# Лекция 4

Ilya Yaroshevskiy

19 марта 2021 г.

## Содержание



# 1 Схема Бернулли

**Определение.** Схемой Бернулли называется серия независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, каждое интересующее нас событие лиибо произошло либо не произошло.

- $n$ — число испытаний
- $p$ — вероятность события $A$ при одном испытании
- $q = 1 - p$
- $\nu_k$ — число успехов при $k$ испытаниях
- $P_n(k) = P(\nu_k = k)$

**Теорема 1.1.** Вероятность того что при $n$ испытаниях произойдет ровно $k$ успехов равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

*Доказательство.* Рассмотрим один из исходов благоприятных событию $A$: $A_1 = \underbrace{\text{УУ}\dots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{НН}\dots\text{Н}}_{n-k}$ — независмые события

- $P(\text{У}) = p$
- $P(\text{Н}) = q$

$$P(A_1) = \underbrace{pp\dots p}_{k}\underbrace{qq\dots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

□

**Задача 1.** Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Найти вероятность того что при 5 выстрелах будут 3 попадания

*Решение.*

- $n = 5$
- $p = 0.8$
- $q = 0.2$
- $k = 3$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

## 1.1 Наиболее вероятное число успехов

Выясним при каком значении $k$ вероятность предшествующего числа успехов $k-1$ будет не больше чем веротяность $k$ успехов

$$P_n(k-1) \leq P_n(k)$$

$$C_n^{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1} \leq C_n^k p^k qn - k$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}q \leq \frac{n!}{(k!(n-k)!)}p$$

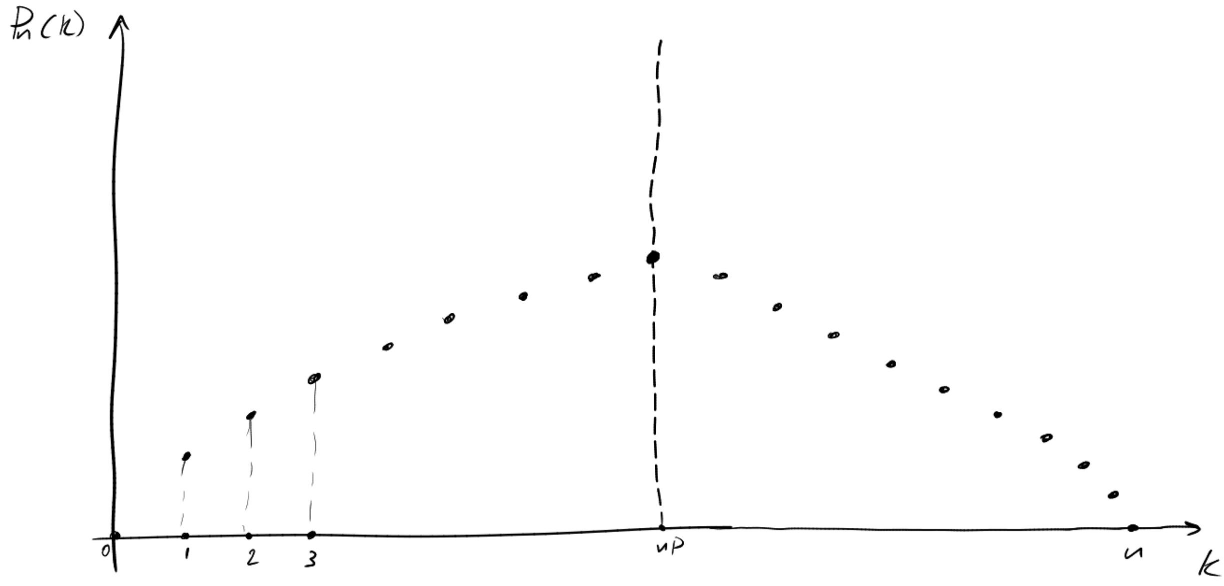
$$\frac{k!}{(k-1)!}q \leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!}p$$

$$k(1-p) \leq (n-k+1)p$$

$$k \leq np + p$$

Так как $k$ — целое то выполняется: $np + p - 1 \leq k \leq np + p$
Рассмотрим три ситуации:

1. $np$ — целое. Тогда $np + p$ — целое и $k = np$ — наиболее вероятное число исходов
2. $np + p$ — не целое. Тогда $k = [np + p]$
3. $np + p$ — целое. Тогд $np + p - 1$ — целое и $P_n(k-1) = P_n(k)$ и имеем два наиболее вероятных числа успехов:
   - $k = np + p$
   - $k = np + p - 1$




## 1.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли

**Определение. Локальная формула** Муавра-Лапласса. Применяем когда требуется найти вероятноть точного числа успехов.

$$P_n(\nu_n = x) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ — функция Гауса.
Свойства функции Гауса $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ — четная
2. при $x > 5,\ \varphi(x) \approx 0$

**Определение. Интегральная формула Лапласса**. Применяем если число успехов лежит в неком диапозоне.

$$P_n(x_1 \le \nu_n \le x_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$$

, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

— функция Лапласса

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства $\Phi(x)$:

1. $\Phi(-x) = \Phi(x)$ — нечетная
2. при $x > 5,\ \Phi(x) \approx 0.5$

*Примечание.* В некоторых источниках под функцией Лапласса подразумевается несколько иная функция, чаще всего:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{z^2} 2dz$$

$$F_0(x) = 0.5 + \Phi(x) \text{ или } \Phi(x) = F_0(x) - 0.5$$

*Примечание.* Формулу применяем при $n \ge 100$ и $p, q \ge 0.1$

**Задача 2.** Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того что

1. произошло ровно 330 попаданий
2. произошло от 312 до 336 попаданий

*Решение.*

1. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 1.25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{8} \cdot \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

2. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k_1 = 312, k_2 = 336$

$$x_1 = \frac{312 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2$$

$$P_{400}(312 \le \nu_n \le 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8185$$

## 2 Статистическое определение вероятности

- $n_A$ — число появления события $A$ при $n$ испытаниях
- $\frac{n_A}{n}$ — частота события $A$

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}, \text{при } n \to \infty$$

## 2.1 Вероятность отклонения относительной частоты

]$p$ — веротяность события $A$, $\frac{n_A}{n}$ — частота $A$
По интегральной формуле Лапласса:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon) = P(-n\varepsilon \leq n_a - np \leq n\varepsilon) = P(np - n\varepsilon \leq n_A \leq np + n)$$

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n}{\sqrt{npq}}$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

## 2.2 Закон больших чисел Бернулли

Более точно последняя формула выглядит так:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

при $n \to \infty$ $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon \to \infty$ и $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \to 0.5$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \to 2 \cdot 0.5 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

— закон больших чисел Бернулли
То есть при большом числе испытаний, будет близко к реальной вероятности