Лекция 13

Ilya Yaroshevskiy

21 апреля 2021 г.

Содержание

1 Число обусловленности

Пример.

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 9.7 & 6.6 \\ 4.1 & 2.8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 9.7 \\ 4.1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|b\| = 13.8 \quad \|x\| = 1$$

$$\operatorname{cond}(A) = 2249.4$$

$$b' = \begin{pmatrix} 9.70 \\ 4.11 \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{pmatrix}$$

$$\Delta b = b - b' \quad \|\Delta b\| = 0.01$$

$$\Delta x = x - x' \quad \|\Delta x\| = 1.63$$

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 0.00072464$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 1.63$$

1.1 Нормы и анализ ошибок

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\tilde{x} : \|Ax\| = \|A\| \cdot \|\tilde{x}\|$$

$$\|A = M = \max_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\|a\| =_j \|a_j\|$$

Результат Уилкинсона

$$x^* : (A + E)x^* = b$$

, где элементы E имеют уровень ошибок округления Доделать

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\frac{\|x - x^*\|}{\|x^*\|} \le c \cdot \operatorname{cond}(A) \cdot \varepsilon_{??}$$

- a_j — столбцы A
- $\tilde{a}_j$ — столбцы A^{-1}

$$\mathrm{cond}(A) = \max_j \|a_j\| \cdot \max_j \|\tilde{a}_j\|$$

1.2 Оценивание числа обусловленности

$$\mathrm{cond}(A) = \max \frac{\max \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min \frac{\|A^{-1}\|}{\|x\|}}$$

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot A^{-1}\|$$

1-норма:

- a_j — столбец

$$\|A\| = \max_j \|a_j\|$$

Доделать

2 Дополнительно о градиентных методах

$\{x_k\}$: $x^k = x^{k-1} + \alpha_k u^k \quad k \in \mathbb{N}$
$u^k \in E_n$. $(\nabla f(x), u) < 0$ — условие спуска
Как находить α_k

$$f(x^{k-1} + \alpha_k u^k) \leq (1 - \lambda_k) f(x^{k-1}) + \lambda_k \min_{\alpha \in E} f(x^{k-1} + \alpha u^k) \quad \lambda_k \in [0, 1]$$

$$f(x^{k-1} + \alpha_k u^k) \leq f(x^{k-1})$$

— если это выполнено, то $\{x^k\}$ — релаксационная Доделать

2.1 Градиентный спуск

Доделать

Теорема 2.1. Пусть $f(x)$ ограничена снизу и дифференцируема в E_n, а ее градиент удовлетворяет условию Липница, т.е. $\forall x, y \in E_n$

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq L|x - y|$$

Доделать