

# Лекции по Теории вероятностей 4 семестр

Илья Yaroshevskiy

27 марта 2021 г.

# Оглавление

<b>1</b>		<b>3</b>
1.1	Статистическая вероятность . . . . .	3
1.1.1	Пространство элементарных исходов. Случайные со- бытия . . . . .	3
1.1.2	Операции над событиями . . . . .	4
1.1.3	Классическое определение вероятности . . . . .	4
1.1.4	Геометрическое понятие вероятности . . . . .	6
<b>2</b>		<b>8</b>
2.1	Аксиоматическое определение вероятности . . . . .	8
2.1.1	Свойства операция сложения, умножения . . . . .	11
2.1.2	Независимые события . . . . .	12
<b>3</b>		<b>14</b>
3.1	Условная вероятность . . . . .	14
3.1.1	Формула умножения вероятности . . . . .	14
3.1.2	Полная группа событий . . . . .	15
3.1.3	Формула полной вероятности . . . . .	15
<b>4</b>		<b>18</b>
4.1	Схема Бернулли . . . . .	18
4.1.1	Наиболее вероятное число успехов . . . . .	19
4.1.2	Предельные теоремы в схеме Бернулли . . . . .	20
4.2	Статистическое определение вероятности . . . . .	21
4.2.1	Вероятность отклонения относительной частоты . . . . .	22
4.2.2	Закон больших чисел Бернулли . . . . .	22
<b>5</b>		<b>23</b>
5.1	Схемы испытаний и соответствующие распределения . . . . .	23
5.1.1	Схема до первого успешного испытания . . . . .	23
5.1.2	Испытание с несколькими исходами . . . . .	24
5.1.3	Урновая схема . . . . .	25
5.1.4	Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли . . . . .	26

<b>6</b>		<b>28</b>
6.1	Случайные величины . . . . .	28
6.1.1	Смысл измеримости . . . . .	29
6.1.2	Типы распределения . . . . .	29
<b>7</b>		<b>34</b>
7.1	Стандартное дискретное распределение . . . . .	34
7.1.1	Распределение Бернулли . . . . .	34
7.1.2	Биноминальное распределение . . . . .	34
7.1.3	Геометрическое распределение . . . . .	35
7.1.4	Распределение Пуассона . . . . .	35
7.1.5	Функция распределения . . . . .	36
7.2	Абсолютно непрерывные случайные величины . . . . .	38
7.2.1	Свойства плотности и функции распределения . . . . .	38
7.2.2	Числовые характеристики . . . . .	39

# Лекция 1

## 1.1 Статистическая вероятность

$n$  — число экспериментов

$n_A$  — число выполнения события  $A$  Отношение  $\frac{n_A}{n}$  — частота события  $A$   
 $P(A) \approx \frac{n_A}{n}, n \rightarrow +\infty$

### 1.1.1 Пространство элементарных исходов. Случайные события

**Определение.** Пространством элементарных исходов называется множество содержащее все возможные результаты данного эксперимента из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются **элементарными исходами**

**Обозначение.**

- Пространство элементарных исходов —  $\Omega$
- Элементарный исход  $w \in \Omega$

**Определение.** Случайными событиями называются подмножества  $A \subset \Omega$ . Событие  $A$  **наступило** если в ходе эксперимента произошел один из элементарных исходов  $w \in A$ .  $w$  — благоприятный к  $A$

*Пример.* Бросаем один раз монету.  $\Omega = \{H, T\}$ .

$H$  — Head(орел),  $T$  — Tail(решка)

*Пример.* Бросаем кубик.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Выпало четное число очков.  $A = \{2, 4, 6\}$

*Пример.* Монета бросается дважды

- Учитываем порядок.  $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- Не учитываем порядок.  $\Omega = \{HH, HT, TT\}$

*Пример.* Бросается дважды кубик. Учитывем порядок.

Число очков кратно 3.  $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), \dots\}$

*Пример.* Монета бросается до выпадения герба.  $\Omega = \{(H), (T, H), (T, T, H), \dots\}$  — счетное число исходов

*Пример.* Монета бросается на плоскость.  $\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$  — нечетное число исходов

### 1.1.2 Операции над событиями

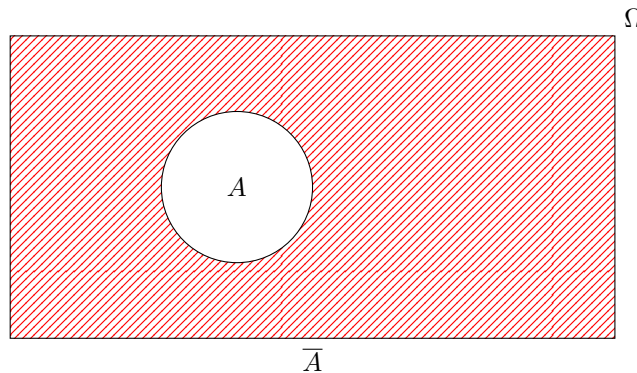
**Определение.**  $\Omega$  — универсальное событие, достоверное, наступает всегда, т.к. содержит все элементарные исходы

$\emptyset$  — невозможное событие, никогда не выполняется, т.к. не одержит элементарных исходов

**Определение.** Суммой событий  $A + B$  называется событие  $A \cup B$  — событие состоящее в том что произошло событие  $A$  или событие  $B$ , т.е. хотя бы одно из них

**Определение.** Произведением  $A \cdot B$  называется событие  $A \cap B$  — событие состоящее в том что произошло событие  $A$  и событие  $B$ , т.е. оба из них

**Определение.** Противоположным к  $A$  называется событие  $\bar{A}$  — состоящее в том событие  $A$  не произошло



**Определение.** Дополнение

**Определение.** События  $A$  и  $B$  называются **несовместными** если  $A \cdot B = \emptyset$ , т.е. в ходе эксперимента может наступить только одно из них

**Определение.** Событие  $A$  **влечет** событие  $B$ , если  $A \subset B$

**Определение.**  $P(A) \leq 1$  — вероятность наступления события  $A$

### 1.1.3 Классическое определение вероятности

Пусть  $\Omega$  содержит конечное число исходов, при чем их можно считать равновероятными. Тогда применимо классическое определение вероятности

**Определение.** Вероятность события  $A$   $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$ , где  $n$  — число всех возможных элементарных исходов,  $m$  — число элементарных исходов благоприятных событию  $A$ . В частности, если  $|\Omega| = n$ , а  $A$  — элементарный исход, то  $P(A) = \frac{1}{n}$

*Примечание.* Свойства:

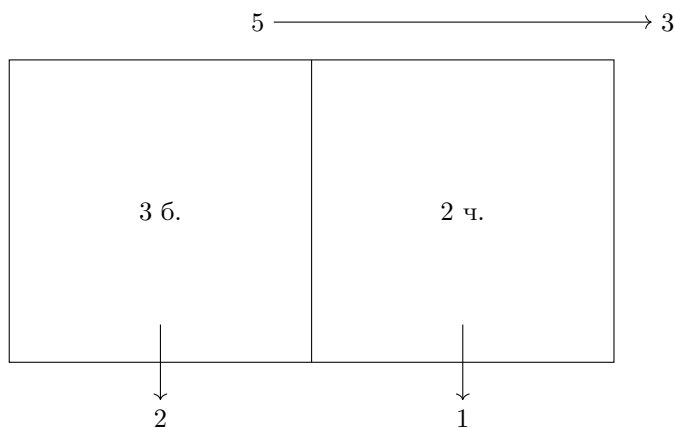
1.  $0 \leq P(A) \leq 1$
4. Если события  $A$  и  $B$  несовместны то вероятность  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

*Доказательство.*  $|A| = m_1, |B| = m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$   
 $P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$  □

*Пример.* Найти вероятность того, что при бросании кости выпадет четное число очков

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{2, 4, 5\}$ ,  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

*Пример.* В ящике 3 белых и два черных шара. Вынули 3 шара, найти вероятность того что из них 2 белых и 1 черных



$$n = C_5^3 = 10$$

$$m = C_3^2 \cdot C_2^1 = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{10}$$

### 1.1.4 Геометрическое понятие вероятности

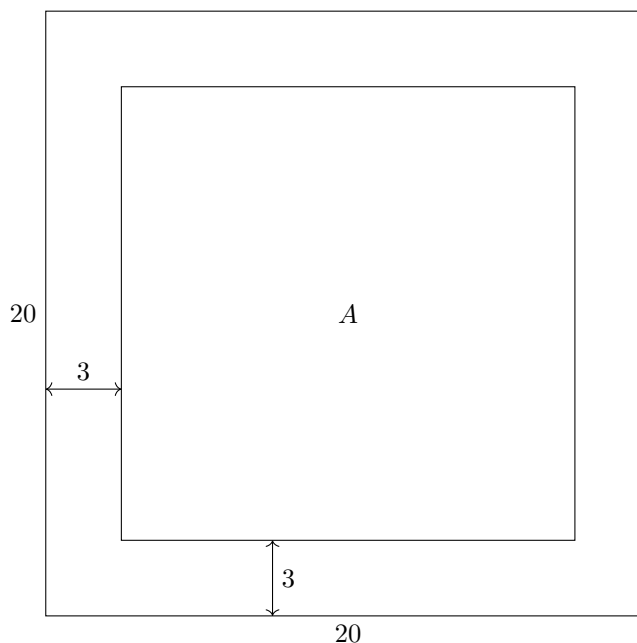
Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$  — конечная мера множества  $\Omega$  (например мера Римана, т.е. длина, площадь, объем) В эту область *наугад* бросаем точку. Термин *наугад* означает, что вероятность попадания в область  $A$  зависит только от меры этой области, но не зависит от ее положения. Вероятности попадания в любые точки равновозможны. Тогда применимо геометрическое определение вероятности.

**Определение.**  $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ , где  $\mu(\Omega)$  — мера  $\Omega$ ,  $\mu(A)$  — мера благоприятной области  $A$

*Примечание.* Заметим что по этому определению, мера точки равна 0 и вероятность попадания в конкретную точку равна 0, хотя это событие не является невозможным.

*Пример.* Игра. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того что монета целиком окажется на одной плитке



$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$

$$S(A) = 14^2 = 196$$

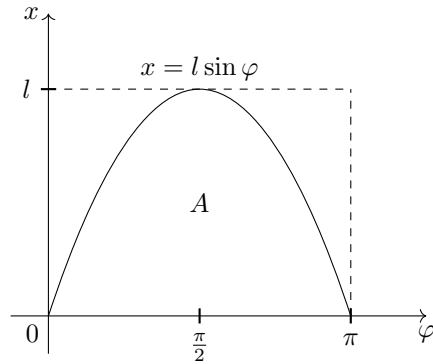
$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$

**Задача 1.** Пол выложен ламинатом. На пол бросается игла длиной равной ширине доски. Найти вероятность того что она пересечет стык

*Решение.*  $2l$  — длина иглы,  $x$  — расстояние от центра иглы до ближайшего края,  $\varphi$  — угол к ближайшему краю

Игла пересечет край если  $x \leq |AB|$ ,  $|AB| = l \sin \varphi$

Можно считать что положение от центра и угол, независимы друг от друга.  
 $x \in [0, l], \varphi \in [0, \pi]$



$$A : x \leq l \sin \varphi$$

$$S(\Omega) = \pi \cdot l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = 2l$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$



## Лекция 2

### 2.1 Аксиоматическое определение вероятности

Колмагоров

- $\Omega$  — пространство элементарных исходов

Систему  $\mathcal{F} \subset \Omega$  называем  **$\sigma$ -алгеброй событий** если:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если  $A \in \mathcal{F}$ , то  $\bar{A} \in \mathcal{F}$
3. Если  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , то  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

*Примечание.* Свойства:

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ , т.к.  $\bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
2. Если  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , то  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

*Доказательство.*

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F} \quad \square$$

3. (a)  $F = \{\Omega, \emptyset\}$   
(b)  $F = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$

**Определение.**  $\Omega$  — пространство элементарных исходов  $\mathcal{F}$  — его  $\sigma$ -алгебра. **Вероятностью** на  $(\Omega, \mathcal{F})$  обозначается функция  $P(A) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами:

1.  $P(A) \geq 0$  — свойство **неотрицательности**

2. Если события  $A_1, A_2, \dots$  — попарно несовместны ( $\forall i, j : A_i \cap A_j = \emptyset$ ), то:

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

— свойство **счетной аддитивности**

3.  $P(\Omega) = 1$  — свойство **нормированности**

**Определение.** Тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — **вероятностное пространство**

*Примечание.* Свойства:

1.  $P(\emptyset) = 0$

*Доказательство.*  $\emptyset$  и  $\Omega$  — несовместные события

$$P(\underbrace{\emptyset + \Omega}_{\Omega}) = P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) + 1 = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

□

2. Формула обратной вероятности

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

*Доказательство.*  $A$  и  $\bar{A}$  — несовместные,  $A \cup \bar{A} = \Omega$

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

□

3.  $0 \leq P(A) \leq 1$

*Доказательство.*

$$(a) \quad P(A) \geq 0$$

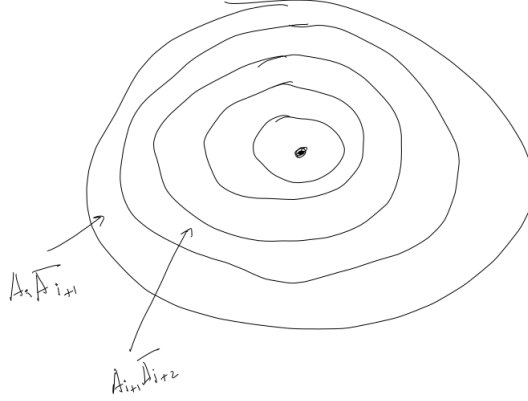
$$(b) \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$$

□

**Аксиома 1.** Пусть имеется убывающая цепочка событий  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset$   
Тогда  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

*Примечание.* При непрерывном изменении области  $A \subset \mathbb{R}^n$  соответствующая вероятность также должна изменяться непрерывно. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

*Доказательство.*



$$A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i \overline{A_{i+1}} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$$

т.к. эти события несовместны

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}}) + P\left(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$$

т.к.  $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = 0$  и  $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ , то  $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}})$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}}) = P(A_1)$$

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

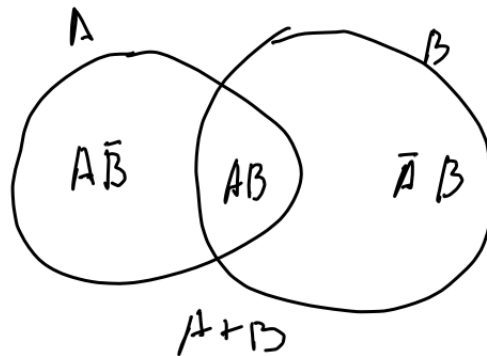
*Примечание.* Аксиома счетной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности

## 2.1.1 Свойства операция сложения, умножения

Определение.

1. Свойство дистрибутивности  $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения. Если  $A$  и  $B$  — несовместны, то  $P(A+B) = P(A) + P(B)$   
если совместны, то  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Доказательство.



$$\begin{aligned}
 A + B &= A\bar{B} + AB + \bar{A}B \Rightarrow P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) = \\
 &= P(A\bar{B}) + P(AB) + (P(\bar{A}B) + P(AB)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)
 \end{aligned}$$

□

**Задача 2.**  $n$  писем раскладываются в  $n$  конвертов. Найти вероятность того что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт. Чему равна эта вероятность при  $n \rightarrow +\infty$

Решение.  $A_i$  —  $i$  письмо попало в свой конверт $A$  — хотя бы одно письмо попало в свой конверт

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad P(A_i A_j) = \frac{1}{A_n^2}, \quad P(A_i A_j A_k) = \frac{1}{A_n^3}, \dots, P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{A_n^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

$$P(A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-1}$$

### 2.1.2 Независимые события

*Примечание.*  $\Omega = n$ ,  $|A| = m_1$ ,  $|B| = m_2$   
 $|\Omega \times \Omega| = n^2$ ,  $AB = m_1 m_2$

**Определение.** События  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если  $P(AB) = P(A)P(B)$

*Примечание.* Свойство: если  $A$  и  $B$  — независимы, то  $A$  и  $\bar{B}$  — независимы

*Доказательство.*  $P(A) = P(A(B + \bar{B})) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) \Rightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow A$  и  $\bar{B}$  — независимы  $\square$

**Определение.** События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора  $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$   $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$

*Примечание.* Если события независимы в совокупности, то события независимы попарно (при  $k = 2$ ). Обратное неверно

*Пример* (Берштейна). Три грани правильного тетраэдра покрашены в красный, синий, зеленый цвета, а четвертая грань во все эти три цвета  
 $A$  — грань содержит красный цвет,  $B$  — синий,  $C$  — зеленый

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$\Rightarrow$  все события попарно независимы

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$  события не независимы в совокупности

*Примечание.* Если в условии есть “хотябы”, т.е. требуется найти вероятность совместных независимых событий, то применяем формулу обратной вероятности

**Задача 3.** Найти вероятность того, что при 4 бросаниях кости, хотябы один раз выпадет шестерка.

*Решение.*  $A_1$  — при 1 броске “6”,  $A_2$  — при 2х бросках “6”,  $\dots$ ,  $A$  — хотя бы один раз “6”

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = P(\overline{A_4}) = \frac{5}{6}$$

$\overline{A}$  — ни разу не выпадет

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

**Задача 4.** Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого — 0.6, второго — 0.8

*Решение.*  $A_1$  — 1й попал

$A_2$  — 2й попал

$A$  — один попал

$$A = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2)$$

## Лекция 3

### 3.1 Условная вероятность

**Обозначение.**  $P(A|B)$  — вероятность наступления события  $A$ , вычисленная в предположении, что событие  $B$  уже произошло

*Пример.* Кубик подбрасывается один раз. Известно что выпало больше трех очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков.

- $A$  — четное число очков
- $B$  — больше 3 очков

Тогда:

- $n = 3$  (4, 5, 6)
- $m = 2$  (4, 6)

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

При интерпретация с геометрическим определением вероятностей также получаем формулу  $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$

**Определение. Условной вероятностью** события  $A$  при условии того что имело место событие  $B$  называется величина:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

— формула условной вероятности

#### 3.1.1 Формула умножения вероятности

Как следствие формулы условной вероятности получаем:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) \text{ или } P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

**Теорема 3.1.1.**

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

*Доказательство.* По индукции □

*Примечание.*  $P(A) \neq 0$  и поэтому формула умножения удовлетворяет

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) \neq 0$$

*Примечание.*

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

*Доказательство.* Очевидно □

**Задача 5.** В коробке 3 красных карандаша и 2 синих. Вынули 3 карандаша. Найти вероятность того что первые два красные а третий синий.

*Решение.*

- $A_1$  — 1-й красный
- $A_2$  — 2-й красный
- $A_3$  — 3-й синий

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} = 0.2$$

*Примечание.* Применяем когда учитывается порядок

**3.1.2 Полная группа событий**

**Определение.** События  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  образуют полную группу событий если они попарно несовместны, и содержат все элементарные исходы:

- $P(H_i H_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
- $\sum_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$

*Примечание.* Часто события из полной группы называются гипотезами

**3.1.3 Формула полной вероятности**

**Теорема 3.1.2 (Баеса).**  $]H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  — полная группа событий  
Тогда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$



*Пример.* В первой коробке 4 белых и два черных шара, во второй 1 белый и два черных. Из первой коробки во вторую переложили два шара, затем из второй коробки достали шар. Найти вероятность того что он оказался белый

*Решение.*

- ]  $H_1$  — переложили 2 белых
- ]  $H_2$  — переложили 2 черных
- ]  $H_3$  — переложили 1 черный и 1 белый
- ]  $A$  — из второй коробки достали белый

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\sum P(H_i) = 1 \text{ — верно}$$

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(A|H_2) = \frac{1}{5}$$

$$P(A|H_3) = \frac{2}{5}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)(A|H_1) + P(H_2)(A|H_2) + P(H_3)(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

**Задача 6.** По статистике 1% населения болен раком. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительным. Найти вероятность того что человек болен.

*Решение.* ]  $\left. \begin{array}{l} H_1 \text{ — болен} \\ H_2 \text{ — здоров} \end{array} \right\}, A \text{ — тест положительный}$

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(A|H_1) = 0.99$
- $P(A|H_2) = 0.01$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{1}{2}$$

Сделаем второй тест:

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(AA|H_1) = 0.99^2$
- $P(AA|H_2) = 0.01^2$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

# Лекция 4

## 4.1 Схема Бернулли

**Определение.** Схемой Бернулли называется серия независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, каждое интересующее нас событие либо произошло либо не произошло.

- $n$  — число испытаний
- $p$  — вероятность события  $A$  при одном испытании
- $q = 1 - p$
- $\nu_k$  — число успехов при  $k$  испытаниях
- $P_n(k) = P(\nu_k = k)$

**Теорема 4.1.1.** Вероятность того что при  $n$  испытаниях произойдет ровно  $k$  успехов равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

*Доказательство.* Рассмотрим один из исходов благоприятных событию  $A$ :  
 $A_1 = \underbrace{УУ \dots У}_k \underbrace{НН \dots Н}_{n-k}$  — независимые события

- $P(У) = p$
- $P(Н) = q$

$$P(A_1) = \underbrace{pp \dots p}_k \underbrace{qq \dots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

□

**Задача 7.** Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Найти вероятность того что при 5 выстрелах будут 3 попадания

Решение.

- $n = 5$
- $p = 0.8$
- $q = 0.2$
- $k = 3$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

#### 4.1.1 Наиболее вероятное число успехов

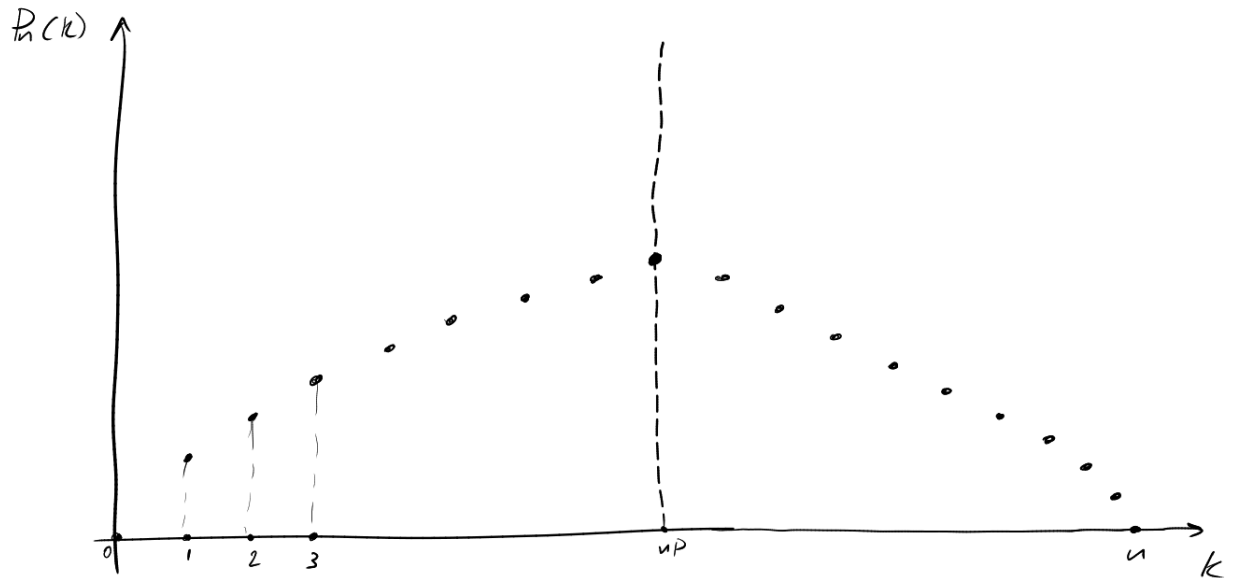
Выясним при каком значении  $k$  вероятность предшествующего числа успехов  $k - 1$  будет не больше чем вероятность  $k$  успехов

$$\begin{aligned} P_n(k-1) &\leq P_n(k) \\ C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} &\leq C_n^k p^k q^{n-k} \\ \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q &\leq \frac{n!}{k!(n-k)!} p \\ \frac{k!}{(k-1)!} q &\leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!} p \\ k(1-p) &\leq (n-k+1)p \\ k &\leq np + p \end{aligned}$$

Так как  $k$  — целое то выполняется:  $np + p - 1 \leq k \leq np + p$

Рассмотрим три ситуации:

1.  $np$  — целое. Тогда  $np + p$  — целое и  $k = np$  — наиболее вероятное число исходов
2.  $np + p$  — не целое. Тогда  $k = [np + p]$
3.  $np + p$  — целое. Тогда  $np + p - 1$  — целое и  $P_n(k-1) = P_n(k)$  и имеем два наиболее вероятных числа успехов:
  - $k = np + p$
  - $k = np + p - 1$



#### 4.1.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли

**Определение. Локальная формула Муавра-Лапласа.** Применяем когда требуется найти вероятность точного числа успехов.

$$P_n(\nu_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

, где  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$  — функция Гауса.

Свойства функции Гауса  $\varphi(x)$ :

1.  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  — четная
2. при  $x > 5$ ,  $\varphi(x) \approx 0$

**Определение. Интегральная формула Лапласа.** Применяем если число успехов лежит в некоем диапазоне.

$$P_n(k_1 \leq \nu_n \leq k_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$$

, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

— функция Лапласа

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства  $\Phi(x)$ :

1.  $\Phi(-x) = \Phi(x) - \text{нечетная}$
2. при  $x > 5$ ,  $\Phi(x) \approx 0.5$

*Примечание.* В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевается несколько иная функция, чаще всего:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2} 2dz$$

$$F_0(x) = 0.5 + \Phi(x) \text{ или } \Phi(x) = F_0(x) - 0.5$$

*Примечание.* Формулу применяем при  $n \geq 100$  и  $p, q \geq 0.1$

**Задача 8.** Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того что

1. произошло ровно 330 попаданий
2. произошло от 312 до 336 попаданий

*Решение.*

1.  $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 1.25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \varphi(1.25) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

2.  $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k_1 = 312, k_2 = 336$

$$x_1 = \frac{312 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2$$

$$P_{400}(312 \leq \nu_n \leq 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8185$$

## 4.2 Статистическое определение вероятности

- $n_A$  — число появления события  $A$  при  $n$  испытаниях
- $\frac{n_A}{n}$  — частота события  $A$

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}, \text{ при } n \rightarrow \infty$$

### 4.2.1 Вероятность отклонения относительной частоты

$p$  — вероятность события  $A$ ,  $\frac{n_A}{n}$  — частота  $A$

По интегральной формуле Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon) = P(-n\varepsilon \leq n_A - np \leq n\varepsilon) = P(np - n\varepsilon \leq n_A \leq np + n\varepsilon)$$

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

### 4.2.2 Закон больших чисел Бернулли

Более точно последняя формула выглядит так:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

при  $n \rightarrow \infty$   $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon \rightarrow \infty$  и  $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right) \rightarrow 0.5$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 2 \cdot 0.5 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

— закон больших чисел Бернулли

То есть при большом числе испытаний, будет близко к реальной вероятности

## Лекция 5

### 5.1 Схемы испытаний и соответствующие распределения

- $n$  — число испытаний
- $p$  — вероятность при одном испытании
- $q = 1 - p$  — вероятность неудачи при одном испытании

**Определение.**

$$k \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}$$

— биномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $p$

**Обозначение.**  $B_{n,p} = B(n, p)$

#### 5.1.1 Схема до первого успешного испытания

**Определение.** Схема до первого успешного испытания. Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успеха под номером  $\tau$

**Теорема 5.1.1.**  $p(\tau = k) = q^{k-1}p$

*Доказательство.*

$$p(\tau = k) = p(\underbrace{\text{НН} \dots \text{Н}}_{k-1} \text{У}) = q^{k-1}p$$

□

**Определение.**  $k \rightarrow q^{k-1}p$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  — называется **геометрическим распределением** с параметром  $t$

**Обозначение.**  $G(p)$

*Примечание.* Это распределение обладает так называемым свойством отсутствия после действия или свойством нестарения



**Теорема 5.1.2.**  $]p(\tau = k) = q^{k-1}p$

Тогда  $\forall n, k \in \mathbb{N} \ p(\tau > n + k | \tau > n) = p(\tau > k)$

*Доказательство.* По формуле условной вероятности:

$$p(\tau > n + k | \tau > k) = \frac{p(\tau > n + k \text{ и } \tau > j)}{p(\tau > n)} = \frac{p(\tau > n + k)}{p(\tau > n)} \quad (5.1)$$

$$p(\tau > m) = p(\text{первые } m \text{ неудач}) = q^m$$

$$5.1 = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$$

□

*Примечание.* То, проработет ли девайс  $k$  часов после этого, не зависит от того сколько проработал до этого

*Примечание.* Также  $p(\tau = n + k | \tau > n) = p(\tau = k)$

### 5.1.2 Испытание с несколькими исходами

Пусть при  $n$  испытаниях могут произойти  $m$  несовместных исходов

- $p_i$  — вероятность  $i$ -го исхода при одном отдельном испытании

**Теорема 5.1.3.** Вероятность того, что при  $n$  испытаниях первый исход появится  $n_1$  раз, второй  $n_2$  раз, ...,  $m$ -й  $n_m$  раз.  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$

Тогда

$$p(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

$$\text{Доказательство. } A_1 = \underbrace{11 \dots 1}_{n_1} \underbrace{22 \dots 2}_{n_2} \dots \underbrace{m \dots m}_{n_m}$$

$$p(A_1) = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$$

Остальные благоприятные исходы отличаются лишь расположением  $i$ -х исходов по  $n$  местам, а вероятности будут те-же. Всего таких исходов будет:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n_m}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

— формула для перестановок с повторениями

□

**Задача 9.** Два одинаковых по силе шахматиста играют матч из 6 партий. Вероятность ничьи при одной партии — 0.5. Найти вероятность того, что второй игрок две партии выиграл, а три партии свел в ничью

*Решение.* Исходы:

1. первый выиграл

2. второй выиграл

3. ничья

$$p_3 = \frac{1}{2}; p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}; n = 6$$

$$P(1, 2, 3) = \frac{6!}{1!2!3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{2^7}$$

### 5.1.3 Урновая схема

В урне  $N$  шаров. Из них  $K$  белых, а черных  $N - K$ . Из нее выбираем  $n$  шаров без учета порядка.  $k$  — число вынутых белых

**Теорема 5.1.4** (Схема с возвратом). Вероятность вынуть белый шар не меняется.

Тогда

$$p = \frac{K}{N} \quad p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

— биномиальное распределение

**Теорема 5.1.5** (Схема без возврата). Тогда

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

**Определение.**

$$k \rightarrow \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k \leq K$$

называется **гипергеометрическим** распределением вероятности

**Лемма 1.**

$$C_K^k \sim \frac{K^k}{k!}$$

, при  $K \rightarrow \infty, K = \text{const}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} C_K^k &= \frac{K!}{k!(K-k)!} = \frac{K(K-1)\dots(K-k+1)}{K^k} \cdot \frac{K^k}{k!} = \\ &= 1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{K}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{K}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{K}\right)}_{\downarrow 1} \cdot \frac{K^k}{k!} \sim \frac{K^k}{k!} \end{aligned}$$

□

**Теорема 5.1.6.**

- $N \rightarrow \infty$
- $K \rightarrow \infty$
- $\frac{K}{N} \rightarrow p \in (0, 1)$
- $n$  и  $0 \leq k \leq K$  — фиксированны

Тогда

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} P_{N,K}(n, k) &= \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{K^k}{k!} \cdot \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{N^n} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{K^k}{N^k} \cdot \frac{(N-K)^{n-k}}{N^{n-k}} = \\ &= C_n^k \left( \frac{K}{N} \right)^k \left( 1 - \frac{K}{N} \right)^{n-k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

□

#### 5.1.4 Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Схема: вероятность успеха при одном отдельном испытании зависит от числа испытаний  $n$  таким образом, чтобы  $n \cdot p_n = \lambda$  (точнее  $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ )

Появление очень редких событий в длинном потоке испытаний

**Теорема 5.1.7** (Формула Пуассона). Пусть  $n \rightarrow \infty$ ,  $p_n \rightarrow 0$ , так что  $np_n \rightarrow \lambda > 0$

Тогда вероятность  $k$  успехов при  $n$  испытаниях

$$p(\nu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

*Доказательство.* Положим  $\lambda_n = np_n$

$$\begin{aligned} p(\nu_n = k) &= C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{\lambda_n^k}{n^k} \cdot \left( 1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^{n-k} = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left( 1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^n \cdot \left( 1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left( 1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left( \left( 1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^{-\frac{n}{\lambda_n}} \right)^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

□

#### 1. Оценка погрешности в формуле Пуассона

**Теорема 5.1.8.** Пусть  $\nu_n$  – число успехов при  $n$  испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью  $p$

$\lambda = np$   $A \subset \{0, 1, 2, \dots, n\}$  – произвольное подмножество

Тогда погрешность

$$\left| p(\nu_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \min(p, \lambda p) = \min(p, np^2) = \min\left(p, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

*Примечание.* Формулу Пуассона иногда называют формулой редких событий. Применяем при малых  $p$ ,  $n \geq 100$

**Задача 10.** Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого элемента  $\frac{1}{1000}$ . Какова вероятность отказа больше двух элементов

*Решение.*

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

, где  $\lambda = np$

- $n = 1000$
- $p = 0.001$
- $\lambda = np = 1$
- $k > 2$

$$\begin{aligned} p(\nu_n > 2) &= 1 - p(\nu_n \leq 2) = 1 - (p(0) + p(1) + p(2)) \approx 1 - \left( \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= 1 - 2.5e^{-1} \approx 0.0803 \end{aligned}$$

Погрешность  $\varepsilon \leq \min(p, \lambda p) = 0.001$

# Лекция 6

## 6.1 Случайные величины

**Обозначение.**  $\xi$  — Случайная величина

*Пример.*  $\xi$  — число выпавших очков.  $\xi \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

*Пример.*  $\xi$  — время работы микросхемы до отказа

1. Время работы в часах

$$\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$$

2. Время работы измеряем точно

$$\xi \in [0, +\infty]$$

*Пример.*  $\xi$  — температура воздуха в случайный момент времени.  $\xi \in (-50^\circ, 50^\circ)$

*Пример.* Индикатор события  $A$ .

$$I_A(\omega) \in \begin{cases} 0 & , \omega \notin A \\ 1 & , \omega \in A \end{cases}$$

**Определение.** Пусть имеется вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ . Функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется  **$\mathcal{F}$ -измеримой**, если  $\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega | \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ .  
Т.е. прообраз  $\xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}$

**Определение.** Случайной величиной  $\xi$  заданной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  называется  $\mathcal{F}$ -измеримая функция Исправить, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу  $\omega$  некоторое вещественное число

*Пример.* Бросаем кость.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$
- $\xi(i) = i$

Если  $x = 4$ , то  $\{\omega | \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \Rightarrow \xi$  не является  $\mathcal{F}$ -измеримой

### 6.1.1 Смысл измеримости

Пусть случайная величина  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримая. Тогда  $P(\xi < x) = P(\{\omega | \xi(\omega) < x\})$ , т.к.  $A_x = \{\omega | \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ . Тогда

$$\overline{A_x} = \{\omega | \xi(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$$

$$A_x \setminus B_y = \{\omega | t \leq \xi(\omega) \text{ и } t < x\} \in \mathcal{F}$$

$$B_x = \text{Доделать}$$

$$B_x \setminus A_x = \{\omega | \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

Отсюда видим, по теореме Каво? Исправить можно однозначно продолжить до любого Борелевского множества на прямой.  $B \in \mathcal{B}$  — Борелевская  $\sigma$ -алгебра.  $P(B \in \mathcal{B}) = P\{\omega | \xi(\omega) \in B\}$

Пусть случайная величина задана на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ . Тогда:

1.  $(\Omega, \mathcal{F}, p) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, p)$  — новое вероятностное пространство
2.  $\xi^{-1}(B) \forall B \in \mathcal{B}$   
 $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$   
 $\mathcal{F}_\xi$  —  $\sigma$ -алгебра порожденная величиной  $\xi$

**Задача 11.** Найти  $\sigma$ -алгебру порожденную индикатором

**Определение.** Функция  $P(B)$   $B \in \mathcal{B}$  называется **распределением вероятностей** случайной величины  $\xi(\omega)$ . Т.е. распределение случайной величины это соответствие множествами на вещественной прямой и вероятностями случайной величины попасть в это множество

### 6.1.2 Типы распределения

- Дискретные
- Абсолютно непрерывные
- Смешанные
- Сингулярные (непрерывные но не абсолютно непрерывные)

1. Дискретные Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение, если она принимает не более чем счетное число значений, т.е. существует конечный или счетный набор чисел  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , такой что

$$(a) \quad p_i = p(\xi = x_i) > 0$$

$$(b) \quad \sum_i p_i = 1$$

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$\dots$
$p$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$	$\dots$

Доделать

Пример. Кость

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Доделать

(а) Основные числовые характеристики

i. Математическое ожидание(среднее значение) **Математическим ожиданием** случайной величины  $\xi$  называется число:

$$E\xi = \sum_i x_i p_i$$

при условии что данный ряд сходится абсолютно, иначе говорят что математическое ожидание не существует

**Обозначение.**  $E\xi$

*Примечание.* Смысл: среднее значение, число вокруг которого группируются значения случайной величины. Физический смысл: центр масс. Статистический смысл: среднее арифметическое наблюдаемых значений при большом значении реальных экспериментов

ii. Дисперсия

**Определение.** **Дисперсией**  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называется среднее квадратов отклонений ее от математического ожидания

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

или

$$D\xi = \sum_i (x_i - E\xi)^2 p_i$$

При условии что данное среднее значение существует(конечно)

*Примечание.* Вычислять дисперсию удобнее по формуле

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (E\xi)^2$$

*Примечание.* Смысл: квадрат среднего разброса(рассейния) случайной величины около ее математического ожидания

iii. Среднее квадратическое отклонение

**Определение.** Средним квадратическим отклонением ( $\sigma_\xi = \sigma(\xi)$ ) случайной величины  $\xi$  называется число

$$\sigma = \sqrt{D\xi}$$

*Примечание.* Смысл: характеризует средний разброс случайной величины около ее математического ожидания

*Пример.* Бросаем кость

$$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$$D\xi = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = 2.92$$

$$\sigma = \sqrt{2.92} \approx 1.7 \neq 1$$

(b) Свойства математического ожидания и дисперсии

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет вырожденное распределение, если  $\xi(\omega) = C = \text{const} \forall \omega \in \Omega$  или  $p(\xi = C) = 1$

$$E\xi = C = \text{const}$$

$$D\xi = 0$$

Доказательство. Доделать

□

**Определение** (Свойство сдвига).

$$E(\xi + C) = E\xi + C$$

$$D(\xi + C) = D\xi$$

Доказательство. Доделать

□

**Определение.**

$$E(C\xi) = CE\xi$$

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

Доказательство. Доделать

□

**Определение.**

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

Доказательство.

- Пусть  $x_i, y_i$  — соответствующие значения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$



$$E(\xi+\eta) = \sum_{i,j} (x_i+y_j)p(\xi=x_i, \eta=y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi=x_i, \eta=y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(\xi=x_i, \eta=y_j)$$

Доделать

□

**Определение.** Дискретные случайные величины **независимы** если  $\forall i, j \ p(\xi=x_i, \eta=y_j) = p(\xi=x_i) \cdot p(\eta=y_j)$

*Примечание.* Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то

$$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$$

обратное не верно

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} E(\xi\eta) &= \sum_{i,j} (x_i y_j) p(\xi=x_i, \eta=y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi=x_i, \eta=y_j) = \\ &= \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi=x_i) p(\eta=y_j) = \sum_i x_i p(\xi=x_i) \cdot \sum_j y_j p(\eta=y_j) = E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

□

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 \\ D\xi &= E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi - 2E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E(E\xi)^2 = \\ &= E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 \end{aligned}$$

□

*Примечание.*

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{Cov}(\xi, \eta)$$

, где  $\text{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$  — **ковариация**

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} D(\xi+\eta) &= E(\xi+\eta)^2 - (E(\xi+\eta))^2 = E\xi^2 + 2E\xi\eta + E\eta^2 - (E\xi)^2 - 2E\xi \cdot E\eta - (E\eta)^2 = \\ &= D\xi + D\eta + 2(E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta) \end{aligned}$$

□

*Примечание.* Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимые, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

*Доказательство.* По свойству  $\text{Cov}(\xi, \eta) = 0$

□

*Примечание.* Среднее квадратическое отклонение — минимум отклонения случайной величины от точек вещественной прямой, т.е.

$$D\xi = \min_a (y - a) \quad \text{Исправить}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} E(\xi - a)^2 &= E((\xi - E\xi) + (E\xi - a))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + \underbrace{2E(\xi - E\xi) \cdot (E\xi - a)}_0 + (E\xi - a)^2 = \\ &= D\xi + (E\xi - a)^2 \leq D\xi \end{aligned}$$

□

(с) Другие числовые характеристики

*Примечание.*

$$m_k = E\xi^k$$

— момент  $k$ -того порядка

В частности  $m_1 = E\xi$

*Примечание.*

$$E|\xi|^k$$

— абсолютный момент  $k$ -того порядка

*Примечание.*

$$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$$

— центральный момент  $k$ -того порядка

В частности  $\mu_2 = D\xi$

*Примечание.*

$$E|\xi - E\xi|^2$$

— абсолютный центральный момент  $k$ -того порядка

*Примечание.* Центральные моменты можно выразить через отклонительные моменты Доделать

*Примечание.* **Модой**  $Mo$  называется такое значение случайной величины, где вероятность события является наибольшей

$$p(\xi = Mo) = \max_i p_i$$

**Определение. Медианой**  $Me$  называется значение случайной величины такое что,

$$p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$$

# Лекция 7

## 7.1 Стандартное дискретное распределение

### 7.1.1 Распределение Бернулли

Обозначение.  $B_p$ ,  $0 < p < 1$

Определение.

- $\xi$  — число успехов при одном испытании
- $p$  — вероятность успеха при одном испытании

$$\begin{array}{c|cc} \xi & 1 & 0 \\ \hline p & p & 1-p \end{array}$$

$$E\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$D\xi = pq$$

### 7.1.2 Биномиальное распределение

Обозначение.  $B_{n,p}$

Определение.

- $\xi$  — число успехов при  $n$  испытаниях
- $p$  — вероятность успеха при одном испытании

$$\xi \in B_{n,p} \Leftrightarrow p(\xi = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Примечание.  $B_p = B_{1,p}$

$$\begin{array}{c|cccccc} \xi & 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ \hline p & q^n & \binom{n}{1} p \cdot q^{n-1} & \dots & \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \dots & p^n \end{array}$$

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$$

, при  $\xi_i \in B_{n,p}$

$$E\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$D\xi = pq$$

$$E\xi = \sum_{i=0}^n E\xi_i = np$$

$$D\xi = \sum_{i=0}^n D\xi_i = npq$$

### 7.1.3 Геометрическое распределение

**Обозначение.**  $G_p$

**Определение.**

- $\xi$  — номер первого успешного испытания
- $p$  — вероятность успеха при одном испытании

$$\xi \text{ in } G_p \Leftrightarrow p(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad 1 \leq k \leq \infty$$

$\xi$	1	2	...	k	...
$p$	$p$	$(1-p) \cdot p$	...	$(1-p)^{k-1} \cdot p$	...

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=0}^{\infty} (q^k)' = p \left( \sum_{n=0}^{\infty} q \right)' = p \cdot \left( \frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{p}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^p k^2 q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot (k-1) + k) \cdot q^{k-1} + p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

### 7.1.4 Распределение Пуассона

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Пуассона с параметром  $k > 0$ , если

$$p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad 0 \leq k < \infty$$

$\xi$	0	1	2	...	k	...
$p$	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$	...

$$E\xi = \lambda$$

$$E\xi^2 = \lambda^2 + \lambda$$

$$D\xi = \lambda$$

$$= \sqrt{\lambda}$$

### 7.1.5 Функция распределения

**Определение.**  $F\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  называется функция

$$F\xi(x) = p(\xi < x)$$

Пример.  $\frac{\xi}{p} \mid \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1-p & 0 < x \leq 1 \\ p & x > 1 \end{cases}$$

#### 1. Свойства функции распределения

**Свойство 1.**  $F(x)$  — ограниченная функция

**Свойство 2.**  $F(x)$  — неубывающая функция

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

Доказательство. Доделать

□

**Свойство 3.**

$$p(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Доказательство. Доделать

□

**Следствие 7.1.0.1.** Т.к. Борелевская  $\sigma$ -алгебра порождается интервалами, то зная функцию распределения можем найти вероятность попадания случайной величины в любое Борелевское множество  $B \in \mathfrak{B}$ , а значит полностью задается функцией распределения

**Свойство 4.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Т.к. функция  $F(x)$  — ограничена и монотонна, то эти пределы существуют.

**Свойство 5.**  $x_n \rightarrow \pm\infty$

$$]A_n = \{\omega \in \Omega \mid n-1 \leq \xi(\omega) < n\}$$

$$\begin{aligned} 1 = p(\Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (F(n) - F(n-1)) = \lim_{n \rightarrow 0} = \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{-N}^N (F(n) - F(n-1)) = \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} (F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N \rightarrow 0} F(N) - \lim_{N \rightarrow \infty} F(-N-1) = 1 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1 \end{aligned}$$

Доделать

**Свойство 6.**  $F(x)$  — непрерывна слева, т.е.  $F(x_0 - 0) = F(x_0)$

*Доказательство.*

$$\bullet ]B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < x_0\}$$

$$B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \emptyset$$

Следовательно по аксиоме непрерывности

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p(B_n) = 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n})) = \\ &= F(x_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) &= F(x_0) \Rightarrow F(x_0 - 0) = F(x_0) \end{aligned}$$

□

**Свойство 7.** Скачок в точке  $x_0$  равен вероятности в этой точке.

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$$

или

$$F(x_0 + 0) = F(x_0) + p(\xi = x_0) = p(\xi \leq x_0)$$

*Доказательство.*

$$\bullet C_n = \{x_0 < \xi < x_0 + \frac{1}{n}\}$$

По аксиоме непрерывности  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(C_n) = 0$

$$p(C_n) + p(\xi < x_0) = p(\xi = x_0)$$

$$p(x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$$

□

**Свойство 8.** Если  $F(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $p(\xi = 0) = 0$ .  
Следствие из 6

**Свойство 9.** Если  $F(x)$  непрерывна то,  $p(x_1 \leq \xi < x_2) = p(x_1 < \xi < x_2) = p(x_1 \leq \xi \leq x_2) = p(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

**Свойство 10.** Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение  $\Leftrightarrow$  ее функция распределения — ступенчатая функция

## 7.2 Абсолютно непрерывные случайные величины

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет **абсолютно непрерывное** распределение, если для любого Борелевского множества  $B \in \mathfrak{B}$

$$p(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x) dx$$

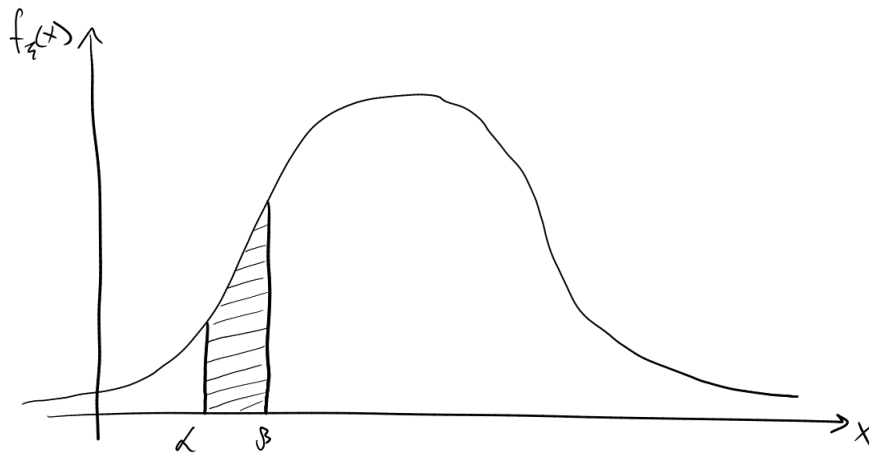
для некоторой функции  $f_\xi(x)$ . Интеграл Лебега а не Римана.

**Определение.**  $f_\xi(x)$  — **плотность распределения** случайной величины  $\xi$

### 7.2.1 Свойства плотности и функции распределения

**Свойство 1.** *Вероятностный геометрический смысл плотности.*

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x) dx$$



$$S = p(\alpha < \xi < \beta)$$

*Доказательство.* Из определения распределения  $B = (\alpha, \beta)$

□

**Свойство 2.** *Условие нормировки*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

*Доказательство.* По определению  $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1$  а  $B = \mathbb{R} \in \mathfrak{B}$  Исправить

□

**Свойство 3.**

$$F\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

*Доказательство.* По поределению

$$F_\xi(x) = p(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad B = (-\infty, x)$$

□

**Свойство 4.**  $F_\xi(x)$  — непрерывная функция. Как интеграл с переменным верхним пределом

**Свойство 5.**  $F_\xi(x)$  — дифференцируема почти всюду и

$$f_\xi(x) = F'(x)$$

почти для всех  $x$

*Доказательство.* Теорема Барроу.

□

*Примечание.* Почти для всех, кроме возможно  $x$  из множества нулевой меры Лебега.

**Свойство 6.**  $f_\xi(x) > 0$

*Доказательство.* Из определения или из 5

□

**Свойство 7.**  $p(\xi = x_0) = 0$

**Свойство 8.**  $p(x_1 < / \leq \xi < / \leq x_2) = F(x_2) - f(x_1)$

**Свойство 9.** Если для  $f(x)$  выолнено свойства 2 и 6 то она является плотностью некоторой случайной величины

## 7.2.2 Числовые характеричтики

**Определение.** Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины  $\xi$  называется число

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

при условии что данный интеграл сходится абсолютно, т.е.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$



**Определение.** Дисперсией абсолютно непрерывной случайной величины  $\xi$  называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 f(x) dx$$

при условии что интеграл сходится абсолютно

*Примечание.*

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (E\xi)^2$$

**Определение.** Среднее квадратическое отклонение  $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

*Примечание.* Смысл свойств этих числовых характеристик полностью идентичны дискретной случайной величины