Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

6 апреля 2021 г.

Содержание

1 Ассимпточиское поведение линейных рекуррент

1.1 Квазимногчлен в рациональную ПФ

Лемма 1.

- $a_n = n^k r^n$
- $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$

Тогда $Q(t) = (1 - rt)^{k+1}$

$$A(t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{P_k'(t)(1-rt) + r(k+1)P_k(t) - \sum_{i=0}^{k} r\binom{k+1}{i}P_i(t)(1-rt)^{k-i+1}}{(1-rt)^{k+2}}$$

Доказательство. Доделать □

Лемма 2.

- $a_n = p(n)r^n$
- $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$

Тогда $Q(t) = (1 - rt)^{\deg p + 1}$

Следствие 1.0.1. Квазимногочлен $\Rightarrow$ Рациональная ПФ:
Корни $Q(t)$: $\frac{1}{r_i}$ кратности $\deg p_i + 1$

1.2 Рациональная ПФ в квазимногочлен

- $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$

$$Q(t) = \prod_{i=1}^{s} (1 - r_i t)^{f_i}$$

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{P_i(t)}{(1 - r_i t)^{f_i}}$$

Лемма 3.

$$A(t) = \frac{P(t)}{(1 - rt)^{k+1}}$$

Тогда

$$a_n = p(n)r^n$$

, p — *полином,* $\deg p = k$

$$A(t) = P(t)U(t)$$

$$U(t) = (1 + rt + r^2t^2 + \dots)^{k+1}$$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} p_i u_{n-i}$$

Следствие 1.0.2.

$$a_n = \sum_{x_1+x_2+\dots+x_{k+1}=n} r^n = \binom{n+1+k-1}{k} r^n = \binom{n+k}{k} r^n =$$

$$= \frac{1}{k!}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)r^n = p_k(n)r^n$$

$$\sum_{i=0}^{m} p_i u_i = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{p_{n-i}(n)}{r^i}\right) r^n$$

1.3 Оценка ассимптотического поведения

Обратные корни: $\begin{matrix} r_1 & f_1 \\ r_2 & f_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_s & f_s \end{matrix}$

Свойство 1.

- $\exists r_i : |r_i|$ — *max*
- $\forall j \neq i : \ |r_j| < |r_i|$

r_i *вещественные* $a_n \sim n^{f_i - 1} \cdot r_i^n$

Свойство 2. *Несколько* r_i *имеют* $\max |r_i|$

1. $r_i \in \mathbb{R}$, $r_i = \pm r$. *Если разной кратности у* r_i, r_j, *соответсвенно* $f_i > f_j$
   Тогда $a_n \sim n^{f_i-1} r_i^n (+n^{f_i-1} r_j^n)$
   Если одинаковой кратности $f_i = f_j$
   Тогда $a_n \sim c_1 n^{f_i-1} r^n + c_2 n^{f_j-1} (-r)^n$

Свойство 3. $r_1, r_2, \dots, r_l$ — *орбратные корни максимальной степени* $\max |r_i|$ *и* $\max f_i$

$$r_i = z_i e^{i\phi_i}$$

$$a_n \sim n^{f_i} z^n \sum_{j=1}^{l} e^{i\phi_j}$$

Если $\phi_j = \frac{2\pi a_j}{b_j}$, n *делится на* $\mathrm{LCM}(b_j)$ *классов*

Пример. Числа каталана:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$$

$$C(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

$$C(t)^2 = c_0^2 + (c_0c_1 + c_1c_0)t + \dots$$

$$C(t)^2 \cdot t + 1 = C(t)$$

$$t \cdot C(t)^2 - C(t) + 1 = 0$$

$$C(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}$$

Примечание. Рассмотрим $(1-t)^\alpha$:

$$(1-t)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} t^i = P_\alpha(t)$$

$$\binom{\alpha}{t} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot(\alpha-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot i}$$

$$P_{\frac{1}{2}}(-4t) = 1 - 2t - 2t^2 - 4t^3 - 10t^4$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{16}$$