Практика 6

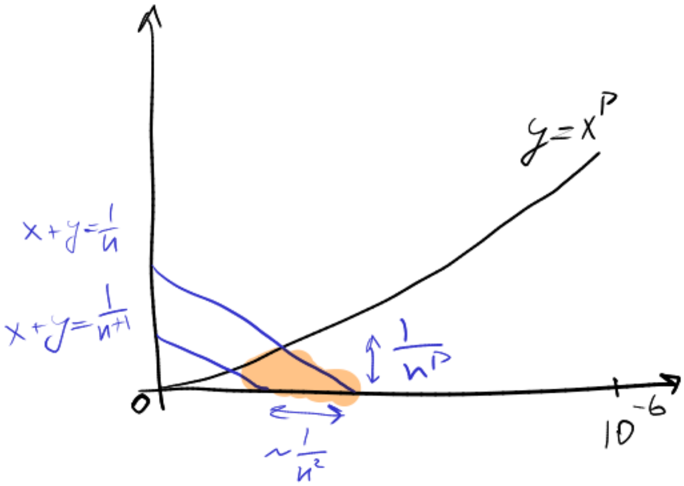
Ilya Yaroshevskiy

18 марта 2021 г.

Содержание

Задача 1.

$$\int_\Omega \frac{1}{|x+y|^p}dxdy$$



Решение.

$$\int_\Omega \frac{1}{|x+y|^p}dxdy = \sum_n \int_{\Omega_n} \asymp \sum_n \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^p} \cdot \frac{1}{n^{p+2}}$$

Задача 2. Тоже самое с четвертинкой астроиды

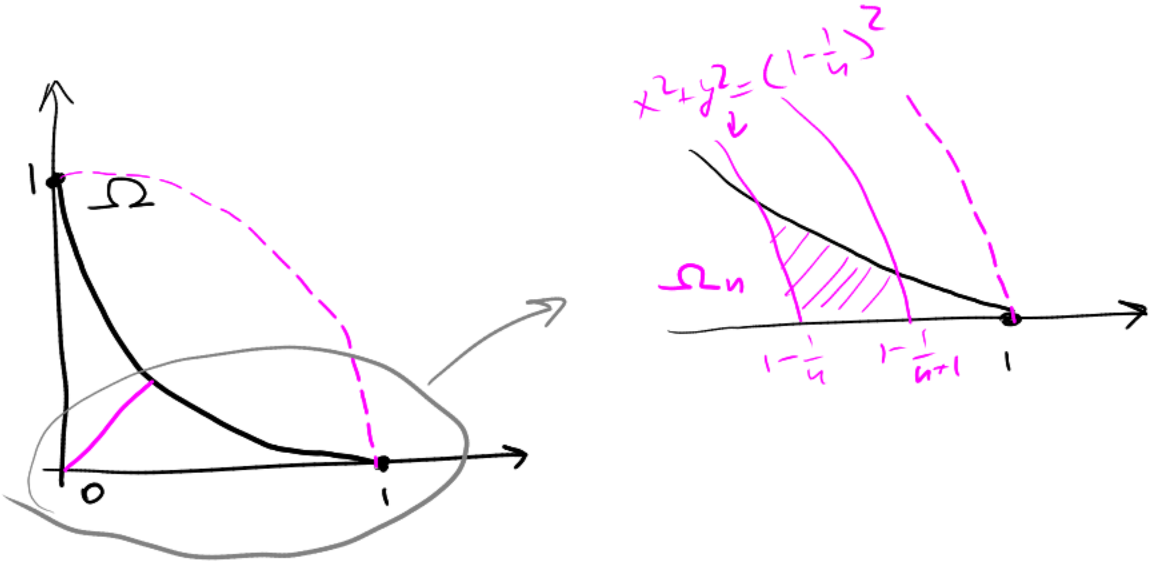
Решение.

$$\int_\Omega \frac{1}{|x+y|^p}dxdy \asymp \sum \frac{1}{n^{3-p}}$$

Задача 3.

$$\int_\Omega \frac{1}{|1-x^2-y^2|}dxdy$$

, Ω — четверть астроиды

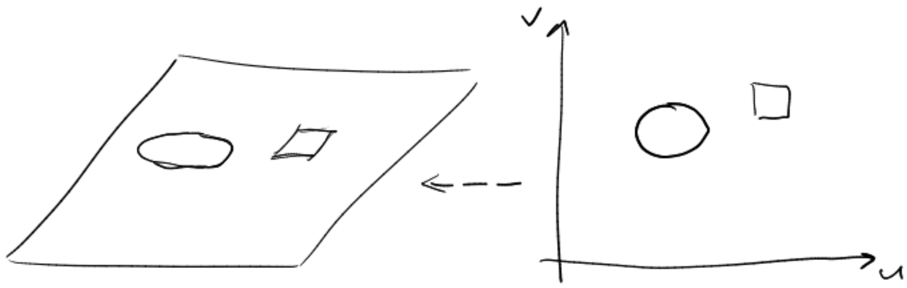


Решение.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|1-x^2-y^2|}dxdy = \sum_n \int_{\Omega_n} \asymp \sum \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^p} \cdot \frac{1}{n^{3.5}}$$

Задача 4.

1 Интеграл по поверхности



$$\begin{matrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{matrix}$$

$$S = \iint_{\Omega} |\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v| dudv = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

, где $E = |\overline{x}'_u|^2 = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2$, $F = (\overline{x}_u, \overline{x}_v) = x'_u x'_v + y'_u y'_b + z'_u z'_v$, $G = |\overline{x}'_v|^2 = {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2$

Задача 5. График $z = z(x, y)$

Решение.

$$\begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{matrix}$$

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} dxdy$$

Задача 6.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$az = xy$$

Решение.

$$S = \iint_{\bigcirc} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}}\, dx, dy = \begin{vmatrix} x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\varphi \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{1+r^2}a^2 r = 2\pi a^2 (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3}\Big|_0^1$$

Задача 7.

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$y^2 + z^2 = a^2$$

Решение.

$$x = \sqrt{a^2 - z^2}$$

$$x'_y = 0 \quad x'_z = \frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

$$S = 4 \iint\limits_{y^2+z^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz = 16 \int\limits_0^a dz \int\limits_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \sqrt{1 + 0 + \left(-\frac{z}{x}\right)^2} dy =$$

$$= 16 \int\limits_0^a dz \int\limits_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{x^2} dy = 16a \int dz \int \frac{dy}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

Задача 8.

$$z^2 = 2xy \quad x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$$

Решение.

$$z = \sqrt{2xy}$$
$$z'_x = \sqrt{\tfrac{y}{x}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$z'_y = \sqrt{\tfrac{x}{y}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = \iint \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}}\, dx\, dy = \iint \sqrt{\frac{2xy + y^2 + x^2}{2xy}} = \iint \frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{xy}} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{y} dy$$

Задача 9.

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

Решение.

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}\, dx\, dy = 4\sqrt{2} \iint \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$