Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

22 февраля 2021 г.

Содержание

1 Интеграл

1. $f \geq 0$, ступенчатые
   $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{E_k}$, E_k — измеримое
   $\int_X f = \sum \alpha_k \mu E_k$

2. $f \geq 0$, измеримая
   $\int_X f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq g \leq g \\ f \text{ — ступ.}}} \int_X g d\mu$

3. f — измерима, $f^+, f^- \geq 0$ — измеримые
   Пусть $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечные
   Тогда $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$

   Определение. Если $\int_x f^+$, $\int_X f^-$ — оба конечные, то f назывется **суммируемой**

   Примечание. f — измеримая, ≥ 0, интеграл 3 = интеграл 2

4.

   Определение. $E \subset X$ — измкримое, f — измерима на X
   $\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E$

Примечание. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$ $\int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$

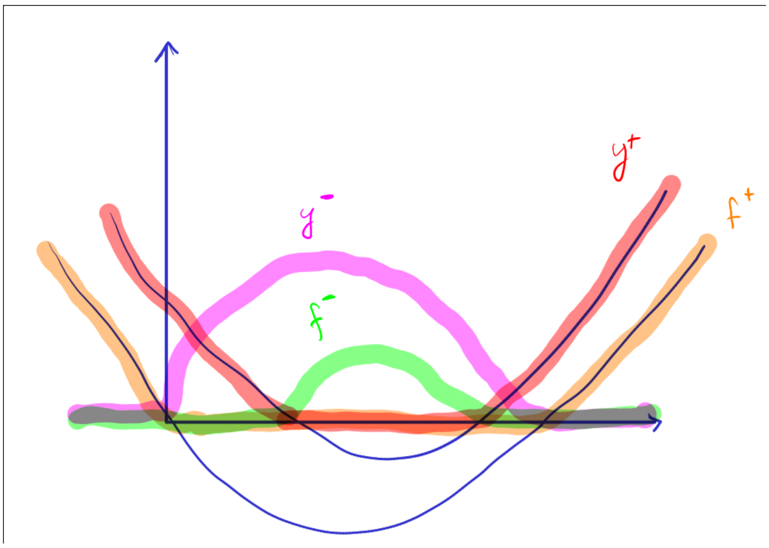
Примечание. $\int_E f d\mu = \sup\{fg : \ 0 \leq g \leq f$ на E, g — ступенчатые$\}$, можно считать что g — тождественный 0 вне множества E

Примечание. $\int_E f$ не зависит от значений f вне E

Примечание. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \subset X$ — измеримое, g, f — измеримые. Свойства:

1. Монотонность $f \leq g$ $\int_E f \leq \int_E g$

   Доказательство.



(a) $f, g \geq 0$ — очевидно

(b) f, g — произвольные
$f^+ \leq g^+ \;\; f^- \leq g^-$
$\int_E f^+ \leq \int_E g^+ \;\; \int_E f^- \leq \int_E g^- \Rightarrow$ OK

$\square$

2. $\int_E A d\mu = \mu E \;\; \int_E 0 d\mu = 0$

3. $\mu E = 0 \;\; \int_E f = 0$

Доказательство. (a) f — ступенчатая

(b) $f \geq 0$ — измеримая

$\square$

Змечание:
f — измеримая. Тогда f — суммируемая $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

($\Leftarrow$) следует из свойства 1. $f^+, f^- \leq |f|$

($\Rightarrow$) позже

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \; \forall c \in \mathbb{R} \;\; \int_E cf = c \int_E f$

(a) $(-f)^+ = f^- \;\; (-f)^- = f^+$

(b) можно считать $c > 0$ для $f \geq 0$ — тривиально

5. $\exists \int_E f d\mu$
Тогда $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $-|f| \leq f \leq |f|$. По свойствам 3 и 4 $\square$

6. $\mu E \leq +\infty, \;\; a \leq f \leq b$
Тогда $a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E \;\; a\chi_E \leq f \leq b\chi_E$
Следствие 1.0.1. f — измерима на E, f — ограничена на E, $\mu E < +\infty$
Тогда f — суммируемая на E

7. f — суммируемая на E. Тогда f — почти везде конечная

Доказательство.

(a) $f \geq 0 \;\; f = +\infty$ на $A \subset E \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \int_E f \geq n\mu A$

(b) $f = f^+ - f^-$

□

Лемма 1.
$$A = \bigsqcup_{i-1}^{+\infty} A_i$$
— *измеримые, g — ступенчатая, $g \geq 0$*
Тогда
$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

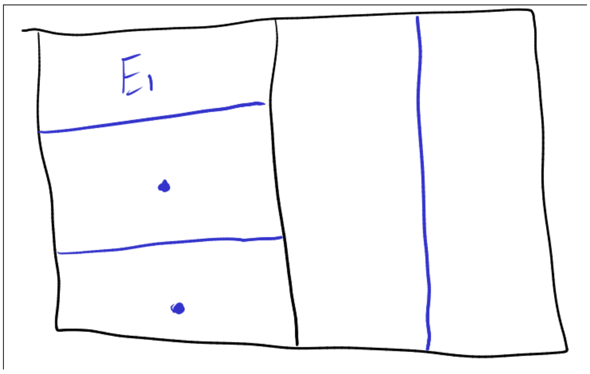
Доказательство. $\int_A g d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} = \sum_i \sum_k \dots = \sum_i \int_{A_i} g d\mu$ □

Теорема 1.1. $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая на A, $f \geq 0$
Тогда $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$

Доказательство.

($\leq$) ступенчатая g : $0 \leq g \leq f$ $\int_a g = \sum \int_{A_i} g d\mu \leq \sum \int_{A_i} f$ — по Лемме

($\geq$) 1. $A = A_1 \cup A_2$
$0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}$ $0 \leq g_2 \leq f\chi_{A2}$
$$g_1 = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \ g_2 = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$



Считаем что E_k – совместное разбиение
$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f\chi_A$$
$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2 \leq \int_A f$$
Перейдем к супремуму
$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f$$
$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ — индукция по n
3.
$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \sqcup B_n$$
, где
$$B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$$
$$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

□

Следствие 1.1.2.

- $f \geq 0$ — измеримая
- $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$
- $\nu E := \int_E f d\mu$

Тогда ν — мера

Следствие 1.1.3 (аддитивности интеграла). f — суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
Тогда
$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. $f^+, f^- \dots$??? □

1.1 Предельный переход под щнаком интеграла

$f_n \to f$. Можно ли утверждать $\int_E f_n \to \int_E f$?
Пример. $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$ $f \equiv 0$ $f_n \to f$ (даже $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$)
$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 1.2 (Леви)**.** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, f_n — измеримая
$\forall n$ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ почти везде
Тогда $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_x f d\mu$

Примечание. f — задана всюду, кроме множества меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e
Тогда f — измерима на X.

Доказательство.

($\leq$) очевидно. $f_n \leq f$ почти везде $\int f_n \leq \int f$
$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \int_e f_n = \int_{X\setminus e} f_n \leq \int_{X\setminus e} f \leq \int_X f$$

($\geq$) Достаточно: $\forall g$ — ступенчатая $0 \leq g \leq f$
$$\lim \int_X f_n \geq \int_X g$$

Достаточно: $\forall c \in (0,1)$
$$\lim \int_X f_n \geq c \int_X g$$
$$E_n := X(f_n \leq cg) \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$
$\bigcup E = X$ т.к. $c < 1$
$$\int_x f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$
Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \lim \int_{E_n} g = c \int_X g$
Последнее равентсво справедливо в силу непрерывности мнизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

□

Теорема 1.3. $f, g \geq 0$ измерима на E
Тогда
$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые
$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k},\ g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$
$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_l \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ стпенчатая $f_n: \ 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \ \lim f_n = f$
$g \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ стпенчатая $g_n: \ 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \ \lim g_n = g$
$f_n + g_n \to f + g \ \int_E f_n + g_n \to \int_E f + g$
$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_E g = \int_E f + g$

□

Следствие 1.3.4. f, g — суммируемы на E
Тогда $f + g$ — суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Примечание. Свойство 3 доказано

Доказательство. Суммируемость $|f + g| \leq |f| + |g|$
$h = f + g$. Тогда:

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

$$\Rightarrow \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+$$

$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

$$\int_E h = \int_E f + \int_E g$$

□

Определение. $\mathcal{L}(X)$ = множество функций суммируемых на X

Следствие 1.3.5. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ — это линейный функционал на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X) \ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X); \ \int_X \sum \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_X f_k$$

Теорема 1.4 (об интегрировании положительных рядов). $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \in \mathfrak{A}$ $\underset{\text{изм.}}{u_n} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $u_n \geq 0$ почти везде
Тогда

$$\int_E (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. по т. Леви: $S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$ $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$ $S_n \to S$ — сумма ряда $\sum u_n$
Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$, $\int_E S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k \to \int_E S$ □

Следствие 1.4.6. u_n — измеримые $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$
Тогда ряд $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходится при почти всех x

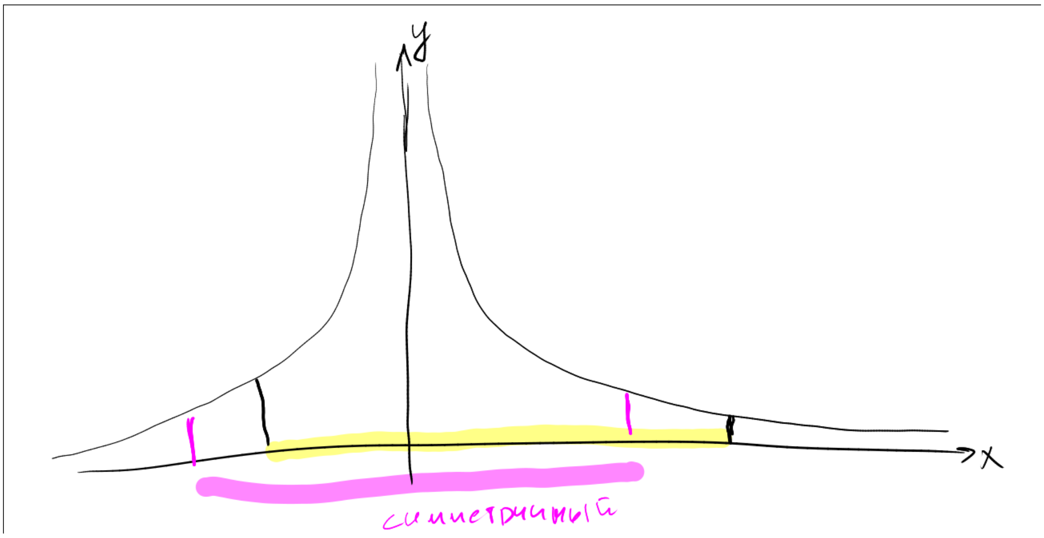
Доказательство. $S(x) := \sum |u_n(x)| \geq 0$ — измеримая

$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow S$ — сумиируема $\Rightarrow S$ почти везде конечена □

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произведение последовательности; $\sum a_n$ — абсолютно сходится
Тогда $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде



$$\int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} = \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} dx = |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

$$\leq |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{N} \cdot |a_n|$$

$$\sum_n \int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq 4 \int_N \sum |a_n| < +\infty$$

$\square$