Home work 11

Ilya Yaroshevskiy

December 3, 2020

Contents

1

$\overrightarrow{F} = \alpha^2 rm$

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$$
$$ma_x = -\alpha^2 rm\cos\varphi$$
$$ma_y = -\alpha^2 rm\sin\varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{r}$$
$$\sin\varphi = \frac{y}{r}$$
$$a_x = -\alpha^2 x$$
$$a_y = -\alpha^2 y$$
$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_{1,2} = \pm i\alpha$$
$$x = C_1\sin\alpha t + C_2\cos\alpha t$$

Аналогично $y = C_3\sin\alpha t + C_4\cos\alpha t$
Найдем коэффиценты:

$$\begin{cases} C_2 = x_0 \\ \alpha C_1 = V_{x_0} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{V_{x_0}}{\alpha}\sin\alpha t + x_0\cos\alpha t$$
$$\begin{cases} C_4 = y_0 \\ \alpha C_3 = V_{y_0} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{V_{y_0}}{\alpha}\sin\alpha t + y_0\cos\alpha t$$

2

$$\begin{cases} 3\ddot{x}_1 = -\alpha^2 x_1 + \alpha^2(x_2 - x_1) \\ 2\ddot{x}_2 = -\alpha^2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

решим уравнение вида $\ddot{X} = KX$, где $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\alpha^2 & \frac{1}{3}\alpha^2 \\ \frac{1}{2}\alpha^2 & -\frac{1}{2}\alpha^2 \end{bmatrix}$
Найдем собмтвенные значения матрицы K, они равны $\omega_1 = \alpha,\ \omega_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, а также соответствующие собственные вектора H_1, H_2, получим $H1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Теперь найдем решение в виде $X = A_1 H_1 \cos\omega_1 t + A_2 H_2 \cos\omega_2 t$
A_1, A_2 будут зависеть от начального полложения тел и равны $A_1 = \frac{x_{10} - x_{20}}{2}, A_2 = \frac{x_{10} + x_{20}}{2}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_{10}+x_{20}}{2}\cos\alpha t + \frac{x_{10}-x_{20}}{2}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{3}}t \\ x_2 = \frac{x_{10}+x_{20}}{2}\cos\alpha t - \frac{x_{10}-x_{20}}{2}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{3}}t \end{cases}$$

3

4

$I_C,\ I_L,\ I_R$ - соответсвенно токи через конденсатор, катушку, резистор
По правилу Киргофа: $I_L + I_C - I_R = 0$
А также $\begin{cases} U_R + U_L = E \\ U_R + U_C = E \end{cases}$
То есть $\begin{cases} I_R R + \frac{1}{C}\int I_C dt - E = 0 \\ I_R R + L\frac{dI_L}{dt} - E = 0 \end{cases}$
Будем находить I_R из уравнения $I_R R + L I_L' = V\sin\omega t$, принимая $I_R = A\sin(\omega t - \varphi)$

$$I_C' = C(E'' - I_R'' R)$$
$$I_L' = I_R' + C(I_R'' R - E'')$$
$$I_R R + L(I_R' + C(I_R'' R - E'')) = E$$
$$I_R R + I_R' L + I_R'' LRC = E + LCE''$$
$$RA\sin(\omega t - \varphi) + LA\omega\cos(\omega t - \varphi) - LCRA\omega^2\sin(\omega t - \varphi) = V\sin(\omega t) - LCV\omega^2\sin(\omega t)$$

Найдем коэффиценты при $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ в обеих частях, получим:

$$\begin{cases} RA\cos\varphi + LA\omega\sin\varphi - LCRA\omega^2\cos\varphi = V - LCV\omega^2 \\ -RA\sin\varphi + LA\omega\cos\varphi + LCRA\omega^2\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} A = \frac{V - LCV\omega^2}{R\cos\varphi + L\omega\sin\varphi - LCR\omega^2\cos\varphi} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)} \end{cases}$$

$$\cos\varphi = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}$$
$$A = \frac{V(1 - LC\omega^2)}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}$$

$\frac{dA}{dw} = 0 \Rightarrow \omega^2 = -\frac{1}{LC}$

5