Лекция 2

Ilya Yaroshevskiy

19 марта 2021 г.

Содержание

1 Аксиоматическое опредление верояности

Колмагоров

- Ω — пространство элементарных исходов

Систему $\mathcal{F} \subset \Omega$ называем **σ-алгеброй событий** если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Примечание. Свойства:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, т.к. $\overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   Доказательство.
   $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$ □

3. (a) $F = \{\Omega, \emptyset\}$
   (b) $F = \{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$

Определение. $]\Omega$ — пространство элементарных исходовб $\mathcal{F}$ – его σ-алгебра. **Вероятностью** на $(\Omega, \mathcal{F})$ обозначается функция $P(A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $P(A) \geq 0$ — свойство **неотрицательности**
2. Если события $A_1, A_2, \dots$ — попарно несовместны($\forall i, j : \ A_i \cap A_j = \emptyset$), то:

$$P(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

   — свойство **счетной аддитивности**

3. $P(\Omega) = 1$ — свойство **нормированности**

Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — **вероятностное пространство**

Примечание. Свойства:

1. $P(\emptyset) = 0$

Доказательство. $\emptyset$ и Ω — несовместные события

$$P(\underbrace{\emptyset + \Omega}_{\Omega}) = P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) + 1 = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

□

2. Формула обратной вероятнсоти
$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Доказательство. A и $\overline{A}$ — несовместные, $A \cup \overline{A} = \Omega$

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

□

3. $0 \le P(A) \le 1$

Доказательство.

(a) $P(A) \ge 0$

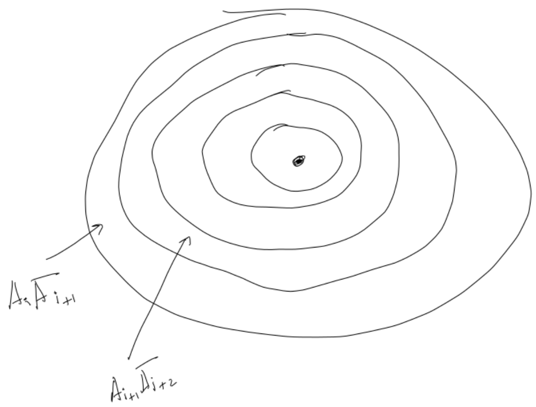
(b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \le 1$

□

Аксиома 1. *Пусть имеется убывающая цепочка событий* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset$
Тогда $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Примечание. При непрерывном изменении области $A \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность также должна изменяться непрерывно. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

Доказательство.



$$A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i\overline{A_{i+1}} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$$

т.к. эти события несовместны

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}}) + P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i)$$

т.к. $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \emptyset$ и $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}})$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}}) = P(A_i)$$

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□

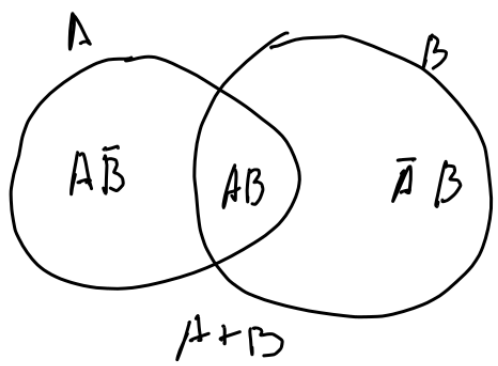
Примечание. Аксимома счетной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности

1.1 Свойства операция сложения, умножения

Определение.

1. Свойство дистрибутивности $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения. Если A и B — несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$
   если совместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

   Доказательство.



$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B \Rightarrow P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) =$$
$$= P(A\overline{B}) + P(AB) + (P(\overline{A}B) + P(AB)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

□

Задача 1. n писем раскладываются в n конвертов. Найти вероятнсоть того что хотя бы одно письмо попадет в свой коверт. Чему равна эта вероятность при $n \to +\infty$

Решение. A_i — i письмо попало в свой коверт
A — хотя бы одно письмо попало в свой конверт

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n},\ P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2},\ P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3}, \ldots P(A_1A_2\ldots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{A_n^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots$$

$$P(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - e^{-1}$$

1.2 Независимые события

Примечание. $\Omega = n$, $|A| = m_1$, $|B| = m_2$
$|\Omega \times \Omega| = n^2$, $AB = m_1 m_2$

Определение. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Примечание. Свойство: если A и B — независимы, то A и $\overline{B}$ — независимы

Доказательство. $P(A) = P(A(B+\overline{B})) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}) \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow A$ и $\overline{B}$ — независимы □

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$ $P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$

Примечание. Если события независимы в совокупности, то события независимы попарно(при $k = 2$). Обратное неверно

Пример (Берштейна)*.* Три грани правильного тетраэдра выкрашены в красный, синий, зленый цвета, а четвертая грань во все эти три цвета
$]A$ — грань содержит красный цвет, B — синий, C — зеленый

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$\Rightarrow$ все события попарно независимы

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ события не независимы в совокупности

Примечание. Если в условии есть “хотябы“, т.е. требуется найти вероятность совместных независимых событий, то применяем формулу обратной вероятности

Задача 2. Найти веротяность того, что при 4 бросаниях кости, хотябы один раз выпадет шестерка.

Решение. $]A_1$ — при 1 броске "6 A_2 — при 2х бросках "6 $\ldots$, A — хотя бы один раз "6"

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = P(\overline{A_4}) = \frac{5}{6}$$

$\overline{A}$ — ни разу не выпадет

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Задача 3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого — 0.6, второго — 0.8

Решение. A_1 — 1й попал
A_2 — 2й попал
A — один попал

$$A = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2$$

$$P(A) = P(A) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2)$$