Лекции по Математическому анализу 4 семестр

Ilya Yaroshevskiy

19 апреля 2021 г.

Оглавление

Лекция 1

1.1 Теория меры

Лемма 1 (о структуре компактного оператора)**.** *$V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор, т.е.* $\det V \neq 0$
Тогда:

- $\exists$ *ортонормированные базисы* $g_1, \dots, g_m;\ h_1, \dots, h_m$
- $\exists S_1, \dots, S_m > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$ *— разложение по базису*
При этом $|\det V| = S_1 S_2 \dots S_m$

Доказательство. $W := V^* V$ $*$ — транспонирование в $\mathbb{R}^m$
W — самосопряженный оператор(матрица симметрична относительно диагонали)
Собственные числа $c_1, \dots, c_m$ — вещественные
Собственные векторы $g_1, \dots, g_m$
Заметим что $c_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0 \Rightarrow c_i > 0$

- $S_i := \sqrt{c_i}$
- $h_i := \frac{1}{S_i} V g_i$

$$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{S_i S_j} \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i$$

$$V(x) = V(\sum_{i=1}^{n} \langle x, g_i \rangle g_i) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 = \det(V^*V) = \det W = c_1 \dots c_m \tag{1.1}$$

1.1 — т.к. диагональная матрица □

Теорема 1.1.1 (преобразование меры лебега при линейном отображении)**.**

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда:

- $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$
- $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

($\det V = 0$**)** $\mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ мера $= 0$

($\det V \neq 0$**)** $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера
μ — инвариантна относительно сдвигов

$$\mu(E+a) = \lambda(V(E+a)) = \lambda(V(E) + Va) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k \cdot \lambda$(Лемма из предыдущего семестра)
Q — единичный куб на векторах g_i и $V(g_i) = S_i h_i$, $V(Q) = \{\sum \alpha_i S_i h_i | \alpha_i \in [0,1]\}$ — паралеллепипед со сторонами $S_i, \dots, S_m$

□

1.2 Интеграл

1.2.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — **разбиение множества**
2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если
   $\exists$ разбиение $X = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i : \ \forall i \ f\big|_{e_i} = const = c_i$
   При этом такое разбиение — **допустимое разбиение**

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset \mathcal{X}_E(x) = \left[\begin{array}{ll} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{array}\right.$
2. $f =\subset$ кон.$\sum c_i \mathcal{X}_{e_i}$, где $\mathcal{X} = \bigsqcup e_i$

Примечание.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые
   Тогда $\exists$ разбиения, допутимые и для f, и для g
$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i} \quad h = \sum_{\text{кон.}} b_k \mathcal{X}_{A_k}$$
$$f = \sum_{i,k} c_i \mathcal{X}_{e_i \cap A_k} \quad g = \sum b_k \cdot \mathcal{X}_{e_i \cap A_k}$$
2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$
   Тогда $f + g,\ \alpha f,\ fg,\ max(f, g),\ min(f, g),\ |f|$ — ступенчатые

Определение. $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}},\ a \in \mathbb{R}$
$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество функции** f
$E(f \leq a),\ E(f > a), E(f \geq a)$ — также лебеговы множества
Если f задана на X: $X(f < a),\ X(f \leq a), \ldots$ — лебеговы множества

Примечание. $E(f \geq a) = E(f < a)^C;\ E(f < a) = E(f \geq a)^C$
$$E(f \leq a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E(f < a + \frac{1}{n})$$

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f — **измерима на множестве** E:
$a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ — измеримо(т.е. $\in \mathfrak{A}$)

Обозначение.

- f — измеримо на X — говорят просто "измеримо"
- $X = \mathbb{R}^m$, мера Лебега — измеримо по Лебегу

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \geq a)$ — измеримо

Пример. 1. $E \subset X$, E — измеримо, $\mathcal{X}_E$ — измеримо

$$E(\mathcal{X}_E < a) = \left[\begin{array}{ll} \emptyset & , a < 0 \\ X \setminus E & , 0 <= a <= 1 \\ X & , a > 1 \end{array}\right.$$

2. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывна. Тогда f — измеримо по Лебегу

Примечание. Свойства:

1. f — измерима на E

   $\Rightarrow\ \forall a \in \mathbb{R}\ E(f = a)$ — измеримо

   $\not\Leftarrow\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \mathcal{X} + \mathcal{X}_{\text{неизм.}}$

2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in R \quad \alpha f$ — измерима
3. f — измерима $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$
4. f — измерима на E; $\underset{\text{изм.}}{E'} \subset E \Rightarrow f$ — измерима на E'
   $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$
5. $f \neq 0$ — измерима на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима на E
6. $f \geq 0$, измерима на E, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда f^α — измерима на E

Теорема 1.2.1. f_n — измерима на X.
Тогда:

1. $$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n; \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \tag{1.2}$$

   1.2 — измеримы

2. $\overline{\lim} f_n; \quad \underline{\lim} f_n$ — измеримы
3. Если
   $$\forall x\ \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = h(x)$$
   , то $h(x)$ — измеримо

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$
2. $$(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf\{s_n : s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)\}$$
3. очев.

□

1.2.2 Меры Лебега-Стильеса

Определение. $\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастает, непрерывна
$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ-конечный объем

$$g(a+0) = \lim_{x \to a+0} g(x), g(a-0) = \lim_{x \to a-0} g(x)$$
$$\mu[a, b) := g(b-0) - g(a-0)$$

— тоже σ-конечная мера
Применим теорему о продолжении, получим меру μg на некой σ-алгебре — **мера Лебега-Стилтьеса**

Определение. $g(x) = \lceil x \rceil$
Пусть μg определена на Борелевской σ-алгебре — **мера Бореля-Стилтьеса**

Лекция 2

2.1 Теореия меры

2.1.1 Измеримые функции

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{R}$ имзмерима
- $\forall a \in R \quad X(f < a) \in \mathfrak{A}$
- $\mathcal{X}_E \quad \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$

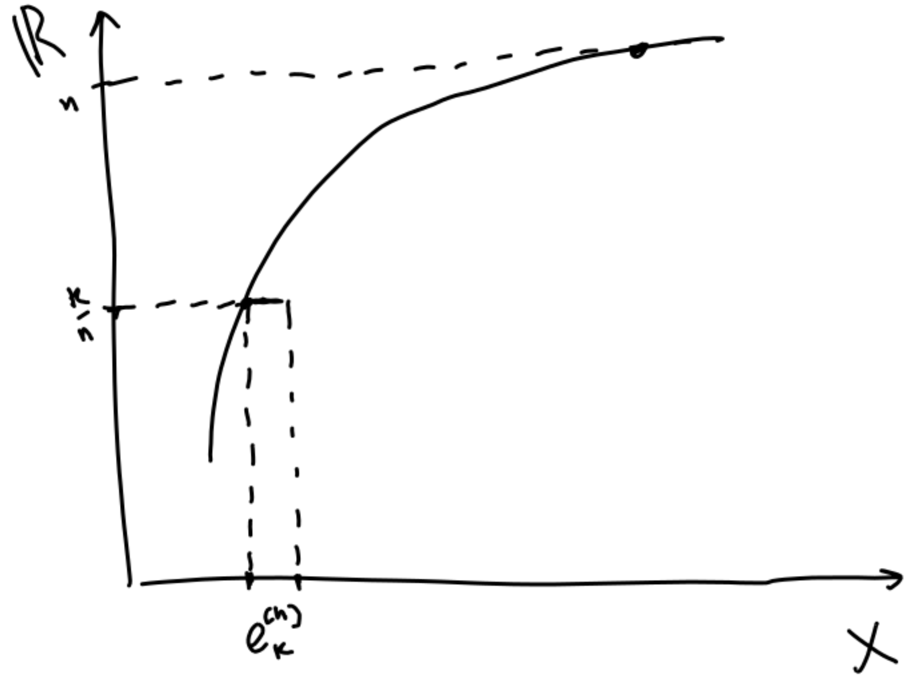
Теорема 2.1.1 (характеризация измеримости функции с помощью ступенчатых)**.**

- $f : X \to \overline{R}$
- $f \geq 0$
- f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2. $\forall x f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$

Доказательство.



$$e_k^{(n)} = X(\frac{k-1}{n} \leq f \leq \frac{k}{n}) \quad k = 1, \dots, n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

Следствие 2.1.1.1. f — имзерима
Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая, $f_n \xrightarrow{n \to +\infty} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Следствие 2.1.1.2. f, g — измеримы
Тогда fg — измемрима $(0 \cdot \infty = 0)$

Доказательство. $f_n \to f \quad g_n \to g$, (f_n, g_n) — ступеначтые
$f_n g_n$ — ступенчатая $f_n g_n \to fg$ □

Следствие 2.1.1.3. f, g — измеримы
Тогда $f + g$ — измерима

Доказательство. $f_n \to f \quad g_n \to g$, (f_n, g_n) — ступеначтые
$f_n + g_n$ — ступенчатая $f_n + g_n \to f + g$
Считаем что $\forall x$, не может быть $f(x) = \pm\infty,\ g(x) = \mp\infty$ □

- $A \subset X$
- A — полная мера
- $\mu(X \setminus A) = 0$

Теорема 2.1.2 (об измеримости непрерывной на множестве полной меры)**.**

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset R$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима

Доказательство. f — измерима на E'
$E'(f < a)$ — открыто в E'

$$\left.\begin{array}{r} e(f < a) \subset e \\ \lambda_n \text{ — полная} \end{array}\right\} \Rightarrow e(f < a) \text{ — измерима в} E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

Пример.

- $E = \mathbb{R}$
- $f = \mathcal{X}_{\mathrm{Irr}}$

Следствие 2.1.2.4.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : E \to \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $E' = E \setminus e$
- f — измерима на E'

Тогда модно так переопределить f на множестве e, что полученая функция $\tilde{f}$ будет измерима на E

Доказательство. Пусть:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in E \\ const & , x \in e \end{cases}$$

$$E(\tilde{f} < a) = E'(\tilde{f} < a) \cup e(\tilde{f} < a)$$

□

Следствие 2.1.2.5. $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — монотонна
Тогда f — измерима

Доказательство. f — непрерывна на $\langle a, b \rangle$ за исключением возможно счетного числа точек □

2.1.2 Сходимость почти везде и по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верное при почти всех $x \in E$

$=$ почти всюду на E

$=$ почти везде на E

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$ — истино при $x \in E \setminus e$
Пример. $x = \mathbb{R}$, x — иррационально
Пример. $f_n(x) \to n \to +\infty f(x)$ при почти всех $x \in E$
$\exists e, \mu e = 0$, при $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

Примечание. Свойства:

1. μ — полная $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
   $f_n(x) \to f(x)$ почти везде на X
   f_n — измерима
   | Тогда f — измерима

   Доказательство. $f_n \to f$ на X', где $e = X \setminus X', \mu e = 0$
   f — измерима на X'
   μ — полная $\Rightarrow$ f — измерима на X

   $$X(f < a) = \underset{\text{изм.}}{X'(f < a)} \cup e(f < a)$$

   □

2. В условии п. 1
   Можно переопределить f на e. Получится $\hat{f}$
   $f_n(x) \to \hat{f}(x)$ почти везде
   $\hat{f}$ — измкрима

   Определение. $f = g$ почти везде
   Будем говорить что f и g эквивалентны

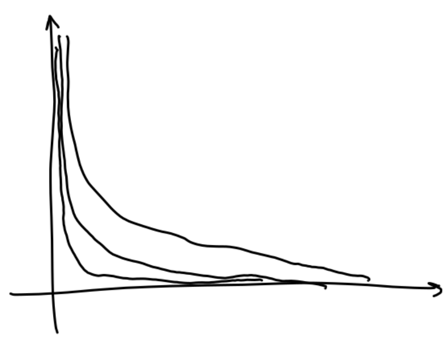
3. Пусть $\forall n\ W_n(x)$ — истинно при почти всех x
   Тогда утверждение " $\forall n\ W_n(x)$ — истинно " — верно при почти всех x
   Это высказывание верно при

$$x \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i) \quad \mu(\bigcup e_i) = 0$$

- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечные
- f_n сходится к f по мере
- $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0
Т.е. предел не задан однозначно

Пример.



$f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0$
$X\ \mathbb{R}_+\ \lambda$
$f_n \to f$ всюду на $(0, +\infty)$
$f_n \underset{\lambda}{\rightrightarrows} f$

Пример.

$f_n(x) := e^{-(n-x)^2}$ $x \in \mathbb{R}$
$f_n(x) \to 0$ при всех x
$f_n(x) \to 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = const \not\to 0$$

, при $0 < \varepsilon < 1$

Пример. $n = 2^k + e, 0 \leq e < 2^k$
$X = [0,1]$ λ
$f_n(x) := \mathcal{X}_{[\frac{e}{2^k}, \frac{e+1}{2^k}]}$
$\lim f_n(x)$ — не существует ни при каких x

$$\lambda X(f_n > \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$f_n \underset{\lambda}{\Rightarrow} 0$$

Теорема 2.1.3 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- μX — конечна

Тогда $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду Частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0(т.е. $f < 0$)

$$\left.\begin{array}{r} X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывность меры сверху}$$

Общий случай: $f_n \to f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда $\varphi_n \to 0$, монотонна

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

Теорема 2.1.4 (Рисс)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Тогда $\exists n_k f_{n_k} \to f$ почти везде

Доказательство. $\forall k\ \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \to 0$
$\exists n_k$: при $n > n_k$ $\mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$
можно считать: $n_1 < n_2 < n_3$
Проверим $f_{n_k} \to f$ почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$

$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

При $x \notin E$ $f_{n_k} \to f$

$$x \notin E\ \exists N\ x \notin E_k$$

при $k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, т.е. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ □

Следствие 2.1.4.6.

- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $|f_n| \leq g$ почти везде

Тогда $|f| \leq g$ почти везде

Доказательство. $\exists n_k :\ f_{n_k} \to f$ почти везде □

Теорема 2.1.5 (Егорова)**.**

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \to f$ почти везде

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists e \subset X,\ \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$

@1A[r]$^{>} > +B$

2.2 Интеграл

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Определение. $f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$ $\quad$ E_k — дополнительное разбиение $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu = \sum \alpha_k \mu E_k$$

, считаем $0 \cdot +\infty = 0$

Примечание. Свойства:

1. Не зависит от представления f в виде сумме

$$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k} = \sum \alpha'_k \mathcal{X}_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k \cap E'_j}$$

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. $f \leq g \quad \int f \leq \int g$, f, g — ст.

Определение. $f \geq 0$ — измерима

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Примечание. Свойства:

1. Если f — ступенчатая то Опр. 2 = Опр. 1
2. $0 \leq \int f \leq +\infty$
3. $g \leq f$, f — измерима, g — ступенчатая $\Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение.

- f — измерима
- $\int_X f^+$ или $\int_x f^-$ конечный

Тогда

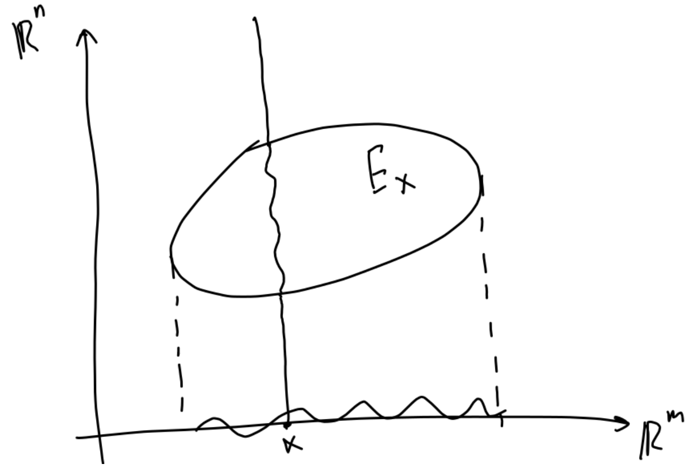
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Теорема 2.2.1 (Тонедди)**.**

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$ — измерима
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$

Тогда



1. при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ — измерима на $\mathbb{R}^n$
2. функция
$$x \mapsto \int_{E_k} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$$
3. $$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y d\lambda_n(y)) \right) d\lambda_m(x)$$

Лекция 3

3.1 Интеграл

1. $f \geq 0$, ступенчатые
   $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{E_k}$, E_k — измеримое
   $\int_X f = \sum \alpha_k \mu E_k$

2. $f \geq 0$, измеримая
   $\int_X f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq g \leq g \\ f \text{ — ступ.}}} \int_X g d\mu$

3. f — измерима, $f^+, f^- \geq 0$ — измеримые
   Пусть $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечные
   Тогда $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$

   Определение. Если $\int_x f^+$, $\int_X f^-$ — оба конечные, то f называется **суммируемой**

   Примечание. f — измеримая, ≥ 0, интеграл 3 = интеграл 2

4. **Определение.** $E \subset X$ — измкримое, f — измерима на X
   $\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E$

Примечание. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$ $\int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$

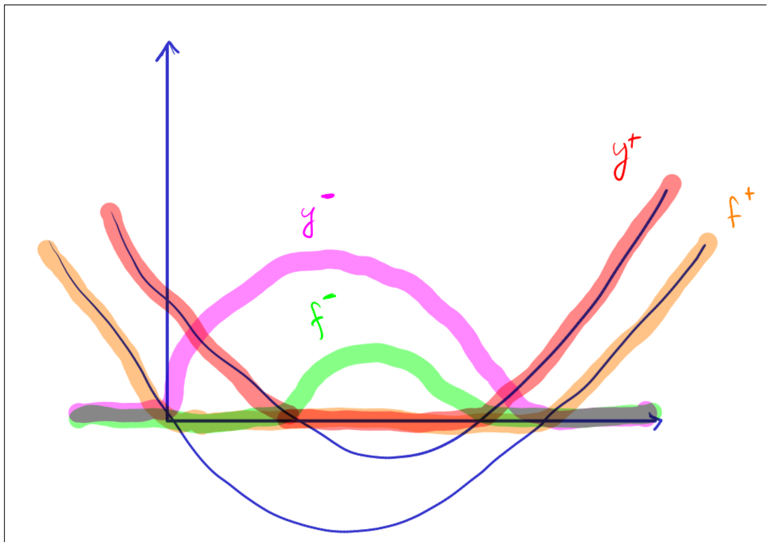
Примечание. $\int_E f d\mu = \sup\{fg : \ 0 \leq g \leq f$ на E, g — ступенчатые$\}$, можно считать что g — тождественный 0 вне множества E

Примечание. $\int_E f$ не зависит от значений f вне E

Примечание. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \subset X$ — измеримое, g, f — измеримые. Свойства:

1. Монотонность $f \leq g$ $\int_E f \leq \int_E g$

   Доказательство.



(a) $f, g \geq 0$ — очевидно

(b) f, g — произвольные
$f^+ \leq g^+ \ f^- \leq g^-$
$\int_E f^+ \leq \int_E g^+ \ \int_E f^- \leq \int_E g^- \Rightarrow$ OK

□

2. $\int_E A d\mu = \mu E \ \int_E 0 d\mu = 0$

3. $\mu E = 0 \ \int_E f = 0$

Доказательство. (a) f — ступенчатая

(b) $f \geq 0$ — измеримая

□

Змечание:
f — измеримая. Тогда f — суммируемая $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

($\Leftarrow$) следует из свойства 1. $f^+, f^- \leq |f|$

($\Rightarrow$) позже

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \ \forall c \in \mathbb{R} \ \int_E cf = c \int_E f$

(a) $(-f)^+ = f^- \ (-f)^- = f^+$

(b) можно считать $c > 0$ для $f \geq 0$ — тривиально

5. $\exists \int_E f d\mu$
   Тогда $|\int_E f d\mu| \le \int_E |f| d\mu$

   Доказательство. $-|f| \le f \le |f|$. По свойствам 3 и 4 □

6. $\mu E \le +\infty,\ a \le f \le b$
   Тогда $a\mu E \le \int_E f \le b\mu E$ $a\chi_E \le f \le b\chi_E$

   Следствие 3.1.0.7. f — измерима на E, f — ограничена на E, $\mu E < +\infty$
   Тогда f — суммируемая на E

7. f — суммируемая на E. Тогда f — почти везде конечная

   Доказательство.

   (a) $f \ge 0$ $f = +\infty$ на $A \subset E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_E f \ge n\mu A$

   (b) $f = f^+ - f^-$

   □

Лемма 2.

$$A = \bigsqcup_{i-1}^{+\infty} A_i$$

— измеримые, g — ступенчатая, $g \ge 0$
Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство. $\int_A g d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\ge 0} = \sum_i \sum_k \dots = \sum_i \int_{A_i} g d\mu$ □

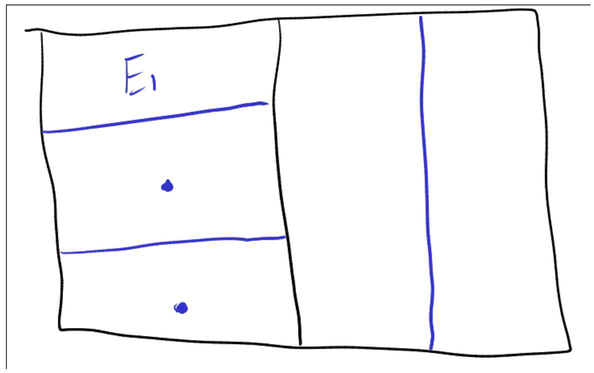
Теорема 3.1.1. $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая на A, $f \ge 0$
Тогда $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$

Доказательство.

($\le$) ступенчатая $g:\ 0 \le g \le f$ $\int_a g = \sum \int_{A_i} g d\mu \le \sum \int_{A_i} f$ — по Лемме

($\ge$) 1. $A = A_1 \cup A_2$
$0 \le g_1 \le f\chi_{A_1}$ $0 \le g_2 \le f\chi_{A2}$

$$g_1 = \sum \alpha_k \chi_{E_k}\ g_2 = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$



Считаем что E_k – совместное разбиение

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f\chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2 \leq \int_A f$$

Перейдем к супремуму

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ — индукция по n

3.
$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \sqcup B_n$$

, где

$$B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

□

Следствие 3.1.1.8.
- $f \geq 0$ — измеримая
- $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$
- $\nu E := \int_E f d\mu$

Тогда ν — мера

Следствие 3.1.1.9 (аддитивности интеграла). f — суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. $f^+, f^- \dots$??? □

3.1.1 Предельный переход под щнаком интеграла

$f_n \to f$. Можно ли утверждать $\int_E f_n \to \int_E f$?

Пример. $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$ $f \equiv 0$ $f_n \to f$ (даже $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$)

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 3.1.2 (Леви)**.** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, f_n — измеримая
$\forall n$ $0 \le f_n \le f_{n+1}$ почти везде $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ почти везде
Тогда $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_x f d\mu$

Примечание. f — задана всюду, кроме множества меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e
Тогда f — измерима на X.

Доказательство.

($\le$) очевидно. $f_n \le f$ почти везде $\int f_n \le \int f$

$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \int_e f_n = \int_{X\setminus e} f_n \le \int_{X\setminus e} f \le \int_X f$$

($\ge$) Достаточно: $\forall g$ — ступенчатая $0 \le g \le f$

$$\lim \int_X f_n \ge \int_X g$$

Достаточно: $\forall c \in (0,1)$

$$\lim \int_X f_n \ge c \int_X g$$

$$E_n := X(f_n \le cg) \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E = X$ т.к. $c < 1$

$$\int_x f_n \ge \int_{E_n} f_n \ge c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \ge c \lim \int_{E_n} g = c \int_X g$
Последнее равентсво справедливо в силу непрерывности мнизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

□

Теорема 3.1.3. $f, g \geq 0$ измерима на E
Тогда

$$\int_E f+g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k},\ g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$

$$\int_E f+g = \sum(\alpha_k+\beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_l \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ стпенчатая $f_n:\ 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots\ \lim f_n = f$
$g \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ стпенчатая $g_n:\ 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots\ \lim g_n = g$
$f_n + g_n \to f + g\ \int_E f_n + g_n \to \int_E f + g$
$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_E g = \int_E f + g$

□

Следствие 3.1.3.10. f, g — суммируемы на E
Тогда $f + g$ — суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Примечание. Свойство 3 доказано

Доказательство. Суммируемость $|f+g| \leq |f| + |g|$
$h = f + g$. Тогда:

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

$$\Rightarrow \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+$$

$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

$$\int_E h = \int_E f + \int_E g$$

□

Определение. $\mathcal{L}(X)$ = множество функций суммируемых на X

Следствие 3.1.3.11. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ — это линейный функционал на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X)\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X);\ \int_X \sum \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_X f_k$$

Теорема 3.1.4 (об интегрировании положительных рядов)**.** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \in \mathfrak{A}$ $\underset{\text{изм.}}{u_n}: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $u_n \geq 0$ почти везде
<u>Тогда</u>

$$\int_E (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. по т. Леви: $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$ $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$ $S_n \to S$ — сумма ряда $\sum u_n$
Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$, $\int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k \to \int_E S$ □

Следствие 3.1.4.12. u_n — измеримые $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$
<u>Тогда</u> ряд $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходится при почти всех x

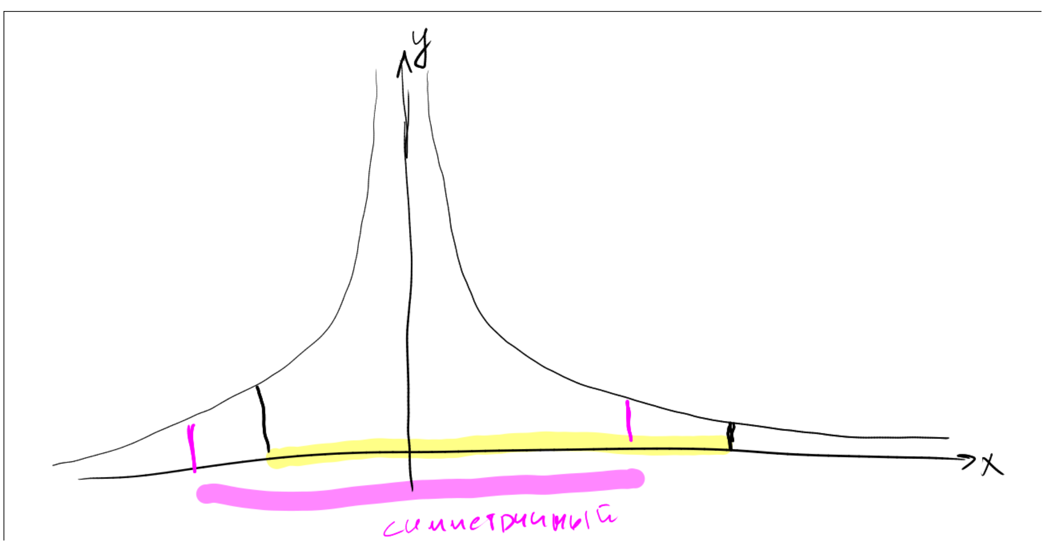
Доказательство. $S(x) := \sum |u_n(x)| \geq 0$ — измеримая

$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow S$ — сумиируема $\Rightarrow S$ почти везде конечена □

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произведение последовательности; $\sum a_n$ — абсолютно сходится
<u>Тогда</u> $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде



$$\int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} = \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} dx = |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

$$\leq |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{N} \cdot |a_n|$$

$$\sum_n \int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq 4 \int_N \sum |a_n| < +\infty$$

$\square$

Лекция 4

Теорема 4.0.1 (об абсолютной непрерывности интеграла)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E$ — измеримым, $\mu E < \delta \quad |\int_E f| < \varepsilon$

Следствие 4.0.1.13.

- f — суммируемая
- $\mu E \to 0$

Тогда $\int_{E_n} f \to 0$

Доказательство. Возьмем множества $X_m := X(|f| \geq n)$, очевидно что $X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$, а также $\mu(\bigcap X_n) = 0$
Утвержение: $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ — это свойство непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |F| d\mu$
Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, тода при $\mu E < \delta$

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_{E_n X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n X_{n_\varepsilon}}^C \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n X_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

∎

Правда ли что:

$$f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f \quad \forall \varepsilon > 0\ \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$$

эквивалентны.

($\Rightarrow$) **Нет**. $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$
$f_n = \frac{1}{nx}\ f_n \underset{\lambda}{\rightrightarrows} 0$
$\int |f_n - f| = +\infty$ — при всех n

($\Leftarrow$) **Да**.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \le \int_{X_n} \frac{|f_n - 1|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{X_n} |f_n - f| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_X |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Теорема 4.0.2 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n \ |f_n| \le g$ почти везде
  2. g — усммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируема в силу 1, f — суммируема по следствию т. Рисса: $|f| \le g$ почти везде
'тем более' $= \left|\int_X f_n - \int_X f\right| \le \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$ фиксируем ε $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$
   $f_n \to f$, т.е. $\mu X_n \to 0$

   $$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$$

   $$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^C} \le \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^C} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon\mu X$$

   По следствию т. об абсолютной непрерывности: $\int_{X_n} 2g \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. $\mu X = +\infty$
   Проверим утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \subset X$ — измеримое, μA — конечная: $\int_{X\setminus A} g < \varepsilon$

   $$\int_X g = \sup\{\int g_n,\ 0 \le g_n \le g,\ g_n \text{ — ступенчатая}\}$$

   $$A := \{x :\ g_n(x) > 0\}$$

   — при достаточно больших n

   $$0 \le \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X\setminus A} g < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X\setminus A} \le \int_A |f_n - f| + \int_{X\setminus A} 2g$$

По 1 $\int_A |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\int_{X\setminus A} 2g < 2\varepsilon$
т.е. при больших n $\int_x |f_n - f| d\mu < 2\varepsilon$

$\square$

Теорема 4.0.3 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n$ $|f_n| \le g$ почти везде
  2. g — усммируемая везде

<u>Тогда</u> f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство.

$$h_n := \sup(|f_n - f|,\ |f_{n+1} - f|,\ \dots)$$

- $0 \le h_n \le 2g$
- h_n — монотонна убывает
- $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде

$2h - h_n \ge 0$ — эта последовательность возрастает, $2g - h_n \to 2g$ почти везде

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \le \int_X h_n \to 0$$

$\square$

Пример.

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{x\to x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} dt$$

Да. $t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow[x\to x_0]{} t^{x_0-1} e^{-t}$ при всех $t > 0$

Суммируемая мажоранта: $|t^{x-1} e^{-t}| \le \underbrace{t^{\alpha-1} e^{-t}}_{\text{сумм.}}$, $0 < \alpha < x_0$

Теорема 4.0.4 (Фату). • $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

- $f_n \geq 0$ — измеримая
- $f_n \to f$ почти везде
- $c > 0\ \forall n\ \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Примечание. Здесь не требуется чтобы $\int_X f_n \to \int_X f$, это может быть не выполнено

Доказательство.

$$g_n := \inf(f_n,\ f_{n+1},\ \dots)$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1}\ \ \lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ почти везде}$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq c$$

$$\int_X g_n \to \int_X f \Rightarrow \int_X f \leq c$$

□

Следствие 4.0.4.14.

- $f_n, f \geq 0$ — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightrightarrows f$
- $\exists c > 0\ \forall n \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Доказательство.

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists n_k\ f_{n_k} \to f \text{ почти везде}$$

□

Следствие 4.0.4.15.

- $f_n \geq 0$ — измеримые

Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство. Как в теореме:

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n$$

Выберем n_k:

$$\int_X f_{n_k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Zzz..

□

4.1 Плотность одной меры по отношению к другой

4.1.1 Замена перменных в интеграле

- $(X, \mathfrak{A}, mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \cdot)$
- $\Phi : X \to Y$
- Пусть Φ — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$
Тогда ν — мера:

$$\nu(E_n) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E)n) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется образом μ при отображении Φ и

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$$

Примечание.

- $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима относительно $\mathfrak{B}$

Тогда $f \circ \Phi$ — измерима относитльно $\mathfrak{A}$ ($f \circ \Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$)

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(\underbrace{Y(f < a)}_{\in \mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}$$

Определение.

- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима(на X относительно $\mathfrak{A}$)
- $\omega \geq 0$

$$\forall B \in \mathfrak{B}\ \nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

— **взвешенный образ меры** μ при отображении Φ, ω — **вес**

Теорема 4.1.1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$

- ν — взвешенный образ меры μ при отображении Φ с весом ω
- $\omega \geq 0$ — измерима на X

Тогда $\forall f$ — измеримые на Y относительно $\mathfrak{B}$, $f \geq 0$ $f \circ \Phi$ — измеримая на X относительно $\mathfrak{A}$ и

$$\int_Y f(y)d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x)\dot{\mu}(x) \tag{4.1}$$

То же верно для суммируемых f

Доказательство. $f \circ \Phi$ — измеримая

1. Пусть $f = \mathcal{X}_B, B \in \mathfrak{B}$

$$f \circ \Phi(x) = f(\Phi(x)) = \left[\begin{array}{ll} 1 & , \Phi(x) \in B \\ 0 & , \Phi(x) \notin B \end{array} \right. = \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)}$$

   Тогда 4.1:

$$\nu B \stackrel{?}{=} \int_X \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \mu$$

   — это определение ν

2. f — ступенчатая. 4.1 следует из линейности интеграла

3. $f \geq 0$ — измеримая: таким образом ??? измеримая функция ступенчатая + т. Леви

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots, \ h_i \text{ — ступенчатая } h_i \leq f \ h_i \to f$$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow[i \to \infty]{}$$

4. f — измеримая $\Rightarrow$ для $|f|$ выполнено 4.1 $\Rightarrow$ $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$
   Что-то про f_+

□

Следствие 4.1.1.16. В условиях теоремы:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f — суммируемая на B

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega(x)d\mu$$

Доказательство. В теорему подствить $f \leftrightarrow f \cdot \mathcal{X}_B$ □

Примечание. Частный случай.

- $X = Y$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$
- $\Phi = \mathrm{Id}$
- $\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$, $\omega \geq 0$ — измеримая

В этой ситуации ω — плотность(меры ν относительно меры μ) и тогда по теореме:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x)\omega(x) d\mu$$

Лекция 5

5.1 Плотности

Плотность $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера
Плотность меры ν онсительно μ — это функция $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\forall B \in A \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$

Теорема 5.1.1 (критерий плотности)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu),\ \nu$ — еще одна мера
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}},\ \omega \geq 0$ — измеримая

Тогда ω — плотность ν отнсительно $\mu \Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathfrak{A}\ \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A \omega$$

Пример (нет плотности).

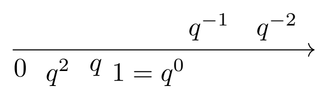
- $X = \mathbb{R}$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}'$
- $\mu = \lambda_1$
- ν — одноточечная мера $\nu(A) = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{, если } 0 \in A \\ 0 & \text{, иначе} \end{array} \right.$
  считаем $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$

Теорема 5.1.2 (Необходимое условие существования плотности)**.** $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Теорема 5.1.3 (теорема Радона-Никодина)**.** Это так-же достаточное условие

Доказательство критерия плотности. $(\Rightarrow)$ очевидно

(⇐) Не умаляя общности $\omega > 0 : e = X(\omega = 0)$
$\nu(e) = \int_e \omega d\mu = 0$
Для случая когда $A \cup e = \emptyset$ все только лучше
Фиксируем $q \in (0, 1)$
$A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$



$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \nu A_j \leq \mu A_i \cdot q^{j-1} \tag{5.1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq \mu A_j \cdot q^{j-1} \tag{5.2}$$

Тогда

$$q \cdot \int_A \omega d\mu \leq q \cdot \sum \int_{A_j} \leq \sum q^j \mu A_j \leq \sum \nu A_j \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} = \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

то есть:

$$q \int_A \omega d \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

и $q \to 1 - 0$

□

Лемма 3.

- *f, g — суммируемые*
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\forall A \in \mathfrak{A}$
- $\int_A f = \int_A g$

Тогда *$f = g$ почти везде*

Доказательство. $g := f - g$
Дано $\forall A \int_A h = 0$
Доказать $h = 0$ почти везде

- $A_+ := X(h \geq 0)$
- $A_- := X(h < 0)$

$X = A_+ \sqcup A_-$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$$

$$\int_{A_-} |h| = -\int_{A_-} h = 0$$

тогда

$$\int_X |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ почти везде □

Примечание. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство отображений $l_A : f \mapsto \int_A f d\mu$ — линейный функционал
Таким образом множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ — разделяет точки $\forall f, g \in \mathcal{L}(X) \exists A l_A(f) \neq l_A(g)$

5.2 Мера лебега

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек)**.**

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $a \in O$
- $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$

Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$
Тогда $\exists \delta > 0\ \forall$ *куба* $Q \subset B(a, \delta),\ a \in Q$
выполняется неравенство $\lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Примечание. Здесь можно считать что кубы замкнутые

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L \cdot (x - a) + o(x - a) \quad x \to a$$

$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o(x - a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар} B_\varepsilon(a)\ \forall x \in B_\varepsilon(A)\ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a) a \in Q$ — куб со стороной h. При $x \in Q: \ |x - a| \leq \sqrt{m}h$

$$|\Psi(x) - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1+2\varepsilon)h$: при $x, y \in Q$

$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \le |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \le |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \le (1+2\varepsilon)h$

$$\lambda(\Psi(Q)) \le (1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \le \underbrace{|\det L| \cdot (1+2\varepsilon)^m}_{\text{выбираем } \varepsilon \text{ чтобы } \ldots < c} \lambda Q$$

потом берем $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ □

Лемма 5.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $f : O \to \mathbb{R}$ — *непрерывное*
- $Q \subset \overline{Q} \subset O$ — *кубическая ячейка*
- $A \subset Q$

Тогда

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — открытое } \subset O}} \left(\lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Теорема 5.2.1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \in O$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| \, d\lambda(x)$$

Доказательство. Обозначим якобиан $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
$\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера. Т.е. надо доказать: J_Φ — плотность ν относительно λ.
Тогда достаточно проверить условие критерия плотности

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \le \nu A \le \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5.3}$$

Достаточно проверить только правое неравенство. левое — это "правое для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1}"

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \le \lambda A$$

1. Проверяем второе неравенство 5.3 для случая когда A — кубическая ячейка. $A \subset \overline{A} \subset O$. От противного:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$$

Возьмем $C > \sup_Q J_\Phi : \ C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$. Запускаем процесс половинного деления:
Режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую"ячейку $Q_1 \subset Q : \ C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берем Q_2 : $\mathbb{C} \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и так далее

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{5.4}$$

$$a \in \bigcap \overline{Q_i} \quad c > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi, \text{ в частности } c > |\det \Phi'(a)|$$

Получаем противоречие с леммой: с скол угодно малой окрестности a имеются кубы $\overline{Q_n}$, где выполняется 5.4. **Противоречие**

2. Проверим второе неравенство 5.3 для открытых множеств $A \subset O$
Это очевидно $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q_j} \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \le \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \le \sup_A J_\Phi \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5.5}$$

3. По лемме второе неравенство 5.3 выполнено для всех измеримых A

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — куба } Q_j \subset \overline{Q_j} \subset O$$

$$A = \bigsqcup \underbrace{A \cup Q_j}_{A_j} \quad A \subset G \text{ — открытое}$$

$$J A_j \le \nu G \le \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \le \int_G (\sup J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично 5.5 получаем $\nu A \le \sup_A f \cdot \lambda A$

$\square$

Теорема 5.2.2.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое

<u>Тогда</u> $\forall f$ — измеримых, ≥ 0, заданная на $O' = \Phi(O)$

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda$$

, где $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$. То же верно для суммируемых функций f

Доказательство. Применяем теорему о взвешенном образе меры.
Дано:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(T, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$ — с сохранением измеримости
- $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$
- $\omega : Y \to \mathbb{R},\ \geq 0$, измеримый
- ν — взвешенный образ μ с весом ω:

$$\mu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega(x) d\mu$$

В нашем случае

- $X = Y - \mathbb{R}^m$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$
- Φ — диффеоморфизм
- $\mu = \lambda$
- $\nu(A) = \lambda\Phi(A)$

Под действием гладкого отображния Φ, σ-аглебра $\mathfrak{M}^m$ сохраняется
По теореме

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(A)} J_\Phi d\lambda$$

т.е. λ — взвешенный образ исходной меры Лебега по отношению к Φ □

Пример. Полярные координаты в R^2.
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $\Phi : \{(r, \varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \to \mathbb{R}^2$
диффеоморфизм

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_\Omega f(x, y) = d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \underset{d\lambda_r(r,\varphi)}{d\lambda_r}$$

Пример. Сферические координаты в R^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{c} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi? & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\det\Phi' = r^2(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi) = r^2\cos\psi = J_\Phi$$

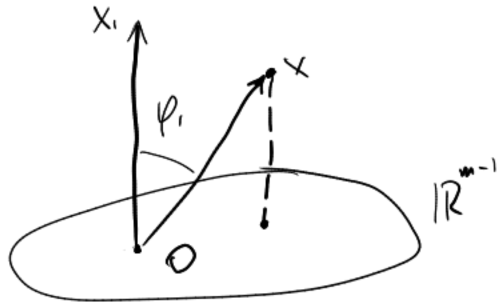
— для географических координат: r — растояние от центра Земли, ψ — угол к плоскости экватора

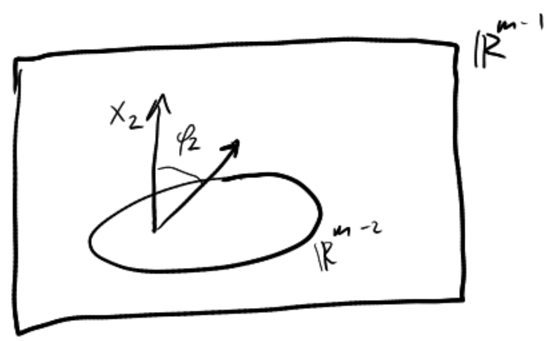
Лекция 6

6.1 Сферические координаты в R^m

Пример.

- $r, \varphi_1, \dots \varphi_{m-1}$
- $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}^{m-1} \supset \dots \supset \mathbb{R}^2$ В кажои из очередных пространств $\mathbb{R}^k$ фиксируем ортогональное к $\mathbb{R}^{k-1}$
- φ_1 — угол между $\overline{e_1}$ и $Ox \in [0, \pi]$
- φ_2 — угол между $\overline{e_2}$ и $P_{2_{(e_2\ \dots\ e_m)}}(x) \in [0, \pi]$
- $\vdots$
- φ_{m-1} — просто полярный угол в $\mathbb{R}^m$





$$x_1 = r\cos\varphi_1$$

$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$x_3 = 2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3$$

$$\vdots$$

$$x_{m-1} = r\sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1}$$

$$x_m = r\sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}$$

$$J = r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}$$ [1]

Сделаем в цикле эти координаты:

шаг 1 $x_m = \rho_{m-1}\sin\varphi_{m-1}$
$x_{m-1} = \rho_{m-1}\cos\varphi_{m-1}$
$(x_1 \ \dots \ x_n) \rightsquigarrow (x_1 \ \dots \ x_{m-2},\ \rho_{m-1},\ \varphi_{m-1})$

шаг 2 $\rho_{m-1} = \rho(m_2)\sin\varphi_{m-2}$
$x_{m-2} = \rho_{m-2}\cos\varphi_{m-2}$
$(x_1 \ \dots \ x_{m-2},\ \rho_{m-1},\ \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \ \dots \ x_{m-3},\ \rho_{m-2},\ \varphi_{m-2},\ \varphi_{m-1})$

$\vdots$

последний шаг $(x_1,\ \rho_2,\ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r,\ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_{m-1})$
$\rho_2 = r\sin\varphi_1$
$x_1 = r\cos\varphi_1$

$$\lambda_m(\Omega) = \int\limits_{\Omega} 1d\lambda_m \underset{\text{1 шаг}}{=\!=\!=} \int\limits_{\Omega_1} \rho_{m-1} \underset{\text{2 шаг}}{=\!=\!=} \int\limits_{\Omega_2} \rho_{m-2}^2\sin\varphi_{m-2} \underset{\text{3 шаг}}{=\!=\!=} \int\limits_{\Omega_3} \rho_{m-3}^3\sin^2\varphi_{m-3}\sin\varphi_{m-2}d\lambda =$$

$$= \dots = \int\limits_{\Omega_{m-1}} r^{m-1}\sin^{n-2}\varphi_1\dots\sin\varphi_{m-2}$$

6.2 Произведение мер

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

Лемма 6. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — *п/к* $\Rightarrow \mathfrak{A}\times\mathfrak{B} = \{A\times B \subset X\times Y | A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B}\}$

Пример. Ячейки: В $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$ $\mathfrak{A} = \mathcal{P}^1,\ \mathfrak{B}\in\mathcal{P}^1$
$A\times B$ — ячейка из $\mathcal{P}$

Определение. $\mathcal{P} = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ — множества из этой системы называются измеримыми прямоуг. $m_o(A\times B) = \mu A\cdot\nu B$

Теорема 6.2.1.

1. m_0 — мера на $\mathcal{P}$
2. ν, μ — σ-конечные $\Rightarrow m_0$ — тоже σ-конечная

[1] В R^3 "географические" координаты $J = r^2\cos\psi$

Доказательство.

1. $?m_0$ — счетно аддитивна $?m_0 P = \sum m_o P_k$, если

   $$A \times B = P = \bigsqcup P_k, \text{ где } P_k = A_k \times B_k$$

   Наблюдение: $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$
   Тогда $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$, т.е.

   $$\forall x \in X, y \in Y \quad \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$$

   проинтегрируем по y по мере ν:

   $$\chi_A(x)\nu B = \sum \chi_A(x) \cdot \nu B_k$$

   Интегрируем по x:

   $$\mu A \cdot \nu B - \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$$

2. Очев. μ — σ-конечная $\Rightarrow X = \bigcup X_k$, μX_k — конечная nu — σ-конечная $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n$, νY_k — конечная

   $$X \times Y = \bigcup X_k Y_n \quad m_0 \mu X_k \nu Y_n \text{ — конечная}$$

   $\Rightarrow m_0$ — σ-конечная мера

□

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 с п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на σ-алгебра, которую будет обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Определение. $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \nu \times \mu)$ — произведение пространств с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

Примечание.

1. Это произведение ассоциативно
2. σ-конечность нужна для единственности произведения

Теорема 6.2.2. $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{n+m}$

Доказательство. Без доказательсва □

Определение.

- X, Y — множества
- $C \subset X \times Y$

$$C_x := \{y \in Y | (x,y) \in C\}$$
$$C^y := \{x \in X | (x,y) \in C\}$$

Примечание.

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcup (C_\alpha)_x$$
$$\left(\bigcap_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcap_\alpha (C_\alpha)_x$$
$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

Теорема 6.2.3 (Кавальери)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- ν, μ — σ-конечные, полные
- $m := \mu \times \nu$

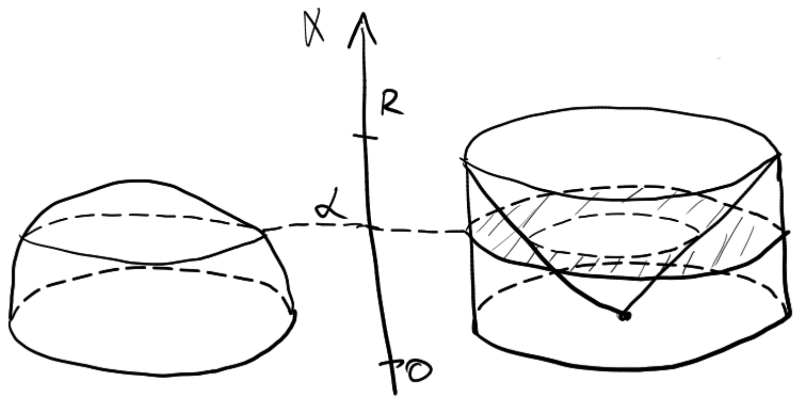
Пусть $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$
Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая[2] функция на X
3. $mC = \int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y

Пример. Половину шара сопоставляем с конусом.

[2]функция задана при почти всех x. Она равна почти везде некоторой измеримой функции, которая задана на всем X. Это "не мешает" утверждению 3



- C_x =круг
- C_x =кольцо

$$\lambda(C_x) = \pi(R^2 - x^2)$$
$$\lambda(C_x) = \pi R^2 - \pi x^2$$
$$\nu(\frac{1}{2}\text{шара}) = \nu(\text{цилиндр} - \text{конус}) = \pi R^2 - \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{2}{3}\pi R$$

Доказательство. $\mathcal{D}$ — система множеств, для которых выполнено 1. - 3.

1. $C = A \times B \Rightarrow C \in \mathcal{D}$
   (a) $C_x = \begin{bmatrix} \emptyset & x \notin A \\ B & x \in A \end{bmatrix}$
   (b) $x \mapsto \nu(x)$ — это функция $\nu B \cdot \chi_A$
   (c) $\int \nu(C_x) d\mu = \int\limits_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in D$, dis $\Rightarrow \bigsqcup E_i \in D$
   $E_i \in D \Rightarrow (E_i)_X$ — измеримое почти везде $\Rightarrow$ при почти всех x все $(E_i)_X$ – измеримое
   (a) Тогда при этих x $E_X = \bigsqcup (E_i)_X \in \mathfrak{B}$
   (b) $\nu E_X = \sum \underbrace{\nu(E_i)_X}_{\text{измеримая функция}} \Rightarrow$ функция $x \mapsto \nu E_X$ измеримая[2]
   (c)
   $$\int\limits_X \nu E_X d\mu = \sum_i \int\limits_X \nu(E_i)_X = \sum_i mE_i = mE$$

3. $E_i \in \mathcal{D},\ E_1 \supset E_2 \supset \dots,\ E = \bigcap_i E_i,\ \mu E_i < +\infty$ Тогда $E \in \mathcal{D}$

$$\int_X \nu(E_i)_X d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_X \text{ — конечная при почти всех } x$$

   (a) $\forall x$ верно $(E_1)_X \supset (E_2)_X \supset \dots,\ E_X = \bigcap (E_i)_X$. Тогда E_X — измеримое при почти всех x и $\lim\limits_{i\to+\infty} \nu(E_i)_X = \nu E_X$ при почти всех x

   (b) Таким образом $x \mapsto \nu E_X$ — измеримая[2]

   (c)
$$\int_X \nu E_X d\mu = \lim \int \nu(E_i)_X d\mu = \lim mE_i = mE$$

   Первое равенство по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: $|\nu(E_i)_X| \le \nu(E_1)_X$ — из[2]

Итог: $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то ?? $\bigcup A_{ij} \in \mathcal{D}$

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$

$$mE = \inf\{\sum m_0 P_k | E \subset \bigcup P_k,\ P_k \in \mathcal{P}\}$$

   — теорема о лебеговском продолжении.
   $\exists$ множества H вида $\bigcap\limits_e \bigsqcup\limits_X P_{ke}$ (т.е. $H \in \mathcal{D}$)
   $E \subset H, mH = mE = 0$

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_X \sim 0 \text{ (} = 0 \text{ при почти всех } x)$$

   $E_X \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow$

   (a) E_X — измерима при почти всех x

   (b) $\nu E_X = 0$ почти везде

   (c) $\int \nu E_X d\mu = 0 = mE$

5. C — m-измеримо, $mC < +\infty$ тогда $C \in \mathcal{D}$
   $C = H \setminus e$, где H — вида ??? $\bigcup P_{ke},\ me = 0,\ mC = mH$

   (a) $C_x = H_x \setminus e_X$ — измерима при почти всех x, т.к. ν — полная

   (b) $\nu e_X = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_X = \nu H_X \Rightarrow$ измерима

   (c) $\int\limits_X \nu C_x d\mu = \int\limits_X \nu H_x d\mu = mH = mC$

6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathcal{D}$

$$X = \bigsqcup X_k,\ \mu X_k < +\infty,\ Y = \bigsqcup Y_j,\ \nu Y_j < +\infty$$

$$C = \bigsqcup (C \cap (X_k \times Y_j)) \text{ — используем 2.}$$

□

Следствие 6.2.3.17. C — измеримое в $X \times Y$. Пусть $P_q(C) = \{x \in X | C_x \neq 0\}$ — проекция C на X. Если $P_1(C)$ — измеримое, то:

$$mC = \int\limits_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Доказательство. при $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$ □

Примечание.

1. — измеримое $\not\Rightarrow$ $P_1(C)$ — измеримое
2. C — измеримое $\not\Rightarrow$ $\forall x$ C_x — измеримо
3. $\forall x \forall y$ C_x, C^y — измеримые $\not\Rightarrow$ C — измеримое (пример Серпинского)

Лекция 7

7.1 Принцип Кавальери

1. C_x — имзмерима при почти всех x
2. $x \mapsto \nu C_x$ — измерима*
3. $mC = \int\limits_X \mathcal{X}_x d\mu$

Следствие 7.1.0.18. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная
Тогда $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_{[a,b]} f\, d\lambda_1$

Доказательство. $f > 0$ $\Pi\Gamma(f[a, b])$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^2$. $C_x = [0, f(x)]$ $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lambda_2(\Pi\Gamma) = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

Примечание. λ_2 можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением свойства конечной аддитивности и это продолжение не единственно

Примечание. $\lambda_m, m > 2$ — аналогичным образом продолжить невозможно. Парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского

Примечание. Для замечания 1 и замечания 2 требуется инвариантность меры относительно движения $\mathbb{R}^m$

Определение.

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times T \to$

- $\forall x \in X$ f_x — это функция(сечение) $f_x(y) = f(x, y)$, можно считать что она задана на C_x
- f^y — аналогичное сечение

Теорема 7.1.1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечныемера, полные
- $m = \mu x \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{R}, f \geq 0$ — измерима относительно $A \otimes B$

Тогда

1. при почти всех x f_x — измеримая на Y f^y — измерима на X почти везде
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x d\nu = \int\limits_Y f(x, y) = d\nu(y)$ — измеримая* на X
   $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f^y d\mu$ — измеримая* на Y
3. $\int\limits_{X \times Y} dfm = \int\limits_X \varphi d\mu = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$
   $= \int\limits_Y \psi d\nu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

$C \subset X \times Y$ $P_1(C)$ — измеримо.
Тогда

$$\int\limits_C f dm = \int\limits_{f_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Теорема 7.1.2 (Фубини)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- Y, B, ν
- ν, mu — σ-конечные
- $m = \nu \times \mu$
- f — суммируема на $X \times Y$ относительно m

Тогда

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y fx\, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ — суммируема на Y
3. $\int\limits_{X\times Y} f\, dm = \int\limits_X \varphi\, d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$

Доказательство. Без доказательства □

Доделать

7.2 Поверхностные интегралы

7.2.1 Поверхностные интегралы I рода

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие. $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация. $E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ по Лебегу

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M | E$ — измеримо$\} = \{\varphi(A) | A \in \mathfrak{M}^2,\ A \subset G\}$

Определение. Мера на $\mathfrak{A}_M$

$$S(E) := \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v|\, dudv$$

Т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ

Примечание. $\mathfrak{A}_M$ — σ-алгебра, S — мера

Примечание. $E \subset M$ — компактное $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(E)$ — компактное $\Rightarrow$ измеримое $\Rightarrow$ замкнутые множества измеримы $\Rightarrow$ (относительно) открытые множества измеримы

Примечание. $\mathfrak{A}_M$ не зависит от φ по теореме о двух параметризациях

Примечание. S не зависит от φ

$$|\overline{\varphi'_s} \times \overline{\varphi'_v}| = |(\overline{\varphi'_s} \cdot u'_s + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_s) \times (\overline{\varphi'_u} \cdot u'_t + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_t)| =$$

$$= |\overline{(\varphi'_u \times \varphi'_v)} \cdot (u'_s \cdot v'_t - v'_s \cdot u'_t)| = \boxed{\text{Доделать}}$$

Примечание.

- $f : \mathfrak{M} \to \overline{R}$ — измеримая

$M(f < a)$ — измеримая $\Leftrightarrow N(f \circ \varphi < a)$ — измерима относительно $\mathfrak{M}^2$
f — измерима относительно $\mathfrak{A}_M \Leftrightarrow f \circ \varphi$ — измерима относительно $\mathfrak{M}^2$

Определение (поверхностный интеграл I рода)**.**

- M — простое гладкое двумерное иногообразие в $\mathbb{R}^3$

- φ — параметризация
- $f : M \to \overline{R}$ — суммируема по мере S

То

$$\iint\limits_{M} f\,ds = \iint\limits_{M} f(x,y,z)\,ds$$

называется **интегралом I рода от f по многообразию** M

Примечание. По теореме об интегрировании по взвешенному образу меры

$$\iint\limits_{M} f\,ds = \iint\limits_{G} f(\varphi(u,v))|\varphi'_v \times \varphi'_v|\,dudv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{pmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 \cdot |varphi'_v|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$E = |\varphi'_u| = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2$$

$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \quad F = |\varphi'_v|^2$$

Лекция 8

5 апреля

- M
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
- f
- $f\Phi$

$$\int_{M/E} df s = \int_{O/\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi \cdot |\Phi' u \times \Phi' v| \, du \, dv$$

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — **кусочно гладкое двумерное многообразие**, если M — конечное объединение

- простых гладких двумерных многообразий M_i
- гладких кривых
- точек

Примечание. Просто так сферу параметризовать не можем, но можем разбить ее на две полусферы и окружность и считать отдельно для каждой из них.

Определение. $E \subset M$ — измеримое, если измеримы все $E \cap M_i$.

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

8.1 Поверхностный интеграл II рода

- M — простое гладкое двумерное многообразие в R^3 — поверхность

Определение. Сторона поверхности — непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности
$M \subset \mathbb{R}^3 \quad W : M \to \mathbb{R}^3$
$\forall x\ W(x)$ — нормаль к M, $|w(x)| = 1$, $w(x) \perp \Phi' u, \Phi'_v$

Примечание. Локльно каждая повехность — двустороннее. В общем случае — 1 или 2 стороны

Примечание. График функции $z(x, y)$

$$\Phi : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\Phi'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \quad \Phi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

— касательные векторы

$$n := \Phi'_x \times \Phi'_y = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

— нормаль

$$n_0 = \pm \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\cdots}}, \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \right)$$

Примечание. Другой способ задания стороны поверхности

1. u, v — касательные векторы
   $u \nparallel v$, (u, v) — касательный репе́р
   Если задано непрерывное поле реперов, то они задают сторону $n = u \times v$(отнормировать)

2. Задана петля + указано непрерывное движение

Определение. M — поверхность в $\mathbb{R}^3$, n_0 — сторона, γ — контур(петля) в M — ориентированный.
Говорят, что сторона поверхности n_0 согласована с ориентацией γ: $(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$. Т.е. если ориентация γ задает сторону n_0

Определение.

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M

- $F : M \to \mathbb{R}^3$ — векторное поле(непрерывное)

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle \, ds$$

— **интеграл II рода** векторного поля F по поверхности M

Примечание. Смена стороны = смена знака

Примечание. Не зависит от параметра

Примечание. $F = (P, Q, R)$ обозначается

$$\iint_M P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

Примечание. $\Phi, n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle = \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| \, du\,dv =$$

$$\int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\text{смешенное произведение}} du\,dv \tag{8.1}$$

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle = \det \begin{pmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$8.1 = \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & z'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} du\,dv$$

Пример. График $z(x, y)$ над областью G по верхней стороне

$$\iint_{\Gamma_z} R\,dx\,dy = \iint_{\Gamma_z} 0\,dy\,dz + 0\,dz\,dy + R(x, y, z)\,dx\,dy \tag{8.2}$$

$$n_0 = \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\cdots}}, \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \right)$$

$$8.2 = \iint_{\Gamma_z} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}} \, ds = \iint_G R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy = \iint_G R\,dx\,dy$$

т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции

Следствие 8.1.0.19.

- $V \subset \mathbb{R}^3$
- $M = \partial V$ — гладкая двумерная поверхность

- n_0 — внешняя нормаль

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} z\,dx\,dy = \frac{1}{3}\iint_{\partial V} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

Следствие 8.1.0.20. Ω — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, M (— цилиндр над Ω) $= \Omega \times [z_0, z_1]$
Тогда (сторона M любая) $\int_M R\,dx\,dy = 0$

8.2 Ряды Фурье

8.2.1 Пространства L^p

Свойство 1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \mathbb{C}$
  $x = f(x) = u(x) + iv(x)$
  $u = \Re f,\ v = \Im f$

- f — *измеримая, если* u *и* v — *измеримые*
- f — *суммируемая,* u *и* v — *суммирумые*
- f — *суммируемая:* $\int_E f = \int_E u + \int_E v$

Свойство 2 (Неравенство Гёльдера)**.**

- $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- E — *измеримое*
- $f, g : E \to \mathbb{C}$ — *измеримые*

Тогда

$$\int_E |fg| d\mu \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Свойство 3 (Неравенство Минковского)**.** *Те-же условия что и в Неравенстве Гельдера*

$$\left(\int_E |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Примечание. При $p = 1$ неравенство тоже верно

Свойство 4.

Определение. L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \subset X$ — измеримое

$$\mathcal{L}^p(E, \mu) := \left\{ f : \text{ почти везде } E \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \middle| f \text{ — измеримая}, \int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

— это линейное пространство (по неравенству Минковского)
$f, g \in \mathcal{L}^p(E, \mu) : f \sim g \quad f = h$ почти везде. $\mathcal{L}^p/_N = L^p(E, \mu)$ — линейной пространство. Задаем норму $\|f\|_{L^p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Свойство 5.

- $L^\infty(E, \mu)$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- *E — измеримое*
- *f — почти везде $E \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf\{A \in \overline{R} \,|\, f \leq A \text{ почти везде}\}$$

Свойство 6. $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$

Свойство 7. $f \leq \operatorname{ess\,sup} f$ *почти везде*

Доказательство. $B = \operatorname{ess\,sup} f$
Тогда □

Свойство 8. *f — сумм,* $\operatorname*{ess\,sup}_E |g| < +\infty$

Тогда

$$\left| \int_E fg \right| \leq \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$$

Доказательство.

$$\left| \int_E fg \right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot |f|$$

□

Примечание. $L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), \text{ изм.}, \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\}/_\sim$. Эквивалентные функции отождествленны — это нормированное пространство

$$\|f\|_{L^\infty(E,\mu)} := \operatorname*{ess\,sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

Примечание. В новых обозначениях. Неравенство Гельдера:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Здесь можно брать $p = 1,\ q = +\infty$

Примечание. $f \in L^p \Rightarrow f$ — почти везде конечны. $1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow$ можно считать f — задана всюду на E, и всюду конечна

Лекция 9

12 апреля

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

$$\int_a^b f ds \quad \int_a^b \langle F, \gamma' \rangle dt = \int_a^b \langle F, \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \rangle ds$$

Мера на кривой — гладкре 1-мерное многообразие, γ — параметризация. Эта мера — образ меры Лебега в $\mathbb{R}^1$ с весом $|\gamma'|$ — интеграл I рода. Общий случай: Интеграл II рода по $(m-1)$-мерной поверхности в $\mathbb{R}^m$. F — векторное поле

$$\int \langle F, n_0 \rangle dS_{m-1} \quad |\Phi'_u \times \Phi'_v| \text{ — вес}$$

Мера Лебега на k-мерном многообразии в $\mathbb{R}^m$. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_k$, тогда λ_k(Паралеллепипед($\Phi'_1, \ldots, \Phi'_k$)) — вес

9.1 Формула Грима

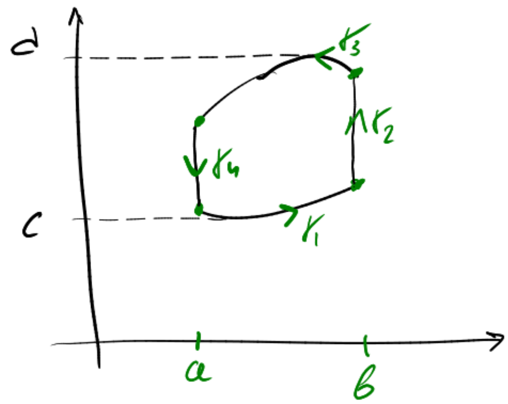
Теорема 9.1.1.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное, ограниченное
- D — ограничено кусочно гладкой кривой ∂D
- Пусть граница области D ∂D ориентированна, согласована с ориентацией D (против часовой стрелки) — обозначим ∂D^+
- (P, Q) — гладкое векторное поле в окрестности D

Тогда

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} P\, dx + Q\, dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем D — ‘криволинейный 4-х угольник‘



∂D — состоит из путей $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$, где γ_2, γ_4 — вертикальные отрезки (возможно вырожденнные), γ_1, γ_3 — гладкие кривые(можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$). Аналогично можно Исправить. Проверим, что:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} P\, dx + Q\, dy$$

Левая часть:

$$-\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x))\, dx$$

Правая часть:

$$\int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{0} + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int \gamma_4}_{0} =$$

$$= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\, dx - \int_a^b P(x, \varphi_3(x))\, dx$$

□

Примечание. Теорема верна для любой области D с кусочно гладкой границей, которую можно разрезать на криволинейные 4-х угольнинки

$$\int_{\partial D^+} = \int_{\partial D_1^+} + \int_{\partial D_2^+}$$ Исправить

Теорема 9.1.2 (Формула Стокса).

- Ω — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ (двустороннее)
- n_0 — сторона Ω
- $\partial\Omega$ — кусочно гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$ — ориентированная кривая с согласованной ориентацией.
- (P, Q, R) — гладкое векторное поле в окрестности Ω

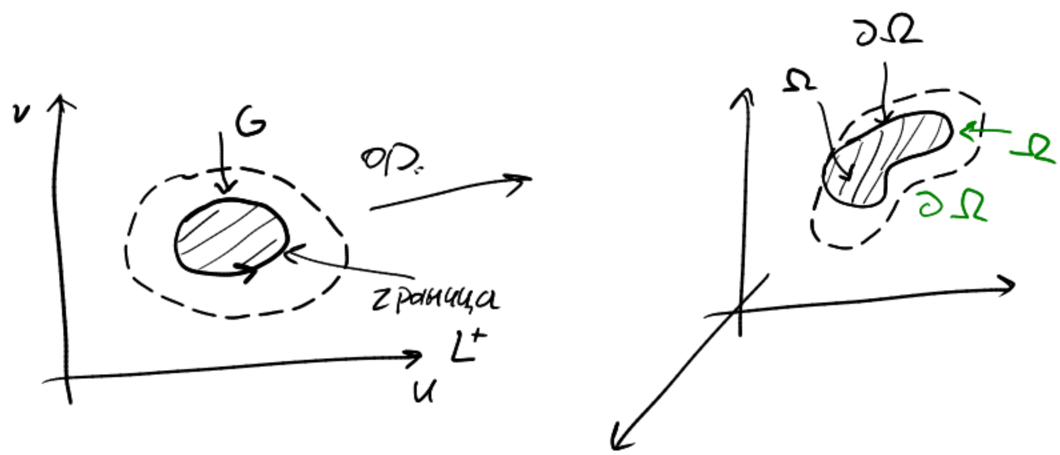
Тогда

$$\int_{\Omega^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\Omega \in C^2$. Достаточно?:

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$\Phi = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$



$dx\,dy = -dy\,dx,\ dx\,dx = 0$

$$dP\,dx + dQ\,dy + dR\,dz = (P'_x\,dx + P'_y\,dy + P'_z\,dz)\,dx + \ldots$$

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \int_{L^+} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) \tag{9.1}$$

Параметризируем: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma = (u(t), v(t))$ — параметризируем L^+

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \int_a^b P\left(\frac{\partial dx}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v'\right)dt \tag{9.2}$$

$\Phi \circ \gamma$ — парметризируем $\partial\Omega^+$, $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$9.2 = \int_a^b P \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\, du + P \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\, dv$$

$$9.1 = \iint_G \frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) du\, dv =$$

$$= \iint_G (P'_x \cdot x'_u + P'_y \cdot y'_u + P'_z \cdot z'_u)x'_v + p \cdot x''_{uv} - (P'_x \cdot x'_v + P'_y \cdot y'_v + P'_z \cdot z'_v)x'_u - P \cdot x''_{uv}\, du\, dv =$$

$$= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y}(x'_u y'_v - x'_v y'_u) = \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy$$

□

- $L^p(X, \mu)$, $1 \le p \le +\infty$

$$\left(\int_X |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ — сходится}$$

- $p = \infty :\ \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty$

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Теорема 9.1.3.

- $\mu E < +\infty$, $1 \le s < r \le +\infty$

<u>Тогда</u>

1. $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2. $\|f\|_s \le^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

Доказательство.

1. Следует из 2)
2. $r = \infty$

$$\left(\int |f|^s\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \le \operatorname{ess\,sup} |f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

$r < +\infty$ $p := \frac{r}{s}$, $q = \frac{r}{r-s}$

$$\|f\|_s^s = \int_E |f|^s\, d\mu = \int_E |f|^s \cdot 1\, d\mu \le \left(\int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}}\, d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}}\, d\mu\right)^{\frac{r-s}{r}} \le$$

$$\le \|f\|_r^s \mu E^{1 - \frac{s}{r}}$$

□

Следствие 9.1.3.21.

- $\mu E < +\infty$
- $1 \le s < r \le +\infty$
- $f_n \xrightarrow[L^r]{} f$

Тогда $f_n \xrightarrow[L^s]{} f$

Доказательство.

$$\|f_n - f\|_s \le \mu E^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r}} \cdot \|f_n - f\|_r \to 0$$

□

Теорема 9.1.4 (о сходимости в L^p и по мере)**.**

- $1 \le p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1. $f \in L^p$, $f_n \to f$ в $L^p \implies f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
2. $f \underset{\mu}{\Rightarrow} f$ либо $f_n \to f$, $|f_n| \le g$, $g \in L^p$
   Тогда $f \in L^p$ и $f_n \to f$ в L^p

Доказательство.

1. $X_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \ge \varepsilon)$
$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p \, d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \to 0$$
2. $f_n \Rightarrow f$, $\exists n_k$ $f_{n_k} \to f$ почти везде $\implies$ $|f| \le g$ почти везде
   $|f_n - f|^p \le (2g)^p$ — суммируема (так как $g \in L^p$)
   $\|f_n - f\|_p^p$ Доделать

□

- Фундаментальная последовательность:
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, n > N \quad \|f_n - f_k\| < \varepsilon$, т.е. $\|f_n - f_k\| \xrightarrow[n,k \to +\infty]{} 0$
- $f_n \to f \implies f_n$ — фундаментальная $\|f_n - f_k\| \le \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} + \underbrace{\|f - f_k\|}_{\to 0}$
- $C(k)$ — пространство непрерывных функций на компакте K
  $\|f\| = \max_K |f|$, утверждение: $C(K)$ — полное

Задача 1. $L^\infty(X,\mu)$ — полное

Теорема 9.1.5.

- $L^p(X,\mu)$ — полное
- $1 \le p < +\infty$

Доказательство. f_n — фундаментальная

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists N_1\ \forall n_1, k > N \quad \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$$

Возьмем один такой n_1 и зафиксируем:

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\ \exists N_2 > n_1\ \forall n_2, k > N_2 \quad \|f_{n_2} - f_k\|_p < \frac{1}{4}$$

Повторим это действие. Получим последовательность (n_k):

$$\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

Рассмотрим ряд:

$$S(x) = \sum_k |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad S(x) \in [0, +\infty]$$

S_N — частичные суммы ряда S

$$\|S_N\|_p \le \sum_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p 1$$

, т.е. $\int_X S_N^p < 1$, по теореме Фату: $\int_X S^p\, d\mu < 1$, т.е. S^p — суммируема $\implies$ S — почти везде конечна

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

— его частичные суммы — это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. схоимость этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \to f$ почти везде. Проверим, что $\|f_n - f\|_p \to 0$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берем $m = n_k > N$

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p\, d\mu < \varepsilon^p$$

это выполняется при всех больших k. По теореме Фату:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$$

, т.е. $\|f_n - f\| < \varepsilon$ $\square$

Определение. Y — метрическое пространство, $A \subset Y$, A — (всюду) плотно в Y

$$\forall yinY \ \forall U(y) \ \exists a \in A : \ a \in U(y)$$

Пример. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$

Лемма 7.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \le p \le +\infty$

Множество ступенчатых функций (из L^p) плотно в L^p

Примечание. $\varphi \in L^p$ — ступенчатая $\implies (\varphi \neq 0) < +\infty$

Доказательство.

$p = \infty$ $f \in L^\infty$, изменив f на множестве C меры 0, считаем, что $|f| \le \|f\|_\infty$. Тогда существуют ступенчатые $0 \le \varphi_n \rightrightarrows f^+$, $0 \le \psi_n \rightrightarrows f^-$. Тогда сколько угодно близко к f можно найти ступенчатую фкнцию вида $\varphi_n + \psi_n$

$p < +\infty$ Пусть $f \ge 0$. $\exists \varphi_n \ge 0$ — ступенчатая: $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p \to 0$$

, по теореме Лебега. f — любого знака: берем $f^+, f^-, \dots$

$\square$

Определение. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — **финитная**, если $\exists B(0, r) : f \equiv 0$ вне $B(0, r)$. $C_0(\mathbb{R}^m)$ — непрерывные финитные функции. $\forall p \ge 1$ $C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Определение. Топологическое пространство X — **нормальное**, если

1. Точки X — замкнутые множества
2. $\forall F_1, F_2 \subset X$ — замкнутые, $\exists U(F_1), U(F_2)$ — открытые и $U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

Задача 2. R^m — нормальное

Лекция 10

19 апреля

Теорема 10.0.1 (Формула Остроградского).

- $V = \{(x, y, z) \big| (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \le z \le F(x, y)\}$
- G — компактно
- ∂G — кусочно гладкая
- $f, F \in C^1$
- R в окрестности $V \to \mathbb{R}, \in C^1$

Фиксируем внешнюю сторону поверхности
Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} R\, dx\, dy = \iint_{\partial V} 0\, dy\, dz + 0\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Доказательство.

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} = \iint_G dx\, dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint_G R(x, y, F(x, y))\, dx\, dy - \iint_G R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z)\, dx\, dy + \iint_{\Omega_f} R\, dx\, dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R\, dx\, dy}_{0}$$

□

Следствие 10.0.1.22 (обобщение формула Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Определение. V — гладкое векторное поле. **Дивергенция**:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Примечание.

$$\operatorname{div} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V \, dx\, dy\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, \overline{n}_0 \rangle ds$$

— не зависит от координат

Следствие 10.0.1.23.

- $l \in \mathbb{R}^3$
- $f \in C^1(\text{окр}(V))$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} \, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} f \cdot \langle f, n_0 \rangle ds$$

10.1 Формула Стокса

$$\int_{\partial\Omega} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_{\Omega} \langle rot(V), n_0 \rangle ds$$

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

— ротор векторного поля (вихрь векторного поля)

Пример.

$$V(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

$$\operatorname{rot} V = (0, 0, 2)$$

Примечание. $V = (P, Q, R)$ — потенциально, $\exists f$

$$V = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Теорема 10.1.1.

- Ω — область

Тогда V — потенциально $\Leftrightarrow \operatorname{rot} V = 0$

Определение. Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ — **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если $\exists$ гладкое векторное поле B в Ω:

$$A = \operatorname{rot} B$$

B — называется **векторным потенциалом** A

Теорема 10.1.2 (Пуанкаре').

- Ω — открытый паралеллепипед
- A — векторное поле в Ω, $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

Доказательство.

($\Rightarrow$) $\operatorname{div}\operatorname{rot} B = 0$

($\Leftarrow$) Дано:

$$A_1{}'_x + A_2{}'_y + A_3{}'_z = 0 \tag{10.1}$$

. Найдем векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, $A = \operatorname{rot} B$. Путь $B_3 \equiv 0$

$$\left.\begin{array}{l} B_3{}'_y - B_2{}'_z = A_1 \\ B_1{}'_z - B_3{}'_x = A_2 \\ B_2{}'_x - B_1{}'_y = A_3 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{rl} -B_2{}'_z = A_1 & (1) \\ B_1{}'_z = A_2 & (2) \\ B_2{}'_x - B_1{}'_y = A_3 & (3) \end{array}$$

(1)

$$B_2 \coloneqq -\int_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x, y)$$

(2)

$$B_1 \coloneqq \int_{z_0}^{z} A_2 dz$$

(3)

$$-\int_{z_0}^{z} A_1{}'_x\, dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^{z} A_z{}'_y\, dz = A_3 \xRightarrow[10.1]{} \int_{z_0}^{z} A_3{}'_z dz + \varphi'_x = A_3$$

$$A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x = A_3(x, y, z) \Leftrightarrow \varphi'_x = A_3(x, y, z_0)$$

Отсюда найдем $\varphi = \int_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0)\, dx$

□

Примечание.

$$\int_{\partial\Omega} A_l\, dl = \int_{\partial\Omega} \langle A, l_0 \rangle\, dl = \iint_{\Omega} (\operatorname{rot} A)_n\, ds$$

$$(\operatorname{rot} A)_n(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\lambda(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\Omega_\varepsilon} (\operatorname{rot} A)_n\, ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\lambda\Omega} \cdot \int_{\partial\Omega_\varepsilon} A_l\, dl$$

Лемма 8 (Урнсона).

- X — *нормальное*
- $F_0, F_1 \subset X$ — *замкнутые,* $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R}$ *— непрерывная,* $0 \le f \le 1$, $f\big|_{F_0} = 0$, $f\big|_{F_1} = 1$

Доказательство. Перефразируем нормальность: Если $\underset{\text{замк.}}{F} \subset {}_{\text{октр.}G}$, $\exists U(F)$ — открытое:

$$F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$$

.

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^C \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^C}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$\overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}} \subset G_1$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}$, $G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом для любого двоично рационального числа $\alpha \in [0,1]$ задется множество G_α

$$f(x) := \inf\{\alpha \text{ — двоично рациональное} \big| x \in G_\alpha\}$$

Проверим что: f — непрерывно $\Leftrightarrow f^{-1}(a,b)$ — всегда открыто. Достаточно проверить:

1. $\forall b \ f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a \ f^{-1}(-\infty, a)$ — замкнуто

Покажем это:

1. $$f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q<b \\ q \text{ — дв. рац.}}} G_q \text{ — открыто}$$
   (⊃) Очевидно: При $x \in G_q$ $f(x) \le q - b$
   (⊂) $f(x) = b_0 < b$ Возьмем $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$
2. $f^{-1}(-\infty, a] = \prod_{q>a} G_q = \bigcap_{q>a} \overline{G_q}$ — замкнуто
   (⊃) Тривиально
   (⊂) q, r — двоично рациональные
   $$\prod_{\substack{q>a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

□

Теорема 10.1.3.

- $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda_{\mathfrak{M}})$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^P(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$ множество непрерывных финитных функция плотно

Примечание. f — финитная в $\mathbb{R}^m = \exists$ шар B $f = 0$ вне B. f — непрерывная финитная на $E = \exists g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ $f = g\big|_E$

Доказательство. Доделать □

Примечание. В $L^\infty(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$ утверждение теоремы неверно. $L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$ $B\left(\chi_{[a,b]}, \frac{1}{2}\right)$ не содержит непрерывных функций

$$\sup_{\mathbb{R}} |f - \chi_A| \geq \max(\lim_{x \to a+0} |f(x) - \chi_A|, \lim_{x \to a-0} |f(x) - \chi_A|) =$$

$$= \max(|f(a) - 1|, |f(a) - 0|) \geq \frac{1}{2}$$

Примечание. В $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$, $p < +\infty$ плотны:

- Гладкие функции
- Непрерывные функции
- Доделать