# Лекция 7

Ilya Yaroshevskiy

29 марта 2021 г.

## Содержание



# 1 Принцип Кавальери

1. $C_x$ — имзмерима при почти всех $x$
2. $x \mapsto \nu C_x$ — измерима*
3. $mC = \int\limits_X \mathcal{X}_x d\mu$

*Следствие* 1.0.1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная
<u>Тогда</u> $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_{[a,b]} f\, d\lambda_1$

*Доказательство.* $f > 0$ $\Pi\Gamma(f[a, b])$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^2$. $C_x = [0, f(x)]$ $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lambda_2(\Pi\Gamma) = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

*Примечание.* $\lambda_2$ можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением свойства конечной аддитивности и это продолжение не единственно

*Примечание.* $\lambda_m, m > 2$ — аналогичным образом продолжить невозможно. Парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского

*Примечание.* Для замечания 1 и замечания 2 требуется инвариантность меры относительно движения $\mathbb{R}^m$

**Определение.**

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times T \to$
- $\forall x \in X$ $f_x$ — это функция(сечение) $f_x(y) = f(x, y)$, можно считать что она задана на $C_x$
- $f^y$ — аналогичное сечение

**Теорема 1.1.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$ — $\sigma$-конечныемера, полные
- $m = \mu x \nu$

- $f : X \times Y \to \overline{R}, f \geq 0$ — измерима относительно $A \otimes B$

Тогда

1. при почти всех $x$ $f_x$ — измеримая на $Y$ $f^y$ — измерима на $X$ почти везде
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x d\nu = \int\limits_Y f(x,y) = d\nu(y)$ — измеримая* на $X$
   $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f^y d\mu$ — измеримая* на $Y$
3. $\int\limits_{X \times Y} dfm = \int\limits_X \varphi d\mu = \int\limits_X \left( \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$
   $= \int\limits_Y \psi d\nu = \int\limits_Y \left( \int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

*Доказательство.* Доделать □

$C \subset X \times Y$ $P_1(C)$ — измеримо.

Тогда
$$\int\limits_C f dm = \int\limits_{f_1(C)} \left( \int_{C_x} f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

**Теорема 1.2** (Фубини)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $Y, B, \nu$
- $\nu, mu$ — $\sigma$-конечные
- $m = \nu \times \mu$
- $f$ — суммируема на $X \times Y$ относительно $m$

Тогда

1. $f_x$ — суммируема на $Y$ при почти всех $x$
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y fx\, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ — суммируема на $Y$
3. $\int\limits_{X \times Y} f\, dm = \int\limits_X \varphi\, d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

*Доказательство.* Без доказательства □

Доделать

# 2 Поверхностные интегралы

## 2.1 Поверхностные интегралы I рода

**Определение.** $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие. $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация. $E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ по Лебегу

**Обозначение.** $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M | E \text{ — измеримо}\} = \{\varphi(A) | A \in \mathfrak{M}^2,\ A \subset G\}$

**Определение.** Мера на $\mathfrak{A}_M$
$$S(E) := \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v|\, dudv$$

Т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении $\varphi$

*Примечание.* $\mathfrak{A}_M$ — $\sigma$-алгебра, $S$ — мера

*Примечание.* $E \subset M$ — компактное $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(E)$ — компактное $\Rightarrow$ измеримое $\Rightarrow$ замкнутые множества измеримы $\Rightarrow$ (относительно) открытые множества измеримы

*Примечание.* $\mathfrak{A}_M$ не зависит от $\varphi$ по теореме о двух параметризациях

*Примечание.* $S$ не зависит от $\varphi$

$$|\overline{\varphi'_s} \times \overline{\varphi'_v}| = |(\overline{\varphi'_s} \cdot u'_s + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_s) \times (\overline{\varphi'_u} \cdot u'_t + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_t)| =$$

$$= |\overline{(\varphi'_u \times \varphi'_v)} \cdot (u'_s \cdot v'_t - v'_s \cdot u'_t)| = \boxed{\text{Доделать}}$$

*Примечание.*

- $f : \mathfrak{M} \to \overline{R}$ — измеримая

$M(f < a)$ — измеримая $\Leftrightarrow N(f \circ \varphi < a)$ — измерима относительно $\mathfrak{M}^2$
$f$ — измерима относительно $\mathfrak{A}_M \Leftrightarrow f \circ \varphi$ — измерима относительно $\mathfrak{M}^2$

**Определение** (поверхностный интеграл I рода)**.**

- $M$ — простое гладкое двумерное иногообразие в $\mathbb{R}^3$
- $\varphi$ — параметризация
- $f : M \to \overline{R}$ — суммируема по мере $S$

То

$$\iint\limits_M f\,ds = \iint\limits_M f(x, y, z)\,ds$$

называется **интегралом I рода от $f$ по многообразию $M$**

*Примечание.* По теореме об интегрировании по взвешенному образу меры

$$\iint\limits_M f\,ds = \iint\limits_G f(\varphi(u, v))|\varphi'_v \times \varphi'_v|\,dudv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{pmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 \cdot |varphi'_v|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$
$$E = |\varphi'_u| = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2$$
$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \quad F = |\varphi'_v|^2$$