Лекция 6

Ilya Yaroshevskiy

30 марта 2021 г.

Содержание

Рассмотрим деревья:

$$T = t \times Seq\, T$$

, где t — корень

$$A(t) = t \cdot \phi(A(t))$$

$$\phi(s) = \frac{1}{1-s}$$

Решить это уравнение в общем виде можно с помощью формулы Лагранжа

Теорема 0.1 (формула обращения Лагранжа)**.**

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}](\phi(s))^n$$

, где $[s^n]A(s)$ — коэффицент при s^n в $A(s)$

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Пример. Применим ее для деревьев

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}] \left(\frac{1}{1-s}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{1-s}\right)^n = (1 + s + s^2 + s^3 + \dots + s^k + \dots)^n$$

$$(1-s)^{-n} = 1 - \binom{-n}{1} s + \binom{-n}{2} s^2 - \binom{-n}{3} s^3$$

$$\binom{-n}{n-1} = \frac{-n \cdot (-n-1) \cdot (-n-2) \cdot \dots \cdot (-n-(n-1)+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}$$

$$\frac{1}{n}(-1)^{n-1} \binom{-n}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \binom{2n-2}{n-1}$$

Пример.

$$\phi(s) = e^s$$

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n} \cdot [s^{n-1}] e^{ns}$$

$$e^{ns} = 1 + \frac{1}{1!}(ns) + \frac{1}{2!}(ns)^2 + \frac{1}{3!}(ns)^3 + \dots$$

$$[s^{n-1}]e^{ns} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

1 Производящая функция от нескольких перменных

$\binom{n}{k}$ образуют таблицу:

$n\backslash k$					
	1				
	1	1			
	1	2	1		
	1	3	3	1	
	1	4	6	4	1

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} t^n$$

$$B_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{l} t^k$$

$$C(u,z) = \sum_{n,k} \binom{n}{k} z^n u^k = \frac{1}{1-z-uz}$$

Посмотрим на $C(u,z)$ так: n — вес, k — стоимость. Будем считать, что z — не берем объект, uz — берем объект

$$\text{Seq}\{z, uz\} = [], [z], [uz], [z,z], [z,uz], [uz,z], [uz,uz], \ldots$$

$$A(u,z) = z + uz$$

1.1 Числа Стирлинга I рода

Исправить

Помеченные перстановки, Set Cyc Z

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Set}_{=k} \text{Cyc}\, Z$$

$$\text{Set Cyc}\, Z = e^{\ln \frac{1}{1-Z}} = \frac{1}{1-Z}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Set}_{=k}\,(u \times \text{Cyc}\, Z) \mapsto \sum_{n,k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{n!} z^n u^k$$

$$\text{Set}_{=k}(A) =$$

k! = A(Z)^k$\overline{{}_{k!}}$

$$u \times \text{Cyc}\, Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(u \ln\left(\frac{1}{1-Z}\right)\right)^k}{k!} = e^{u \ln \frac{1}{1-Z}} = (1-Z)^{-u}$$

$$(1-Z)^{-u} = \sum_{n,k} \frac{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}}{n!} Z^n u^k$$

1.2 Числа Стирлинга II рода

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \quad \text{Set Set}_{>0} Z$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Set}_{=k}(u \times \text{Set}_{>0} Z)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u(e^Z - 1)^k)}{k!} = e^{ue^Z - u} = \sum_{n,k} \frac{\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}}{n!} z^n u^k$$

1.3 Средняя стоимоть

- $A \quad a_{n,k} = [z^n u^k]A(u,z)$ — количество объектов веса n стоимости k

$$w_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k a_{n,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}} = \frac{[z^n]\left(\frac{\partial}{\partial u}A(u,z)\right)\Big|_{u=1}}{[z^n]A(1,z)}$$

1.3.1 Разбиение на слагаемые, порядок важен

Аналогично рассотовке перегорожок, $\operatorname{Seq}\operatorname{Seq}_{>0} Z$

$$\operatorname{Seq}\,(u \times \operatorname{Seq}_{>0} Z)$$

$$\frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$$

$$A(u,z) = \frac{1}{1 - \frac{uz}{1-z}} = \frac{1-z}{1-z-uz}$$

$$\frac{\partial A(u,z)}{\partial u}\bigg|_{u=1} = \frac{z(1-z)}{(1-z-uz)^2}\bigg|_{u=1} = \frac{z(1-z)}{(1-2z)^2}$$

Числитель

$$[z^n]\frac{z(1-z)}{(1-2z)^2} = \frac{2^n(n+1)}{4}$$

Знаменатель

$$[z^n]\frac{1-z}{1-2z} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

Среднее число слагаемых:

$$\frac{2^n(n+1)}{2^{n-1}\cdot 4} = \frac{n+1}{2}$$

1.3.2 Среднее число циклов в перестановке

$$A(u,z) = (1-z)^{-u}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}A(u,z) = \frac{\partial}{\partial u}e^{u \ln \frac{1}{1-z}} = \ln\frac{1}{1-z} \cdot e^{u \ln \frac{1}{1-z}}$$

Подставляем $u = 1$:

Числитель

$$[z^n]\frac{\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)}{1-z} = B(z)$$

Знаменатель

$$(1-z)^{-u} u = 1 = \frac{1}{1-z}$$

$$[z^n]\frac{1}{1-z} = 1$$

$$(z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots + \frac{1}{k}z^k + \dots)\cdot(1 + z + z^2 + \dots)$$

$$[z^n]B(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n \sim \log n$$