Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

19 марта 2021 г.

Содержание

1 Условная вероятность

Обозначение. $P(A|B)$ — вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Пример. Кубик подбрасывается один раз. Известно что выпало больше трех очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков.

- A — четное число очков
- B — больше 3 очков

Тогда:

- $n = 3$ $(4, 5, 6)$
- $m = 2$ $(4, 6)$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

При интерпретация с геометрическим определением вероятностей также получаем формулу $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$

Определение. Условной вероятностью события A при условии того что имело место событие B называется величина:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

— формула условной вероятности

1.1 Формула умножения вероятности

Как следствие формулы условной вероятности получаем:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) \text{ или } P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Теорема 1.1.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

Доказательство. По индукции □

Примечание. $P(A) \neq 0$ и поэтому формула умножения удовлетворяет

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) \neq 0$$

Примечание.

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Доказательство. Очевидно □

Задача 1. В коробке 3 красных крандаша и 2 синих. Вынули 3 карандаша. Найти вероятность того что первые два красные а третий синий.

Решение.

- A_1 — 1-й красный
- A_2 — 2-й красный
- A_3 — 3-й синий

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Примечание. Прменяем когда учитывается порядок

1.2 Полная группа событий

Определение. События $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ образуюти полную группу событий если они попарно несовместны, и содержат все элементарные исходы:

- $P(H_iH_j) = \emptyset \ \forall i \neq j$
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$

Примечание. Часто события из полной группы называются гипотезами

1.3 Формула полной вероятности

Теорема 1.2 (Баеса)**.** $]H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — полная группа событий
Тогда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

Пример. В первой коробке 4 белых и два черных шара, во второй 1 белый и два черных. Из первой коробки во вторую переложили два шара, затем из второй коробки достали шар. Найти вероятность того что он оказался белый

Решение.

- $]H_1$ — переложили 2 белых
- $]H_2$ — переложили 2 черных
- $]H_3$ — переложили 1 черный и 1 белый
- $]A$ — из второй коробки достали белый

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$
$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$
$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$
$$\sum P(H_i) = 1 \text{ — верно}$$
$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}$$
$$P(A|H_2) = \frac{1}{5}$$
$$P(A|H_3) = \frac{2}{5}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)(A|H_1) + P(H_2)(A|H_2) + P(H_3)(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

Пример. По статистике 1% населения болен раком. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительным. Найти веротяность того что человек болен.

Решение.] $\left.\begin{array}{l} \text{Н}_1 \text{ — болен} \\ \text{Н}_2 \text{ — здоров} \end{array}\right\}$, A — тест положительный

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(A|H_1) = 0.99$
- $P(A|H_2) = 0.01$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{1}{2}$$

Сделаем второй тест:

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(AA|H_1) = 0.99^2$
- $P(AA|H_2) = 0.01^2$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$