Лекция 1

Ilya Yaroshevskiy

27 февраля 2021 г.

Содержание

1 Теория погрешности

Отклонение от теоретического решения Виды погрешности:

1. Неустранимая погрешность

   Пример. Физические величины, другие константы

2. Устранимая погрешнеость Связана с методом решения

   (a) Погрешность модели
   Связана с матиматической формулировкой задачи. Она плохо отображает реальную модель

   (b) Остаточная погрешность(Погрешноть аппроксимации)

   (c) Погрешность округления

   (d) Накапливаемая погрешность
   Нецелые числа

- X^* — точное решение

- X — Приближенное решение
- $X^* - X$ — погрешность
- $\Delta X = |X^* - X|$ — абсолютная погрешность
  $\Delta_X \geq |X^* - X|$ — предельная абсолютная погрешность, т.е.
  $$X - \Delta_X \leq X^* \leq X + \Delta_X$$
- $\delta X = \left|\frac{X^* - X}{|X|}\right|$ — относительная погрешость
  $\delta_X \geq \left|\frac{X^* - X}{|X|}\right|$ — предельная относительная погрешность

1.1 Значащие цифры

Определение. Все цифры в изображении отличные от нуля, и нули если они содержатся между значащими цифрами, или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряды точности. Нули стоящие левее, отличной от нуля цифры, не являются значащимицифрами Между ненулевыми, или указывающие на точность

Пример. $\underbrace{0.00}_{\text{незнач.}}2080$

Пример. $689000 = 0.689 \cdot 10^6$ — 3 значащие цифры $689000 = 0.689000 \cdot 10^6$ — 6 значащих цифр

1.2 Верные цифры

Если, значащая цифра приближенного значения, находящаяся в разряде, в котором выполняется условие — абсолютное значение погрешности не превосходит половину уиницы этого разряда $\Delta \leq 0.5 \cdot 10^k$, где k — номер разряда, то она называется верной

Пример. $a = 3.635$
$\Delta a = 0.003$

(3) $k = 0$ $\frac{1}{2} \cdot 10^0 = \frac{1}{2} \geq \Delta a$

(6) $k = -1$ $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05 \geq \Delta a$

(3) $k = -2$ $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005 \geq \Delta a$

(5) $k = -3$ $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0.0005 < \Delta a \Rightarrow 5$ — сомнительная цифра

1.3 Распространение погрешности

Пример. $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$

$$\frac{7}{5} = 1.4$$
$$\frac{17}{12} = 1.41666$$
$$\frac{707}{500} = 1.414$$
$$\sqrt{2} = 1.4142145624$$

$$\Delta_{x \pm y} = \Delta_x \pm \Delta_y$$
$$\Delta_{(x \cdot y)} \approx |Y|\Delta_X + |X|\Delta_Y$$
$$\Delta_{(\frac{x}{y})} \approx \left|\frac{1}{Y}\right| \Delta_X + \left|\frac{X}{Y^2}\right| \Delta_Y$$
$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)|$$
$$|\Delta u| \approx |df(x_1, \ldots, x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \cdot |\Delta x_i| \tag{1}$$
$$|\delta u| = \frac{1}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{u}\right| \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln u}{\partial x_i}\right| \cdot |\Delta x_i|$$
$$\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln u}{\partial x_i}\right| \cdot |\Delta x_i|$$
$$\delta_{(X \pm Y)} = \left|\frac{X}{X \pm Y}\right| \delta_X + \left|\frac{Y}{X \pm Y}\right| \delta_Y$$
$$\delta_{(X \cdot Y)} = \delta_X + \delta_Y$$
$$\delta_{(\frac{X}{Y})} = \delta_X + \delta_Y$$

Пример. $x = \frac{7}{5}$

- $f_1 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$$\delta_{f_1} = 3\left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right| \cdot |\Delta X| = 6.25|\Delta X|$$

- $f_2 = (\sqrt{2}-1)^6$

$$\delta_{f_2} = 6\left|\frac{1}{x-1}\right| \cdot |\Delta X| = 15|\Delta X|$$

- $f_3 = (3-2\sqrt{2})^3$

$$\delta_{f_3} = 6\left|\frac{1}{3-2x}\right| \cdot |\Delta X| = 30|\Delta X|$$

- $f_4 = 99 - 70\sqrt{2}$

$$\delta_{f_4} = \left|\frac{90}{99-70x}\right| \cdot |\Delta X| = 70|\Delta X|$$

Пример.

$$y^2 - 140y + 1 = 0$$

Вычислить корни.

- $y = 70 - \sqrt{4899}$
  $\sqrt{4899} = 69.992\ldots$
  $\sqrt{4899} \approx 69.99$
  $y \approx 70 - 69.99 = 0.01$

$$y = \frac{1}{70+\sqrt{4899}}$$

  $\sqrt{4899} = 69.99;\ 70 + 69.99 = 139.99$
  $y = \frac{1}{140} = 0.00714285 \approx 0.007143$

2 Одномерная минимизация функций

2.1 Унимодальные функции

$f(x) \to \min,\ x \in U$
$f(x) \to \max \Rightarrow -f(x) \to min$
$x^* \in U$ — точка минимума: $f(x*) \leq f(x)\ \forall x \in U$
U^* — множество точек минимума
$\tilde{x} \in U : \exists V(\tilde{x})\ \forall x \in V\ f(\tilde{x}) \leq f(x)$ — локальный минимум

Определение. $f(x)$ — **унимодальная функция** на $[a,b]$, если:

1. $f(x)$ — непрерывна на $[a,b]$
2. $\exists \alpha, \beta : a \leq \alpha \leq \beta \leq b$
   (a) Если $a < \alpha$, то $[a,\alpha]$ $f(x)$ — монотонно убывает
   (b) Если $\beta < b$, то на $[\beta, b]$ $f(x)$ — монотонна возрастает
   (c) $\forall x \in [\alpha,\beta]$ $f(x) = f^* = \min_{[a,b]} f(x)$

Примечание. Свойства:

1. Любая из точек локального минимума является глобальным минимумом на этом же отрезке
2. Функця унимодальная на $[a,b]$ унимодальна на $[c,d] \subset [a,b]$
3. $f(x)$ унимодальна на $[a,b]$ $a \leq x_1 < x_2 \leq b$
   (a) если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$
   (b) если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$

Определение. $f(x)$ **выпукла** на $[a, b]$, если:

- $\forall x', x'' \in [a, b]$ и $\alpha \in [0, 1]$:

$$f(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \leq \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x'')$$

Примечание. Свойства:

1. Если $f(x)$ на $[a, b]$ $[x', x''] \subset [a, b]$
2. Всякая выпуклая и непрерывная функция на $[a, b]$ является унимодальной на этом отрезке. Обратное не верно

Определение. $x : f'(x) = 0$ — **стационарная точка**

2.2 Прямые методы

Не требуют вычисление производной. Могут использовать только известные значения.

2.2.1 Метод дихотомии

$$x_1 = \frac{b + a - \delta}{2} \quad x_2 = \frac{b + a + \delta}{2} \tag{2}$$

$$\tau = \frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_2 - a}{b - a} \to \frac{1}{2}$$

$$X^*[a_i, b_i] \quad \frac{b_i - a_i}{2} \leq \varepsilon$$

1. x_1 и x_2; вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$
2. $f(x_1)$ и $f(x_2)$
   - Если $f(x_1) \leq f(x_2) \to [a, x_2]$, т.е. $b = x_2$
   - Иначе $[x_1, b] \to [x_1, b]$, т.е. $a = x_1$
3. $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$ (n — номер итерации)
   - Если $\varepsilon_n > \varepsilon$ — переход к следующей итерации(шаг 1)
   - Если $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, заврешить поиск(шаг 4)
4. $x^* \approx \overline{x} = \frac{a+b}{2} \quad f^* \approx f(\overline{x})$

2 $\delta \in (0, 2\varepsilon)$
Число итерций $n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$