Лекция 13

Ilya Yaroshevskiy

January 13, 2021

Contents

1 Ряды Тейлора

Пример.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad x \in (-1,1) \tag{4}$$

$$\ln(1+x) = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1,1) \tag{5}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad x \in (-1,1) \tag{6}$$

Теорема 1. $\forall \sigma \in \mathbb{R}\ \forall x \in (-1,1)$
$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} x^2 + \dots$

Proof. при $|x| < 1$ ряд сходится по ризнаку Деламбера

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(\sigma - n)x}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| < 1 \tag{7}$$

Обозначим сумму ряда через $S(x)$
Наблюдение: $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$\sum a_n \leftrightarrow \sum a_n x^n = f(x) \tag{8}$$

$$\sum a_n n x^{n-1} = f'(x) \tag{9}$$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} x^n + \dots \tag{10}$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} x^n \tag{11}$$

$$(1+x)S' = \dots + (\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \cdot n)x^n + \dots = \tag{12}$$

$$= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \cdot \sigma x^n + \dots \tag{13}$$

$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S' \cdot (1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1} \cdot S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0 \Rightarrow f = \text{const} \; f(0) = 1 \;\Rightarrow f \equiv 1$ $\square$

Следствие 1.

$$\arcsin x = \sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(x^{2n+1})}{2n+1} \tag{14}$$

Proof.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} (-x^2)^n \Big|_{\sigma=-\frac{1}{2}} = \sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \tag{15}$$

последнее выражение при $n = 0$ равно 1, и тогда (14): $\arcsin x = x + \dots$
$\arcsin x = \text{const} +$ нужный ряд, при $x := 0$ $\text{const} = 0$ $\square$

Следствие 2.

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) \cdot t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}} \quad |t| < 1 \tag{16}$$

Proof.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \tag{17}$$

дифференцируем m раз $\square$

Теорема 2. $f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$
f — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности $x_0 \Leftrightarrow$
$\exists \delta, C, A > 0 \; \forall n \; \forall x : |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < C \cdot A^n \cdot n!$

Proof.

(⇐) формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \tag{18}$$

$$\left| \frac{f^{(n)}()}{n!}(x-x_0)^n \right| \le C \cdot |A(x-x_0)|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \tag{19}$$

Разложение имеет место при $|x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$

(⇒)

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{20}$$

Возьмем $x_1 \neq x_0$, для которого это верно

- при $x = x_0$, ряд сходится $\Rightarrow$ слагаемые $\to 0 \Rightarrow$ ограничены

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n \right| \le C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \le C_1 n! B^n| \tag{21}$$

, где $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$

-

$$f^{(m)}(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1)\dots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m} = \tag{22}$$

$$= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m} \tag{23}$$

Пусть $|x-x_0| < \frac{1}{2B}$

$$|f^{(n)}(x)| \leq \sum \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} |(x-x_0)^{n-m} \right| \leq \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!} = \tag{24}$$

$$= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!} \cdot (\underbrace{B|x-x_0|}_{<\frac{1}{2}})^{n-m} \overset{}{\underset{\text{Сл. 2}}{=\!=\!=}} \frac{C_1 B^n m!}{(\underbrace{1-\underbrace{B|x-x_0|}_{<\frac{1}{2}}}_{>\frac{1}{2}})^{m+1}} < \tag{25}$$

$$< C_1 2^{m+1} B^m m! = \underbrace{(2C_1)}_{C} \cdot (\underbrace{2B}_{A})^m m! \tag{26}$$

Эта оценк выполнятется при $|x-x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

$\square$

2 Теория меры

предыдущее

2.1 Мера

Определение. $\mu : \underset{\text{п/к}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера, если μ — объем и μ — счетно аддитивна: $\forall A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$
$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \qquad \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

Примечание. $(a_\omega)_{\omega \in \Omega}$ — счетное множество чисел(т.е. Ω — счетно) $\forall \omega\ a_\omega \geq 0$
Тогда определена:

$$\sum_{\omega \in \Omega} a_\omega = \sup(\sum_{\text{кон.}} a_\omega) \tag{27}$$

Значит можно счетную аддитивность понимать обобщеноо:

$$A = \bigsqcup_{\text{кон.}} A_\omega \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_\omega \quad (A, A_\omega \in \mathcal{P}) \tag{28}$$

Примечание. Счетная аддитивность **не** следует из конечной аддитивности

Пример. $X = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{P}$ = ограниченые множества и их дополнения
$\mu A = \begin{cases} 0 & , A \text{ — огр.} \\ 1 & , A^C \text{ — огр.} \end{cases}$

$\mathbb{R}^2$ = "лист в клетку" $= \bigcup_{\text{счетное}}$ клеток $= \bigsqcup$ ячеек $\overset{\text{обозн.}}{=\!=\!=} \bigsqcup A_i$
$\mu(\mathbb{R}^2) = 1 \quad \sum \mu A_i = 0$ **Это не мера**

Пример. X — (бесконечное) множество
$a_1, a_2, a_3, \dots$ — набор попарно различных точек
$h_1, h_2, h_3, \dots$ — положительные числа
Для $A \subset X$

$$\mu A := \sum_{k: a_k \in A} h_k \tag{29}$$

Счетная аддитивность $\mu \Leftrightarrow$ Теорема о группировке слагаемых
μ — **дискретная мера**

Теорема 1. $\mu : \underset{\text{п/к}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем
Тогда эквивалентны:

1. μ — мера, т.е. μ — счетно аддитивна
2. μ – счетно аддитивна:
   $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$

Proof.

(1 $\Rightarrow$ 2) Как в предыдущей теореме(доказательство п.2) в формклах 15, 17, 19 вместо конечных объединений и сумм надо рассматривать счетные

(2 $\Rightarrow$ 1) $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ проверим $\mu A = \sum \mu A_i$:

$$\forall N \quad A \supset \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i \quad \mu A \geq \sum_{i=1}^{N} \mu A_i \tag{30}$$

$$A \subset \bigcup A_i \quad \mu A \leq \sum \mu A_i \tag{31}$$

Тогда $\mu A = \sum \mu A_i$

$\square$

Следствие 3. $A \in \mathcal{P} \quad A_n \in \mathcal{P}: \ A \in A_n, \ \mu A_n = 0$, при этом μ — мера
Тогда $\mu A = 0$

Proof. $\mu A \leq \sum \mu A_i = 0$ $\square$

Теорема 2. $\mathfrak{A}$ — алгебра, $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем
Тогда эквивалентны:

1. μ — мера
2. μ — непрерывна снизу:
   $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i \tag{32}$$

Proof. нет(см доказательство Т. 3) $\square$

Теорема 3. $\mathfrak{A}$ — алгебра $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ — конечный объем
Тогда эквивалентны:

1. μ — мера, т.е. счетно аддитивная функцяи множества

2. μ — непрерывна сверху: $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$
   $A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad A = \bigcap A_i \Rightarrow \mu A = \lim \mu A_i$

$x = \mathbb{R} \quad A_k = [k, +\infty] \quad \bigcap A_k = \emptyset = A \quad \mu A = 0 \ \mu a_k = +\infty$
μ — мера Лебега в R^2

Proof.

(1 $\Rightarrow$ 2) $B_k = A_k \setminus A_{k+1} \quad A_1 = \bigsqcup B_k \sqcup A$
$\underbrace{\mu A_1}_{\text{кон.}} = \underset{\Rightarrow\text{сх.}}{\sum} \mu B_k + \mu A$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} B_k \sqcup A \quad \mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu A \tag{33}$$

(2 $\Rightarrow$ 1) Дана непрерывность сверху. Воспользуемся ей для случая $A = \emptyset$
Проверяем счетную аддитивность: $C = \bigsqcup C_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum \mu C_i$

$$A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{\infty} C_i \tag{34}$$

Тогда:

$$A_k \in \mathfrak{A}: \ A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \tag{35}$$

последнее выражение содержит конечное число операций
$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \ \bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k \quad \mu C = \sum_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \sum \mu C_i \tag{36}$$

$\square$

2.2 Теорема о продолжении меры

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера σ **- конечна**, если: $\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : \ X = \bigcup A_i, \ \mu A_i < +\infty$

Пример. $X = \mathbb{R}^m, \ \mathcal{P} = \mathcal{P}^m$ — полукольцо ячеек
μ — класичекий объем, μ — σ-конечный объем
$\mathbb{R}^m = \bigcup$ Куб$(0, 2R) = \bigcup$ целочисленных единичных ячеек

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера
μ — **полная**, если $\forall A \in \mathcal{P} \ \mu A = 0 \ \forall B \subset A$ выолняется $B \in \mathcal{P}$ и (тогда автоматически) $\mu B = 0$
Совместное свойство μ и $\mathcal{P}$

Определение. Пространство с мерой — это тройка $(\underset{\text{множество}}{X}, \underset{\sigma\text{-алгебра}, \mathfrak{A} \subset 2^X}{\mathfrak{A}}, \underset{\text{мера на } \mathfrak{A}}{\mu})$