Лекции по Дискретной математике 4 семестр

Ilya Yaroshevskiy

30 марта 2021 г.

Оглавление

Лекция 1

TODO

Лекция 2

2.1 Производящие функции

Определение. Полином — степенныой ряд, у которого начиная с некоторого места n все коэффиценты 0.

Обозначение. $\deg p = n$

Определение. $\frac{P(t)}{Q(t)}$ **— дробно рациональная функция**

2.1.1 Рекурентные соотношения

Определение.

$$m : a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$$

$k \leq m, n \geq m$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + a_k a_{n-k}$$

, где $c_1, \ldots, c_k$ — коэффиценты рекурентности

Пример.

- $m = 2,\ k = 2$
- $f_0 = f_1 = 1$
- $c_1 = c_2 = 1$

$\mathrm{f_n = f_{n\ \text{-}\ 1} + f_{n\ \text{-}\ 2}}$ — числа Фибоначи

Определение. Квазиполином

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) r_i^n$$

, где p_i — полином, r_i — числа

Теорема 2.1.1.
- $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$

Тогда эквивалентны:

1. $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, P, Q — полиномы, $q_0 \neq 0$
2. для $n \geq m$ a_n задается линейным рекурентным соотношением: $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$, причем:
   - $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \cdots - c_k t^k$
   - $\deg P \leq m - 1$
3. a_n — квазиполином
$$a_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) r_i^n \tag{2.1}$$
   причем:
   - r_i — обратные величины корням $Q(t)$
   - k — число различных его корней
   - $\deg p_i =$ (кратность корня$(r_i^{-1})) - 1$
     (2.1 кроме $\leq m$ первых членов)

Лекция 3

3.1 Производящие функции для объектов

- Оюъединение
  $A, B\ A \cap B = \emptyset\ C = A \cup B$
  $A(t)\ B(t)$
  $$C(t) = A(t) + B(t)$$
  $$c_n = a_n + b_n$$
- Пара
  $C = A \times B\ \mathrm{Pair}(A, B)$
  $$C(t) = A(t) \cdot B(t)$$
  $$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_n b_n$$
- Последовательности
  $C = \mathrm{Seq}\ A = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots\ a_0 = 0$
  $$C(t) = 1 + A(t) + A(t) \cdot A(t) + A(t)^3 + \dots$$
  $$C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$
- Множества
  ε вес 0
  $\mathrm{Set}\ A = \bigtimes_{a \in A} (\varepsilon \cup a)$
  $$C(t) = \prod_{a \in A} (1 + t^{\omega(a)}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + t^k)^{a_k}$$
  Пример. $\mathrm{Set}\left\{\square, \boxminus\right\}\ a_1 = 1, a_2 = 1$
  $$C(t) = (1 + t)(1 + t^2) = t^3 + t^2 + t + 1$$

- Мультимножества

$$\mathrm{MSet} A = \bigtimes_{a \in A} (\varepsilon \cup a \cup a^2 \cup \dots) = \prod_{a \in A} \mathrm{Seq}\{a\}$$

$$C(t) = \prod_{a \in A} \frac{1}{1 - t^{\omega a}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^k} \right)^{a_k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)^{-a_k}$$

Пример. $\mathrm{MSet}\{\square, \boxminus\}$

$$C(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t^2)(1+t)}$$

$$c_n = dn + e + f \cdot (-1)^n$$

Пример. $\mathrm{Seq}_{=k}(A) = A^k$ — ровно 3 элемента
$\mathrm{Seq}_{\geq k}(A) = A^k \times \mathrm{Seq}(A) \frac{A(t)^k}{1-A(t)}$
$\mathrm{Seq}_{\leq k}(A) = \frac{1}{1-A(t)} - \frac{A(t)^{k+1}}{1-A(t)} = \frac{1-A(t)^{k+1}}{1-A(t)}$

Лекция 4

4.1 Производящие функции для регулярных языков

L — регулярный язык
$$|L \cap \Sigma^n| = a_n$$
$$L(t) = a_0 + a_1 t + \dots$$

Примечание. L — регулярная спецификация
ψ — регулярное выражение:

1. $L(\psi) = L$
2. $\forall x \in Ł$ $\exists!$ способ x удовлетворяющий ψ

Лемма 1. *Σ — конечный алфавит, $L \subset \Sigma^*$*
L — регулярная спецификация $\Leftrightarrow$ L получаетя из Σ:

1. *Дизъюнктное объединение $+$*
2. *Прямое произведение $\times$*
3. *Последовательность Seq*

Доказательство. Общее рассждудение: по индукции рассмотрим для каждой операции во что она перейдет, надо показать что единственность вывода сохраняется Не работает $\square$

Пример.
$$ab^*|a^*b$$
$$a \times \operatorname{Seq} b | \operatorname{Seq} a \times b$$

объединение дизъюнктное? $\Rightarrow$ не регелярная спецификация

Пример.
$$(ab^*)^*$$
$$\operatorname{Seq}(a \times \operatorname{Seq} b)$$

Теорема 4.1.1. Если у L есть регулярная спецификация, то L — дробно рациональная

Теорема 4.1.2 (Производящая функция регулярного языка)**.** L — регулярный язык над Σ, ДКА A:

- Состояния $Q,\ |Q| = n$
- $s \in Q$ — стартовое сотояние
- $T \subset Q$ — терминальные

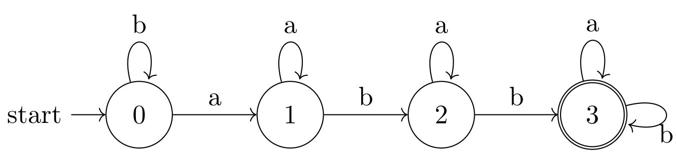
$$u = (\overbrace{0, 0, \dots, \underbrace{1}_{s}, 0, \dots, 0}^{n})$$

$$v = (\overbrace{0, \underbrace{1}_{\in T}, 0, \underbrace{1}_{\in T}, \dots, \underbrace{1}_{\in T}, 0}^{n})$$

$$D = (d_{ij})^T,\ d_{ij} = |\{c | i \xrightarrow{c} j\}|$$

$$L(t) = \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v}$$

Пример. Язык из слов, которые содержат abb как подстроку



$$\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)}$$

4.2 Автомат КМП и автокор. многочлен

Конструкция Гуибаса-Одлызко

$$p = \boxed{\mathrm{p}_1, p_2, \dots, p_k}$$

$$c_i = [p[i+1 \dots k] = p[1 \dots k-i]]$$

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{k-1} t^{k-1}$$

Пример. $p =$ aabbaa
$c = (1, 0, 0, 0, 1, 1)$
$c(t) = 1 + t^4 + t^5$

Теорема 4.2.1.

- $\Sigma,\ |\Sigma| = m$

S_n — количество слов длины n, не содержащих p

$$S(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \dots$$

$$S(t) = \frac{c(t)}{t^k + (1 - mt)c(t)}$$

Пример. $p =$ abb

$$c(t) = 1$$

$$\frac{1}{t^3 + (1 - 2t) \cdot 1} = \frac{1}{1 - 2t + t^3}$$

4.2.1 Пентагональная формула Эйлера

$$p_0\ p_1\ p_2\ \dots\ p_n\ \dots$$

p_n — количество разбиений n на слагаемые из $\mathbb{N}$. Порядок не важен

- $U = \{0\},\ u_1 = 1,\ U(t) = t$
- $N = \mathrm{Seq}^+ U =$положительно целые числа
- $P = \mathrm{MSet}\ N$

$$P(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t^k}$$

$$Q(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)$$

$$R(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + t^k)\ [t^n]R \to r_n$$

r_n — количество разбиений на различные слагаемые

$$[t^n]Q = \sum_{\substack{\text{разбиение } n \text{ на} \\ \text{различные слагаемые}}} (-1)^{\text{число слагаемых}}$$

$$q_n = e_n - o_n$$

e_n — число разбиений на четное число различных слагаемы, o_n — число разбиений на нечетное число различных слагаемы,

Теорема 4.2.2.

$$Q(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (t^{\frac{3k^2-k}{2}} + t^{\frac{3k^2+k}{2}})$$

Лемма 2.

$$n \neq \frac{ek^2 \pm k}{2}, \text{\textit{то}}\ e_n = o_n$$

$$n = \frac{ek^2 \pm k}{2}, \text{\textit{то}}\ e_n = o_n + (-1)^k$$

Лекция 5

5.1 Помеченные КО и экспоненциальные производящие функции

$$a_0\ a_1\ a_2\ \dots\ a_n\ \dots \quad A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

Определение. Экспоненциальная производящая функция:

$$a(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot t + \frac{a_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

Обозначение. Мы будет обозначать ЭПФ так-же большой буквой

Пример. $1, 1, 1, 1, , 1, 1, 1, 1, 1$

ОПФ $\frac{1}{1-t}$

ЭПФ $1 + 1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot t^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot t^n = e^t = \exp(t)$

Пример. $1, 1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots \quad a_n = n!$

ОПФ $1 + t + 2 \cdot t^2 + 6 \cdot t^3 + \dots + n! \cdot t^n + \dots$

ЭПФ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n!} \cdot t^n = \frac{1}{1-t}$

$$A(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot t + \frac{a_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

$$B(t) = \frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!} \cdot t + \frac{b_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{b_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

Свойство 1.

$$C(t) = A(t) \pm B(t) \quad c_n = a_n \pm b_n$$

Свойство 2.

$$C(t) = a(t) \cdot B(t)$$

$$\frac{C_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

Свойство 3.

$$C(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} + b_0 c_n$$

$$c_n = \frac{a - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k}}{b_0}$$

Далее все производящие функции — экспоненциальные, а объекты помеченые

5.1.1 Помеченные объекты

Пример. Перестановк. $P_n = n!$ — количество перестановок из n элементов

Пример. Пустые графы. $E_n = 1$ — количество графов с n вершинами
ЭПФ: $\exp(t)$

Пример. Циклы. $C_n = (n-1)!$ — количество циклов из n вершин. Направление обхода фиксировано.
ЭПФ: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot t^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}$

5.1.2 Операции

1. Дизъюнктное объединение (сумма)
    - A
    - B
    - $A \cap B = \emptyset$
    - $C = A \cup B$

    $$c_n = a_n + b_n \quad C(t) = A(t) + B(t)$$

2. Пара (произведение)
    - A
    - B
    - $C = A \times B$

$$C = \{\langle \underbrace{a}_{k\text{ атомов}}, \underbrace{b}_{n-k\text{ атомов}} \rangle\}$$

Получим последовательность $c_1c_2\dots c_n$. Перенумеруем элементы:
Первые k в $d_1d_2\dots d_k$, где $d_i = |\{c_j | 1 \le j \le k,\ c_k \le c_i\}|$.
А остальные $c_{k+1}\dots c_n$ в $e_1\dots e_{n-k}$, где $e_i = |\{c_j | k+1 \le j \le n,\ c_j \le c_{i+k}\}|$.
Пусть $d_i = a_i$, а $e_i = b_i$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \quad C(t) = A(t)\cdot B(t)$$

Пример. Пары перестановок. $C(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Тогда $c_n = (n+1)n!$

3. Последовательность

$$C = \operatorname{Seq} A = \emptyset + A \times \operatorname{Seq} A$$

$$C(t) = 1 + A(t)\cdot C(t)$$

$$C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$

Пример.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$
- $\operatorname{Seq} U = P$

$$P(t) = \frac{1}{1-t}$$

4. Множества (Set)

- $\operatorname{Set}_k A$ — множества, содержащие k обхектов

$$B_k = \operatorname{Seq}_k A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k} \quad B_k(t) = A(t)^k$$

$$\operatorname{Set}_k A = \operatorname{Seq}_k A/_\sim$$

$[x_1x_2\dots x_k] \sim [y_1y_2\dots y_k]$. $\exists$ перестановка $\pi : x_i = y_{\pi[i]}$

$$C_k(t) = \frac{1}{k!} \quad B_k(t) = \frac{A(t)^k}{k!}$$

$$\operatorname{Set} A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{Set}_k A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(t)^k}{k!} = e^{A(t)}$$

Пример.

- $U = \{\circ\}$

- $U(t) = t$

$$\operatorname{Set} U = E \quad E(t) = e^t$$

, где E — пустые графы

Пример. Циклы.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$
- $B = \operatorname{Set} \operatorname{Cyc} U$

$$B(t) = e^{C(t)} = e^{\ln \frac{1}{1-t}} = \frac{1}{1-t}$$

Набор помеченных циклов являеся престановкой

5. Циклы

- $\operatorname{Cyc}_k A$ — количество циклов длины k

$$C = \operatorname{Cyc}_k A = \operatorname{Seq}_k A/_{\sim}$$

, где классы эквивалентности с точностью до циклических сдвигов. $[x_1 \dots x_k] \sim [y_1 \dots y_k]$. $\exists i : \; x_j = y_{(i+j) \mod k+1}$

$$\operatorname{Cyc} U = \ln \frac{1}{1-t}$$

$$C_k(t) = \frac{1}{k} A(t)^k$$

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A(t)^k = \ln \frac{1}{1 - A(t)}$$

$$\operatorname{Set} \operatorname{Cyc} U = P$$

$$\operatorname{Set} \operatorname{Cyc} A \simeq \operatorname{Seq} A$$

5.1.3 Обобщение

Теорема 5.1.1 (о подстановке)**.**

- A — помеченные КО — $A(t)$
- B — помеченные КО — $B(t)$

$C = A[B]$ — вместо каждого атома A подставляем КО B, перенумеруем получившиеся атомы произвольным образом

$$C(t) = A(B(t))$$

Пример. $A \times A$ — пара атомов. Их две $B(t) = t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2$. Подставляем $B(A(t)) = A(t)^2$

Лекция 6

Рассмотрим деревья:

$$T = t \times Seq\, T$$

, где t — корень

$$A(t) = t \cdot \phi(A(t))$$

$$\phi(s) = \frac{1}{1-s}$$

Решить это уравнение в общем виде можно с помощью формулы Лагранжа

Теорема 6.0.1 (формула обращения Лагранжа)**.**

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}](\phi(s))^n$$

, где $[s^n]A(s)$ — коэффицент при s^n в $A(s)$

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Пример. Применим ее для деревьев

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}] \left(\frac{1}{1-s} \right)^n$$

$$\left(\frac{1}{1-s} \right)^n = (1 + s + s^2 + s^3 + \dots + s^k + \dots)^n$$

$$(1-s)^{-n} = 1 - \binom{-n}{1} s + \binom{-n}{2} s^2 - \binom{-n}{3} s^3$$

$$\binom{-n}{n-1} = \frac{-n \cdot (-n-1) \cdot (-n-2) \cdot \dots \cdot (-n-(n-1)+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}$$

$$\frac{1}{n}(-1)^{n-1} \binom{-n}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \binom{2n-2}{n-1}$$

Пример.

$$\phi(s) = e^s$$

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}]e^{ns}$$

$$e^{ns} = 1 + \frac{1}{1!}(ns) + \frac{1}{2!}(ns)^2 + \frac{1}{3!}(ns)^3 + \dots$$

$$[s^{n-1}]e^{ns} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

6.1 Производящая функция от нескольких перменных

$\binom{n}{k}$ образуют таблицу:

$n \backslash k$					
	1				
	1	1			
	1	2	1		
	1	3	3	1	
	1	4	6	4	1

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} t^n$$

$$B_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{l} t^k$$

$$C(u, z) = \sum_{n,k} \binom{n}{k} z^n u^k = \frac{1}{1 - z - uz}$$

Посмотрим на $C(u, z)$ так: n — вес, k — стоимость. Будем считать, что z — не берем объект, uz — берем объект

$$\mathrm{Seq}\,\{z, uz\} = [], [z], [uz], [z, z], [z, uz], [uz, z], [uz, uz], \dots$$

$$A(u, z) = z + uz$$

6.1.1 Числа Стирлинга I рода

Исправить

Помеченные перстановки, $\mathrm{Set}\,\mathrm{Cyc}\,Z$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Set}_{=k} \mathrm{Cyc}\,Z$$

$$\mathrm{Set}\,\mathrm{Cyc}\,Z = e^{\ln\frac{1}{1-Z}} = \frac{1}{1-Z}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Set}_{=k}\left(u \times \mathrm{Cyc}\,Z\right) \mapsto \sum_{n,k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n!} z^n u^k$$

$$\mathrm{Set}_{\,=k}(A) =$$

k! = A(Z)^k $\overline{k!}$

$$u \times \mathrm{Cyc}\,Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(u \ln\left(\frac{1}{1-Z}\right)\right)^k}{k!} = e^{u\ln\frac{1}{1-Z}} = (1-Z)^{-u}$$

$$(1-Z)^{-u} = \sum_{n,k} \frac{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}}{n!} Z^n u^k$$

6.1.2 Числа Стирлинга II рода

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \quad \mathrm{Set}\,\mathrm{Set}_{\,>0} Z$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Set}_{\,=k}(u \times \mathrm{Set}_{\,>0} Z)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(u(e^Z-1)^k\right)}{k!} = e^{ue^Z-u} = \sum_{n,k} \frac{\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}}{n!} z^n u^k$$

6.1.3 Средняя стоимоть

- $A \quad a_{n,k} = [z^n u^k]A(u,z)$ — количество объектов веса n стоимости k

$$w_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k a_{n,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}} = \frac{[z^n]\left(\frac{\partial}{\partial u}A(u,z)\right)\Big|_{u=1}}{[z^n]A(1,z)}$$

1. Разбиение на слагаемые, порядок важен Аналогично рассотовке перегорожок, $\mathrm{Seq}\,\mathrm{Seq}_{\,>0} Z$

$$\mathrm{Seq}\ (u \times \mathrm{Seq}_{\,>0} Z)$$

$$\frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$$

$$A(u,z) = \frac{1}{1-\frac{uz}{1-z}} = \frac{1-z}{1-z-uz}$$

$$\frac{\partial A(u,z)}{\partial u}\bigg|_{u=1} = \frac{z(1-z)}{(1-z-uz)^2}\bigg|_{u=1} = \frac{z(1-z)}{(1-2z)^2}$$

Числитель

$$[z^n]\frac{z(1-z)}{(1-2z)^2} = \frac{2^n(n+1)}{4}$$

Знаменатель

$$[z^n]\frac{1-z}{1-2z} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

Среднее число слагаемых:

$$\frac{2^n(n+1)}{2^{n-1}\cdot 4} = \frac{n+1}{2}$$

2. Среднее число циклов в перестановке

$$A(u,z) = (1-z)^{-u}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}A(u,z) = \frac{\partial}{\partial u}e^{u\ln\frac{1}{1-z}} = \ln\frac{1}{1-z}\cdot e^{u\ln\frac{1}{1-z}}$$

Подставляем $u=1$:

Числитель

$$[z^n]\frac{\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)}{1-z} = B(z)$$

Знаменатель

$$(1-z)^{-u}u = 1 = \frac{1}{1-z}$$

$$[z^n]\frac{1}{1-z} = 1$$

$$(z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots + \frac{1}{k}z^k + \dots)\cdot(1 + z + z^2 + \dots)$$

$$[z^n]B(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n \sim \log n$$