Лекции по Математической логике 4 семестр

Ilya Yaroshevskiy

8 апреля 2021 г.

Оглавление

1 TODO **2**

2 TODO **3**

3 TODO **4**

4 **5**

4.1 Табличные модели 5

4.2 Модели Крипке 6

4.3 Доказательство нетабличности 7

5 **9**

5.1 Программы 9

5.1.1 Исчесление предикатов 11

5.1.2 Теория моделей 11

5.1.3 Теория доказательств 13

6 **14**

6.1 Исчисление предикатов 14

6.1.1 Расставление скобок 14

6.1.2 Вхождение 15

6.1.3 Свободные подстановки 15

6.1.4 Пример доказательства 16

6.1.5 Теорема о дедукции 16

7 **17**

7.1 Полнота исчесления предикатов 17

Лекция 1

TODO

Лекция 2

TODO

Лекция 3

TODO

Лекция 4

Определение. Предпорядок — транзитивное, рефлексивнре

Определение. Отношение порядка (частичный) — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное

Определение. Линейный порядок — порядок в котором $a \preceq b$ или $b \preceq a$

Определение. Полный порядок — линейный, каждое подмножество имеет наименьший элемент.

Пример. $\mathbb{N}$ — вполне упорядоченное множество

Пример. $\mathbb{R}$ — не вполне упорядоченной множество

- $(0, 1)$ не имееи наименьшего
- $\mathbb{R}$ не имеет наименьшего

4.1 Табличные модели

Определение. Назовем модель **табличной** для ИИВ:

- V — множество истинностных значений
  $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_{V} : V^2 \rightarrow V,\ f_{\neg} : V \rightarrow V$
  Выделенные значения $T \in V$
  $+i\rrbracket \in V\ f_p : p_i \rightarrow V$
- $p_i = f_{\mathcal{P}}(p_i)$
  $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$
  $\llbracket \neg\alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$

~~Если $\vdash \alpha$, то~~ $\vDash \alpha$ означает, что $\llbracket \alpha \rrbracket = T$, при любой $f_{\mathcal{P}}$

Определение. Конечная модель: модель где V — конечно

Теорема 4.1.1. У ИИВ не существует полной табличной модели

4.2 Модели Крипке

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{все банки лопнут, RSA сломают!!!} \\
P = NP? \arrow[ur, "+"] \arrow[dr, "-"'] & \\
 & \text{RSA устоит}
\end{tikzcd}
$$

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок($\succeq$)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
   $(\Vdash) \subseteq W \times \mathcal{P}$
   При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_j \Vdash p$

Определение.

1. $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда (и только тогда) $W_i \Vdash \alpha \& \beta$
2. $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
3. Пусть во всех $W_i \preceq W_j$ всегда когда $W_j \Vdash \alpha$ имеет место $W_j \Vdash \beta$
   Тогда $W_i \Vdash \alpha \to \beta$
4. $W_i \Vdash \neg\alpha$ — α не вынуждено нигде, начиная с W_i: $W_i \preceq W_j$, то $W_j \nVdash \alpha$

Теорема 4.2.1. Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$

Определение. Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\vDash \alpha$

Теорема 4.2.2. ИИВ корректна в модели Крипке

Доказательство. 1. $\langle W, \Omega \rangle$ — топология, где $\Omega = \{w \subseteq W | \text{если } W_i \in w,\ W_i \preceq W_j,\ \text{то } W_j \in w\}$

2. $\{W_k | W_k \Vdash p_j\}$ — открытое множество
   Примем $[\![p_j]\!] = \{W_k | W_k \Vdash p_j\}$
   Аналогично $[\![\alpha]\!] = \{W_k | W_k \Vdash \alpha\}$

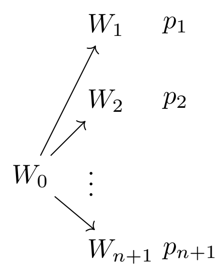
□

4.3 Доказательство нетабличности

Пусть существует конечная табличная модель $|V| = n$

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \le i,j \le n+1 \\ i \ne j}} (p_i \to p_j \& p_j \to p_i)$$

1. $\nvDash \varphi$



$$W_1 \nVdash (p_i \to p_k) \& (p_k \to p_1),\ k \ne 1$$

Значит

$$\nvDash (p_i \to p_j) \& (p_j \to p_i)$$

$$\nvDash \bigvee (p_i \to p_j) \& (p_j \to p_i)$$

$$\nvDash \varphi_n$$

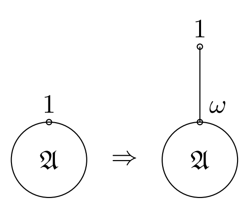
2. $\vDash_V \varphi_n$: по признаку Дирихле найдутся $i \ne j : [\![p_i]\!] = [\![p_j]\!]$
   $[\![p_i \to p_j]\!] =$ И и $[\![\varphi_n]\!] =$ И
   Значит $\vdash \varphi_n$ — противоречие

Определение. Дизъюнктивность ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

Определение. Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathfrak{A})$



Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathfrak{A})}$ перенеименуем $1_{\mathfrak{A}}$ в ω

Теорема 4.3.1.

- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — алгебра Гейтинга
- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — Геделева

Определение. Гомоморфизм алгебр Гейтинга

- $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}$
- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$
- $\varphi(0_{\mathfrak{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$

Теорема 4.3.2. $a \le b$, то $\varphi(a) \le \varphi(b)$

Определение.

- α — формула ИИВ
- f, g: оценки ИИВ
- f: ИИВ $\to \mathfrak{A}$
- g: ИИВ $\to \mathcal{B}$

φ согласованы f, g, если $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

Теорема 4.3.3. если $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}$ согласована с f, g и оценка $[\![\alpha]\!]_g \ne 1_{\mathcal{B}}$, то $[\![\alpha]\!]_f \ne 1_{\mathfrak{A}}$

Теорема 4.3.4. ИИВ дизъюнктивно

Доказательство. Рассмторим алгебру Линденбаума: $\mathcal{L}$
Рассмотрим $\Gamma(\mathcal{L})$

- $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}} & , \substack{x=\omega \\ x=1_{\Gamma(\mathcal{L})}} \\ x & , \text{иначе} \end{cases}$$

φ — гомоморфизм
Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$, тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$
$[\![\alpha + \beta]\!] = 1$, и т.к. $\Gamma(\mathcal{L})$ — Геделева то $[\![\alpha]\!] = 1$ или $[\![\beta]\!] = 1$
Пусть $\not\vdash \alpha$ и $\not\vdash \beta$, тогда $\varphi([\![\alpha]\!]) \ne 1_{\mathcal{L}}$ и $\varphi([\![\beta]\!]) \ne 1_{\mathcal{L}}$, т.е. $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} \ne 1_{\mathcal{L}}$ и $[\![\beta]\!]_{\mathcal{L}} \ne 1_{\mathcal{L}}$, тогда $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \ne 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$ и $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \ne 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$ $\Rightarrow$ Противоречие $\square$

Лекция 5

5.1 Программы

программа(функция)

- $P : \alpha \to \beta$ — берет α, возвращает β
- P — доказательство, что из α следует β

  Пример.

  ```
  f a = a
  ```

  $f : A \to A$ — f доказывает что, из A следует A

логическок исчесления	Типизированное λ-исчесление
логическая формула	тип
доказательство	значение
доказуемая формула	обитаемый тип(имеет хотя бы один экземпляр)
$\to$	функция
&	упорядоченная пара
$\vee$	алг. тип(тип-сумма)

Пример. 5 доказывает Int

Пример. Список:

```
Type list = Record
   Nul: boolean;
   case Nul of
     True  : ;
     False : Next: ^list;
end;
```

```
struct list {
        *list next;
};
```

Если `next == NULL` — то конец

Пример. Дерево:

```
struct tree {
        tree* left;
        tree* right;
        int value;
};
```

Определение. Отмеченное(дизъюнктное) объединение множеств:

- A, B — множества
- $A \sqcup B = \{\langle \text{“}A\text{“}, a\rangle | a \in A\} \cup \{\langle \text{“}B\text{“}, a\rangle | b \in B\}$

Пусть $S \in A \sqcup B$. Мы знаем откуда S

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
example = Cons 1 (Cons 2 (Cons 3 Nil)) -- [1; 2; 3]
```

```
union {
        int a;
        char b;
};
```

Пример.

$$\frac{\Gamma \vdash \overset{\text{Nil}}{\alpha} \to \gamma \quad \Gamma \vdash \overset{\text{Cons}}{\beta} \to \gamma \quad \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \underset{\text{int}}{\gamma}}$$

```
let rec count l (* α + β *) =
match l with
   | Nil (* α *) -> 0 (* α → int *)
   | Cons(hd, tl) (* β *) -> 1 + count tl (* β → int *)
```

5.1.1 Исчесление предикатов

Определение. Язык исчисление предикатов

- логические выражения “предикаты“/“формулы“
- предметные выражния “термы“

Θ — метаперменные для термов
Термы:

- Атомы:
  - $a, b, c, d, \ldots$ — предметные переменные
  - x, y, z — метапеременные для предметных перменных
- Функциональные Символы
  - f, g, h — Функциональные символы(метаперемнные)
  - $f(\Theta_1, \ldots \Theta_n)$ — применение функциональных символов
- Логические выражения:
  Если $n = 0$, будем писать f, g — без скобок
  - P — метаперменные для предикатных символов
  - A, B, C — предикатный символ
  - $P(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ — применение предикатных символов
  - $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ — Связки
  - $\forall x.\varphi$ и $\exists x.\varphi$ — кванторы
    “<квантор> <переменная>.<выражение>“

1. Сокращение записи И.В + жадность $\forall, \exists$
   Метавыражение:
   $$\forall x.(P(x)\&(\forall y.P(y)))$$
   Квантор съедает все что дают, т.е. имеет минимальный приоритет.
   Правильный вариант(настоящее выражние):
   $$\forall a.B(A)\&\forall b.B(b)$$

5.1.2 Теория моделей

Оценка формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множетво
2. Каждому $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставим функцию $D^n \rightarrow D$

3. Каждому $P_j(x_1,\dots,x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^2 \to V$
4. Каждой x_i сопоставим элемент из D

Пример.

$$\forall x.\forall y.\ E(x,y)$$

Чтобы определить формулу сначала определим $D = \mathbb{N}$

$$E(x,y) = \begin{cases} \text{И} & ,x = y \\ \text{Л} & ,x \neq y \end{cases}$$

- $[\![x]\!] = f_{x_i}$
- $[\![\alpha \star \beta]\!]$ — смотри ИИВ
- $[\![P_i(\Theta_1,\dots,\Theta_n)]\!] = f_{P_i}([\![\Theta_1]\!],\dots,[\![\Theta_n]\!])$
- $[\![f_j(\Theta_1,\dots,\Theta_n)]\!] = f_{f_j}([\![\Theta_1]\!],\dots,[\![\Theta_n]\!])$
- $$[\![\forall x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & \text{, если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при всех } k \in D \\ \text{Л} & \text{, иначе} \end{cases}$$
- $$[\![\exists x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & \text{, если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при некотором } k \in D \\ \text{Л} & \text{, иначе} \end{cases}$$

$$[\![\forall x.\forall y.E(x,y)]\!] = \text{Л}$$

т.к. $[\![E(x,y)]\!]^{x:=1,\ y:=2} = \text{Л}$

Пример.

$$\forall\ \boxed{\varepsilon > \boxed{0}}\ \exists N\ \forall\ \boxed{\boxed{\text{n}} > \boxed{\text{N}}}\quad \boxed{\boxed{|\text{a}_n - a|} < \boxed{\varepsilon}}$$

Синим отмечены функциональные конструкции(термы), зеленым предикатные

$$\forall \varepsilon.(\varepsilon > 0) \to \exists N.\forall n.(n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначим:

- $(>)(a,b) = G(a,b)$ — предикат
- $|\bullet|(a) = m_|(a)$
- $(-)(a,b) = m_-(a,b)$
- $0() = m_0$
- $a_\bullet(n) = m_a(n)$

$$\forall e.\ \boxed{\text{G}(\boxed{\text{e}},\ \boxed{\text{m}_0})} \to \exists n_0.\forall n.\ \boxed{\text{G}(\text{n},\ \text{n}_0)} \to \boxed{\text{G}\Big(\text{e},\ \boxed{\text{m}_|\Big(m_-\big(m_a(n),a\big)\Big)}\Big)}$$

5.1.3 Теория доказательств

Все аксимомы И.В + М.Р.

(схема 11) $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \Theta]$

(схема 12) $\varphi[x := \Theta] \to \exists x.\varphi$

Если Θ свободен для подстановки вместо x в φ.

Определение. Свободен для подстановки — никакое свободное вхождение x в Θ не станет связанным

Пример.

```
int y;
int f(int x) {
        x = y;
}
```

Заменим `y := x`. Код сломается, т.к. у нас нет свобод для подстановки

(Правило $\forall$)

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi}$$

(Правило $\exists$)

$$\frac{\psi \to \varphi}{\exists x.\psi \to \varphi}$$

В обоих правилах x не входит свободно в φ

Пример.

$$\frac{x = 5 \to x^2 = 25}{x = 5 \to \forall x.x^2 = 25}$$

Между x и x^2 была связь, мы ее разрушили. Нарушено ограничение

Пример.

$$\exists y.x = y$$

$$\forall x.\exists y.x = y \to \exists y.y + 1 = y$$

Делаем замену `x := y+1`. Нарушено требование свобод для подстановки. y входит в область действия квантора $\exists$ и поэтому свободная переменная x стала связанная.

Лекция 6

6.1 Исчисление предикатов

6.1.1 Расставление скобок

Кванторы имеют наименьший приоритет

Пример.

$$\forall x.A\&B\&y.C\&D \vee \exists z.E$$

$$(\forall x.(A\&B\&\forall y.(C\&D \vee \exists z.(E))))$$

Еще раз про правила только со скобками

1. $$\frac{\varphi \to \psi}{(\exists.\varphi) \to \psi}$$

2. $$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to (\forall x.\varphi)}$$

Пример.

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x.(\varphi \to \psi)}$$

— можно доказать, но это не правило вывода для $\exists$

Определение. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — доказательство

- если α_i — аксимома
- либо существует $j, k < i$, что $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$
- либо существует α_j : $\alpha_j = \varphi \to \psi$ и $\alpha_i = (\exists x.\varphi) \to \psi$ причем x не входит свободно в ψ
- либо существует $j : \alpha_j = \psi \to \varphi$ и $\alpha_i = \psi \to \forall x.\varphi$ причем x не входит свободно в ψ

6.1.2 Вхождение

Пример.

$$(P(\underset{1}{x}) \vee Q(\underset{2}{x})) \to (R(\underset{3}{x})\&(\underbrace{\forall \underset{4}{x}.P_1(\underset{5}{x})}_{\text{область } \forall \text{ по } x}))$$

1, 2, 3 — свободные, 5 — связанное, по пермененной 4

Пример.

$$\underbrace{\forall x.\forall y.\forall x.\forall y.\forall x.P(x)}_{\text{область } \forall \text{ по } x}$$

Здесь x в $P(x)$ связано. x не входит свободно в эту формулу, потому что нет свободных вхождений

Определение. Переменная x входит свободно если существует свободное вхождение

Определение. Вхождение свободно, если не связано

Можно относится к свободно входящим перменным как с перменным из библиотеки, т.е. мы не имеем права их переименовывать

Пример. Некорректная формула

α_1 $x = 0 \to x = 0$

α_2 $(\exists x.x = 0) \to (x = 0)$ — не доказано

α_2' $(\exists t.x = 0) \to (x = 0)$ — (правило $\exists$)

Пример.

(n) $x = 0 \to y = 0$ — откуда то

$(n+1)$ $(\exists x.x = 0) \to (y = 0)$ — (правило $\exists$)

6.1.3 Свободные подстановки

Определение. Θ свободен для подстановки вместо x в φ, если никакая свободная перменная в Θ не станет связанной в $\varphi[x := \Theta]$

Определение. $\varphi[x := \Theta]$ — "Заменить все свободные вхождения x в φ на Θ"

Пример.

$$(\forall x.\forall y.\forall x.P(x))[x := y] \equiv \forall x.\forall y.\forall x.P(x)$$

Пример.

$$P(x) \vee \forall x.P(x)\ [x := y] \equiv P(y) \vee \forall x.P(y)$$

Пример.

$$(\forall y.x = y)\ [x := \underbrace{y}_{\equiv\Theta}] \equiv \forall y.\underset{1}{y} = y$$

$FV(\Theta) = \{y\}$ — свободные перменные в Θ. Вхождение y с номером 1 стало связанным

Пример.

$$P(x)\&\forall y.x = y\ [x := y + z] \equiv P(y + z)\&\forall y.\underset{1}{y} + z = y$$

Здесь при подстановке вхождение y с номером 1 стало связанным. x — библиотечная функция, переименовали x во что-то другое.

6.1.4 Пример доказательства

Лемма 1. *Пусть* $\vdash \alpha$. *Тогда* $\vdash \forall x.\alpha$

Доказательство.

1. Т.к. $\vdash \alpha$, то существует $\gamma_1, \ldots, \gamma_2 : \gamma_n = \alpha$

$$\begin{array}{ccc}
(1) & \gamma_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
(n) & \gamma_n(\equiv \alpha) & \\
(n+1) & A\&A \to A & \text{(акс)} \\
(n+2) & \alpha \to ((A\&A \to A) \to \alpha) & \text{(акс)} \\
(n+3) & (A\&A \to A) \to \alpha & \text{(M.P } n, n+2) \\
(n+4) & (A\&A \to A) \to \forall x.\alpha & (\text{введение } \forall\ n+3) \\
(n+5) & \forall x.\alpha & \text{(M.P. } n+1, n+4)
\end{array}$$

□

6.1.5 Теорема о дедукции

Теорема 6.1.1. Пусть задана Γ, α, β

1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, при условии, если b в доказательстве $\Gamma, \alpha \to \beta$ не применялись правила для $\forall, \exists$ по перменным, входяшим свободно в α

2. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

Лекция 7

- $\Gamma \vDash \alpha$ — α следует из Γ при всех оценках, что все $\gamma \in \Gamma \quad [\![\gamma]\!] = И$, выполнено $[\![\alpha]\!] = И$
- $x = 0 \vdash \forall x. x = 0$
- $x = 0 \nvDash \forall x. x = 0$

Определение (Условие для корректности)**.** Правила для кванторов по свободным перменным из Γ запрещены.
<u>Тогда</u> $\Gamma \vdash \alpha$ влечет $\Gamma \vDash \alpha$

7.1 Полнота исчесления предикатов

Определение. Γ — **непротиворечивое** множество формул, если $\Gamma \nvdash \alpha \& \neg\alpha$ ни при каком α

Пример. Непротиворечивые:

- $\emptyset$
- $A \vee \neg A$

Противоречивые:

- $A \& \neg A$

Примечание. Непротиворечивое множество замкнутых(не имеющая сводных перменных) бескванторных формул

Пример. $\{A\}, \{0 = 0\}$

Определение. Моделью для непротиворечивого множества замкнутых бескванторных формул Γ — такая модель, что каждая формула из Γ оценивается в И

Определение. Полное непротиворечивое замкнутых бескванторных формул — такое, что для каждой замкнутой бескванторной формулы α: либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$

Обозначение. з.б. — замкнутая бескванторная. **непр. мн** — непротиворечивое множество

Теорема 7.1.1. Если Γ — непротиворечивое множество з.б. фомул и α — з.б. формула.
То либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ — непр. мн. з.б. формул

Доказательство. Пусть и $\Gamma \cup \{\alpha\}$ и $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ Доделать □

Теорема 7.1.2. Если Γ — непр. мн. з.б. фомул, то можно построить Δ — полное непр. мн. з.б. формул. $\Gamma \subseteq \Delta$ и в языке — счетное количество формул

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ — формулы з.б.

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$ либо $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi_1\}$ — смотря что непротиворечивое
- $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\varphi_2\}$ либо $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi_2\}$

$$\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$$

Свойство 1. Γ^* *— полное*

Свойство 2. Γ^* *— непрерывное*

Доказательство. Пусть $\Gamma^* \vdash \beta \& \neg\beta$
Конечное доказательство $\gamma_1, \dots \gamma_n$, часть из которых гипотезы: $\gamma_1, \dots, \gamma_k$
$\gamma_i \in \Gamma_{R_i}$. Возьмем $\Gamma_{\max R_i}$. Правда ли $\Gamma_{\max R_i} \vdash B \& \neg B$ □

Теорема 7.1.3. Любое полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул Γ имеет модель, т.е. существует оценка $[\![]\!]$: если $\gamma \in \Gamma$, то $[\![\gamma]\!] = $ И

Доказательство. D — все записи из функциональных символов.

- $[\![f_0^n]\!]$ — константа $\Rightarrow$ “f_0^n“
- $[\![f_k^m(\Theta_1, \dots, \Theta_k)]\!] \Rightarrow$ “f_k^m(“ $+ [\![\Theta_1]\!] +$ “, “ $+ \dots +$ “, “ $+ [\![\Theta_k]\!] +$ “)“
- $[\![P(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = \begin{cases} \text{И} & P(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \in \Gamma \\ \text{Л} & \text{иначе} \end{cases}$
- свободные переменные: $\emptyset$

Так построенные модель — модель для Γ. Индукция по количеству связок.
<u>База</u> очев.
<u>Переход</u> $\alpha \& \beta$. При этом

1. Если $\alpha, \beta \in \Gamma$ $[\![\alpha]\!] =$ И и $[\![\beta]\!] =$ И то $\alpha \& \beta \in \Gamma$
2. Если $\alpha, \beta \notin \Gamma$ $[\![\alpha]\!] \neq$ И или $[\![\beta]\!] \neq$ И то $\alpha \& \beta \notin \Gamma$

Аналогично для других операций $\square$

Теорема 7.1.4 (Геделя о полноте)**.** Если Γ — полное неротиворечивое множество замкнутых(не бескванторных) фомул, то оно имеет модель

Следствие 7.1.4.1. Пусть $\vDash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

Доказательство. Пусть $\vDash \alpha$, но $\nvdash \alpha$. Значит $\{\neg\alpha\}$ — непротиворечивое множество замкнутых формул. Тогда $\{\alpha\}$ или $\{\neg\alpha\}$ — непр. мн. з. ф. Пусть $\{\alpha\}$ — непр. мн. з.ф., а $\{\neg\alpha\}$ — противоречивое. При этом $\neg\alpha \vdash \beta\&\neg\beta$, $\neg\alpha \vdash \alpha$, $\beta\&\neg\beta \vDash \alpha$. $\neg\alpha \vdash \alpha$, $\alpha \vdash \alpha$. Значит $\vdash \alpha$ $\square$

- Γ — п.м.з.ф.
- перестроим Γ в $\Gamma^{\triangle}$ — п.н.м. **б.** з. ф.
- по теореме о существование модели: $M^{\triangle}$ — модель для $F^{\triangle}$
- покажем, что $M^{\triangle}$ — модель для Γ — M

$\Gamma_0 = \Gamma$, где все формулы — в предварительной нормальной форме

Определение. ПНФ — формула, где $\forall\exists\forall\ldots(\tau)$, τ — формула без кванторов

Теорема 7.1.5. Если φ — формула, то существует ψ — в п.ф., то $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$

Доказательство. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma^*$. $\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$
Переход: $\Gamma_i \to \Gamma_{i+1}$
Рассмторим: $\varphi_j \in \Gamma_i$
Построим семейство ф.с. d_i^j — новые перменные

1. φ_j без кванторов — не трогаем
2. $\varphi_j \equiv \forall x.\psi$ — добавим все формулы вида $\psi[x := \Theta]$, где Θ – терм, состоящий из f: $d_0^e, d_1^{e'} \ldots, d_{i-1}^{e'\cdots'}$
3. $\varphi_j \equiv \exists x.\psi$ — добавим $\psi[x := d_i^j]$

$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{$все добавленные формулы$\}$ — счетное количество $\square$

Теорема 7.1.6. Если Γ_i — непротиворечиво, то Γ_{i+1} — непротиворечиво

Теорема 7.1.7. $\Gamma*$ — непротиворечиво

Следствие 7.1.7.2. $\Gamma^{\triangle} = \Gamma*$ без формул с $\forall, \exists$