

# Лекция 9

Илья Yaroshevskiy

24 апреля 2021 г.

## Содержание

1	Сингулярное распределение	1
2	Общий взгляд на математическое ожидание	1
3	Преобразование случайных величин	2
3.1	Стандартизация случайной величины	2
3.2	Линейное преобразование	3
3.3	Квантильное преобразование	3

## 1 Сингулярное распределение

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет **сингулярное распределение**, если существует Борелевское множество  $B \in \mathfrak{B}$ , с нулевой мерой Лебега  $\lambda B = 0$ , такое что  $p(\xi \in B) = 1$ , но  $\forall x \in B p(\xi = x) = 0$

*Примечание.*

$$\forall x \in B p(\xi = x) = 0 \implies p(\xi \in B) = 0$$

Иными словами, при сингулярном распределении, случайная величина распределена на несчетном множестве меры 0

*Примечание.* Функция распределения — непрерывная функция, по свойству 7 функции распределения.

*Пример.* Случайная величина  $\xi$ , задана функция распределения, которая — лестница Кантора

Доделать

**Теорема 1.1** (Лебега). Пусть  $F_\xi(x)$  — функция распределения произвольной случайной величины  $\xi$

Тогда

$$F_\xi(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x) \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

, где  $F_1(x)$  — функция дискретного распределения,  $F_2(x)$  — функция абсолютно непрерывного распределения,  $F_3(x)$  — функция сингулярного распределения. Т.е. все распределения делятся на дискретные, абсолютно непрерывные, сингулярные и их смеси

## 2 Общий взгляд на математическое ожидание

Пусть случайная величина  $\xi$  задана на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ . Математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  называется интеграл Лебега:

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) dp(\omega) \quad (1)$$

, при условии, что данный интеграл существует. Используя интеграл Стильеса, эту формулу можно записать в виде:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) \quad (2)$$

Из определения интеграла Стильеса можно получить геометрическую интерпретацию математического ожидания

Рассмотрим две ситуации:

1. Вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  — дискретное вероятностное пространство, т.е.  $\Omega$  состоит из н.б.ч.с числа точек. Тогда из 1 получаем:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(\omega_i) p(\omega_i)$$

Пример. Доделать

2.  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  — непрерывное вероятностное пространство. например  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , тогда из 2 получаем:

$$E\xi = \int \int \dots \int_{\Omega} \xi(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot p(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

Пример. В круг радиуса 3 наугад бросается точка, случайная величина  $\xi$ , расстояния от центра круга до данной точки. Найти мат. ожидание  $\xi$ .

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p(x, y) = p = \text{const}$$

Из условия нормировки:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha p(\omega) = 1 \text{ или } \iint_{\Omega} p \, dx \, dy = 1 &\implies \frac{1}{9\pi} \\ E\xi = \iint_{\Omega} \xi(x, y) \cdot p \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{9\pi} \, dx \, dy = \\ = \frac{1}{9\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^3 \rho \cdot \rho \, d\rho = \frac{1}{9\pi} \cdot \pi \cdot \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^3 = 2 \end{aligned}$$

Исправить

### 3 Преобразование случайных величин

$\xi$  — случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда функция  $g(\xi)$

**Определение.** Функция  $g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — Борелевская функция, если  $\forall B \in \mathfrak{B}, g^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$

**Теорема 3.1.** Если  $g(x)$  — Борелевская функция и  $\xi$  — случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , то  $g(\xi)$  — случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$

Доказательство. Доделать

□

*Примечание.* Если  $\xi$  — дискретная случайная величина, то ее закон распределения находится просто из определения, поэтому в дальнейшем будем считать, что  $\xi$  имеет абсолютно непрерывное распределение

#### 3.1 Стандартизация случайной величины

**Определение.** Пусть имеется случайная величина  $\xi$  с соответствующей ей стандартной величиной:

$$\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$$

**Свойство 1.**  $E\eta = 0$ ,  $D\eta = 1$

Доказательство. Доделать

□

*Примечание.* При стандартизации тип распределения не всегда сохраняется

### 3.2 Линейное преобразование

**Теорема 3.2.** Пусть случайная величина  $\xi$  имеет плотность  $f_\xi(x)$

Тогда случайная величина  $\eta = a\xi + b$ ,  $a \neq 0$  имеет плотность:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} \cdot f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

*Доказательство.*

1.  $a > 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= p(a\xi + b < x) = p\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t) dt \\ &= \int_{y(-\infty)=-\infty}^{t=\frac{y-b}{a} \quad dt=\frac{1}{a}dy \quad y=at+b} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy = \int_{y\left(\frac{x-b}{a}\right)=x} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \end{aligned}$$

Доделать

□

**Свойство 1.** Если  $\xi \in N(0, 1)$ , то  $\eta = \sigma\xi + a \in N(a, \sigma^2)$

*Доказательство.*

Доделать

□

**Свойство 2.** Если  $\eta \in N(a, \sigma^2)$ , то  $\xi = \frac{\eta-a}{\sigma} \in N(0, 1)$

**Свойство 3.** Если  $\eta \in N(a, \sigma^2)$ , то  $\xi = \gamma\eta + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$

**Свойство 4.** Если  $\xi \in U(0, 1)$ , то  $\eta = a\xi + b \in U(b, a+b)$  при  $a > 0$

**Свойство 5.** Если  $\xi \in E_\alpha$ , то  $\eta = \alpha\xi \in E_1$

**Теорема 3.3.** Пусть  $f_\xi(x)$  — плотность случайной величины  $\xi$  и функция  $(x)$  — монотонная. Тогда существует обратная  $h(t) = g^{-1}(x)$  и случайная величина  $\eta = g(\xi)$  имеет плотность:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|h'(x)|} f_\xi(h(x))$$

### 3.3 Квантильное преобразование

**Теорема 3.4.** Пусть функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $\xi$  — непрерывная, тогда случайная величина  $\eta = F(\xi) \in U(0, 1)$  — имеет стандартное равномерное распределение

*Доказательство.* Ясно, что  $0 \leq \eta \leq 1$

1. Предположим сначала, что  $F(x)$  — строго возрастающая функция. Тогда она имеет обратную функцию  $F^{-1}(x)$  и

$$F_\eta(x) = p(F(\xi) < x) = p(\xi < F^{-1}(x)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ F(F^{-1}(x)) = x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \eta \in U(0, 1)$$

2. Пусть функция не является строго возрастающей, т.е. у нее есть интервалы постоянства, в этом случае через  $F^{-1}(x)$  обозначим, самую левую точку такого интервала:

$$F^{-1}(x) = \min_t \{t \mid F(t) = x\}$$

— корректно, т.к.  $F(x)$  непрерывна слева. Тогда снова будет верна цепочка:

$$F_\eta(x) = p(F(\xi) < x) = p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x \quad 0 \leq x \leq 1$$

□

Сформулируем теперь обратную теорему:

Пусть  $F(x)$  — функция распределения случайной величины  $\xi$ , при чем не обязательно непрерывная.

Обозначим через  $F^{-1}(x) = \inf \{t \mid F(t) \geq x\}$

**Теорема 3.5.** Пусть  $\eta \in U(0, 1)$ ,  $F(x)$  — произвольная функция распределения.  
Тогда случайная величина  $\xi = F^{-1}(\eta)$  имеет функцию распределения  $F(x)$

*Примечание.*  $F^{-1}(\eta)$  называется квантильным преобразованием над случайной величиной  $\eta$

*Следствие 3.5.1.* Датчики случайных чисел обычно имеют стандартное равномерное распределение. Из теоремы следует, что при помощи датчика случайных чисел и квантильного преобразования, мы можем смоделировать любое желаемое распределение, в том числе дискретное.

*Пример.*  $E_\alpha$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\eta = 1 - e^{-\alpha x} \implies x = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta)$$

Если  $\eta \in U(0, 1)$ , то  $\xi = \frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta) \in E_\alpha$

*Пример.*  $N(0, 1)$ :

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\Phi_0^{-1} \in N(0, 1)$$