Практика 7

Ilya Yaroshevskiy

7 апреля 2021 г.

Содержание

Задача 1.

$$\int_\alpha^\beta d\varphi \int_\gamma^\delta d\psi \dots$$

Решение.

$$x = r_0 \cos\varphi \cos\psi$$

$$y = r_0 \sin\varphi \cos\psi$$

$$z = r_0 \sin\psi$$

$$\begin{vmatrix} i & -r_0\cos\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ j & r_0\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ k & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\psi \\ -\sin\varphi\cos^2\psi \\ \cos\psi\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$r^2 \int_\alpha^\beta d\varphi \int_\gamma^\delta d\psi \cos\psi$$

Задача 2.

$$\iint\limits_{x\ge 0, y\ge 0} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^3)^p}$$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r^{\frac{2}{3}}\sin^{\frac{2}{3}}\varphi \end{array}\right.$$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{3} r^{\frac{2}{3}} \sin^{-\frac{1}{3}}\varphi}{(1+r^2)^p}$$

1 Тройной интеграл

Есть трехмерная фигура Ω

$$\iiint\limits_\Omega f\,dx\,dy\,dz \tag{1}$$

$3 = 1 + 2$

$$1 = \int_a^b dx \iint_{\Omega_x} f\,dy\,dz$$

$3 = 2 + 1$

$$1 = \iint_{\Omega_{xy}} dx\,dy \int_{z(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,dz$$

$$\iiint xy^2z^3 \tag{2}$$

- $z = xy$
- $y = x$

- $x = 1$
- $z = 0$

1.
$$2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} xy^2 z^3 dz$$

2.
$$2 = \int dy \int_y^1 dx \int_0^{xy} f dz$$

3.
$$2 = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{\frac{z}{x}}^x f\,dy$$

Задача 3.

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f\,dz$$

Решение.

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_z^1 dx \int\limits_0^{z-x} f\,dy + \int_0^z dx \int_{z-x}^{1-x} f\,dy$$

Задача 4.

$$\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^l \frac{1}{m^3}$$

$$\int\limits_0^a d\xi \int\limits_0^\xi d\eta \int\limits_0^\tau f(\zeta) d\zeta$$

Решение.

$$0 \le m \le l \le k \le N$$

$$0 \le \zeta \le \eta \le \xi \le a$$

$$= \int\limits_0^1 d\zeta \int\limits_\zeta^a \int\limits_\eta^a f(\zeta) d\xi = \int_0^a f(\zeta) \frac{(a-\zeta)2}{2} d\zeta$$

Задача 5.

$$\iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$

Решение.

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\psi \\ \vdots \end{cases}$$

$$J = r^2 \cos\psi$$