Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

15 января 2021 г.

Содержание

1 Диффеоморфизмы

1.1 Определение

Определение. Область - открытое связное множество

Определение. $F : \underbrace{O}_{\text{обл.}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм если

1. F — обратимо
2. F — дифференцируеое
3. F^{-1} — дифференцируемое

Примечание. $\mathrm{Id} = F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F$
$E = F' \cdot (F^{-1})' = (F^{-1})' \cdot F'$
$\forall x \det F'(x) \neq 0$

1.2 Лемма о почти локальной инъективности

Лемма 1. *$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - дифф. в $x_0 \in O$, $\det F'(x_0) \neq 0$*
Тогда $\exists C > 0\ \exists \delta > 0 \quad \forall h : x_0 + h \in B(x_0, \delta)$
$|F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

Доказательство. $|h| = |A^{-1} \cdot Ah| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ah|$
$c|h| \leq |Ah|$, где $c = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
$F'(x) = F$
Если F - линейное отображение $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \frac{h}{|(F'(x_0))^{-1}|}$
$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = \left|F'(x_0)h + \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б.м.}} \cdot |h|\right| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| = \frac{c}{2}|h|$ — работает в шаре ∎

1.3 Теорема о сохранении области

Теорема 1.1. $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - дифф
$\forall x \in O \quad \det F'(x) \neq 0$
Тогда $F(O)$ - открыто

Примечание. O - связно, F - непрырвно $\Rightarrow F(O)$ - связно

Доказательство. $x_0 \in O \quad y_0 := F(x_0) \in F(O)$
Проверим, что y_0 - внутр точка $F(O)$:
По лемме $\exists c, \delta: \ \forall h \in \overline{B(0,\delta)} \quad |F(x_0+h) - F(x_0)| > C|h|$
В частности $F(x_0+h) \neq F(x_0)$, при $|h| = \delta$

$$r = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(y_0, F(S(x_0,\delta))),\ \mathrm{dist}(A,B) := \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} |a-b| \tag{1}$$

Если $y \in B(y_0, r)$, то

$$\mathrm{dist}(y, F(S(x_0,\delta))) > r \tag{2}$$

Проверим, что $B(y_0,r) \subset F(O)$:
т.е. $\forall y \in B(y_0,r)\ \exists x \in B(x_0,\delta) \quad F(x) = y$
Рассмотрим функцию $g(x) = |F(x) - y|$, при $x \in \overline{B(x_0,\delta)}$

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r \tag{3}$$

при $x \in S(x_0,\delta): \ g(x) > r^2$, по (2) $\Rightarrow \min g$ не лежит на границе шара $\Rightarrow$ он лежит внутри шара

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2 \tag{4}$$

$(\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0)$
$$\begin{cases} 2(F_1(x) - y)\cdot F'_{x_1}(x) + \dots + 2(F_m(x)-y)\cdot F'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ 2(F_1(x) - y)\cdot F'_{x_m}(x) + \dots + 2(F_m(x)-y)\cdot F'_{x_m} = 0 \end{cases}$$
$F'(x)\cdot 2(F(x) - y) = 0 \Rightarrow \forall x \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$ □

1.3.1 Следствие

Следствие 1.1.1. $F: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ l < m$, дифф в O, $F \in C^1(O)$
$\mathrm{rg} F(x) = l$, при всех $x \in O$
Тогда $F(O)$ - открытое

Доказательство. Фиксируем x_0. Пусть ранг $F'(x_0)$ реализуется на столбцах с 1 по l, т.е. $A := \det(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j=1\dots l}(x_0) \neq 0$ - и для близких точек

$$\tilde{F}: O \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} \overbrace{F(x)}^{\text{Исходные } l \text{ координат}} \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \cdot \det E_{m-l} \neq 0$ в окрестности точки x_0
$\tilde{F}|_{U(x_0)}$ - удовлетворяет теореме $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$ - открыто в $\mathbb{R}^m$
$F(U(x_0)) = \underbrace{\mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^l}}_{(x_1\ \dots\ x_m)\mapsto(x_1\ \dots\ x_l)} (\tilde{F}(U(x_0)))$ □

1.4 Теорема о гладкости обратного отображения

$C^r(O, \mathbb{R}^m)$

Теорема 1.2. $T \in \underbrace{C^r(O,\mathbb{R}^m)}_{O\subset\mathbb{R}^m}$
T - обратимо, $\det T'(x) \neq 0$, при всех $x \in O$
Тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. индукция по r, база $r = 1$
$f: X \to Y$ - непр $\Leftrightarrow \forall B -$ откр $\subset Y \ f^{-1}(B) -$ откр
$S = T^{-1}$, S - непрерывна по т. о сохранении области
$T'(x_0) = A$ - невыроженый оператор
По лемме о почти локальной инъективноси

$$\exists C, \delta: \ \forall x \in B(x_0,\delta)\ |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \tag{5}$$

Опр диффернцируемости:

$$T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + o(x) \cdot |x - x_0| \tag{6}$$

$$T(x) = y \; T(x_0) = y_0 \; x = S(y) \; x_0 = S(y_0) \tag{7}$$

В терминах y, S:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y)) \cdot |S(y) - S(y_0)|}_{\text{Проверим, что это } o(|y-y_0|)} \tag{8}$$

Пусть y близко к y_0:

$$|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta \tag{9}$$

$$\left|A^{-1} \cdot o(S(y)) \cdot |S(y) - S(y_0)|\right| = |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1} \cdot \omega(S(y))| \leq$$
$$\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \leq \frac{1}{c}\|A^{-1}\| \cdot |y - y_0| \cdot |\omega(S(y))| \tag{10}$$

Гладкость S: $S'(y_0) = A^{-1}$

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1} \tag{11}$$

В (11) все шаги непрерывны $\Rightarrow S'$ — непрерывно
Переход $r \to r+1$
$T \in C^{r+1} \quad T' : O \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \; T' \in C^r$
Проверим, что $S^{-1} \in C^{r+1}$:

$$y \underset{C^r}{\rightarrow} S(y) \underset{C^r}{\rightarrow} T'(x) \underset{C^\infty}{\rightarrow} (S^{-1})' \tag{12}$$

□

1.5 Теорема о локальной обратимости

Теорема 1.3. $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m) \; x_0 \in O \; \det T'(x_0) \neq 0$
Тогда $\exists U(x_0) \; T|_U$ - диффеоморфизм

Доказательство. $F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + o(h)$

⋮

НЕТУ □

Теорема 1.4. *Формулировка в терминах системмы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x1, \dots, x_m) = y_1 \\ f_2(x1, \dots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x1, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x^0, y^0) - ее решение $f \in C^r$
$\det F'(x^0) \neq 0 \qquad F = (f_1 \; \dots \; f_m)$
Тогда $\exists U(y^0) \; \forall y \in U(y^0)$ система имеет решение и эти решения C^r-гладко зависят от y

1.6 Теорема о неявном отображении

Теорема 1.5. $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \underbrace{\mathbb{R}^n}_{(x_1 \dots y_n)} \quad F \in C^r$

$(a, b) \in O \; F(a, b) = 0$
Допустим $\det(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=1\dots n} \neq 0$
Тогда

1. $\exists P \subset \mathbb{R}^m \quad a \in P$ - откр.
   $\exists Q \subset \mathbb{R}^n \quad b \in Q$ - откр.
   $\exists! \Phi : P \to Q$ - C^r-гладкое
   такие что $\forall x \in P(a) \quad F(x, \Phi(x)) = 0$

2. $\Phi'(x) = -\left(F'_y(x, \Phi(x))\right)^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

Теорема 1.6. *В терминах систем уранений*
$f_i \in C^r$, (a, b) — решение системы:

$$\begin{cases} f_1(x1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ f_2(x1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Допустим $\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=1\ldots n} \neq 0$
<u>Тогда</u> $\exists U(a)$ - откр., $\exists! \Phi$
такие что $\forall x \in P(a) \quad (x, \Phi(x))$ — также решение системы