Лекция 6

Ilya Yaroshevskiy

20 марта 2021 г.

Содержание

1 Случайные величины

Обозначение. ξ **— Случаная величина**

Пример. ξ — число выпавших очков. $\xi \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Пример. ξ — время работы микросхемы до отказа

1. Время работы в часах
   $\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$
2. Время работы измеряем точно
   $\xi \in [0, +\infty]$

Пример. ξ — температура воздуха в случайный момент вермени. $\xi \in (-50^\circ, 50^\circ)$

Пример. Индикатор события A.

$$I_A(\omega) \in \begin{cases} 0 & ,\omega \notin A \\ 1 & ,\omega \in A \end{cases}$$

Определение. Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется $\mathcal{F}$**-измеримой**, если $\forall x \in \mathbb{R}: \ \{\omega | \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Т.е прообраз $\xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}$

Определение. **Случаной величиной** ξ заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ называется $\mathcal{F}$-измеримая функция Исправить , ставящая в соответсвие каждому элементарному исходу ω некоторое вещественное число

Пример. Бросаем кость.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$
- $]\xi(i) = i$

Если $x = 4$, то $\{\omega | \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \Rightarrow \xi$ не является $\mathcal{F}$-измеримой

1.1 Смысл измеримости

Пусть случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая. Тогда $P(\xi < x) = P(\{\omega | \xi(\omega) < x\})$, т.к. $A_x = \{\omega | \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\overline{A_x} = \{\omega | \xi(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$$

$$A_x \setminus B_y = \{\omega | t \leq \xi(\omega) lex\} \in \mathcal{F}$$

$$B_x = \text{Доделать}$$

$$B_x \setminus A_x = \{\omega | \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

Отсюда видим, по теореме Каво?Исправить можно однозначно продолжить до любого Борелевского множества на прямой. $B \in \mathcal{B}$ — Борелевская σ-алгебра. $P(B \in \mathcal{B}) = P\{\omega | \xi(\omega) \in B\}$

Пусть случаная величина задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Тогда:

1. $(\Omega, \mathcal{F}, p) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, p)$ — новое веротяностное пространство
2. $\xi^{-1}(B)\ \forall B \in \mathcal{B}$
   $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$
   $\mathcal{F}_\xi$ — σ-алгебра порожденная величной ξ

Задача 1. Найти σ-алгебру порожденную индикатором

Определение. Функция $P(B)\ B \in \mathcal{B}$ называется **распределнием вероятностей** случаной величны $\xi(\omega)$. Т.е. распределение случайной величны это соответсвие множествами на вещественной прямой и вероятностями случаной величны попасть в это множество

1.2 Типы распределения

- Дискретные
- Абсолютно непрерывные
- Смешанные
- Сингулярные (непрерывные но не абсолютно непрерывные)

1.2.1 Дискретные

Случайная величина ξ имеет дискретное распределение, если она принимает не более чем счетное число значений, т.е. существует конечный или счетный набор чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, такой что

1. $p_i = p(\xi = x_i) > 0$
2. $\sum\limits_i p_i = 1$

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Доделать

Пример. Кость

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Доделать

1. Основные числовые характеристики
   (a) Математическое ожидание(среднее значение) **Математическим ожиданием** случаной величины ξ называется число:
   $$E\xi = \sum_i x_i p_i$$
   при условии что данный ряд сходится абсолютно, иначе говрят что что математическое ожидание не существует

   Обозначение. Eξ

   Примечание. Смысл: среднее значение, число вокруг которого группируеются значения случаной величины. Физический смысл: центр масс. Статистический смысл: среднее арифметическое наблюдаемых значений при большои значении реальных экспериментов

   (b) Дисперсия

   Определение. **Дисперсией** $D\xi$ случайной величины ξ называется среднее квадратов отклонений ее от математического ожидания
   $$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$
   или
   $$D\xi = \sum_i (x_i - E\xi)^2 p_i$$
   При условии что данное среднее значение существует(конечно)

Примечание. Вычислять дисперсию удобнее по формуле

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (E\xi)^2$$

Примечание. Смысл: квадрат среднего разброса(рассейния) случайной величины около ее математического ожидания

(c) Среднее квадратическое отклонение

Определение. Средним квадратическим отклонением ($\sigma_\xi = \sigma(\xi)$) случайной величины ξ называется число

$$\sigma = \sqrt{D\xi}$$

Примечание. Смысл: характеризует средний разброс случайной величины около ее математического ожидания

Пример. Бросаем кость

$$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$$D\xi = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = 2.92$$

$$\sigma = \sqrt{2.92} \approx 1 \neq 1$$

2. Свойства математического ожидания и дисперсии

Определение. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, если $\xi(\omega) = C = \text{const}\ \forall \omega \in \Omega$ или $p(\xi = C) = 1$

$$E\xi = C = \text{const}$$

$$D\xi = 0$$

Доказательство. Доделать □

Определение (Свойство сдвига).

$$E(\xi + C) + E\xi + C$$

$$D(\xi + C) = D\xi$$

Доказательство. Доделать □

Определение.

$$E(C\xi) = CE\xi$$

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

Доказательство. Доделать □

Определение.

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

Доказательство.

- Пусть x_i, y_i — соответсвующие значения случайных величин xi и mu

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) + \sum_j y_j \sum p(\xi = x_i, \eta = y_j)$$

Доделать □

Определение. Дискретные случаные величины **независимы** если $\forall i, j\ p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j)$

Примечание. Если xi и η независимы, то

$$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$$

обратное не верно

Доказательство.

$$E(\xi\eta) = \sum_{ij}(x_i y_j)p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_j)p(\eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i) \cdot \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

Доказательство.

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E(E\xi)^2 =$$
$$E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

Примечание.

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\mathrm{Cov}(\xi, eta)$$

, где $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$ — **ковариация**

Доказательство.

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E\xi^2 + 2E\xi\eta + E\eta^2 - (E\xi)^2 - 2E\xi \cdot E\eta - (E\eta)^2 =$$

$$D\xi + D\eta + 2(E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta)$$

□

Примечание. Если случайные величины ξ и η независимые, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + \eta$$

Доказательство. По свойству $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0$ □

Примечание. Среднее квадратическое отклонение — минимум отклонения случайной величины от точек вещественной прямой, т.е.

$$D\xi = \min_a (y - a)\text{Исправить}$$

Доказательство.

$$E(\xi - a)^2 = E((\xi - E\xi) + (E\xi - a))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + \underbrace{2E(\xi - E\xi) \cdot (E\xi - a)}_{0} + (E\xi - a)^2 =$$

$$= D\xi + (E\xi - a)^2 \leq D\xi$$

□

3. Другие числовые характеристики

Примечание.

$$m_k = E\xi^k$$

— момент k-того порядка
В частности $m_1 = E\xi$

Примечание.

$$E|\xi|^k$$

— абсолютный момент k-того порядка

Примечание.

$$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$$

— центральный момент k-того порядка
В частности $\mu_2 = D\xi$

Примечание.

$$E|\xi - E\xi|^2$$

— абсолютный центральный момент k-того порядка

Примечание. Центральные моменты можно выразить через относительные моменты Доделать

Примечание. **Модой** Mo называется такое значение случайной величины, где вероятность события является наибольшей

$$p(\xi = \text{Mo}) = \max_i p_i$$

Определение. **Медианой** Me называется значение случайной величины такое что,

$$p(\xi < \text{Me}) = p(\xi > \text{Me}) = \frac{1}{2}$$