

Лекция 11

Ilya Yaroshevskiy

January 13, 2021

Contents

1	Степенные ряды	1
1.1	Метод Абеля. Суммирование числовых рядов	1
1.2	Экспонента(комплексной переменной)	2
2	Теория меры	2
2.1	Системы множеств	2

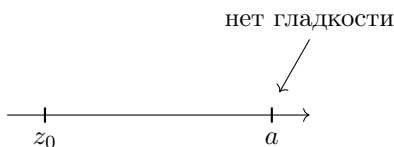
1 Степенные ряды

$$f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n \quad |z - z_0| < R \quad (1)$$

$$f'(z) = \sum n a_n(z - z_0)^{n-1} \quad |z - z_0| < R \quad (2)$$

Следствие 1. $f = \sum a_n(z - z_0)^n$, $0 < R < +\infty$

Тогда $f \in C^\infty(B(z_0, R))$ и все производные можно найти почленным дифференцированием



Теорема 1 (из ТФКП). f - комплексно дифференцируема в z_0

Тогда $f = \sum a_n(z - z_0)^n$ R = расстояние от z_0 до ближайшей особой точки функции

Следствие 2. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$

Тогда:

1. $\sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ — тот же радиус сходимости

2. $\int_{x_0}^x f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$

Замечание. $\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \text{const}$

Proof.

1. Продифференцируем ряд $\sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$. По теореме он имеет тот же радиус сходимости что и ряд $\sum a_n(z - z_0)^n$

2. Мы можем вычислить производные левой и правой части, они совпадают, при $x = x_0$ ясно что константа нулевая \Rightarrow левая и правая части равны

□

1.1 Метод Абеля. Суммирование числовых рядов

Теорема 2 (Абеля). $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n$ — сходящийся $C_n \in \mathbb{C}$

$f(x) = \sum C_n x^n$, $R \geq 1$, $-1 < x < 1$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sum C_n$

Proof. Ряд $\sum C_n x^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$ по признаку Абеля

признак Абеля

$\sum a_n(x)b_n(x)$ $a_n \in \mathbb{C}$ $b_n \in \mathbb{R}$

1. $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на $\langle \alpha, \beta \rangle$
2. $\forall x \ b_n(x)$ — монотонна по n
 $b_n(x)$ — равномерно ограничена $\exists C_b : \forall n \ \forall x \quad |b_n(x)| \leq C_b$

Тогда ряд сходится

$a_n(x) := C_n \quad b_n(x) := x^n \Rightarrow$ этот ряд сходится

Функции $C_n x^n$ — непрерывны на $[0, 1] \Rightarrow$ (по т. Стокса-Зайделя) $\sum C_n x^n$ — непрерывны на $[0, 1]$ \square

Следствие 3. $\sum a_n = A, \sum b_n = B, C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

Пусть $\sum C_n = C$

Тогда $C = A \cdot B$

Proof. $f(x) = \sum a_n x^n \quad g(x) = \sum b_n x^n \quad h(x) = \sum c_n x^n \quad x \in [0, 1]$

$x < 1$ Есть абсолютная сходимость $a_n, b_n \Rightarrow$ можно перемножать:

$f(x)g(x) = h(x)$, тогда при переходе в пределе $x \rightarrow 1 - 0 \Rightarrow A \cdot B = C$ \square

1.2 Экспонента(комплексной переменной)

Определение. $\sum \frac{z^n}{n!} \quad A = \infty \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ Свойства:

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$
3. f_0 — показательная функция, удовлетворяет $f(x+y) = f(x)f(y)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_0(x)-1}{x} = 1$
 $f_0(x) := \exp(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \exp'(0) = 1$

Теорема 3. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, тогда $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

2 Теория меры

2.1 Системы множеств

Обозначение. A_i — множества, попарно не пересекаются $\leftrightarrow A_i$ — дизъюнкты(dis)

$\bigsqcup_i A_i$ — дизъюнктное объединение

Определение. X — множество, 2^X — система всевозможных подмножеств в X
 $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо елси:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, A' \in \mathcal{P} \exists$ конечное $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P}$ — дизъюнкты

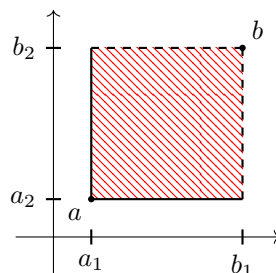
$$A \setminus A' = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$$

Пример. 2^X — полукольцо

Пример. $X = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{P}$ — ограниченные подмножества(в том числе \emptyset)

Определение. ячейка в \mathbb{R}^m

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m | \forall i \ x_i \in [a_i, b_i)\}$



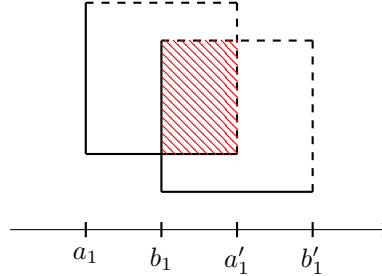
Пример. \mathcal{P}^m — множество ячеек в \mathbb{R}^m

Утверждается, что \mathcal{P}^m — полукольцо

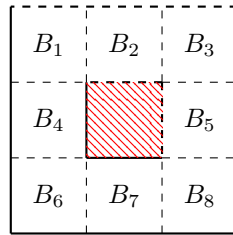
Proof. $m = 2$

1. очев

2. $A \cap B = [a, a'] \cap [b, b'] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^m \mid \forall i = 1, 2 \max(a_i, b_i) \leq x_i < \min(a'_i, b'_i)\}$
т.е. пересечение очевидно тоже ячейка



3. $A \setminus A' = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$



Заштрихованная ячейка — A' , большая ячейка — A
в \mathbb{R}^m $3^m - 1$ часть

□

Пример. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\forall i A_i = A$

$X = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} A_i = \{(a_1, a_2, \dots) \mid \forall i a_i \in A_i\}$

Обозначим $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}$: $k \in \mathbb{N} \quad \forall l: 1 \leq l \leq k \quad \alpha_l \in A_{i_l}$

$\mathcal{P} = \{X_\sigma\}_\sigma$, $X_\sigma = \{a \in X \mid a_{i_1} = \alpha_1, \dots, a_{i_k} = \alpha_k\}$

Утверждение: \mathcal{P} — полукольцо

Proof.

$$1. \emptyset = X, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \sigma, \sigma' \quad X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cup \sigma'}$$

$$3. X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$$

□

Примечание. Свойства:

1. Как показывают примеры:

$$(a) A \subset \mathcal{P} \not\Rightarrow A^C = X \setminus A \in \mathcal{P}$$

$$(b) A, B \in \mathcal{P} \not\Rightarrow$$

- $A \cup B \in \mathcal{P}$
- $A \setminus B \in \mathcal{P}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2. Модернизируем 3-е свойство полукольца: $A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$

Тогда $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ — представима в виде дизъюнктного объединения элементов \mathcal{P}

Proof. Индукция по n . База $n = 1$ — аксиома 3 полукольца

Переход:

$$\begin{aligned} A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) &= (A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)) \setminus A_n = \\ &= \left(\bigsqcup_{i=1}^k B_i \right) \setminus A_n = \bigsqcup_{i=1}^k (B_i \setminus A_n) = \bigsqcup_{i=1}^k \bigsqcup_{j=1}^{L_i} D_{ij} \end{aligned}$$

□

Определение. $\mathcal{A} \subset 2^X$ — алгебра подмножеств в X :

1. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$

Свойства

1. $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$
3. $A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$
4. $A \cup B \in \mathcal{A}$, потому что $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
5. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ — по индукции
6. Всякая алгебра есть полукольцо, обратное не верно