Лекция 10

Ilya Yaroshevskiy

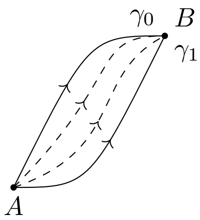
January 12, 2021

Contents

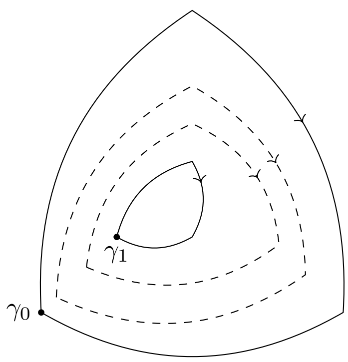
1 Гомотопия путей

Определение (Гомотопия двух путей)**.** $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывны
$\Gamma : \underset{t}{[a,b]} \times \underset{u}{[0,1]}$ - непрерывное, такое что:
$\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0,\ \Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$

- Гомотопия связанная, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a),\ \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$,
  $\forall u \in [0,1] \quad \Gamma(a,u) = \gamma_0(a),\ \Gamma(b,u) = \gamma_0(b)$



- Гомотопия петельная $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
  $\forall u \in [0,1] \quad \Gamma(a,u) = \Gamma(b,u)$



Теорема 1. *V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$*
γ_0, γ_1 — связанно гомотопные пути
Тогда $\int_{\gamma_0} V_i dx_0 = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

Примечание. То же самое выполнено для петельных гомотопий

Proof. $\gamma_u(t) := \Gamma(t,u),\ t \in [a,b]\ u \in [0,1]$
$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$
Проверим: Φ - локально постоянна
$\forall u_0 \in [0,1]\ \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0,1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$
Γ - непрерывна на $[a,b] \times [0,1]$ - компакт $\Rightarrow$ Γ - равномерно непрерывна

$\forall \delta > 0\ \exists \sigma > 0\ \forall t, t'\ |t - t'| < \sigma\ \forall u, u'\ |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$
Лемма 3 $\gamma : [a, b] \to O$
Тогда $\exists \delta > 0$ со свойством
Если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ — близки к γ
т.е. $\forall t \in [a, b]$

- $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \delta$
- $|\tilde{\tilde{\gamma}} - \gamma(t)| < \delta$

то $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ — V - похожие
Возьмем параметр δ из Леммы 3 для пути γ_{u_0}
Если $|u - u_0| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$, при $t \in [a, b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} — похожи по Лемме 3
Построим кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0}$ $\frac{\delta}{4}$ - близкий к γ_{u_0} $\forall t \in [a, b] \quad |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}| < \frac{\delta}{4}$
и кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_u$ $\frac{\delta}{4}$ - близкий к γ_u
Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u$ — δ - близкие к γ_{u_0} $\Rightarrow$ они V - похожие $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$
т.е. $\Phi(u) = \Phi(u_0)$, при $|u - u_0| < \delta$ □

Определение. Область $O \subset \mathbb{R}^m$ - называется **односвязной** если в ней любой замкнутый путь гомотопен постоянному пути

Примечание. Выпуклая облать — одновязна

Примечание. Гомеоморфный образ однозвязного множества односвязный
$\Phi : O \to O'$ — гомеоморфизм, γ - петля в O', Φ^{-1} — петля в O
$\Gamma : [a, b] \to [0, 1] \to O$ - гомотопия $\Phi^{-1}(\gamma)$ и постоянного пути $\tilde{\gamma} \equiv A$
$\Phi \circ \Gamma$ — гомотопия γ с постоянным путем $\Phi(A)$

Теорема 2. $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область
V — локально потенциальное векторное поле в O
Тогда V — потенциальное в O

Proof. *Теорема.* Эквивалентны:

1. V — потенциальное
2. $\dots$
3. $\forall$ кусочно гладкой петли γ: $\int_\gamma \sum V_i dx_i = 0$

V - локально постояно, γ_0 — кусочно гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути γ_1 $\Rightarrow$ $\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1|t|), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0 \Rightarrow V$ — потенциально □

Следствие 1. Теорема Пуанкаре верна в односвязной области
Дифференциальный критерий:
$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \tag{1}$$
Лемма Пуанкаре: (1) $\Rightarrow$ V — локально потенциально

Теорема 3 (о веревочке)**.**

- $O = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$
- $\gamma : [0, 2\pi] \to O$
  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля не стягиваема

Proof.
$V(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ — векторное поле в $\mathbb{R}^2$

Проверим что $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$:
$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{2}$$

Равенство частных производных выполняется если $(x, y) \neq (0,0) \Rightarrow V$ — локально потенциально

При этом

$$\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \qquad (3)$$

(3) $\Rightarrow$ петля не стягиваема(Если бы была стягиваема, то интеграл изначально должен был быть равен 0, т.к. интеграл при гомотопиях не меняется), а поле V — не потенциально $\square$

2 Степенные ряды

Теорема 4 (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)**.**
$\sum a_n(z - z_0)^n \quad 0 < R \leq +\infty$

1. $\forall r: \ 0 < r < R$ Ряд сходится равномерно в шаре $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ — непрерывна в $B(z_0, R)$

Proof.

1. Если $0 < r < R$, то при $z = z_0 + r$ ряд абсолютно сходится(по теореме о радиусе сходимости), т.е. $\sum |a_n| \cdot r^n$ — конечна
   признак Вейрештрасса:
   - при $|z - z_0 \leq r| \quad |a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n$
   - $\sum |a_n| r^n$ - конечна

   $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость на $\overline{B(z_0, r)}$
2. Следует из 1. и теоремы Стокса-Зайдля
   Если z удовлетворяет $|z - z_0| < R \Rightarrow \exists r_0 < R \quad z \in B(z_0, r_0)$
   На $B(z_0, r_0)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow f$ — непрерывна в z

$\square$

Определение. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Произвдоная:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (4)$$

Примечание. $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|)$

Лемма 1. $w, w_0 \in \mathbb{C}, \ |w| < r, \ |w_0| < r$
Тогда $|w^n - w_0^n| \leq n \cdot r^{n-1} \cdot |w - w_0|, \ n \in \mathbb{N}$

Proof. $w^n - w_0^n = (w - w_0)(w^{n-1} + \underbrace{w^{n-2}w_0}_{\text{по модулю} \leq r^{n-1}} + \dots + w_0^{n-1})$ $\square$

Теорема 5 (о дифференцируемости степенного ряды)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad 0 < R < +\infty \quad f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n \qquad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \qquad (6)$$

Тогда:

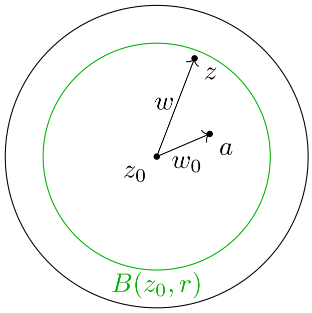
1. Радиус сходимости ряда (6) равен R
2. $\forall z \in B(z_0, R) \ \exists f'(z)$ и $f'(z) = (6)$

Proof.

1. По формуле Адамара $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}$
Ряд (6) сходится при каком-то $z \Leftrightarrow \sum na_n(z-z_0)^n$ — сходится
Сторим на частичные суммы

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{na_n}} = \frac{1}{1 \cdot \lim \sqrt[n]{a_n}} = R \tag{7}$$

2. $a \in B(z_0, R),\ \exists x < R,\ a \in B(z_0, r)$
$a = z_0 + w_0 \quad, |w_0| < r$
$z = z_0 + w \quad, |w| < r$



$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \tag{8}$$

Последнее выражение по модулю по Лемме $\leq n \cdot r^{n-1} \cdot |a_n|$, ряд $\sum nr^{n-1}|a_n|$ — сходится по 1., т.е. ряд (8) равномерно сходится в круге $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \lim \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z-a} = \sum na_n(a-z_0)^{n-1} \tag{9}$$

$\square$