Коллоквиум 1

Ilya Yaroshevskiy

20 апреля 2021 г.

Содержание

1 Топология

1.1 Топологическое пространство, открытое и замкнутое множество

Определение. Рассмотрим множество X — **носитель**. Рассмотрим $\Omega \subseteq 2^X$ — подмножество подмножеств X — **топология**.

1. $\bigcup X_i \in \Omega$, где $X_i \in \Omega$
2. $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \Omega$, если $X_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

1.2 Внутренность и замыкание множества

Определение.

$$(X)^\circ = \text{наиб.}\{w \big| w \subseteq X, w \text{ — откр.}\}$$

1.3 Топология стрелки

1.4 Дискретная топология

Пример. Дискретная топология: $\Omega = 2^X$ — любое множество открыто. Тогда $\langle \Omega, \leq \rangle$ — булева алгебра

1.5 Топология на частично упорядоченном множестве

1.6 Индуцированная топология

1.7 Связность

2 Исчисление высказываний

2.1 Метапеременные, пропозициональные переменные, Высказывания

2.1.1 Язык

1. Пропозициональные переменные
   A_i' — большая буква начала латинского алфавита

2. Связки
   $\underbrace{\alpha}_{\text{метапеременная}}$, β — высказывания
   Тогда $(\alpha \to \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg\alpha)$ — высказывания

2.1.2 Мета и предметные

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi, \dots$ — метапеременные для выражений
- X, Y, Z — метапеременные для предметные переменные

Метавыражение: $\alpha \to \beta$
Предметное выражение: $A \to (A \to A)$ (заменили α на A, β на $(A \to A)$)

Пример. Черным — предметные выражения, Синим — метавыражения

$$(X \to Y)[X := A, Y := B] \equiv A \to B$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := A, X := B] \equiv A \to (A \to B)$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := (A \to P), X := B] \equiv (A \to P) \to (A \to B)$$

2.2 Схемы аксиом, доказуемость

2.2.1 Теория доказательств

Определение. Схема высказывания — строка соответсвующая определению высказывания, с:

- метапеременными $\alpha, \beta, \dots$

Определение. Аксиома — высказывания:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

2.3 Правило Modus Ponens, доказательство, вывод из гипотез

2.3.1 Правило Modus Ponens и доказательство

Определение. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где α_i:

- аксиома
- существует $k, l < i$, что $\alpha_k = \alpha_l \to \alpha$

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

Пример. $\vdash A \to A$

$$\begin{array}{r|ll}
1 & A \to A \ \to A & \text{(схема аксиом 1)} \\
2 & A \to (A \to A) \to A & \text{(схема аксиом 1)} \\
3 & (A \to (A \to A)) \to (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A) & \text{(схема аксиом 2)} \\
4 & (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A) & \text{(M.P. 1 и 3)} \\
5 & A \to A & \text{(M.P. 2 и 4)}
\end{array}$$

Определение. Доказательством высказывания β — список высказываний $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — доказательство
- $\alpha_n \equiv \beta$

2.4 Множество истинностных значений, модель (оценка перменных), Оценка высказывания

2.4.1 Теория моделей

- $\mathcal{P}$ — множество предметных переменных
- $[\![\cdot]\!] : \mathcal{T} \to V$, где $\mathcal{T}$ — множество высказываний, $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$ — множество истиностных значений

1. $[\![x]\!] : \mathcal{P} \to V$ — задается при оценке $[\![]\!]^{A:=v_1, B:=v_2}$:
   - $\mathcal{P} = v_1$
   - $\mathcal{P} = v_2$
2. $[\![\alpha \star \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \underbrace{\star}_{\text{определенно ественным образом}} [\![\beta]\!]$, где $\star \in [\&, \vee, \neg, \to]$

   Пример.
   $$[\![A \to A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} \to [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = \text{И} \to \text{И} = \text{И}$$

   Также можно записать так:
   $$[\![A \to A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = f_{\to}([\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}, [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}) = f_{\to}(\text{И}, \text{И}) = \text{И}$$

   , где $f_{\to}$ определена так:

a	b	$f_{\to}$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

2.5 Общезначимость

Пример. $\models \alpha$ — α общезначимо

2.6 Выполнимость

2.7 Невыполнимость

2.8 Следование

Определение. Следование: $\Gamma \models \alpha$, если

- $\Gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$
- Всегда когда все $[\![\gamma_i]\!] = И$, то $[\![\alpha]\!] = И$

2.9 Корректность

Определение. ~~Теория~~ Исчисление высказываний корректна, если при любом α из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$

2.10 Полнота

Определение. Исчисление полно, если при любом α из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$

2.11 Противоречивость

2.12 Теорема о дедукции

Теорема 2.1 (о дедукции)**.** $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ <u>тогда и только тогда, когда</u> $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

2.13 Теорема о корректности

Теорема 2.2 (о корректности)**.** Пусть $\vdash \alpha$
<u>Тогда</u> $\models \alpha$

2.14 Теорема о полноте ИВ

Теорема 2.3 (о полноте)**.** Пусть $\models \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

3 Интуиционистское исчисление высказываний

3.1 Закон исключенного третьего

3.2 Закон снятия двойного отрицания

3.3 Закон Пирса

3.4 ВНК-интерпретация логических связок

3.4.1 Интуиционистская логика

$A \vee B$ — плохо

Пример. Докажем: существует a, b, что $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, но $a^b \in \mathbb{Q}$
Пусть $a = b = \sqrt{2}$. Рассмотрим $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Если да, то ОК
- Если нет, то возьмем $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

ВНК-интерпретация. α, β

- $\alpha \& \beta$ — есть α, β
- $\alpha \vee \beta$ — есть α либо β и мы знаем какое
- $\alpha \to \beta$ — есть способ перестроить α в β
- $\perp$ — конструкция без построения $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$

3.5 Теорема Гливенко

3.6 Решетка

Определение. Фиксируем A
Частичный порядок — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное отношение
Линейный — сравнимы любые 2 элемента

- $a \le b \lor b \le a$
- **Наименьший элемент** S — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \le x$
- **Минимальный элемент** S — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \le k$

Определение.

- **Множество верхних граней** a и b: $\{x \big| a \le x \& b \le x\}$
- **Множество нижних граней** a и b: $\{x \big| x \le a \& x \le b\}$

Определение.

- $a + b$ — нименьший элемент множества верхних граней
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней

Определение. **Решетка** $= \langle A, \le \rangle$ — структура, где для каждых a, b есть как $a + b$, так и $a \cdot b$, т.е. $a \in A, b \in B \implies a + b \in A$ и $a \cdot b \in A$

3.7 Дистрибутивная решетка

Определение. **Дистрибутивная решетка** если всегда $a \cdot (b + c) = ab + a \cdot c$

3.8 Импликативная решетка

Определение. **Импликативная решетка** — решетка, где для любых a, b есть $a \to b$

3.9 Алгебра Гейтинга

Определение. **Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга)** — импликативная решетка с 0

3.10 Булева алгебра

Определение. **Булева алгебра** — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \to 0) = 1$

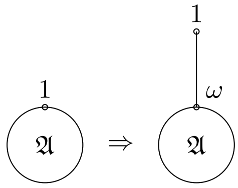
3.11 Геделева алгебра

Определение. Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

3.12 Операция $\Gamma(A)$

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathfrak{A})$



Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathfrak{A})}$ перенеименуем $1_{\mathfrak{A}}$ в ω

3.13 Алгебра Линденбаума

3.14 Свойство дизъюнктивности ИИВ

Определение. Дизъюнктивность ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

3.15 Свойство нетабличности ИИВ

3.16 Модель Крипке, Вынужденность

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок($\succeq$)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
   $(\Vdash) \subseteq W \times \P$
   При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_j \Vdash p$

4 Исчиление предикатов

4.1 Предикатные и функциональные символы

4.1.1 Исчисление предикатов

Определение. Язык исчисление предикатов

- логические выражения “предикаты“/“формулы“
- предметные выражния “термы“

Θ — метаперменные для термов
Термы:

- Атомы:
  - $a, b, c, d, \dots$ — предметные переменные
  - x, y, z — метапеременные для предметных перменных
- Функциональные Символы
  - f, g, h — Функциональные символы(метаперемнные)
  - $f(\Theta_1, \dots \Theta_n)$ — применение функциональных символов
- Логические выражения:
  Если $n = 0$, будем писать f, g — без скобок
  - P — метаперменные для предикатных символов
  - A, B, C — предикатный символ
  - $P(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ — применение предикатных символов
  - $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ — Связки
  - $\forall x.\varphi$ и $\exists x.\varphi$ — кванторы
    “<квантор> <переменная>.<выражение>“

1. Сокращение записи И.В + жадность $\forall, \exists$
   Метавыражение:
   $$\forall x.(P(x)\&(\forall y.P(y)))$$
   Квантор съедает все что дают, т.е. имеет минимальный приоритет.
   Правильный вариант(настоящее выражние):
   $$\forall a.B(A)\&\forall b.B(b)$$

4.2 Константы и пропозициональные переменные

4.3 Свободные и связанные вхождения предметных переменных в формулу

4.3.1 Вхождение

Пример.

$$(P(\underset{1}{x}) \vee Q(\underset{2}{x})) \to (R(\underset{3}{x}) \& (\underbrace{\forall \underset{4}{x}.P_1(\underset{5}{x})}_{\text{область } \forall \text{ по } x}))$$

1, 2, 3 — свободные, 5 — связанное, по пермененной 4

Пример.

$$\underbrace{\forall x.\forall y.\forall x.\forall y.\forall x.P(x)}_{\text{область } \forall \text{ по } x}$$

Здесь x в $P(x)$ связано. x не входит свободно в эту формулу, потому что нет свободных вхождений

Определение. Переменная x входит свободно если существует свободное вхождение

Определение. Вхождение свободно, если не связано

Можно относится к свободно входящим перменным как с перменным из библиотеки, т.е. мы не имеем права их переименовывать

Пример. Некорректная формула

α_1 $x = 0 \to x = 0$

α_2 $(\exists x.x = 0) \to (x = 0)$ — не доказано

α_2' $(\exists t.x = 0) \to (x = 0)$ — (правило $\exists$)

Пример.

(n) $x = 0 \to y = 0$ — откуда то

$(n + 1)$ $(\exists x.x = 0) \to (y = 0)$ — (правило $\exists$)

4.3.2 Свободные подстановки

Определение. Θ свободен для подстановки вместо x в φ, если никакая свободная перменная в Θ не станет связанной в $\varphi[x := \Theta]$

Определение. $\varphi[x := \Theta]$ — "Заменить все свободные вхождения x в φ на Θ"

Пример.

$$(\forall x.\forall y.\forall x.P(x))[x := y] \equiv \forall x.\forall y.\forall x.P(x)$$

Пример.

$$P(x) \vee \forall x.P(x)\ [x := y] \equiv P(y) \vee \forall x.P(y)$$

Пример.

$$(\forall y.x = y)\ [x := \underbrace{y}_{\equiv\Theta}] \equiv \forall y.\underset{1}{y} = y$$

$FV(\Theta) = \{y\}$ — свободные перменные в Θ. Вхождение y с номером 1 стало связанным

Пример.

$$P(x)\&\forall y.x = y\ [x := y + z] \equiv P(y + z)\&\forall y.\underset{1}{y} + z = y$$

Здесь при подстановке вхождение y с номером 1 стало связанным. x — библиотечная функция, переименовали x во что-то другое.

4.4 Свобода для подстановки, Правила вывода для кванторов, аксиомы исчисления предикатов для кванторов, оценки и модели в исчислении предикатов

4.4.1 Теория доказательств

Все аксимомы И.В + М.Р.

(схема 11) $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \Theta]$

(схема 12) $\varphi[x := \Theta] \to \exists x.\varphi$

Если Θ свободен для подстановки вместо x в φ.

Определение. Свободен для подстановки — никакое свободное вхождение x в Θ не станет связанным

Пример.

```
int y;
int f(int x) {
        x = y;
}
```

Заменим `y := x`. Код сломается, т.к. у нас нет свобод для подстановки

(Правило $\forall$)

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi}$$

(Правило $\exists$)

$$\frac{\psi \to \varphi}{\exists x.\psi \to \varphi}$$

В обоих правилах x не входит свободно в φ

Пример.

$$\frac{x = 5 \to x^2 = 25}{x = 5 \to \forall x.x^2 = 25}$$

Между x и x^2 была связь, мы ее разрушили. Нарушено ограничение

Пример.

$$\exists y.x = y$$

$$\forall x.\exists y.x = y \to \exists y.y + 1 = y$$

Делаем замену `x := y+1`. Нарушено требование свобод для подстановки. y входит в область действия квантора $\exists$ и поэтому свободная переменная x стала связанная.

4.5 Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема 4.1. Пусть задана Γ, α, β

1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, при условии, если b в доказательстве $\Gamma, \alpha \to \beta$ не применялись правила для $\forall, \exists$ по перменным, входяшим свободно в α

2. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

4.6 Теорема о корректности для исчисления предикатов

4.7 Полное множество (бескванторных) формул

Определение. Γ — **непротиворечивое** множество формул, если $\Gamma \not\vdash \alpha \& \neg\alpha$ ни при каком α

Определение. Полное непротиворечивое замкнутых бескванторных формул — такое, что для каждой замкнутой бескванторной формулы α: либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$

4.8 Модель для формулы

4.8.1 Теория моделей

Оценка формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множетво
2. Кажодму $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставим функцию $D^n \to D$
3. Каждому $P_j(x_1, \ldots, x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^2 \to V$
4. Каждой x_i сопоставим элемент из D

Пример.

$$\forall x.\forall y.\ E(x, y)$$

Чтобы определить формулу сначала определим $D = \mathbb{N}$

$$E(x, y) = \begin{cases} \text{И} & , x = y \\ \text{Л} & , x \neq y \end{cases}$$

- $[\![x]\!] = f_{x_i}$
- $[\![\alpha \star \beta]\!]$ — смотри ИИВ
- $[\![P_i(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)]\!] = f_{P_i}([\![\Theta_1]\!], \ldots, [\![\Theta_n]\!])$
- $[\![f_j(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)]\!] = f_{f_j}([\![\Theta_1]\!], \ldots, [\![\Theta_n]\!])$
- $$[\![\forall x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при всех } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$
- $$[\![\exists x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при некотором } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

$$[\![\forall x.\forall y.E(x, y)]\!] = \text{Л}$$

т.к. $[\![E(x, y)]\!]^{x:=1,\ y:=2} = \text{Л}$

Пример.

$$\forall\ \boxed{\varepsilon > \boxed{0}}\ \exists N\ \forall\ \boxed{\boxed{\mathrm{n}} > \boxed{\mathrm{N}}}\quad \boxed{\boxed{|\mathrm{a}_n - a|} < \boxed{\varepsilon}}$$

Синим отмечены функциональные конструкции(термы), зеленым предикатные

$$\forall \varepsilon.(\varepsilon > 0) \to \exists N.\forall n.(n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначим:

- $(>)(a, b) = G(a, b)$ — предикат
- $|\bullet|(a) = m_|(a)$
- $(-)(a, b) = m_-(a, b)$
- $0() = m_0$
- $a_\bullet(n) = m_a(n)$

$$\forall e.\ \boxed{\mathrm{G}(\boxed{\mathrm{e}}, \boxed{\mathrm{m}_0})} \to \exists n_0.\forall n.\ \boxed{\mathrm{G}(\mathrm{n}, \mathrm{n}_0)} \to \boxed{\mathrm{G}\Big(\mathrm{e}, \boxed{\mathrm{m}_|\Big(m_-\big(m_a(n), a\big)\Big)}\Big)}$$

4.9 Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема 4.2 (Геделя о полноте)**.** Если Γ — полное неротиворечивое множество замкнутых(не бескванторных) фомул, то оно имеет модель

4.10 Следствие из теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов

Следствие 4.2.1. Пусть $\models \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

4.11 Неразрешимость

4.12 Исчисления предикатов (формулировка, что такое неразрешимость).

5 Арифметика и теории первого порядка

5.1 Теория первого порядка

5.2 Модели и структуры теорий первого порядка

5.3 Аксиоматика Пеано

5.4 Определение операций (сложение, умножение, возведение в степень)

5.5 Формальная арифметика (язык, схема аксиом индукции и общая характеристика остальных аксиом).