

# Лекция 4

Илья Yaroshevskiy

6 марта 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Схема Бернулли</b>	<b>1</b>
1.1	Наиболее вероятное число успехов . . . . .	2
1.2	Предельные теоремы в схеме Бернулли . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Статистическое определение вероятности</b>	<b>3</b>
2.1	Вероятность отклонения относительной частоты . . . . .	4
2.2	Закон больших чисел Бернулли . . . . .	4

## 1 Схема Бернулли

**Определение.** Схемой Бернулли называется серия независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, каждое интересующее нас событие либо произошло либо не произошло, успех . . . .

- $n$  — число испытаний
- $p$  — вероятность события  $A$  при одном испытании
- $q = 1 - p$
- $\nu_k$  — число успехов при  $k$  испытаниях
- $P_n(k) = P(\nu_k = k)$

**Теорема 1.1.** Вероятность того что при  $n$  испытаниях произойдет ровно  $k$  успехов равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

*Доказательство.* Рассмотрим один из исходов благоприятных событию  $A$ :  $A_1 = \underbrace{Y Y \dots Y}_k \underbrace{H H \dots H}_{n-k}$

— независимые события

- $P(Y) = p$
- $P(H) = q$

$$P(A_1) = \underbrace{p p \dots p}_k \underbrace{q q \dots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$
$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

□

**Задача 1.** Вероятност попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Найти вероятность того что при 5 выстрелах буду 3 попадания

*Решение.*

- $n = 5$
- $p = 0.8$
- $q = 0.2$
- $k = 3$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

## 1.1 Наиболее вероятное число успехов

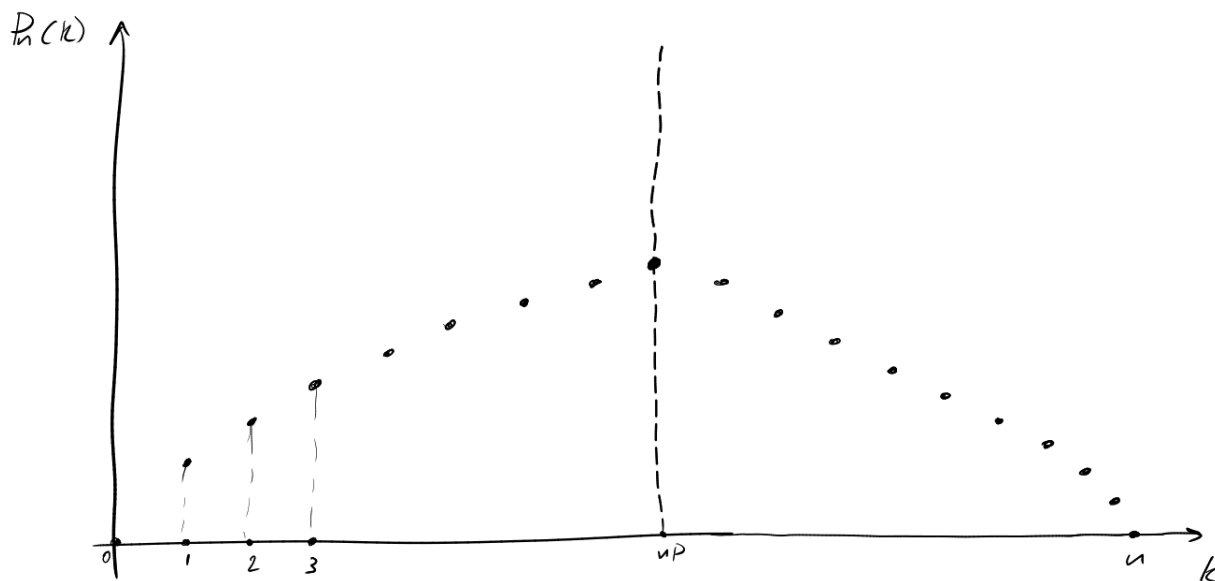
Выясним при каком значении  $k$  вероятность предшествующего числа успехов  $k - 1$  будет не более чем вероятность  $k$  успехов

$$\begin{aligned}
 P_k(k-1) &\leq P_k(k) \\
 C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} &\leq C_n^k p^k q^{n-k} \\
 \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q &\leq \frac{n!}{(k!(n-k)!)} p \\
 \frac{k!}{(k-1)!} q &\leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!} p \\
 k(1-p) &\leq (n-k+1)p \\
 k &\leq np + p
 \end{aligned}$$

Так как  $k$  — целое то выполняется:  $np + p - 1 \leq k \leq np + p$

Рассмотрим три ситуации:

1.  $np$  — целое. Тогда  $np + p$  — целое и  $k = np$  — наиболее вероятное число исходов
2.  $np + p$  — не целое. Тогда  $k = [np + p]$
3.  $np + p$  — целое. Тогда  $np + p - 1$  — целое и  $P_n(k-1) = P_n(k)$  и имеем два наиболее вероятных числа успехов:
  - $k = np + p$
  - $k = np + p - 1$



## 1.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли

**Определение.** Локальная формула Муавра-Лапласа. Применяем когда требуется найти вероятность точно числа успехов.

$$P_n(\nu_n = x) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

, где  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$  — функция Гауса.

Свойства функции Гауса  $\varphi(x)$ :

1.  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  — четная
2. при  $x > 5$ ,  $\varphi(x) \approx 0$

**Определение. Интегральная формула Лапласа.** Применяем если число успехов лежит в некоем диапазоне.

$$P_n(x_1 \leq \nu_n \leq x_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$$

, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

— функция Лапласа

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства  $\Phi(x)$ :

1.  $\Phi(-x) = \Phi(x)$  — нечетная
2. при  $x > 5$ ,  $\Phi(x) \approx 0.5$

*Примечание.* В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевается несколько иная функция, чаще всего:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2} dz$$

$$F_0(x) = 0.5 + \Phi(x) \text{ или } \Phi(x) = F_0(x) - 0.5$$

*Примечание.* Формула применяем при  $n \geq 100$  и  $p, q \geq 0.1$

**Задача 2.** Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того что

1. произошло ровно 330 попаданий
2. произошло от 312 до 336 попаданий

*Решение.* 1.  $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 1.25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{8} \cdot \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

2.  $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k_1 = 312, k_2 = 336$

$$x_1 = \frac{312 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2$$

$$P_{400}(312 \leq \nu_n \leq 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8185$$

## 2 Статистическое определение вероятности

- $n_A$  — число появления события  $A$  при  $n$  испытаниях
- $\frac{n_A}{n}$  — частота события  $A$

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}, \text{ при } n \rightarrow \infty$$

## 2.1 Вероятность отклонения относительной частоты

$p$  — вероятность события  $A$ ,  $\frac{n_A}{n}$  — частота  $A$

По интегральной формуле Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon\right) = P(-n\varepsilon \leq n_A - np \leq n\varepsilon) = P(np - n\varepsilon \leq n_A \leq np + n\varepsilon)$$

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

## 2.2 Закон больших чисел Бернулли

Более точно последняя формула выглядит так:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

при  $n \rightarrow \infty$   $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon \rightarrow \infty$  и  $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right) \rightarrow 0.5$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 2 \cdot 0.5 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

— закон больших чисел Бернулли

То есть при большом числе испытаний, будет близко в реальной вероятности