1 Монотонность. Экстремумы

Теорема 1.1 (Критерий монотонности)**.** *$f \in C(\langle a, b\rangle)$ f - диф. на (a, b), тогда $f \uparrow \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$*

Доказательство. $\Rightarrow$ по определению производной
$\Leftarrow$ $x_1 > x_2$ по т. Лагранжа $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f(c) \cdot (x_1 - x_2) \geq 0$ $\square$

Следствие 1.1.1. *$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда*
$f = const \Leftrightarrow f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф на $(a, b) f' = 0$

Следствие 1.1.2. *$f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф на (a, b), тогда f - строго возрастает $\Leftrightarrow$*

1. *$f' \geq 0$ на (a, b)*

2. *$f' \neq 0$ ни на каком промежутке*

Доказательство. $\Rightarrow$ очев.
$\Leftarrow$ по Лемме о возрастании в точке $\square$

Следствие 1.1.3 (Доказательство неравенств)**.** *$g, f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф. на (a, b) $f(a) \leq g(a), \forall x \in (a, b) f'(x) \leq g'(x)$, тогда $\forall \alpha \in (a, b) f(\alpha) \leq g(\alpha)$*

Определение 1.1 (Локальный максимум функции)**.** *$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*
$x_0 \in E$ - локальный максимум
$\exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) \cap E$ $F(x) \leq f(x_0)$

Теорема 1.2 (Необходимые и достаточные условия локального экстремума)**.** *$f : (a, b) \to \mathbb{R}$*
$x_0 \in (a, b)$ f - дифф на (a, b)
Тогда:

1. *x_0 - локальный экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$*

2. *f - n раз дифф. на x_0*
   $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$

Если:

- *$f^{(n)}(x_0) > 0$, то*

  - *n - чет: x_0 - локальный минимум*

- n - *нечет:* x_0 - *не экстремум*

- $f^{(n)}(x_0) < 0$, *то*
  - n - *чет:* x_0 - *локальный максимум*
  - n - *нечет:* x_0 - *не экстремум*

Доказательство.

1. по т. Ферма
2. по ф. Тейлора

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

   При x близких в x_0

$$sign(f(x) - f(x_0)) = sign(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)$$

□

2 Неопределенный интеграл

Определение 2.1 (Первообразная)**.** $F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F - первообразная f на $\langle a, b\rangle$
$\forall x \in \langle a, b\rangle F'(x) = f(x)$

Теорема 2.1. $f \in C(\langle a, b\rangle)$*, Тогда у f сущесвует первообразная*

Доказательство. Нету □

Теорема 2.2. *F - первообразная f на $\langle a, b\rangle$*

1. $\forall c \in \mathbb{R}$ $F + c$ *- тоже первообразная*
2. *других первообразных* ***нет***
   т.е. если G - первообразная, то $\exists c : G = F + c$

Доказательство.

1. очев.
2. $F' = f; G' = f$
   $(F-G)' = 0 \Rightarrow F - G = const$

$\square$

Определение 2.2. *Неопределенный интеграл f на $\langle a, b\rangle$ =*
Мн-во всех первообразных =
$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, F$ *- первообразная*
$\int f \ \int f(x)dx$

Теорема 2.3 (О свойствах неопределенных интегралов)**.** *f, g - имеют первообразную на $\langle a, b)$, тогда*

1. $\int f + g = \int f + \int g$
   $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \int \alpha \cdot f = \alpha \cdot \int f$
2. $\phi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$
   $\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = (\int f(x)dx)\Big|_{x=\phi(t)} = F(\phi(t))$
   Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   $\int f(\alpha \cdot t + \beta)dt = \frac{1}{\alpha}F(\alpha \cdot t + \beta)$
3. f, g *- дифф. на* $\langle a, b) : f' \cdot g$ *- имеет первообразную*
   Тогда $f \cdot g'$ *- имеет первообразную и*
   $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$ *- интегрирование по частям*

Доказательство.

1. ...
2. $F(\phi(t))' = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$
3. $(fg - \int f'g) = f'g + fg' - f'g = fg'$

$\square$

Замечание. Если ϕ - обратная
Не понел

2.1 Равномерно непрерывные функции

Мне вдруг стало лень писать доказательства

Определение 2.3. $f : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
павномерно непр. на $\langle a, b\rangle$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle\ |x_1 - x_2| < \delta f(x_1) - f(x_2) < \varepsilon$

Теорема 2.4 (Кантора)**.** $f : X \to Y$ X *- ?полн.?,* f *непр* X
f *- равномерно непрерывна*

Теорема 2.5. $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ *непр*
Тогда $\exists x \in [0, 1]^2$ $f(x) = x$
Общ вариант:

1. $f : [0, 1]^m \to [0, 1]^m$ *непр*
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0, 1)$ *непр*
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \to S$

3 Определенный интеграл

1. Площадь
   $\mathcal{E}$ - мн-во ограниченых ??? фигур $\mathbb{R}^2$
   $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$

   (a) $A \in \mathcal{E}$ $A = A_1 \sqcup A_2 (A_1 \cap A_2 = \emptyset)$
   $\sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ - аддитивность

   (b) $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a) \cdot (d - c)$

   (c)

   Замечание. $A \subset B$ $\sigma A \leq \sigma B$

   (d)

   Замечание. σ(вертикальный отрезок) $= 0$

2. Ослабленная площадь
   $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$

   (a) монотонная

(b) ?нормирована?

(c) ослабленная аддитивность
$E \in \mathcal{E}$
$E = E_1 \cup E_2$
$E_1 \cap E_2 =$вертикальный отрезок
Тогда $\sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Определение 3.1. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$f_+ := max(f, 0)$
$f_- := min(-f, 0)$

Определение 3.2. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $f \geq 0$
$\mathit{\Pi\Gamma}\ (f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$

Определение 3.3. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma \mathit{\Pi\Gamma}(f_+, [a, b]) - \sigma \mathit{\Pi\Gamma}(f_-, [a, b])$$

Замечание.

1. $$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$
2. $f = c$
$$\int_a^b f = c \cdot (b - a)$$
3. $$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$
4. $$\int_a^b 0 = 0$$

Свойства:

① аддитивность $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+,[a,b]) = \sigma\Pi\Gamma(f_+,[a,c]) + \sigma\Pi\Gamma(f_+,[c,b])$$

② Монотонность $f, g \in C([a,b])$ $f \leq g$

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

③

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Теорема 3.1 (О среднем)**.** $f \in C([a,b])$ *Тогда* $\exists c \in [a,b]$

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a)$$

$$min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq max f$$

Где $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ *- среднее арифметическое функции* f *на* $[a,b]$

Определение 3.4. $f \in C([a,b])$ $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \int_a^b f \ \ \Phi(a) = 0$$

Теорема 3.2 (Барроу)**.** $f \in C([a,b])$ Φ - *???*
Тогда $\forall x \in [a,b]$ $\Phi'(x) = f(x)$

Теорема 3.3 (Ньютона-Лейбница)**.** $f \in C([a,b])$ F *- первообразная* f
Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

4 Правило Лопиталя

Лемма 4.1 (Об ускоренной сходимости).

1. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R}$
   a - *предельная точка* D
   $\exists V(a) : x \in \dot{V}(a) \cap D\ f(x) \neq 0\ g(x) \neq 0$
   $$\lim_{x\to a} f(x) = 0\ \lim_{x\to a} g(x) = 0\ (\cdot)$$
   Тогда $\forall x_n \to a\ x_n \neq a\ x_n \in D\ ]y_n \to a\ y_n \neq 0\ y_n \in D$
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n)}{g(x_n)} = 0$$
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(y_n)}{g(x_n)} = 0 \textit{Не точно}$$
2. *Все то же кроме* $(\cdot)$
   $$\lim f(x) \neq \infty\ \lim g(x) = +\infty$$

Теорема 4.2. $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}\ a \in \overline{\mathbb{R}}$
f, g - *дифф.* $g' \neq 0$ *на* (a, b)

$$]\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a\to 0]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$]\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{- } \textit{Неопр.}(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty})$$

$$\textit{Тогда} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Теорема 4.3 (Штольца)**.** $\{x_n\}, \{y_n\} \to 0$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\textit{Тогда}\ \exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$$

Свойства:

1.
$$\int_a^b \alpha f + \beta y dx = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b y$$
$\forall \alpha, \beta \ f, y \in C([a,b])$

2. Замена переменных
$\phi : \langle a, b\rangle \to [a,b] \ \phi \in C'$
$\langle p, a\rangle \subset \langle a, b\rangle$
$$\text{Тогда } \int_p^a f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(p)}^{\phi(a)} f(\alpha)d\alpha$$

3. Интегрирование по частям $f\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} f(b) - f(a)$
$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Определение 4.1 (Инегральное среднее)**.**

$$\frac{1}{a-b}\int_a^b f = I_f$$

Теорема 4.4. *Число π - иррациональное*

Определение 4.2 (f - кусочно непрерывна)**.** *f - непрерывна на $[a,b]$ за исключением конечного числа точек с разрывами I рода*

Определение 4.3. *$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ - почти первообразная*

Свойства:

1. *непрерывная*

2. *$\exists F = -f$???*

f - кусочно непрерывна

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

5 Продолжение определенного интеграла

$\langle a, b \rangle$
$Segm\langle a, b \rangle$ - множество всевозможных отрезков из $\langle a, b \rangle$

Определение 5.1.

1. *Функции промежутка*
   $\Phi : Seg\langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

2. *Аддитивная функция промежутка* Φ

$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b \rangle \ \forall r : p < r < q$
$\Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$

Определение 5.2 (Плотность аддитивной функции промежутка)**.** $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ - *плотность* Φ

$$\forall \Delta \varepsilon \ Segm\langle a, b \rangle \inf_{x \in \Delta} f(x) \cdot l_\Delta \leq \Phi_\Delta \leq \sup f \cdot l_\Delta$$

Теорема 5.1 (Вычисление аддитивной функции по площади)**.** $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ - *непр*
$\Phi : Segm\langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$
f - *плотность* Φ
Тогда: $\Phi([p, q]) = \int_b^q f$
$[p, q] \subset [a, b\rangle$