

# Лекция 3

Илья Yaroshevskiy

5 марта 2021 г.

## Содержание

### 1 Производящие функции для объектов

1

## 1 Производящие функции для объектов

- Оюъединение

$$A, B \quad A \cap B = \emptyset \quad C = A \cup B$$

$$A(t) \quad B(t)$$

$$C(t) = A(t) + B(t)$$

$$c_n = a_n + b_n$$

- Пара

$$C = A \times B \quad \text{Pair}(A, B)$$

$$C(t) = A(t) \cdot B(t)$$

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

- Последовательности

$$C = \text{Seq } A = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots \quad a_0 = 0$$

$$C(t) = 1 + A(t) + A(t) \cdot A(t) + A(t)^3 + \dots$$

$$C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$

- Множества

$$\varepsilon \text{ вес } 0$$

$$\text{Set } A = \bigtimes_{a \in A} (\varepsilon \cup a)$$

$$C(t) = \prod_{a \in A} (1 + t^{\omega(a)}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + t^k)^{a_k}$$

Пример.  $\text{Set } \{\square, \boxplus\} \quad a_1 = 1, a_2 = 1$

$$C(t) = (1 + t)(1 + t^2) = t^3 + t^2 + t + 1$$

- Мультимножества

$$\text{MSet } A = \bigtimes_{a \in A} (\varepsilon \cup a \cup a^2 \cup \dots) = \prod_{a \in A} \text{Seq}\{a\}$$

$$C(t) = \prod_{a \in A} \frac{1}{1 - t^{\omega(a)}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - t^k} \right)^{a_k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)^{-a_k}$$

Пример.  $\text{MSet}\{\square, \boxplus\}$

$$C(t) = \frac{1}{(1 - t)(1 - t^2)} = \frac{1}{(1 - t^2)(1 + t)}$$

$$c_n = dn + e + f \cdot (-1)^n$$

Пример.  $\text{Seq}_{=k}(A) = A^k$  — ровно 3 элемента

$$\text{Seq}_{\geq k}(A) = A^k \times \text{Seq}(A) \frac{A(t)^k}{1 - A(t)}$$

$$\text{Seq}_{\leq k}(A) = \frac{1}{1 - A(t)} - \frac{A(t)^{k+1}}{1 - A(t)} = \frac{1 - A(t)^{k+1}}{1 - A(t)}$$