Лекция 1

Ilya Yaroshevskiy

19 марта 2021 г.

Содержание

1 Статистическая вероятность

n — чсло экспериментов
n_A — число выполнения события A Отношение $\frac{n_A}{n}$ — частота события A
$P(A) \approx \frac{n_A}{n},\ n \to +\infty$

1.1 Пространство элементарных исходов. Случайные события

Определение. Пространством элементарных исходов называется множество содержащее все возможные результаты данного эксперимента из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются **элементарными исходами**

Обозначение.

- Пространство элементарных исходов — Ω
- Элементарный исход $w \in \Omega$

Определение. Случайными событиями называются подмножества $A \subset \Omega$. Событие A **наступило** если в ходе эксперимента произошел один из элементарных исходов $w \in A$. w — благоприятный к A

Пример. Бросаем один раз монету. $\Omega = \{H, T\}$.
H — Head(орел), T — Tail(решка)

Пример. Бросаем кубик. $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Выпало четное число очков. $A = \{2, 4, 6\}$

Пример. Монета бросается дважды

- Учитываем порядок. $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- Не учитываем порядок. $\Omega = \{HH, HT, TT\}$

Пример. Бросается дважды кубик. Учитывем порядок.
Число очков кратно 3. $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), \dots\}$

Пример. Монета бросается до выпадения герба. $\Omega = \{(H), (T, H), (T, T, H), \dots\}$ — счетное число исходов

Пример. Монета бросается на плоскость. $\Omega = \{(x, y)\big|x, y \in \mathbb{R}\}$ — нечетное число исходов

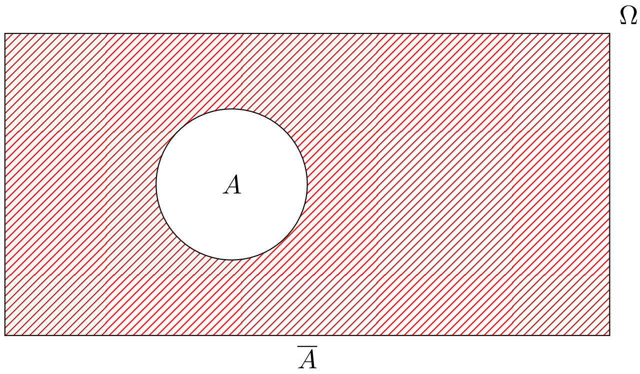
1.2 Операции над событиями

Определение. Ω — универсальное событие, достоверное, наступает всегда, т.к. содержит все элементарные исходы
$\emptyset$ — невозможное событие, никогда не выполняется, т.к. не одержит элементарных исходов

Определение. **Суммой событий** $A + B$ называется событие $A \cup B$ — событие состоящее в том что произошло событие A или событие B, т.е. хотя бы одно из них

Определение. **Произведением** $A \cdot B$ называется событие $A \cap B$ — событие состоящее в том что произошло событие A и событие B, т.е. оба из них

Определение. **Противоположным** к A называется событие $\overline{A}$ — состоящее в том событие A не произошло



Определение. **Дополнение**

Определение. События A и B называются **несовместными** если $A \cdot B = \emptyset$, т.е. в ходе эксперимента может наступить только одно из них

Определение. Событие A **влечет** событие B, если $A \subset B$

Определение. $P(A) \leq 1$ — вероятность наступления события A

1.3 Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число исходов, при чем их можно считать равновозможным. Тогда применимо классическое определение вероятности

Определение. Вероятность события A $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$, где n — число всех возможных элементарных исходов, m — число элементарных исходов благоприятных событию A. В частности, если $|\Omega| = n$, а A — элементарный исход, то $P(A) = \frac{1}{n}$

Примечание. Свойства:

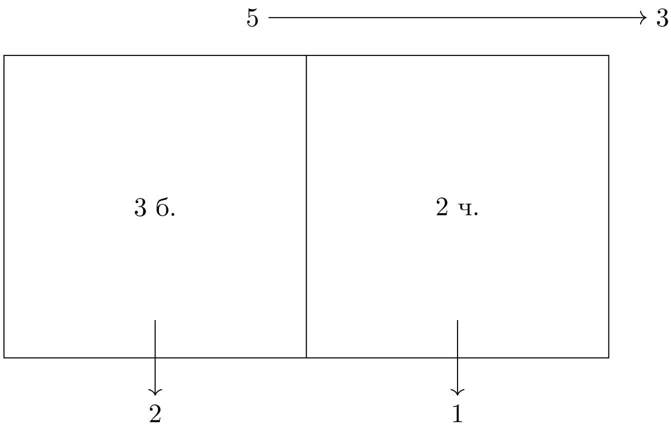
1. $0 \leq P(A) \leq 1$

4. Если события A и B несовместны то вероятность $P(A + B) = P(A) + P(B)$

   Доказательство. $]|A| = m_1, |B| = m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$
   $P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$ □

Пример. Найти вероятность того, что при бросании кости выпадет четное число очков
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ A = \{2, 4, 5\}, \ P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Пример. В ящике 3 белых и два черных шара. Вынули 3 шара, найти вероятность того что из них 2 белых и 1 черных



$$n = C_5^3 = 10$$
$$m = C_3^2 \cdot C_2^1 = 6$$
$$P(A) = \frac{6}{10}$$

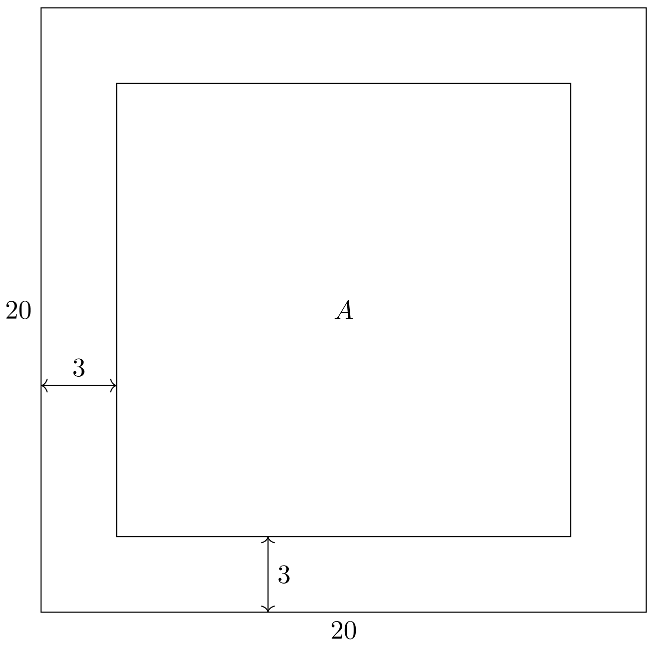
1.4 Геометрическое понятие вероятности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченая область
$\mu(\Omega)$ — конечная мера множества Ω (например мера Римана, т.е длина, площадь, объем) В эту область *наугад* бросаем точку. Термин *наугад* означает, что вероятность попадания в область A зависит только от меры этой области, но не зависит от ее положения. Вероятности попадания в любые точки равновозможны. Тогда применимо геометрическое определение вероятности.

Определение. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где $\mu(\Omega)$ — мера Ω, $\mu(A)$ — мера благоприятной области A

Примечание. Заметим что по этому определению, мера точки равна 0 и веротяность попадания в конкретную точку равна 0, хотя это событие не является невозможным.

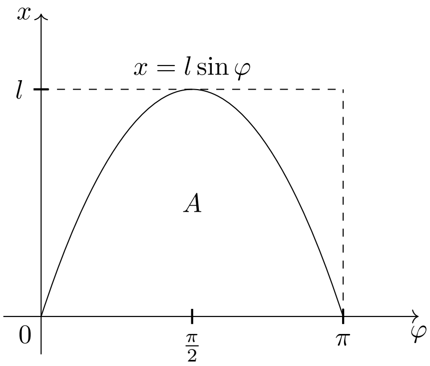
Пример. Игра. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того что монета целиком окажется на одной плитке



$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$
$$S(A) = 14^2 = 196$$
$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$

Задача 1. Пол выложен ламинатом. На пол бросается игла длиной равной ширине доски. Найти вероятность того что она пересечет стык

Решение. $2l$ — длина иглы, x — расстояние от центра иглы до ближайшего края, φ — угол к ближайшему краю
Игла пересечет край если $x \le |AB|$, $|AB| = l \sin \varphi$
Можно считать что положение от центра и угол, независимы друг от друга. $x \in [0, l].\varphi \in [0, \pi]$



$$A : x \le l \sin \varphi$$

$$S(\Omega) = \pi \cdot l$$

$$S(A) = \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = 2l$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$