

Лекция 3

Илья Yaroshevskiy

27 февраля 2021 г.

Содержание

Теорема 0.1 (Баеса). $]H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ — полн. у. соб.

Тогда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

Пример. В первой коробке 4 белых и два черных шара, во второй — белый и два черных. Из первой коробки во вторую переложили два шара, затем из второй коробки достали шар. Найти вероятность того что он оказался белый

Решение. • $]H_1$ — переложили 2 белых

- $]H_2$ — переложили 2 черных
- $]H_3$ — переложили 1 черный и 1 белый
- $]A$ — из второй коробки достали белый

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\sum P(H_i) = 1 \text{ — верно}$$

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(A|H_2) = \frac{1}{5}$$

$$P(A|H_3) = \frac{2}{5}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

Пример. По статистике 1% населения болен раком. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительным. Найти вероятность того что человек болен.

Решение. $] \left. \begin{array}{l} H_1 \text{ — болен} \\ H_2 \text{ — здоров} \end{array} \right\}, A \text{ — тест положительный}$

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(A|H_1) = 0.99$
- $P(A|H_2) = 0.01$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{1}{2}$$

Сделаем второй тест:

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(AA|H_1) = 0.99^2$
- $P(AA|H_2) = 0.01^2$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$