

1 Обратный оператор

1.1 Единица. Обратный элемент

... $x, y \in A$

$$x * y = e$$

1.1.1 Опр

Если $x * y = e$, то x называется левым обратным к y
 y называется правым обратным к x

1.1.2 Опр

$$xz = zx = e$$

x называется обратимым к z и обозначается $x = z^{-1}$

1.1.3 Лемма

Если $y, z \in A$

$\exists x$ - левый обратимый и y - правый обратимый
тогда:

1. z - обратим

2. $x = y = z$

1.2 Обратная матрица

K_n^n - алгебра матриц

1.2.1 Опр

Единичной матрицей называется $E : \forall A \in K_n^n$
 $AE = EA = A$

1.2.2 Опр

Обратной матрице называется $A^{-1} : AA^{-1} = E$

1.2.3 Теорема

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

1.2.4 Способы вычисления A^{-1}

Метод Гауса

$$[A|E] \sim [E|A^{-1}]$$

Союзная матрица

$$]A : \tilde{a}_j^i = A_j^i = (-1)^{i+j} M_j^i \text{ - союзная матрица}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

1.3 Обртанный оператор

$$\varphi : X \rightarrow X$$

1.3.1 Опр

Обртанным к опреатору φ называется оператор φ^{-1} :

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = I$$

1.3.2 Теорема

Оператор φ обратим если \exists базис в котором его матрица невырождена

1.3.3 NB

$$\tilde{A} = SAT$$

$$\det \tilde{A} = \det(SAT) = \det S \cdot \det A \cdot \det Y$$

1.3.4 Опр

$$\text{Ядро } \varphi : \text{Ker} \varphi = \{x \text{ in } X : \varphi x = 0\}$$

1.3.5 Лемма

$$\text{Ker} \varphi \text{ - ЛП}$$

1.3.6 Опр

$$\text{Образ } \varphi : \Im \varphi = \{y \text{ in } Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

1.3.7 Лемма

$$\Im \varphi \text{ - ЛП}$$

1.3.8 Теорема (о ядре и образе)

$$\varphi : x \rightarrow X \Rightarrow \dim \text{Ker} \varphi + \dim \Im \varphi = \dim X$$

1.3.9 Теорема

$$]\varphi : X \rightarrow X \Rightarrow \exists \varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim \Im \varphi = \dim X \Leftrightarrow \dim \text{Ker} \varphi = 0$$

2 Внешняя степень ЛОп

2.0.1 Опр

Определителем набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется число $\det[x_1, x_2, \dots, x_n]$ такое, что: $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1, x_2, \dots, x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

2.0.2 Опр

$]\varphi : x \rightarrow X$ Внешней степенью $\varphi^{\wedge p}$ оператора φ называется отображение:
 $\varphi^{\wedge p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)$

2.0.3 Опр

Определитель линейного оператора φ

$$\det \varphi = \det[\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)] = \det A_\varphi e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$