# Лекция 5

Ilya Yaroshevskiy

January 11, 2021

## Contents



## 1 Многообразия

**Лемма 1.** *$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ $\quad C^r$-гладкое - парметризация иноогбразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, $M$ - гладкое $k$-мерное многообразие, $\Phi(t^0) = p$*
*Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^M$ есть $k$-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Оно не зависит от $\Phi$*

*Proof.* $\operatorname{rank} \Phi'(t^0) = k$
Если взять другую параметризацию $\Phi_1 \quad \Phi = \Phi_1 \circ \Psi$
$\Phi' = \Phi_1' \cdot \Psi \quad \Psi'(t^0)$ - невырожденный оператор
$\square$

### 1.1 Касательные пространства

**Определение.** $k$-мерное пространство из Леммы - касательное пространство в $M$ в точке $p$

**Обозначение.** $T_pM$

*Пример.* $M$ - окружность в $\mathbb{R}^2$
$\Phi : t \mapsto (\cos t, \sin t)^T \quad t^0 = \frac{\pi}{4}$
$\Phi'(t^0) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$
$h \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} h$

Афинное подпространство $\{p + v,\ v \in T_pM\}$ - называется афинным касательное пространство

*Примечание.* $v \in T_pM$. Тогда $\exists$ путь $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$, такой что $\gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = v$

*Proof.* $u := (\Phi'(t^0))^{-1}(v)$
$\tilde{\gamma}_v(s) := t^0 + s \cdot u, \quad s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$
$\gamma_v(s) := \Phi(\tilde{\gamma}_v(s))$
$\gamma_v'(0) = \Phi'(\underbrace{\tilde{\gamma}_v(0)}_{t^0}) \cdot u = v$ $\square$

*Примечание.* Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M,\ \gamma(0) = p$ - гладкий путь
Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$

*Proof.* $\gamma(s) = (\Phi \circ \Psi \circ L)(\gamma(s))$
$\gamma' = \Phi' \cdot \Psi' \cdot L' \cdot \gamma'(s) \in T_pM$ $\square$

*Примечание.* $f: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - гладкая, $y = f(x)$ - поверхность в $\mathbb{R}^{m+1} \quad (x, y)$
Тогда (афииная) касательная плоскость в $(a, b)$ задается уравнением $y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \cdots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$

*Proof.* $\Phi: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1} \quad \Phi(x) = (x, f(x))$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \cdots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \cdots + \alpha_m f'_{x_m}$ ☐

*Примечание.* $y = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$
$f(x) - y(x) = o(x - a)$

*Примечание.* $\Phi(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad \Phi: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad \Phi(a) = 0$
Уравнение касательной плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$
$\gamma$ - путь в $M \quad \Phi(\gamma(s)) = 0,\ \Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$
$\Phi'_{x_1} \cdot \gamma'_1 + \cdots + \Phi'_{x_m} \cdot \gamma'_m = 0$
Определение дифференцируемости $\Phi$ в точке $a$
$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1} \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \Phi'_{x_m} \cdot (x_m - a_m) + o$

## 2 Относительный экстремум

*Пример.* Найти наибольшее/наименьшее значение выражения $f(x, y) = x + y$, при условии $x^2 + y^2 = 1$
$f = \text{const}$ - линии уровня(прямые в данном случае)
В точке max линии уровня $f = \max$
$\Phi(x, y) = 0 \quad \Phi'_x(x - a) + \Phi'_y(y - b) = 0$
$(\Phi'_x, \Phi'_y)$ - вектор нормали к касательной прямой

**Определение.** $f: O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R} \quad \Phi: O \to \mathbb{R}^n$
$M_\Phi \subset O := \{x | \Phi(x) = 0\}$
$x_0 \in M_\Phi$, т.е. $\Phi(x_0) = 0$
$x_0$ - точка локального относительного $\max, \min$, строгого $\max$, строгого $\min$
Если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$
$\forall x \in U \cap M_\Phi$(т.е. $\Phi(x) = 0$) $f(x_0) \geq f(x)$(для максимума)
т.е. $x_0$ - локальный экстремум $f|_{M_\Phi}$
Уравнения $\Phi(x) = 0$ - уравнения связи

Как можно решать эту задачу
Если $\text{rank}\Phi'(x_0) = n$, выполнено условие теоремы о неявном отображении

**Теорема 1.** (Необходиое условие относительно экстремума)
$f: O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R} \quad \Phi: O \to \mathbb{R}^n$ - гладкое в $O$
$a \in O \quad \Phi(a) = 0$ - точка относительного экстремума
$\text{rank}\Phi'(a) = n$ Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda \cdot \Phi'(a) = 0 \quad \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

В координатах:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(a) - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} -_2 (\Phi_2)'_{x_1} - \cdots - \lambda_m(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}}(a) - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} -_2 (\Phi_2)'_{x_{m+n}} - \cdots - \lambda_m(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Неизвестные: $a_1, \dots, a_{m+n} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n$

*Proof.* Пусть rankреализуется на столбцах $x_{m+1},\dots,x_{m+n}$, обозначим $y_1 = x_{m+1},\dots,y_m = x_{m+n}$
$(x_1\ \dots\ x_{m+n}) \leftrightarrow (x,y) \quad a = (a_x, a_y)$
$\det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(a) = 0$ По теореме о неявном отображении $\exists U(a_x)\ \exists V(a_y)$
$\exists\varphi : U(a_x) \to V(a_y):\ \Phi(x,\varphi(x)) = 0$
отображение $x \mapsto (x,\varphi(x))$ есть параметризация $M_\varphi \cap (U(a_x)\times V(a_y))$
$a$ - точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ - точка локального экстремума функции $g(x) = f(x,\varphi(x))$
Необходимое условие экстремума $(f'_x + f'_y\cdot\varphi'_x)(a_x) = 0$ (1)
$\Phi(x,\varphi(x)) = 0$
$\Phi'_x + \Phi'_y\cdot\varphi'_x = 0$ - в точке $(a_x,a_y)$
Тогда $\forall\lambda\in\mathbb{R}^m \quad \lambda\cdot\Phi'_x + \lambda\cdot\Phi'_y\varphi'_x(a_x) = 0$ (2)
(1) + (2): $f'_x + \lambda\Phi'_x + (f'_y + \lambda\Phi'_y)\varphi'_x = 0$
Пусть $\lambda = -f'_y(\Phi'_y(a_x,a_y))^{-1}$
Тогда $f'_y + \lambda\Phi'_y = 0$ и $f'_x + \lambda\Phi'_x = 0$(из (1) + (2)) □

**Определение.** $G := f - \lambda_1\Phi_1 - \lambda_2\Phi_2 - \dots - \lambda_n\Phi_n$ - Функция Лагранжа
$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ - множители Лагранжа
$\begin{cases} G' = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$ - то что в теореме

*Пример.* $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ - симметричная вещественная матрица
$f(x) = \langle Ax, x\rangle, \quad x\in\mathbb{R}^m$ - квадратичная форма
Найти $\max f(x),\ x\in S^{m-1}$ - существует по теореме Вейрештрасса
$$G(x) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_ix_j - \lambda(\underbrace{\sum_{i=1}^m x_i^2 - 1}_{\text{уравнение сферы}})$$
$\Phi' = (2x_1,\ 2x_2,\ \dots,\ 2x_m)^T$, на сфере $\mathrm{rank}\Phi' = 1$
$$G'_{x_k} = \sum_{j-1}^m a_{kj}x_j - 2\lambda x_k \quad k = 1\dots m, \text{ т.е. } Ax = \lambda x$$
$\lambda$ - собственное число $A$, $x$ - собственный вектор
$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle\lambda x, x\rangle = \lambda|x|^2 = \lambda$

**Теорема 2.** $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$. Тогда $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda}|\lambda - \text{собственное число оператора } A^TA\}$
$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^Ty\rangle$
$\langle A^TAx, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$

*Proof.* $x\in S^{m-1}$
$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle\underbrace{A^TA}_{\text{симм.}}x, x\rangle \qquad (A^TA)^T = A^TA$
$\max|Ax|^2 = \max\langle A^TAx, x\rangle = \lambda_{\max}$ □

# 3 Функциональные последовательности и ряды

## 3.1 Равномерная сходимость последовательности функций

**Определение.** Последовательность функций
$\mathbb{N}\to\mathcal{F} \quad n\mapsto f_n$
$$\mathcal{F} : \{f|\underbrace{X}_{\text{м.п.}}\to\mathbb{R}\}$$
Пусть $E\subset X$

**Определение.** Поточечная сходимость последовательности функций на множестве $E$
Последовательность $f_n$ сходится поточечно к $f$ на множестве $E$, $\forall x\in E\ f_n(x)\to f(x)$
$\forall x\in R\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

*Пример.* $f_n : \mathbb{R}_+\to\mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$
Тогда $E = [0,1] \quad f_n(x)\to\mathbb{0}$
Если $E\cap(1,+\infty)\neq\varnothing$ то нет поточечной сходимости ни к какой функции
*Пример.* $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} \quad x\in[0,1] \quad 0<\alpha<2$
Ясно, что $\forall\alpha \quad f_n(x)\to\mathbb{0}$ поточечно на $[0,1]$

$$\max_{x\in[0,1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} = n^\alpha \cdot \max \frac{x}{1+n^2x^2} = n^\alpha \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}n^\alpha - 1$$

**Определение.** $f_n$ равномерно сходится к $f$ на $E \subset X$ если $M_n := \sup\limits_{x\in E} f_n(x) - f(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ 0 \leq M_n < \varepsilon$, т.е. $\forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

**Обозначение.** $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

*Примечание.* $x_0 \in E$ $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ Тогда $f_n(x_0) \to f(x_0)$
равномерная сходимость $\Rightarrow$ поточечная сходимость к тому же пределу

*Примечание.* $E_0 \subset E \quad f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{E_0}{\rightrightarrows} f$

*Пример.* $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} \quad E = [\frac{1}{10}, 1]$
Тогда $f_n \rightrightarrows \mathbb{0}$
$f = 0 \quad \sup\limits_{x\in[\frac{1}{10},1]} \dfrac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} \leq \dfrac{n^\alpha}{1+\frac{1}{100}n^2} \to 0$

*Примечание.* $\mathcal{F} = \{f | X \to \mathbb{R} - \text{ограничены}\}$
Тогда $\rho_X(f_1, f_2) := \sup\limits_{x\in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ - метрика в $\mathcal{F}$(Чебышевское растояние)

1. $\rho(f_1, f_2) \geq 0$
2. $\rho(f_1, f_2) = 0 \Leftrightarrow f_1 = f_2$
3. $\rho(f_1, f_2) = \rho(f_2, f_1)$
4. $\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_3, f_2)$

   *Proof.* Берем $\varepsilon > 0$ $\exists x : \rho(f_1, f_2) - \varepsilon = \sup |f_1 - f_2| - \varepsilon < |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \leq \rho(f_1, f_2) + \rho(f_3, f_2)$ $\square$

*Примечание.* $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \quad f_n \to f$ по метрике $\rho_E$

*Примечание.* $E = E_1 \cap E_2 \quad f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} f$ и $f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

*Proof.* $M_n^{(1)} \to 0 \quad M_n^{(2)} \to 0$
$\max(M_n^{(1)}, M_n^{(2)}) \to 0$ $\square$