

Лекции по Математическому анализу 4
семестр

Ильа Yaroshevskiy

5 апреля 2021 г.

Оглавление

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | | 3 |
| 1.1 | Теория меры | 3 |
| 1.2 | Интеграл | 4 |
| 1.2.1 | Измеримые функции | 4 |
| 1.2.2 | Меры Лебега-Стильеса | 7 |
| 2 | | 8 |
| 2.1 | Теория меры | 8 |
| 2.1.1 | Измеримые функции | 8 |
| 2.1.2 | Сходимость почти везде и по мере | 11 |
| 2.2 | Интеграл | 15 |
| 3 | | 17 |
| 3.1 | Интеграл | 17 |
| 3.1.1 | Предельный переход под знаком интеграла | 21 |
| 4 | | 25 |
| 4.1 | Плотность одной меры по отношению к другой | 29 |
| 4.1.1 | Замена переменных в интеграле | 29 |
| 5 | | 32 |
| 5.1 | Плотности | 32 |
| 5.2 | Мера лебега | 34 |
| 6 | | 39 |
| 6.1 | Сферические координаты в R^m | 39 |
| 6.2 | Произведение мер | 40 |
| 7 | | 46 |
| 7.1 | Принцип Кавальери | 46 |
| 7.2 | Поверхностные интегралы | 48 |
| 7.2.1 | Поверхностные интегралы I рода | 48 |

| | |
|--|-----------|
| ОГЛАВЛЕНИЕ | 2 |
| 8 | 50 |
| 8.1 Поверхностный интеграл II рода | 50 |
| 8.2 Ряды Фурье | 53 |
| 8.2.1 Пространства L^p | 53 |

Лекция 1

1.1 Теория меры

Лемма 1 (о структуре компактного оператора). $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор, т.е. $\det V \neq 0$

Тогда:

- \exists ортонормированные базисы $g_1, \dots, g_m; h_1, \dots, h_m$
- $\exists S_1, \dots, S_m > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$ — разложение по базису

При этом $|\det V| = S_1 S_2 \dots S_m$

Доказательство. $W := V^* V$ — транспонирование в \mathbb{R}^m

W — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали)

Собственные числа c_1, \dots, c_m — вещественные

Собственные векторы g_1, \dots, g_m

Заметим что $c_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0 \Rightarrow c_i > 0$

- $S_i := \sqrt{c_i}$
- $h_i := \frac{1}{S_i} V g_i$

$$\begin{aligned} \langle h_i, h_j \rangle &= \frac{1}{S_i S_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{S_i S_j} \langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij} \\ V(x) &= V\left(\sum_{i=1}^n \langle x, g_i \rangle g_i\right) = \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i \end{aligned}$$

$$(\det V)^2 = \det(V^*V) = \det W = c_1 \dots c_m \quad (1.1)$$

1.1 — т.к. диагональная матрица \square

Теорема 1.1.1 (преобразование меры лебега при линейном отображении).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда:

- $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$
- $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

$(\det V = 0)$ $\text{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \text{мера} = 0$

$(\det V \neq 0)$ $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера
 μ — инвариантна относительно сдвигов

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + Va) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k \cdot \lambda$ (Лемма из предыдущего семестра)

Q — единичный куб на векторах g_i и $V(g_i) = S_i h_i$, $V(Q) = \{\sum \alpha_i S_i h_i | \alpha_i \in [0, 1]\}$ — параллелепипед со сторонами S_i, \dots, S_m

\square

1.2 Интеграл

1.2.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i$ — **разбиение множества**

2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если
 \exists разбиение $X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ f|_{e_i} = \text{const} = c_i$

При этом такое разбиение — **допустимое разбиение**

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X$ $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{cases}$
2. $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

Примечание.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые

Тогда \exists разбиения, допустимые и для f , и для g

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i} \quad h = \sum_{\text{кон.}} b_k \mathcal{X}_{A_k}$$

$$f = \sum_{i,k} c_i \mathcal{X}_{e_i \cap A_k} \quad g = \sum b_k \cdot \mathcal{X}_{e_i \cap A_k}$$

2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$ — ступенчатые

Определение. $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество функции f**

$E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$ — также лебеговы множества

Если f задана на X : $X(f < a), X(f \leq a), \dots$ — лебеговы множества

Примечание. $E(f \geq a) = E(f < a)^C$; $E(f < a) = E(f \geq a)^C$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E(f < a + \frac{1}{n})$$

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f — **измерима на множестве E** :

$a \in \mathbb{R}$ $E(f < a)$ — измеримо (т.е. $\in \mathfrak{A}$)

Обозначение.

- f — измеримо на X — говорят просто "измеримо"
- $X = \mathbb{R}^m$, мера Лебега — измеримо по Лебегу

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \geq a)$ — измеримо

Пример. 1. $E \subset X$, E — измеримо, \mathcal{X}_E — измеримо

$$E(\mathcal{X}_E < a) = \begin{cases} \emptyset & , a < 0 \\ X \setminus E & , 0 \leq a \leq 1 \\ X & , a > 1 \end{cases}$$

2. $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна. Тогда f — измеримо по Лебегу

Примечание. Свойства:

1. f — измерима на E

$$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \ E(f = a) \text{ — измеримо}$$

$$\not\Leftarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \mathcal{X} + \mathcal{X}_{\text{неизм.}}$$

2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha f$ — измерима

3. f — измерима $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$

4. f — измерима на E ; $E' \underset{\text{изм.}}{\subset} E \Rightarrow f$ — измерима на E'
 $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$

5. $f \neq 0$ — измерима на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима на E

6. $f \geq 0$, измерима на E , $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда f^α — измерима на E

Теорема 1.2.1. f_n — измерима на X .

Тогда:

1.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n; \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad (1.2)$$

1.2 — измеримы

2. $\overline{\lim} f_n; \quad \underline{\lim} f_n$ — измеримы

3. Если

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$$

, то $h(x)$ — измеримо

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$

2.

$$(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf \{s_n : s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)\}$$

3. очев.

□

1.2.2 Меры Лебега-Стилтьеса

Определение. $\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастает, непрерывна
 $\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ -конечный объем

$$g(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x), g(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} g(x)$$

$$\mu[a, b) := g(b-0) - g(a-0)$$

— тоже σ -конечная мера

Применим теорему о продолжении, получим меру μg на некой σ -алгебре —
мера Лебега-Стилтьеса

Определение. $g(x) = \lceil x \rceil$

Пусть μg определена на Борелевской σ -алгебре — **мера Бореля-Стилтьеса**

Лекция 2

2.1 Теория меры

2.1.1 Измеримые функции

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : X \rightarrow \overline{R}$ измерима
- $\forall a \in R \quad X(f < a) \in \mathfrak{A}$
- $\mathcal{X}_E = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$

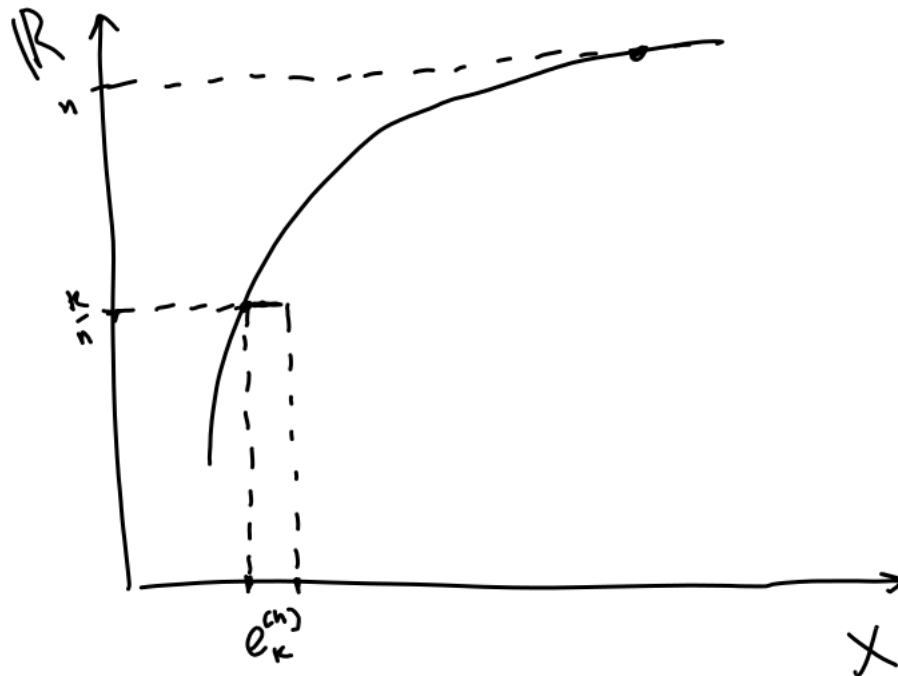
Теорема 2.1.1 (характеризация измеримости функции с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \overline{R}$
- $f \geq 0$
- f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2. $\forall x f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Доказательство.



$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f \leq \frac{k}{n}\right) \quad k = 1, \dots, n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

Следствие 2.1.1.1. f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Следствие 2.1.1.2. f, g — измеримы

Тогда fg — измерима ($0 \cdot \infty = 0$)

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ $g_n \rightarrow g$, (f_n, g_n) — ступенчатые
 $f_n g_n$ — ступенчатая $f_n g_n \rightarrow fg$

□

Следствие 2.1.1.3. f, g — измеримы

Тогда $f + g$ — измерима

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ $g_n \rightarrow g$, (f_n, g_n) — ступенчатые
 $f_n + g_n$ — ступенчатая $f_n + g_n \rightarrow f + g$

Считаем что $\forall x$, не может быть $f(x) = \pm\infty$, $g(x) = \mp\infty$

□

- $A \subset X$
- A — полная мера
- $\mu(X \setminus A) = 0$

Теорема 2.1.2 (об измеримости непрерывной на множестве полной меры).

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима

Доказательство. f — измерима на E'
 $E'(f < a)$ — открыто в E'

$$\left. \begin{array}{l} e(f < a) \subset e \\ \lambda_n \text{ — полная} \end{array} \right\} \Rightarrow e(f < a) \text{ — измерима в } E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

Пример.

- $E = \mathbb{R}$
- $f = \chi_{\text{Гр}}$

Следствие 2.1.2.4.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $E' = E \setminus e$
- f — измерима на E'

Тогда можно так переопределить f на множестве e , что полученная функция \tilde{f} будет измерима на E

Доказательство. Пусть:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in E \\ \text{const} & , x \in e \end{cases}$$

$$E(\tilde{f} < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

Следствие 2.1.2.5. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонна
Тогда f — измерима

Доказательство. f — непрерывна на $\langle a, b \rangle$ за исключением возможно счетного числа точек □

2.1.2 Сходимость почти везде и по мере

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верное при почти всех $x \in E$

= почти всюду на E

= почти везде на E

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

Пример. $x = \mathbb{R}$, x — иррационально

Пример. $f_n(x) \rightarrow n \rightarrow +\infty f(x)$ при почти всех $x \in E$

$\exists e, \mu e = 0$, при $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

Примечание. Свойства:

1. μ — полная $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти везде на X $\left| \right.$ Тогда f — измерима
 f_n — измерима

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ на X' , где $e = X \setminus X', \mu e = 0$
 f — измерима на X'

μ — полная $\Rightarrow f$ — измерима на X

$$X(f < a) = X'(f < a) \cup e(f < a)$$

изм.

□

2. В условии п. 1

Можно переопределить f на e . Получится \hat{f}

$f_n(x) \rightarrow \hat{f}(x)$ почти везде

\hat{f} — измкрима

Определение. $f = g$ почти везде

Будем говорить что f и g эквивалентны

3. Пусть $\forall n W_n(x)$ — истинно при почти всех x

Тогда утверждение " $\forall n W_n(x)$ — истинно" — верно при почти всех x

Это высказывание верно при

$$x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i\right) = 0$$

• $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечные

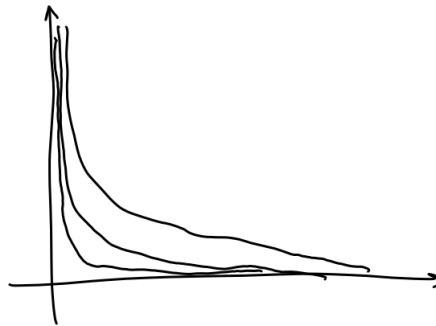
• f_n сходится к f по мере

• $f_n \xRightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0

Т.е. предел не задан однозначно

Пример.



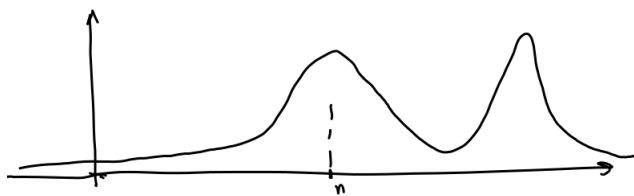
$$f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0$$

$$X \mathbb{R}_+ \lambda$$

$$f_n \rightarrow f \text{ всюду на } (0, +\infty)$$

$$f_n \xRightarrow[\lambda]{} f$$

Пример.



$$f_n(x) := e^{-(n-x)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ при всех } x$$

$$f_n(x) \rightarrow 0$$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

, при $0 < \varepsilon < 1$

Пример. $n = 2^k + e, 0 \leq e < 2^k$

$$X = [0, 1] \quad \lambda$$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{e}{2^k}, \frac{e+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$ — не существует ни при каких x

$$\lambda X(f_n > \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$f_n \xRightarrow{\lambda} 0$$

Теорема 2.1.3 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- μX — конечна

Тогда $f_n \xRightarrow{\mu} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду Частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0 (т.е. $f < 0$)

$$\left. \begin{aligned} X(|f_n| \geq \varepsilon) &= X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) &= \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывности меры сверху}$$

Общий случай: $f_n \rightarrow f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда $\varphi_n \rightarrow 0$, монотонна

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

□

Теорема 2.1.4 (Рисс).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

Тогда $\exists n_k f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде*Доказательство.* $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \rightarrow 0$ $\exists n_k$: при $n > n_k$ $\mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ можно считать: $n_1 < n_2 < n_3$ Проверим $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

При $x \notin E$ $f_{n_k} \rightarrow f$

$$x \notin E \exists N x \notin E_k$$

при $k > N$ $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, т.е. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$

□

Следствие 2.1.4.6.

- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$
- $|f_n| \leq g$ почти везде

Тогда $|f| \leq g$ почти везде*Доказательство.* $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде

□

Теорема 2.1.5 (Егорова).

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \rightarrow f$ почти везде

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists e \subset X, \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightarrow f$ на $X \setminus e$

$$@1A[r]^> > +B$$

2.2 Интеграл

(X, \mathfrak{A}, μ)

Определение. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$ E_k — дополнительное разбиение
 $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu = \sum \alpha_k \mu E_k$$

, считаем $0 \cdot +\infty = 0$

Примечание. Свойства:

1. Не зависит от представления f в виде суммы

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$, f, g — ст.

Определение. $f \geq 0$ — измерима

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Примечание. Свойства:

1. Если f — ступенчатая то [Опр. 2](#) = [Опр. 1](#)
2. $0 \leq \int f \leq +\infty$
3. $g \leq f$, f — измерима, g — ступенчатая $\Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение.

- f — измерима
- $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ конечный

Тогда

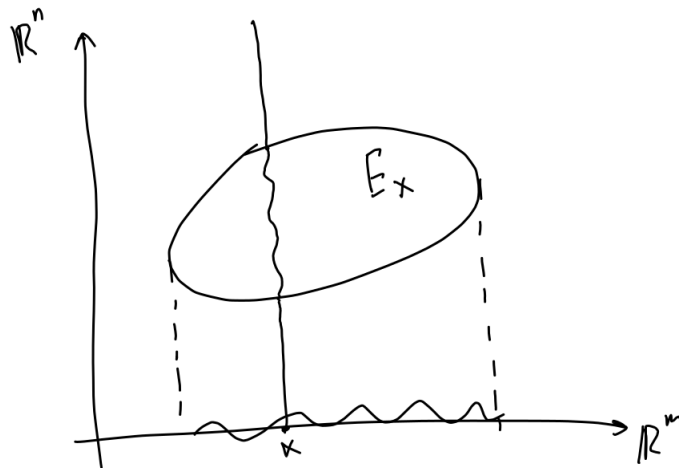
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Теорема 2.2.1 (Тонедди).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$ — измерима
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$

Тогда



1. при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ — измерима на \mathbb{R}^n

2. функция

$$x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$$

3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Лекция 3

3.1 Интеграл

1. $f \geq 0$, ступенчатые
 $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{E_k}$, E_k — измеримое
 $\int_X f = \sum \alpha_k \mu E_k$
2. $f \geq 0$, измеримая
 $\int_X f d\mu = \sup_{f \text{ — ступ.}} \int_X g d\mu$
3. f — измерима, $f^+, f^- \geq 0$ — измеримые
Пусть $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечные
Тогда $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$

Определение. Если $\int_X f^+, \int_X f^-$ — оба конечные, то f называется суммируемой

Примечание. f — измеримая, ≥ 0 , интеграл 3 = интеграл 2

4.

Определение. $E \subset X$ — измеримое, f — измерима на X
 $\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E$

Примечание. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$ $\int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$

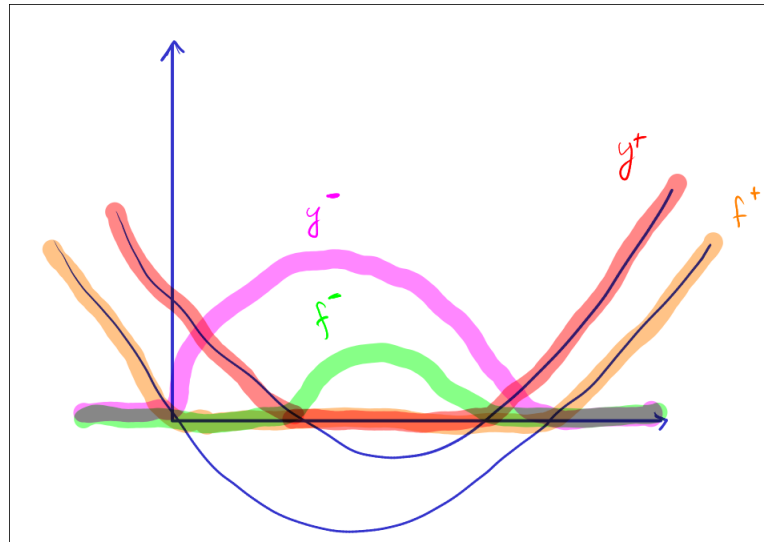
Примечание. $\int_E f d\mu = \sup\{fg : 0 \leq g \leq f \text{ на } E, g \text{ — ступенчатые}\}$, можно считать что g — тождественный 0 вне множества E

Примечание. $\int_E f$ не зависит от значений f вне E

Примечание. (X, \mathfrak{A}, μ) $E \subset X$ — измеримое, g, f — измеримые. Свойства:

1. Монотонность $f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$

Доказательство.



- (a) $f, g \geq 0$ — очевидно
 (b) f, g — произвольные
 $f^+ \leq g^+ \quad f^- \leq g^-$
 $\int_E f^+ \leq \int_E g^+ \quad \int_E f^- \leq \int_E g^- \Rightarrow \text{OK}$

□

2. $\int_E A d\mu = \mu E \quad \int_E 0 d\mu = 0$

3. $\mu E = 0 \quad \int_E f = 0$

Доказательство. (a) f — ступенчатая

(b) $f \geq 0$ — измеримая

□

Змечание:

f — измеримая. Тогда f — суммируемая $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

(\Leftarrow) следует из свойства 1. $f^+, f^- \leq |f|$

(\Rightarrow) позже

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$

(a) $(-f)^+ = f^- \quad (-f)^- = f^+$

(b) можно считать $c > 0$ для $f \geq 0$ — тривиально

5. $\exists \int_E f d\mu$
Тогда $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $-|f| \leq f \leq |f|$. По свойствам 3 и 4 □

6. $\mu E \leq +\infty, a \leq f \leq b$
Тогда $a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$ $a\chi_E \leq f \leq b\chi_E$
Следствие 3.1.0.7. f — измерима на E , f — ограничена на E , $\mu E < +\infty$
Тогда f — суммируемая на E

7. f — суммируемая на E . Тогда f — почти везде конечная

Доказательство.

- (a) $f \geq 0, f = +\infty$ на $A \subset E \forall n \in \mathbb{N} \int_E f \geq n\mu A$
(b) $f = f^+ - f^-$

□

Лемма 2.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

— измеримые, g — ступенчатая, $g \geq 0$
Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство. $\int_A g d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} = \sum_i \sum_k \dots = \sum_i \int_{A_i} g d\mu$ □

Теорема 3.1.1. $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая на A , $f \geq 0$

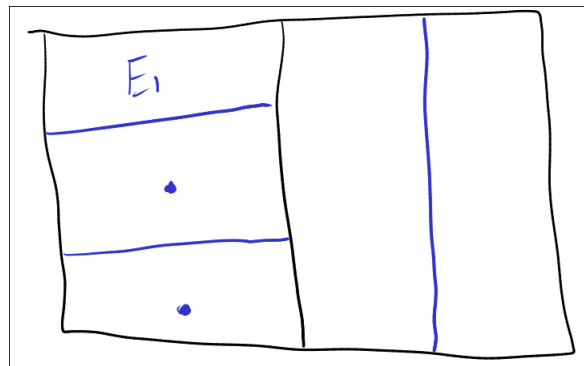
Тогда $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$

Доказательство.

(\leq) ступенчатая $g : 0 \leq g \leq f$ $\int_A g = \sum \int_{A_i} g d\mu \leq \sum \int_{A_i} f$ — по Лемме

(\geq) 1. $A = A_1 \cup A_2$
 $0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A_2}$

$$g_1 = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \quad g_2 = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$



Считаем что E_k – совместное разбиение

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2 \leq \int_A f$$

Перейдем к супремуму

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ – индукция по n

3.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \sqcup B_n$$

, где

$$B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

□

Следствие 3.1.1.8. • $f \geq 0$ – измеримая

• $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

• $\nu E := \int_E f d\mu$

Тогда ν – мера

Следствие 3.1.1.9 (аддитивности интеграла). f — суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые

Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. $f^+, f^- \dots$???

□

3.1.1 Пределный переход под знаком интеграла

$f_n \rightarrow f$. Можно ли утверждать $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$?

Пример. $f_n, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$ $f \equiv 0$ $f_n \rightarrow f$ (даже $f_n \rightrightarrows f$ на \mathbb{R})

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n} \lambda[0, n] = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 3.1.2 (Леви). (X, \mathfrak{A}, μ) , f_n — измеримая

$\forall n$ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ почти везде

Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Примечание. f — задана всюду, кроме множества меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e

Тогда f — измерима на X .

Доказательство.

(\leq) очевидно. $f_n \leq f$ почти везде $\int f_n \leq \int f$

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \int_e f_n = \int_{X \setminus e} f_n \leq \int_{X \setminus e} f \leq \int_X f$$

(\geq) Достаточно: $\forall g$ — ступенчатая $0 \leq g \leq f$

$$\lim \int_X f_n \geq \int_X g$$

Достаточно: $\forall c \in (0, 1)$

$$\lim \int_X f_n \geq c \int_X g$$

$$E_n := X(f_n \leq cg) \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E = X$ т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \lim \int_{E_n} g = c \int_X g$

Последнее равенство справедливо в силу непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

□

Теорема 3.1.3. $f, g \geq 0$ измерима на E Тогда

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, \quad g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \lim f_n = f$
 $g \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \lim g_n = g$
 $f_n + g_n \rightarrow f + g$ $\int_E f_n + g_n \rightarrow \int_E f + g$
 $\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n \rightarrow \int_E f + \int_E g = \int_E f + g$

□

Следствие 3.1.3.10. f, g — суммируемы на E Тогда $f + g$ — суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ *Примечание.* Свойство 3 доказано*Доказательство.* Суммируемость $|f + g| \leq |f| + |g|$
 $h = f + g$. Тогда:

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ \\ \Rightarrow \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- &= \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+ \\ \int_E h^+ - \int_E h^- &= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^- \\ \int_E h &= \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

□

Определение. $\mathcal{L}(X)$ — множество функций суммируемых на X *Следствие 3.1.3.11.* $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ — это линейный функционал на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X) \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X); \quad \int_X \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_X f_k$$

Теорема 3.1.4 (об интегрировании положительных рядов). (X, \mathfrak{A}, μ) $E \in \mathfrak{A}$ $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ $u_n \geq 0$ почти везде

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. по т. Леви: $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$ $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$ $S_n \rightarrow S$ — сумма ряда $\sum u_n$

Тогда $\int_E S_n \rightarrow \int_E S$, $\int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k \rightarrow \int_E S$ □

Следствие 3.1.4.12. u_n — измеримые $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$

Тогда ряд $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. $S(x) := \sum |u_n(x)| \geq 0$ — измеримая

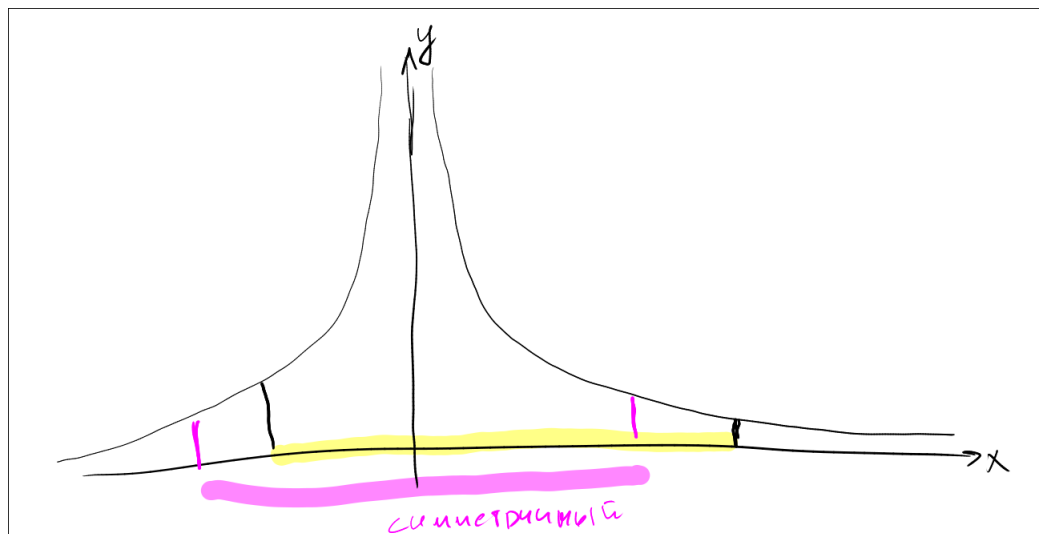
$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow S$ — суммируема $\Rightarrow S$ почти везде конечна □

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произведение последовательности; $\sum a_n$ — абсолютно сходится

Тогда $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде



$$\begin{aligned}\int_{[-N, N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} &= \int_{-N}^N \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} dx = |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq \\ &\leq |a_n| \int_{-N}^N \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{N} \cdot |a_n| \\ \sum_n \int_{[-N, N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} &\leq 4 \int_N \sum |a_n| < +\infty\end{aligned}$$

□

Лекция 4

Теорема 4.0.1 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E$ — измеримым, $\mu E < \delta \implies \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

Следствие 4.0.1.13.

- f — суммируемая
- $\mu E \rightarrow 0 \implies \int_E f \rightarrow 0$

Тогда $\int_{E_n} f \rightarrow 0$

Доказательство. Возьмем множества $X_m := X(|f| \geq m)$, очевидно что $X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$, а также $\mu(\bigcap X_n) = 0$

Утверждение: $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ — это свойство непрерывности сверху

меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, тогда при $\mu E < \delta$

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

Правда ли что:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \forall \varepsilon > 0 \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

эквивалентны.

(\Rightarrow) **Нет.** $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$

$$f_n = \frac{1}{nx} \cdot f_n \xrightarrow{\lambda} 0$$

$$\int |f_n - f| = +\infty \text{ — при всех } n$$

(\Leftarrow) Да.

$$\underbrace{\mu X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Теорема 4.0.2 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$
- $\exists g$ — суммируемая мажоранта:
 1. $\forall n \ |f_n| \leq g$ почти везде
 2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируема в силу 1, f — суммируема по следствию

т. Рисса: $|f| \leq g$ почти везде

'тем более' $= \left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1. $\mu X < +\infty$ фиксируем ε $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$
 $f_n \rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \rightarrow 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$

По следствию т. об абсолютной непрерывности: $\int_{X_n} 2g \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2. $\mu X = +\infty$

Проверим утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset X$ — измеримое, μA — конечная:

$$\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

$$\int_X g = \sup \left\{ \int g_n, 0 \leq g_n \leq g, g_n \text{ — ступенчатая} \right\}$$

$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$

— при достаточно больших n

$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} 2g$$

По 1 $\int_A |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ $\int_{X \setminus A} 2g < 2\varepsilon$

т.е. при больших n $\int_X |f_n - f| d\mu < 2\varepsilon$

□

Теорема 4.0.3 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- $\exists g$ — суммируемая мажоранта:
 1. $\forall n |f_n| \leq g$ почти везде
 2. g — усммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Доказательство.

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

- $0 \leq h_n \leq 2g$
- h_n — монотонно убывает
- $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде

$2g - h_n \geq 0$ — эта последовательность возрастает, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

□

Пример.

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} dt$$

Да. $t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} t^{x_0-1} e^{-t}$ при всех $t > 0$

Суммируемая мажоранта: $|t^{x-1} e^{-t}| \leq \underbrace{t^{\alpha-1} e^{-t}}_{\text{сумм.}}, 0 < \alpha < x_0$

Теорема 4.0.4 (Фату). • (X, \mathfrak{A}, μ)

- $f_n \geq 0$ — измеримая
 - $f_n \rightarrow f$ почти везде
 - $c > 0 \forall n \int_X f_n \leq c$
- Тогда $\int_X f \leq c$

Примечание. Здесь не требуется чтобы $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$, это может быть не выполнено

Доказательство.

$$\begin{aligned} g_n &:= \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \\ 0 \leq g_n &\leq g_{n+1} \quad \lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ почти везде} \\ \int_X g_n &\leq \int_X f_n \leq c \\ \int_X g_n &\rightarrow \int_X f \Rightarrow \int_X f \leq c \end{aligned}$$

□

Следствие 4.0.4.14.

- $f_n, f \geq 0$ — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \Rightarrow f$
- $\exists c > 0 \forall n \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Доказательство.

$$f_n \Rightarrow f \Rightarrow \exists n_k \quad f_{n_k} \rightarrow f \text{ почти везде}$$

□

Следствие 4.0.4.15.

- $f_n \geq 0$ — измеримые

Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство. Как в теореме:

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n$$

Выберем n_k :

$$\int_X f_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Zzz..

□

4.1 Плотность одной меры по отношению к другой

4.1.1 Замена переменных в интеграле

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, \cdot)
- $\Phi : X \rightarrow Y$
- Пусть Φ — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$

Тогда ν — мера:

$$\nu(E_n) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_n)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется образом μ при отображении Φ и

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$$

Примечание.

- $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измерима относительно \mathfrak{B}

Тогда $f \circ \Phi$ — измерима относительно \mathfrak{A} ($f \circ \Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$)

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(\underbrace{Y(f < a)}_{\in \mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}$$

Определение.

- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измерима (на X относительно \mathfrak{A})
- $\omega \geq 0$

$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

— **взвешенный образ меры μ** при отображении Φ , ω — **вес**

Теорема 4.1.1.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- $\Phi : X \rightarrow Y$

- ν — взвешенный образ меры μ при отображении Φ с весом ω
- $\omega \geq 0$ — измерима на X

Тогда $\forall f$ — измеримые на Y относительно \mathfrak{B} , $f \geq 0$ $f \circ \Phi$ — измеримая на X относительно \mathfrak{A} и

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \quad (4.1)$$

То же верно для суммируемых f

Доказательство. $f \circ \Phi$ — измеримая

1. Пусть $f = \chi_B, B \in \mathfrak{B}$

$$f \circ \Phi(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда 4.1:

$$\nu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \mu$$

— это определение ν

2. f — ступенчатая. 4.1 следует из линейности интеграла
3. $f \geq 0$ — измеримая: таким образом ??? измеримая функция ступенчатая + т. Леви

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots, h_i \text{ — ступенчатая } h_i \leq f \Rightarrow h_i \rightarrow f$$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \rightarrow \infty}$$

4. f — измеримая \Rightarrow для $|f|$ выполнено 4.1 $\Rightarrow |f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$
Что-то про f_+

□

Следствие 4.1.1.16. В условиях теоремы:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f — суммируемая на B

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

Доказательство. В теорему подставить $f \leftrightarrow f \cdot \chi_B$

□

Примечание. Частный случай.

- $X = Y$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$
- $\Phi = \text{Id}$
- $\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$, $\omega \geq 0$ — измеримая

В этой ситуации ω — плотность (меры ν относительно меры μ) и тогда по теореме:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x) \omega(x) d\mu$$

Лекция 5

5.1 Плотности

Плотность (X, \mathfrak{A}, μ) и $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — мера

Плотность меры ν относительно μ — это функция $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$$

Теорема 5.1.1 (критерий плотности).

- (X, \mathfrak{A}, μ) , ν — еще одна мера
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая

Тогда ω — плотность ν относительно $\mu \Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A \omega$$

Пример (нет плотности).

- $X = \mathbb{R}$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}'$
- $\mu = \lambda_1$
- ν — одноточечная мера $\nu(A) = \begin{cases} 1 & , \text{если } 0 \in A \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$
считаем $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$

Теорема 5.1.2 (Необходимое условие существования плотности). $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Теорема 5.1.3 (теорема Радона-Никодина). Это так-же достаточное условие

Доказательство критерия плотности. (\Rightarrow) очевидно

(\Leftarrow) Не умаляя общности $\omega > 0 : e = X(\omega = 0)$

$$\nu(e) = \int_e \omega d\mu = 0$$

Для случая когда $A \cup e = \emptyset$ все только лучше

Фиксируем $q \in (0, 1)$

$$A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j+1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & q^{-1} & q^{-2} & & & \\ & & \longrightarrow & & & & \\ 0 & q^2 & q & 1 = q^0 & & & \end{array}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \nu A_j \leq \mu A_i \cdot q^{j-1} \quad (5.1)$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq \mu A_j \cdot q^{j-1} \quad (5.2)$$

Тогда

$$q \cdot \int_A \omega d\mu \leq q \cdot \sum \int_{A_j} \leq \sum q^j \mu A_j \leq \sum \nu A_j \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} = \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

то есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

и $q \rightarrow 1 - 0$

□

Лемма 3.

- f, g — суммируемые
- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $\forall A \in \mathfrak{A}$
- $\int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство. $g := f - g$

Дано $\forall A \int_A h = 0$

Доказать $h = 0$ почти везде

- $A_+ := X(h \geq 0)$
- $A_- := X(h < 0)$

$$X = A_+ \sqcup A_-$$

$$\begin{aligned}\int_{A_+} |h| &= \int_{A_+} h = 0 \\ \int_{A_-} |h| &= - \int_{A_-} h = 0\end{aligned}$$

тогда

$$\int_X |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ почти везде

□

Примечание. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство отображений $l_A : f \mapsto \int_A f d\mu$ — линейный функционал

Таким образом множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ — разделяет точки $\forall f, g \in \mathcal{L}(X) \exists A l_A(f) \neq l_A(g)$

5.2 Мера лебега

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое
- $a \in O$
- $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$

Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \forall$ куба $Q \subset B(a, \delta)$, $a \in Q$
выполняется неравенство $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Примечание. Здесь можно считать что кубы замкнутые

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(a) + L \cdot (x - a) + o(x - a) \quad x \rightarrow a \\ \underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} &= x + o(x - a)\end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар } B_\varepsilon(a) \forall x \in B_\varepsilon(a) \quad |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a)$ $a \in Q$ — куб со стороной h . При $x \in Q : |x - a| \leq \sqrt{m}h$

$$|\Psi(x) - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$: при $x, y \in Q$

$$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \leq (1 + 2\varepsilon)h$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq \underbrace{|\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m}_{\text{выбираем } \varepsilon \text{ чтобы } \dots < c} \lambda Q$$

потом берем $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$

□

Лемма 5.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое
- $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное
- $Q \subset \bar{Q} \subset O$ — кубическая ячейка
- $A \subset Q$

Тогда

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G - \text{открытое} \subset O}} \left(\lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Теорема 5.2.1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \in O$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство. Обозначим якобиан $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
 $\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера. Т.е. надо доказать: J_Φ — плотность ν относительно λ .
 Тогда достаточно проверить условие критерия плотности

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (5.3)$$

Достаточно проверить только правое неравенство. левое — это "правое для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1} "

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

1. Проверяем второе неравенство 5.3 для случая когда A — кубическая ячейка. $A \subset \bar{A} \subset O$. От противного:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$$

Возьмем $C > \sup_Q J_\Phi$: $C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$. Запускаем процесс половинного деления:

Режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую" ячейку $Q_1 \subset Q$: $C \cdot \lambda Q_1 < \nu(Q_1)$. Опять делим на 2^m частей, берем Q_2 : $C \cdot \lambda Q_2 < \nu(Q_2)$ и так далее

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \quad (5.4)$$

$$a \in \bigcap \bar{Q}_i \quad c > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\bar{Q}} J_\Phi, \text{ в частности } c > |\det \Phi'(a)|$$

Получаем противоречие с леммой: с сколь угодно малой окрестности a имеются кубы \bar{Q}_n , где выполняется 5.4. **Противоречие**

2. Проверим второе неравенство 5.3 для открытых множеств $A \subset O$
Это очевидно $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \bar{Q}_j \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (5.5)$$

3. По лемме второе неравенство 5.3 выполнено для всех измеримых A

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — куба } Q_j \subset \bar{Q}_j \subset O$$

$$A = \bigsqcup \underbrace{A \cup Q_j}_{A_j} \quad A \subset G \text{ — открытое}$$

$$JA_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \int_G (\sup J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично 5.5 получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

□

Теорема 5.2.2.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое

Тогда $\forall f$ — измеримых, ≥ 0 , заданная на $O' = \Phi(O)$

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda$$

, где $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$. То же верно для суммируемых функций f

Доказательство. Применяем теорему о взвешенном образе меры.
Дано:

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (T, \mathfrak{B}, ν)
- $\Phi : X \rightarrow Y$ — с сохранением измеримости
- $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$
- $\omega : Y \rightarrow \mathbb{R}, \geq 0$, измеримый
- ν — взвешенный образ μ с весом ω :

$$\mu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

В нашем случае

- $X = Y = \mathbb{R}^m$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$
- Φ — диффеоморфизм
- $\mu = \lambda$
- $\nu(A) = \lambda\Phi(A)$

Под действием гладкого отображения Φ , σ -алгебра \mathfrak{M}^m сохраняется
По [теореме](#)

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(A)} J_\Phi d\lambda$$

т.е. λ — взвешенный образ исходной меры Лебега по отношению к Φ □

Пример. Полярные координаты в \mathbb{R}^2 .

$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \Phi : \{(r, \varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$
диффеоморфизм

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \frac{d\lambda_r}{d\lambda_r(r, \varphi)}$$

Пример. Сферические координаты в R^3

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad \begin{cases} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi) \\ \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = r^2 (\sin^2 \psi \cos \psi + \cos^3 \psi) = r^2 \cos \psi = J_\Phi$$

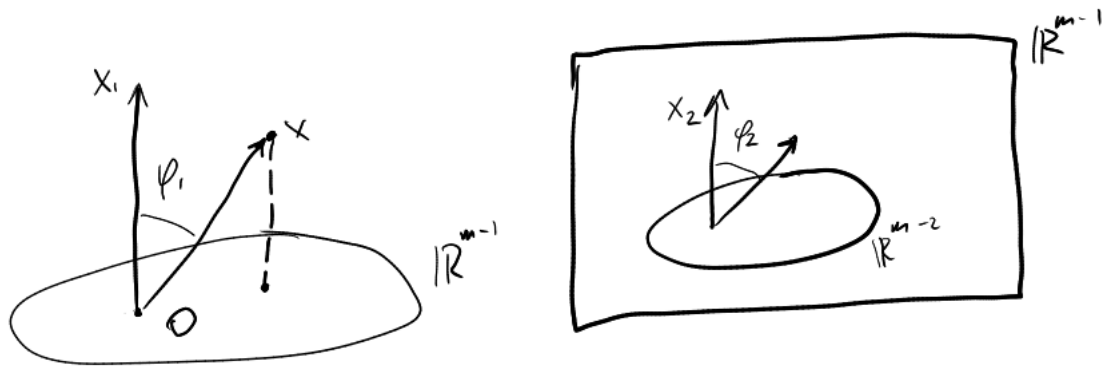
— для географических координат: r — расстояние от центра Земли, ψ — угол к плоскости экватора

Лекция 6

6.1 Сферические координаты в \mathbb{R}^m

Пример.

- $r, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$
- $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}^{m-1} \supset \dots \supset \mathbb{R}^2$ В каждой из очередных пространств \mathbb{R}^k фиксируем ортогональное к \mathbb{R}^{k-1}
- φ_1 — угол между $\overline{e_1}$ и $Ox \in [0, \pi]$
- φ_2 — угол между $\overline{e_2}$ и $P_{2(e_2 \dots e_m)}(x) \in [0, \pi]$
- \vdots
- φ_{m-1} — просто полярный угол в \mathbb{R}^m



$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
x_{m-1} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1} \\
x_m &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1} \\
J &= r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \textcolor{blue}{1}
\end{aligned}$$

Сделаем в цикле эти координаты:

$$\begin{aligned}
\text{шаг 1 } x_m &= \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1} \\
x_{m-1} &= \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1} \\
(x_1 \dots x_n) &\rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{шаг 2 } \rho_{m-1} &= \rho(m_2) \sin \varphi_{m-2} \\
x_{m-2} &= \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2} \\
(x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}) &\rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-3}, \rho_{m-2}, \varphi_{m-2}, \varphi_{m-1})
\end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned}
\text{последний шаг } (x_1, \rho_2, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) &\rightsquigarrow (r, \varphi_1 \dots \varphi_{m-1}) \\
\rho_2 &= r \sin \varphi_1 \\
x_1 &= r \cos \varphi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 d\lambda_m \stackrel{\text{1 шаг}}{=} \int_{\Omega_1} \rho_{m-1} \stackrel{\text{2 шаг}}{=} \int_{\Omega_2} \rho_{m-2}^2 \sin \varphi_{m-2} \stackrel{\text{3 шаг}}{=} \int_{\Omega_3} \rho_{m-3}^3 \sin^2 \varphi_{m-3} \sin \varphi_{m-2} d\lambda = \\
&= \dots = \int_{\Omega_{m-1}} r^{m-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2}
\end{aligned}$$

6.2 Произведение мер

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)

Лемма 6. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} - n/\kappa \Rightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y | A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$

Пример. Ячейки: В $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ $\mathfrak{A} = \mathcal{P}^1$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}^1$
 $A \times B$ — ячейка из \mathcal{P}

Определение. $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — множества из этой системы называются измеримыми прямоуг. $m_o(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Теорема 6.2.1.

1. m_0 — мера на \mathcal{P}
2. ν, μ — σ -конечные $\Rightarrow m_0$ — тоже σ -конечная

¹В \mathbb{R}^3 “географические” координаты $J = r^2 \cos \psi$

Доказательство.

1. m_0 — счетно аддитивна $m_0 P = \sum m_0 P_k$, если

$$A \times B = P = \bigsqcup P_k, \text{ где } P_k = A_k \times B_k$$

Наблюдение: $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$

Тогда $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$, т.е.

$$\forall x \in X, y \in Y \quad \chi_A(x) \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$$

проинтегрируем по y по мере ν :

$$\chi_A(x) \nu B = \sum \chi_A(x) \cdot \nu B_k$$

Интегрируем по x :

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$$

2. Очев. μ — σ -конечная $\Rightarrow X = \bigcup X_k$, μX_k — конечная μ — σ -конечная
 $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n$, νY_k — конечная

$$X \times Y = \bigcup X_k Y_n \quad m_0 \mu X_k \nu Y_n — \text{конечная}$$

$\Rightarrow m_0$ — σ -конечная мера

□

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ -конечные

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 с п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на σ -алгебра, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Определение. $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \nu \times \mu)$ — произведение пространств с мерой (X, \mathfrak{A}, μ) и (Y, \mathfrak{B}, ν)

Примечание.

1. Это произведение ассоциативно
2. σ -конечность нужна для единственности произведения

Теорема 6.2.2. $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{n+m}$

Доказательство. **Без доказательства**

□

Определение.

- X, Y — множества
- $C \subset X \times Y$

$$C_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X \mid (x, y) \in C\}$$

Примечание.

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_{\alpha})_x$$

$$\left(\bigcap_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcap_{\alpha} (C_{\alpha})_x$$

$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

Теорема 6.2.3 (Кавальери).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- ν, μ — σ -конечные, полные
- $m := \mu \times \nu$

Пусть $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

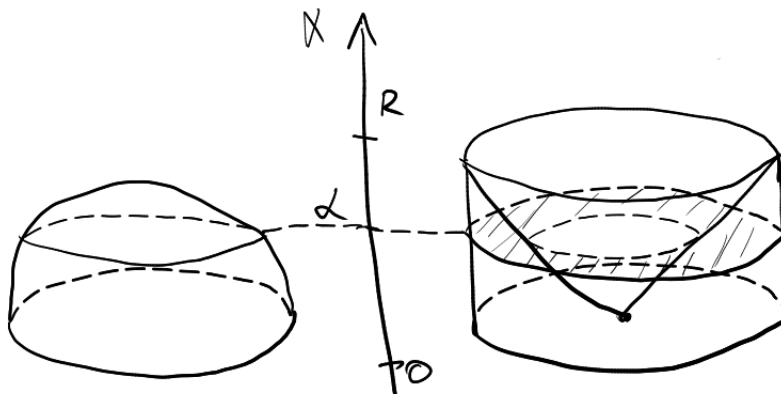
Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая² функция на X
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y

Пример. Половину шара сопоставляем с конусом.

²функция задана при почти всех x . Она равна почти везде некоторой измеримой функции, которая задана на всем X . Это “не мешает” утверждению 3



- C_x = круг
- C_x = кольцо

$$\lambda(C_x) = \pi(R^2 - x^2)$$

$$\lambda(C_x) = \pi R^2 - \pi x^2$$

$$\nu\left(\frac{1}{2}\text{шара}\right) = \nu(\text{цилиндр} - \text{конус}) = \pi R^2 - \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{2}{3}\pi R^2$$

Доказательство. \mathcal{D} — система множеств, для которых выполнено 1. - 3.

$$1. C = A \times B \Rightarrow C \in \mathcal{D}$$

$$(a) C_x = \begin{cases} \emptyset & x \notin A \\ B & x \in A \end{cases}$$

$$(b) x \mapsto \nu(x) \text{ — это функция } \nu B \cdot \chi_A$$

$$(c) \int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$$

$$2. E_i \in \mathcal{D}, \text{dis} \Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathcal{D}$$

$E_i \in \mathcal{D} \Rightarrow (E_i)_X$ — измеримое почти везде \Rightarrow при почти всех x все $(E_i)_X$ — измеримое

$$(a) \text{ Тогда при этих } x \ E_X = \bigsqcup (E_i)_X \in \mathfrak{B}$$

$$(b) \nu E_X = \sum \underbrace{\nu(E_i)_X}_{\text{измеримая функция}} \Rightarrow \text{функция } x \mapsto \nu E_X \text{ измеримая}^2$$

$$(c)$$

$$\int_X \nu E_X d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_X = \sum_i mE_i = mE$$

3. $E_i \in \mathcal{D}$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $E = \bigcap_i E_i$, $\mu E_i < +\infty$ Тогда $E \in \mathcal{D}$

$$\int_X \nu(E_i)_X d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_X \text{ — конечная при почти всех } x$$

- (a) $\forall x$ верно $(E_1)_X \supset (E_2)_X \supset \dots$, $E_X = \bigcap (E_i)_X$. Тогда E_X — измеримое при почти всех x и $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_X = \nu E_X$ при почти всех x

- (b) Таким образом $x \mapsto \nu E_X$ — измеримая²

- (c)

$$\int_X \nu E_X d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_X d\mu = \lim mE_i = mE$$

Первое равенство по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: $|\nu(E_i)_X| \leq \nu(E_1)_X$ — из²

Итог: $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $?? \bigcup A_{ij} \in \mathcal{D}$

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$

$$mE = \inf \left\{ \sum m_0 P_k \mid E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P} \right\}$$

— теорема о лебеговском продолжении.

\exists множества H вида $\bigcap_e \bigcup_X P_{ke}$ (т.е. $H \in \mathcal{D}$)

$$E \subset H, mH = mE = 0$$

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_X \sim 0 (= 0 \text{ при почти всех } x)$$

$$E_X \subset H_x, \nu \text{ — полная} \Rightarrow$$

- (a) E_X — измерима при почти всех x

- (b) $\nu E_X = 0$ почти везде

- (c) $\int \nu E_X d\mu = 0 = mE$

5. C — m -измеримо, $mC < +\infty$ тогда $C \in \mathcal{D}$

$$C = H \setminus e, \text{ где } H \text{ — вида } ??? \bigcup P_{ke}, m e = 0, mC = mH$$

- (a) $C_x = H_x \setminus e_X$ — измерима при почти всех x , т.к. ν — полная

- (b) $\nu e_X = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_X = \nu H_x \Rightarrow$ измерима

- (c) $\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$

6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathcal{D}$

$$X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$$

$$C = \bigsqcup (C \cap (X_k \times Y_j)) \text{ — используем 2.}$$

□

Следствие 6.2.3.17. C — измеримое в $X \times Y$. Пусть $P_q(C) = \{x \in X | C_x \neq \emptyset\}$ — проекция C на X . Если $P_1(C)$ — измеримое, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Доказательство. при $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$

□

Примечание.

1. — измеримое $\nRightarrow P_1(C)$ — измеримое
2. C — измеримое $\nRightarrow \forall x$ C_x — измеримо
3. $\forall x \forall y$ C_x, C_y — измеримые $\nRightarrow C$ — измеримое (пример Серпинского)

Лекция 7

7.1 Принцип Кавальери

1. C_x — измерима при почти всех x
2. $x \mapsto \nu C_x$ — измерима*
3. $mC = \int_X \mathcal{X}_x d\mu$

Следствие 7.1.0.18. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная

Тогда $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$

Доказательство. $f > 0$ $\Pi\Gamma(f[a, b])$ — измеримое множество в \mathbb{R}^2 . $C_x = [0, f(x)]$ $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda_2(\Pi\Gamma) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

Примечание. λ_2 можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением свойства конечной аддитивности и это продолжение не единственно

Примечание. $\lambda_m, m > 2$ — аналогичным образом продолжить невозможно. Парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского

Примечание. Для [замечания 1](#) и [замечания 2](#) требуется инвариантность меры относительно движения \mathbb{R}^m

Определение.

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times T \rightarrow$

- $\forall x \in X$ f_x — это функция(сечение) $f_x(y) = f(x, y)$, можно считать что она задана на C_x
- f^y — аналогичное сечение

Теорема 7.1.1.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- μ, ν — σ -конечные меры, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ — измерима относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда

1. при почти всех x f_x — измеримая на Y f^y — измерима на X почти везде
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измеримая* на X
 $y \mapsto \psi(y) = \int_X f^y d\mu$ — измеримая* на Y
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$
 $= \int_Y \psi d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство. Доделать

□

$C \subset X \times Y$ $P_1(C)$ — измеримо.

Тогда

$$\int_C f dm = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Теорема 7.1.2 (Фубини).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- ν, m — σ -конечные
- $m = \nu \times \mu$
- f — суммируема на $X \times Y$ относительно m

Тогда

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f x \, d\nu = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ — суммируема на Y
3. $\int_{X \times Y} f \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Доказательство. Без доказательства □

Доделать

7.2 Поверхностные интегралы

7.2.1 Поверхностные интегралы I рода

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие. $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — параметризация. $E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в \mathbb{R}^2 по Лебегу

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M \mid E \text{ — измеримо}\} = \{\varphi(A) \mid A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

Определение. Мера на \mathfrak{A}_M

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, du dv$$

Т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ

Примечание. \mathfrak{A}_M — σ -алгебра, S — мера

Примечание. $E \subset M$ — компактное $\Rightarrow \varphi^{-1}(E)$ — компактное \Rightarrow измеримое \Rightarrow замкнутые множества измеримы \Rightarrow (относительно) открытые множества измеримы

Примечание. \mathfrak{A}_M не зависит от φ по теореме о двух параметризациях

Примечание. S не зависит от φ

$$\begin{aligned} |\overline{\varphi'_s} \times \overline{\varphi'_v}| &= |(\overline{\varphi'_s} \cdot u'_s + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_s) \times (\overline{\varphi'_u} \cdot u'_t + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_t)| = \\ &= |\overline{(\varphi'_u \times \varphi'_v)} \cdot (u'_s \cdot v'_t - v'_s \cdot u'_t)| = \end{aligned}$$

Доделать

Примечание.

- $f : \mathfrak{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая

$M(f < a)$ — измеримая $\Leftrightarrow N(f \circ \varphi < a)$ — измерима относительно \mathfrak{M}^2
 f — измерима относительно $\mathfrak{A}_M \Leftrightarrow f \circ \varphi$ — измерима относительно \mathfrak{M}^2

Определение (поверхностный интеграл I рода).

- M — простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3

- φ — параметризация
- $f : M \rightarrow \overline{R}$ — суммируема по мере S

То

$$\iint_M f \, ds = \iint_M f(x, y, z) \, ds$$

называется **интегралом I рода от f по многообразию M**

Примечание. По теореме об интегрировании по взвешенному образу меры

$$\iint_M f \, ds = \iint_G f(\varphi(u, v)) |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, du \, dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{pmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 \cdot |\varphi'_v|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$E = |\varphi'_u|^2 = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$$

$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \quad F = |\varphi'_v|^2$$

Лекция 8

- M
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- f
- $f\Phi$

$$\int_{M/E} df s = \int_{O/\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi \cdot |\Phi' u \times \Phi' v| du dv$$

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно гладкое двумерное многообразие, если M — конечное объединение

- простых гладких двумерных многообразий M_i
- гладких кривых
- точек

Примечание. Просто так сферу параметризовать не можем, но можем разбить ее на две полусферы и окружность и считать отдельно для каждой из них.

Определение. $E \subset M$ — измеримое, если измеримы все $E \cap M_i$.

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

8.1 Поверхностный интеграл II рода

- M — простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3 — поверхность

Определение. Сторона поверхности — непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности

$$M \subset \mathbb{R}^3 \quad W : M \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\forall x \ W(x) \text{ — нормаль к } M, \ |w(x)| = 1, \ w(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$$

Примечание. Локально каждая поверхность — двустороннее. В общем случае — 1 или 2 стороны

Примечание. График функции $z(x, y)$

$$\Phi : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\Phi'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \quad \Phi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

— касательные векторы

$$n := \Phi'_x \times \Phi'_y = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

— нормаль

$$n_0 = \pm \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\dots}}, \frac{1}{\sqrt{\dots}} \right)$$

Примечание. Другой способ задания стороны поверхности

1. u, v — касательные векторы
 $u \nparallel v$, (u, v) — касательный репер
 Если задано непрерывное поле реперов, то они задают сторону $n = u \times v$ (отнормировать)
2. Задана петля + указано непрерывное движение

Определение. M — поверхность в \mathbb{R}^3 , n_0 — сторона, γ — контур(петля) в M — ориентированный.

Говорят, что сторона поверхности n_0 согласована с ориентацией γ : $(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$. Т.е. если ориентация γ задает сторону n_0

Определение.

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M
- $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное поле(непрерывное)

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle ds$$

— **интеграл II рода** векторного поля F по поверхности M

Примечание. Смена стороны = смена знака

Примечание. Не зависит от параметра

Примечание. $F = (P, Q, R)$ обозначается

$$\iint_M P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Примечание. $\Phi, n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$

$$\begin{aligned} \int_M \langle F, n_0 \rangle &= \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| du dv = \\ &= \int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\text{смешанное произведение}} du dv \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle = \det \begin{pmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$8.1 = \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & z'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} du dv$$

Пример. График $z(x, y)$ над областью G по верхней стороне

$$\iint_{\Gamma_z} R dx dy = \iint_{\Gamma_z} 0 dy dz + 0 dz dy + R(x, y, z) dx dy \quad (8.2)$$

$$n_0 = \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\dots}}, \frac{1}{\sqrt{\dots}} \right)$$

$$8.2 = \iint_{\Gamma_z} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} ds = \iint_G R(x, y, z(x, y)) dx dy = \iint_G R dx dy$$

т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции

Следствие 8.1.0.19.

- $V \subset \mathbb{R}^3$
- $M = \partial V$ — гладкая двумерная поверхность
- n_0 — внешняя нормаль

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} z dx dy = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

Следствие 8.1.0.20. Ω — гладкая кривая в \mathbb{R}^2 , M (— цилиндр над Ω) = $\Omega \times [z_0, z_1]$

Тогда (сторона M любая) $\int_M R dx dy = 0$

8.2 Ряды Фурье

8.2.1 Пространства L^p

Свойство 1.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$
 $x = f(x) = u(x) + iv(x)$
 $u = \Re f, v = \Im f$
- f — измеримая, если u и v — измеримые
- f — суммируемая, u и v — суммируемые
- f — суммируемая: $\int_E f = \int_E u + i \int_E v$

Свойство 2 (Неравенство Гёльдера).

- $p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- (X, \mathfrak{A}, μ)
- E — измеримое
- $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримые

Тогда

$$\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Свойство 3 (Неравенство Минковского). Те-же условия что и в [Неравенстве Гёльдера](#)

$$\left(\int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Примечание. При $p = 1$ неравенство тоже верно

Свойство 4.

Определение. $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \subset X$ — измеримое

$$\mathcal{L}^p(E, \mu) := \left\{ f : \text{почти везде } E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \mid f \text{ — измеримая, } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

— это линейное пространство (по неравенству Минковского)

$f, g \in \mathcal{L}^p(E, \mu) : f \sim g \iff f = h$ почти везде. $\mathcal{L}^p/N = L^p(E, \mu)$ — линейной пространством. Задаем норму $\|f\|_{L^p(E, \mu)} = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Свойство 5.

- $L^\infty(E, \mu)$
- (X, \mathfrak{A}, μ)
- E — измеримое
- f — почти везде $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf \{ A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f \leq A \text{ почти везде} \}$$

Свойство 6. $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$

Свойство 7. $f \leq \operatorname{ess\,sup} f$ почти везде

Доказательство. $B = \operatorname{ess\,sup} f$

Тогда

□

Свойство 8. f — сумм., $\operatorname{ess\,sup}_E |g| < +\infty$

Тогда

$$\left| \int_E fg \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f|$$

Доказательство.

$$\left| \int_E fg \right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot |f|$$

□

Примечание. $L^\infty(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), \text{ изм., } \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty \} / \sim$. Эквивалентные функции отождествлены — это нормированное пространство

$$\|f\|_{L^\infty(E, \mu)} := \operatorname{ess\,sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

Примечание. В новых обозначениях. Неравенство Гельдера:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Здесь можно брать $p = 1$, $q = +\infty$

Примечание. $f \in L^p \Rightarrow f$ — почти везде конечны. $1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow$ можно считать f — задана всюду на E , и всюду конечна