Лекция 9

Ilya Yaroshevskiy

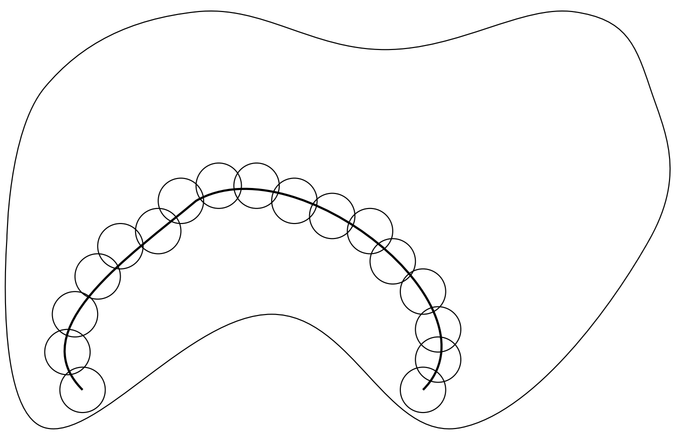
January 11, 2021

Contents

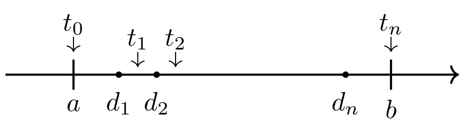
1 Локально потенциальные векторные поля

1.1 Интеграл локально потенциального векторного поля по непрерывному пути

Лемма 1 (о гусенице)**.** $\gamma : [a, b] \to \underset{\text{отк. мн.}}{O} \subset \mathbb{R}^m$ — *непрерывное*
Тогда $\exists$*дробление* $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = v$
и $\exists$ *шары* $B_1, \ \dots, \ B_n \subset O \quad \gamma[t_{k_1}, t_l] \subset B_k$



Proof. $\forall c \in [a, b]$ возьмем $B_c := B(\gamma(c), \underset{\text{произвол!!}}{r_c}) \subset O$
$\tilde{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] | \ \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$
$\tilde{\beta}_c := \sup\{\alpha \in [a, b] | \ \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$
Возьмем $(\alpha_c, \beta_c) : \ \tilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \tilde{\beta}_c$
Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$
Для случая $c = a$ *или* $c = b$ *вместо* (α_c, β_c) *берем* $[a, \beta_a), \ (\alpha_b, b]$
$[a, b]$ — компактен $\Rightarrow [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$, н.у.о ни один интервал не накрывается целиком остальными
$\forall (\alpha_c, \beta_c) \ \exists d_c$ — принадлежащая "только этому" интервалу



Точка t_k выбирается на отрезке (d_k, d_{k+1}) и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$
$\gamma([t_{k-1}, t_l]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$ ☐

Примечание. $\forall \delta > 0$ мы можем требовать чтобы все $r_k < \delta$

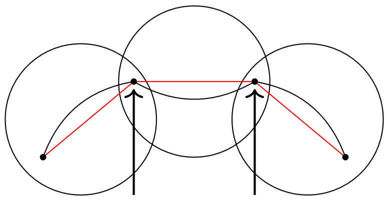
Примечание. В силу формулы "произвол!!" можно требовать, чтобы шары B_c удовлетворяли локальному условию

Пример. Пусть V — локально потенциальное векторное поле в O мы можем требовать, чтобы во всех шарах B_c существовал потенциал V.

Назовем в этом случае набор $\{B_k\}$ — V - гусеница

Определение. V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ называются **похожими** (V - похожими) если у них есть общая V - гусеница
$\exists t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = v \quad \exists$ шары $B_k \subset O$
$\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k, \ \tilde{\gamma}[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$

Следствие 1. V — локально потенциальное векторное поле
Тогда любой путь V - похож на ломаную



$\gamma(t_{k-1})$ $\gamma(t_k)$

Лемма 2 (о равенстве интегралов локально потенциального векторного поля по похожим путям)**.**
V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ — V - похожие, кусочно гладкие, $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \ \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$
Тогда $\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

Proof. Берем общую V - гусеницу
Пусть f_k - потенциал V в шаре B_k
$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$
Поправим потенциал(прибавим константы)
$f_k((t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1, 2, \ldots, n$
Тогда

$$\int_\gamma \sum V_i dx_i = \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \ldots \underset{\text{обобщ. ф-ла Н.-Л.}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) = \tag{1}$$

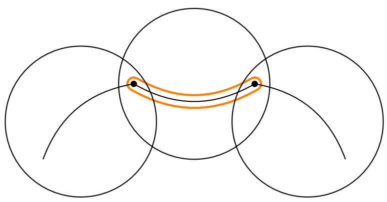
$$= \text{"телесопическая"} = f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \tag{2}$$

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k\Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}\Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$
и тогда аналогично $\int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_n(\tilde{\gamma}(a))$ $\square$

Примечание. Вместо "$\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \ \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$" можно взять условие "$\gamma, \tilde{\gamma}$ - петли, т.е. $\gamma(a) = \gamma(b), \ \tilde{\gamma}(a) = \tilde{\gamma}(b)$, и вообще говоря $\gamma(a) \neq \tilde{\gamma}(a)$" Тогда утверждение Леммы 2 тоже верно

Лемма 3. *$\gamma : [a, b] \to O$ - непрерывный, V - локально потенциальное векторное поле в O*
Тогда $\exists \delta > 0$ Если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} \to O$ таковы, что $\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, \ |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$
Тогда $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\tilde{\gamma}}$ (и γ) — V - похожи

Proof. Берем V - гусеницу для γ



δ_k - окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_[k]]$
$\forall k \ \exists \delta_k > 0 : \quad (\delta_k$ - окрестность $\gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$
δ - окрестность множества A: $\{x | \ \exists a \in A \ \rho(a, x) < \delta\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta)$
Следует их компактности: пусть $B_k = B(w, r)$
$t \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ - непрерывная функция $\Rightarrow$ достигает max
$\rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r \quad \delta_k := \frac{r - r_0}{2}$
$\delta := \min(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ $\square$

Определение. Интеграл локально потенциального векторного поля V по непрерывному пути γ
Возьмем $\delta > 0$ из Леммы 3
Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ - близкий кусочно гладкий путь, т.е. $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$
Полагаем: $I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$
Следует из Леммы 3 и Леммы 2

2 Сходимость рядов

$f_n \rightrightarrows f$ на E
$\forall \varepsilon > 0\ \exists V(\infty)\ \forall n \in V(\infty)\ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$f(x, y) \underset{x \to x_0}{\rightrightarrows} g(y)$ на множестве E(т.е. для $y \in E$)
$\forall \varepsilon > 0\ \exists V(x_0)\ \forall x \in \dot{V}(x_0)\ \forall t \in E |f(x, y) - g(y)| < \varepsilon$

Теорема 4.

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \tag{3}$$

Если один из предельных переходов равномерный

Теорема 1 (признак Дирихле)**.** $\sum a_n(x) b_n(x)$ — вещественный ряд, $x \in X$
Пусть:

1. Частичные суммы ряда $\sum a_n$ - равномерно ограничены
   $\exists C_a\ \forall N\ \forall x \in X \quad |\sum_{k=1}^{n} a_k(x)| \leq C_a$
2. $\forall x$ последовательность $b_n(x)$ — монотонна по n и $b_n(x) \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} 0$ на X

Тогда ряд $\sum a_n(x) b_n(x)$ рвномерно сходится на X
Для числовых рядов: $\sum a_n b_n$

1. частичные суммы a_n - ограничены
2. $b_n \to 0,\ b_n$ - монотонна

Тогда $\sum a_n b_n$ - сходится

Proof.

$$\sum_{k=M}^{N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{k=M}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \text{ где } A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \tag{4}$$

преобразование Абеля(суммирование по частям)

$$\left| \sum_{k=M}^{N} a_k(x) b_k(x) \right| \leq C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_{M-1}| + \sum_{k=M}^{N-1} C_a \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq C_a (|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=1}^{N-1} |b_k - b_{k+1}|) \leq \tag{5}$$

$$\leq C_a (2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|) \tag{6}$$

Переход (5) $\to$ (6): в сумме все разности одного знака $\Rightarrow$ "телескопическая" и равна $\pm(b_M - b_N)$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists K:\ \forall l > K\ \forall x \in X\ |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_a}$
Значит при $M, N > K \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=M}^{N} a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon$ — это критерий Больциано-Коши равномерной сходимости ряда ☐

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \quad x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

1. $f(x)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$?
   Теорема Стокса-Зайдля
   $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n^2}$
   По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на $\mathbb{R} \Rightarrow f$ — непрерывна на $\mathbb{R}$
2. f — дифференцируема ?

3 Степенные ряды

$B(r_0, r) \subset \mathbb{C}$ - открытый круг
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C},\ z$ — переменная $\in \mathbb{C}$

Теорема 2 (о круге сходимости степенного ряды)**.** $\sum a_n(z-z_0)^n$ - степенной ряд
Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится только при $z = z_0$
3. $\exists R \in (0, +\infty)$: при:
   - $|z - z_0| < R$ ряд сходится
   - $|z - z_0| > R$ ряд расходится

Proof. Признак Коши: $\sum a_n \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} = r$

- $r < 1$ ряд сходится
- $r > 1$ ряд расходится

$\sum a_n(z-z_0)^n$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z-z_0|^n} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-z_0| = |z-z_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} \tag{8}$$

- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ тогда $r = 0$ и есть (абсолютная) сходимость при всех z
- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ тогда $r = +\infty$ при $z \neq z_0$
  А при $z = z_0$ ряд очевидно сходится
- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0, +\infty \quad |z-z_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \overset{\text{def}}{=\!=} R$

  1. $|z - z_0| < R$ ряд сходится абсолютно
  2. $|z - z_0| > R$ ряд расходится, т.к. слагаемые $\not\to 0$

$\square$

Определение (степенной ряд)**.** $\sum a_n(z-z_0)^n$ число $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ — называется радиусом сходимости степенного ряда