Лекция 1

Ilya Yaroshevskiy

10 февраля 2021 г.

Содержание

1 Теория погрешности

Отклонение от теоретического решения Виды погрешности:

1. Неустранимая погрешность

   Пример. Физические величины, другие константы

2. Устранимая погрешнеость Связана с методом решения

   (a) Погрешность модели
   Связана с матиматической формулировкой задачи. Она плохо отображает реальную модель

   (b) Остаточная погрешность(Погрешноть аппроксимации)

   (c) Погрешность округления

   (d) Накапливаемая погрешность
   Нецелые числа

- X^* — точное решение

- X — Приближенное решение
- $X^* - X$ — погрешность
- $\Delta X = |X^* - X|$ — абсолютная погрешность
  $\Delta_X \geq |X^* - X|$, т.е.
  $$X - \Delta_X \leq X^* \leq X + \Delta_X$$
- $\delta X = \left|\frac{X^* - X}{|X|}\right|$ — относительная погрешость
  $\delta_X \geq \left|\frac{X^* - X}{|X|}\right|$ — предельная относительная погрешность

1.1 Значащие цифры

Определение. Все цифры в изображении отличные от нуля, и нули если они содержатся между значащими цифрами, или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряды точности. Нули стоящие левее, отличной от нуля цифры, не являются значащимицифрами Между ненулевыми, или указывающие на точность

Пример. $\underbrace{0.00}_{\text{незнач.}}2080$

Пример. $689000 = 0.689 \cdot 10^6$ — 3 значащие цифры $689000 = 0.689000 \cdot 10^6$ — 6 значащих цифр

1.2 Верные цифры

Если, значащая цифра приближенного значения, находящаяся в разряде, в котором выполняется условие — абсолютное значение погрешности не превосходит половину уиницы этого разряда $\Delta \leq 0.5 \cdot 10^k$, где k — номер разряда, то она называется верной

Пример. $a = 3.635$
$\Delta a = 0.0003$

(3) $k = 0$ $\frac{1}{2} \cdot 10^0 = \frac{1}{2} \geq \Delta a$

(6) $k = -1$ $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05 \geq \Delta a$

(3) $k = -2$ $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005 \geq \Delta a$

(5) $k = -3$ $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0.0005 \geq \Delta a$

1.3 Распространение погрешности

Пример. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$

$$\frac{7}{5} = 1.4$$
$$\frac{17}{12} = 1.41666$$
$$\frac{707}{500} = 1.414$$
$$\sqrt{2} = 1.4142145624$$

$$\Delta_{(x \cdot y)} \approx |Y|\Delta_X + |X|\Delta_Y$$
$$\Delta_{(\frac{x}{y})} \approx \left|1Y\right|\Delta_X + \left|\frac{X}{Y^2}\right|\Delta_Y$$

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)|$$
$$|\Delta U| = |df(x_1, \ldots, x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \cdot |\Delta x_i| \tag{1}$$
$$|\delta u| = \frac{1}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{u}\right| \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln u}{\partial x_i}\right| \cdot |\Delta x_i|$$
$$\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln u}{\partial x_i}\right| \cdot |\Delta x_i|$$
$$\delta_{(X+Y)} = \left|\frac{X}{X+Y}\right|\delta_X + \left|\frac{Y}{X+Y}\right|\delta_Y$$

2 Одномерная минимизация функций

2.1 Прямые методы

Не требуют вычисление производной. Могут использовать только известные значения.

2.1.1 Метод дихотомии

$$x_1 = \frac{b+a-\delta}{2} \quad x_2 = \frac{b+a+\delta}{2} \tag{2}$$

$$\tau = \frac{b-x_1}{b-a} = \frac{x_2-a}{b-a} \to \frac{1}{2}$$

$$X^*[a_i, b_i] \quad \frac{b_i-a_i}{2} \leq \varepsilon$$

1. x_1 и x_2; вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$
2. $f(x_1)$ и $f(x_2)$
   - Если $f(x_1) \leq f(x_2) \to [a, x_2]$, т.е. $b = x_2$
   - Иначе $[x_1, b] \to [x_1, b]$, т.е. $a = x_1$
3. $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$ (n — номер итерации)
   - Если $\varepsilon_n > varepsilon$ — переход к следующей итерации(шаг 1)
   - Если $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, заврешить поиск(шаг 4)
4. $x^* \approx \overline{x} = \frac{a+b}{2} \quad f^* \approx f(\overline{x})$

2 $\delta \in (0, 2\varepsilon)$
Число итерций $n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$