

Лекция 10

Илья Yaroshevskiy

16 января 2021 г.

Содержание

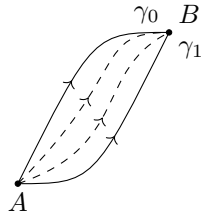
1	Гомотопия путей	1
2	Степенные ряды	3

1 Гомотопия путей

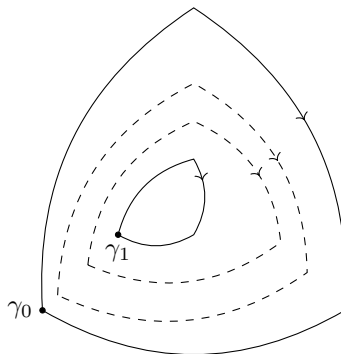
Определение (Гомотопия двух путей). $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывны
 $\Gamma : [a, b] \times [0, 1]$ — непрерывное, такое что:

$$\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \quad \Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$$

- Гомотопия связанная, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$,
 $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_0(b)$



- Гомотопия петельная $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
 $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



Теорема 1.1. V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

γ_0, γ_1 — связанным гомотопные пути

Тогда $\int_{\gamma_0} V_i dx_i = \int_{\gamma_1} V_i dx_i$

Примечание. То же самое выполнено для петельных гомотопий

Доказательство. $\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b] u \in [0, 1]$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Проверим: Φ - локально постоянна

$$\forall u_0 \in [0, 1] \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

Γ - непрерывна на $[a, b] \times [0, 1]$ - компакт $\Rightarrow \Gamma$ - равномерно непрерывна
 $\forall \delta > 0 \exists \sigma > 0 \forall t, t' \mid t - t' < \sigma \forall u, u' \mid u - u' < \sigma \mid \Gamma(t, u) - \Gamma(t', u') < \frac{\delta}{2}$

Лемма 3 $\gamma : [a, b] \rightarrow O$

Тогда $\exists \delta > 0$ со свойством

Если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ — близки к γ

т.е. $\forall t \in [a, b]$

- $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \delta$

- $|\tilde{\tilde{\gamma}} - \gamma(t)| < \delta$

то $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} - V$ - похожие

Возьмем параметр δ из Леммы 3 для пути γ_{u_0}

Если $|u - u_0| < \sigma \mid \Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$, при $t \in [a, b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} — похожи по Лемме 3

Построим кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0} \frac{\delta}{4}$ - близкий к $\gamma_{u_0} \forall t \in [a, b] \mid \gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0} < \frac{\delta}{4}$

и кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_u \frac{\delta}{4}$ - близкий к γ_u

Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u - \delta$ - близкие к $\gamma_{u_0} \Rightarrow$ они V - похожие \Rightarrow

$$\Rightarrow \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$$

т.е. $\Phi(u) = \Phi(u_0)$, при $|u - u_0| < \delta$

□

Определение. Область $O \subset \mathbb{R}^m$ - называется **односвязной** если в ней любой замкнутый путь гомотопен постоянному пути

Примечание. Выпуклая область — односвязна

Примечание. Гомеоморфный образ односвязного множества односвязный

$\Phi : O \rightarrow O'$ — гомеоморфизм, γ - петля в O' , Φ^{-1} — петля в O

$\Gamma : [a, b] \rightarrow [0, 1] \rightarrow O$ - гомотопия $\Phi^{-1}(\gamma)$ и постоянного пути $\tilde{\gamma} \equiv A$

$\Phi \circ \Gamma$ — гомотопия γ с постоянным путем $\Phi(A)$

Теорема 1.2. $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область

V — локально потенциальное векторное поле в O

Тогда V — потенциальное в O

Доказательство. Теорема. Эквивалентны:

1. V — потенциальное

2. ...

3. \forall кусочно гладкой петли $\gamma: \int_{\gamma} \sum V_i dx_i = 0$

V - локально постоянно, γ_0 — кусочно гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути $\gamma_1 \Rightarrow \int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0 \Rightarrow V$ — потенциально

□

Следствие 1.2.1. Теорема Пуанкаре верна в односвязной области

Дифференциальный критерий:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (1)$$

Лемма Пуанкаре: (1) $\Rightarrow V$ — локально потенциально

Теорема 1.3 (о веревочке).

- $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

- $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow O$
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля не стягиваема

Доказательство.

$V(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ — векторное поле в \mathbb{R}^2

Проверим что $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2)$$

Равенство частных производных выполняется если $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow V$ — локально потенциально
При этом

$$\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \quad (3)$$

(3) \Rightarrow петля не стягиваема (Если бы была стягиваема, то интеграл изначально должен был быть равен 0, т.к. интеграл при гомотопиях не меняется), а поле V — не потенциально \square

2 Степенные ряды

Теорема 2.1 (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда).

$$\sum a_n(z - z_0)^n \quad 0 < R \leq +\infty$$

1. $\forall r : 0 < r < R$ Ряд сходится равномерно в шаре $\overline{B(z_0, r)}$

2. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ — непрерывна в $B(z_0, R)$

Доказательство.

1. Если $0 < r < R$, то при $z = z_0 + r$ ряд абсолютно сходится (по теореме о радиусе сходимости), т.е. $\sum |a_n| \cdot r^n$ — конечна
признак Вейрештрасса:

- при $|z - z_0| \leq r \quad |a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n$
- $\sum |a_n| r^n$ — конечна

\Rightarrow есть равномерная сходимость на $\overline{B(z_0, r)}$

2. Следует из 1. и теоремы Стокса-Зайдля

Если z удовлетворяет $|z - z_0| < R \Rightarrow \exists r_0 < R \quad z \in B(z_0, r_0)$

На $B(z_0, r_0)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow f$ — непрерывна в z

\square

Определение. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Производная:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4)$$

Примечание. $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|)$

Лемма 1. $w, w_0 \in \mathbb{C}, |w| < r, |w_0| < r$

Тогда $|w^n - w_0^n| \leq n \cdot r^{n-1} \cdot |w - w_0|, n \in \mathbb{N}$

Доказательство. $w^n - w_0^n = (w - w_0)(w^{n-1} + \underbrace{w^{n-2}w_0}_{\text{по модулю } \leq r^{n-1}} + \dots + w_0^{n-1})$ \square

Теорема 2.2 (о дифференцируемости степенного ряда).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad 0 < R < +\infty \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1} \quad (6)$$

Тогда:

1. Радиус сходимости ряда (6) равен R

2. $\forall z \in B(z_0, R) \exists f'(z)$ и $f'(z) = (6)$

Доказательство.

1. По формуле Адамара $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}$

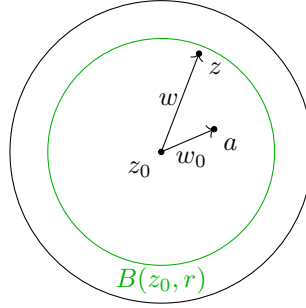
Ряд (6) сходится при каком-то $z \Leftrightarrow \sum na_n(z - z_0)^n$ — сходится
Смотрим на частичные суммы

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{na_n}} = \frac{1}{1 \cdot \lim \sqrt[n]{a_n}} = R \quad (7)$$

2. $a \in B(z_0, R)$, $\exists x < R$, $a \in B(z_0, r)$

$a = z_0 + w_0$, $|w_0| < r$

$z = z_0 + w$, $|w| < r$



$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \quad (8)$$

Последнее выражение по модулю по Лемме $\leq n \cdot r^{n-1} \cdot |a_n|$, ряд $\sum nr^{n-1}|a_n|$ — сходится по 1., т.е. ряд (8) равномерно сходится в круге $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \lim \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum na_n(a - z_0)^{n-1} \quad (9)$$

□