

Лекция 4

Илья Yaroshevskiy

5 марта 2021 г.

Содержание

1 Табличные модели	1
2 Модели Крипке	1
3 Доказательство нетабличности	2

Определение. Предпорядок — транзитивное, рефлексивное

Определение. Отношение порядка (частичный) — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное

Определение. Линейный порядок — порядок в котором $a \preceq b$ или $b \preceq a$

Определение. Полный порядок — линейный, каждое подмножество имеет наименьший элемент.

Пример. \mathbb{N} — вполне упорядоченное множество

Пример. \mathbb{R} — не вполне упорядоченное множество

- $(0, 1)$ не имеет наименьшего
- \mathbb{R} не имеет наименьшего

1 Табличные модели

Определение. Назовем модель **табличной** для ИИВ:

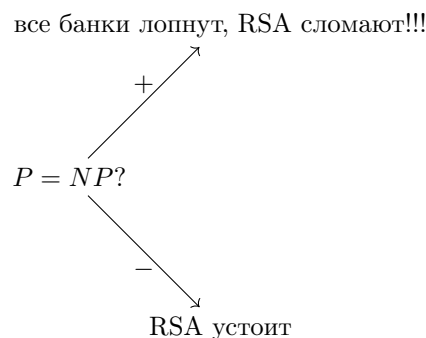
- V — множество истинностных значений
 $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_V : V^2 \rightarrow V, f_{\neg} : V \rightarrow V$
Выделенные значения $T \in V$
 $\perp \in V, f_p : p_i \rightarrow V$
- $p_i = f_p(p_i)$
 $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$
 $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$

Если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$ означает, что $\llbracket \alpha \rrbracket = T$, при любой f_p

Определение. Конечная модель: модель где V — конечно

Теорема 1.1. У ИИВ не существует полной табличной модели

2 Модели Крипке



1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок (\succeq)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
 $(\Vdash) \subseteq W \times \mathcal{P}$
 При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_k \Vdash p_i$

Определение.

1. $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда (и только тогда) $W_i \Vdash \alpha \& \beta$
2. $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
3. Пусть во всех $W_i \preceq W_j$ всегда когда $W_j \Vdash \alpha$ имеет место $W_j \Vdash \beta$
 Тогда $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$
4. $W_i \Vdash \alpha$ — α не вынуждено нигде, начиная с W_i : $W_i \preceq W_j$, то $W_j \nVdash \alpha$

Теорема 2.1. Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$

Определение. Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\models \alpha$

Теорема 2.2. ИИВ корректна в модели Крипке

Доказательство. 1. $\langle W, \Omega \rangle$ — топология, где $\Omega = \{w \subseteq W \mid \text{если } W_i \in w, W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in w\}$

2. $\{W_k \mid W_k \Vdash p_j\}$ — открытое множество
 Примем $\llbracket p_j \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash p_j\}$
 Аналогично $\llbracket \alpha \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash \alpha\}$

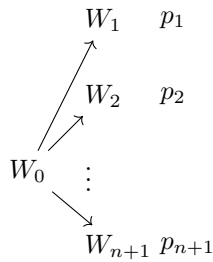
□

3 Доказательство нетабличности

Пусть существует конечная табличная модель $|V| = n$

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} (p_i \rightarrow p_j \& p_j \rightarrow p_i)$$

1. $\nVdash \varphi$



$$W_1 \nVdash (p_i \rightarrow p_k) \& (p_k \rightarrow p_1), \quad k \neq 1$$

Значит

$$\begin{aligned} & \nVdash (p_i \rightarrow p_j) \& (p_j \rightarrow p_i) \\ & \nVdash \bigvee (p_i \rightarrow p_j) \& (p_j \rightarrow p_i) \\ & \nVdash \varphi_n \end{aligned}$$

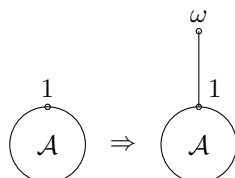
2. $\models_V \varphi_n$: по признаку Дирихле найдутся $i \neq j : \llbracket p_i \rrbracket = \llbracket p_j \rrbracket$
 $\llbracket p_i \rightarrow p_j \rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket \varphi_n \rrbracket = \text{И}$
 Значит $\vdash \varphi_n$ — противоречие

Определение. Дизъюнктивность ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

Определение. Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

Определение. Пусть \mathcal{A} — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathcal{A})$



Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathcal{A})}$ переименуем $1_{\mathcal{A}}$ в ω

Теорема 3.1.

- $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга
- $\Gamma(\mathcal{A})$ — Гёделева

Определение. Гомоморфизм алгебр Гейтинга

- $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$

Теорема 3.2. $a \leq b$, то $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

Определение.

- α — формула ИИВ
- f, g : оценки ИИВ
- f : ИИВ $\rightarrow \mathcal{A}$
- g : ИИВ $\rightarrow \mathcal{B}$

Недописано

Теорема 3.3. если $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ согласована с f, g Недописано

Рассмотрим алгебру Линденбаума? Фокус сломался