Практика 8

Ilya Yaroshevskiy

6 апреля 2021 г.

Содержание

Задача 1.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ ax & 0 \le x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Найти a, мат. ожидание и т.д.

Решение. 1. Надо проверить условие нормировки. По условию нормирвки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} axdx = a \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

2.

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{4}{3}$$

3.

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (E\xi)^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

4.

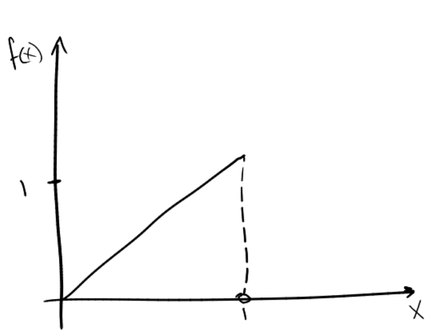
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

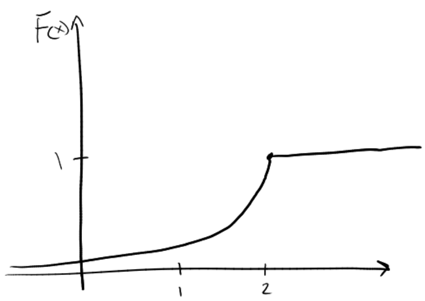
- при $x < 0$ $F(x) = 0$
- при $0 \le x \le 2$ $F(x) = \int_0^x \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^x = \frac{x^2}{4}$
- при $x > 2$ $F(x) = 0$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

5. $p(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$p\left(\frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4}\right) - F\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$





6.

Задача 2.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{A}{x^4} + B & x \geq 1 \end{cases}$$

Задача 3. Условия:

1. (a)

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

, $F(x)$ — непрерывная

(b)

$$\lim_{x-0 \to 1} F(x) = \lim_{x+0 \to 1} F(x)$$

Отсюда находим константы A, B

(a)

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{A}{x^4}}_{\to 0} + B = 1 \Rightarrow B = 1$$

(b)

$$\lim_{X-0 \to 1} 0 = \lim_{x+0 \to 1} \frac{A}{x^4} + 1 \Rightarrow A = -1$$

2.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{4}{x^5} & x \geq 1 \end{cases}$$

3.

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{4}{x^5}dx = 4 \cdot \frac{x^{-3}}{-3}\bigg|_1^{\infty} = -\frac{4}{3}\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{1^3}\right) = \frac{4}{3}$$

4.

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 fxdx - (E\xi)^2 = \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{4}{x^5}dx - \frac{16}{9} = 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\bigg|_1^{\infty} - \frac{16}{9} = -2\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

5.

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

6.

$$p(0 < \xi < 2) = F(2) - F(0) = \left(1 - \frac{1}{16}\right) - 0 = \frac{15}{16}$$

$$p(\xi > 4) = 1 - P(\xi < 4) = 1 - F(4)$$ Доделать

1 ДЗ

Задача 4.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ Ax + b & -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Найти A, B, плотность $f(x)$, числовые характеристики, $p(-1 < \xi < 1)$, графики

Задача 5.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A\sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $p(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{2})$, графики

Задача 6. Двое человек договорились всетретиться между 12:00 и 13:00. Случайная величина — вермя ожидания пришедшего первым. Найти матиматическое ожидание и дисперсию

Решение. $x, y \in [0,1],\ \xi = |x-y|$

$$F_\xi(t) = p(\xi < t) = p(|x-y| < t) = \frac{S_a}{S_\Omega} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-t)^2}{1} = 2t - t^2,\ t \in [0,1]$$

$$F_\xi = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t - t^2 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$f_\xi(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 - 2t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$E\xi - \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^1 t \cdot (2-2t)dt = t^2 - \frac{2}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt - (E\xi)^2 = \int_0^1 t^2(2-2t)dt - \frac{1}{9} = (\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^4}{2})\Big|_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{16}$$