Лекция 7

Ilya Yaroshevskiy

January 11, 2021

Contents

1 Функциональные последовательности и ряды

$u_n : X \to Y$, где Y - нормированное пространство
$S_n \rightrightarrows S$ на E $M_n := \sup\limits_{x\in E} |S_n(x) - S| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Критерий Больциано-Коши $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \forall x \in E \quad |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$
Отрицание критерия Больциано-Коши $\exists > 0\ \forall N\ n > N\ \exists p \in \mathbb{N}\ \exists x \in E \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \geq \varepsilon$

Пример. $\sum x^n \quad x \in (0, 1)$ нет равномерной сходимотсти
$\exists\varepsilon = \frac{1}{10}\ \forall N\ \exists n > N -$ любое $> 100\ \exists p = 1\ \exists x = 1 - \frac{1}{n+1} \quad |u_{n+1}(x)| \geq \varepsilon$, т.е. $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} = \frac{1}{e} > \frac{1}{10}$

Теорема 1. (признак Вейерштрасса)
$\sum u_n(x) \quad x \in X$
Пусть $\exists C_n$ - вещественная последовательность, $\begin{cases} u_n(x) \leq C_n \\ \sum c_n - \text{сходится} \end{cases}$, тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Proof. $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq C_{n+1} + \dots + C_{n+p}$ - Тривиально
$\sum c_n$ - сходится $\Rightarrow$ удовлетворяет критерию Больциано-Коши: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad C_{n+1} + \dots + C_{n+p} < \varepsilon$
Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больциано-Коши равномерной сходимости □

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1 + n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
$C_n := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{x}{1 + n^2x^2}\right| = \dfrac{1}{2n}$, ряд $\sum \frac{1}{2n}$ расходится, значит признак Вейерштрасса не применим

Пример. $\sum \frac{x}{1+x^2n^2} \quad x \in [\frac{1}{2020}, 2020]$
$C_n := \sup \dfrac{x}{1 + x^2n^2} \leq \dfrac{2020}{1 + \frac{1}{2020} \cdot n^2} \underset{n\to+\infty}{\simeq} \dfrac{c}{n^2}$, $\sum C_n$ - сходится $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость

1.1 Приложение равномерной сходимости для рядов

Теорема 2. 1'(Стокса, Зайдля для рядов)
$u_n : \underbrace{X}_{\text{метр. пр.}} \to \underbrace{Y}_{\text{норм. пр.}} \quad x_0 \in X$ u_n - непрерывно в x_0
Пусть $\sum u_n(x)$ - равномерно сходится на X, $S(x) := \sum u_n(x)$
Тогда $S(x)$ - непрерывна в x_0

Proof. по теореме 1(Стокса, Зайдля). $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_n(x)$ непрерывна в $x_0 \Rightarrow S(x)$ непрывна в x_0 □

Примечание. Достаточно, чтобы была равномерная сходимость $\sum u_n$ на $U(x_0)$

Примечание. $u_n \in C(x)$, $\sum u_n$ - равномерно сходится на $X \Rightarrow S(x) \in C(X)$

Теорема 3. 2'(о почленном интегрировании ряда)
$u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, непрерывные на $[a,b]$
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ - равномерно сходится на $[a,b]$, $S(x) = \sum u_n(x)$
Тогда $\int\limits_a^b S(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)$
$S(x)$ - непрерывно на $[a,b]$ по теореме 1' $\Rightarrow$ можно интегрировать

Proof. По теореме 2' $S_n \rightrightarrows S$ на $[a,b]$ $\sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_a^b u_k = \int\limits_a^b S_n dx \to \int\limits_a^b S(x)dx$

□

Пример. $\sum(-1)^n x^n$ - равномерно сходится при $|x| \leq q < 1$ по признаку Вейерштрасса: $|(-1)^n x^n| \leq q^n \quad \sum q^n$ - сходится
Проинтегрируем от 0 до t : $|t| \leq q$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}$ - сумма прогресии
$\ln(1+t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{t^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{t^k}{k}$ — верно при $t \in [-q, q]$ для любого $q : 0 < q < 1$, т.е верно при $t \in (-1, 1)$, при $t = 1 \quad \sum -\frac{1}{k}$ - расходится
$t \to 1$ ряд $\sum(-1)^k \frac{t^k}{k}$ равномерно сходится на $[0,1]$, слагаемые непрерывны в $t_0 = 1 \xRightarrow{\text{т. 1}}$ Сумма ряда непрерывна в точке $t_0 = 1$
по "секретному" приложению признака Лейбница
$\forall t \ \frac{t^k}{k}$ - монотонна по k $|\sum\limits_{k=N}^{+\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{t^k}{k}| \leq |\dfrac{t^N}{N}| \leq \dfrac{1}{N} \to 0$ — это и есть утверждение о равномерной сходимости ряда

2 Криволинейный интеграл

2.1 Интеграл векторного поля по кусочно гладкому пути

Определение. Путь — $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - непрерывно
$\gamma(a)$ - начало пути, $\gamma(b)$ - конец пути
$\gamma([a,b])$ - носитель пути
Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ — замкнутый путь(петля)
Если γ - гладкий или кусочно гладкий, $\gamma'(t)$ - вектор скорости
$\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t),\ \dots,\ \gamma_m(t)) \quad \gamma' = (\gamma_1',\ \dots,\ \gamma_m')$
Длина гладкого пути $l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|dt$

Определение. Путь γ - кусочно гладкий
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
γ - дифф. на (t_k, t_{k+1}) $\forall k,\ 0 \leq k \leq n-1$
$\exists$ односторонние производные в точках t_i
можно считать $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ - гладкое отображение

Определение. Векторное поле: $V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - непрерывное
$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$ - вектор приложенный к точке x

Определение. Интеграл векторного поля по кусочно гладкому пути
$$I(V,\gamma) = \int\limits_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int\limits_a^b \sum_{i=1}^{m} V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)dt = \int\limits_a^b V_1 d\gamma_1 + V_2 d\gamma_2 + \dots + V_m d\gamma_m$$

Используется обозначение $I(V,\gamma)=\int_\gamma V_1dx_1+\dots+V_mdx_m$ — аналогично последнему выражению в равенстве

Второе выражение в равенстве запишем так: $\sum\limits_{k=1}^{n}\langle V(\gamma(\xi_k)),\gamma'(\xi_k)\rangle\cdot(t_k-t_{k-1})$, где ξ_k - точки оснащния

$$=\sum\underbrace{\langle V(\gamma(\xi_k)),\frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|}\rangle}_{\text{проекция силы на касательное направление}}\cdot\underbrace{|\gamma'(\xi_k)|\cdot(t_k-t_{k-1})}_{\text{пройденный путь}}$$

Свойства:

1. Линейность интгрела по полю:
$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall U,V$ - векторных полей $I(\alpha U+\beta V,\gamma)=\alpha I(U,\gamma)+\beta I(V,\gamma)$

   Proof. Из определения(первый двух выражений в равенстве) □

2. Аддитивность интеграла при дроблении пути:
$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m\quad c\in[a,b]\quad\gamma^1=\gamma|_{[a,c]}\ \gamma^2=\gamma|_{[c,b]}$
Тогда $I(V,\gamma)=I(V,\gamma^1)+I(V,\gamma^2)$

   Proof. По аддитивности интеграла(первый двух выражений в равенстве) □

3. Замена параметра
$\varphi:[p,q]\to[a,b]\ \varphi\in C^1\ \varphi(p)=a,\ \varphi(q)=b\quad\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m\ \tilde\gamma=\gamma\circ\varphi$
Тогда $I(V,\gamma)=I(V,\tilde\gamma)$ - это замена переменных в интеграле

   Proof. $I(V,\tilde\gamma)=$
$$=\int_p^q\langle V(\gamma(\varphi(S))),\underbrace{\tilde\gamma'(S)}_{\gamma'(\varphi(S))\cdot\varphi'(S)}\rangle ds=\int_p^q\langle V(\gamma(\varphi(S))),\gamma'(\varphi(S))\rangle\cdot\varphi'(s)ds\underset{t:=\varphi(s)}{=}\underbrace{\int_a^b\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt}_{I(V,\gamma)}$$
□

   Примечание. По теореме о двух параметризациях
$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ - параметризация гладкого одномерного многообразия(простое)
$\tilde{}:[p,q]\to\mathbb{R}^m$ диффеоморфизм $\varphi:[p,q]\to[a,b]\quad\tilde\gamma=\gamma\circ\varphi$

4. Объединение носителей
$\gamma^1:[a,b]\to\mathbb{R}^m\quad\gamma^2:[c,d]\to\mathbb{R}^m\quad\gamma^1(b)=\gamma^2(c)$
Зададим новый путь $\gamma=\gamma^2\gamma^1:[a,b+d-c]\to\mathbb{R}^m\quad\gamma(t)=\left[\begin{array}{ll}\gamma^1(t) & ,t\in[a,b]\\ \gamma^2(t+c-b) & ,t\in[b,b+d-c]\end{array}\right.$
В точке b излом. Если $\gamma^1,\ \gamma^2$ - кусочно гладкие, то γ - кусочно гладкий
Тогда $I(V,\gamma^2\gamma^1)=I(V,\gamma^1)+I(V,\gamma^2)$

   Proof. $I(V,\gamma)=\int_a^{b+d-c}\dots=\int_a^b\dots+\underbrace{\int_b^{b+d-c}\dots}_{\text{замена }\tau=t-b+c}=I(V,\gamma^1)+\int_c^d\langle V(\gamma^2(\tau)),(\gamma^2)'(\tau)\rangle d\tau=I(V,\gamma^1)+I(V,\gamma^2)$
При замене: $\gamma(t)=\gamma^2(t+c-b)=\gamma^2(\tau)\quad\gamma'(t)=(\gamma^2)'(t+c-b)=(\gamma^2)'(\tau)$ □

5. Противоположный путь
$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m\quad\gamma^-:[a,b]\to\mathbb{R}^m\quad\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$ - противоположный путь
Тогда $I(V,\gamma)=-I(V,\gamma^-)$

   Proof. $I(V,\gamma^-)=$
$$=\int_a^b\langle V(\gamma(a+b-\tau)),-\gamma'(a+b-\tau)\rangle d\tau\underset{t=a+b-\tau}{=}=\int_a^b\langle V(\gamma(t)),-\gamma'(t)\rangle\cdot(-dt)=-I(V,\gamma)$$
При замене $(\gamma^-)'(\tau)=-\gamma(a+b-\tau)$ □

6. Оценка интеграла векторного поля по пути
   $|I(V,\gamma)| \le \max\limits_{x\in L}|V(x)|\cdot l(\gamma)$, где $L=\gamma([a,b])$ - носитель пути
   $$\int_a^b \langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt \le \int_a^b |\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle| dt \le \int_a^b |V(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|dt \le \max_{x\in L}|V(x)|\cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|dt}_{l(\gamma)}$$
   Можем писать max, т.к. V - непрерывна, L - компакт(путь непрерывен, образ замкнутого отрезка под действием непрерывного отображения(носитель) компакт)

2.2 Потенциальное поле

Определение. $V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - в поле
V - потенциально, если оно имеет потенциал
$\exists \underbrace{f}_{\text{потенциал}} \in C^1(O): \quad \mathrm{grad} f = V$ в области O

Теорема 4. (обобщеная формула Ньютона-Лейбница)
$V : O \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^m$, потенциально, f — потенциал V
$\gamma : [a,b] \to O \quad \gamma(a)=A,\ \gamma(b)=B$
Тогда $I(V,\gamma) = \displaystyle\int_\gamma \sum u_k dx_k = f(B) - f(A)$

Proof. 1. γ - гладкий $\Phi(t) = f(\gamma(t)) \quad \Phi' = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\cdot\gamma_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\cdot\gamma_m'(t)$
   Учитывая что $\mathrm{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m}) = V$
   $$\int_\gamma \sum u_k dx_k = \int_a^b \Phi'(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) = f(b) - f(a)$$

2. γ - кусочно гладкий $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = v \quad \gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$
   $\displaystyle\int_\gamma \sum u_n dx_k = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t^k} \langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt \underset{\text{п. 1}}{=} \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) = f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) =$ $f(B) - f(A)$
   Последняя сумма является телескопической

□