Лекция 10

Ilya Yaroshevskiy

24 апреля 2021 г.

Содержание

1 Сходимость случайных величин **1**
1.1 Сходимость 'почти наверное' . . . 1
1.2 Сходимость по вероятности . . . 1
1.3 Сходимость по функции распределения . . . 1
1.4 Связь между видами сходимости . . . 2

2 Свойство моментов **2**
2.1 Ключевые неравенства . . . 2

3 Среднее арифметическое случайных величин **3**

4 Законы больших чисел **3**
4.1 Закон больших чисел Чебышева . . . 3
4.2 Закон больших чисел Бернулли . . . 3
4.3 Закон больших чисел Хинчина . . . 3
4.4 Усиленный закон больших чисел Колмогорова . . . 3
4.5 Закон больших чисел Маркова . . . 3

5 Центральная предельная теорема **4**

1 Сходимость случайных величин

1.1 Сходимость 'почти наверное'

Определение. Случайная величина имеет некоторое свойство **почти наверное**, если: $p(\text{случайная величина имеет свойство}) = 1$, или $p(\text{случайная величина не имеет свойство}) = 0$

Определение. $\{\xi_n\}$ **сходится почти наверное** к случайной величине ξ, при $n \to \infty$, если $p(\omega \in \Omega \big| \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)) \to 1$

Обозначение. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$

1.2 Сходимость по вероятности

Определение. Последовательность $\{\xi_n\}$ **сходится по вероятности** к случайной величине ξ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $p(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ или $p(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Примечание. $\xi_n p \xi \not\Longrightarrow E\xi_n \to E\xi$

Свойство 1. *$|\xi_n| \leq C = const$ $\forall n$, тогда $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \implies E\xi_n \to E\xi$*

Свойство 2. *Если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$, то $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{p} \xi + \eta$ и $\xi_n\eta_n \xrightarrow{p} \xi\eta$*

1.3 Сходимость по функции распределения

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ **слабо сходится** к случайной величине ξ, если $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x)$ $\forall x$

Обозначение. $\xi_n \rightrightarrows \xi$

Свойство 1. *Если $\xi_n \xrightarrow{p} C$ и $\eta_n \rightrightarrows \eta$, то $\xi_n\eta_n \rightrightarrows C\eta$ и $\xi_n + \eta_n \rightrightarrows \eta + C$*

1.4 Связь между видами сходимости

Теорема 1.1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \implies \xi_n p \xi \implies \xi_n \rightrightarrows \xi$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Теорема 1.2. Если $\xi \rightrightarrows C$, то $\xi \xrightarrow{p} C$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Примечание. В общем случае бессмысленно утверждение $\xi_n \rightrightarrows \xi \implies \xi_n \xrightarrow{p} \xi$, т.к. совершенно разные случайные величины могут иметь одинаковое распределение

Теорема 1.3. Для произвольной Борелевской функции $g(x)$:

1. $Eg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) \cdot p(\xi = x_n)$, если ξ — дискретная случайная величина
2. $Eg(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx$, если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина

2 Свойство моментов

Свойство 1. *Если случайная величина $\xi \geq 0$ почти наверное, то $E\xi \geq 0$*

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Свойство 2. *Если $\xi \geq \eta$ почти наверное, то $E\xi \geq E\eta$*

Доказательство. $\xi \geq \eta$ почти наверное $\implies \xi - \eta \geq 0$ почти наверное $\implies E(\xi - \eta) = E\xi - E\eta \geq 0 \implies E\xi \geq E\eta$ почти наверное □

Свойство 3. *Если $|\xi| \geq |\eta|$ почти наверное, то $E|\xi|^k \geq E|\eta|^k$*

Свойство 4. *Если существует момент n_t случайной величины ξ, то существуют и ее моменты меньшего порядка $s < t$*

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

2.1 Ключевые неравенства

Далее ξ — случайная величина, $E|\xi| < \infty$ и $D\xi < \infty$, если оно упоминается в теореме

Теорема 2.1 (неравенство Йенсена)**.** Пусть функция выпукла вниз, тогда для любой случайной величины верно неравенство:

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Примечание. Для вогнутых функция знак неравенства меняется

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Следствие 2.1.1. Если $E|\xi|^t < \infty$, то $\forall 0 < s < t$

$$\sqrt[s]{E|\xi|^s} \leq \sqrt[t]{E|\xi|^t}$$

Теорема 2.2 (неравентво Маркова)**.**

$$p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon} \ \forall \varepsilon > 0$$

Теорема 2.3 (неравентво Чебышева)**.**

$$p(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon} \ \forall \varepsilon > 0$$

3 Среднее арифметическое случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом. Обозначим $a = E\xi$, $d = D\xi$, $\sigma = \sigma_\xi$, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n) = \frac{1}{n}(a + \dots + a) = a = E\xi$$

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \dots + D\xi_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot d = \frac{d}{n} = \frac{D\xi}{n}$$

$$\sigma_{S_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4 Законы больших чисел

4.1 Закон больших чисел Чебышева

Теорема 4.1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечными вторым моментом, тогда $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1$

Примечание. При доказательстве получили полезное неравенство:

$$p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq C\right) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2}$$

4.2 Закон больших чисел Бернулли

Теорема 4.2. Пусть N_A — число появления события A в серии из N независимых экспериментов, $p = p(A)$
Тогда $\frac{N_A}{n} \xrightarrow{p} p$

4.3 Закон больших чисел Хинчина

Теорема 4.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательности независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом $E\xi_1 < \infty$
Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_n$$

4.4 Усиленный закон больших чисел Колмогорова

Теорема 4.4. В условиях теоремы Хинчина

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_1}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_n$$

4.5 Закон больших чисел Маркова

Теорема 4.5. Пусть имеется последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ с конечными вторыми моментами, при чем $D(S_n) = o(n^2)$ Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} E\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

или

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{E\xi_1 + \dots + E\xi_n}{n} \xrightarrow{p} 0$$

5 Центральная предельная теорема

Теорема 5.1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — , $0 < D\xi_1 < \infty$ и $S_n = \sum i = 1^n \xi_i$
Тогда

$$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \rightrightarrows N_{0,1}$$

Примечание. $a = E\xi_1,\ \sigma = \sigma_{\xi_1}$, тогда $\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\frac{\frac{S_n}{n} - a}{\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right)} \rightrightarrows N_{0,1}$$

Т.е. стандартизованное среднее арифметическое слабо сходится к стандартному нормальному распределению