Лекция 11

Ilya Yaroshevskiy

22 января 2021 г.

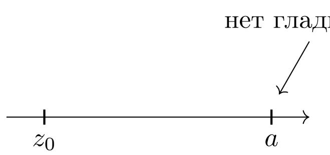
Содержание

1 Степенные ряды

$$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n \quad |z-z_0| < R \tag{1}$$

$$f'(z) = \sum na_n(z-z_0)^{n-1} \quad |z-z_0 < R| \tag{2}$$

Следствие 1.0.1. $f = \sum a_n(z-z_0)^n,\ 0 < R < +\infty$
Тогда $f \in C^\infty(B(z_0, R))$ и все производные можно найти почленным дифференцированием



Теорема 1.1 (из ТФКП)**.** f - комплексно дифференцируема в z_0
Тогда $f = \sum a_n(z-z_0)^n$ $R =$ рассстояние от z_0 до ближайшей особой точки функции

Следствие 1.1.2. $f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n,\ a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$
Тогда:

1. $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ — тот же радиус сходимости
2. $\int_{x_0}^x f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$
   Замечание. $\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \mathrm{const}$

Доказательство.

1. Продифференцируем ряд $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$. По теореме он имеет тотже радиус сходимости что и ряд $\sum a_n(z-z_0)^n$
2. Мы можем вычислить производные левой и правой части, они совпадают, при $x = x_0$ ясно что константа нулевая $\Rightarrow$ левая и правая части равны

$\square$

Пример.

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

Продифференцируем:

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arcctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

Находим C подставляя $x = 0$ $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, итого:

$$\operatorname{arcctg} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

1.1 Метод Абеля. Суммирование числовых рядов

Теорема 1.2 (Абеля)**.** $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n$ — сходящийся $C_n \in \mathbb{C}$
$f(x) = \sum C_n x^n, \quad R \geq 1,\ -1 < x < 1$
Тогда $\lim_{x\to 1} f(x) = \sum C_n$

признак Абеля
$\sum a_n(x) b_n(x)$ $a_n \in \mathbb{C}$ $b_n \in \mathbb{R}$

1. $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на $\langle \alpha, \beta \rangle$
2. $\forall x$ $b_n(x)$ — монотонна по n
   $b_n(x)$ — равномерно ограничена $\exists C_b :\ \forall n\ \forall x \quad |b_n(x)| \leq C_b$

Тогда ряд сходится

Доказательство. Ряд $\sum C_n x^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$ по признаку Абеля
$a_n(x) := C_n \quad b_n(x) := x^n \Rightarrow$ этот ряд сходится
Функции $C_n x^n$ — непрерывны на $[0, 1] \Rightarrow$ (по т. Стокса-Зайдля) $\sum C_n x^n$ — непрервны на $[0, 1]$ □

Следствие 1.2.3. $\sum a_n = A,\ \sum b_n = B,\ C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
Пусть $\sum C_n = C$
Тогда $C = A \cdot B$

Доказательство. $f(x) = \sum a_n x^n \quad g(x) = b_n x^n \quad h(x) = \sum c_n x^n \quad x \in [0, 1]$
$x < 1$ Есть абсолютная сходимость $a_n, b_n \Rightarrow$ можно перемножать:
$f(x) g(x) = h(x)$, тогда при переход в пределе $x \to 1 - 0 \Rightarrow A \cdot B = C$ □

1.2 Экспонента(комплексной переменной)

Определение. $\sum \frac{z^n}{n!} \quad A = \infty \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ Свойства:

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$
3. f_0 — показательная функция, удовлетворяет $f(x+y) = f(x) f(y)$
   $\lim_{x\to 0} \frac{f_0(x) - 1}{x} = 1$
   $f_0(x) := \exp(x) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \exp'(0) = 1$
4. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

   Доказательство. $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$
   Потому что коэффицент вещественный:

$$\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} \tag{3}$$

□

Теорема 1.3. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, тогда $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$

2 Теория меры

2.1 Системы множеств

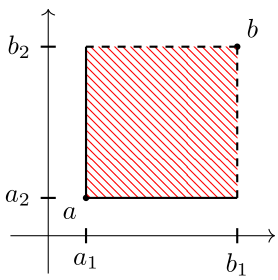
Обозначение. A_i — множества, попарно не пересекаются $\leftrightarrow$ A_i — дизьюнкты(dis)
$\bigsqcup\limits_i A_i$ — дизьюнктное объедиение

Определение. X — множество, 2^X – система всевозможных подмножеств в X
$\mathcal{P} \subset 2^X$ — **полукольцо** елси:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, A' \in \mathcal{P}$ $\exists$ конечное $B_1, \dots, B_2 \in \mathcal{P}$ – дизьюнктны
   $A \setminus A' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$

Пример. 2^X — полукольцо
Пример. $X = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{P}$ — ограниченые подмножества(в том числе $\emptyset$)

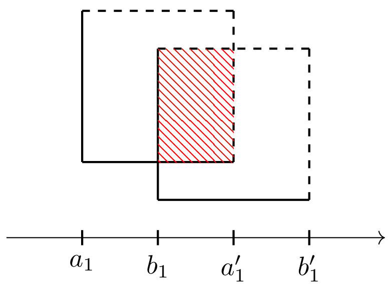
Определение. ячейка в R^m
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m | \forall i \ x_i \in [a_i, b_i)\}$



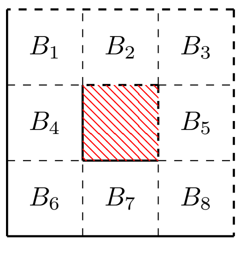
Пример. $\mathcal{P}^m$ — множество ячеек в $\mathbb{R}^m$
Утверждается, что $\mathcal{P}^m$ — полукольцо

Доказательство. $m = 2$

1. очев
2. $A \cap B = [a, a') \cap [b, b') = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^m \big| \forall i = 1, 2 \ \max(a_i, b_i) \le x_i < \min(a'_i, b'_i)\}$
   т.е. пересечние очевидно тоже ячейка



3. $A \setminus A' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$



Заштрихованная ячейка — A', большая ячейка — A
в $\mathbb{R}^m$ $3^m - 1$ часть

$\square$

Пример. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\forall i\ A_i = A$
$X = \bigoplus\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = \{(a_1, a_2, \dots)\big|\forall i\ a_i \in A_i\}$
Обозначим σ — $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}$: $k \in \mathbb{N}\quad \forall l:\ 1 \le l \le k \quad \alpha_l \in A_{i_l}$
$\mathcal{P} = \{X_\sigma\}_\sigma$, $X_\sigma = \{a \in X \big| a_{i_1} = \alpha_1, \dots, a_{i_k} = \alpha_k\}$
Утверждение: $\mathcal{P}$ — полукольцо

Доказательство.

1. $\emptyset = X, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\sigma, \sigma' \quad X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cup \sigma'}$
3. $X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$

$\square$

Примечание. Свойства:

1. Как показывают примеры:
   (a) $A \subset \mathcal{P} \not\Rightarrow A^C = X \setminus A \in \mathcal{P}$
   (b) $A, B \in \mathcal{P} \not\Rightarrow$
   - $A \cup B \in \mathcal{P}$
   - $A \setminus B \in \mathcal{P}$
   - $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
2. Модернизируем 3-е свойство полукольца: $A, \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$
   Тогда $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ — представима в виде дизъюнктного объединения элементов $\mathcal{P}$

   Доказательство. Индукция по n. База $n = 1$ — аксиома 3 полукольца
   Переход:

$$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) = (A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)) \setminus A_n =$$
$$= (\bigsqcup_{i=1}^{k} B_i) \setminus A_n = \bigsqcup_{i=1}^{k} (B_i \setminus A_n) = \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{j=1}^{L_i} D_{ij}$$

$\square$

Определение. $\mathfrak{A} \subset 2^X$ — **алгебра** подмножеств в X:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \setminus B \in$
2. $X \in$

Свойства

1. $\emptyset = X \setminus X \in \mathfrak{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{A}$
3. $A^C = X \setminus A \in \mathfrak{A}$
4. $A \cup B \in \mathfrak{A}$, потому что $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
5. $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ — по индукции
6. Всякая алгебра есть полукольцо, обратное не верно