Лекция 6

Ilya Yaroshevskiy

16 января 2021 г.

Содержание

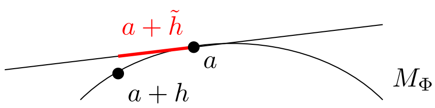
1 Относительный экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to R$
$\Phi : E \to \mathbb{R}^n \quad \Phi \in C^1$
$a \in e \quad \Phi(a) = 0$
$\text{rank}\Phi'(a) = n \quad \det(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j})_{i,j=1\dots n} \neq 0$
a - относительный экстремум
Тогда $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda$
$f'(a) - \Phi'(a) = 0$
$\begin{cases} f'(a) - \lambda\Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Теорема 1.1 (О достаточном условии экстремума)**.** Пусть выполнено условие для точки a
$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$(n уранений с $m + n$ неизвестными)
То можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$(решим линейную систему)
Рассмторим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$, где G - функция Лагранжа
Q - это сужение d^2G на касательное пространство $T_a M_\Phi$
Тогда:

1. Q - положительно опр. $\Rightarrow$ a - точка минимума
2. Q - отрицательно опр. $\Rightarrow$ a - точка максимума
3. Q - неопределена $\Rightarrow$ нет экстремума
4. $Q \geq 0$ вырождена $\Rightarrow$ информации недостаточно

Доказательство.



$\underbrace{f(a+h)}_{a+h \in M_\Phi} - f(a) = G(a+h) - G(a) = \underbrace{dG(a,h)}_{0} + \frac{1}{2}d^2G(a,h) + o(|h|^2) = \frac{1}{2}d^2G(a,\tilde{h}) + o(|\tilde{h}|^2) > 0$

Очень неточное доказательство □

Пример. $f = x^2z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z$
$\Phi(x, y, z) = xyz - 6$
$a = (1, 2, 3) \quad \lambda = 1$
Найдем тип экстремума

1. a - подозрительная точка ?
   $G = x^2z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z - (xyz - 6)$
   $G'_x = 0 \quad 2xz^2 - 12 - yz = 0$
   $G'_y = 0 \quad 3y^2 - 9 - xz = 0$
   $G'_z = 0 \quad 2x^2z - 4 - xy = 0$

2. $d^2G = 2z^2dx^2 + 2x^2dz^2 + Gydy^2 + 2(4xz - y)dxdz - 2xdydz - 2zdxdy$
   Подставим a $d^2G(a) = 18dx^2 + 2dz^2 + 12dy^2 + 20dxdz - 2dydz - 6dxdy$
   Нужно найти знак выражения $d^2G(a)$, если (dx, dy, dz) удовлетворяет соотношению $d\Phi = 0$
   $yzdx + xzdy + xydz = 0$ в точке $a \quad Gdx + 3dy + 2dz = 0$
   $dz = -3dx - \frac{3}{2}dy$
   $d^2G|_{d\Phi=0} = 18dx^2 + 2(3dx + \frac{3}{2}dy)^2 + 12dy^2 - 10dx(6dx + 3dy) + dy(6dx + 3dy) - 6dxdy =$
   $= -24dx^2 + 19.5dy^2 + \ldots dxdy$ - Нет экстремума, т.к. форма не определена(при $dx = 1,\ dy = 0 \quad d^2G < 0$, а при $dx = 0,\ dy = 1 \quad d^2G > 0$)

1.1 Вариационные исчесления(Оффтоп)

$$f \in C^1([a,b]) \quad F(f) = \int_a^b xf(x)dx + f(a) \to \max$$

2 Функциональные последовательности и ряды

$f_n \to f$ - поточечно на $E \quad f, f_n : E \subset X \to R$
$f_n \rightrightarrows f$ на E
$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$M_n \sup\limits_{x \in E} |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
$\rho(f_n, f) = \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)$ - метрика в $\mathcal{F} = \{f | E \to \mathbb{R},\ f - \text{огр.}\}$, в $C([a,b])$ - непрерывные функции на $[a,b]$

Теорема 2.1 (Стокса–Зайдля)**.** $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ (X - метр. пр-во)
$x_0 \in X \quad f_n$ - непрерывно в x_0
$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$
Тогда f - непрерывно в x_0

Доказательство. $|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$ (неравенство треугольника) - верно $\forall x\ \forall n$
$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \sup\limits_X |f_n - f| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
Берем $\forall \varepsilon > 0$, возьмем любой n, для которого выполнено предыдущее утверждение, тогда крайние модули из неравенства $< \frac{\varepsilon}{3}$
Теперь для этого n подберем $U(x_0):\ \forall x \in U(x_0) \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ □

Примечание. То же верно если $f_n, f : X \to Y$, где Y - метрическое пространство(в частности $\mathbb{R}^m$)

Примечание. То же верно, если X - топологическое пространство

Следствие 2.1.1. $f_n(X),\ f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \quad$ Тогда $f \in C(X)$

Примечание. В теореме достаточно требовать $f_n \rightrightarrows f$ на некоторой окрестности $W(x_0)$
В следствии достаточно требовать локальную равномерную сходимость
$\forall x \in X\ \exists W(x)\ f_n \rightrightarrows f$ на $W(x)$

Пример. $f_n(x) = x^n \quad X = (0,1) \quad f_n(x) \to 0$ поточечно на X
$f_n \not\rightrightarrows 0$
Но есть локальная равномерная сходимость $\quad \forall x \in (0,1) \quad W(x) = (\alpha, \beta)$, где $0 < \alpha < x < \beta < 1$
Тогда $f_n \rightrightarrows g$ на (α, β) : $\sup\limits_{x \in (\alpha,\beta)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \in (\alpha,\beta)} x^n = \beta^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ и предельная функция непрерывна

Теорема 2.2. X - компактное $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$
Тогда пространство $C(X)$ - полное метрическое пространство

Примечание. $x_n \to a$ в $(X, \ \rho) \Rightarrow x_n$ - фунд. $\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n, m > M \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$
X - полное, если каждая фундаментальная последовательность сходится

Доказательство. f_n - фунд. в $C(X) \Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещ. последовательность $(f_n(x_0))$ - фундаментальна $\Rightarrow$
f_n - фунд. $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) =: f(x_0) \quad f$ - поточечный предел f_n
Проверим: $f_n \rightrightarrows f, \ f \in C(X)$
В (1) перейдем к пределу при $m \to +\infty$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, т.е. $f_n \rightrightarrows f$ на X и тогда $f \in C(X)$ □

Следствие 2.2.2. $(\mathcal{F}, \rho)$ - полное

Примечание. (x_n) - последовательность в полном метричеком пространстве X, x_n - сходится $\Leftrightarrow x_n$ - фундаментальна
$f : X \to Y$, Y - полно, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \Leftrightarrow$ Критерий Больциано-Коши, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U(a) \ \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(a) \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

Примечание. (Критерий Коши для равномерной сходимости)
$B \subset C(X) \quad f_n \to f$, т.е. $f_n \rightrightarrows f$ на $X \Leftrightarrow$ фундаментальности:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \ \forall x \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (A)
$\sup\limits_{x \in X} |f_n - f| < \varepsilon$
(B) $\Rightarrow$ (A), (A) $\Rightarrow \sup\limits_{x \in X} |f_n - f| \leq \varepsilon$
(A) $\Leftrightarrow$ (B) с оговоркой

2.1 Предельный переход под знаком интеграла

Не теорема $f_n \to f \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Пример. $[a, b] = [0, 1] \quad f_n(x) = nx^{n-1}(1 - x^n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) \equiv 0$

$$\int_a^B f_n = \int_0^1 nx^{n-1}(1 - x^n)dx = \int_0^1 (1 - y)dy = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 f(x) = 0$$

Теорема 2. $f_1, f_2 \in C([a, b]) \quad f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$
Тогда $\displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Доказательство. $\displaystyle\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |f_n - f| \cdot (b - a) = \rho(f_n, f) \cdot (b - a) \to 0$ □

Следствие 2.2.3 (Правило Лейбница). $f : \underbrace{[a, b]}_{x} \times \underbrace{[c, d]}_{y} \to \mathbb{R} \quad f, f'_y$ - непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$

$\Phi(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)dx \quad y \in [c, d]$

Тогда Φ - дифф. на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \displaystyle\int_a^b f'_y(x, y)dx$

Доказательство. $\frac{\Phi(y + \frac{1}{n}) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x, y + \frac{1}{n}) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \int_a^b \underbrace{f'_y(x, y + \frac{\Theta}{n})}_{g_n(x,y)} dx$

Утв. $f_n(x, y) \underset{x \to +\infty}{\rightrightarrows} f'_y(x, y)$ на $x \in [a, b]$, а y считаем фиксированным — по теореме Кантора о равномерной непрерывности
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \frac{1}{N} < \delta(\varepsilon)$— из теоремы Кантора $\forall n > N \ \forall x \in [a, b] \ |f'_t(x, y + \frac{\delta}{n)} - f'_y(x, y)| < \varepsilon$

Таким образом $\frac{\Phi(y + \frac{1}{n}) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \to \displaystyle\int_a^b f'_y(x, y)dx = \Phi'(y)$ □

Теорема 3 (О предельном переходе под знаком производной). $f_n \in C^1(\langle a,b\rangle), \quad f_n \to f$ поточечно, $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a,b\rangle$

<u>Тогда</u> $f^1(\langle a,b\rangle)$ и $f' \equiv \varphi$ на $\langle a,b\rangle$

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & f \\ D\downarrow & & \downarrow \\ f_n' & \rightrightarrows & \varphi \end{array}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n'(x)) = (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))'$$

Доказательство. $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle \quad f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $[a,b] \overset{\text{T.2}}{\Longrightarrow} \int_{x_0}^{x_1} f_n' \to \int_{x_0}^{x_1} \varphi$, т.е.

$$\begin{cases} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f_n(x_1) - f_n(x_0) \to f(x_1) - f(x_0) \end{cases}$$

Итак $\forall x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle \quad f(x_1) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi$

$$\underbrace{f_n'}_{\text{непр}} \varphi \Rightarrow \left.\begin{matrix} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непрерывная} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f' = \varphi$$

□

2.2 Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение. $u_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{R}^m) \quad \sum u_n(x)$ **сходится поточечно(к сумме** $S(x)$**) на** X

$S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \quad S_N(x) \to S(x)$ поточечно на X

Определение. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $E \subset X: \quad S_N \underset{N\to+\infty}{\rightrightarrows} S$ на E

Примечание. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\Rightarrow \sum u_n(x)$ - поточечно сходится к той же сумме
$\sup_{x\in E} |S_N - S| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \forall x_0 \in E: \ |S_N(x_0) - S(x_0)| \le \sup_{x\in E} |S_N - S| \to 0$

Примечание. Остаток ряда: $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \quad S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд равномерно сходится на $E \Leftrightarrow R_N \rightrightarrows 0$ на E

$\sup_{x\in E} |S - S_N| = \sup_{x\in E} R_N$

Примечание. (Необходимое условие равномерной сходимости)
$\sum u_n(x)$ - равномерно сходится на $E \Rightarrow u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$

Доказательство. $u_n = R_{n-1} - R_n \rightrightarrows 0$ □

Пример. $u_n(x) = \frac{1}{n} \quad u_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \sum \frac{1}{n}$ - расходится