Лекция 4

Ilya Yaroshevskiy

January 11, 2021

Contents

1 Диффеоморфизмы

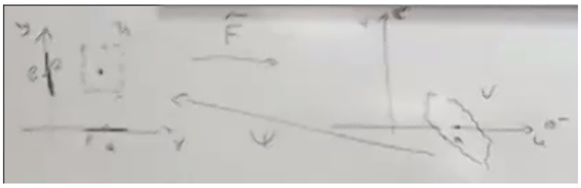
1.1 Теорема о неявном отображении(продолжение)

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Доказательство

Если 1) выполняется, то 2) очевидно: $F(x,\Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x,\Phi(x)) + F'_y(x,\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) = 0$

1. $\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^{m+n} \quad (x,y) \mapsto (x, F(x,y)) \quad \tilde{F}(a,b) = (a,0)$
   $\tilde{F}' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'x & F'y \end{pmatrix}$, очевидно $\det \tilde{F} = 0$ в (a,b), значит $\exists U((a,b))$ $\tilde{F}|_{U((a,b))}$ - диффеоморфизм

   (a) $U = p_1 \times Q$ - можно так считать
   (b) $V = \tilde{F}(U)$
   (c) $\tilde{F}$ - диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \to U$
   (d) $\tilde{F}$ - не меняет первые m координат $\Psi(u,v) = (u, H(u,v))$
   $H : V \to \mathbb{R}^m$
   (e) Ось x и ось u идентичны $p =$ ось $u = \mathbb{R}^m \times \{0\}^n \cap \underbrace{V}_{\text{открыто в } \mathbb{R}^{m+n}} \Rightarrow p$ открыто в R^m
   (f) $\Phi(x) = H(x,0) \quad F(x,\Phi(x)) = 0$, при $x \in P$
   $F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$

   Единственность $x \in p$ $y \in u \quad F(x,y) = 0$
   $(x,y) = \Psi(\tilde{F}(x,y)) = \Psi(x,0) = (x, H(x,0)) = (x, \Phi(x))$

1.2 Определение

"поверхность" = многообразие
$M \subset \mathbb{R}^m \quad k \in \{1, \dots, m\}$
M - простое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$ если оно гомеоморфно некоторому открытому $O \subset \mathbb{R}^k$
т.е. $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to M$ - непрерывное, обратимое, Φ^{-1} - непрерывное, Φ - параметризация многообразия M

1.3 Определение

$M \subset \mathbb{R}^m$ - простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$
$\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m \quad \Phi(O) = M \quad \Phi : O \to M$ - гомеооморфизм
$\Phi \in C^r \qquad \forall x \in O \quad \text{rank } \Phi'(x) = k$ - максимально возможное значение

Примеры

1. Полусфера в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
   $\Phi : (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$
   $\Phi : B(0, R) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
   $\Phi \in C^\infty(B(0, R), \mathbb{R}^3)$
   $\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$, rank $\Phi' = 2$
   Аналогично график гладкой функции ($\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$) - простое двумерное многообразие

2. Цилиндр $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2,\ z \in (0, h)\}$ $\Phi : [0, 2\pi] \times (0, h) \to \mathbb{R}^3$
   $(\varphi, z) \mapsto (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$ - параметризация цилиндра без отрезка(боковой перпендикуляр)
   При $\varphi = 0,\ \varphi = 2\pi$ проблема
   $\nexists \Phi : \underbrace{O}_{\text{откр., односвязно}} \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$
   $(x, y) \mapsto (\frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2 - 1})$
   $(x, y) \in$ открытое кольцо $1 < x^2 + y^2 < (1 + h)^2$

3. Сфера в $\mathbb{R}^3$ без ...
   $\Phi : (0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to R^3 \quad R$ - радиус
   $(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\psi \\ R\sin\varphi\cos\psi \\ R\sin\psi \end{pmatrix}$ - сферические координаты в $\mathbb{R}^3$

1.4 Теорема

$M \subset \mathbb{R}^m \quad 1 \le k < m \quad 1 \le r \le \infty \quad p \in M$
Тогда эквивалентны:

1. $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ - окрестность точки p в $\mathbb{R}^m$: $M \cap U$ - простое k-мерное многообразие класса C^r

2. $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ - окрестность точки p
   $f_1, f_2, \dots, f_{m-k} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$, все $f \in C^r$
   $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$, при этом $\text{grad}(f_1(p)), \dots, \text{grad}(f_{m-k}(p))$ - ЛНЗ

Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$ Φ - параметризация : $\underbrace{O}_{(t_1, \dots, t_k)} \subset \mathbb{R}^k,\ \in C^r$, $p = \Phi(t^0)$
  Φ' - матрица $m \times k \quad \text{rank } \Phi'(t^0) = k$
  Пусть $\det(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_k})_{i,j=1\dots k} \neq 0$
  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$
  $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ - проекция на первые k координат($(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$)
  Тогда $(\underbrace{L \circ \Phi}_{(\varphi_1, \dots, \varphi_k)})'(t^0)$ - невырожденный оператор
  $W(t^0)$ - окрестность точки t^0, $L \circ \Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$

$L \circ \Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k$ - диффеоморфизм
Множество $\Phi(W)$ - это график отображения $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$
Пусть $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1} : V \to W$
Берем $x' \in V$, тогда $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$
Множество $\Phi(W)$ - открытое в $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где $\tilde{U}$ - открытое множество в $\mathbb{R}^m$
Можно считать, что $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{R}^{m-k}$
Пусть $f_j : \tilde{U}\mathbb{R} \quad f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}$
Тогда $x \in M \cap \tilde{U} = \Phi(W) \Leftrightarrow \forall j : \ f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad } f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad } f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

- $2 \Rightarrow 1 \qquad F = (f_1, \dots, f_{m-k})$
  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ - матрица $m - k \times m$
  Градиенты ЛНЗ $\Rightarrow$ ранг матрицы равен $m - k$, он достигается на последних $m - k$ столбцах
  $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1\dots m-k} \neq 0$
  $F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = 0, \quad x \in \tilde{U}$
  По теореме о неявном отображении $\exists P$ - окрестность $(x_1, \dots, x_k)$ в $\mathbb{R}^m \quad \exists Q$ - окр $(x_{k+1}, \dots, x_m)$ в $\mathbb{R}^{m-k}$
  $\exists H : P \to Q \quad H \in C^r \quad F(x', H(x')) = 0, \quad x' \in P$
  Тогда $\Phi : P \to \mathbb{R}^m \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, H_1(x'_1, \dots, x'_k), H_2, \dots, H_{m-k})$ - параметризация мноогбразия
  Φ - гомеоморфизм P и $M \cap \tilde{U}$, Φ^{-1} - практически проекция

1.4.1 Следсвтие о двух параметризациях

$M \subset \mathbb{R}^m$ - k-мерное C^k-гладкое многообразие $p \in M$
$\exists$ две парметризации $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_1(t^0) = 0$
$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_2(s^0) = 0$
Тогда $\exists$ диффеоморфизм $\Theta : O_1 \to O_2$, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

Доказательство чатсный случай. Пусть для Φ_1, Φ_2, rank $\Phi'_1(t^0)$, rank $\Phi'_2(s^0)$ достигаются на первых k столбцах
Тогда $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta\text{- искомый диффеоморфизм}}$
$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$
$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \quad \in C^r$
"Почему-то неверно" LUL