Матан 3 семестр

Ilya Yaroshevskiy

24 января 2021 г.

Содержание

1 Мультииндекс

Обозначение.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m = \sum_{c_1=1}^{m} \sum_{c_2=1}^{m} \dots \sum_{c_n=1}^{m} a_{c_1} a_{c_2} \dots a_{c_n} \tag{1}$$

$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$ — мультииндекс

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \tag{2}$$

$$x \in \mathbb{R}^m \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \tag{3}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! \tag{4}$$

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} \tag{5}$$

$$(1) = \sum_{\alpha : |\alpha| = r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha \tag{6}$$

2 Дифференцирование

Лемма 1. *$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $f \in C^r(E)$ - r раз дифференцируема на E, $a \in E$*
$h \in \mathbb{R}^m$ $\forall t \in [-1, 1]$ $a + th \in E$
$\varphi(t) := f(a + th)$
Тогда при $1 \le k \le r$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j : |j| = k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a) \tag{7}$$

Доказательство.

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \dots \sum_{i_r=1}^{m} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a + th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_3} \tag{8}$$

□

Пример. $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th)}_{\text{Производная в точке } a+th} \cdot h_i$

$\varphi'' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) \cdot h_i h_{i_2}$

$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots)$

3 Теорема (формула Тейлора)

Теорема 3.1. $f \in C^{r+1}(E)$ $E \subset \mathbb{R}^m,\ f : E \to \mathbb{R},\ a \in E$
$x \in B(a, R) \subset E$
Тогда $\exists \theta \in (0, 1)$

$$f(x) = \sum_{\alpha : 0 \le |\alpha| \le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x - a)^\alpha + \sum_{\alpha : |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \theta(x - a))}{\alpha!}(x - a)^\alpha$$

$f(x) = \sum_{k=0}^{r} (\sum_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_m) : \alpha_i \ge 0 \\ \sum \alpha_1 = k}} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (x_m - a_m)^{\alpha_m}) +$ аналогичный остаток

$$f(a + h) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\dots} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}}(a) h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m} + \text{остаток}$$

Доказательство. $\varphi(t) = f(a+th)$, где $h = x - a$, $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(x)$
Из леммы

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1} \tag{9}$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}h^\alpha}_{\text{однородный многочлен степени } k} + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))}{\alpha!}h^\alpha \tag{10}$$

$$f(a+h) = \sum \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}h^\alpha + o(|h|^r) \tag{11}$$

Где однородный многочлен степени k это k -ый дифференциал функции f в точке a, обозначается $d^k f(a,h)$

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{d^k f(a,h)}{k!} + \dfrac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a+\theta h, h)$

□

Примечание. $d^2 f = f''_{x_1x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_2x_2}(a)h_2^2 + \dots + f''_{x_mx_m}(a)h_m^2 + 2\sum_{i<j} f''_{x_ix_j}(a)h_ih_j$ $d^{k+1}f = d(d^k f)$
$df = f'_{x_1}h_1 + f'_{x_2}h_2 + \dots + f'_{x_m}h_m$
$d^2 f = (f''_{x_1x_1}h_1 + f''_{x_1x_2}h_2 + \dots + f''_{x_1x_m}h_m)h_1 + (f''_{x_2x_1}h_1 + f''_{x_2x_2}h_2 + \dots + f''_{x_2x_m}h_m)h_2 + \dots$

4 Линейные отображения

4.1 Определение

Определение. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - множество линейных отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - это линейное простарнство
$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ $\quad \|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m : |x|=1} |Ax|$

Примечание.

1. $\sup \leftrightarrow \max$, т.к. сфера компактна
2. $A = (a_{ij})$ $\quad \|A\| \le \sqrt{\sum a_{ij}^2}$ - по Лемме об оценке нормы линейного отображения
3. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \le \|A\| \cdot |x|$ $x = 0$ - тривиально
   $x \ne 0 \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \quad |Ax| = |A(|x| \cdot \tilde{x})| = \big||x| \cdot A\tilde{x}\big| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \le \|A\| \cdot |x|$
4. Если $\exists C > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R}^m |Ax| \le C \cdot |x|$, то $\|A\| \le C$

Пример.
1. $m = l = 1$
   A - линейный оператор - задается числом a $x \mapsto ax$ $\|A\| = |a|$
2. $m = 1$ $l -$ любое
   $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix}$ $\|A\| = |a|$
3. $m -$ любое $l = 1$
   $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $A \leftrightarrow \vec{a}$
   $x \mapsto (\vec{a}, x)$ $\|A\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m : |x|=1} |\langle \vec{a}, x \rangle| = |\vec{a}|$
4. $m -$ любое $l -$ любое
   $\|A\| = \sup\limits_{x:|x|=1} |Ax| = :($

4.2 Лемма

Лемма 2. *X, Y - линейные нормированные пространства $A \in \mathcal{L}(X, Y)$*

1. *A - ограниченый оператор, т.е. $\|A\|$ - конечное*
2. *A - непрерывен в нуле*
3. *A - непрерывен всюду в X*
4. *A - равномерно непрерывен*
   $f : X \to Y$ - метрические пространства, равномерно непрерывно
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, x_0 : \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x_0, x_1 :\ |x_1 - x_0| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$

Доказательство.

$(4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2)$ очевидно

$(2 \Rightarrow 1)$ непрерывность в нуле:
для $\varepsilon = 1\ \exists \delta : \forall x : |x - 0| \leq \delta \quad |Ax - A \cdot 0| < 1$
при $|x| = 1 \quad |Ax| = |A\frac{1}{\delta}(\delta \cdot x)| = \frac{1}{\delta} \cdot |A \cdot \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$

$(1 \Rightarrow 4)$ $|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0|$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0\ |x_1 - x_0| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_0| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$

□

4.3 Теорема о пространстве линейных отображений

Теорема 4.1.

1. Отображение $A \to \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ является нормой, т.е выполнятеся
   (a) $\|A\| \geq 0$, если $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{m,n}$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
   (c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),\ B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad \|AB\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

1. (a) $\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$, очев
   (b) очев
   (c) $|(A+B)\cdot x| = |Ax+Bx| \leq |Ax|+|Bx| \leq (\|A\|+\|B\|)\cdot|x|$ по замечанию 3 $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$
2. $|BAx| = |B \cdot (Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|$ по замечанию 3

□

Примечание. в $\dim(X, Y)$

$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |Ax| = \sup\limits_{|x|<1} |Ax| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall x\ |Ax| \leq C \cdot |x|\}$

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$$

5 Теорема лагранжа(для отображений)

Теорема 5.1. $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ дифф $E \quad a, b \in E$
Тогда $\exists c \in [a, b] \quad c = a + \Theta(b - a)\ \Theta \in (0, 1)$
$|F(b) - F(a)| \le \|F'(c)\| \cdot |b - a|$

Доказательство. $f(t) = F(a + t(b - a)),\ t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = F'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$
Тогда $\exists \Theta \in [0, 1] :\ |f(1) - f(0)| \le |f'(\Theta)| \cdot |1 - 0|$ - это т. Лагранжа для векторнозначных функций
т.е $|F(b) - F(a)| \le |F'(a + \Theta(b - a)) \cdot (b - a)| \le \|F'(\underbrace{a + \Theta(b - a)}_{\in[a,b]})\| \cdot |b - a|$ □

6 Лемма

Лемма 3. $\mathcal{L}m, m,\ \Omega_m = \{L \in \mathcal{L}_{m,m} : \exists L^{-1}\},\ A \mapsto A^{-1}$
$B \in \mathcal{L}_{m,m}$ Пусть $\exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^m\ |Bx| \ge c|x|$
Тогда $B \in \Omega_m$ и $\|B^{-1}\| \le \frac{1}{c}$

Доказательство. B - биекция(конечномерный эффект???), $\exists B^{-1}$
$|Bx| \ge c|x| \qquad x := B^{-1}y$
$|y| \ge c \cdot |B^{-1}y|$
$|B^{-1}y \le \frac{1}{c}|y| \Rightarrow \|B^{-1}\| \le \frac{1}{c}$ □

Примечание. $A \in \Omega_m$ Тода $\exists c : |Ax| \ge c \cdot |x|$
$x = |A^{-1}Ax| \le \|A^{-1}\| \cdot |Ax| \qquad c := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

7 Теорема об обратимости оператора близкого к обратимому

Теорема 7.1. $L \in \Omega_m\ M \in \mathcal{L}_{m,m} \quad \|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$ (M – близкий к L)
Тогда

1. $M \in \Omega_m$, т.е. Ω_m - открытое множество в $\mathcal{L}_{m,m}$
2. $\|M^{-1}\| \le \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
3. $\|L^{-1} - M^{-1}\| \le \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$

Доказательство. $|a + b| \ge |a| - |b|$

1. $|Mx| = |Lx + (M - L)x| \ge |Lx| - |(M - L)x| \ge \frac{1}{\|L^{-1}\|} \cdot |x| - \|M - L\| \cdot |x| \ge (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) \cdot |x| \Rightarrow$
M - обратим(по Лемме)
$L \in \Omega_m \Rightarrow \exists c = \frac{1}{\|L^{-1}\|} :\ |Lx| \ge c \cdot |x|$ (по замечанию к Лемме)
2. Из пункта 1 $c = \|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|$, тогда Лемма утверждает, что $\|M^{-1}\| \le \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|}$
3. $M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$
$\|M^{-1} - L^{-1}\| \le \|M^{-1}\| \cdot \|L - M\| \cdot \|L^{-1}\| \le \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$

□

Примечание. $A \mapsto A^{-2}$ - непрерывное отображение $\Omega_m \to \Omega_m$
$B_k \to L \Rightarrow$ при больших k $B_k \in B(L, \frac{1}{\|L^{-1}\|}) \Rightarrow B_k$ - обратимо
$\|L^{-1} - B_k^{-1}\| \le \frac{\|L^1\|}{\|L^{-1}\| - \|B_k^{-1}\|} \cdot \|L - B_k\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$

8 Теорема о непрерывно дифферncируемых отображениях

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ - дифф на E
$F' : E \to \mathcal{L}_{m,l}$

Теорема 8.1. Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ - дифф на E
Тогда эквивалентны:

1. $F \in C^1(E)$ т.е существуют все частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ - непрерывные на E

2. $F' : E \to \mathcal{L}_{m,l}$ - непрерывно
т.е $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x)\ \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \le \varepsilon$

Доказательство.

$(1 \Rightarrow 2)$ матричные элементы $F'(x) - F'(\bar{x})$ - это $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x})$

$\|A\| \le \sqrt{\sum \alpha_{i,j}^2}$

Берем $x, \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall \bar{x}\ \dots\ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ - сразу для всех i, j

$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$

$(2 \Rightarrow 1)$ Проверяем непрывность в точке x

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$

$h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots)$

$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \le \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot \underbrace{|h|}_{1} < \varepsilon$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \ \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

9 Экстремумы

9.1 Определение

Определение. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad a \in E$
a - точка локального максимума: $\exists U(a) \subset E\ \forall x \in U(a)\ f(x) \le f(a)$ (аналогично для минимума)
экстремум - максимум или минимум

9.2 Теорема Ферма

Теорема 9.1. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\ a \in \mathrm{Int}E$ - точка экстремума, f - дифф в точке a
Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1\ \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f|_{\text{прямая}(a,u)}$ точка a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма □

Следствие 9.1.1. Небходимое условие экстремума a - локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие 9.1.2. теорема Ролля $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$K \subset E$ - компакт f - дифф на $\mathrm{Int}K$; f - непрерывна на K
$f|_{\partial K} = \mathrm{const}$ (на границе K)
Тогда $\exists a \in \mathrm{Int}K\ f'(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)) = 0$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда:

- $f = \mathrm{const}$ на $K \Rightarrow f' \equiv 0$
- $\exists a \in \mathrm{Int}K$ — точка экстремума
по Т. Ферма $f'(a) = 0$

□

9.3 Квадратичная форма

9.3.1 Определение

Определение. $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$Q(h) = \sum\limits_{1 \le i,j \le m} a_{ij} h_i h_j$

- Положительно определенная квадратичная фомра $\forall h \neq 0\ Q(h) > 0$

  Пример. $Q(h) = h_1^2 + h_2^2 + \dots +_m^2$

- Отрицательно определенная квадратичная фомра $\forall h \neq 0\ Q(h) < 0$

- Незнакоопределенная квадратичная фомра $\exists \bar{h}\ Q(\bar{h}) < 0 \quad \exists \bar{\bar{h}}\ Q\bar{\bar{h}} > 0$

  Пример. $Q(h) = h_1^2 - h_2^2$

- Полуопределенная(положительно опрделенная вырожденная) $\exists \bar{h} \neq 0 : Q(h) = 0$

  Пример. $Q(h) = h_1^2 \qquad Q((0, 1, 1, \dots)) = 0$

9.3.2 Лемма

Лемма 4.

1. *Q - положительно определенная.*
   <u>Тогда</u> $\exists \gamma_Q > 0\ \forall h\ Q(h) \ge \gamma_Q |h|^2$

2. *$p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - норма*
   <u>Тогда</u> $\exists C_1, C_2 > 0\ \forall x\ C_2|x| \le p(x) \le C_1|x|$

Доказательство. $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ — компакт $\Rightarrow$ по Т. Вейерштрасса минимум и максимум достигаются
Для $x = 0$ оба утверждения очевидны. Пусть $x \neq 0$

1. $\gamma_Q := \min\limits_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$
   Тогда $Q(h) \ge \gamma_Q |h|^2$, $Q(h) = Q(|h| \cdot \frac{h}{|h|}) = |h|^2 \cdot Q(\frac{h}{|h|}) \ge \gamma_Q \cdot |h|^2$

2. $C_2 := \min\limits_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_1 := \max\limits_{x \in S^{m-1}} p(x)$
   $p(x) = p(|x| \frac{x}{|x|}) = |x| p(\frac{x}{|x|}) \begin{matrix} \ge C_2|x| \\ \le C_1|x| \end{matrix}$
   Проверим, что $p(x)$ - непрерывная функция(для Т. Вейерштрасса), e_k — базисный вектор
   $p(x - y) = p(\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - y_k) e_k) \le \sum p((x_k - y_k) e_k) = \sum |x_k - y_k| p(e_k) \le |x - y| \cdot M$
   где $M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$, $|p(x) - p(y)| \le p(x - y)$

□

9.4 Достаточное условие экстремума

$d^2 f(a, h) = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + \dots + f''_{x_m x_m} h_m^2 + 2 \sum\limits_{1 \le i \le j \le m} f''_{x_i x_j} h_i h_j$
$f(x) = f(a) + df(a, x - a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a, x - a) + o(|x - a|^2)$
$f(a + h) = f(a) + df(a, h) + \frac{1}{2!} d^2 f(a + \theta h, h), \quad 0 \le \theta \le 1$

9.4.1 Теорема о достаточном условии экстремума

Теорема 9.2. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\ a \in \mathrm{Int} E \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0,\ f \in C^2(E)$
$Q(h) := d^2 f(a, h)$, Тогда, если:

- $Q(h)$ - положительно определено, то a - точка локального минимума

- $Q(h)$ - отрицательно определено, то a - локальный максимум

- $Q(h)$ - незнакоопределено, то a - не экстремум
- $Q(h)$ - полож/отриц вырожденная - недостаточно информации

Доказательство.

- Для положит. опр.
$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}d^2f(a+\theta h,h)=$
$$=\frac{1}{2}\left(Q(h)+\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\underbrace{f''_{x_ix_i}(a+\theta h)-f''_{x_ix_i}(a)}_{\text{б.м } h\to 0}\right)\underbrace{h_i^2}_{\le|h|^2}+2\sum_{i<j}\left(\underbrace{f''_{x_ix_j}(a+\theta h)-f''_{x_ix_j}(a)}_{\text{б.м}}\right)\underbrace{h_ih_j}_{\le|h|^2}\right)\right)$$
$f(a+h)-f(a)\ge\frac{1}{2}(\gamma_Q|h|^2-\frac{\gamma_Q}{2}|h|^2)\ge\frac{1}{4}\gamma_Q|h|^2>0$

- Для отр. опр аналогично

- $\lhd\bar{h}\quad Q(\bar{h})>0\quad f(a+t\bar{h})-f(a)=\frac{1}{2}d^2f(a+\Theta t\bar{h},\bar{h})t^2=$
$$=\frac{1}{2}\left(t^2Q(\bar{h})+t^2\underbrace{\left(\sum\left(f''_{x_ix_i}(a+\Theta th)-f''_{x_ix_i}(a)\right)\bar{h}_i^{\,2}+2\sum_{i<j}\left(\dots\right)\right)}_{\text{б.м при } t\to 0}\right)\ge$$
$\ge\frac{1}{2}t^2(Q(h)-\frac{1}{2}Q(h))>0$, т.е $f(a+t\bar{h})>f(a)$, при $t\to 0$
Аналогично $f(a+t\bar{\bar{h}})<f(a)$, при малых t

- Докажем примером: $f(x_1,x_2,\dots)=x_1^2-x_2^4-x_3^4-\dots\quad f'_{x_1}(a)=0,\ f'_{x_2}=0$
$\bar{f}(x_1,x_2,\dots)=x_1^2+x_2^4+x_3^4+\dots\quad d^2f(a,h)=2h_1^2,\ d^2\bar{f}(a,h)=2h_1^2$
$a=(0,0,0,\dots)$
f - не имеет экстремума в точке a
$\bar{f}$ - имеет минимум в точке a

□

Примечание. Если f как в теореме, $d^2f(a,h)$ - положительно определенный вырожденный $\Rightarrow$ a - не точка локального максимума

10 Диффеоморфизмы

10.1 Определение

Определение. Область - открытое связное множество

Определение. $F:\underbrace{O}_{\text{обл.}}\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм если

1. F — обратимо
2. F — дифференцируеое
3. F^{-1} — дифференцируемое

Примечание. $\mathrm{Id}=F\circ F^{-1}=F^{-1}\circ F$
$E=F'\cdot(F^{-1})'=(F^{-1})'\cdot F'$
$\forall x\det F'(x)\ne 0$

10.2 Лемма о почти локальной инъективности

Лемма 5. $F:O\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ - *дифф. в* $x_0\in O$, $\det F'(x_0)\ne 0$
Тогда $\exists C>0\ \exists\delta>0\quad\forall h\in B(0,\delta)$
$|F(x_0+h)-F(x_0)|>C|h|$

Доказательство. $|h| = |A^{-1} \cdot Ah| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ah|$
$c|h| \leq |Ah|$, где $c = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
$F'(x) = F$
Если F - линейное отображение $|F(x_0+h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \frac{h}{|(F'(x_0))^{-1}|}$
$|F(x_0+h) - F(x_0)| = \left|F'(x_0)h + \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б.м.}} \cdot |h|\right| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| = \frac{c}{2}|h|$ — работает в шаре ☐

10.3 Теорема о сохранении области

Теорема 10.1. $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - дифф
$\forall x \in O \quad \det F'(x) \neq 0$
Тогда $F(O)$ - открыто

Примечание. O - связно, F - непрырвно $\Rightarrow F(O)$ - связно

Доказательство. $x_0 \in O \quad y_0 := F(x_0) \in F(O)$
Проверим, что y_0 - внутр точка $F(O)$:
По лемме $\exists c, \delta : \ \forall h \in \overline{B(0,\delta)} \quad |F(x_0+h) - F(x_0)| > C|h|$
В частности $F(x_0+h) \neq F(x_0)$, при $|h| = \delta$

$$r = \frac{1}{2}\text{dist}(y_0, F(S(x_0,\delta))),\ \text{dist}(A,B) := \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} |a-b| \tag{12}$$

Если $y \in B(y_0, r)$, то

$$\text{dist}(y, F(S(x_0,\delta))) > r \tag{13}$$

Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$:
т.е. $\forall y \in B(y_0, r)\ \exists x \in B(x_0, \delta) \quad F(x) = y$
Рассмотрим функцию $g(x) = |F(x) - y|$, при $x \in \overline{B(x_0,\delta)}$

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r \tag{14}$$

при $x \in S(x_0, \delta) : \ g(x) > r^2$, по (13) $\Rightarrow \min g$ не лежит на границе шара $\Rightarrow$ он лежит внутри шара

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \cdots + (F_m(x) - y_m)^2 \tag{15}$$

$(\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0)$
$$\begin{cases} 2(F_1(x) - y) \cdot F'_{x_1}(x) + \cdots + 2(F_m(x) - y) \cdot F'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ 2(F_1(x) - y) \cdot F'_{x_m}(x) + \cdots + 2(F_m(x) - y) \cdot F'_{x_m} = 0 \end{cases}$$
$F'(x) \cdot 2(F(x) - y) = 0 \Rightarrow \forall x \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$ ☐

10.3.1 Следствие

Следствие 10.1.3. $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ l < m$, дифф в O, $F \in C^1(O)$
$\text{rg}F'(x) = l$, при всех $x \in O$
Тогда $F(O)$ - открытое

Доказательство. Фиксируем x_0. Пусть ранг $F'(x_0)$ реализуется на столбцах с 1 по l, т.е. $A := \det(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j=1\ldots l}(x_0) \neq 0$ - и для близких точек

$$\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} \overbrace{F(x)}^{\text{Исходные } l \text{ координат}} \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \cdot \det E_{m-l} \neq 0$ в окрестности точки x_0
$\tilde{F}|_{U(x_0)}$ - удовлетворяет теореме $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$ - открыто в $\mathbb{R}^m$
$F(U(x_0)) = \underbrace{\text{Pr}_{\mathbb{R}^l}}_{(x_1 \ldots x_m)\mapsto(x_1 \ldots x_l)} (\tilde{F}(U(x_0)))$ ☐

10.4 Теорема о гладкости обратного отображения

$C^r(O, \mathbb{R}^m)$

Теорема 10.2. $T \in \underbrace{C^r(O, \mathbb{R}^m)}_{O \subset \mathbb{R}^m}$
T - обратимо, $\det T'(x) \neq 0$, при всех $x \in O$
Тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. индукция по r, база $r = 1$
$f : X \to Y$ - непр $\Leftrightarrow \forall B$ – откр $\subset Y$ $f^{-1}(B)$ – откр
$S = T^{-1}$, S - непрерывна по т. о сохранении области
$T'(x_0) = A$ - невыроженый оператор
По лемме о почти локальной инъективноси

$$\exists C, \delta : \ \forall x \in B(x_0, \delta) \ |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \tag{16}$$

Опр диффернцируемости:

$$T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + o(x) \cdot |x - x_0| \tag{17}$$

$$T(x) = y \ T(x_0) = y_0 \ x = S(y) \ x_0 = S(y_0) \tag{18}$$

В терминах y, S:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y)) \cdot |S(y) - S(y_0)|}_{\text{Проверим, что это } o(|y - y_0|)} \tag{19}$$

Пусть y близко к y_0:

$$|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta \tag{20}$$

$$\left|A^{-1} \cdot o(S(y)) \cdot |S(y) - S(y_0)|\right| = |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1} \cdot \omega(S(y))| \leq$$
$$\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \leq \frac{1}{c}\|A^{-1}\| \cdot |y - y_0| \cdot |\omega(S(y))| \tag{21}$$

Гладкость S: $S'(y_0) = A^{-1}$

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1} \tag{22}$$

В (22) все шаги непрерывны $\Rightarrow S'$ — непрерывно
Переход $r \to r + 1$
$T \in C^{r+1} \quad T' : O \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \ T' \in C^r$
Проверим, что $S^{-1} \in C^{r+1}$:

$$y \underset{C^r}{\to} S(y) \underset{C^r}{\to} T'(x) \underset{C^\infty}{\to} (S^{-1})' \tag{23}$$

□

10.5 Теорема о локальной обратимости

Теорема 10.3. $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$ $x_0 \in O$ $\det T'(x_0) \neq 0$
Тогда $\exists U(x_0)$ $T|_U$ - диффеоморфизм

Доказательство. $F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + o(h)$
⋮
НЕТУ □

Теорема 10.4. *Формулировка в терминах системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, \ldots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x^0, y^0) - ее решение $f \in C^r$
$\det F'(x^0) \neq 0 \qquad F = (f_1 \ \ldots \ f_m)$
Тогда $\exists U(y^0)$ $\forall y \in U(y^0)$ система имеет решение и эти решения C^r-гладко зависят от y

10.6 Теорема о неявном отображении

Теорема 10.5. $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \underbrace{\mathbb{R}^n}_{(x_1 \dots y_n)} \quad F \in C^r$

$(a, b) \in O \;\; F(a, b) = 0$
Допустим $\det(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=1\dots n} \neq 0$
<u>Тогда</u>

1. $\exists P \subset \mathbb{R}^m \quad a \in P$ - откр.
   $\exists Q \subset \mathbb{R}^n \quad b \in Q$ - откр.
   $\exists! \Phi : P \to Q$ - C^r-гладкое
   такие что $\forall x \in P(a) \quad F(x, \Phi(x)) = 0$

2. $\Phi'(x) = -\Big(F'_y(x, \Phi(x))\Big)^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

Теорема 10.6. *В терминах систем уранений*
$f_i \in C^r$, (a, b) — решение системы:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Допустим $\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=1\dots n} \neq 0$
<u>Тогда</u> $\exists U(a)$ - откр., $\exists! \Phi$
такие что $\forall x \in U(a) \quad (x, \Phi(x))$ — также решение системы

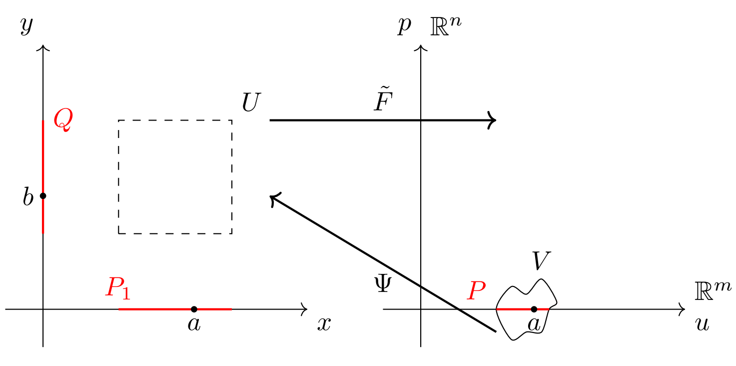
11 Диффеоморфизмы

11.1 Теорема о неявном отображении(продолжение)

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Доказательство.
Если 1) выполняется, то 2) очевидно: $F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x)) \cdot \Phi'(x) = 0$

1. $\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^{m+n} \quad (x, y) \mapsto (x, F(x, y)) \quad \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$
   $\tilde{F}' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'x & F'y \end{pmatrix}$, очевидно $\det \tilde{F} = 0$ в (a, b), значит $\exists U((a, b)) \; \tilde{F}|_{U((a,b))}$ - диффеоморфизм



   (a) $U = P_1 \times Q$ - можно так считать
   (b) $V = \tilde{F}(U)$
   (c) $\tilde{F}$ - диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \to U$
   (d) $\tilde{F}$ - не меняет первые m координат $\Psi(u, v) = (u, H(u, v))$, $H : V \to \mathbb{R}^m$

(e) Ось x и ось u идентичны $p =$ ось $u = \mathbb{R}^m \times \{0\}^n \cap \underbrace{V}_{\text{открыто в } \mathbb{R}^{m+n}} \Rightarrow p$ открыто в R^m

(f) $\Phi(x) = H(x, 0) \quad F(x, \Phi(x)) = 0$, при $x \in P$
$F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$

Единственность $x \in p$ $y \in u \quad F(x, y) = 0$
$(x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$

□

11.2 Определение

"поверхность- многообразие
$M \subset \mathbb{R}^m \quad k \in \{1, \dots, m\}$

Определение. M **- простое k-мерное многообразие в** $\mathbb{R}^m$ если оно гомеоморфно некоторому открытому $O \subset \mathbb{R}^k$
т.е. $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to M$ - непрерывное, обратимое, Φ^{-1} - непрерывное, Φ - параметризация многообразия M

11.3 Определение

Определение. $M \subset \mathbb{R}^m$ **- простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в** $\mathbb{R}^m$
$\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \quad \Phi(O) = M \quad \Phi : O \to M$ - гомеоморфизм
$\Phi \in C^r \quad \forall x \in O \quad \operatorname{rank} \Phi'(x) = k$ — максимально возможное значение

Пример.

1. Полусфера в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
   $\Phi : (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$
   $\Phi : B(0, R) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
   $\Phi \in C^\infty(B(0, R), \mathbb{R}^3)$
   $\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$, rank $\Phi' = 2$
   Аналогично график гладкой функции ($\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$) - простое двумерное многообразие

2. Цилиндр $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2,\ z \in (0, h)\}$ $\Phi : [0, 2\pi] \times (0, h) \to \mathbb{R}^3$
   $(\varphi, z) \mapsto (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$ - параметризация цилиндра без отрезка(боковой перпендикуляр)
   При $\varphi = 0,\ \varphi = 2\pi$ проблема
   $\nexists \Phi : \underbrace{O}_{\text{откр., односвязно}} \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$
   $(x, y) \mapsto (\frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2 - 1})$
   $(x, y) \in$ открытое кольцо $1 < x^2 + y^2 < (1 + h)^2$

3. Сфера в $\mathbb{R}^3$ без ...
   $\Phi : (0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to R^3 \quad R$ - радиус
   $(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\psi \\ R\sin\varphi\cos\psi \\ R\sin\psi \end{pmatrix}$ - сферические координаты в $\mathbb{R}^3$

11.4 Теорема

Теорема 11.1. $M \subset \mathbb{R}^m \quad 1 \le k < m \quad 1 \le r \le \infty \quad p \in M$
Тогда эквивалентны:

1. $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ - окрестность точки p в $\mathbb{R}^m$: $M \cap U$ - простое k-мерное многообразие класса C^r

2. $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ - окрестность точки p
   $f_1, f_2, \dots, f_{m-k} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$, все $f \in C^r$
   $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$, при этом $\operatorname{grad}(f_1(p)), \dots, \operatorname{grad}(f_{m-k}(p))$ - ЛНЗ

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Φ - параметризация : $\underbrace{O}_{(t_1,\dots,t_k)} \subset \mathbb{R}^k,\ \in C^r,\ p = \Phi(t^0)$

Φ' - матрица $m \times k \quad \text{rank } \Phi'(t^0) = k$
Пусть $\det(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_k})_{i,j=1\dots k} \neq 0$
$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$
$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ - проекция на первые k координат($(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$)
Тогда $(\underbrace{L \circ \Phi}_{(\varphi_1,\dots,\varphi_k)})'(t^0)$ - невырожденный оператор
$W(t^0)$ - окрестность точки t^0, $L \circ \Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$
$L \circ \Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k$ - диффеоморфизм
Множество $\Phi(W)$ - это график отображения $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$
Пусть $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1} : V \to W$
Берем $x' \in V$, тогда $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$
Множество $\Phi(W)$ - открытое в $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где $\tilde{U}$ - открытое множество в $\mathbb{R}^m$
Можно считать, что $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{R}^{m-k}$
Пусть $f_j : \tilde{U}\mathbb{R} \quad f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}$
Тогда $x \in M \cap \tilde{U} = \Phi(W) \Leftrightarrow \forall j :\ f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad } f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad } f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$2 \Rightarrow 1$ $F = (f_1, \dots, f_{m-k})$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ - матрица } m-k \times m$$

Градиенты ЛНЗ $\Rightarrow$ ранг матрицы равен $m-k$, он достигается на последних $m-k$ столбцах
$\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1\dots m-k} \neq 0$
$F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = 0, \quad x \in \tilde{U}$
По теореме о неявном отображении $\exists P$ - окрестность $(x_1, \dots, x_k)$ в $\mathbb{R}^m$ $\quad \exists Q$ - окр $(x_{k+1}, \dots, x_m)$ в $\mathbb{R}^{m-k}$
$\exists H : P \to Q \quad H \in C^r \quad F(x', H(x')) = 0, \quad x' \in P$
Тогда $\Phi : P \to \mathbb{R}^m \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, H_1(x'_1, \dots, x'_k), H_2, \dots, H_{m-k})$ - параметризация многобразия
Φ - гомеоморфизм P и $M \cap \tilde{U}$, Φ^{-1} - практически проекция

□

11.4.1 Следсвтие о двух параметризациях

Следствие 11.1.4. $M \subset \mathbb{R}^m$ - k-мерное C^k-гладкое многообразие $p \in M$
$\exists$ две парметризации $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_1(t^0) = 0$
$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_2(s^0) = 0$
Тогда $\exists$ диффеоморфизм $\Theta : O_1 \to O_2$, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

Доказательство. Чатсный случай. Пусть для Φ_1, Φ_2, rank $\Phi'_1(t^0)$, rank $\Phi'_2(s^0)$ достигаются на первых k столбцах
Тогда $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta\ -\ \text{искомый диффеоморфизм}}$
$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$
$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \quad \in C^r$
Невырожденность не доказана, поэтому то, что это диффеоморфизм не доказано □

12 Многообразия

Лемма 6. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \quad C^r$*-гладкое - парметризация многобразия* $U(p) \cap M$*, где* $p \in M$*,* M *- гладкое* k*-мерное многообразие,* $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть k-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Оно не зависит от Φ

Доказательство. $\operatorname{rank} \Phi'(t^0) = k$
Если взять другую параметризацию $\Phi_1 \quad \Phi = \Phi_1 \circ \Psi$
$\Phi' = \Phi_1' \cdot \Psi \quad \Psi'(t^0)$ - невырожденный оператор

$\square$

12.1 Касательные пространства

Определение. $\Phi'(t^0)$ — **касательное пространство к** M в точке p

Обозначение. T_pM

Пример. M - окружность в $\mathbb{R}^2$
$\Phi : t \mapsto (\cos t, \sin t)^T \quad t^0 = \frac{\pi}{4}$
$\Phi'(t^0) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$
$h \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} h$

Примечание. $v \in T_pM$. Тогда $\exists$ путь $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$, такой что $\gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = v$

Доказательство. $u := (\Phi'(t^0))^{-1}(v)$
$\tilde{\gamma}_v(s) := t^0 + s \cdot u, \quad s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$
$\gamma_v(s) := \Phi(\tilde{\gamma}_v(s))$
$\gamma_v'(0) = \Phi'(\underbrace{\tilde{\gamma}_v(0)}_{t^0}) \cdot u = v$ $\square$

Примечание. Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M,\ \gamma(0) = p$ - гладкий путь
<u>Тогда</u> $\gamma'(0) \in T_pM$

Доказательство. $\gamma(s) = (\Phi \circ \Psi \circ L)(\gamma(s))$
$\gamma' = \Phi' \cdot \Psi' \cdot L' \cdot \gamma'(s) \in T_pM$ $\square$

Примечание. Афинное подпространство $\{p + v,\ v \in T_pM\}$ - называется афинным касательным пространство
$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - гладкая, $y = f(x)$ - поверхность в $\mathbb{R}^{m+1} \quad (x, y)$
<u>Тогда</u> (афиинная) касательная плоскость в (a, b) задается уравнением $y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$

Доказательство. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1} \quad \Phi(x) = (x, f(x))$
$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$$
$\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \dots + \alpha_m f'_{x_m}$ $\square$

Примечание. $y = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$
$f(x) - y(x) = o(x - a)$

Примечание. $\Phi(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad \Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad \Phi(a) = 0$
Уравнение касательной плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$
γ - путь в $M \quad \Phi(\gamma(s)) = 0,\ \Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$
$\Phi'_{x_1} \cdot \gamma_1' + \dots + \Phi'_{x_m} \cdot \gamma_m' = 0$
Определение дифференцируемости Φ в точке a
$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1} \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m} \cdot (x_m - a_m) + o$

13 Относительный экстремум

Пример. Найти наибольшее/наименьшее значение выражения $f(x,y)=x+y$, при условии $x^2+y^2=1$
$f=\text{const}$ - линии уровня(прямые в данном случае)
В точке max линии уровня $f=\max$
$\Phi(x,y)=0 \quad \Phi'_x(x-a)+\Phi'_y(y-b)=0$
(Φ'_x,Φ'_y) - вектор нормали к касательной прямой

Определение. $f: O\subset\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R} \quad \Phi: O\to\mathbb{R}^n$
$M_\Phi\subset O := \{x|\Phi(x)=0\}$
$x_0\in M_\Phi$, т.е. $\Phi(x_0)=0$
x_0 - **точка локального относительного** $\max,\min,$ **строгого** $\max,$ **строгого** $\min$
Если $\exists U(x_0)\subset\mathbb{R}^{m+n}$
$\forall x\in U\cap M_\Phi$(т.е. $\Phi(x)=0$) $f(x_0)\geq f(x)$(для максимума)
т.е. x_0 - локальный экстремум $f|_{M_\Phi}$
Уравнения $\Phi(x)=0$ - уравнения связи

Как можно решать эту задачу
Если $\text{rank}\Phi'(x_0)=n$, выполнено условие теоремы о неявном отображении

Теорема 13.1 (Необходиое условие относительно экстремума)**.** $f: O\subset\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R} \quad \Phi: O\to\mathbb{R}^n$ - гладкое в O
$a\in O \quad \Phi(a)=0$ - точка относительного экстремума, $\text{rank}\Phi'(a)=n$
Тогда $\exists\lambda=(\lambda_1\ \dots\ \lambda_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} f'(a)-\lambda\cdot\Phi'(a)=0 \quad \in\mathbb{R}^{m+n} \\ \Phi(a)=0 \end{cases}$$

В координатах:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(a)-\lambda_1(\Phi_1)'_{x_1}-\lambda_2(\Phi_2)'_{x_1}-\dots-\lambda_m(\Phi_n)'_{x_1}=0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}}(a)-\lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}}-\lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}}-\dots-\lambda_m(\Phi_n)'_{x_{m+n}}=0 \\ \Phi_1(a)=0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a)=0 \end{cases}$$

Неизветсные: $a_1,\dots,a_{m+n} \quad \lambda_1,\dots,\lambda_n$

Доказательство. Пусть ранг реализуется на столбцах $x_{m+1},\dots,x_{m+n}$, обозначим $y_1=x_{m+1},\dots,y_m=x_{m+n}$
$(x_1\ \dots\ x_{m+n})\leftrightarrow(x,y) \quad a=(a_x,a_y)$
$\det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(a)=0$ По теореме о неявном отображении $\exists U(a_x)\ \exists V(a_y)$
$\exists\varphi: U(a_x)\to V(a_y):\ \Phi(x,\varphi(x))=0$
отображение $x\mapsto(x,\varphi(x))$ есть параметризация $M_\varphi\cap(U(a_x)\times V(a_y))$
a - точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ - точка локального экстремума функции $g(x)=f(x,\varphi(x))$
Необходимое условие экстремума:

$$(f'_x+f'_y\cdot\varphi'_x)(a_x)=0 \tag{24}$$

$\Phi(x,\varphi(x))=0$
$\Phi'_x+\Phi'_y\cdot\varphi'_x=0$ - в точке (a_x,a_y)
Тогда

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}^m \quad \lambda\cdot\Phi'_x+\lambda\cdot\Phi'_y\varphi'_x(a_x)=0 \tag{25}$$

(24) + (25): $f'_x+\lambda\Phi'_x+(f'_y+\lambda\Phi'_y)\varphi'_x=0$
Пусть $\lambda=-f'_y(\Phi'_y(a_x,a_y))^{-1}$
Тогда $f'_y+\lambda\Phi'_y=0$ и $f'_x+\lambda\Phi'_x=0$(из (24) + (25)) □

Определение. $G:=f-\lambda_1\Phi_1-\lambda_2\Phi_2-\dots-\lambda_n\Phi_n$ - Функция Лагранжа
$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ - множители Лагранжа

$$\begin{cases} G'=0 \\ \Phi=0 \end{cases} \text{ - то что в теореме}$$

Пример. $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ - симметричная вещественная матрица
$f(x) = \langle Ax, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^m$ - квадратичная форма
Найти $\max f(x),\ x \in S^{m-1}$ - существует по теореме Вейрештрасса

$$G(x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j - \lambda(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 1}_{\text{уравнение сферы}})$$

$\Phi' = (2x_1,\ 2x_2,\ \dots,\ 2x_m)^T$, на сфере $\mathrm{rank}\Phi' = 1$

$$G'_{x_k} = \sum_{j-1}^{m} a_{kj}x_j - 2\lambda x_k \quad k = 1\dots m, \text{ т.е. } Ax = \lambda x$$

λ - собственное число A, x - собственный вектор
$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda |x|^2 = \lambda$

Теорема 13.2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.
Тогда $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} | \lambda -$ собственное число оператора $A^TA\}$
$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^Ty\rangle$
$\langle A^TAx, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$

Доказательство. $x \in S^{m-1}$

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle \underbrace{A^TA}_{\text{симм.}} x, x\rangle \qquad (A^TA)^T = A^TA$$

$\max |Ax|^2 = \max \langle A^TAx, x\rangle = \lambda_{\max}$ □

14 Функциональные последовательности и ряды

14.1 Равномерная сходимость последовательности функций

Определение. Последовательность функций
$\mathbb{N} \to \mathcal{F} \quad n \mapsto f_n$

$$\mathcal{F} : \{f | \underbrace{X}_{\text{м.п.}} \to \mathbb{R}\}$$

Пусть $E \subset X$

Определение. Последовательность f_n **сходится поточечно к** f **на множестве** $E, \forall x \in E\ f_n(x) \to f(x)$
$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Пример. $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$
Тогда $E = [0, 1] \quad f_n(x) \to 0$
Если $E \cap (1, +\infty) \neq \varnothing$ то нет поточечной сходимости ни к какой функции

Пример. $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} \quad x \in [0, 1] \quad 0 < \alpha < 2$
Ясно, что $\forall \alpha \quad f_n(x) \to \not\rightrightarrows$ поточечно на $[0, 1]$

$$\max_{x\in[0,1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} = n^\alpha \cdot \max \frac{x}{1+n^2x^2} = n^\alpha \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} n^\alpha - 1$$

Определение. f_n **равномерно сходится к** f **на** $E \subset X$ если $M_n := \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ 0 \leq M_n < \varepsilon$, т.е. $\forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Обозначение. $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Примечание. $x_0 \in E\ f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ Тогда $f_n(x_0) \to f(x_0)$
равномерная сходимость $\Rightarrow$ поточечная сходимость к тому же пределу

Примечание. $E_0 \subset E \quad f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{E_0}{\rightrightarrows} f$

Пример. $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} \quad E = [\frac{1}{10}, 1]$
Тогда $f_n \rightrightarrows \not\rightarrow$

$$f = 0 \quad \sup_{x\in[\frac{1}{10},1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} \leq \frac{n^\alpha}{1 + \frac{1}{100}n^2} \to 0$$

Примечание. $\mathcal{F} = \{f | X \to \mathbb{R} -$ ограничены$\}$
Тогда $\rho_X(f_1, f_2) := \sup\limits_{x\in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ - метрика в $\mathcal{F}$(Чебышевское растояние)

1. $\rho(f_1, f_2) \geq 0$
2. $\rho(f_1, f_2) = 0 \Leftrightarrow f_1 = f_2$
3. $\rho(f_1, f_2) = \rho(f_2, f_1)$
4. $\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_3, f_2)$

   Доказательство. Берем $\varepsilon > 0$ $\exists x : \rho(f_1, f_2) - \varepsilon = \sup|f_1 - f_2| - \varepsilon < |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \leq \rho(f_1, f_2) + \rho(f_3, f_2)$ □

Примечание. $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \quad f_n \to f$ по метрике ρ_E

Примечание. $E = E_1 \cap E_2 \quad f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} f$ и $f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Доказательство. $M_n^{(1)} \to 0 \quad M_n^{(2)} \to 0$
$\max(M_n^{(1)}, M_n^{(2)}) \to 0$ □

15 Относительный экстремум

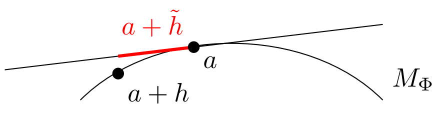
$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to R$
$\Phi : E \to \mathbb{R}^n \quad \Phi \in C^1$
$a \in e \quad \Phi(a) = 0$
$\operatorname{rank}\Phi'(a) = n \quad \det(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j})_{i,j=1\ldots n} \neq 0$
a - относительный экстремум
Тогда $\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda$
$f'(a) - \Phi'(a) = 0$

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda\Phi\text{'(a)} = 0 \\ \Phi\text{(a)} = 0 \end{cases}$$

Теорема 15.1 (О достаточном условии экстремума)**.** Пусть выполнено условие для точки a
$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$(n уранений с $m + n$ неизвестными)
То можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$(решим линейную систему)
Рассмторим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$, где G - функция Лагранжа
Q - это сужение d^2G на касательное пространство T_aM_Φ
Тогда:

1. Q - положительно опр. $\Rightarrow$ a - точка минимума
2. Q - отрицательно опр. $\Rightarrow$ a - точка максимума
3. Q - неопределена $\Rightarrow$ нет экстремума
4. $Q \geq 0$ вырождена $\Rightarrow$ информации недостаточно

Доказательство.



$$\underbrace{f(a+h)}_{a+h \in M_\Phi} - f(a) = G(a+h) - G(a) = \underbrace{dG(a,h)}_{0} + \frac{1}{2}d^2G(a,h) + o(|h|^2) = \frac{1}{2}d^2G(a,\tilde{h}) + o(|\tilde{h}|^2) > 0$$

Очень неточное доказательство □

Пример. $f = x^2z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z$
$\Phi(x, y, z) = xyz - 6$
$a = (1, 2, 3) \quad \lambda = 1$
Найдем тип экстремума

1. a - подозрительная точка ?
   $G = x^2z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z - (xyz - 6)$
   $G'_x = 0 \quad 2xz^2 - 12 - yz = 0$
   $G'_y = 0 \quad 3y^2 - 9 - xz = 0$
   $G'_z = 0 \quad 2x^2z - 4 - xy = 0$

2. $d^2G = 2z^2dx^2 + 2x^2dz^2 + Gydy^2 + 2(4xz - y)dxdz - 2xdydz - 2zdxdy$
   Подставим a $d^2G(a) = 18dx^2 + 2dz^2 + 12dy^2 + 20dxdz - 2dydz - 6dxdy$
   Нужно найти знак выражения $d^2G(a)$, если (dx, dy, dz) удовлетворяет соотношению $d\Phi = 0$
   $yzdx + xzdy + xydz = 0$ в точке $a \quad Gdx + 3dy + 2dz = 0$
   $dz = -3dx - \frac{3}{2}dy$
   $d^2G|_{d\Phi=0} = 18dx^2 + 2(3dx + \frac{3}{2}dy)^2 + 12dy^2 - 10dx(6dx + 3dy) + dy(6dx + 3dy) - 6dxdy =$
   $= -24dx^2 + 19.5dy^2 + \ldots dxdy$ - Нет экстремума, т.к. форма не определена(при $dx = 1,\ dy = 0 \quad d^2G < 0$, а при $dx = 0,\ dy = 1 \quad d^2G > 0$)

15.1 Вариационные исчисления(Оффтоп)

$f \in C^1([a,b]) \quad F(f) = \displaystyle\int_a^b xf(x)dx + f(a) \to \max$

16 Функциональные последовательности и ряды

$f_n \to f$ - поточечно на $E \quad f, f_n : E \subset X \to R$
$f_n \rightrightarrows f$ на E
$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$M_n \sup\limits_{x\in E} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
$\rho(f_n, f) = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)$ - метрика в $\mathcal{F} = \{f | E \to \mathbb{R},\ f - \text{огр.}\}$, в $C([a,b])$ - непрерывные функции на $[a,b]$

Теорема 16.1 (Стокса–Зайдля)**.** $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ (X - метр. пр-во)
$x_0 \in X \quad f_n$ - непрерывно в x_0
$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$
Тогда f - непрерывно в x_0

Доказательство. $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$ (неравенство треугольника) - верно $\forall x\ \forall n$
$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \sup\limits_X |f_n - f| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
Берем $\forall \varepsilon > 0$, возьмем любой n, для которого выполнено предыдущее утверждение, тогда крайние модули из неравенства $< \frac{\varepsilon}{3}$
Теперь для этого n подберем $U(x_0) :\ \forall x \in U(x_0) \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ □

Примечание. То же верно если $f_n, f : X \to Y$, где Y - метрическое пространство(в частности $\mathbb{R}^m$)

Примечание. То же верно, если X - топологическое пространство

Следствие 16.1.5. $f_n(X),\ f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \quad$ Тогда $f \in C(X)$

Примечание. В теореме достаточно требовать $f_n \rightrightarrows f$ на некоторой окрестности $W(x_0)$
В следствии достаточно требовать локальную равномерную сходимость
$\forall x \in X\ \exists W(x)\ f_n \rightrightarrows f$ на $W(x)$

Пример. $f_n(x) = x^n \quad X = (0,1) \quad f_n(x) \to 0$ поточечно на X
$f_n \not\rightrightarrows 0$
Но есть локальная равномерная сходимость $\quad \forall x \in (0,1) \quad W(x) = (\alpha, \beta)$, где $0 < \alpha < x < \beta < 1$
Тогда $f_n \rightrightarrows g$ на (α, β) : $\sup\limits_{x\in(\alpha,\beta)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in(\alpha,\beta)} x^n = \beta^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ и предельная функция непрерывна

Теорема 16.2. X - компактное $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x\in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$
Тогда пространство $C(X)$ - полное метрическое пространство

Примечание. $x_n \to a$ в $(X,\ \rho) \Rightarrow x_n$ - фунд. $\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n,m > M \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$
X - полное, если каждая фундаментальная последовательность сходится

Доказательство. f_n - фунд. в $C(X) \Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещ. последовательность $(f_n(x_0))$ - фундаментальна $\Rightarrow$
f_n - фунд. $\Rightarrow$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n,m > N\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{26}$$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) =: f(x_0) \quad f$ - поточечный предел f_n
Проверим: $f_n \rightrightarrows f,\ f \in C(X)$
В (26) перейдем к пределу при $m \to +\infty$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, т.е. $f_n \rightrightarrows f$ на X и тогда $f \in C(X)$ □

Следствие 16.2.6. $(\mathcal{F}, \rho)$ - полное

Примечание. (x_n) - последовательность в полном метричеком пространстве X, x_n - сходится $\Leftrightarrow x_n$ - фундаментальна
$f : X \to Y$, Y - полно, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \Leftrightarrow$ Критерий Больциано-Коши, т.е.
$\forall\varepsilon > 0\ \exists U(a)\ \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(a) \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

Примечание. (Критерий Коши для равномерной сходимости)
$B \subset C(X) \quad f_n \to f$, т.е. $f_n \rightrightarrows f$ на $X \Leftrightarrow$ фундаментальности:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n,m > N\ \forall x \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (A)
$\sup\limits_{x\in X} |f_n - f| < \varepsilon$
(B) $\Rightarrow$ (A), (A) $\Rightarrow \sup\limits_{x\in X} |f_n - f| \le \varepsilon$
(A) $\Leftrightarrow$ (B) с оговоркой

16.1 Предельный переход под знаком интеграла

Не теорема $f_n \to f \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Пример. $[a,b] = [0,1] \quad f_n(x) = nx^{n-1}(1-x^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \equiv 0$
$$\int_a^B f_n = \int_0^1 nx^{n-1}(1-x^n)dx = \int_0^1 (1-y)dy = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 f(x) = 0$$

Теорема 2. $f_n, f \in C([a,b]) \quad f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$
<u>Тогда</u> $\displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Доказательство. $\displaystyle\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \sup_{[a,b]} |f_n - f| \cdot (b-a) = \rho(f_n, f) \cdot (b-a) \to 0$ □

Следствие 16.2.7 (Правило Лейбница). $f : \underbrace{[a,b]}_{x} \times \underbrace{[c,d]}_{y} \to \mathbb{R} \quad f, f'_y$ - непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$

$\Phi(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx \quad y \in [c,d]$

<u>Тогда</u> Φ - дифф. на $[c,d]$ и $\Phi'(y) = \displaystyle\int_a^b f'_y(x,y)dx$

Доказательство. $\frac{\Phi(y+\frac{1}{n})-\Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x,y+\frac{1}{n}) - f(x,y)}{\frac{1}{n}}dx \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \int_a^b \underbrace{f'_y(x, y + \frac{\Theta}{n})}_{g_n(x,y)} dx$

Утв. $f_n(x,y) \underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} f'_y(x,y)$ на $x \in [a,b]$, а y считаем фиксированным — по теореме Кантора о равномерной непрерывности
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \frac{1}{N} < \delta(\varepsilon)$— из теоремы Кантора $\forall n > N\ \forall x \in [a,b]\ |f'_t(x, y + \frac{\delta}{n)} - f'_y(x,y)| < \varepsilon$

Таким образом $\frac{\Phi(y+\frac{1}{n})-\Phi(y)}{\frac{1}{n}} \to \displaystyle\int_a^b f'_y(x,y)dx = \Phi'(y)$ □

Теорема 3 (О предельном переходе под знаком производной)**.** $f_n \in C^1(\langle a,b\rangle), \quad f_n \to f$ поточечно, $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a,b\rangle$
Тогда $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ и $f' \equiv \varphi$ на $\langle a,b\rangle$

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & f \\ D\downarrow & & \downarrow \\ f_n' & \rightrightarrows & \varphi \end{array}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n'(x)) = (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))'$$

Доказательство. $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle \quad f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $[a,b] \overset{\text{T.2}}{\Longrightarrow} \int_{x_0}^{x_1} f_n' \to \int_{x_0}^{x_1} \varphi$, т.е.

$$\begin{cases} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f_n(x_1) - f_n(x_0) \to f(x_1) - f(x_0) \end{cases}$$

Итак $\forall x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle \quad f(x_1) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi$

$$\underbrace{f_n'}_{\text{непр}} \varphi \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непрерывная} \end{array}\right\} \Rightarrow f' = \varphi$$

□

16.2 Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение. $u_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{R}^m) \quad \sum u_n(x)$ **сходится поточечно(к сумме** $S(x)$**) на** X
$S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \quad S_N(x) \to S(x)$ поточечно на X

Определение. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $E \subset X: \quad S_N \underset{N\to+\infty}{\rightrightarrows} S$ на E

Примечание. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\Rightarrow \sum u_n(x)$ - поточечно сходится к той же сумме
$\sup_{x\in E} |S_N - S| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \forall x_0 \in E: \ |S_N(x_0) - S(x_0)| \le \sup_{x\in E} |S_N - S| \to 0$

Примечание. Остаток ряда: $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \quad S(x) = S_N(x) + R_N(x)$
Ряд равномерно сходится на $E \Leftrightarrow R_N \rightrightarrows 0$ на E
$\sup_{x\in E} |S - S_N| = \sup_{x\in E} R_N$
Примечание. (Необходимое условие равномерной сходимости)
$\sum u_n(x)$ - равномерно сходится на $E \Rightarrow u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$

Доказательство. $u_n = R_{n-1} - R_n \rightrightarrows 0$ □

Пример. $u_n(x) = \frac{1}{n} \quad u_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \sum \frac{1}{n}$ - расходится

17 Функциональные последовательности и ряды

$u_n : X \to Y$, где Y - нормированное пространство
$S_n \rightrightarrows S$ на E $M_n := \sup_{x\in E} |S_n(x) - S| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Определение. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \ \forall x \in E \quad |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$

Примечание. Отрицание критерия Больциано-Коши $\exists > 0 \ \forall N \ n > N \ \exists p \in \mathbb{N} \ \exists x \in E \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \ge \varepsilon$

Пример. $\sum x^n \quad x \in (0,1)$ нет равномерной сходимотсти
$\exists \varepsilon = \frac{1}{10}\ \forall N\ \exists n > N -$ любое $> 100\ \exists p = 1\ \exists x = 1 - \frac{1}{n+1} \quad |u_{n+1}(x)| \geq \varepsilon$, т.е. $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} = \frac{1}{e} > \frac{1}{10}$

Теорема 17.1 (признак Вейерштрасса). $\sum u_n(x) \quad x \in X$

Пусть $\exists C_n$ - вещественная последовательность, $\begin{cases} u_n(x) \leq C_n \\ \sum C_n - \text{сходится} \end{cases}$

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq C_{n+1} + \dots + C_{n+p}$ - Тривиально
$\sum C_n$ - сходится $\Rightarrow$ удовлетворяет критерию Больциано-Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad C_{n+1} + \dots + C_{n+p} < \varepsilon$
Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больциано-Коши равномерной сходимости □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$C_n := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| \dfrac{x}{1+n^2x^2} \right| = \dfrac{1}{2n}$, ряд $\sum \frac{1}{2n}$ расходится, значит признак Вейерштрасса не применим

Пример. $\sum \frac{x}{1+x^2n^2} \quad x \in [\frac{1}{2020}, 2020]$

$C_n := \sup \dfrac{x}{1+x^2n^2} \leq \dfrac{2020}{1 + \frac{1}{2020} \cdot n^2} \underset{n \to +\infty}{\simeq} \dfrac{c}{n^2}$, $\sum C_n$ - сходится $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость

17.1 Приложение равномерной сходимости для рядов

Теорема 1' (Стокса, Зайдля для рядов). $u_n : \underbrace{X}_{\text{метр. пр.}} \to \underbrace{Y}_{\text{норм. пр.}} \quad x_0 \in X$ u_n - непрерывно в x_0

Пусть $\sum u_n(x)$ - равномерно сходится на X, $S(x) := \sum u_n(x)$
Тогда $S(x)$ - непрерывна в x_0

Доказательство. по теореме 1(Стокса, Зайдля). $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_n(x)$ непрерывна в $x_0 \Rightarrow S(x)$ непрывна в x_0 □

Примечание. Достаточно, чтобы была равномерная сходимость $\sum u_n$ на $U(x_0)$

Примечание. $u_n \in C(x)$, $\sum u_n$ - равномерно сходится на $X \Rightarrow S(x) \in C(X)$

Теорема 2' (о почленном интегрировании ряда). $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, непрерывные на $[a,b]$

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ - равномерно сходится на $[a,b]$, $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда $\displaystyle\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)$

$S(x)$ - непрерывно на $[a,b]$ по теореме 1' $\Rightarrow$ можно интегрировать

Доказательство. По теореме 2 $S_n \rightrightarrows S$ на $[a,b]$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k = \int_a^b S_n dx \to \int_a^b S(x)dx$

□

Пример. $\sum (-1)^n x^n$ - равномерно сходится при $|x| \leq q < 1$ по признаку Вейершрасса: $|(-1)^n x^n| \leq q^n \quad \sum q^n$ - сходится
Проинтегрируем от 0 до $t:\ |t| \leq q$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ - сумма прогресии

$\displaystyle\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{t^k}{k}$ — верно при $t \in [-q, q]$ для любого $q : 0 < q < 1$, т.е верно при $t \in (-1, 1)$, при $t = 1 \quad \sum -\frac{1}{k}$ - расходится

$t \to 1$ ряд $\sum (-1)^k \frac{t^k}{k}$ равномерно сходится на $[0,1]$, слагаемые непрерывны в $t_0 = 1 \xRightarrow{\text{т. 1}}$ Сумма ряда непрерывна в точке $t_0 = 1$
по "секретному"приложению признака Лейбница

$\forall t\ \frac{t^k}{k}$ - монотонна по k $\displaystyle|\sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}| \leq |\frac{t^N}{N}| \leq \frac{1}{N} \to 0$ — это и есть утверждение о равномерной сходимости ряда

18 Криволинейный интеграл

18.1 Интеграл векторного поля по кусочно гладкому пути

Определение. Путь — $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - непрерывно
$\gamma(a)$ - начало пути, $\gamma(b)$ - конец пути
$\gamma([a,b])$ - носитель пути
Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ — замкнутый путь(петля)
Если γ - гладкий или кусочно гладкий, $\gamma'(t)$ - вектор скорости
$\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t),\ \dots,\ \gamma_m(t)) \quad \gamma' = (\gamma_1',\ \dots,\ \gamma_m')$
Длина гладкого пути $l(\gamma) = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|dt$

Определение. Путь γ - **кусочно гладкий**
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
γ - дифф. на (t_k, t_{k+1}) $\forall k,\ 0 \le k \le n-1$
$\exists$ односторонние производные в точках t_i
можно считать $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ - гладкое отображение

Определение. Векторное поле: $V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - непрерывное
$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$ - вектор приложенный к точке x

Определение (Интеграл векторного поля по кусочно гладкому пути)**.**

$$I(V,\gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt = \int_a^b V_1 d\gamma_1 + V_2 d\gamma_2 + \dots + V_m d\gamma_m$$

Используется обозначение $I(V,\gamma) = \displaystyle\int_\gamma V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m$ — аналогично последнему выражению в равенстве

Второе выражение в равенстве запишем так: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \langle V(\gamma(\xi_k)), \gamma'(\xi_k)\rangle \cdot (t_k - t_{k-1})$, где ξ_k - точки оснащения

$$= \sum \underbrace{\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|}\rangle}_{\text{проекция силы на касательное направление}} \cdot \underbrace{|\gamma'(\xi_k)| \cdot (t_k - t_{k-1})}_{\text{пройденный путь}}$$

Теорема 18.1.

1. Линейность интгрела по полю:
   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall U, V$ - векторных полей $I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U,\gamma) + \beta I(V,\gamma)$

   Доказательство. Из определения(первый двух выражений в равенстве) □

2. Аддитивность интеграла при дроблении пути:
   $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad c \in [a,b] \quad \gamma^1 = \gamma|_{[a,c]}\ \gamma^2 = \gamma|_{[c,b]}$
   <u>Тогда</u> $I(V,\gamma) = I(V,\gamma^1) + I(V,\gamma^2)$

   Доказательство. По аддитивности интеграла(первый двух выражений в равенстве) □

3. Замена параметра
   $\varphi : [p,q] \to [a,b]\ \varphi \in C^1\ \varphi(p) = a,\ \varphi(q) = b \quad \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m\ \tilde\gamma = \gamma \circ \varphi$
   <u>Тогда</u> $I(V,\gamma) = I(V,\tilde\gamma)$ - это замена переменных в интеграле

   Доказательство. $I(V,\tilde\gamma) =$
   $$= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(S))), \underbrace{\tilde\gamma'(S)}_{\gamma'(\varphi(S))\cdot\varphi'(S)} \rangle ds = \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(S))), \gamma'(\varphi(S))\rangle \cdot \varphi'(s) ds \underset{t:=\varphi(s)}{=} \underbrace{\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt}_{I(V,\gamma)}$$
   □

   Примечание. По теореме о двух параметризациях
   $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - параметризация гладкого одномерного многообразия(простое)
   $\tilde{}: [p,q] \to \mathbb{R}^m$ диффеоморфизм $\varphi : [p,q] \to [a,b] \quad \tilde\gamma = \gamma \circ \varphi$

4. Объединение носителей
$\gamma^1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^2 : [c,d] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^1(b) = \gamma^2(c)$
Зададим новый путь $\gamma = \gamma^2\gamma^1 : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma(t) = \left[\begin{array}{ll} \gamma^1(t) & , t \in [a,b] \\ \gamma^2(t+c-b) & , t \in [b, b+d-c] \end{array} \right.$
В точке b излом. Если $\gamma^1,\ \gamma^2$ - кусочно гладкие, то γ - кусочно гладкий
<u>Тогда</u> $I(V, \gamma^2\gamma^1) = I(V,\gamma^1) + I(V,\gamma^2)$

Доказательство. $I(V,\gamma) = \displaystyle\int_a^{b+d-c} \dots = \int_a^b \dots + \underbrace{\int_b^{b+d-c} \dots}_{\text{замена } \tau = t-b+c} = I(V,\gamma^1) + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), (\gamma^2)'(\tau)\rangle d\tau = I(V,\gamma^1$
При замене: $\gamma(t) = \gamma^2(t+c-b) = \gamma^2(\tau) \quad \gamma'(t) = (\gamma^2)'(t+c-b) = (\gamma^2)'(\tau)$ □

5. Противоположный путь
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ - противоположный путь
<u>Тогда</u> $I(V,\gamma) = -I(V,\gamma^-)$

Доказательство. $I(V,\gamma^-) =$
$= \displaystyle\int_a^b \langle V(\gamma(a+b-\tau)), -\gamma'(a+b-\tau)\rangle d\tau \underset{t=a+b-\tau}{=} = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t)\rangle \cdot (-dt) = -I(V,\gamma)$
При замене $(\gamma^-)'(\tau) = -\gamma(a+b-\tau)$ □

6. Оценка интеграла векторного поля по пути
$|I(V,\gamma)| \leq \max\limits_{x\in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$, где $L = \gamma([a,b])$ - носитель пути
$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle| dt \leq \int_a^b |V(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{x\in L} |V(x)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$
Можем писать max, т.к. V - непрерывна, L - компакт(путь непрерывен, образ замкнутого отрезка под действием непрерывного отображения(носитель) компакт)

18.2 Потенциальное поле

Определение. $V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - в поле
V - **потенциально**, если оно имеет потенциал
$\exists \underbrace{f}_{\text{потенциал}} \in C^1(O) : \quad \text{grad} f = V$ в области O

Теорема 18.2. (обобщеная формула Ньютона-Лейбница)
$V : O \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^m$, потенциально, f — потенциал V
$\gamma : [a,b] \to O \quad \gamma(a) = A,\ \gamma(b) = B$
<u>Тогда</u> $I(V,\gamma) = \displaystyle\int_\gamma \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$

Доказательство.

1. γ - гладкий $\Phi(t) = f(\gamma(t)) \quad \Phi' = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t)) \cdot \gamma_m'(t)$
Учитывая что $\text{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m}) = V$
$$\int_\gamma \sum u_k dx_k = \int_a^b \Phi'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) = f(b) - f(a)$$

2. γ - кусочно гладкий $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = v \quad \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$
$\displaystyle\int_\gamma \sum u_n dx_k = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t^k} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \underset{\text{п. 1}}{=} \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) = f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) =$
$f(B) - f(A)$
Последняя сумма является телескопической

□

19 Потенциальные векторные поля

$\displaystyle\int_\gamma \sum V_i dx_i = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

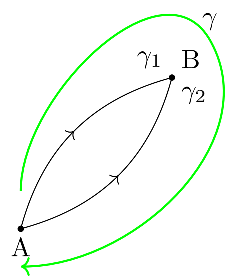
Определение. Интеграл V не зависит от пути в области O:
$\forall A, B \in O\ \forall \gamma^1, \gamma^2$ - кусочно гладкие пути из A в B
$\displaystyle\int_{\gamma^1} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma^2} \sum V_i dx_i$

Теорема 19.1 (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)**.** V - векторное поле в области O. Тогда эквивалентны:

1. V - потенциально
2. $\displaystyle\int_\gamma \sum V_i dx_i$ не зависит от пути в области O
3. $\forall \gamma$ - кусочно гладкого, замкнутого в O $\displaystyle\int_\gamma \sum V_i dx_i = 0$

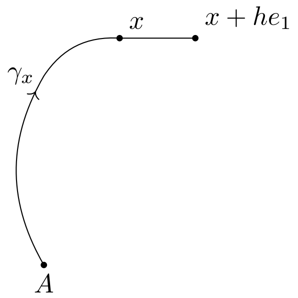
Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$: обобщенная формула Ньютона-Лейбница
- $2 \Rightarrow 3$: γ - петля: $[a,b] \to O \quad \gamma(a) = \gamma(b) = A$
  Рассмторим простой птуь $\tilde{\gamma} : [a,b] \to O \quad \gamma(t) = A$
  по свойству 2 $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} = 0 (= \int \langle V, \underbrace{\gamma'}_{0} \rangle dt)$
- $3 \Rightarrow 2$: γ_1, γ_2 - пути с общим началом и концом



  $\gamma := \gamma_2^- \gamma_1$ - кусочно гладкая петля $0 = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$

- $2 \Rightarrow 1$: Фиксируем $A \in O$
  $\forall x \in O$ выберем кусочно гладкий путь γ_x, который ведет из A в x
  $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i$ - проверим что это потенциал
  Достаточно проверить $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в O
  Фиксируем $x \in O$



$\gamma_0(t) = x + the_1 \quad , t \in [0,1]$
$\gamma_0'(t) = (h, 0, \dots, 0) = he_1$
$f(x+he_1) - f(x) = \int_{\gamma_{x+he_1}} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_0} = \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) \cdot hdt =$
$= h \cdot V_1(x_1 + ch, x_2, \dots, x_n)$
Таким образом $\frac{f(x+he_1)-f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} V_1(x)$

$\square$

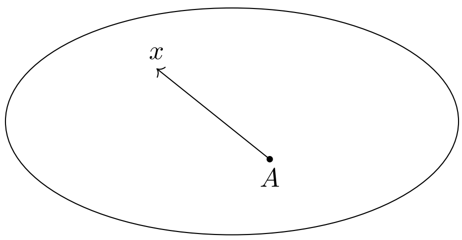
19.1 Локально потенциальные векторные поля

Лемма 7. *V - гладкое, потенциальное в O*
Тогда $\forall x \in O \; \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}$

Доказательство. $\dots = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$ $\square$

Теорема 19.2 (лемма Пуанкаре). $O \in \mathbb{R}^m$ - выпуклая область $V : O \to \mathbb{R}^m$ - векторное поле
V - удовлетворяет условиям леммы(V - гладкое)
Тогда V - потенциальное

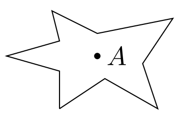
Доказательство. Фиксируем $A \in O$
$\forall x \in O \; \gamma_x(t) := A + t \cdot (x - a) \quad , t \in [0,1]$



$\gamma_x'(t) = x - A$ - постоянный вектор
$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x-A)) \cdot (x_k - A_k) dt$
Проверим, что f - потенциал
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \langle \text{правило Лейбница} \rangle = \int_0^1 V_j(A + t(x-A)) + \sum_{k=1}^m \underbrace{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}}_{\frac{\partial V_j}{\partial x_k}}(\dots) \cdot t(x_k - A_k) dt =$

$= \int_0^1 (tV_j(A + t(x-A))_t' dt) = t \cdot V_j(A + t(x-A)) \Big|_{t=0}^{t=1} = V_j(x)$ $\square$

Примечание. Это же доказательство проходит для "звездных"областей



Существует точка из которой видны все остальные

Определение. V - **локально потенциальное векторное поле в** O, если $\forall x \in O \; \exists U(x) \; V$ потенциально в $U(x)$

Следствие 19.2.8 (лемма Пуанкаре). $O \subset \mathbb{R}^m$ - любая область
$V \in C^1(O)$, удовлетворяет Лемме 1
Тогда V - локально потенциально

20 Равномерная сходимость функциональных рядов(продолжение)

Теорема 3' (о дифференцировании ряда по параметру). $u_n \in C^1(\langle a, b\rangle)$
Путсть:

1. $\sum u_n(x) = S(x)$ - поточенчная сходимость
2. $\sum u_n'(x) = \varphi(x)$ - равномерно сходится на $\langle a, b\rangle$

<u>Тогда</u>:

1. $S(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$
2. $S' = \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

т.е $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

Доказательство.

- $f_n \to f$ — поточечно
- $f_n' \rightrightarrows f$

Тогда $f' = \varphi,\ f \in C^1$

- $S_n \to S$ — поточечно
- $S_n' \rightrightarrows \varphi$

□

Пример. Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \cdot \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + \frac{x}{k})e^{\frac{x}{k}}$$

, где γ - постоянная Эйлера

$$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{l=1}^{+}(\ln(1 + \frac{x}{k}) - \frac{x}{k})$$

фиксируем x_0 $u_k'(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$
Пусть $M > x_0$ Тогда

$$\left|\frac{-x}{(x+k)k}\right| \leq \frac{M}{k^2}, \text{ при } x \in (0, M)$$

$\sum \frac{M}{k^2}$ - сходится
Тогда $\sum \frac{-x}{(x+k)k}$ равномерно сходится на $(0, M)$
Значит $\ln\Gamma(x) \in C^1(0, M) \Rightarrow \Gamma \in C^1(0, M)$

Примечание. Фактически теорема устанавливает, что $\sum u_n'(x)$ - непрерывна

Примечание (к примеру).

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k+1}^{+\infty}\frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x) \cdot (\frac{1}{x} + \gamma - \sum \dots) \tag{27}$$

$$\Gamma''(x) = \dots$$

Получается, что $\Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

Теорема 4' (о почленном переходе в суммах). $u_n : E \subset \underset{\text{м.п.}}{X} \to \mathbb{R},\quad x_0$ - предельная точка E
Пусть:

1. $\forall n\ \exists$ конечный $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$
2. $\sum u_n(x)$ — равномерно сходится на E

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lim_{x\to x_0} u_n(x)) \tag{28}$$

Доказательство.

1. $\sum a_n$ - сходится
   x_n - фундаментальная
   $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall m, n > N \quad |x_m - x_m| < \varepsilon$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x), \quad S_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{29}$$

   Проверим, что S_n^a - фундаментальная

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \le |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a| \tag{30}$$

   Из равномерной сходимости $\sum u_n(x) : \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$
   Это критерий Больциано-Коши для равномерной сходимости
   Зададим ε, по N выберем $n,\ n+p$ и возьмем x близко к x_0:

$$|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{31}$$

$$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{32}$$

   Тогда выполнено (4), т.е. $|S_{n+p}^a - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
   Это фундаментальность последовательности $S_n^a \Rightarrow \sum a_n$ - сходится

2. $\sum a_n = \lim_{x\to x_0} \sum u_n(x)$
   Сводим к теореме Стокса-Зайдля:

$$\tilde{u}_n(x) = \left[\begin{array}{ll} u_n(x) & x \in E\backslash\{x_0\} \\ a_n & x = x_0 \end{array}\right. \tag{33}$$

   — задана на $E \cup \{x_0\}$, непрерывна в x_0 (переход (8) $\to$ (9))
   $\sum \tilde{u_n}(x)$ - равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в x_0

$$\lim_{x\to x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \tag{34}$$

$$= \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n \tag{35}$$

$$\sup_x \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x)\right| \le \sup_{x\in E\backslash\{x_0\}} \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right| \tag{36}$$

   В (10) в правой части оба слагаемых $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ отсюда равномерная сходимость ряда $\sum \tilde{u}_n(x)$

□

Примечание. Теорема 4' верна для случая, когда $u_n : E \subset X \to Y$, где Y - полное нормированное пространство

Теорема 4 (о перестановке двух предельных переходов)**.** $f_n : E \subset X \to \mathbb{R},\ x_0$ - предельная точка E
Пусть:

1. $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} S(x)$ на E
2. $f_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, rightrightarrows, "n\to+\infty"] \arrow[d, "x\to x_0"'] & S(x) \arrow[d, dashed, "x\to x_0"] \\
A_n \arrow[r, dashed, "n\to+\infty"'] & A
\end{tikzcd}$$

Доказательство. $u_1 = f_1,\ \ldots,\ u_k = f_k - f_{k-1}, \ldots$ Тогда $f_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
$a_1 = A_1,\ \ldots,\ a_k = A_k - A_{k-1}, \ldots, A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
В этих обозначениях: $\sum u_k(x)$ — равномерно сходится к сумме $S(x)$
$u_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$
Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ — имеет конечный предел, при $n \to +\infty$
$\sum a_k$ - *сходится*

$$\lim_{x\to x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = \sum a_k = A \tag{37}$$

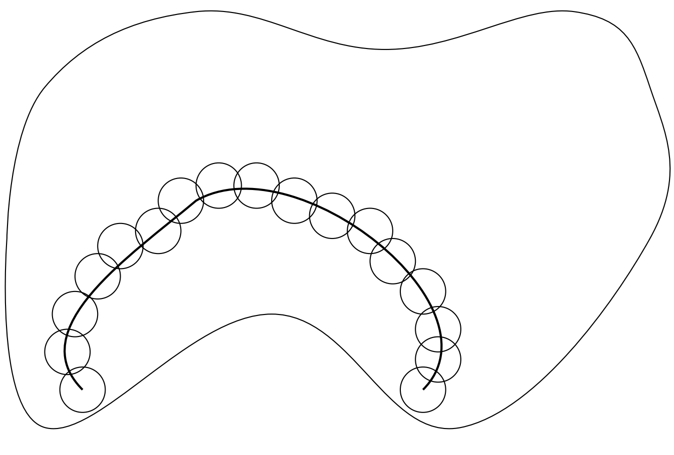
□

Примечание. Здесь можно было бы вместо n рассматривать "непрерывный параметр"t
$f_n(x) \leftrightarrow f(x,t)$
$n \to +\infty \leftrightarrow t \to t_0$
$f_n S$ на $E \leftrightarrow f(x,t)[t \to t_0]S(x)$ — при $x \in E$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t : t \neq t_0,\ |t - t_0| < \delta\ \forall x \in E \quad |f(x,t) - S(x)| < \varepsilon$

21 Локально потенциальные векторные поля

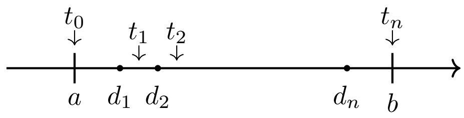
21.1 Интеграл локально потенциального векторного поля по непрерывному пути

Лемма 8 (о гусенице)**.** $\gamma : [a,b] \to \underset{\text{отк. мн.}}{O} \subset \mathbb{R}^m$ — *непрерывное*
Тогда $\exists$*дробление* $\quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$
и $\exists$ *шары* $B_1,\ \ldots,\ B_n \subset O \quad \gamma[t_{k_1}, t_l] \subset B_k$



Доказательство. $\forall c \in [a,b]$ возьмем $B_c := B(\gamma(c), \underset{\text{произвол!!}}{r_c}) \subset O$
$\tilde{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a,b] |\ \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$
$\tilde{\beta}_c := \sup\{\alpha \in [a,b] |\ \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$
Возьмем $(\alpha_c, \beta_c) :\ \tilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \tilde{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a,b]$
Для случая $c = a$ или $c = b$ вместо (α_c, β_c) берем $[a, \beta_a)$, $(\alpha_b, b]$
$[a,b]$ — компактен $\Rightarrow$ $[a,b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$, н.у.о ни один интервал не накрывается целиком остальными $\forall (\alpha_c, \beta_c)$ $\exists d_c$ — принадлежащая "только этому"интервалу



Точка t_k выбирается на отрезке (d_k, d_{k+1}) и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$
$\gamma([t_{k-1}, t_l]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$ $\square$

Примечание. $\forall \delta > 0$ мы можем требовать чтобы все $r_k < \delta$

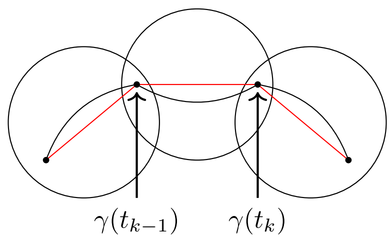
Примечание. В силу формулы "произвол!!"можно требовать, чтобы шары B_c удовлетворяли локальному условию

Пример. Пусть V — локально потенциальное векторное поле в O мы можем требовать, чтобы во всех шарах B_c существовал потенциал V.

Назовем в этом случае набор $\{B_k\}$ — V - гусеница

Определение. V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
$\gamma, \tilde{\gamma} : [a,b] \to O$ называются **похожими** (V - похожими) если у них есть общая V - гусеница
$\exists t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = v \quad \exists$ шары $B_k \subset O$
$\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$, $\tilde{\gamma}[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$

Следствие 21.0.9. V — локально потенциальное векторное поле
Тогда любой путь V - похож на ломаную



Лемма 9 (о равенстве интегралов локально потенциального векторного поля по похожим путям)**.**
V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
$\gamma, \tilde{\gamma} : [a,b] \to O$ — V - похожие, кусочно гладкие, $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$
Тогда $\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

Доказательство. Берем общую V - гусеницу
Пусть f_k - потенциал V в шаре B_k
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
Поправим потенциал(прибавим константы)
$f_k((t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1, 2, \dots, n$
Тогда

$$\int_\gamma \sum V_i dx_i = \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \overline{\overline{\text{обобщ. ф-ла Н.-Л.}}} \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) = \tag{38}$$

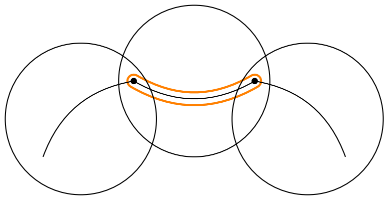
$$= \text{"телесопическая} - f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \tag{39}$$

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k\Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}\Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$
и тогда аналогично $\int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_n(\tilde{\gamma}(a))$ $\square$

Примечание. Вместо "$\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$"можно взять условие "$\gamma, \tilde{\gamma}$ - петли, т.е. $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{\gamma}(b)$, и вообще говоря $\gamma(a) \neq \tilde{\gamma}(a)$"Тогда утверждение Леммы 2 тоже верно

Лемма 10. *$\gamma : [a,b] \to O$ - непрерывный, V - локально потенциальное векторное поле в O*
Тогда $\exists \delta > 0$ *Если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a,b] \to O$ таковы, что $\forall t \in [a,b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$, $|\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$*
то $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\tilde{\gamma}}$ (и γ) — V - похожи

Доказательство. Берем V - гусеницу для γ



δ_k - окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_[k]]$
$\forall k\ \exists \delta_k > 0: \quad (\delta_k$ - окрестность $\gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$
δ - окрестность множества A: $\{x|\ \exists a \in A\ \rho(a,x) < \delta\} = \bigcup_{a\in A} B(a,\delta)$ Следует их компактности: пусть $B_k = B(w,r)$
$t \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ - непрерывная функция $\Rightarrow$ достигает max
$\rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r \quad \delta_k := \frac{r-r_0}{2}$
$\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_k)$ □

Определение. Интеграл локально потенциального векторного поля V по непрерывному пути γ
Возьмем $\delta > 0$ из Леммы 3
Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ - близкий кусочно гладкий путь, т.е. $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$
Полагаем: $I(V,\gamma) = I(V,\tilde{\gamma})$
Следует из Леммы 3 и Леммы 2

22 Сходимость рядов

$f_n \rightrightarrows f$ на E
$\forall \varepsilon > 0\ \exists V(\infty)\ \forall n \in V(\infty)\ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\rightrightarrows} g(y)$ на множестве E(т.е. для $y \in E$)
$\forall \varepsilon > 0\ \exists V(x_0)\ \forall x \in \dot{V}(x_0)\ \forall t \in E |f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$

Теорема 4.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) \tag{40}$$

Если один из предельных переходов равномерный

Теорема 22.1 (признак Дирихле). $\sum a_n(x) b_n(x)$ — вещественный ряд, $x \in X$
Пусть:

1. Частичные суммы ряда $\sum a_n$ - равномерно ограничены
   $\exists C_a\ \forall N\ \forall x \in X \quad |\sum_{k=1}^n a_k(x)| \leq C_a$
2. $\forall x$ последовательность $b_n(x)$ — монотонна по n и $b_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на X

Тогда ряд $\sum a_n(x) b_n(x)$ рвномерно сходится на X
Для числовых рядов: $\sum a_n b_n$

1. частичные суммы a_n - ограничены
2. $b_n \to 0$, b_n - монотонна

Тогда $\sum a_n b_n$ - сходится

Доказательство.

$$\sum_{k=M}^{N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{k=M}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \text{ где } A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \tag{41}$$

преобразование Абеля(суммирование по частям)

$$\left| \sum_{k=M}^{N} a_k(x) b_k(x) \right| \leq C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_{M-1}| + \sum_{k=M}^{N-1} C_a \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq C_a(|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=1}^{N-1} |b_k - b_{k+1}|) \leq \tag{42}$$

$$\leq C_a(2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|) \tag{43}$$

Переход (5) $\to$ (6): в сумме все разности одного знака $\Rightarrow$ "телескопическая"и равна $\pm(b_M - b_N)$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists K:\ \forall l > K\ \forall x \in X\ |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_a}$
Значит при $M, N > K \quad \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=M}^{N} a_k(x) b_k(x)\right| < \varepsilon$ — это критерий Больциано-Коши равномерной сходимости ряда $\square$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \quad x \in \mathbb{R} \tag{44}$$

1. $f(x)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$?
   Теорема Стокса-Зайдля
   $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n^2}$
   По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на $\mathbb{R} \Rightarrow f$ — непрерывна на $\mathbb{R}$
2. f — дифференцируема ?

23 Степенные ряды

$B(r_0, r) \subset \mathbb{C}$ - открытый круг
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C},\ z$ — переменная $\in \mathbb{C}$

Теорема 23.1 (о круге сходимости степенного ряды)**.** $\sum a_n (z - z_0)^n$ - степенной ряд
Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится только при $z = z_0$
3. $\exists R \in (0, +\infty)$: при:
   - $|z - z_0| < R$ ряд сходится
   - $|z - z_0| > R$ ряд расходится

Доказательство. Признак Коши: $\sum a_n \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} = r$

- $r < 1$ ряд сходится
- $r > 1$ ряд расходится

$\sum a_n (z - z_0)^n$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = |z - z_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} \tag{45}$$

- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ тогда $r = 0$ и есть (абсолютная) сходимость при всех z
- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ тогда $r = +\infty$ при $z \neq z_0$
  А при $z = z_0$ ряд очевидно сходится
- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0, +\infty \quad |z - z_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \overset{\text{def}}{=\!=} R$
  1. $|z - z_0| < R$ ряд сходится абсолютно
  2. $|z - z_0| > R$ ряд расходится, т.к. слагаемые $\not\to 0$

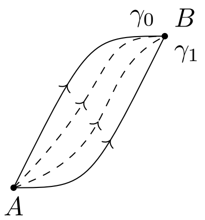
$\square$

Определение (степенной ряд)**.** $z_0, a, z \in \mathbb{C}$ $\underbrace{\sum a_n (z - z_0)^n}_{\text{степенной ряд}}$ число $R = \underbrace{\frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}}_{\text{формула Адамара}}$ — называется **радиусом сходимости степенного ряда**

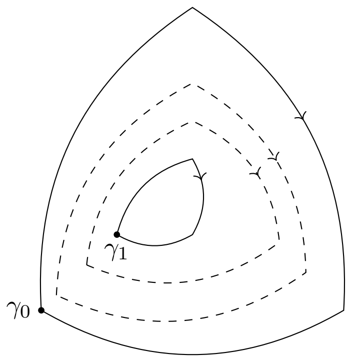
24 Гомотопия путей

Определение (Гомотопия двух путей)**.** $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывны
$\Gamma : \overset{t}{[a, b]} \times \overset{u}{[0, 1]}$ - непрерывное, такое что:
$\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0,\ \Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$

- Гомотопия связанная, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a),\ \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$,
  $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \gamma_0(a),\ \Gamma(b, u) = \gamma_0(b)$



- Гомотопия петельная $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
  $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



Теорема 24.1. *V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$*
γ_0, γ_1 — связанно гомотопные пути
<u>Тогда</u> $\int_{\gamma_0} V_i dx_0 = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

Примечание. То же самое выполнено для петельных гомотопий

Доказательство. $\gamma_u(t) := \Gamma(t, u),\ t \in [a, b]\ u \in [0, 1]$
$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$
Проверим: Φ - локально постоянна
$\forall u_0 \in [0, 1]\ \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$
Γ - непрерывна на $[a, b] \times [0, 1]$ - компакт $\Rightarrow \Gamma$ - равномерно непрерывна
$\forall \delta > 0\ \exists \sigma > 0\ \forall t, t'\ |t - t'| < \sigma\ \forall u, u'\ |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$
Лемма 3 $\gamma : [a, b] \to O$
Тогда $\exists \delta > 0$ со свойством
Если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ — близки к γ
т.е. $\forall t \in [a, b]$

- $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \delta$
- $|\tilde{\tilde{\gamma}} - \gamma(t)| < \delta$

то $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ — V - похожие
Возьмем параметр δ из Леммы 3 для пути γ_{u_0}
Если $|u - u_0| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$, при $t \in [a, b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} — похожи по Лемме 3
Построим кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0}$ $\frac{\delta}{4}$ - близкий к γ_{u_0} $\forall t \in [a, b] \quad |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}| < \frac{\delta}{4}$
и кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_u$ $\frac{\delta}{4}$ - близкий к γ_u
Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u$ — δ - близкие к $\gamma_{u_0} \Rightarrow$ они V - похожие $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$
т.е. $\Phi(u) = \Phi(u_0)$, при $|u - u_0| < \delta$ $\square$

Определение. Область $O \subset \mathbb{R}^m$ - называется **односвязной** если в ней любой замкнутый путь гомотопен постоянному пути

Примечание. Выпуклая облать — одновязна

Примечание. Гомеоморфный образ однозвязного множества односвязный
$\Phi : O \to O'$ — гомеоморфизм, γ - петля в O', Φ^{-1} — петля в O
$\Gamma : [a, b] \to [0, 1] \to O$ - гомотопия $\Phi^{-1}(\gamma)$ и постоянного пути $\tilde{\gamma} \equiv A$
$\Phi \circ \Gamma$ — гомотопия γ с постоянным путем $\Phi(A)$

Теорема 24.2. $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область
V — локально потенциальное векторное поле в O
Тогда V — потенциальное в O

Доказательство. *Теорема.* Эквивалентны:

1. V — потенциальное
2. ...
3. $\forall$ кусочно гладкой петли γ: $\int_\gamma \sum V_i dx_i = 0$

V - локально постояно, γ_0 — кусочно гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути γ_1 $\Rightarrow$ $\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1|t|), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0}\rangle dt = 0 \Rightarrow V$ — потенциально ☐

Следствие 24.2.10. Теорема Пуанкаре верна в односвязной области
Дифференциальный критерий:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \tag{46}$$

Лемма Пуанкаре: (46) $\Rightarrow V$ — локально потенциально

Теорема 24.3 (о веревочке).

- $O = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$
- $\gamma : [0, 2\pi] \to O$
  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля не стягиваема

Доказательство.
$V(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ — векторное поле в $\mathbb{R}^2$

Проверим что $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{47}$$

Равенство частных производных выполняется если $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow V$ — локально потенциально
При этом

$$\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi \tag{48}$$

(3) $\Rightarrow$ петля не стягиваема(Если бы была стягиваема, то интеграл изначально должен был быть равен 0, т.к. интеграл при гомотопиях не меняется), а поле V — не потенциально ☐

25 Степенные ряды

Теорема 25.1 (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда).
$\sum a_n(z - z_0)^n \quad 0 < R \leq +\infty$

1. $\forall r : \ 0 < r < R$ Ряд сходится равномерно в шаре $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ — непрерывна в $B(z_0, R)$

Доказательство.

1. Если $0 < r < R$, то при $z = z_0 + r$ ряд абсолютно сходится(по теореме о радиусе сходимости), т.е. $\sum |a_n| \cdot r^n$ — конечна
признак Вейрештрасса:

   - при $|z - z_0 \leq r| \quad |a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n$
   - $\sum |a_n| r^n$ - конечна

   $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость на $\overline{B(z_0, r)}$

2. Следует из 1. и теоремы Стокса-Зайдля
Если z удовлетворяет $|z - z_0| < R \Rightarrow \exists r_0 < R \quad z \in B(z_0, r_0)$
На $B(z_0, r_0)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow f$ — непрерывна в z

$\square$

Определение. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Произвдоная:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{49}$$

Примечание. $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|)$

Лемма 11. $w, w_0 \in \mathbb{C}, \ |w| < r, \ |w_0| < r$
Тогда $|w^n - w_0^n| \leq n \cdot r^{n-1} \cdot |w - w_0|, \ n \in \mathbb{N}$

Доказательство. $w^n - w_0^n = (w - w_0)(w^{n-1} + \underbrace{w^{n-2}w_0}_{\text{по модулю} \leq r^{n-1}} + \dots + w_0^{n-1})$ $\square$

Теорема 25.2 (о дифференцируемости степенного ряды)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad 0 < R < +\infty \quad f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n \tag{50}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \tag{51}$$

Тогда:

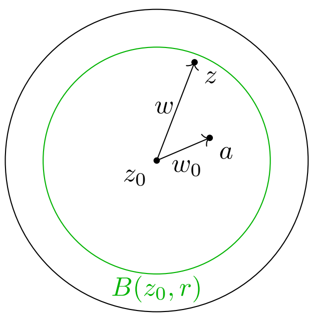
1. Радиус сходимости ряда (51) равен R
2. $\forall z \in B(z_0, R) \ \exists f'(z)$ и $f'(z) = (51)$

Доказательство.

1. По формуле Адамара $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}$
Ряд (51) сходится при каком-то $z \Leftrightarrow \sum n a_n (z - z_0)^n$ — сходится
Сморим на частичные суммы

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{n a_n}} = \frac{1}{1 \cdot \lim \sqrt[n]{a_n}} = R \tag{52}$$

2. $a \in B(z_0, R), \ \exists x < R, \ a \in B(z_0, r)$
$a = z_0 + w_0 \quad , |w_0| < r$
$z = z_0 + w \quad , |w| < r$



$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n-w_0^n}{w-w_0} \tag{53}$$

Последнее выражение по модулю по Лемме $\le n \cdot r^{n-1} \cdot |a_n|$, ряд $\sum nr^{n-1}|a_n|$ — сходится по 1., т.е. ряд (53) равномерно сходится в круге $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \lim \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum na_n(a-z_0)^{n-1} \tag{54}$$

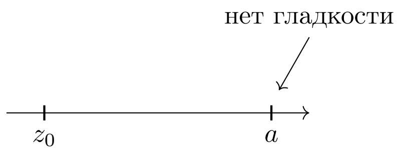
□

26 Степенные ряды

$$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n \quad |z-z_0| < R \tag{55}$$

$$f'(z) = \sum na_n(z-z_0)^{n-1} \quad |z-z_0 < R| \tag{56}$$

Следствие 26.0.11. $f = \sum a_n(z-z_0)^n,\ 0 < R < +\infty$
Тогда $f \in C^\infty(B(z_0, R))$ и все производные можно найти почленным дифференцированием



Теорема 26.1 (из ТФКП)**.** f - комплексно дифференцируема в z_0
Тогда $f = \sum a_n(z-z_0)^n$ $R =$ рассстояние от z_0 до ближайшей особой точки функции

Следствие 26.1.12. $f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n,\ a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$
Тогда:

1. $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ — тот же радиус сходимости
2. $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$
   Замечание. $\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \text{const}$

Доказательство.

1. Продифференцируем ряд $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$. По теореме он имеет тотже радиус сходимости что и ряд $\sum a_n(z-z_0)^n$
2. Мы можем вычислить производные левой и правой части, они совпадают, при $x = x_0$ ясно что константа нулевая $\Rightarrow$ левая и правая части равны

□

Пример.

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

Продифференцируем:

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arcctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

Находим C подставляя $x = 0$ $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, итого:

$$\operatorname{arcctg} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

26.1 Метод Абеля. Суммирование числовых рядов

Теорема 26.2 (Абеля)**.** $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n$ — сходящийся $C_n \in \mathbb{C}$
$f(x) = \sum C_n x^n, \quad R \geq 1, \ -1 < x < 1$
Тогда $\lim_{x\to 1} f(x) = \sum C_n$

признак Абеля
$\sum a_n(x) b_n(x)$ $a_n \in \mathbb{C}$ $b_n \in \mathbb{R}$

1. $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на $\langle \alpha, \beta \rangle$
2. $\forall x$ $b_n(x)$ — монотонна по n
   $b_n(x)$ — равномерно ограничена $\exists C_b : \ \forall n \ \forall x \quad |b_n(x)| \leq C_b$

Тогда ряд сходится

Доказательство. Ряд $\sum C_n x^n$ равномерно сходится на $[0,1]$ по признаку Абеля
$a_n(x) := C_n \quad b_n(x) := x^n \Rightarrow$ этот ряд сходится
Функции $C_n x^n$ — непрерывны на $[0,1] \Rightarrow$ (по т. Стокса-Зайдля) $\sum C_n x^n$ — непрервны на $[0,1]$ □

Следствие 26.2.13. $\sum a_n = A, \ \sum b_n = B, \ C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$
Пусть $\sum C_n = C$
Тогда $C = A \cdot B$

Доказательство. $f(x) = \sum a_n x^n \quad g(x) = b_n x^n \quad h(x) = \sum c_n x^n \quad x \in [0,1]$
$x < 1$ Есть абсолютная сходимость $a_n, b_n \Rightarrow$ можно перемножать:
$f(x)g(x) = h(x)$, тогда при переход в пределе $x \to 1 - 0 \Rightarrow A \cdot B = C$ □

26.2 Экспонента(комплексной переменной)

Определение. $\sum \frac{z^n}{n!} \quad A = \infty \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ Свойства:

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$
3. f_0 — показательная функция, удовлетворяет $f(x+y) = f(x)f(y)$
   $\lim_{x\to 0} \frac{f_0(x)-1}{x} = 1$
   $f_0(x) := \exp(x) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \exp'(0) = 1$
4. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

   Доказательство. $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$
   Потому что коэффицент вещественный:

$$\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} \tag{57}$$

□

Теорема 26.3. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, тогда $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

27 Теория меры

27.1 Системы множеств

Обозначение. A_i — множества, попарно не пересекаются $\leftrightarrow$ A_i — дизьюнкты(dis)
$\bigsqcup\limits_i A_i$ — дизьюнктное объедиение

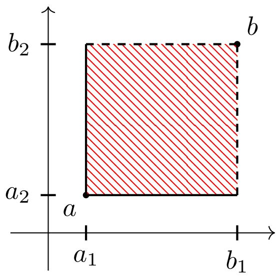
Определение. X — множество, 2^X – система всевозможных подмножеств в X
$\mathcal{P} \subset 2^X$ — **полукольцо** елси:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, A' \in \mathcal{P}$ $\exists$ конечное $B_1, \dots, B_2 \in \mathcal{P}$ – дизьюнктны
   $A \setminus A' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$

Пример. 2^X — полукольцо

Пример. $X = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{P}$ — ограниченые подмножества(в том числе $\emptyset$)

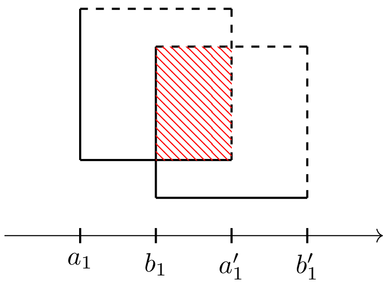
Определение. ячейка в R^m
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m | \forall i \ x_i \in [a_i, b_i)\}$



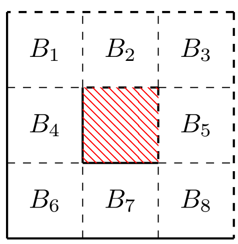
Пример. $\mathcal{P}^m$ — множество ячеек в $\mathbb{R}^m$
Утверждается, что $\mathcal{P}^m$ — полукольцо

Доказательство. $m = 2$

1. очев
2. $A \cap B = [a, a') \cap [b, b') = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^m \big| \forall i = 1, 2 \ \max(a_i, b_i) \le x_i < \min(a'_i, b'_i)\}$
   т.е. пересечние очевидно тоже ячейка



3. $A \setminus A' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$



Заштрихованная ячейка — A', большая ячейка — A
в $\mathbb{R}^m$ $3^m - 1$ часть

$\square$

Пример. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\forall i\ A_i = A$
$X = \bigoplus\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = \{(a_1, a_2, \dots) \big| \forall i\ a_i \in A_i\}$
Обозначим σ — $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}$: $k \in \mathbb{N} \quad \forall l:\ 1 \le l \le k \quad \alpha_l \in A_{i_l}$
$\mathcal{P} = \{X_\sigma\}_\sigma$, $X_\sigma = \{a \in X \big| a_{i_1} = \alpha_1, \dots, a_{i_k} = \alpha_k\}$
Утверждение: $\mathcal{P}$ — полукольцо

Доказательство.

1. $\emptyset = X, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\sigma, \sigma' \quad X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cup \sigma'}$
3. $X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$

$\square$

Примечание. Свойства:

1. Как показывают примеры:
   (a) $A \subset \mathcal{P} \not\Rightarrow A^C = X \setminus A \in \mathcal{P}$
   (b) $A, B \in \mathcal{P} \not\Rightarrow$
   - $A \cup B \in \mathcal{P}$
   - $A \setminus B \in \mathcal{P}$
   - $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
2. Модернизируем 3-е свойство полукольца: $A, \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$
   Тогда $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ — представима в виде дизъюнктного объединения элементов $\mathcal{P}$

   Доказательство. Индукция по n. База $n = 1$ — аксиома 3 полукольца
   Переход:

$$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) = (A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)) \setminus A_n =$$
$$= (\bigsqcup_{i=1}^{k} B_i) \setminus A_n = \bigsqcup_{i=1}^{k} (B_i \setminus A_n) = \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{j=1}^{L_i} D_{ij}$$

$\square$

Определение. $\mathfrak{A} \subset 2^X$ — **алгебра** подмножеств в X:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \setminus B \in$
2. $X \in$

Свойства

1. $\emptyset = X \setminus X \in \mathfrak{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{A}$
3. $A^C = X \setminus A \in \mathfrak{A}$
4. $A \cup B \in \mathfrak{A}$, потому что $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
5. $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ — по индукции
6. Всякая алгебра есть полукольцо, обратное не верно

28 Экспонента

Теорема 28.1. $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

Доказательство.

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum c_n \tag{58}$$

$$\text{, где } c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \cdot n! = \frac{(z+w)^n}{n!} \tag{59}$$

$$\sum c_n = \sum \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w) \tag{60}$$

□

Следствие 28.1.14. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) \neq 0$

28.1 Замечания о тригонометрических функциях

Пусть $\exp(ix) = \mathrm{Cos}(x) + i\mathrm{Sin}(x),\ x \in \mathbb{R}$
Тогда $\exp(-ix) = \mathrm{Cos}(x) - i\mathrm{Sin}(x)$

$$\mathrm{Cos}(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \mathrm{Sin}(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-iz)}{2i} \tag{61}$$

Следовательно:

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \mathrm{Sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{62}$$

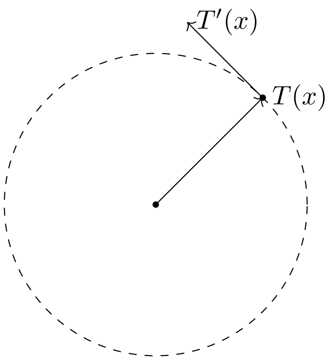
Пусть $T(x) = \exp(ix)$ Тогда $T(x+y) = T(x)T(y)$

$$\mathrm{Cos}(x+y) + i\mathrm{Sin}(x+y) = (\mathrm{Cos}(x) + i\mathrm{Sin}(x))(\mathrm{Cos}(y) + i\mathrm{Sin}(y)) \tag{63}$$

$\mathrm{Cos}(x+y) = \mathrm{Cos}(x)\mathrm{Cos}(y) - \mathrm{Sin}(x)\mathrm{Sin}(y)$
$\mathrm{Sin}(x+y) = \mathrm{Cos}(x)\mathrm{Sin}(y) + \mathrm{Sin}(x)\mathrm{Cos}(y)$

$$|T(x)|^2 = T(x) \cdot \overline{T(x)} = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(0) = 1 \tag{64}$$

т.е. $(\mathrm{Cos}(x), \mathrm{Sin}(x))$ — точка на единичной окружности
$T' = iT$, т.е. $x \mapsto T(x)$ — движение по единичной окружности с единичным вектором скорости, вектор скорости $\perp$ радиус-вектору



29 Ряды Тейлора

Все вещественно

Определение. f — **разлагается в степенной ряд** в окрестности x_0 если:
$\exists \varepsilon > 0\ \exists C_n$ — вещественная последовательность

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{65}$$

Примечание. Тогда $f \in C^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ по следствию

Теорема 29.1 (единственности)**.** f — разлагается в сепенной ряд в окресности x_0
Тогда разложение единственно

Доказательство. выполняется (65)

$$c_0 = f(x_0), \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nC_n(x - x_0)^{n-1} \tag{66}$$

$$c_1 = f'(x_0), \quad f''(x) = \dots \tag{67}$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)C_n(x-x_0)^{n-k} \tag{68}$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{69}$$

□

Определение. Ряд Тейлора функции f в точке x_0 — формальный ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Примечание. Ряд Тейлора может оказаться сходящимся только в точке x_0

Примечание. Ряд Тейлора может сходится *не туда*

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Тогда $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
при $x = 0 \quad \forall n \ f^{(n)}(0) = 0$ — мы это доказывали $\Rightarrow$ Ряд Тейлора в $x_0 = 0$ тождественно равен нулю

30 Теория меры

Определение. σ **- алгебра** $\mathfrak{A} \subset 2^X$

1. $\mathfrak{A}$ — алгебра
2. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

Примечание. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$
$X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$

Примечание. $E \in \underset{\sigma\text{-алгебра}}{\mathfrak{A}}$ Тогда $\mathfrak{A}_E := \{A \in \mathfrak{A} \big| A \subset R\}$ — σ - алгебра подмножеств множества E

Пример. 2^X

Пример. X - бесконечное множество $\mathfrak{A}$ = не более чем счетные множества и их дополнения
Аналогично примеру 2 для алгебр

Пример. $X = \mathbb{R}^2$ $\mathfrak{A}$ — ограниченое множество и их дополнение — не σ-алгебра

30.1 Объем

Определение. $\mu : \underset{\text{полукольцо}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **аддитивная функция множества**, если:

1. μ — не должна принимать значение $\pm\infty$ одновременно(если принимает одно на каком либо множестве, не должно принимать другое на любом другом множестве)
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ — дизъюнктны. Если $A = \bigsqcup A_i \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ — **объем**, если $\mu \geq 0$ и μ — аддитивная

Примечание. Если $X \in \mathcal{P},\ \mu(X) < +\infty$, то говорят, что μ — конечный объем

Примечание. μ — задано на $\mathfrak{A}$: свойство 3 можно заменить на 3'
3'. $\forall A, B \in \mathfrak{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) = \mu(B)$

Обозначение. $\mu(A) = \mu A$

Пример. $\mathcal{P}^1$ — ячейки в $\mathbb{R}$, $\mu[a, b) = b - a,\ b \geq a$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
$[a, b) = \bigsqcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i)$
$\sum_{i=1}^n \mu[x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \xlongequal[\text{телескоп.}]{} x_n - x_0 = b - a = \mu[a, b)$

Пример. Классический объем в $\mathbb{R}^m \quad \mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$
$\mu[a, b) = \prod\limits_{i=1}^m (b_i - a_i)$
μ не является конечным объемом

Определение. $A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$ — **монотонность объема**

Теорема 30.1 (о свойствах объема). $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем
Тогда он имеет свойства:

1. Уиленная монотонность
   $\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}_{\text{дизъюнктны}} \in \mathcal{P} \quad \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A \quad \sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A$

2. Конечная полуаддитивность
   $\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i$

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ пусть еще известно: $A \setminus B \in \mathcal{P},\ \mu B$ — конечный
   Тогда $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

Примечание.

- в пунктах 1 и 2 не предполагается, что $\bigcup A_i \in P$
- в пункте 3 если $\mathcal{P}$ — алгебра то условие $A \setminus B \in P$ можно убрать(оно выполняется автоматически)

Доказательство.

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца: $A \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigsqcup_{l=1}^S B_l$ — доказано ранее
   таким образом $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$ — дизъюнктное объединение конечного числа множеств
   $\mu A = \sum \mu A_i + \sum B_l \geq \sum \mu A_i$

2. объем $\Rightarrow$ конечная полуаддитивность

$$A \subset \bigcup_{\text{кон.}} A_k \mu A \leq \sum \mu A_k \quad (A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}) \tag{70}$$

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \quad A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k \tag{71}$$

   Сделаем эти множества дизъюнктными

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i) \quad A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k \tag{72}$$

   Но эти C_k вообще говоря $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i) = \bigsqcup_i D_{kj},\ D_{kj} \in \mathcal{P} \tag{73}$$

Тогда:

$$A = \bigsqcup_{k,j} D_{kj} \qquad \mu A = \sum \mu D_{kj} \tag{74}$$

При этом $\forall k$:

$$\sum_j \mu D_{kj} = \mu C_k \leq \mu A_k \tag{75}$$

Неравенство в (18) в силу монотонности объема(п.1 теоремы). Итого

$$\mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{kj} = \sum \mu C_k \leq \sum \mu A_k \tag{76}$$

3. (a) $B \subset A \quad A = B \sqcup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$

   (b) $B \not\subset A \quad A \setminus B = A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{P}} \quad \mu(A \setminus B) \xlongequal[\text{(a)}]{} \mu A - \mu(A \cap B) \underset{\text{монот.}}{\geq} \mu A - \mu B$

$\square$

31 Ряды Тейлора

Пример.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \quad x \in \mathbb{R} \tag{77}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad x \in \mathbb{R} \tag{78}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R} \tag{79}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad x \in (-1, 1) \tag{80}$$

$$\ln(1+x) = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1, 1) \tag{81}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad x \in (-1, 1) \tag{82}$$

Теорема 31.1. $\forall \sigma \in \mathbb{R}\ \forall x \in (-1, 1)$
$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} x^2 + \dots$

Доказательство. при $|x| < 1$ ряд сходится по ризнаку Деламбера

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(\sigma - n)x}{n+1} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |x| < 1 \tag{83}$$

Обозначим сумму ряда через $S(x)$
Наблюдение: $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$\sum a_n \leftrightarrow \sum a_n x^n = f(x) \tag{84}$$

$$\sum a_n n x^{n-1} = f'(x) \tag{85}$$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} x^n + \dots \tag{86}$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} x^n \tag{87}$$

$$(1+x)S' = \dots + \left(\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \cdot n\right) x^n + \dots = \tag{88}$$

$$= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \cdot \sigma x^n + \dots \tag{89}$$

$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S' \cdot (1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1} \cdot S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0 \Rightarrow f = \text{const}\ f(0) = 1 \ \Rightarrow f \equiv 1$ $\square$

Следствие 31.1.15.
$$\arcsin x = \sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(x^{2n+1})}{2n+1} \tag{90}$$

Доказательство.
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} (-x^2)^n \Big|_{\sigma=-\frac{1}{2}} = \sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \tag{91}$$

последнее выражение при $n = 0$ равно 1, и тогда (14): $\arcsin x = x + \dots$
$\arcsin x = \text{const} +$ нужный ряд, при $x := 0$ $\text{const} = 0$ □

Следствие 31.1.16.
$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) \cdot t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}} \quad |t| < 1 \tag{92}$$

Доказательство.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \tag{93}$$

дифференцируем m раз □

Теорема 31.2. $f \in C^{\infty}(x_0 - h, x_0 + h)$
f — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности $x_0 \Leftrightarrow$
$\exists \delta, C, A > 0\ \forall n\ \forall x : |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < C \cdot A^n \cdot n!$

Доказательство.

($\Leftarrow$) формула Тейлора:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \tag{94}$$
$$\left| \frac{f^{(n)}()}{n!}(x-x_0)^n \right| \le C \cdot |A(x-x_0)|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \tag{95}$$

Разложение имеет место при $|x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$

($\Rightarrow$)
$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{96}$$

Возьмем $x_1 \ne x_0$, для которого это верно

- при $x = x_0$, ряд сходится $\Rightarrow$ слагаемые $\to 0 \Rightarrow$ ограничены
$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n \right| \le C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \le C_1 n! B^n| \tag{97}$$
, где $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$
- $$f^{(m)}(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1)\dots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m} = \tag{98}$$
$$= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m} \tag{99}$$

Пусть $|x - x_0| < \frac{1}{2B}$
$$|f^{(n)}(x)| \le \sum \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} |(x-x_0)^{n-m} \right| \le \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!} = \tag{100}$$

$$= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!} \cdot (\underbrace{B|x-x_0|}_{<\frac{1}{2}})^{n-m} \xlongequal[\text{Сл. 2}]{} \frac{C_1 B^n m!}{\underbrace{(1-\underbrace{B|x-x_0|}_{<\frac{1}{2}})}_{>\frac{1}{2}}^{m+1}} < \tag{101}$$

$$< C_1 2^{m+1} B^m m! = \underbrace{(2C_1)}_{C} \cdot (\underbrace{2B}_{A})^m m! \tag{102}$$

Эта оценк выполнятется при $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

□

32 Теория меры

32.1 Мера

Определение. $\mu : \underset{\text{п/к}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **мера**, если μ — объем и μ — счетно аддитивна: $\forall A, A_1, \dots \in \mathcal{P}$
$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \qquad \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

Примечание. $(a_\omega)_{\omega \in \Omega}$ — счетное множество чисел(т.е. Ω — счетно) $\forall \omega\ a_\omega \geq 0$
Тогда определена:

$$\sum_{\omega \in \Omega} a_\omega = \sup(\sum_{\text{кон.}} a_\omega) \tag{103}$$

Значит можно счетную аддитивность понимать обобщеноо:

$$A = \bigsqcup_{\text{кон.}} A_\omega \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_\omega \quad (A, A_\omega \in \mathcal{P}) \tag{104}$$

Примечание. Счетная аддитивность **не** следует из конечной аддитивности

Пример. $X = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{P}$ = ограниченые множества и их дополнения

$\mu A = \begin{cases} 0 & , A \text{ — огр.} \\ 1 & , A^C \text{ — огр.} \end{cases}$

$\mathbb{R}^2$ = "лист в клетку = $\bigcup_{\text{счетное}}$ клеток = $\bigsqcup$ ячеек $\xlongequal{\text{обозн.}} \bigsqcup A_i$
$\mu(\mathbb{R}^2) = 1 \quad \sum \mu A_i = 0$ **Это не мера**

Пример. X — (бесконечное) множество
$a_1, a_2, a_3, \dots$ — набор попарно различных точек
$h_1, h_2, h_3, \dots$ — положительные числа
Для $A \subset X$

$$\mu A := \sum_{k: a_k \in A} h_k \tag{105}$$

Счетная аддитивность $\mu \Leftrightarrow$ Теорема о группировке слагаемых
μ — **дискретная мера**

Теорема 1. $\mu : \underset{\text{п/к}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем
Тогда эквивалентны:

1. μ — мера, т.е. μ — счетно аддитивна
2. μ – счетно полу-аддитивна:
   $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$

Доказательство.

(1 ⇒ 2) Как в предыдущей теореме(доказательство п.2) в формклах 15, 17, 19 вместо конечных объединений и сумм надо рассматривать счетные

(2 ⇒ 1) $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ проверим $\mu A = \sum \mu A_i$:

$$\forall N \quad A \supset \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i \quad \mu A \geq \sum_{i=1}^{N} \mu A_i \tag{106}$$

$$A \subset \bigcup A_i \quad \mu A \leq \sum \mu A_i \tag{107}$$

Тогда $\mu A = \sum \mu A_i$

$\square$

Следствие 32.0.17. $A \in \mathcal{P} \quad A_n \in \mathcal{P}: \ A \in A_n, \ \mu A_n = 0$, при этом μ — мера
Тогда $\mu A = 0$

Доказательство. $\mu A \leq \sum \mu A_i = 0$ $\square$

Теорема 2. $\mathfrak{A}$ — алгебра, $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем
Тогда эквивалентны:

1. μ — мера
2. μ — непрерывна снизу:
   $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i \tag{108}$$

Доказательство. нет(см доказательство Т. 3) $\square$

Теорема 3. $\mathfrak{A}$ — алгебра $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ — конечный объем
Тогда эквивалентны:

1. μ — мера, т.е. счетно аддитивная функцяи множества
2. μ — непрерывна сверху: $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$
   $A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad A = \bigcap A_i \Rightarrow \mu A = \lim \mu A_i$

$x = \mathbb{R} \quad A_k = [k, +\infty] \quad \bigcap A_k = \emptyset = A \quad \mu A = 0 \ \mu a_k = +\infty$
μ — мера Лебега в R^2

Доказательство.

$(1 \Rightarrow 2)$ $B_k = A_k \setminus A_{k+1} \quad A_1 = \bigsqcup B_k \sqcup A$
$\underbrace{\mu A_1}_{\text{кон.}} = \underset{\Rightarrow \text{сх.}}{\sum \mu B_k} + \mu A$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} B_k \sqcup A \quad \mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu A \tag{109}$$

$(2 \Rightarrow 1)$ Дана непрерывность сверху. Воспользуемся ей для случая $A = \emptyset$
Проверяем счетную аддитивность: $C = \bigsqcup C_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum \mu C_i$

$$A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{\infty} C_i \tag{110}$$

Тогда:

$$A_k \in \mathfrak{A}: \ A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \tag{111}$$

последнее выражение содержит конечное число операций
$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \ \bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k \quad \mu C = \sum_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \sum \mu C_i \tag{112}$$

$\square$

32.2 Теорема о продолжении меры

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера σ **- конечна**, если: $\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : \ X = \bigcup A_i, \ \mu A_i < +\infty$

Пример. $X = \mathbb{R}^m, \ \mathcal{P} = \mathcal{P}^m$ — полукольцо ячеек
μ — класичекий объем, μ — σ-конечный объем
$\mathbb{R}^m = \bigcup \text{Куб}(0, 2R) = \bigcup$ целочисленных единичных ячеек

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера
μ — **полная**, если $\forall A \in \mathcal{P}\ \mu A = 0\ \forall B \subset A$ выолняется $B \in \mathcal{P}$ и (тогда автоматически) $\mu B = 0$
Совместное свойство μ и $\mathcal{P}$

Определение. **Пространство с мерой** — это тройка $(\underset{\text{множество}}{X}, \underset{\substack{\sigma\text{-алгебра} \\ \mathfrak{A} \subset 2^X}}{\mathfrak{A}}, \underset{\text{мера на } \mathfrak{A}}{\mu})$

33 Теория меры

Определение. $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}} \quad \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \quad \mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ — **продолжает** $u_0 \quad \mu\Big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$

Теорема 33.1 (о Лебеговском продлжении меры)**.** $\mathcal{P}_0$ — полукольцо подмножеств пространства X, $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ — σ-конечная мера
Тогда $\exists$ σ-алгебра $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}_0$, $\exists \mu$ — мера на $\mathfrak{A}$:

1. μ — продолжение μ_0 на $\mathfrak{A}$
2. μ — полная мера
3. Если $\tilde{\mu}$ — полная мера на σ-алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$ и $\tilde{\mu}$ — продолжение μ_0, то $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$ и при этом $\tilde{\mu}$ — продолжение меры μ : $\tilde{\mu}\Big|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо: $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$, мера ν — продолжение μ_0 на $\mathcal{P}$
   Тогда $\forall A \in \mathcal{P} \quad \nu(A) = \mu(A)$
5. $$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A = \inf\{\sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \big| A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k\} \tag{113}$$

Доказательство. нет
$\forall \mu^\star = \inf\{\dots\} \quad \mu^\star s^X \to \overline{\mathbb{R}}$ — не аддитивна
$A \subset \bigcup A_k \quad \mu^\star A \le \sum \mu^\star A_k$ $\square$

Следствие 33.1.18. $A \in \mathfrak{A}, \ \mu A < +\infty, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists P_k \in \mathcal{P} : \ A \subset \bigcup P_k \quad \mu A < \sum \mu P_k < \mu A + \varepsilon$

33.1 Мера Лебега

Теорема 33.2. $\mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$ — классический объем в $\mathbb{R}^m$
Тогда μ — σ-конечная мера

Доказательство. σ-конечность очевидна
Проверим, что μ — счетно аддитивна, для этого достаточно проверить счетную полуаддитивность
$P = [a, b), \ P_n = [a_n, b_n) \ P \subset \bigcup P_n$, проверить $\mu P \le \sum \mu P_n$

$P = \emptyset \ \Rightarrow$ утверждение тривиально

$P \neq \emptyset$ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Чуть уменьшим координаты вектора b: $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\mu P - \mu[a, b') < \varepsilon$
Уменьшим слегка координаты векторов a_n:

- $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n] \quad \mu[a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$
- $\underset{\text{комп.}}{[a, b']} \subset \bigcup (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие: $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b') \subset \bigcup_{n=1}^{N} [a'_n, b_n)$

Тогда

$$\mu[a,b') \le \sum_{1\le n\le N} \mu[a'_n, b_n) \tag{114}$$

$$\mu P - \varepsilon \le \sum_{n=1}^{N} (\mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) \tag{115}$$

$$\mu P - \varepsilon \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon \tag{116}$$

□

Определение. Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ — Лебеговское продолжение классического объема образует σ-алгебру $\mathfrak{M}^m$, на которой задана мера Лебега — **множества измеримые по Лебегу**

Обозначение. Мера Лебега — λ или λ_m

Свойства меры Лебега

1. (a) $A_1, A_2, \ldots$ — измеримые $\Rightarrow A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ — измеримые
   $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots,\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ — измеримые

   (b) $\forall n\ \lambda A_n = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup A_n) = 0$

   (c) $\lambda A = 0,\ B \subset A \Rightarrow B$ — измеримо, $\lambda B = 0$

   Пример. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ — измеримо, $\lambda_1 \mathbb{Q} = 0$

   Доказательство. $\forall x \in R \quad \{x\} = \bigcap_n [x, x + \frac{1}{n})$

   $$0 \le \lambda\{x\} \le \lambda\left[x, x + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda\{x\} = 0 \tag{117}$$

   $\mathbb{Q}$ — счетное объединение одноточечных множеств □

2. $\mathfrak{M}^m$ содержит все открытые и замкнцтые множества

   Лемма 12.

   (a) $O \subset \mathbb{R}^m$ — открыто
   Тогда $O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — ячейки с рациональными координатами(можно считать Q_i — кубические ячейки, двоичные рациональные координаты)

   (b) Можно считать, что $\overline{Q_i} \subset O$

   (c) E — измеримо, $\lambda E = 0$
   Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad E \subset \bigcup Q_i :\ Q_i$ — кубическая ячейка и $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$

   Примечание. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (B_i)$ — шары: $E \subset \bigcup B_i,\ \sum \lambda B_i < \varepsilon$
   $Q(x, \frac{R}{\sqrt{m}}) \subset B(x,R) \subset Q(x,R)$
   $\left(\frac{2R}{\sqrt{m}}\right)^m \le \lambda B \le \lambda Q(x,R) = (2R)^m$

   Доказательство.

   (a) $\forall x \in O$, пусть $Q(x)$ — какая-то ячейка с рациональными координатами, $Q(x) \subset O$(можно потребовать $\overline{Q(x)} \subset O$; Q — куб; двоично рациональные координаты)
   $O = \bigcup_{x\in O} Q(x)$ — здесь не более чем счетное множество различных ячеек
   $\Rightarrow O = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$ — сделаем ячейки дизъюнктными

   $$Q_1 := Q(x_1) \quad Q(x_2) \setminus Q(x_1) \xlongequal{\text{св-во п/к}} \bigsqcup D_j \tag{118}$$

   Переобозначим D_j как $Q_2, Q_3, \ldots, Q_k$

   $$Q(x_3) \setminus (\bigsqcup_{i=1}^{k} Q_i) = \bigsqcup P_l \tag{119}$$

переобозначим P_l, как $Q_{k+1}, \ldots, Q_s$ и так далее.
Можно считать что координаты всех ячеек двоично рациональны
В $\bigsqcup Q_i$ — можно подразбить эти ячейки, чтобы они стали кубическими
$[a_i, b_i)$ — двоично рациональные координаты. $\frac{1}{2^l}$ — самый крупный знаенатель
$[a_i, b_i]$ — конечное объединение кубических ячеек со стороной $\frac{1}{2^l}$

(b) уже доказано

(c) Следует из теоремы о Лебеговском продолжении(п. 5)
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ ячейки $P_k \quad E \subset P_k \quad 0 = \lambda E \le \sum \lambda P_k \le \varepsilon$
$\exists \tilde{P_k}$ — двоично рациональные ячейки: $P_k \subset \tilde{P_k}$ $0 = \lambda E \le \sum \lambda_k \tilde{P_k} \le 2\varepsilon$
Можно разбить P_k на конечное число кубов

□

Определение. $\mathfrak{B}$ — **борелевская σ-алгебра** (в $\mathbb{R}^m$ или в метрическом пространстве) — минимальная σ-алгебра, которая содержит все открытые множества
$\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$

Пример. Канторово множество в $\mathbb{R}$ — последовательность множетсв вида:
$K_0 = [0, 1] \quad K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \quad K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{3}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

$\mathfrak{K} = \bigcap K_i$ — измеримо $\lambda\mathfrak{K} = 0$
$\lambda(K_i) = (\frac{2}{3})^i$
$\mathfrak{K} = \{x \in [0, 1] \big| x$ можно записать в троичной системе использую только цифры 0 и 2$\}$
При этом $\mathfrak{K}$ — континуум
$\mathfrak{K}$ — замкнутое

3. $\exists$ неизмеримые по Лебегу множества(т.е. не принадлежат $\mathfrak{M}$)

Пример. $x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y$ если $x - y \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}\big|_{\mathbb{Q}} = A$ — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать $A \subset [0, 1]$
Очевидно, что:

$$\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R} \tag{120}$$

$$[0, 1] \overset{(1*)}{\subset} \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q) \overset{(2*)}{\subset} [-1, 2] \tag{121}$$

Верно ли что A измеримо? т.е. $A \in \mathfrak{M}^1$?
Допустим, что да: очевидно $\forall q \ \lambda A = \lambda(A + q)$ (по п.5 Т. о продолжении меры)
из (1*): $\lambda[0, 1] = 1 \le \sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \lambda(A) \Rightarrow \lambda A > 0$
из (2*): $\lambda((A + q)) = \sum_q \lambda A \le \lambda[-1, 2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$
Противречие $\Rightarrow A$ — не измеримо

4. $A \in \mathfrak{M}$

- A — ограничено $\Rightarrow \lambda A < +\infty$
- A — открыто $\Rightarrow \lambda A > 0$ — из леммы
- $\lambda A = 0 \Rightarrow A$ не имеет внутренних точек

5. $A \in \mathfrak{M}^m$ — измеримое множество
Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

- $\exists$ открытое $G_\varepsilon \supset A : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
- $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon \subset A : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство. (a) λA — конечная
$\lambda A = \inf\{\sum \lambda P_i \big| A \subset \bigcup P_i,\ P_i \in \mathcal{P}\}$
$\forall \varepsilon > 0 \exists P_i \quad \lambda A \le \sum \lambda P_i \le \lambda A + \varepsilon,\ A \subset \bigcup P_i$
Чуть увеличим эти $P_i = [a_i, b_i) \to (a'_i, b_i) \subset [a'_i, b_i)$

$$\lambda[a'_i, b_i) \le \lambda P_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \tag{122}$$

$$A \subset \underbrace{\bigcup (a'_i, b_i)}_{G_{2\varepsilon}} \subset \bigcup [a_i, b_i) \tag{123}$$

$$\lambda A \le \lambda G_{2\varepsilon} \le \sum \lambda[a'_i, b_i) \le \sum \lambda(P_i + \frac{\varepsilon}{2^i}) \le \lambda A + 2\varepsilon \tag{124}$$

(b) $\lambda A = +\infty$ используем σ-конечность

$$\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{j-1}^{+\infty} Q_j \tag{125}$$

$\exists G_{\varepsilon,j}$ — открытое $(A \cup Q_j) \subset G_{\varepsilon,j}$

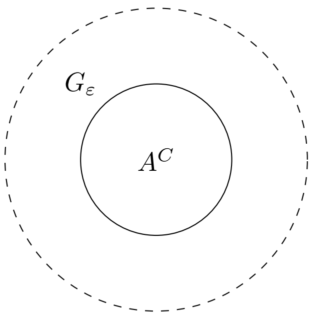
$$\lambda(G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cup Q_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j} \tag{126}$$

$$A = \bigsqcup (A \cup Qj) \subset \bigcup G_{\varepsilon,j} = G_\varepsilon \tag{127}$$

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus A) \le \sum \lambda(G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cup Q_j)) \le \varepsilon \tag{128}$$

$$G_\varepsilon \setminus A \subset \bigcup_j (G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cup Q_j)) \tag{129}$$

(c) Для F_ε переходим к дополнению A^C — для него подбираем G_ε



$$A^C \subset G_\varepsilon \tag{130}$$

$$A \supset (G_\varepsilon)^C =: F_\varepsilon \tag{131}$$

$$G_\varepsilon \setminus A^C = A \setminus (G_\varepsilon)^C \tag{132}$$

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus A^C) < \varepsilon \Rightarrow \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \tag{133}$$

□

34 Мера Лебега

Следствие 34.0.19. $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad \exists B, C$ — борелевские
$B \subset A \subset C \quad \lambda(C \setminus A) = 0,\ \lambda(A \setminus B) = 0$

Доказательство.

$$C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_{\frac{1}{n}} \tag{134}$$

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_{\frac{1}{n}} \tag{135}$$

□

Следствие 34.0.20. $\forall A \subset \mathfrak{M}^m\ \exists B, \mathcal{N}$ — B - борелевское, $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}^m,\ \lambda\mathcal{N} = 0$
$A = B \cup \mathcal{N}$

Доказательство. B — из следствия 1, $\mathcal{N} := A \setminus B$ □

Примечание. Обозначим $|X|$ — мощность множества X
$\forall X \quad |2^X| > |X|$
$X = \mathbb{R}^m \quad |2^{\mathbb{R}^m}| >$ континуум
$\mathfrak{B} \subset 2^{R^m}$ — борелевская σ-алгебра, $|\mathfrak{B}| =$ континуум
$|M^m| >$ континуума
$\mathfrak{K}$ — канторово множество. $|\mathfrak{K}| =$ континуум, $\lambda\mathfrak{K} = 0$
$\forall D \subset \mathfrak{K}\ D \in \mathfrak{M}^m,\ \lambda D = 0$(полнота λ)
$2^{\mathfrak{K}} \subset M^m$

Следствие 34.0.21. $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \lambda(G) = \overset{(*)}{\sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{— замкн.}}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K \text{— компакт.}}} \lambda(K) \tag{136}$$

Доказательство. (*) следует из σ-конечности

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q(0, n) \tag{137}$$

$$Q(a, R) = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i - R, a_i + R]$$

$$\lambda(A \cap Q(0, n)) \to \lambda A \text{ — по непрерывности снизу} \tag{138}$$

□

Определение. Свойства из следствия 3 называются **регулярностью меры Лебега**

34.1 Преобразования меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях

Лемма 13. *$(X', \mathfrak{A}', \mu')$ — пространство с мерой*
$(X, \mathfrak{A}, \cdot)$ — "заготовка" пространства
$T : X \to X'$ — биекция; $\forall A \in \mathfrak{A}\ TA \in \mathfrak{A}'$ ($T\emptyset \overset{def}{=\!=} \emptyset$)
Положим $\mu A = \mu'(TA)$
Тогда μ — мера

Доказательство. Проверим счетную аддитивность:

$$A = \bigsqcup A_i \quad \mu A = \mu'(TA) = \mu'(\bigsqcup TA_i) = \sum \mu'(TA_i) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum \mu A_i \tag{139}$$

□

Примечание. $T : X \to X'$ — произвольное отображение, $T\mathfrak{A}$ вообще говоря не алгебра
$T^{-1}(\mathfrak{A}')$ — всегда σ-алгебра(если исходное σ-алгебра)

Лемма 14. *$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное*
Пусть $\forall E \in \mathfrak{M}^m :\ \lambda E = 0$ выполняется $\lambda(TE) = 0$
<u>Тогда</u> $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad TA \in \mathfrak{M}^n$

Доказательство.

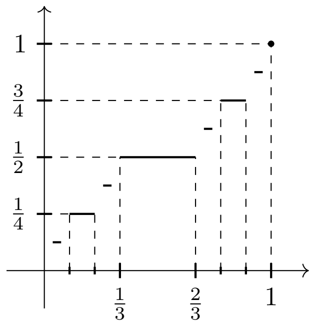
$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N} \tag{140}$$

, где K_j — компактное множество, $\lambda(\mathcal{N}) = 0$

$$TA = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \underbrace{TK_j}_{\text{комп.}} \cup \underbrace{T\mathcal{N}}_{\lambda(T\mathcal{N})=0} \tag{141}$$

TK_j — компактно, как образ компакта при непрерывном отображении
(8) $\Rightarrow TA$ — измеримо □

Пример. Канторова лестница



$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2} & x \in \Delta \setminus \mathfrak{K}_1 \\ \frac{1}{4} & x \in \Delta_0 \setminus \mathfrak{K}_2 \\ \frac{3}{4} & x \in \Delta_1 \setminus \mathfrak{K}_3 \\ \vdots & \\ \sup f(t) & t \le x,\ t \notin \mathfrak{K} \end{array}\right.$$

, где $\Delta = [0,1],\ \Delta_0 = [0, \frac{1}{3}],\ \Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1],\ \Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}],\ \Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], \ldots,$ а $\mathfrak{K}_0 = \Delta,\ \mathfrak{K}_1 = \Delta_0 \cup \Delta_1,\ \mathfrak{K}_2 = \Delta_{00} \cup \Delta_{01} \cup \Delta_{10} \cup \Delta_{11}, \quad \mathfrak{K}_i = \bigcup\limits_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} \Delta_{\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_n}$
$f([0,1] \setminus \mathfrak{K})$ — счетное = множество двоично рациональных чисел из $[0,1]$
$\lambda f([0,1] \setminus \mathfrak{K}) = 0$
$\lambda f(\mathfrak{K}) = 1$, т.к. $\forall y \in [0,1]\ \exists x:\ f(x) = y$, при этом f — непрерывна, т.к. образом функции является весь промежуток
Тогда пусть $E \subset [0,1] \notin \mathfrak{M}^m$
$f^{-1}(E)$ = подиножество множества $\mathfrak{K} \cup$ промежутки прообраза двоично рациональных точек из E — измеримо, т.к. $\lambda \mathfrak{K} = 0$
Еще наблюдение $x \notin \mathfrak{K} \Rightarrow f$ — дифференцируема в x и $f' = 0$

Теорема 34.1. $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $\Phi : O \to \mathbb{R}^m,\ \Phi \in C^1(O)$
Тогда $\forall A \subset O,\ A \in \mathfrak{M}^m \quad \Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$

Доказательство. Достаточно проверить свойство: $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$
$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ шары $B_i:\ E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon$

$(\Rightarrow)$ из Т. о лебеговском продолжении меры

$(\Leftarrow)$ используем полноту меры Лебега

1. $E \subset \underset{\text{ячейка}}{P} \subset \overline{P} \subset O,\ \lambda E = 0$

$$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\| \tag{142}$$

Тогда $\forall x, y \in P \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \le L|x - y|$ — неравенство Лагранжа

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr) \tag{143}$$

$$Q(x_0, \frac{r}{\sqrt{m}}) \subset B(x_0, r) \Rightarrow \left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m < \lambda B(x_0, r) \tag{144}$$

$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr) \subset \bigcup Q(y_i, Lr) \tag{145}$$

$$\sum \lambda \Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = L^m \sum (2r_i)^m \tag{146}$$

$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow \sum \left(\frac{2r_i}{\sqrt{m}}\right)^m < \varepsilon \Rightarrow \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m})^m \tag{147}$$

$$\sum \lambda B(y_i, Lr) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m}L)^m \tag{148}$$

, где $B_i = B(x_i, r_i),\ y_i = \Phi(x_i)$

2. $E \subset O$ — произвольное, $\lambda E = 0$
   $O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — кубические ячейки, $Q_i \subset \overline{Q_i} \subset O$
   $E = \bigsqcup (E \cap Q_i)$ по п.1 $\lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$
   $\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$

$\square$

Следствие 34.1.22. λ — инвариантна относительно сдвигов(и $\mathfrak{M}^m$ тоже инвариантна)
т.е. $\forall a \in \mathbb{R}^m$: $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad A + a \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda A = \lambda(A + a)$

Доказательство. $\Phi : x \mapsto x + a \quad \Phi \in C^1(R^m)$ по теореме $\Rightarrow A + a \in \mathfrak{M}^m$,
$\lambda A = \lambda(A + a)$ следует из теоремы о лебеговском продолжении:
$A \subset \bigcup P_k \Leftrightarrow A + a \subset \bigcup (P_k + a)$
очевидно, что для ячейки при сдвиге $\lambda P_k = \lambda(P_k + a)$
$\Rightarrow \lambda A = \inf(\sum \lambda P_k) = \inf(\sum (P_k + a)) = \lambda(A + a)$ $\square$

Теорема 34.2. μ — мера на $\mathfrak{M}^m$:

1. μ — инвариантна относительно сдвига
   $\forall a \in \mathbb{R}^m \ \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E + a) = \mu E$

2. Для любого ограниченого множества $E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E) < +\infty$

Тогда $\exists k \in [0, +\infty) : \ \mu = k \cdot \lambda$
т.е. $\forall E \quad \mu E = k \cdot \lambda E \quad (0 \cdot \infty = 0)$

Примечание. $\mu A := \lambda_1 A$, если $\exists y_0 \quad A \subset \{(x, y_0) \big| x \in \mathbb{R}\}$

Доказательство. Нет
Посмотрим как мера μ задается на рациональных ячейках
В $\mathbb{R}^2$ Q_1 — единичная квадратная ячейка $\mu Q_1 = V$
Q_2 — ячейки со стороной 2 $\mu Q_2 = 4V \quad \mu Q_n = n^2 V \ \mu Q_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} V$
На $\mathcal{P}^m \mu$ пропорциональна λ, $k = V$ $\square$

Теорема 34.3 (инвариантность меры Лебега относительно линейных ортогональных преобразований)**.** $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — ортогональное преобразование
Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

1. $TA \in \mathfrak{M}^m$

2. $\lambda(TA) = \lambda A$

Доказательство.

1. $T \in C^1$ — поэтому измеримость сохраняется

2. $\mu A := \lambda(TA)$, μ — мера на $\mathfrak{M}^m$ по Лемме 1, при этом μ — инвариантна относительно сдвигов
   $\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \lambda A$
   A — ограничена $\Rightarrow TA$ — ограничена $\Rightarrow \mu A < +\infty$
   по теореме $\lambda(TA) = k \cdot \lambda A$
   Найдем k: возьмем шар B, TB = шар того же радиуса = $B + x_0$, таким образом $\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$

$\square$

Следствие 34.3.23. λ(прямоугольного параллелепипеда) = произведению сторон

Следствие 34.3.24. Любое собственное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$ имеет меру 0

Доказательство. Достаточно доказать, что $\lambda\{x \big| x_m = 0\} = 0$
$\{x \big| x_m = 0\} \simeq \mathbb{R}^{m-1} = \bigsqcup Q_i$ — единичные кубы $L \subset \bigsqcup Q_i \times [-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}]$
$\lambda_{\mathfrak{M}}(Q_i \times [-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}]) = \frac{2\varepsilon}{2^i}$ $\square$