172-187

Ilya Yaroshevskiy

December 15, 2020

Contents

172

$M = \langle X, I \rangle$,

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Независимое множество - линейно независимое
Базы:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Цикл: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

174

$M = \langle X, I \rangle$
$M/x = \langle X \backslash x, \underbrace{\{A \backslash x \mid A \in I,\ x \in A\}}_{I_1} \rangle$, $\{x\} \in I$

Пользуемся тем, что $\forall A : x \notin A$, выполняется $A \cup x \in I \Leftrightarrow A \in I_1$

1. $\{x\} \in I \Rightarrow \{x\} \backslash x = \emptyset \in I_1$
2. $A \in I_1,\ B \subset A \Rightarrow A \cup x \in I,\ B \cup x \subset A \cup x \Rightarrow B \cup x \in I \Rightarrow B \in I_1$
3. $A, B \in I_1, |A| > |B| \Rightarrow A \cup x, B \cup x \in I,\ |A \cup x| > |B \cup x| \Rightarrow$
   $\Rightarrow \exists y \in (A \cup x) \backslash (B \cup x) : B \cup \{x, y\} \in I \Rightarrow \exists y \in A \backslash B : B \cup y \in I_1$

175

$M_1 = \langle X, I_1 \rangle$, $M_2 = \langle Y, I_2 \rangle$, $X \cap Y = \emptyset$
$M = \langle X \cup Y, \underbrace{\{A \cup B \mid A \in I_1,\ B \in I_2\}}_{I} \rangle$

Пользуемся тем что, если $A \in I$, то $\exists X_1 \in I_1, Y_1 \in I_2 : X_1 \cup Y_1 = A$
и если $X_1 \in I_1,\ Y_1 \in I_2$, то $X_1 \cup Y_1 \in I$

1. $\emptyset \in I_1,\ \emptyset \in I_2 \Rightarrow \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in I$
2. $A \in I,\ B \subset A \Rightarrow \exists X_1 \in I_1, Y_1 \in I_2 : X_1 \cup Y_2 = A$
   $\exists X_2 \subseteq X_1,\ Y_2 \subseteq Y_1 : X_2 \cup Y_2 = B \Rightarrow X_2 \in I_1,\ Y_2 \in I_2 \Rightarrow B \in I$
3. $A, B \in I,\ |A| > |B| \Rightarrow \exists X_1, X_2 \in I_1,\ Y_1, Y_2 \in I_2 : A = X_1 \cup Y_1,\ B = X_2 \cup Y_2$
   (a) $|X_1| > |X_2|$: $\Rightarrow \exists x \in X_1 \backslash X_2 : X_2 \cup x \in I_1 \Rightarrow (X_2 \cup x) \cup Y_2 = B \cup x \in I$
   (b) $|Y_1| > |Y_2|$ - аналогично

180

$M = \langle X, I \rangle$
$M|_k = \langle X, \underbrace{\{A \mid A \in I, |A| \le k\}}_{I_1} \rangle$
Пользуемся тем, что $|A| \le k,\ A \in I \Leftrightarrow A \in I_1$

1. $|\emptyset| = 0 \le k \Rightarrow \emptyset \in I_1$
2. $A \in I_1,\ B \subset A \Rightarrow A \in I \Rightarrow B \in I, |B| < |A| \le k \Rightarrow B \in I_1$
3. $A, B \in I_1,\ |A| > |B| \Rightarrow A, B \in I \Rightarrow \exists x \in A \backslash B : B \cup x \in I,\ |B \cup x| \le |A| \le k \Rightarrow B \cup x \in I_1$

192

1. $\langle A \rangle \subseteq \langle \langle A \rangle \rangle$
2. $x \in \langle \langle A \rangle \rangle \Rightarrow r(\langle A \rangle \cup x) = r(\langle A \rangle) = r(A)$
   Заметим, что $A \cup x \subseteq \langle A \rangle \cup x$
   Тогда $r(A \cup x) \le r(\langle A \rangle \cup x) = r(A)$
   $r(A \cup x) \le r(A) \Rightarrow r(A) = r(A \cup x) \Rightarrow x \in \langle A \rangle$
   Так как это верно для всех x из $\langle \langle A \rangle \rangle$, то $\langle \langle A \rangle \rangle \subseteq \langle A \rangle$

1, 2 $\Rightarrow \langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$