# Коллоквиум 1

Ilya Yaroshevskiy

22 апреля 2021 г.

## Содержание

# 1 Топология

## 1.1 Топологическое пространство, открытое и замкнутое множество

**Определение.** Рассмотрим множество $X$ — **носитель**. Рассмотрим $\Omega \subseteq 2^X$ — подмножество подмножеств $X$ — **топология**.

1. $\bigcup X_i \in \Omega$, где $X_i \in \Omega$
2. $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \Omega$, если $X_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

## 1.2 Внутренность и замыкание множества

**Определение.**

$$(X)^\circ = \text{наиб.}\{w \big| w \subseteq X, w \text{ — откр.}\}$$

**Определение.** **Замыкание** X — $\overline{X} = \text{наим.}\{A \notin \Omega \big| X \subseteq A$

## 1.3 Топология стрелки

**Теорема 1.1.**

- $a + b = a \cup b$
- $a \cdot b = a \cap b$
- $a \to b = ((X \setminus a) \cup b)^\circ$
- $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a \subseteq b$

Тогда $\langle \Omega, \le \rangle$ — алгебра Гейтинга

## 1.4 Дискретная топология

*Пример.* Дискретная топология: $\Omega = 2^X$ — любое множество открыто. Тогда $\langle \Omega, \leq \rangle$ — булева алгебра

## 1.5 Топология на частично упорядоченном множестве

Топология на частично упорядоченном множестве $\langle \Omega, \leq \rangle$ — булева алгебра, где $\Omega$ — дискретная топология

## 1.6 Индуцированная топология

**Определение. Индуцированная топология** на подпространстве $\langle X, \Omega \rangle$ — топлогия. Пусть $Y \subset X$. Определим $\Omega_Y$ — семейство подмножеств $Y$ так:

$$\Omega_Y = \{U \cap Y \big| U \in \Omega\}$$

$\Omega_Y$ — индуцированная топология на подпространстве $Y$.

## 1.7 Связность

Связность – свойство топологических пространства, состоящее в том, что пространство нельзя представить в виде суммы двух отделенных друг от друга частей, или, более строго, непустых непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств.

# 2 Исчисление высказываний

## 2.1 Метапеременные, пропозициональные переменные, Высказывания

### 2.1.1 Язык

1. Пропозициональные переменные
   $A_i'$ — большая буква начала латинского алфавита

2. Связки
   $\underbrace{\alpha}_{\text{метапеременная}}, \beta$ — высказывания
   Тогда $(\alpha \to \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg\alpha)$ — высказывания

### 2.1.2 Мета и предметные

- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$ — метапеременные для выражений
- $X, Y, Z$ — метапеременные для предметные переменные

Метавыражение: $\alpha \to \beta$
Предметное выражение: $A \to (A \to A)$ (заменили $\alpha$ на $A$, $\beta$ на $(A \to A)$ )

*Пример.* Черным — предметные выражения, Синим — метавыражения

$$(X \to Y)[X := A, Y := B] \equiv A \to B$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := A, X := B] \equiv A \to (A \to B)$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := (A \to P), X := B] \equiv (A \to P) \to (A \to B)$$

## 2.2 Схемы аксиом, доказуемость

### 2.2.1 Теория доказательств

**Определение. Схема высказывания** — строка соответсвующая определению высказывания, с:

- метапеременными $\alpha, \beta, \ldots$

**Определение.** Аксиома — высказывания:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

## 2.3 Правило Modus Ponens, доказательство, вывод из гипотез

### 2.3.1 Правило Modus Ponens и доказательство

**Определение. Доказательство** (вывод) — последовательность высказываний $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где $\alpha_i$:

- аксиома
- существует $k, l < i$, что $\alpha_k = \alpha_l \to \alpha$

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

*Пример.* $\vdash A \to A$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $A \to A \ \to A$ | (схема аксиом 1) |
| 2 | $A \to (A \to A) \to A$ | (схема аксиом 1) |
| 3 | $(A \to (A \to A)) \to (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$ | (схема аксиом 2) |
| 4 | $(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$ | (M.P. 1 и 3) |
| 5 | $A \to A$ | (M.P. 2 и 4) |

**Определение.** Доказательством высказывания $\beta$ — список высказываний $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — доказательство
- $\alpha_n \equiv \beta$

## 2.4 Множество истинностных значений, модель (оценка перменных), Оценка высказывания

### 2.4.1 Теория моделей

- $\mathcal{P}$ — множество предметных переменных
- $[\![\cdot]\!] : \mathcal{T} \to V$, где $\mathcal{T}$ — множество высказываний, $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$ — множество истиностных значений

1. $[\![x]\!] : \mathcal{P} \to V$ — задается при оценке
$[\![]\!]^{A:=v_1, B:=v_2}$:
    - $\mathcal{P} = v_1$

- $\mathcal{P} = v_2$

2. $[\![\alpha \star \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \underbrace{\star}_{\text{определенно естественным образом}} [\![\beta]\!]$, где $\star \in [\&, \vee, \neg, \rightarrow]$

*Пример.*

$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}} = [\![A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}} \rightarrow [\![A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}} = \text{И} \rightarrow \text{И} = \text{И}$$

Также можно записать так:

$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}} = f_{\rightarrow}([\![A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}}, [\![A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}}) = f_{\rightarrow}(\text{И}, \text{И}) = \text{И}$$

, где $f_{\rightarrow}$ определена так:

| $a$ | $b$ | $f_{\rightarrow}$ |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | И |
| Л | Л | И |

## 2.5 Общезначимость

*Пример.* $\models \alpha$ — $\alpha$ общезначимо

## 2.6 Выполнимость

Существует оценка, при которой высказывание истинно

## 2.7 Невыполнимость

Отрицание выполнимости

## 2.8 Следование

**Определение.** Следование: $\Gamma \models \alpha$, если

- $\Gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$
- Всегда когда все $[\![\gamma_i]\!] = \text{И}$, то $[\![\alpha]\!] = \text{И}$

## 2.9 Корректность

**Определение.** ~~Теория~~ Исчисление высказываний корректна, если при любом $\alpha$ из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$

## 2.10 Полнота

**Определение.** Исчисление полно, если при любом $\alpha$ из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$

## 2.11 Противоречивость

**Определение.** Множество формул $\Gamma$ **противоречиво**, если для некоторой формулы $\alpha$ имеем $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg\alpha$

## 2.12 Теорема о дедукции

**Теорема 2.1** (о дедукции)**.** $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ <u>тогда и только тогда, когда</u> $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

## 2.13 Теорема о корректности

**Теорема 2.2** (о корректности)**.** Пусть $\vdash \alpha$
<u>Тогда</u> $\models \alpha$

## 2.14 Теорема о полноте ИВ

**Теорема 2.3** (о полноте)**.** Пусть $\vDash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

# 3 Интуиционистское исчисление высказываний

## 3.1 Закон исключенного третьего

$$\vdash A \vee \neg A$$

## 3.2 Закон снятия двойного отрицания

$$\vdash \neg\neg A \to A$$

## 3.3 Закон Пирса

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$$

## 3.4 ВНК-интерпретация логических связок

### 3.4.1 Интуиционистская логика

$A \vee B$ — плохо

*Пример.* Докажем: существует $a, b$, что $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, но $a^b \in \mathbb{Q}$
Пусть $a = b = \sqrt{2}$. Рассмотрим $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Если да, то ОК
- Если нет, то возьмем $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

ВНК-интерпретация. $\alpha, \beta$

- $\alpha \& \beta$ — есть $\alpha, \beta$
- $\alpha \vee \beta$ — есть $\alpha$ либо $\beta$ и мы знаем какое
- $\alpha \to \beta$ — есть способ перестроить $\alpha$ в $\beta$
- $\perp$ — конструкция без построения $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$

## 3.5 Теорема Гливенко

**Теорема 3.1.** Обозначим доказуемость высказывания $\alpha$ в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской как $\vdash_{\text{и}}$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было $\alpha$, если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$

## 3.6 Решетка

**Определение.** Фиксируем $A$
Частичный порядок — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное отношение
Линейный — сравнимы любые 2 элемента

- $a \le b \vee b \le a$
- **Наименьший элемент** $S$ — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \le x$
- **Минимальный элемент** $S$ — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \le k$

**Определение.**

- **Множество верхних граней** $a$ и $b$: $\{x | a \le x \& b \le x\}$
- **Множество нижних граней** $a$ и $b$: $\{x | x \le a \& x \le b\}$

**Определение.**

- $a + b$ — нименьший элемент множества верхних граней
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней

**Определение.** **Решетка** $= \langle A, \leq \rangle$ — структура, где для каждых $a, b$ есть как $a + b$, так и $a \cdot b$, т.е. $a \in A, b \in B \implies a + b \in A$ и $a \cdot b \in A$

## 3.7 Дистрибутивная решетка

**Определение.** **Дистрибутивная решетка** если всегда $a \cdot (b + c) = ab + a \cdot c$

## 3.8 Импликативная решетка

**Определение.** **Импликативная решетка** — решетка, где для любых $a, b$ есть $a \to b$

## 3.9 Алгебра Гейтинга

**Определение.** **Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга)** — импликативная решетка с 0

## 3.10 Булева алгебра

**Определение.** **Булева алгебра** — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \to 0) = 1$

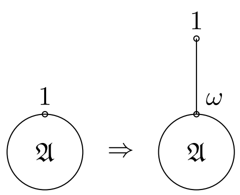
## 3.11 Геделева алгебра

**Определение.** Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

## 3.12 Операция $\Gamma(A)$

**Определение.** Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathfrak{A})$




Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathfrak{A})}$ перенеименуем $1_{\mathfrak{A}}$ в $\omega$

## 3.13 Алгебра Линденбаума

**Определение.** $X$ — все формулы логики

- $\alpha \leq \beta$ — это $\alpha \vdash \beta$
- $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$
- $[\alpha]_\approx = \{\gamma \big| \gamma \approx \alpha\}$ — класс эквивалентности

**Свойство 1.** *$\langle X/_\approx, \leq \rangle$ — алгебра Линденбаума, где $X/_\approx = \{[\alpha]_\approx \big| \alpha \in X\}$*

## 3.14 Свойство дизъюнктивности ИИВ

**Определение.** **Дизъюнктивность** ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

### 3.15 Свойство нетабличности ИИВ

**Определение.** Назовем модель **табличной** для ИИВ:

- $V$ — множество истинностных значений
  $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_{V} : V^2 \rightarrow V,\ f_{\neg} : V \rightarrow V$
  Выделенные значения $T \in V$
  $[\![p_i]\!] \in V\ f_p : p_i \rightarrow V$
- $p_i = f_{\P}(p_i)$
  $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_{\star}([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$
  $[\![\neg\alpha]\!] = f_{\neg}([\![\alpha]\!])$

~~Если $\vdash \alpha$, то~~ $\vDash \alpha$ означает, что $[\![\alpha]\!] = T$, при любой $f_{\P}$

**Теорема 3.2.** У ИИВ не существует полной табличной модели

### 3.16 Модель Крипке, Вынужденность

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок($\succeq$)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
   $(\Vdash) \subseteq W \times \P$
   При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_j \Vdash p$

# 4 Исчиление предикатов

## 4.1 Предикатные и функциональные символы, константы и пропозициональные переменные

### 4.1.1 Исчисление предикатов

**Определение.** Язык исчисление предикатов

- логические выражения “предикаты“/“формулы“
- предметные выражния “термы“

$\Theta$ — метаперменные для термов
Термы:

- Атомы:
  - $a, b, c, d, \dots$ — предметные переменные
  - $x, y, z$ — метапеременные для предметных перменных
- Функциональные Символы
  - $f, g, h$ — Функциональные символы(метаперемнные)
  - $f(\Theta_1, \dots \Theta_n)$ — применение функциональных символов
- Логические выражения:
  Если $n = 0$, будем писать $f, g$ — без скобок
  - $P$ — метаперменные для предикатных символов
  - $A, B, C$ — предикатный символ
  - $P(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ — применение предикатных символов
  - $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ — Связки
  - $\forall x.\varphi$ и $\exists x.\varphi$ — кванторы
    “<квантор> <переменная>.<выражение>“

1. Сокращение записи И.В + жадность $\forall, \exists$
   Метавыражение:
   $$\forall x.(P(x)\&(\forall y.P(y)))$$
   Квантор съедает все что дают, т.е. имеет минимальный приоритет.
   Правильный вариант(настоящее выражние):
   $$\forall a.B(A)\&\forall b.B(b)$$

## 4.2 Свободные и связанные вхождения предметных переменных в формулу

### 4.2.1 Вхождение

*Пример.*

$$(P(\underset{1}{x}) \vee Q(\underset{2}{x})) \to (R(\underset{3}{x})\&(\underbrace{\forall \underset{4}{x}.P_1(\underset{5}{x})}_{\text{область } \forall \text{ по } x}))$$

1, 2, 3 — свободные, 5 — связанное, по перменненой 4

*Пример.*

$$\underbrace{\forall x.\forall y.\forall x.\forall y.\forall x.P(x)}_{\text{область } \forall \text{ по } x}$$

Здесь $x$ в $P(x)$ связано. $x$ не входит свободно в эту формулу, потому что нет свободных вхождений

**Определение.** Переменная $x$ входит свободно если существует свободное вхождение

**Определение.** Вхождение свободно, если не связано

Можно относится к свободно входящим перменным как с перменным из библиотеки, т.е. мы не имеем права их переименовывать

*Пример.* Некорректная формула

$\alpha_1$ $x = 0 \to x = 0$

$\alpha_2$ $(\exists x.x = 0) \to (x = 0)$ — не доказано

$\alpha_2'$ $(\exists t.x = 0) \to (x = 0)$ — (правило $\exists$)

*Пример.*

$(n)$ $x = 0 \to y = 0$ — откуда то

$(n+1)$ $(\exists x.x = 0) \to (y = 0)$ — (правило $\exists$)

### 4.2.2 Свободные подстановки

**Определение.** $\Theta$ свободен для подстановки вместо $x$ в $\varphi$, если никакая свободная перменная в $\Theta$ не станет связанной в $\varphi[x := \Theta]$

**Определение.** $\varphi[x := \Theta]$ — "Заменить все свободные вхождения x в $\varphi$ на $\Theta$"

*Пример.*
$$(\forall x.\forall y.\forall x.P(x))[x := y] \equiv \forall x.\forall y.\forall x.P(x)$$

*Пример.*
$$P(x) \vee \forall x.P(x)\ [x := y] \equiv P(y) \vee \forall x.P(y)$$

*Пример.*
$$(\forall y.x = y)\ [x := \underbrace{y}_{\equiv\Theta}] \equiv \forall y.\underset{1}{y} = y$$

$FV(\Theta) = \{y\}$ — свободные перменные в $\Theta$. Вхождение $y$ с номером 1 стало связанным

*Пример.*
$$P(x)\&\forall y.x = y\ [x := y + z] \equiv P(y + z)\&\forall y.\underset{1}{y} + z = y$$

Здесь при подстановке вхождение $y$ с номером 1 стало связанным. $x$ — библиотечная функция, переименовали $x$ во что-то другое.

## 4.3 Свобода для подстановки, Правила вывода для кванторов, аксиомы исчисления предикатов для кванторов, оценки и модели в исчислении предикатов

### 4.3.1 Теория доказательств

Все аксимомы И.В + М.Р.

**(схема 11)** $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \Theta]$

**(схема 12)** $\varphi[x := \Theta] \to \exists x.\varphi$

Если $\Theta$ свободен для подстановки вместо $x$ в $\varphi$.

**Определение. Свободен для подстановки** — никакое свободное вхождение $x$ в $\Theta$ не станет связанным

*Пример.*

```
int y;
int f(int x) {
        x = y;
}
```

Заменим `y := x`. Код сломается, т.к. у нас нет свобод для подстановки

**(Правило $\forall$)**

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi}$$

**(Правило $\exists$)**

$$\frac{\psi \to \varphi}{\exists x.\psi \to \varphi}$$

В обоих правилах $x$ не входит свободно в $\varphi$

*Пример.*

$$\frac{x = 5 \to x^2 = 25}{x = 5 \to \forall x.x^2 = 25}$$

Между $x$ и $x^2$ была связь, мы ее разрушили. Нарушено ограничение

*Пример.*

$$\exists y.x = y$$

$$\forall x.\exists y.x = y \to \exists y.y + 1 = y$$

Делаем замену `x := y+1`. Нарушено требование свобод для подстановки. $y$ входит в область действия квантора $\exists$ и поэтому свободная переменная $x$ стала связанная.

## 4.4 Теорема о дедукции для исчисления предикатов

**Теорема 4.1.** Пусть задана $\Gamma$, $\alpha, \beta$

1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, при условии, если $b$ в доказательстве $\Gamma, \alpha \to \beta$ не применялись правила для $\forall, \exists$ по перменным, входяшим свободно в $\alpha$

2. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

## 4.5 Теорема о корректности для исчисления предикатов

## 4.6 Полное множество (бескванторных) формул

**Определение.** $\Gamma$ — **непротиворечивое** множество формул, если $\Gamma \nvdash \alpha \& \neg\alpha$ ни при каком $\alpha$

**Определение.** Полное непротиворечивое замкнутых бескванторных формул — такое, что для каждой замкнутой бескванторной формулы $\alpha$: либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$

## 4.7 Модель для формулы

### 4.7.1 Теория моделей

Оценка формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем $D$ — предметное множетво
2. Кажодму $f_i(x_1, \dots, x_n)$ сопоставим функцию $D^n \to D$
3. Каждому $P_j(x_1, \dots, x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^2 \to V$
4. Каждой $x_i$ сопоставим элемент из $D$

*Пример.*

$$\forall x.\forall y.\ E(x, y)$$

Чтобы определить формулу сначала определим $D = \mathbb{N}$

$$E(x, y) = \begin{cases} \text{И} & , x = y \\ \text{Л} & , x \neq y \end{cases}$$

- $[\![x]\!] = f_{x_i}$
- $[\![\alpha \star \beta]\!]$ — смотри ИИВ
- $[\![P_i(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{P_i}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $[\![f_j(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{f_j}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $$[\![\forall x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при всех } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$
- $$[\![\exists x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при некотором } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

$$[\![\forall x.\forall y.E(x, y)]\!] = \text{Л}$$

т.к. $[\![E(x, y)]\!]^{x:=1,\ y:=2} = \text{Л}$

*Пример.*

$$\forall \boxed{\varepsilon > \boxed{0}}\ \exists N\ \forall \boxed{\boxed{\text{n}} > \boxed{\text{N}}}\quad \boxed{\boxed{|\text{a}_n - a|} < \boxed{\varepsilon}}$$

Синим отмечены функциональные конструкции(термы), зеленым предикатные

$$\forall \varepsilon.(\varepsilon > 0) \to \exists N.\forall n.(n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначим:

- $(>)(a, b) = G(a, b)$ — предикат
- $|\bullet|(a) = m_|(a)$
- $(-)(a, b) = m_-(a, b)$
- $0() = m_0$
- $a_\bullet(n) = m_a(n)$

$$\forall e.\ \boxed{\text{G}(\boxed{\text{e}}, \boxed{\text{m}_0})} \to \exists n_0.\forall n.\ \boxed{\text{G}(\text{n}, \text{n}_0)} \to \boxed{\text{G}\Big(\text{e}, \boxed{\text{m}_|\Big(m_-\big(m_a(n), a\big)\Big)}\Big)}$$

## 4.8 Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

**Теорема 4.2** (Геделя о полноте)**.** Если $\Gamma$ — полное неротиворечивое множество замкнутых(не бескванторных) фомул, то оно имеет модель

### 4.9 Следствие из теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов

*Следствие* 4.2.1. Пусть $\models \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

### 4.10 Неразрешимость исчисления предикатов (формулировка, что такое неразрешимость).

**Определение. Язык** — множество слов. Язык $\mathcal{L}$ разрешим, если существует $A$ — алгоритм, что по слову $w$:
$A(w)$ — останавливается в '1', если $w \in \mathcal{L}$ и '0', если $w \notin \mathcal{L}$

**Теорема 4.3.** ИП неразрешимо

## 5 Арифметика и теории первого порядка

### 5.1 Теория первого порядка

**Определение. Теория I порядка** — Исчесление предикатов + нелогические функции + предикатные символы + нелогические (математические) аксиомы.

### 5.2 Модели и структуры теорий первого порядка

Назовём структурой теории первого порядка такую модель исчисления предикатов, что для всех нелогических функциональных и предикатных символов теории в ней задана оценка. Назовём моделью теории первого порядка такую структуру, что все нелогические аксиомы данной теории в ней истинны.

### 5.3 Аксиоматика Пеано

**Определение.** Будем говорить, что $N$ соответсвует **аксиоматике Пеано** если:

- задан $(') : N \to N$ — инъективная функция (для разных элементов, разные значения)
- задан $0 \in N$: нет $a \in N$, что $a' = 0$
- если $P(x)$ — некоторое утверждение, зависящее от $x \in N$, такое, что $P(0)$ и всегда, когда $P(x)$, также и $P(x')$. Тогда $P(x)$

### 5.4 Определение операций (сложение, умножение, возведение в степень)

**Определение.**

$$a + b = \begin{cases} a & b = 0 \\ (a + c)' & b = c' \end{cases}$$

**Определение.**

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ (a \cdot c) + a & b = c' \end{cases}$$

**Определение.**

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ (a^c) \cdot a & b = c' \end{cases}$$

## 5.5 Формальная арифметика (язык, схема аксиом индукции и общая характеристика остальных аксиом).

### 5.5.1 Формальная арифметика

**Определение.** Исчесление предикатов:

- Функциональные символы:
  - $0$ — 0-местный
  - $(')$ — 1-местный
  - $(\cdot)$ — 2-местный
  - $(+)$ — 2-местный
- $(=)$ — 2-местный предикатный символ

Аксимомы:

1. $a = b \to a' = b'$
2. $a = b \to a = c \to b = c$
3. $a' = b' \to a = b$
4. $\neg a' = 0$
5. $a + b' = (a + b)'$
6. $a + 0 = a$
7. $a \cdot 0 = 0$
8. $a \cdot b' = a \cdot b + a$
9. Схема аксиом индукции:

$$(\psi[x := 0])\&(\forall x.\psi \to (\psi[x := x'])) \to \psi$$

   $x$ входит свободно в $\psi$

**Свойство 1.**

$$((a + 0 = a) \to (a + 0 = a) \to (a = a))$$

*Доказательство.*

$$\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c$$

$$(\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c) \to \forall b.\forall c.(a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c)$$

$$\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c$$

$$(\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c) \to \forall c.(a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c)$$

$$\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c$$

$$(\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c) \to a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$$

$$a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$$

$$a + 0 = a$$

$$a + 0 = a \to a = a$$

$$a = a$$

$$\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c$$

$$(0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0)$$

$$(\forall b.\forall c.a = b \to a = c\, tob = c) \to (0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0) \to \phi$$

Исправить ☐

**Определение.** $\exists!x.\varphi(x) \equiv (\exists x.\varphi(x))\&\forall p.\forall q.\varphi(p)\&\varphi(q) \to p = q$
Можно также записать $\exists!x.\neg\exists s.s' = x$ или $(\forall q.(\exists x.x' = q) \vee q = 0)$

**Определение.** $a \leq b$ — сокращение для $\exists n. a + n = b$

**Определение.**

$$\overline{n} = 0^{(n)}$$

$$0^{(n)} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 0^{(n-1)'} & n > 0 \end{cases}$$

**Определение.** $W \subseteq \mathbb{N}_0^n$. $W$ — выразимое в формальной арифметике. отношение, если существует формула $\omega$ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$

- $(k_1, \ldots, k_n) \in W$, тогда $\vdash \omega[x_1 := \overline{k_1}, \ldots, x_n := \overline{k_n}]$
- $(k_1, \ldots, k_n) \notin W$, тогда $\vdash \neg\omega[x_1 := \overline{k_1}, \ldots, x_n := \overline{k_n}]$

$$\omega[x_1 := \Theta_1, \ldots, x_n := \Theta_n] \equiv \omega(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$$

**Определение.** $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ — представим в формальной арифметике, если найдется $\varphi$ — фомула с $n+1$ свободными переменными $k_1, \ldots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$

- $f(k_1, \ldots, k_n) = k_{n+1}$, то $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_{n+1}})$

- $\vdash \exists! x. \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, x)$