

# Лекция 8

Илья Yaroshevskiy

3 апреля 2021 г.

## Содержание

<b>1 Стандартное абсолютно непрерывное распределение</b>	<b>1</b>
1.1 Равномерное распределение . . . . .	1
1.2 Экспоненциальное распределение . . . . .	2
1.3 Нормальное распределение . . . . .	2
1.4 Стандартное нормальное распределение . . . . .	2
1.5 Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями и ее следствия	3
1.6 Коэффициенты асимметрии и эксцесса . . . . .	4
1.7 Гамма функция и гамма распределение . . . . .	4

## 1 Стандартное абсолютно непрерывное распределение

### 1.1 Равномерное распределение

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  **равномерно** распределена на  $[a, b]$  если ее плотность постоянна на этом отрезке

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

**Обозначение.**  $\xi \in U_{[a,b]}$

*Примечание.* Датчики случайных чисел имеют равномерное распределение, и с их помощью можно смоделировать другие распределения, если знаем их функции распределения

## 1.2 Экспоненциальное распределение

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет **показательное** распределение, если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_0^{\infty} x^k \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^{\infty} \alpha (\alpha x)^k e^{-\alpha x} dx = \frac{k!}{\alpha^k}$$

$$E\xi = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\xi^2 = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(a < \xi < b) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

*Примечание.* **Свойство нестарения.** Если  $\xi \in E_\alpha$ , то  $p(\xi > x + y | \xi > x) = p(\xi > y)$

*Примечание.* Гамма функция Эйлера:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

•

$$\Gamma(\lambda - 1) = \lambda! \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

**Обозначение.**  $\xi \in E_\alpha$

*Пример.* Время работы прибора до поломки

*Пример.* Время между появлениями двух соседних редких событий в простейшем потоке событий

## 1.3 Нормальное распределение

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет **нормальное** распределение с параметрами  $a, \sigma > 0$ , если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Смысл параметров распределения:  $a = E\xi$ ,  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонения.  $D = \sigma^2$

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

**Обозначение.**  $\xi \in N_{a,\sigma}$

## 1.4 Стандартное нормальное распределение

**Определение.** Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$  т.е.  $\xi \in N_{0,1}$ . Плотность

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функция распределения

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Примечание.

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.5 + \Phi(x) - \text{функция Лапласа}$$

Примечание. Интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

## 1.5 Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями и ее следствия

**Свойство 1.**  $\xi \in N_{a,\sigma}$ . Тогда

$$F_{\xi}(x) = \Phi_{\xi}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Доделать

□

**Свойство 2.** Если  $\xi \in N_{a,\sigma}$ , тогда  $\eta = \frac{\xi-a}{\sigma} \in N_{0,1}$

Доказательство. Доделать

□

**Свойство 3.**  $\xi \in N_{a,\sigma}$ . Тогда  $E\xi = a$ ,  $D\xi = \sigma^2$

Доказательство.

$$\eta = \frac{\xi-a}{\sigma} \in N_{0,1} \Rightarrow E\eta = 0, D\eta = 1$$

$$\xi = \sigma\eta + a$$

$$E\xi = \sigma \cdot 0 + a = a$$

$$D\xi = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

□

**Свойство 4.** Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} p(\alpha < \xi < \beta) &= F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha) = \Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) = \\ &= \left(0.5 + \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)\right) - \left(0.5 + \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

□

**Свойство 5.** Вероятность отклонения случайной величины от ее среднего значения или попадание в интервал симметричный относительно  $a$

$$p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(|\xi - a| < t) &= p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi < a + t) = \Phi\left(\frac{a+t-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-t-a}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

□

*Доказательство.* При замене в этой формуле  $\Phi(x)$  на  $\Phi_0(x)$  получится

$$p(|\xi - a| < t) = 2\Phi_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$$

□

**Свойство 6** (Правило трех  $\sigma$ ).

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$$

## 1.6 Коэффициенты асимметрии и эксцесса

**Определение.** Асимметрией распределения называется число

$$A_\xi = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{N_{a,\sigma}}{\sigma^3} \text{ Исправить}$$

**Определение.** Эксцессом распределения называется число

$$E_\xi = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{N_{a,\sigma}}{\sigma^4} - 3 \text{ Исправить}$$

*Примечание.* Если  $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ , то  $A_\xi = 0$  и  $E_\xi = 0$ . Таким образом эти коэффициенты показывают насколько сильно данное распределение отличается от нормального

## 1.7 Гамма функция и гамма распределение

**Определение.** Гамма функцией Гаусса называется функция

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

**Свойство 1.**

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \Gamma(\lambda - 1)$$

**Свойство 2.**

$$\Gamma(1) = 1$$

**Свойство 3.**

$$\Gamma(x) = (x - 1)! \quad x \in \mathbb{N}$$

**Свойство 4.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет гамма распределение с параметрами  $\alpha, \lambda > 0$ , если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases} \text{ Исправить}$$

$$F_\xi(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt \quad x \geq 0$$

Если  $\lambda \in \mathbb{N}$ , то

$$F_\xi(x) = \sum_{k=\lambda}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{x^k} e^{-\alpha x} \text{ Исправить}$$

**Обозначение.**  $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$

**Свойство 1.**  $E\xi = \frac{\lambda}{\alpha}$ ,  $D\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$

**Свойство 2.**  $\Gamma_{\alpha,\lambda} = E_\alpha$

**Свойство 3.** Доделать

**Свойство 4.** Если  $\xi \in N_{0,1}$ , то  $\xi^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$