```

Примечание. Любой конечный язык является разрешимым

```
1 fn p(x: Word) -> Res {  
2     if x == x_1 { // x_1 ∈ L  
3         return 1;  
4     }  
5     if x == x_2 { // x_2 ∈ L  
6         return 1;  
7     }  
8     // ...  
9 }
```

Определение. L — полуразрешимый (перечислимый, рекурсивно перечислимый), если $\exists p$, такая что:

1. $x \in L \implies p(x) = 1$
2. $x \notin L \implies p(x) \neq 1$

Примечание. Множество полуразрешимых языков счетно

Примечание. Разрешимый \implies Полуразрешимый

Примечание. Σ^* , \mathbb{N}^+ , $Prog$ — будут для нас эквивалентными понятиями, когда будем говорить про формальный язык.

- $\Sigma^* \leftrightarrow Prog$ — те строки, которые не являются программами, будем считать программами, которые ‘зависают’ на любом входе
- $\Sigma^* \leftrightarrow \mathbb{N}^+$ — занумеруем строки в градуированном лексикографическом порядке

$\varepsilon, '0', '1', '00', '01', '10', '11', '000', '001'$

Определение. Арифметические операции, **if**, **for**, **while**, вызов функций. p — программа, x — слово — запустить программу p на слове x , запустить программу p на слове x с ограничением на время $TL = t$, и ограничением на память $ML = m$

Определение. L — перечислимый, если $\exists p$ которая на пустом входе выводит любое слово из языка хотя бы один раз. $\forall x \in L \exists t(x) \quad P|_{TL=t}$ выводит x

Пример.

```

1 fn zeroes() {
2   for i in [0..] {
3     let s = '0' * i;
4     println!("{}", s)
5   }
6 }
```

Теорема 8.1.1. L — перечислимый $\Leftrightarrow L$ — полуразрешимый

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть `listL()` — перечисляет L

```

1 fn inL(x: Word) -> Res {
2   async { listL(); }
3   if x.is_printed() {
4     return 1;
5   }
```

```

5     }
6     return 0;
7 }

```

(\Leftarrow) `inL()` — полурешимель L . Если напишем `listL()`, то он зависнет. Введем таймер.

```

1 fn listL() -> Res {
2     for t in [0..] {
3         for x in sigma[0..t] {
4             if inL(x).await(t) {
5                 println!("{}", x)
6             }
7         }
8     }
9 }

```

□

Примечание. Кодировать пару $\langle x, y \rangle$ можем

Определение. Универсальный язык:

$$U = \{ \langle p, x \rangle \mid \text{программа } p(x) = 1 \}$$

Свойство 1. U — полурешим — Тьюринг полный

Теорема 8.1.2. U — не разрешим

Доказательство. Допустим существует программа `rust#inU((p, x): (Word, Word))`, которая разрешает U

```

1 fn q(x: Word) -> Res {
2     if inU((x, x)) {
3         return 0;
4     } else {
5         return 1;
6     }
7 }

```

`q` никогда не зависит. Вызовем `q(q)`

- $\text{inU}(\langle q, q \rangle) = 1$
 - $q(q) = 0$
 - $\langle q, q \rangle \in U \implies q(q) = 1$
- $\text{inU}(\langle q, q \rangle) = 0$

- $\langle q, q \rangle \notin U \implies q(q) \neq 1$
- $q(q) = 1$

Получается, что q не возвращает ни 0 ни 1. Противоречие □

Свойство 1. A, B разрешимы, $A \cup B$ — разрешим

Свойство 2. A, B разрешимы, $A \cap B$ — разрешим

Свойство 3. A — разрешим, $\bar{A} = \Sigma^* \setminus A$ — разрешим

Свойство 4. A, B полурешимы, $A \cap B$ — полурешим

Свойство 5. A, B полурешимы, $A \cup B$ — полурешим

Доказательство.

```

1 fn p() -> Res {
2   for i in [0..] {
3     if inA.await(t) {
4       return 1;
5     }
6     if inB.await(t) {
7       return 1;
8     }
9   }
10 }
```

□

Теорема 8.1.3 (Поста). L и \bar{L} оба полурешимы $\implies L$ — разрешим

Доказательство.

```

1 fn inL(x: Word) -> Res {
2   for t in [0..] {
3     if inL(x).await(t) {
4       return 1;
5     }
6     if inCL(x).await(t) { // CL =  $\bar{L}$ 
7       return 0;
8     }
9   }
10 }
```

□

Теорема 8.1.4. Не существует языка программирования, который поддерживает все три свойства

1. Программа не зависит
2. Любой разрешимый язык, распознается программой на этом языке
3. Функция $\langle p, x \rangle \mapsto p(x)$ вычислима