Лекция 4

Ilya Yaroshevskiy

6 апреля 2021 г.

Содержание

1 Производящие функции для объектов

- Оюъединение
  A, B $A \cap B = \emptyset$ $C = A \cup B$
  $A(t)$ $B(t)$
  $$C(t) = A(t) + B(t)$$
  $$c_n = a_n + b_n$$
- Пара
  $C = A \times B$ $\mathrm{Pair}(A, B)$
  $$C(t) = A(t) \cdot B(t)$$
  $$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_n b_n$$
- Последовательности
  $C = \mathrm{Seq}\ A = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$ $a_0 = 0$
  $$C(t) = 1 + A(t) + A(t) \cdot A(t) + A(t)^3 + \dots$$
  $$C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$
- Множества
  ε вес 0
  $\mathrm{Set}\ A = \bigtimes_{a \in A} (\varepsilon \cup a)$
  $$C(t) = \prod_{a \in A} (1 + t^{\omega(a)}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + t^k)^{a_k}$$
  Пример. $\mathrm{Set}\ \{\square, \boxminus\}$ $a_1 = 1, a_2 = 1$
  $$C(t) = (1 + t)(1 + t^2) = t^3 + t^2 + t + 1$$
- Мультимножества
  $$\mathrm{MSet} A = \bigtimes_{a \in A} (\varepsilon \cup a \cup a^2 \cup \dots) = \prod_{a \in A} \mathrm{Seq}\{a\}$$
  $$C(t) = \prod_{a \in A} \frac{1}{1 - t^{\omega a}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^k} \right)^{a_k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)^{-a_k}$$
  Пример. $\mathrm{MSet}\{\square, \boxminus\}$
  $$C(t) = \frac{1}{(1 - t)(1 - t^2)} = \frac{1}{(1 - t^2)(1 + t)}$$
  $$c_n = dn + e + f \cdot (-1)^n$$

Пример. $\mathrm{Seq}_{=k}(A) = A^k$ — ровно 3 элемента
$\mathrm{Seq}_{\geq k}(A) = A^k \times \mathrm{Seq}(A) \frac{A(t)^k}{1 - A(t)}$
$\mathrm{Seq}_{\leq k}(A) = \frac{1}{1 - A(t)} - \frac{A(t)^{k+1}}{1 - A(t)} = \frac{1 - A(t)^{k+1}}{1 - A(t)}$