

Лекция 1

Илья Yaroshevskiy

9 февраля 2021 г.

Содержание

1	Теория меры	1
2	Интеграл	2
2.1	Измеримые функции	2
2.2	Меры Лебега-Стилльеса	4

1 Теория меры

Лемма 1 (о структуре компактного оператора). $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор, т.е. $\det V \neq 0$

Тогда:

- \exists ортонормированные базисы $g_1, \dots, g_m; h_1, \dots, h_m$
- $\exists S_1, \dots, S_m > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$ — разложение по базису

При этом $|\det V| = S_1 S_2 \dots S_m$

Доказательство. $W := V^* V$ — транспонирование в \mathbb{R}^m

W — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали)

Собственные числа c_1, \dots, c_m — вещественные

Собственные векторы g_1, \dots, g_m

Заметим что $c_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0 \Rightarrow c_i > 0$

- $S_i := \sqrt{c_i}$
- $h_i := \frac{1}{S_i} V g_i$

$$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{S_i S_j} \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i$$

$$V(x) = V\left(\sum_{i=1}^n \langle x, g_i \rangle g_i\right) = \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 = \det(V^* V) = \det W = c_1 \dots c_m \quad (1)$$

1 — т.к. диагональная матрица □

Теорема 1.1 (преобразование меры лебега при линейном отображении).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда:

- $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$
- $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

$(\det V = 0) \quad \text{Im}(V) — \text{подпространство в } \mathbb{R}^m \Rightarrow \text{мера} = 0$

$(\det V \neq 0) \quad \mu E := \lambda(V(E)) — \text{мера}$

$\mu — \text{инвариантна относительно сдвигов}$

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + Va) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k \cdot \lambda$ (Лемма из предыдущего семестра)

$Q — \text{единичный куб на векторах } g_i \text{ и } V(g_i) = S_i h_i, V(Q) = \{\sum \alpha_i S_i h_i | \alpha_i \in [0, 1]\} — \text{параллелепипед со сторонами } S_i, \dots, S_m$

□

2 Интеграл

2.1 Измеримые функции

Определение.

1. $E — \text{множество}, E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i — \text{разбиение множества}$
2. $f : X \rightarrow \mathbb{R} — \text{ступенчатая}, \text{ если}$
 $\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ f|_{e_i} = \text{const} = c_i$
 При этом такое разбиение — **допустимое разбиение**

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X \quad \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{cases}$
2. $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $\mathcal{X} = \bigsqcup e_i$

Примечание.

1. $\forall f, g — \text{ступенчатые}$
Тогда $\exists \text{ разбиения, допустимые и для } f, \text{ и для } g$

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad h = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{A_k}$$

$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap A_k} \quad g = \sum b_k \cdot \chi_{e_i \cap A_k}$$

2. $f, g — \text{ступенчатые}, \alpha \in \mathbb{R}$
Тогда $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f| — \text{ступенчатые}$

Определение. $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\} — \text{лебегово множество функции } f$

$E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a) — \text{также лебеговы множества}$

Если f задана на X : $X(f < a), X(f \leq a), \dots — \text{лебеговы множества}$

Примечание. $E(f \geq a) = E(f < a)^C; E(f < a) = E(f \geq a)^C$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E(f < a + \frac{1}{n})$$

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f — измерима на множестве E :

$a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ — измеримо (т.е. $\in \mathfrak{A}$)

Обозначение.

- f — измеримо на X — говорят просто "измеримо"
- $X = \mathbb{R}^m$, мера Лебега — измеримо по Лебегу

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \geq a)$ — измеримо

Пример. 1. $E \subset X$, E — измеримо, \mathcal{X}_E — измеримо

$$E(\mathcal{X}_E < a) = \begin{cases} \emptyset & , a < 0 \\ X \setminus E & , 0 \leq a \leq 1 \\ X & , a > 1 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна. Тогда f — измеримо по Лебегу

Примечание. Свойства:

1. f — измерима на E
 $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \quad E(f = a)$ — измеримо
 $\nexists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \mathcal{X} + \mathcal{X}_{\text{неизм.}}$
2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha f$ — измерима
3. f — измерима на $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$
4. f — измерима на E ; $E' \subset E \Rightarrow f$ — измерима на E'
 $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$
5. $f \neq 0$ — измерима на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима на E
6. $f \geq 0$, измерима на E , $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда f^α — измерима на E

Теорема 2.1. f_n — измерима на X .

Тогда:

- 1.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n; \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad (2)$$

2 — измеримы

2. $\overline{\lim} f_n; \quad \underline{\lim} f_n$ — измеримы

3. Если

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$$

, то $h(x)$ — измеримо

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$

- 2.

$$(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf \{s_n : s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)\}$$

3. очев.

□

2.2 Меры Лебега-Стилтьеса

Определение. $\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастает, непрерывна
 $\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ -конечный объем

$$g(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x), g(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} g(x)$$
$$\mu[a, b) := g(b-0) - g(a-0)$$

— тоже σ -конечная мера

Применим теорему о продолжении, получим меру μg на некой σ -алгебре — **мера Лебега-Стилтьеса**

Определение. $g(x) = \lceil x \rceil$

Пусть μg определена на Борелевской σ -алгебре — **мера Бореля-Стилтьеса**