Лекция 5

Ilya Yaroshevskiy

12 марта 2021 г.

Содержание

1 Предикаты

программа(функция)

- $P : \alpha \to \beta$ — берет α, возвращает β
- P — доказательство, что из α следует β

```
f a = a
```

$f : A \to A$ — f доказывает что, из A следует A

логическок исчесления	Типизированное λ-исчесление
логическая формула	тип
доказательство	значение
доказуемая формула	обитаемый тип(имеет хотя бы один экземпляр)
$\to$	функция
$\&$	упорядоченная пара
$\vee$	алг. тип(тип-сумма)

Пример. 5 доказывает Int

```
type list = record
   nul: boolean;
   case nul of
     true: ;
           false: next: ^list;
   end
end;
```

```
struct list {
        *list next;
};
```

```
struct tree {
        tree* left;
        tree* right;
        int value;
};
```

Определение. **Отмеченное(дизъюнктное)** объединение множеств:

- A, B — множества
- $A \sqcup B = \{\langle \text{“}A\text{“}, a\rangle | a \in A\} \cup \{\langle \text{“}B\text{“}, a\rangle | b \in B\}$

Пусть $S \in A \sqcup B$. Мы знаем откуда S

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
example = Cons 1 (Cons 2 (Cons 3 Nil)) -- [1; 2; 3]
```

```
union {
        int a;
        char b;
};
```

Пример.

$$\frac{\Gamma \vdash \overset{\text{Nil}}{\alpha} \to \gamma \quad \Gamma \vdash \overset{\text{Cons}}{\beta} \to \gamma \quad \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \underset{\text{int}}{\gamma}}$$

```
(* count *)
let rec string_of_list l =
match l with
   | Nil -> "[]" (* 0 *)
   | Cons(hd, tl) -> hd ^":"^ string_of_list tl (* 1 + count tl *)
```

1.1 Исчесление предикатов

Определение. Язык исчесление предикатов

- логические выражения "предикаты"/формулы
- предметные выражния "термы"

Θ — метаперменные для термов
Термы:

- Атомы:
  - $a, b, c, d, \ldots$ — предметные переменные
  - x, y, z — метапеременные для предметных перменных
- Применение Функциональных Символов
  - f, g, h — Функциональные символы
  - $f(\Theta_1, \ldots \Theta_n)$
- Лп. выражения:
  - Применение предикатных символов $P(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$
  - P — метаперменные для предикатных символов

Недописано

1.1.1 Сокращение записи

И.В + жадность $\forall, \exists$

$$\forall x.(P(x)\&(\forall y.P(y)))$$

Правильный вариант:

$$\forall a.B(A)\&\forall b.B(b)$$

1.2 Теория моделей

Оценка формулы в исчеслении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множетво
2. Кажодму $f_i(x_1, \dots, x_n)$ сопоставим функцию $D^2 \to D$
3. Каждому $P_j(x_1, \dots, x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^2 \to V$
4. Каждой x_i сопоставим элемент из D

$\forall x.\forall y\ E(x, y)$
Пусть $D = \mathbb{N}$

$$E(x, y) = \begin{cases} \text{И} & , x = y \\ \text{Л} & , x \neq y \end{cases}$$

$\forall x.\forall y.E(x, y)$

- $[\![x]\!] = f_{x_i}$
- $[\![\alpha \star \beta]\!]$ — смотри
- $[\![P_i(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{p_i}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $[\![f_j(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{f_j}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $$[\![\forall x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!] = \text{И}, f_x = k \text{ при всех } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

Недописано

Пример.

$$\forall > 0 \exists N \forall n > N |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon :> 0 \to \exists N.\forall n.(n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\forall e.G(e, m_0) \to \exists n_0.\forall n.G(n, n_0) \to G(e, m, (m\_(m_a(n), a)))$$

Недописано

1.3 Теория доказательств

Все аксимомы И.В + М.Р.

(сх. 11) $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \Theta]$

(сх. 12) $\varphi[x := \Theta] \to \exists x.\varphi$

Недописано

```
int y;
int f(int x) {
        x = y;
}
```

Заменим `y:=x`

(Пр. $\forall$)

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi}$$

(Пр. $\exists$)

$$\frac{\psi \to \varphi}{\exists x.\psi \to \varphi}$$

x не входит свободно в φ

Пример.

$$\frac{x = 5 \to x^2 = 25}{x = 5 \to \forall x. x^2 = 25}$$

Нарушено ограничение

Пример.

$$\exists y. x = y$$

$$\forall x. \exists y. x = y \to \exists y. y + 1 = y$$

Делаем замену `x:=y+1`. Нарушено правило свобод