Лекция 7

Ilya Yaroshevskiy

16 января 2021 г.

Содержание

1 Функциональные последовательности и ряды

$u_n : X \to Y$, где Y - нормированное пространство
$S_n \rightrightarrows S$ на E $M_n := \sup\limits_{x\in E} |S_n(x) - S| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Определение. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \forall x \in E \quad |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$

Примечание. Отрицание критерия Больциано-Коши $\exists > 0\ \forall N\ n > N\ \exists p \in \mathbb{N}\ \exists x \in E \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \ge \varepsilon$

Пример. $\sum x^n \quad x \in (0, 1)$ нет равномерной сходимотсти
$\exists\varepsilon = \frac{1}{10}\ \forall N\ \exists n > N -$ любое $> 100\ \exists p = 1\ \exists x = 1 - \frac{1}{n+1} \quad |u_{n+1}(x)| \ge \varepsilon$, т.е. $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} = \frac{1}{e} > \frac{1}{10}$

Теорема 1.1 (признак Вейерштрасса). $\sum u_n(x) \quad x \in X$
Пусть $\exists C_n$ - вещественная последовательность, $\begin{cases} u_n(x) \le C_n \\ \sum C_n - \text{сходится} \end{cases}$
Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \le C_{n+1} + \dots + C_{n+p}$ - Тривиально
$\sum C_n$ - сходится $\Rightarrow$ удовлетворяет критерию Больциано-Коши: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad C_{n+1} + \dots + C_{n+p} < \varepsilon$
Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больциано-Коши равномерной сходимости ∎

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
$C_n := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{x}{1 + n^2x^2}\right| = \dfrac{1}{2n}$, ряд $\sum \frac{1}{2n}$ расходится, значит признак Вейерштрасса не применим

Пример. $\sum \frac{x}{1+x^2n^2} \quad x \in [\frac{1}{2020}, 2020]$
$C_n := \sup \dfrac{x}{1 + x^2n^2} \le \dfrac{2020}{1 + \frac{1}{2020} \cdot n^2} \underset{n\to+\infty}{\simeq} \dfrac{c}{n^2}$, $\sum C_n$ - сходится $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость

1.1 Приложение равномерной сходимости для рядов

Теорема 1' (Стокса, Зайдля для рядов). $u_n : \underbrace{X}_{\text{метр. пр.}} \to \underbrace{Y}_{\text{норм. пр.}} \quad x_0 \in X$ u_n - непрерывно в x_0
Пусть $\sum u_n(x)$ - равномерно сходится на X, $S(x) := \sum u_n(x)$
Тогда $S(x)$ - непрерывна в x_0

Доказательство. по теореме 1(Стокса, Зайдля). $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_n(x)$ непрерывна в $x_0 \Rightarrow S(x)$ непрывна в x_0 $\square$

Примечание. Достаточно, чтобы была равномерная сходимость $\sum u_n$ на $U(x_0)$

Примечание. $u_n \in C(x)$, $\sum u_n$ - равномерно сходится на $X \Rightarrow S(x) \in C(X)$

Теорема 2' (о почленном интегрировании ряда). $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывные на $[a, b]$

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ - равномерно сходится на $[a, b]$, $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда $\displaystyle\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)$

$S(x)$ - непрерывно на $[a, b]$ по теореме 1' $\Rightarrow$ можно интегрировать

Доказательство. По теореме 2 $S_n \rightrightarrows S$ на $[a, b]$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k = \int_a^b S_n dx \to \int_a^b S(x)dx$

$\square$

Пример. $\sum (-1)^n x^n$ - равномерно сходится при $|x| \le q < 1$ по признаку Вейершрасса: $|(-1)^n x^n| \le q^n \quad \sum q^n$ - сходится

Проинтегрируем от 0 до t : $|t| \le q$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1 + x}$ - сумма прогресии

$\displaystyle\ln(1 + t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{n+1}}{n + 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{t^k}{k}$ — верно при $t \in [-q, q]$ для любого $q : 0 < q < 1$, т.е верно при $t \in (-1, 1)$, при $t = 1 \quad \sum -\frac{1}{k}$ - расходится

$t \to 1$ ряд $\sum (-1)^k \frac{t^k}{k}$ равномерно сходится на $[0, 1]$, слагаемые непрерывны в $t_0 = 1 \xRightarrow{\text{т. 1}}$ Сумма ряда непрерывна в точке $t_0 = 1$

по "секретному"приложению признака Лейбница

$\forall t$ $\frac{t^k}{k}$ - монотонна по k $\displaystyle|\sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}| \le |\frac{t^N}{N}| \le \frac{1}{N} \to 0$ — это и есть утверждение о равномерной сходимости ряда

2 Криволинейный интеграл

2.1 Интеграл векторного поля по кусочно гладкому пути

Определение. Путь — $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ - непрерывно

$\gamma(a)$ - начало пути, $\gamma(b)$ - конец пути

$\gamma([a, b])$ - носитель пути

Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ — замкнутый путь(петля)

Если γ - гладкий или кусочно гладкий, $\gamma'(t)$ - вектор скорости

$\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t),\ \ldots,\ \gamma_m(t)) \quad \gamma' = (\gamma_1',\ \ldots,\ \gamma_m')$

Длина гладкого пути $l(\gamma) = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|dt$

Определение. Путь γ - **кусочно гладкий**

$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$

γ - дифф. на (t_k, t_{k+1}) $\forall k,\ 0 \le k \le n - 1$

$\exists$ односторонние производные в точках t_i

можно считать $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ - гладкое отображение

Определение. Векторное поле: $V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - непрерывное

$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$ - вектор приложенный к точке x

Определение (Интеграл векторного поля по кусочно гладкому пути).

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{m} V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)dt = \int_a^b V_1 d\gamma_1 + V_2 d\gamma_2 + \cdots + V_m d\gamma_m$$

Используется обозначение $I(V,\gamma) = \int_\gamma V_1 dx_1 + \cdots + V_m dx_m$ — аналогично последнему выражению в равенстве

Второе выражение в равенстве запишем так: $\sum\limits_{k=1}^{n} \langle V(\gamma(\xi_k)), \gamma'(\xi_k)\rangle \cdot (t_k - t_{k-1})$, где ξ_k - точки оснащения

$$= \sum \underbrace{\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|}\rangle}_{\text{проекция силы на касательное направление}} \cdot \underbrace{|\gamma'(\xi_k)| \cdot (t_k - t_{k-1})}_{\text{пройденный путь}}$$

Теорема 2.1. *Свойства*:

1. Линейность интгрела по полю:
   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall U, V$ - векторных полей $I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U,\gamma) + \beta I(V,\gamma)$

   Доказательство. Из определения(первый двух выражений в равенстве) □

2. Аддитивность интеграла при дроблении пути:
   $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad c \in [a,b] \quad \gamma^1 = \gamma|_{[a,c]}\ \gamma^2 = \gamma|_{[c,b]}$
   Тогда $I(V,\gamma) = I(V,\gamma^1) + I(V,\gamma^2)$

   Доказательство. По аддитивности интеграла(первый двух выражений в равенстве) □

3. Замена параметра
   $\varphi : [p,q] \to [a,b]\ \varphi \in C^1\ \varphi(p) = a,\ \varphi(q) = b \quad \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m\ \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$
   Тогда $I(V,\gamma) = I(V,\tilde{\gamma})$ - это замена переменных в интеграле

   Доказательство. $I(V,\tilde{\gamma}) =$
   $$= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(S))), \underbrace{\tilde{\gamma}'(S)}_{\gamma'(\varphi(S))\cdot\varphi'(S)} \rangle ds = \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(S))), \gamma'(\varphi(S))\rangle \cdot \varphi'(s) ds \underset{t:=\varphi(s)}{=} \underbrace{\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt}_{I(V,\gamma)}$$
   □

   Примечание. По теореме о двух параметризациях
   $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - параметризация гладкого одномерного многообразия(простое)
   $\tilde{} : [p,q] \to \mathbb{R}^m$ диффеоморфизм $\varphi : [p,q] \to [a,b] \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

4. Объединение носителей
   $\gamma^1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^2 : [c,d] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^1(b) = \gamma^2(c)$
   Зададим новый путь $\gamma = \gamma^2\gamma^1 : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma(t) = \left[\begin{array}{ll} \gamma^1(t) & , t \in [a,b] \\ \gamma^2(t+c-b) & , t \in [b, b+d-c] \end{array} \right.$
   В точке b излом. Если $\gamma^1,\ \gamma^2$ - кусочно гладкие, то γ - кусочно гладкий
   Тогда $I(V,\gamma^2\gamma^1) = I(V,\gamma^1) + I(V,\gamma^2)$

   Доказательство. $I(V,\gamma) = \int_a^{b+d-c} \cdots = \int_a^b \cdots + \underbrace{\int_b^{b+d-c} \ldots}_{\text{замена } \tau = t-b+c} = I(V,\gamma^1) + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), (\gamma^2)'(\tau)\rangle d\tau = I(V,\gamma^1$
   При замене: $\gamma(t) = \gamma^2(t+c-b) = \gamma^2(\tau) \quad \gamma'(t) = (\gamma^2)'(t+c-b) = (\gamma^2)'(\tau)$ □

5. Противоположный путь
   $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ - противоположный путь
   Тогда $I(V,\gamma) = -I(V,\gamma^-)$

   Доказательство. $I(V,\gamma^-) =$
   $$= \int_a^b \langle V(\gamma(a+b-\tau)), -\gamma'(a+b-\tau)\rangle d\tau \underset{t=a+b-\tau}{=} = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t)\rangle \cdot (-dt) = -I(V,\gamma)$$
   При замене $(\gamma^-)'(\tau) = -\gamma(a+b-\tau)$ □

6. Оценка интеграла векторного поля по пути
$|I(V, \gamma)| \le \max\limits_{x\in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$, где $L = \gamma([a, b])$ - носитель пути
$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \le \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle| dt \le \int_a^b |V(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \le \max_{x\in L} |V(x)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$
Можем писать max, т.к. V - непрерывна, L - компакт(путь непрерывен, образ замкнутого отрезка под действием непрерывного отображения(носитель) компакт)

2.2 Потенциальное поле

Определение. $V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - в поле
V - **потенциально**, если оно имеет потенциал
$\exists \underbrace{f}_{\text{потенциал}} \in C^1(O) : \quad \text{grad} f = V$ в области O

Теорема 2.2. (обобщеная формула Ньютона-Лейбница)
$V : O \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^m$, потенциально, f — потенциал V
$\gamma : [a, b] \to O \quad \gamma(a) = A,\ \gamma(b) = B$
Тогда $I(V, \gamma) = \displaystyle\int_\gamma \sum u_k dx_k = f(B) - f(A)$

Доказательство.

1. γ - гладкий $\Phi(t) = f(\gamma(t)) \quad \Phi' = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_m(t)$
Учитывая что $\text{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m}) = V$
$$\int_\gamma \sum u_k dx_k = \int_a^b \Phi'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) = f(b) - f(a)$$
2. γ - кусочно гладкий $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = v \quad \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$
$$\int_\gamma \sum u_n dx_k = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t^k} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \underset{\text{п. 1}}{=} \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) = f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) = f(B) - f(A)$$
Последняя сумма является телескопической

$\square$