Вопросы к экзамену

Ilya Yaroshevskiy

22 января 2021 г.

Содержание

1 Определения и формулировки

1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Обозначение.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m = \sum_{c_1=1}^{m} \sum_{c_2=1}^{m} \cdots \sum_{c_n=1}^{m} a_{c_1} a_{c_2} \dots a_{c_n} \tag{1}$$

$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$ — мультииндекс

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \tag{2}$$

$$x \in \mathbb{R}^m \; x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \tag{3}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! \tag{4}$$

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} \tag{5}$$

$$(1) = \sum_{\alpha : |\alpha| = r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha \tag{6}$$

1.2 $\boxed{\#A}$ Формула Тейлора (различные виды записи)

Смотри формула Тейлора

1.3 n - й дифференциал

Смотри однородный многочлен степени k, в доказательстве

Примечание. $d^2 f = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + f''_{x_2 x_2}(a) h_2^2 + \cdots + f''_{x_m x_m}(a) h_m^2 + 2\sum_{i<j} f''_{x_i x_j}(a) h_i h_j \; d^{k+1} f = d(d^k f)$
$df = f'_{x_1} h_1 + f'_{x_2} h_2 + \cdots + f'_{x_m} h_m$
$d^2 f = (f''_{x_1 x_1} h_1 + f''_{x_1 x_2} h_2 + \cdots + f''_{x_1 x_m} h_m) h_1 + (f''_{x_2 x_1} h_1 + f''_{x_2 x_2} h_2 + \cdots + f''_{x_2 x_m} h_m) h_2 + \dots$

1.4 $\boxed{\#A}$ Норма линейного оператора

Определение. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - множество линейных отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - это линейное простарнство
$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1} |Ax|$

1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Определение. $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$Q(h) = \sum_{1 \le i,j \le m} a_{ij} h_i h_j$

- Положительно определенная квадратичная фомра $\forall h \neq 0 \; Q(h) > 0$
  Пример. $Q(h) = h_1^2 + h_2^2 + \cdots +_m^2$
- Отрицательно определенная квадратичная фомра $\forall h \neq 0 \; Q(h) < 0$
- Незнакоопределенная квадратичная фомра $\exists \bar{h} \; Q(\bar{h}) < 0 \quad \exists \bar{\bar{h}} \; Q\bar{\bar{h}} > 0$
  Пример. $Q(h) = h_1^2 - h_2^2$
- Полуопределенная(положительно опрделенная вырожденная) $\exists \bar{h} \neq 0 : Q(h) = 0$
  Пример. $Q(h) = h_1^2 \qquad Q((0, 1, 1, \dots)) = 0$

1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad a \in E$
a - точка локального максимума: $\exists U(a) \subset E \ \forall x \in U(a) \ f(x) \le f(a)$ (аналогично для минимума)
экстремум - максимум или минимум

1.7 Диффеоморфизм

Определение. Область - открытое связное множество

Определение. $F : \underbrace{O}_{\text{обл.}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм если

1. F — обратимо
2. F — дифференцируеое
3. F^{-1} — дифференцируемое

1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

Теорема 1.1. $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$ $x_0 \in O$ $\det T'(x_0) \neq 0$
Тогда $\exists U(x_0)$ $T|_U$ - диффеоморфизм

1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

Теорема 1.2. *Формулировка в терминах системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x^0, y^0) - ее решение $f \in C^r$
$\det F'(x^0) \neq 0 \qquad F = (f_1 \ \dots \ f_m)$
Тогда $\exists U(y^0)$ $\forall y \in U(y^0)$ система имеет решение и эти решения C^r-гладко зависят от y

1.10 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

Теорема 1.3. *В терминах систем уранений*
$f_i \in C^r$, (a, b) — решение системы:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Допустим $\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=1\dots n} \neq 0$
Тогда $\exists U(a)$ - откр., $\exists! \Phi$
такие что $\forall x \in U(a) \quad (x, \Phi(x))$ — также решение системы

1.11 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Простое k - мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

Определение. $M \subset \mathbb{R}^m$ **- простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$**
$\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \quad \Phi(O) = M \quad \Phi : O \to M$ - гомеоморфизм
$\Phi \in C^r \quad \forall x \in O \quad \operatorname{rank} \Phi'(x) = k$ — максимально возможное значение

1.12 Касательное пространство к k - мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

Лемма 1. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ C^r*-гладкое - парметризация мноогбразия* $U(p) \cap M$*, где* $p \in M$*,* M *- гладкое* k*-мерное многообразие,* $\Phi(t^0) = p$
Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *есть* k*-мерное линейное подпространство в* $\mathbb{R}^m$*. Оно не зависит от* Φ

Определение. $\Phi'(t^0)$ — **касательное пространство к** M в точке p

Обозначение. T_pM

1.13 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ $\Phi : O \to \mathbb{R}^n$
$M_\Phi \subset O := \{x|\Phi(x) = 0\}$
$x_0 \in M_\Phi$, т.е. $\Phi(x_0) = 0$
x_0 **- точка локального относительного** $\max, \min,$ **строгого** $\max,$ **строгого** $\min$
Если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$
$\forall x \in U \cap M_\Phi$(т.е. $\Phi(x) = 0$) $f(x_0) \geq f(x)$(для максимума)
т.е. x_0 - локальный экстремум $f|_{M_\Phi}$
Уравнения $\Phi(x) = 0$ - уравнения связи

1.14 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Формулировка достаточного условия относительного экстремума

Определение. $G := f - \lambda_1\Phi_1 - \lambda_2\Phi_2 - \cdots - \lambda_n\Phi_n$ - Функция Лагранжа
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - множители Лагранжа
$\begin{cases} G' = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$ - то что в теореме

Теорема 1.4 (О достаточном условии экстремума)**.** Пусть выполнено условие для точки a
$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$(n уранений с $m + n$ неизвестными)
То можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$(решим линейную систему)
Рассморим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$, где G - функция Лагранжа
Q - это сужение d^2G на касательное пространство T_aM_Φ
Тогда:

1. Q - положительно опр. $\Rightarrow a$ - точка минимума
2. Q - отрицательно опр. $\Rightarrow a$ - точка максимума
3. Q - неопределена $\Rightarrow$ нет экстремума
4. $Q \geq 0$ вырождена $\Rightarrow$ информации недостаточно

1.15 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

Определение. Последовательность функций
$\mathbb{N} \to \mathcal{F}$ $n \mapsto f_n$

Определение. Последовательность f_n **сходится поточечно к** f **на множестве** $E, \forall x \in E$ $f_n(x) \to f(x)$
$\forall x \in E$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

1.16 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

Определение. f_n **равномерно сходится к** f **на** $E \subset X$ если $M_n := \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $0 \leq M_n < \varepsilon$, т.е. $\forall x \in E$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Обозначение. $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

1.17 Равномерная сходимость функционального ряда

Определение. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $E \subset X$: $S_N \underset{N\to+\infty}{\rightrightarrows} S$ на E

1.18 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

Определение. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \forall x \in E \quad |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$

1.19 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

Определение (степенной ряд)**.** $z_0, a, z \in \mathbb{C}$ $\underbrace{\sum a_n(z - z_0)^n}_{\text{степенной ряд}}$ число $\underbrace{R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}}_{\text{формула Адамара}}$ — называется **радиусом сходимости степенного ряда**

1.20 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

признак Абеля
$\sum a_n(x) b_n(x)$ $a_n \in \mathbb{C}$ $b_n \in \mathbb{R}$

1. $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на $\langle \alpha, \beta \rangle$
2. $\forall x\ b_n(x)$ — монотонна по n
   $b_n(x)$ — равномерно ограничена $\exists C_b : \ \forall n\ \forall x \quad |b_n(x)| \le C_b$

Тогда ряд сходится

1.21 Кусочно-гладкий путь

Определение. Путь γ - **кусочно гладкий**
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
γ - дифф. на (t_k, t_{k+1}) $\forall k,\ 0 \le k \le n - 1$
$\exists$ односторонние производные в точках t_i
можно считать $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ - гладкое отображение

1.22 Векторное поле

Определение. Векторное поле: $V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - непрерывное
$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$ - вектор приложенный к точке x

1.23 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

Определение (Интеграл векторного поля по кусочно гладкому пути)**.**
$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum\limits_{i=1}^{m} V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt = \int_a^b V_1 d\gamma_1 + V_2 d\gamma_2 + \dots + V_m d\gamma_m$

Используется обозначение $I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m$ — аналогично последнему выражению в равенстве

Второе выражение в равенстве запишем так: $\sum\limits_{k=1}^{n} \langle V(\gamma(\xi_k)), \gamma'(\xi_k) \rangle \cdot (t_k - t_{k-1})$, где ξ_k - точки оснащения

$$= \sum \underbrace{\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|} \rangle}_{\text{проекция силы на касательное направление}} \cdot \underbrace{|\gamma'(\xi_k)| \cdot (t_k - t_{k-1})}_{\text{пройденный путь}}$$

1.24 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Потенциал, потенциальное векторное поле

Определение. $V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - в поле

V - **потенциально**, если оно имеет потенциал

$\exists \underbrace{f}_{\text{потенциал}} \in C^1(O) : \quad \mathrm{grad} f = V$ в области O

1.25 Локально потенциальное векторное поле

Определение. V **- локально потенциальное векторное поле в** O, если $\forall x \in O\ \exists U(x)\ V$ потенциально в $U(x)$

1.26 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

Определение. Интеграл локально потенциального векторного поля V по непрерывному пути γ

Возьмем $\delta > 0$ из Леммы 3

Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ - близкий кусочно гладкий путь, т.е. $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$

Полагаем: $I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$

Следует из Леммы 3 и Леммы 2

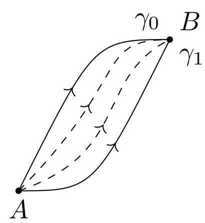
1.27 Гомотопия путей связанная и петельная

Определение (Гомотопия двух путей). $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывны

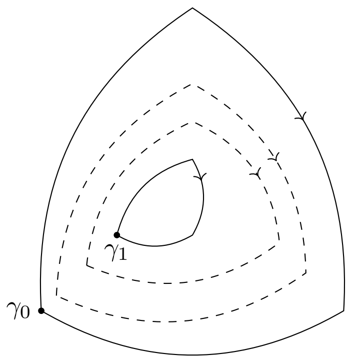
$\Gamma : \underset{t}{[a, b]} \times \underset{u}{[0, 1]}$ - непрерывное, такое что:

$\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0,\ \Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$

- Гомотопия связанная, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a),\ \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$,
  $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \gamma_0(a),\ \Gamma(b, u) = \gamma_0(b)$



- Гомотопия петельная $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
  $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



1.28 Односвязная область

Определение. Область $O \subset \mathbb{R}^m$ - называется **односвязной** если в ней любой замкнутый путь гомотопен постоянному пути

1.29 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

Определение. X — множество, 2^X – система всевозможных подмножеств в X
$\mathcal{P} \subset 2^X$ — **полукольцо** елси:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, A' \in \mathcal{P}$ $\exists$ конечное $B_1, \dots, B_2 \in \mathcal{P}$ – дизьюнктны
   $A \setminus A' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$

Определение. $\mathfrak{A} \subset 2^X$ — **алгебра** подмножеств в X:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2. $X \in \mathfrak{A}$

Определение. σ **- алгебра** $\mathfrak{A} \subset 2^X$

1. $\mathfrak{A}$ — алгебра
2. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

1.30 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Объем

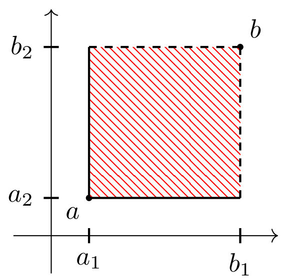
Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ — **объем**, если $\mu \geq 0$ и μ — аддитивная

Определение. $\mu : \underset{\text{полукольцо}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **аддитивная функция множества**, если:

1. μ — не должна принимать значение $\pm\infty$ одновременно(если принимает одно на каком либо множестве, не должно принимать другое на любом другом множестве)
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ — дизъюнктны. Если $A = \bigsqcup A_i \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

1.31 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Ячейка

Определение. ячейка в R^m
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m | \forall i \ x_i \in [a_i, b_i)\}$



1.32 Классический объем в $\mathbb{R}^m$

Пример. Классический объем в $\mathbb{R}^m \quad \mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$
$\mu[a, b) = \prod\limits_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$
μ не является конечным объемом

1.33 Формулировка теорема о непрерывности снизу

Теорема 2. $\mathfrak{A}$ — алгебра, $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем
Тогда эквивалентны:

1. μ — мера
2. μ — непрерывна снизу:
   $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i \tag{7}$$

1.34 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Мера, пространство с мерой

Определение. $\mu : \underset{\text{п/к}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **мера**, если μ — объем и μ — счетно аддитивна: $\forall A, A_1, \dots \in \mathcal{P}$
$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \qquad \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

Определение. **Пространство с мерой** — это тройка $(\underset{\text{множество}}{X}, \underset{\substack{\sigma\text{-алгебра} \\ \mathfrak{A} \subset 2^X}}{\mathfrak{A}}, \underset{\text{мера на } \mathfrak{A}}{\mu})$

1.35 Полная мера

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера
μ — **полная**, если $\forall A \in \mathcal{P}$ $\mu A = 0$ $\forall B \subset A$ выолняется $B \in \mathcal{P}$ и (тогда автоматически) $\mu B = 0$
Совместное свойство μ и $\mathcal{P}$

1.36 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Сигма-конечная мера

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера σ **- конечна**, если: $\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : \ X = \bigcup A_i, \ \mu A_i < +\infty$

1.37 Дискретная мера

Пример. X — (бесконечное) множество
$a_1, a_2, a_3, \dots$ — набор попарно различных точек
$h_1, h_2, h_3, \dots$ — положительные числа
Для $A \subset X$

$$\mu A := \sum_{k : a_k \in A} h_k \tag{8}$$

Счетная аддитивность $\mu \Leftrightarrow$ Теорема о группировке слагаемых
μ — **дискретная мера**

1.38 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

Теорема 1.5 (о Лебеговском продлжении меры)**.** $\mathcal{P}_0$ — полукольцо подмножеств пространства X, $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ — σ-конечная мера
Тогда $\exists$ σ-алгебра $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}_0$, $\exists \mu$ — мера на $\mathfrak{A}$:

1. μ — продолжение μ_0 на $\mathfrak{A}$
2. μ — полная мера
3. Если $\tilde{\mu}$ — полная мера на σ-алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$ и $\tilde{\mu}$ — продолжение μ_0, то $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$ и при этом $\tilde{\mu}$ — продолжение меры μ : $\tilde{\mu}\Big|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо: $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$, мера ν — продолжение μ_0 на $\mathcal{P}$
   Тогда $\forall A \in \mathcal{P} \quad \nu(A) = \mu(A)$
5.

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A = \inf\{\sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \big| A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k\} \tag{9}$$

1.39 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

Определение. $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}} \quad \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \quad \mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ — **продолжает** $u_0 \quad \mu\Big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$

Определение. Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ — Лебеговское продолжение классического объема образует σ-алгебру $\mathfrak{M}^m$, на которой задана мера Лебега — **множества измеримые по Лебегу**

1.40 Борелевская сигма-алгебра

Определение. $\mathfrak{B}$ — **борелевская σ-алгебра** (в $\mathbb{R}^m$ или в метрическом пространстве) — минимальная σ-алгебра, которая содержит все открытые множества
$\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$

1.41 TODO Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов

Теорема 1.6. μ — мера на $\mathfrak{M}^m$:

1. μ — инвариантна относительно сдвига
   $\forall a \in \mathbb{R}^m \ \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E+a) = \mu E$
2. Для любого ограниченого множества $E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E) < +\infty$

Тогда $\exists k \in [0, +\infty) : \ \mu = k \cdot \lambda$
т.е. $\forall E \quad \mu E = k \cdot \lambda E \quad (0 \cdot \infty = 0)$

2 Теоремы

2.1 Лемма о дифференцировании сдвига

Лемма 2. *$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $f \in C^r(E)$ - r раз дифференцируема на E, $a \in E$*
$h \in \mathbb{R}^m$ $\forall t \in [-1, 1]$ $a + th \in E$
$\varphi(t) := f(a + th)$
Тогда при $1 \le k \le r$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j:|j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a) \tag{10}$$

Доказательство.

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \cdots \sum_{i_r=1}^{m} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}}(a + th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_3} \tag{11}$$

□

2.2 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

Теорема 2.1. $f \in C^{r+1}(E)$ $E \subset \mathbb{R}^m, \ f : E \to \mathbb{R}, \ a \in E$
$x \in B(a, R) \subset E$
Тогда $\exists \theta \in (0, 1)$

$$f(x) = \sum_{\alpha:0\le|\alpha|\le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \Big(\sum_{\substack{(\alpha_1 \ldots \alpha_m):\alpha_i \ge 0 \\ \sum \alpha_1 = k}} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_m)^{\alpha_m}} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x_m - a_m)^{\alpha_m} \Big) + \text{аналогичный остаток}$$

$$f(a+h) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ldots} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_m)^{\alpha_m}}(a) h_1^{\alpha_1} \ldots h_m^{\alpha_m} + \text{остаток}$$

Доказательство. $\varphi(t) = f(a+th)$, где $h = x - a$, $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(x)$
Из леммы

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1} \tag{12}$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{однородный многочлен степени } k} + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha \tag{13}$$

$$f(a+h) = \sum \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r) \tag{14}$$

Где однородный многочлен степени k это k -ый дифференциал функции f в точке a, обозначается $d^k f(a,h)$

$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a+\theta h, h)$

□

2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

Примечание.

1. $\sup \leftrightarrow \max$, т.к. сфера компактна
2. $A = (a_{ij}) \quad \|A\| \le \sqrt{\sum a_{ij}^2}$ - по Лемме об оценке нормы линейного отображения
3. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \le \|A\| \cdot |x|$ $x = 0$ - тривиально
   $x \ne 0 \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \quad |Ax| = |A(|x| \cdot \tilde{x})| = \big||x| \cdot A\tilde{x}\big| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \le \|A\| \cdot |x|$
4. Если $\exists C > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R}^m |Ax| \le C \cdot |x|$, то $\|A\| \le C$

Теорема 2.2.

1. Отображение $A \to \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ является нормой, т.е выполнятеся
   (a) $\|A\| \ge 0$, если $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{m,n}$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
   (c) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),\ B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad \|AB\| \le \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

1. (a) $\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$, очев
   (b) очев
   (c) $|(A+B)\cdot x| = |Ax + Bx| \le |Ax| + |Bx| \le (\|A\| + \|B\|) \cdot |x|$ по замечанию 3 $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
2. $|BAx| = |B \cdot (Ax)| \le \|B\| \cdot |Ax| \le \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|$ по замечанию 3

□

2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

Лемма 3. *X, Y - линейные нормированные пространства $A \in \mathcal{L}(X, Y)$*

1. *A - ограниченый оператор, т.е. $\|A\|$ - конечное*
2. *A - непрерывен в нуле*
3. *A - непрерывен всюду в X*

4. *A - равномерно непрерывен*
   $f: X \to Y$ *- метрические пространства, равномерно непрерывно*
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x, x_0 : \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x_0, x_1 :\ |x_1 - x_0| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$

Доказательство.

$(4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2)$ очевидно

$(2 \Rightarrow 1)$ непрерывность в нуле:
для $\varepsilon = 1\ \exists \delta : \forall x : |x - 0| \le \delta \quad |Ax - A \cdot 0| < 1$
при $|x| = 1 \quad |Ax| = |A\frac{1}{\delta}(\delta \cdot x)| = \frac{1}{\delta} \cdot |A \cdot \delta x| \le \frac{1}{\delta}$

$(1 \Rightarrow 4)$ $|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \le \|A\| \cdot |x_1 - x_0|$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0\ |x_1 - x_0| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_0| \le \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$

□

2.5 Теорема Лагранжа для отображений

Теорема 2.3. $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ дифф $E \quad a, b \in E$
Тогда $\exists c \in [a, b] \quad c = a + \Theta(b - a)\ \Theta \in (0, 1)$
$|F(b) - F(a)| \le \|F'(c)\| \cdot |b - a|$

Доказательство. $f(t) = F(a + t(b - a)),\ t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = F'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$
Тогда $\exists \Theta \in [0, 1] :\ |f(1) - f(0)| \le |f'(\Theta)| \cdot |1 - 0|$ - это т. Лагранжа для векторнозначных функций
т.е $|F(b) - F(a)| \le |F'(a + \Theta(b - a)) \cdot (b - a)| \le \|F'(\underbrace{a + \Theta(b - a)}_{\in [a,b]})\| \cdot |b - a|$ □

2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

Лемма 4. $\mathcal{L}m, m,\ \Omega_m = \{L \in \mathcal{L}_{m,m} : \exists L^{-1}\},\ A \mapsto A^{-1}$
$B \in \mathcal{L}_{m,m}$ Пусть $\exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^m\ |Bx| \ge c|x|$
Тогда $B \in \Omega_m$ и $\|B^{-1}\| \le \frac{1}{c}$

Доказательство. B - биекция(конечномерный эффект???), $\exists B^{-1}$
$|Bx| \ge c|x| \qquad x := B^{-1}y$
$|y| \ge c \cdot |B^{-1}y|$
$|B^{-1}y \le \frac{1}{c}|y| \Rightarrow \|B^{-1}\| \le \frac{1}{c}$ □

Примечание. $A \in \Omega_m$ Тода $\exists c : |Ax| \ge c \cdot |x|$
$x = |A^{-1}Ax| \le \|A^{-1}\| \cdot |Ax| \qquad c := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Теорема 2.4. $L \in \Omega_m\ M \in \mathcal{L}_{m,m} \quad \|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$ (M – близкий к L)
Тогда

1. $M \in \Omega_m$, т.е. Ω_m - открытое множество в $\mathcal{L}_{m,m}$
2. $\|M^{-1}\| \le \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
3. $\|L^{-1} - M^{-1}\| \le \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$

Доказательство. $|a + b| \ge |a| - |b|$

1. $|Mx| = |Lx + (M - L)x| \ge |Lx| - |(M - L)x| \ge \frac{1}{\|L^{-1}\|} \cdot |x| - \|M - L\| \cdot |x| \ge (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) \cdot |x| \Rightarrow$
   M - обратим(по Лемме)
   $L \in \Omega_m \Rightarrow \exists c = \frac{1}{\|L^{-1}\|} :\ |Lx| \ge c \cdot |x|$ (по замечанию к Лемме)
2. Из пункта 1 $c = \|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|$, тогда Лемма утверждает, что $\|M^{-1}\| \le \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|}$
3. $M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$
   $\|M^{-1} - L^{-1}\| \le \|M^{-1}\| \cdot \|L - M\| \cdot \|L^{-1}\| \le \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$

□

2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

Теорема 2.5. Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ - дифф на E
Тогда эквивалентны:

1. $F \in C^1(E)$ т.е существуют все частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ - непрерывные на E
2. $F' : E \to \mathcal{L}_{m,l}$ - непрерывно
   т.е $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x)\ \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \le \varepsilon$

Доказательство.

$(1 \Rightarrow 2)$ матричные элементы $F'(x) - F'(\bar{x})$ - это $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x})$
$\|A\| \le \sqrt{\sum \alpha_{i,j}^2}$
Берем $x, \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall \bar{x}\ \dots\ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ - сразу для всех i, j
$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$

$(2 \Rightarrow 1)$ Проверяем непрывность в точке x
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$
$h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots)$
$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \le \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot \underbrace{|h|}_{1} < \varepsilon$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \ \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

Теорема 2.6. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $a \in \mathrm{Int}E$ - точка экстремума, f - дифф в точке a
Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1\ \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f|_{\text{прямая}(a,u)}$ точка a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма □

Следствие 2.6.1. Необходимое условие экстремума a - локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие 2.6.2. теорема Ролля $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$K \subset E$ - компакт f - дифф на $\mathrm{Int}K$; f - непрерывна на K
$f|_{\partial K} = \text{const}$ (на границе K)
Тогда $\exists a \in \mathrm{Int}K\ f'(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)) = 0$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда:

- $f = \text{const}$ на $K \Rightarrow f' \equiv 0$
- $\exists a \in \mathrm{Int}K$ — точка экстремума
  по Т. Ферма $f'(a) = 0$

□

2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

Лемма 5.

1. *Q - положительно определенная.*
   Тогда $\exists \gamma_Q > 0\ \forall h\ Q(h) \ge \gamma_Q |h|^2$
2. $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *- норма*
   Тогда $\exists C_1, C_2 > 0\ \forall x\ C_2|x| \le p(x) \le C_1|x|$

Доказательство. $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ — компакт $\Rightarrow$ по Т. Вейерштрасса минимум и максимум достигаются
Для $x = 0$ оба утверждения очевидны. Пусть $x \neq 0$

1. $\gamma_Q := \min\limits_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$
   Тогда $Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$, $Q(h) = Q(|h| \cdot \frac{h}{|h|}) = |h|^2 \cdot Q(\frac{h}{|h|}) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$

2. $C_2 := \min\limits_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_1 := \max\limits_{x \in S^{m-1}} p(x)$
   $p(x) = p(|x|\frac{x}{|x|}) = |x| p(\frac{x}{|x|}) \begin{array}{l} \geq C_2|x| \\ \leq C_1|x| \end{array}$
   Проверим, что $p(x)$ - непрерывная функция(для Т. Вейерштрасса), e_k — базисный вектор
   $$p(x-y) = p(\sum_{k=1}^{m}(x_k - y_k)e_k) \leq \sum p((x_k-y_k)e_k) = \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq |x-y| \cdot M$$
   где $M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$, $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$

□

2.10 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Достаточное условие экстремума

Теорема 2.7. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $a \in \mathrm{Int}E$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0,\ f \in C^2(E)$
$Q(h) := d^2 f(a,h)$, Тогда, если:

- $Q(h)$ - положительно определено, то a - точка локального минимума
- $Q(h)$ - отрицательно определено, то a - локальный максимум
- $Q(h)$ - незнакоопределено, то a - не экстремум
- $Q(h)$ - полож/отриц вырожденная - недостаточно информации

Доказательство.

- Для положит. опр.
  $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \theta h, h) =$
  $$= \frac{1}{2}\left(Q(h) + \left(\sum_{i=1}^{m}\left(\underbrace{f''_{x_i x_i}(a+\theta h) - f''_{x_i x_i}(a)}_{\text{б.м } h\to 0}\right)\underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2} + 2\sum_{i<j}\left(\underbrace{f''_{x_i x_j}(a+\theta h) - f''_{x_i x_j}(a)}_{\text{б.м}}\right)\underbrace{h_i h_j}_{\leq |h|^2}\right)\right)$$
  $f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}(\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2) \geq \frac{1}{4}\gamma_Q |h|^2 > 0$

- Для отр. опр аналогично

- $\lhd \bar{h} \quad Q(\bar{h}) > 0 \quad f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 =$
  $$= \frac{1}{2}\left(t^2 Q(\bar{h}) + t^2 \underbrace{\left(\sum\left(f''_{x_i x_i}(a + \Theta t h) - f''_{x_i x_i}(a)\right)\bar{h}_i^{\,2} + 2\sum_{i<j}\left(\ldots\right)\right)}_{\text{б.м при } t\to 0}\right) \geq$$
  $\geq \frac{1}{2}t^2(Q(h) - \frac{1}{2}Q(h)) > 0$, т.е $f(a + t\bar{h}) > f(a)$, при $t \to 0$
  Аналогично $f(a + t\bar{\bar{h}}) < f(a)$, при малых t

- Докажем примером: $f(x_1, x_2, \ldots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 - \ldots \quad f'_{x_1}(a) = 0,\ f'_{x_2} = 0$
  $\bar{f}(x_1, x_2, \ldots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots \quad d^2 f(a,h) = 2h_1^2,\ d^2 \bar{f}(a,h) = 2h_1^2$
  $a = (0, 0, 0, \ldots)$
  f - не имеет экстремума в точке a
  $\bar{f}$ - имеет минимум в точке a

□

2.11 Лемма о почти локальной инъективности

Лемма 6. $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - *дифф. в* $x_0 \in O$, $\det F'(x_0) \neq 0$
Тогда $\exists C > 0\ \exists \delta > 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)$
$|F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

Доказательство. $|h| = |A^{-1} \cdot Ah| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ah|$
$c|h| \leq |Ah|$, где $c = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
$F'(x) = F$
Если F - линейное отображение $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \frac{h}{|(F'(x_0))^{-1}|}$
$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = \left|F'(x_0)h + \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б.м.}} \cdot |h|\right| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| = \frac{c}{2}|h|$ — работает в шаре $\square$

2.12 Теорема о сохранении области

Теорема 2.8. $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - дифф
$\forall x \in O \quad \det F'(x) \neq 0$
Тогда $F(O)$ - открыто

Доказательство. $x_0 \in O \quad y_0 := F(x_0) \in F(O)$
Проверим, что y_0 - внутр точка $F(O)$:
По лемме $\exists c, \delta : \ \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$
В частности $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$, при $|h| = \delta$

$$r = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(y_0, F(S(x_0, \delta))),\ \operatorname{dist}(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} |a - b| \tag{15}$$

Если $y \in B(y_0, r)$, то

$$\operatorname{dist}(y, F(S(x_0, \delta))) > r \tag{16}$$

Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$:
т.е. $\forall y \in B(y_0, r)\ \exists x \in B(x_0, \delta) \quad F(x) = y$
Рассмотрим функцию $g(x) = |F(x) - y|$, при $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r \tag{17}$$

при $x \in S(x_0, \delta) :\ g(x) > r^2$, по (16) $\Rightarrow \min g$ не лежит на границе шара $\Rightarrow$ он лежит внутри шара

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \cdots + (F_m(x) - y_m)^2 \tag{18}$$

$(\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0)$
$$\begin{cases} 2(F_1(x) - y) \cdot F'_{x_1}(x) + \cdots + 2(F_m(x) - y) \cdot F'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ 2(F_1(x) - y) \cdot F'_{x_m}(x) + \cdots + 2(F_m(x) - y) \cdot F'_{x_m} = 0 \end{cases}$$
$F'(x) \cdot 2(F(x) - y) = 0 \Rightarrow \forall x \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$ $\square$

2.13 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

Следствие 2.8.3. $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ l < m$, дифф в O, $F \in C^1(O)$
$\operatorname{rg} F'(x) = l$, при всех $x \in O$
Тогда $F(O)$ - открытое

Доказательство. Фиксируем x_0. Пусть ранг $F'(x_0)$ реализуется на столбцах с 1 по l, т.е. $A := \det(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j=1\ldots l}(x_0) \neq 0$ - и для близких точек

$$\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} \overbrace{F(x)}^{\text{Исходные } l \text{ координат}} \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \cdot \det E_{m-l} \neq 0$ в окрестности точки x_0
$\tilde{F}|_{U(x_0)}$ - удовлетворяет теореме $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$ - открыто в $\mathbb{R}^m$
$F(U(x_0)) = \underbrace{\Pr_{\mathbb{R}^l}}_{(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_l)} (\tilde{F}(U(x_0)))$ □

2.14 Теорема о гладкости обратного отображения

Теорема 2.9. $T \in \underbrace{C^r(O, \mathbb{R}^m)}_{O \subset \mathbb{R}^m}$
T - обратимо, $\det T'(x) \neq 0$, при всех $x \in O$
<u>Тогда</u> $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. индукция по r, база $r = 1$
$f : X \to Y$ - непр $\Leftrightarrow \forall B -$ откр $\subset Y$ $f^{-1}(B) -$ откр
$S = T^{-1}$, S - непрерывна по т. о сохранении области
$T'(x_0) = A$ - невыроженый оператор
По лемме о почти локальной инъективноси

$$\exists C, \delta : \ \forall x \in B(x_0, \delta) \ |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \tag{19}$$

Опр диффернцируемости:

$$T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + o(x) \cdot |x - x_0| \tag{20}$$

$$T(x) = y \ T(x_0) = y_0 \ x = S(y) \ x_0 = S(y_0) \tag{21}$$

В терминах y, S:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y)) \cdot |S(y) - S(y_0)|}_{\text{Проверим, что это } o(|y - y_0|)} \tag{22}$$

Пусть y близко к y_0:

$$|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta \tag{23}$$

$$\left|A^{-1} \cdot o(S(y)) \cdot |S(y) - S(y_0)|\right| = |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1} \cdot \omega(S(y))| \leq$$
$$\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \leq \frac{1}{c}\|A^{-1}\| \cdot |y - y_0| \cdot |\omega(S(y))| \tag{24}$$

Гладкость S: $S'(y_0) = A^{-1}$

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1} \tag{25}$$

В (25) все шаги непрерывны $\Rightarrow S'$ — непрерывно
Переход $r \to r + 1$
$T \in C^{r+1} \quad T' : O \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \ T' \in C^r$
Проверим, что $S^{-1} \in C^{r+1}$:

$$y \underset{C^r}{\to} S(y) \underset{C^r}{\to} T'(x) \underset{C^\infty}{\to} (S^{-1})' \tag{26}$$

□

2.15 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Теорема о неявном отображении

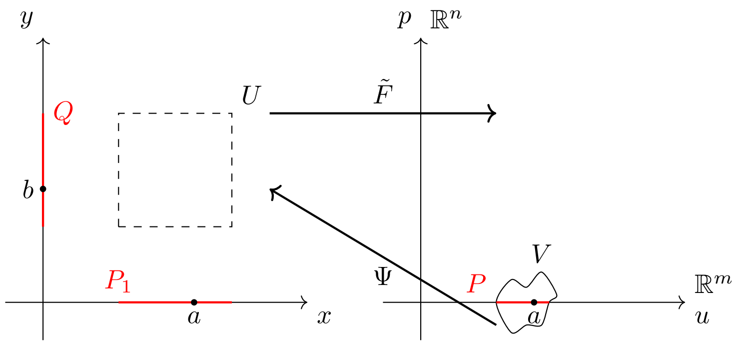
Теорема 2.10. $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \underbrace{\mathbb{R}^n}_{(x_1 \dots y_n)} \quad F \in C^r$
$(a, b) \in O \ F(a, b) = 0$
Допустим $\det(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=1 \dots n} \neq 0$
<u>Тогда</u>

1. $\exists P \subset \mathbb{R}^m \quad a \in P$ - откр.
   $\exists Q \subset \mathbb{R}^n \quad b \in Q$ - откр.
   $\exists! \Phi : P \to Q$ - C^r-гладкое
   такие что $\forall x \in P(a) \quad F(x, \Phi(x)) = 0$

2. $\Phi'(x) = -\Big(F'_y(x, \Phi(x))\Big)^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

Доказательство.
Если 1) выполняется, то 2) очевидно: $F(x,\Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x,\Phi(x)) + F'_y(x,\Phi(x))\cdot\Phi'(x) = 0$

1. $\tilde F : O \to \mathbb{R}^{m+n} \quad (x,y) \mapsto (x, F(x,y)) \quad \tilde F(a,b) = (a,0)$
   $\tilde F' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'x & F'y \end{pmatrix}$, очевидно $\det \tilde F = 0$ в (a,b), значит $\exists U((a,b))\ \tilde F|_{U((a,b))}$ - диффеоморфизм



   (a) $U = P_1 \times Q$ - можно так считать
   (b) $V = \tilde F(U)$
   (c) $\tilde F$ - диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde F^{-1} : V \to U$
   (d) $\tilde F$ - не меняет первые m координат $\Psi(u,v) = (u, H(u,v))$, $H : V \to \mathbb{R}^m$
   (e) Ось x и ось u идентичны $p =$ ось $u = \mathbb{R}^m \times \{0\}^n \cap \underbrace{V}_{\text{открыто в } \mathbb{R}^{m+n}} \Rightarrow p$ открыто в R^m
   (f) $\Phi(x) = H(x,0) \quad F(x,\Phi(x)) = 0$, при $x \in P$
   $F \in C^r \Rightarrow \tilde F \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$

   Единственность $x \in p\ y \in u \quad F(x,y) = 0$
   $(x,y) = \Psi(\tilde F(x,y)) = \Psi(x,0) = (x, H(x,0)) = (x,\Phi(x))$

$\square$

2.16 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Теорема 2.11. $M \subset \mathbb{R}^m \quad 1 \le k < m \quad 1 \le r \le \infty \quad p \in M$
Тогда эквивалентны:

1. $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ - окрестность точки p в $\mathbb{R}^m$: $M \cap U$ - простое k-мерное многообразие класса C^r
2. $\exists \tilde U \subset \mathbb{R}^m$ - окрестность точки p
   $f_1, f_2, \dots, f_{m-k} : \tilde U \to \mathbb{R}$, все $f \in C^r$
   $x \in M \cap \tilde U \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$, при этом $\operatorname{grad}(f_1(p)), \dots, \operatorname{grad}(f_{m-k}(p))$ - ЛНЗ

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Φ - параметризация : $\underbrace{O}_{(t_1,\dots,t_k)} \subset \mathbb{R}^k$, $\in C^r$, $p = \Phi(t^0)$
   Φ' - матрица $m \times k \quad \operatorname{rank}\Phi'(t^0) = k$
   Пусть $\det(\frac{\partial\Phi_i}{\partial t_k})_{i,j=1\dots k} \neq 0$
   $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$
   $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ - проекция на первые k координат$((x_1,\dots,x_m) \mapsto (x_1,\dots,x_k))$
   Тогда $(\underbrace{L\circ\Phi}_{(\varphi_1,\dots,\varphi_k)})'(t^0)$ - невырожденный оператор
   $W(t^0)$ - окрестность точки t^0, $L\circ\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$
   $L\circ\Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k$ - диффеоморфизм
   Множество $\Phi(W)$ - это график отображения $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$
   Пусть $\Psi = (L\circ\Phi)^{-1} : V \to W$
   Берем $x' \in V$, тогда $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$

Множество $\Phi(W)$ - открытое в $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где $\tilde{U}$ - открытое множество в $\mathbb{R}^m$
Можно считать, что $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{R}^{m-k}$
Пусть $f_j : \tilde{U}\mathbb{R} \quad f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}$
Тогда $x \in M \cap \tilde{U} = \Phi(W) \Leftrightarrow \forall j : \ f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad } f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad } f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$2 \Rightarrow 1$ $F = (f_1, \dots, f_{m-k})$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ - матрица } m-k \times m$$

Градиенты ЛНЗ $\Rightarrow$ ранг матрицы равен $m-k$, он достигается на последних $m-k$ столбцах
$\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1\dots m-k} \neq 0$
$F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = 0, \quad x \in \tilde{U}$
По теореме о неявном отображении $\exists P$ - окрестность $(x_1, \dots, x_k)$ в $\mathbb{R}^m \quad \exists Q$ - окр $(x_{k+1}, \dots, x_m)$ в $\mathbb{R}^{m-k}$
$\exists H : P \to Q \quad H \in C^r \quad F(x', H(x')) = 0, \quad x' \in P$
Тогда $\Phi : P \to \mathbb{R}^m \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, H_1(x'_1, \dots, x'_k), H_2, \dots, H_{m-k})$ - параметризация многобразия
Φ - гомеоморфизм P и $M \cap \tilde{U}$, Φ^{-1} - практически проекция

□

2.17 Следствие о двух параметризациях

Следствие 2.11.4. $M \subset \mathbb{R}^m$ - k-мерное C^k-гладкое многообразие $p \in M$
$\exists$ две парметризации $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_1(t^0) = 0$
$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_2(s^0) = 0$
Тогда $\exists$ диффеоморфизм $\Theta : O_1 \to O_2$, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

Доказательство. Чатсный случай. Пусть для Φ_1, Φ_2, rank $\Phi'_1(t^0)$, rank $\Phi'_2(s^0)$ достигаются на первых k столбцах
Тогда $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta \text{ — искомый диффеоморфизм}}$
$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$
$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \quad \in C^r$
Невырожденность не доказана, поэтому то, что это диффеоморфизм не доказано □

2.18 Лемма о корректности определения касательного пространства

Лемма 7. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \quad C^r$*-гладкое - парметризация многобразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M - гладкое k-мерное многообразие, $\Phi(t^0) = p$*
Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть k-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Оно не зависит от Φ

Доказательство. rank $\Phi'(t^0) = k$
Если взять другую параметризацию $\Phi_1 \quad \Phi = \Phi_1 \circ \Psi$
$\Phi' = \Phi'_1 \cdot \Psi \quad \Psi'(t^0)$ - невырожденный оператор

□

2.19 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Примечание. Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$, $\gamma(0) = p$ - гладкий путь
Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$

Доказательство. $\gamma(s) = (\Phi \circ \Psi \circ L)(\gamma(s))$
$\gamma' = \Phi' \cdot \Psi' \cdot L' \cdot \gamma'(s) \in T_pM$ □

2.20 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

Примечание. Афинное подпространство $\{p+v,\ v\in T_pM\}$ - называется афинным касательным пространство
$f: O\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ - гладкая, $y=f(x)$ - поверхность в $\mathbb{R}^{m+1}\quad(x,y)$
Тогда (афиинная) касательная плоскость в (a,b) задается уравнением $y-b=f'_{x_1}(a)(x_1-a_1)+f'_{x_2}(a)(x_2-a_2)+\dots+f'_{x_m}(a)(x_m-a_m)$

Доказательство. $\Phi: O\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+1}\quad\Phi(x)=(x,f(x))$

$$\Phi'=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\\f'_{x_1}&f'_{x_2}&\dots&f'_{x_m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\\x_1f'_{x_1}+\dots+x_mf'_{x_m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\\\beta\end{pmatrix}$$

$\beta=\alpha_1f'_{x_1}+\dots+\alpha_mf'_{x_m}$ □

2.21 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Необходимое условие относительного локального экстремума

Теорема 2.12 (Необходиое условие относительно экстремума). $f: O\subset\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}\quad\Phi: O\to\mathbb{R}^n$ - гладкое в O
$a\in O\quad\Phi(a)=0$ - точка относительного экстремума, $\operatorname{rank}\Phi'(a)=n$
Тогда $\exists\lambda=(\lambda_1\ \dots\ \lambda_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases}f'(a)-\lambda\cdot\Phi'(a)=0\quad\in\mathbb{R}^{m+n}\\\Phi(a)=0\end{cases}$$

В координатах:

$$\begin{cases}f'_{x_1}(a)-\lambda_1(\Phi_1)'_{x_1}-\lambda_2(\Phi_2)'_{x_1}-\dots-\lambda_m(\Phi_n)'_{x_1}=0\\\vdots\\f'_{x_{m+n}}(a)-\lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}}-\lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}}-\dots-\lambda_m(\Phi_n)'_{x_{m+n}}=0\\\Phi_1(a)=0\\\vdots\\\Phi_n(a)=0\end{cases}$$

Неизветсные: $a_1,\dots,a_{m+n}\quad\lambda_1,\dots,\lambda_n$

Доказательство. Пусть ранг реализуется на столбцах $x_{m+1},\dots,x_{m+n}$, обозначим $y_1=x_{m+1},\dots,y_m=x_{m+n}$
$(x_1\ \dots\ x_{m+n})\leftrightarrow(x,y)\quad a=(a_x,a_y)$
$\det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(a)=0\quad$ По теореме о неявном отображении $\exists U(a_x)\ \exists V(a_y)$
$\exists\varphi: U(a_x)\to V(a_y):\ \Phi(x,\varphi(x))=0$
отображение $x\mapsto(x,\varphi(x))$ есть параметризация $M_\varphi\cap(U(a_x)\times V(a_y))$
a - точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ - точка локального экстремума функции $g(x)=f(x,\varphi(x))$
Необходимое условие экстремума:

$$(f'_x+f'_y\cdot\varphi'_x)(a_x)=0\tag{27}$$

$\Phi(x,\varphi(x))=0$
$\Phi'_x+\Phi'_y\cdot\varphi'_x=0$ - в точке (a_x,a_y)
Тогда

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}^m\quad\lambda\cdot\Phi'_x+\lambda\cdot\Phi'_y\varphi'_x(a_x)=0\tag{28}$$

(27) + (28): $f'_x+\lambda\Phi'_x+(f'_y+\lambda\Phi'_y)\varphi'_x=0$
Пусть $\lambda=-f'_y(\Phi'_y(a_x,a_y))^{-1}$
Тогда $f'_y+\lambda\Phi'_y=0$ и $f'_x+\lambda\Phi'_x=0$(из (27) + (28)) □

2.22 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

Теорема 2.13. $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$.
Тогда $\|A\|=\max\{\sqrt{\lambda}|\lambda-$ собственное число оператора $A^TA\}$

$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$
$\langle A^T Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$

Доказательство. $x \in S^{m-1}$
$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle \underbrace{A^T A}_{\text{симм.}} x, x\rangle \qquad (A^T A)^T = A^T A$
$\max |Ax|^2 = \max\langle A^T Ax, x\rangle = \lambda_{\max}$ □

2.23 $\boxed{\#A}$ Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

Теорема 2.14 (Стокса–Зайдля)**.** $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ (X - метр. пр-во)
$x_0 \in X \quad f_n$ - непрерывно в x_0
$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$
Тогда f - непрерывно в x_0

Доказательство. $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$ (неравенство треугольника) - верно $\forall x\ \forall n$
$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \sup\limits_X |f_n - f| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
Берем $\forall \varepsilon > 0$, возьмем любой n, для которого выполнено предыдущее утверждение, тогда крайние модули из неравенства $< \frac{\varepsilon}{3}$
Теперь для этого n подберем $U(x_0) : \ \forall x \in U(x_0) \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ □

Теорема 1' (Стокса, Зайдля для рядов)**.** $u_n : \underbrace{X}_{\text{метр. пр.}} \to \underbrace{Y}_{\text{норм. пр.}} \qquad x_0 \in X\ u_n$ - непрерывно в x_0
Пусть $\sum u_n(x)$ - равномерно сходится на X, $S(x) := \sum u_n(x)$
Тогда $S(x)$ - непрерывна в x_0

Доказательство. по теореме 1(Стокса, Зайдля). $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_n(x)$ непрерывна в $x_0 \Rightarrow S(x)$ непрывна в x_0 □

2.24 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

Примечание. $x_n \to a$ в $(X,\ \rho) \Rightarrow x_n$ - фунд. $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n, m > M \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$
X - полное, если каждая фундаментальная последовательность сходится

Теорема 2.15. X - компактное $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x\in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$
Тогда пространство $C(X)$ - полное метрическое пространство

Доказательство. f_n - фунд. в $C(X) \Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещ. последовательность $(f_n(x_0))$ - фундаментальна $\Rightarrow$
f_n - фунд. $\Rightarrow$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{29}$$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) =: f(x_0) \quad f$ - поточечный предел f_n
Проверим: $f_n \rightrightarrows f,\ f \in C(X)$
В (29) перейдем к пределу при $m \to +\infty$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, т.е. $f_n \rightrightarrows f$ на X и тогда $f \in C(X)$ □

Следствие 2.15.5. $(\mathcal{F}, \rho)$ - полное

2.25 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

Теорема 2. $f_n, f \in C([a, b]) \quad f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$
Тогда $\displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Доказательство. $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \sup\limits_{[a,b]} |f_n - f| \cdot (b-a) = \rho(f_n, f)\cdot(b-a) \to 0$ □

Теорема 2' (о почленном интегрировании ряда)**.** $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, непрерывные на $[a,b]$

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ - равномерно сходится на $[a,b]$, $S(x) = \sum u_n(x)$

<u>Тогда</u> $\int_a^b S(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)$

$S(x)$ - непрерывно на $[a,b]$ по теореме 1' $\Rightarrow$ можно интегрировать

Доказательство. По теореме 2 $S_n \rightrightarrows S$ на $[a,b]$ $\sum\limits_{k=0}^{n} \int_a^b u_k = \int_a^b S_n dx \to \int_a^b S(x)dx$

□

2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

Следствие 2.15.6 (Правило Лейбница)**.** $f : \underbrace{[a,b]}_{x} \times \underbrace{[c,d]}_{y} \to \mathbb{R} \quad f, f'_y$ - непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$

$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx \quad y \in [c,d]$

<u>Тогда</u> Φ - дифф. на $[c,d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$

Доказательство. $\frac{\Phi(y+\frac{1}{n}) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \int_a^b \frac{f(x, y+\frac{1}{n}) - f(x,y)}{\frac{1}{n}} dx \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \int_a^b \underbrace{f'_y(x, y + \frac{\Theta}{n})}_{g_n(x,y)} dx$

Утв. $f_n(x,y) \underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} f'_y(x,y)$ на $x \in [a,b]$, а y считаем фиксированным — по теореме Кантора о равномерной непрерывности

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \frac{1}{N} < \delta(\varepsilon)$— из теоремы Кантора $\forall n > N\ \forall x \in [a,b]\ |f'_t(x, y + \frac{\delta}{n)}) - f'_y(x,y)| < \varepsilon$

Таким образом $\frac{\Phi(y+\frac{1}{n}) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \to \int_a^b f'_y(x,y)dx = \Phi'(y)$ □

2.27 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

Теорема 3 (О предельном переходе под знаком производной)**.** $f_n \in C^1(\langle a,b\rangle), \quad f_n \to f$ поточечно, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a,b\rangle$

<u>Тогда</u> $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ и $f' \equiv \varphi$ на $\langle a,b\rangle$

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & f \\ D\downarrow & & \downarrow \\ f'_n & \rightrightarrows & \varphi \end{array}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(f'_n(x)) = (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))'$$

Доказательство. $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle \quad f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $[a,b]$ $\overset{\text{T.2}}{\Longrightarrow} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \to \int_{x_0}^{x_1} \varphi$, т.е.

$$\begin{cases} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f_n(x_1) - f_n(x_0) \to f(x_1) - f(x_0) \end{cases}$$

Итак $\forall x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle \quad f(x_1) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi$

$\underbrace{f'_n}_{\text{непр}} \varphi \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непрерывная} \end{array}\right\} \Rightarrow f' = \varphi$

□

Теорема 3' (о дифференцировании ряда по параметру). $u_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$
Путсть:

1. $\sum u_n(x) = S(x)$ - поточенчная сходимость
2. $\sum u_n'(x) = \varphi(x)$ - равномерно сходится на $\langle a,b\rangle$

Тогда:

1. $S(x) \in C^1(\langle a,b\rangle)$
2. $S' = \varphi$ на $\langle a,b\rangle$

т.е $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

Доказательство.

- $f_n \to f$ — поточечно

- $f_n' \rightrightarrows f$

Тогда $f' = \varphi,\ f \in C^1$

- $S_n \to S$ — поточечно
- $S_n' \rightrightarrows \varphi$

□

2.28 $\boxed{\#\text{A}}$ Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Теорема 2.16 (признак Вейерштрасса). $\sum u_n(x) \quad x \in X$
Пусть $\exists C_n$ - вещественная последовательность, $\begin{cases} u_n(x) \le C_n \\ \sum C_n\text{— сходится}\end{cases}$
Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \le C_{n+1} + \cdots + C_{n+p}$ - Тривиально
$\sum C_n$ - сходится $\Rightarrow$ удовлетворяет критерию Больциано-Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad C_{n+1} + \cdots + C_{n+p} < \varepsilon$
Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больциано-Коши равномерной сходимости □

2.29 FIXME Дифференцируемость гамма функции

Пример. Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \cdot \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + \frac{x}{k})e^{\frac{x}{k}}$$

, где γ - постоянная Эйлера

$$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{l=1}^{+}(\ln(1+\frac{x}{k}) - \frac{x}{k})$$

фиксируем x_0 $u_k'(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$
Пусть $M > x_0$ Тогда

$$\left|\frac{-x}{(x+k)k}\right| \le \frac{M}{k^2}, \text{ при } x \in (0,M)$$

$\sum \frac{M}{k^2}$ - сходится
Тогда $\sum \frac{-x}{(x+k)k}$ равномерно сходится на $(0,M)$
Значит $\ln\Gamma(x) \in C^1(0,M) \Rightarrow \Gamma \in C^1(0,M)$

Примечание (к примеру).

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k+1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x) \cdot (\frac{1}{x} + \gamma - \sum \dots) \tag{30}$$

$$\Gamma''(x) = \dots$$

Получается, что $\Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

2.30 Теорема о предельном переходе в суммах.

Теорема 4' (о почленном переходе в суммах). $u_n : E \subset \underset{\text{м.п.}}{X} \to \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка E
Пусть:

1. $\forall n$ $\exists$ конечный $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$
2. $\sum u_n(x)$ — равномерно сходится на E

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lim_{x\to x_0} u_n(x)) \tag{31}$$

Доказательство.

1. $\sum a_n$ - сходится
   x_n - фундаментальная
   $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall m, n > N \quad |x_m - x_m| < \varepsilon$

   $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x), \quad S_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{32}$$

   Проверим, что S_n^a - фундаментальная

   $$|S_{n+p}^a - S_n^a| \le |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a| \tag{33}$$

   Из равномерной сходимости $\sum u_n(x) : \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$
   Это критерий Больциано-Коши для равномерной сходимости
   Зададим ε, по N выберем n, $n + p$ и возьмем x близко к x_0:

   $$|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{34}$$

   $$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{35}$$

   Тогда выполнено (4), т.е. $|S_{n+p}^a - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
   Это фундаментальность последовательности $S_n^a \Rightarrow \sum a_n$ - сходится

2. $\sum a_n = \lim_{x\to x_0} \sum u_n(x)$
   Сводим к теореме Стокса-Зайдля:

   $$\tilde{u}_n(x) = \left[\begin{array}{ll} u_n(x) & x \in E \backslash \{x_0\} \\ a_n & x = x_0 \end{array} \right. \tag{36}$$

   — задана на $E \cup \{x_0\}$, непрерывна в x_0 (переход (8) $\to$ (9))
   $\sum \tilde{u_n}(x)$ - равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в x_0

   $$\lim_{x\to x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \tag{37}$$

$$= \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n \tag{38}$$

$$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \le \sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \right| \tag{39}$$

В (10) в правой части оба слагаемых $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ отсюда равномерная сходимость ряда $\sum \tilde{u}_n(x)$

$\square$

2.31 Теорема о перестановке двух предельных переходов

Теорема 4 (о перестановке двух предельных переходов)**.** $f_n : E \subset X \to \mathbb{R},\ x_0$ - предельная точка E

Пусть:

1. $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} S(x)$ на E
2. $f_n(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim_{n \to +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, shift left, "n \to +\infty"] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "x \to x_0"'] & S(x) \arrow[d, dashed, "x \to x_0"] \\
A_n \arrow[r, dashed, "n \to +\infty"'] & A
\end{tikzcd}$$

Доказательство. $u_1 = f_1,\ \dots,\ u_k = f_k - f_{k-1}, \dots$ Тогда $f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
$a_1 = A_1,\ \dots,\ a_k = A_k - A_{k-1}, \dots, A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
В этих обозначениях: $\sum u_k(x)$ — равномерно сходится к сумме $S(x)$
$u_n(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a_k$
Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^{n} a_k = A_n$ — имеет конечный предел, при $n \to +\infty$
$\sum a_k$ - *сходится*

$$\lim_{x \to x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x \to x_0} S(x) = \sum a_k = A \tag{40}$$

$\square$

2.32 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Теорема 2.17 (признак Дирихле)**.** $\sum a_n(x) b_n(x)$ — вещественный ряд, $x \in X$

Пусть:

1. Частичные суммы ряда $\sum a_n$ - равномерно ограничены
   $\exists C_a\ \forall N\ \forall x \in X \quad |\sum_{k=1}^{n} a_k(x)| \le C_a$
2. $\forall x$ последовательность $b_n(x)$ — монотонна по n и $b_n(x) \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} 0$ на X

Тогда ряд $\sum a_n(x) b_n(x)$ рвномерно сходится на X
Для числовых рядов: $\sum a_n b_n$

1. частичные суммы a_n - ограничены
2. $b_n \to 0,\ b_n$ - монотонна

Тогда $\sum a_n b_n$ - сходится

Доказательство.

$$\sum_{k=M}^{N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{k=M}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \text{ где } A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \quad (41)$$

преобразование Абеля(суммирование по частям)

$$\left|\sum_{k=M}^{N} a_k(x) b_k(x)\right| \leq C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_{M-1}| + \sum_{k=M}^{N-1} C_a \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq C_a (|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=1}^{N-1} |b_k - b_{k+1}|) \leq \quad (42)$$

$$\leq C_a (2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|) \quad (43)$$

Переход (5) $\to$ (6): в сумме все разности одного знака $\Rightarrow$ "телескопическая"и равна $\pm(b_M - b_N)$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K : \; \forall l > K \; \forall x \in X \; |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_a}$
Значит при $M, N > K \quad \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=M}^{N} a_k(x) b_k(x)\right| < \varepsilon$ — это критерий Больциано-Коши равномерной сходимости ряда $\square$

2.33 Теорема о круге сходимости степенного ряда

Теорема 2.18 (о круге сходимости степенного ряды)**.** $\sum a_n (z - z_0)^n$ - степенной ряд
Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится только при $z = z_0$
3. $\exists R \in (0, +\infty)$: при:
   - $|z - z_0| < R$ ряд сходится
   - $|z - z_0| > R$ ряд расходится

Доказательство. Признак Коши: $\sum a_n \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} = r$

- $r < 1$ ряд сходится
- $r > 1$ ряд расходится

$\sum a_n (z - z_0)^n$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = |z - z_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} \quad (44)$$

- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ тогда $r = 0$ и есть (абсолютная) сходимость при всех z
- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ тогда $r = +\infty$ при $z \neq z_0$
  А при $z = z_0$ ряд очевидно сходится
- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0, +\infty \quad |z - z_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \overset{\text{def}}{=\!=} R$

  1. $|z - z_0| < R$ ряд сходится абсолютно
  2. $|z - z_0| > R$ ряд расходится, т.к. слагаемые $\not\to 0$

$\square$

2.34 Теорема о непрерывности степенного ряда

Теорема 2.19 (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)**.**
$\sum a_n (z - z_0)^n \quad 0 < R \leq +\infty$

1. $\forall r : \; 0 < r < R$ Ряд сходится равномерно в шаре $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ — непрерывна в $B(z_0, R)$

Доказательство.

1. Если $0 < r < R$, то при $z = z_0 + r$ ряд абсолютно сходится(по теореме о радиусе сходимости), т.е. $\sum |a_n| \cdot r^n$ — конечна
признак Вейрештрасса:
   - при $|z - z_0 \le r|$ $\quad |a_n(z-z_0)^n| \le |a_n| \cdot r^n$
   - $\sum |a_n| r^n$ - конечна

   $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость на $\overline{B(z_0, r)}$
2. Следует из 1. и теоремы Стокса-Зайдля
Если z удовлетворяет $|z - z_0| < R \Rightarrow \exists r_0 < R \quad z \in B(z_0, r_0)$
На $B(z_0, r_0)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow f$ — непрерывна в z

□

2.35 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

Теорема 2.20 (о дифференцируемости степенного ряды)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad 0 < R < +\infty \quad f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n \tag{45}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \tag{46}$$

Тогда:

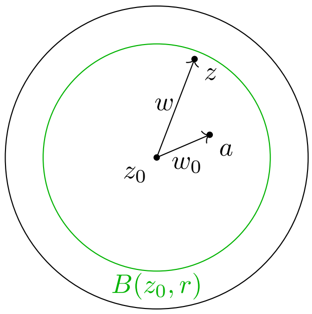
1. Радиус сходимости ряда (46) равен R
2. $\forall z \in B(z_0, R)\ \exists f'(z)$ и $f'(z) = (46)$

Доказательство.

1. По формуле Адамара $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}$
Ряд (46) сходится при каком-то $z \Leftrightarrow \sum n a_n (z-z_0)^n$ — сходится
Смторим на частичные суммы

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{n a_n}} = \frac{1}{1 \cdot \lim \sqrt[n]{a_n}} = R \tag{47}$$

2. $a \in B(z_0, R),\ \exists x < R,\ a \in B(z_0, r)$
$a = z_0 + w_0 \quad, |w_0| < r$
$z = z_0 + w \quad, |w| < r$



$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \tag{48}$$

Последнее выражение по модулю по Лемме $\le n \cdot r^{n-1} \cdot |a_n|$, ряд $\sum n r^{n-1} |a_n|$ — сходится по 1., т.е. ряд (48) равномерно сходится в круге $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \lim \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z-a} = \sum n a_n (a - z_0)^{n-1} \tag{49}$$

□

Следствие 2.20.7. $f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n,\ a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$
Тогда:

1. $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ — тот же радиус сходимости
2. $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$
   Замечание. $\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \text{const}$

Доказательство.

1. Продифференцируем ряд $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$. По теореме он имеет тотже радиус сходимости что и ряд $\sum a_n(z-z_0)^n$
2. Мы можем вычислить производные левой и правой части, они совпадают, при $x = x_0$ ясно что константа нулевая $\Rightarrow$ левая и правая части равны

□

Пример.

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

Продифференцируем:

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \ldots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arcctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Находим C подставляя $x = 0$ $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, итого:

$$\operatorname{arcctg} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

2.36 Свойства экспоненты

Определение. $\sum \frac{z^n}{n!} \quad A = \infty \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ Свойства:

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$
3. f_0 — показательная функция, удовлетворяет $f(x+y) = f(x)f(y)$
   $\lim_{x\to 0} \frac{f_0(x)-1}{x} = 1$
   $f_0(x) := \exp(x) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \exp'(0) = 1$
4. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

   Доказательство. $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$
   Потому что коэффицент вещественный:

$$\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} \tag{50}$$

□

Теорема 2.21. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, тогда $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

Доказательство.

$$\exp(z)\cdot\exp(w)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!}=\sum c_n \tag{51}$$

$$,\text{ где } c_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\cdot n!=\frac{(z+w)^n}{n!} \tag{52}$$

$$\sum c_n=\sum\frac{(z+w)^n}{n!}=\exp(z+w) \tag{53}$$

□

Следствие 2.21.8. $\forall z\in\mathbb{C}\quad \exp(z)\neq 0$

2.37 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

Теорема 2.22 (Абеля). $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n$ — сходящийся $C_n\in\mathbb{C}$
$f(x)=\sum C_n x^n,\quad R\geq 1,\ -1<x<1$
Тогда $\lim_{x\to 1} f(x)=\sum C_n$

Доказательство. Ряд $\sum C_n x^n$ равномерно сходится на $[0,1]$ по признаку Абеля
$a_n(x):=C_n\quad b_n(x):=x^n\Rightarrow$ этот ряд сходится
Функции $C_n x^n$ — непрерывны на $[0,1]\Rightarrow$ (по т. Стокса-Зайдля) $\sum C_n x^n$ — непрервны на $[0,1]$ □

Следствие 2.22.9. $\sum a_n=A,\ \sum b_n=B,\ C_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0$
Пусть $\sum C_n=C$
Тогда $C=A\cdot B$

Доказательство. $f(x)=\sum a_n x^n\quad g(x)=b_n x^n\quad h(x)=\sum c_n x^n\quad x\in[0,1]$
$x<1$ Есть абсолютная сходимость $a_n,b_n\Rightarrow$ можно перемножать:
$f(x)g(x)=h(x)$, тогда при переход в пределе $x\to 1-0\Rightarrow A\cdot B=C$ □

2.38 Единственность разложения функции в ряд

Определение. f — **разлагается в степенной ряд** в окрестности x_0 если:
$\exists\varepsilon>0\ \exists C_n$ — вещественная последовательность

$$\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(x-x_0)^n \tag{54}$$

Теорема 2.23 (единственности). f — разлагается в сепенной ряд в окресности x_0
Тогда разложение единственно

Доказательство. выполняется (54)

$$c_0=f(x_0),\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nC_n(x-x_0)^{n-1} \tag{55}$$

$$c_1=f'(x_0),\quad f''(x)=\dots \tag{56}$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)C_n(x-x_0)^{n-k} \tag{57}$$

$$c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{58}$$

□

2.39 Разложение бинома в ряд Тейлора

Теорема 2.24. $\forall\sigma \in \mathbb{R}\ \forall x \in (-1, 1)$
$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}x^2 + \dots$

Доказательство. при $|x| < 1$ ряд сходится по ризнаку Деламбера

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(\sigma-n)x}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| < 1 \tag{59}$$

Обозначим сумму ряда через $S(x)$
Наблюдение: $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$\sum a_n \leftrightarrow \sum a_n x^n = f(x) \tag{60}$$

$$\sum a_n n x^{n-1} = f'(x) \tag{61}$$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!}x^n + \dots \tag{62}$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!}x^n \tag{63}$$

$$(1+x)S' = \dots + (\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!}\cdot n)x^n + \dots = \tag{64}$$

$$= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!}\cdot \sigma x^n + \dots \tag{65}$$

$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma}$ $\quad f'(x) = \frac{S'\cdot(1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1}\cdot S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0 \Rightarrow f = \text{const}\ f(0) = 1\ \Rightarrow f \equiv 1$ □

2.40 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

Теорема 2.25. $f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$
f — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности $x_0 \Leftrightarrow$
$\exists \delta, C, A > 0\ \forall n\ \forall x : |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < C \cdot A^n \cdot n!$

Доказательство.

(⇐) формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \tag{66}$$

$$\left|\frac{f^{(n)}()}{n!}(x-x_0)^n\right| \le C \cdot |A(x-x_0)|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{67}$$

Разложение имеет место при $|x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$

(⇒)

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{68}$$

Возьмем $x_1 \neq x_0$, для которого это верно

- при $x = x_0$, ряд сходится $\Rightarrow$ слагаемые $\to 0 \Rightarrow$ ограничены

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n\right| \le C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \le C_1 n! B^n| \tag{69}$$

, где $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$

-

$$f^{(m)}(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1)\dots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m} = \tag{70}$$

$$= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m} \tag{71}$$

Пусть $|x-x_0|<\frac{1}{2B}$

$$|f^{(n)}(x)| \le \sum \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}|(x-x_0)^{n-m}\right| \le \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!} = \tag{72}$$

$$= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!}\cdot(\underbrace{B|x-x_0|}_{<\frac{1}{2}})^{n-m} \overset{}{\underset{\text{Сл. 2}}{=\!=\!=}} \frac{C_1 B^n m!}{\underbrace{(1-\underbrace{B|x-x_0|}_{<\frac{1}{2}})}_{>\frac{1}{2}}{}^{m+1}} < \tag{73}$$

$$< C_1 2^{m+1} B^m m! = \underbrace{(2C_1)}_{C}\cdot(\underbrace{2B}_{A})^m m! \tag{74}$$

Эта оценк выполнятется при $|x-x_0|<\delta=\frac{1}{2B}$

□

2.41 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

Теорема 2.26.

1. Линейность интгрела по полю:
   $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall U,V$ - векторных полей $I(\alpha U+\beta V,\gamma)=\alpha I(U,\gamma)+\beta I(V,\gamma)$

   Доказательство. Из определения(первый двух выражений в равенстве) □

2. Аддитивность интеграла при дроблении пути:
   $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m \quad c\in[a,b] \quad \gamma^1=\gamma|_{[a,c]}\ \gamma^2=\gamma|_{[c,b]}$
   <u>Тогда</u> $I(V,\gamma)=I(V,\gamma^1)+I(V,\gamma^2)$

   Доказательство. По аддитивности интеграла(первый двух выражений в равенстве) □

3. Замена параметра
   $\varphi:[p,q]\to[a,b]\ \varphi\in C^1\ \varphi(p)=a,\ \varphi(q)=b \quad \gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m\ \tilde{\gamma}=\gamma\circ\varphi$
   <u>Тогда</u> $I(V,\gamma)=I(V,\tilde{\gamma})$ - это замена переменных в интеграле

   Доказательство. $I(V,\tilde{\gamma})=$
   $$=\int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(S))), \underbrace{\tilde{\gamma}'(S)}_{\gamma'(\varphi(S))\cdot\varphi'(S)}\rangle ds = \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(S))),\gamma'(\varphi(S))\rangle\cdot\varphi'(s)ds \underset{t:=\varphi(s)}{=} \underbrace{\int_a^b \langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt}_{I(V,\gamma)}$$
   □

   Примечание. По теореме о двух параметризациях
   $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ - параметризация гладкого одномерного многообразия(простое)
   $\tilde{}:[p,q]\to\mathbb{R}^m$ диффеоморфизм $\varphi:[p,q]\to[a,b] \quad \tilde{\gamma}=\gamma\circ\varphi$

4. Объединение носителей
   $\gamma^1:[a,b]\to\mathbb{R}^m \quad \gamma^2:[c,d]\to\mathbb{R}^m \quad \gamma^1(b)=\gamma^2(c)$
   Зададим новый путь $\gamma=\gamma^2\gamma^1:[a,b+d-c]\to\mathbb{R}^m \quad \gamma(t)=\left[\begin{array}{ll}\gamma^1(t) & ,t\in[a,b]\\ \gamma^2(t+c-b) & ,t\in[b,b+d-c]\end{array}\right.$
   В точке b излом. Если $\gamma^1,\ \gamma^2$ - кусочно гладкие, то γ - кусочно гладкий
   <u>Тогда</u> $I(V,\gamma^2\gamma^1)=I(V,\gamma^1)+I(V,\gamma^2)$

   Доказательство. $I(V,\gamma)=\displaystyle\int_a^{b+d-c}\dots=\int_a^b\dots+\underbrace{\int_b^{b+d-c}\dots}_{\text{замена } \tau=t-b+c}=I(V,\gamma^1)+\int_c^d\langle V(\gamma^2(\tau)),(\gamma^2)'(\tau)\rangle d\tau=I(V,\gamma^1$
   При замене: $\gamma(t)=\gamma^2(t+c-b)=\gamma^2(\tau) \quad \gamma'(t)=(\gamma^2)'(t+c-b)=(\gamma^2)'(\tau)$ □

5. Противоположный путь
   $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$ - противоположный путь
   Тогда $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$

   Доказательство. $I(V, \gamma^-) =$
   $= \displaystyle\int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau)\rangle d\tau \underset{t=a+b-\tau}{=} = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t)\rangle \cdot (-dt) = -I(V, \gamma)$
   При замене $(\gamma^-)'(\tau) = -\gamma(a + b - \tau)$ ☐

6. Оценка интеграла векторного поля по пути
   $|I(V, \gamma)| \le \max\limits_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$, где $L = \gamma([a, b])$ - носитель пути
   $$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \le \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle| dt \le \int_a^b |V(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \le \max_{x \in L} |V(x)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$
   Можем писать max, т.к. V - непрерывна, L - компакт(путь непрерывен, образ замкнутого отрезка под действием непрерывного отображения(носитель) компакт)

2.42 $\boxed{\#A}$ Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

Теорема 2.27. (обобщеная формула Ньютона-Лейбница)
$V : O \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^m$, потенциально, f — потенциал V
$\gamma : [a, b] \to O \quad \gamma(a) = A,\ \gamma(b) = B$
Тогда $I(V, \gamma) = \displaystyle\int_\gamma \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$

Доказательство.

1. γ - гладкий $\Phi(t) = f(\gamma(t)) \quad \Phi' = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t)) \cdot \gamma_m'(t)$
   Учитывая что $\mathrm{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m}) = V$
   $$\int_\gamma \sum u_k dx_k = \int_a^b \Phi'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) = f(b) - f(a)$$
2. γ - кусочно гладкий $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = v \quad \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$
   $\displaystyle\int_\gamma \sum u_n dx_k = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t^k} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \underset{\text{п. 1}}{=} \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) = f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) = f(B) - f(A)$
   Последняя сумма является телескопической

☐

2.43 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

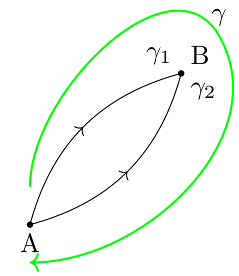
Теорема 2.28 (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)**.** V - векторное поле в области O. Тогда эквивалентны:

1. V - потенциально
2. $\displaystyle\int_\gamma \sum V_i dx_i$ не зависит от пути в области O
3. $\forall \gamma$ - кусочно гладкого, замкнутого в O $\displaystyle\int_\gamma \sum V_i dx_i = 0$

Доказательство.

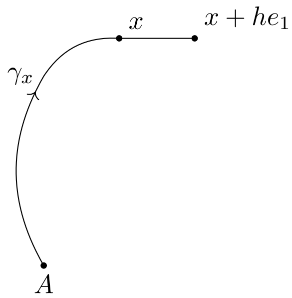
- $1 \Rightarrow 2$: обобщенная формула Ньютона-Лейбница
- $2 \Rightarrow 3$: γ - петля: $[a, b] \to O \quad \gamma(a) = \gamma(b) = A$
  Рассмторим простой птуь $\tilde{\gamma} : [a, b] \to O \quad \gamma(t) = A$
  по свойству 2 $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} = 0 (= \int \langle V, \underbrace{\gamma'}_{0} \rangle dt)$

- $3 \Rightarrow 2$: γ_1, γ_2 - пути с общим началом и концом



$\gamma := \gamma_2^- \gamma_1$ - кусочно гладкая петля $0 = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$

- $2 \Rightarrow 1$: Фиксируем $A \in O$
$\forall x \in O$ выберем кусочно гладкий путь γ_x, который ведет из A в x
$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i$ - проверим что это потенциал
Достаточно проверить $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в O
Фиксируем $x \in O$



$\gamma_0(t) = x + the_1 \quad , t \in [0, 1]$
$\gamma_0'(t) = (h, 0, \ldots, 0) = he_1$
$f(x + he_1) - f(x) = \int_{\gamma_{x+he_1}} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_0\gamma_x} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_0} = \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) \cdot hdt =$
$= h \cdot V_1(x_1 + ch, x_2, \ldots, x_n)$
Таким образом $\frac{f(x+he_1) - f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} V_1(x)$

$\square$

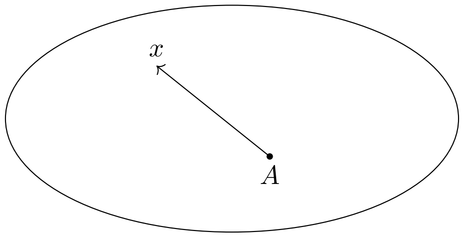
2.44 FIXME $\boxed{\#A}$ Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

Лемма 8. *V - гладкое, потенциальное в O*
Тогда $\forall x \in O \ \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}$

Доказательство. $\cdots = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$ $\square$

Теорема 2.29 (лемма Пуанкаре)**.** $O \in \mathbb{R}^m$ - выпуклая область $V : O \to \mathbb{R}^m$ - векторное поле
V - удовлетворяет условиям леммы(V - гладкое)
Тогда V - потенциальное

Доказательство. Фиксируем $A \in O$
$\forall x \in O \ \gamma_x(t) := A + t \cdot (x - a) \quad , t \in [0, 1]$



$\gamma_x'(t) = x - A$ - постоянный вектор

$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x-A)) \cdot (x_k - A_k) dt$

Проверим, что f - потенциал

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \langle \text{правило Лейбница} \rangle = \displaystyle\int_0^1 V_j(A + t(x-A)) + \sum_{k=1}^m \underbrace{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}}_{\frac{\partial V_j}{\partial x_k}}(\dots) \cdot t(x_k - A_k) dt =$

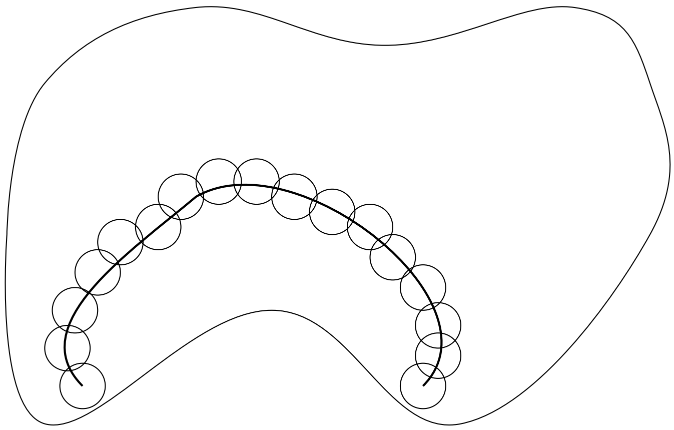
$= \displaystyle\int_0^1 (tV_j(A + t(x-A))_t' dt) = t \cdot V_j(A + t(x-A))\Big|_{t=0}^{t=1} = V_j(x)$ □

2.45 Лемма о гусенице

Лемма 9 (о гусенице). $\gamma : [a,b] \to \underset{\text{отк. мн.}}{O} \subset \mathbb{R}^m$ *— непрерывное*

Тогда $\exists$*дробление* $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

и $\exists$ *шары* $B_1, \dots, B_n \subset O \quad \gamma[t_{k_1}, t_l] \subset B_k$



Доказательство. $\forall c \in [a,b]$ возьмем $B_c := B(\gamma(c), \underset{\text{произвол!!}}{r_c}) \subset O$

$\tilde{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a,b] | \ \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$

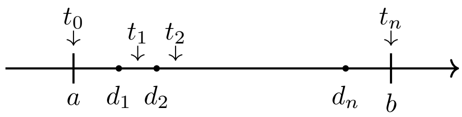
$\tilde{\beta}_c := \sup\{\alpha \in [a,b] | \ \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$

Возьмем (α_c, β_c) : $\tilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \tilde{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a,b]$

Для случая $c = a$ *или* $c = b$ *вместо* (α_c, β_c) *берем* $[a, \beta_a)$, $(\alpha_b, b]$

$[a,b]$ — компактен $\Rightarrow [a,b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$, н.у.о ни один интервал не накрывается целиком остальными $\forall (\alpha_c, \beta_c)\ \exists d_c$ — принадлежащая "только этому"интервалу



Точка t_k выбирается на отрезке (d_k, d_{k+1}) и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$

$\gamma([t_{k-1}, t_l]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$ □

2.46 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

Лемма 10 (о равенстве интегралов локально потенциального векторного поля по похожим путям).
V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a,b] \to O$ — V - *похожие, кусочно гладкие,* $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a),\ \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$
Тогда $\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

Доказательство. Берем общую V - гусеницу
Пусть f_k - потенциал V в шаре B_k
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
Поправим потенциал(прибавим константы)
$f_k((t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1, 2, \dots, n$
Тогда

$$\int_\gamma \sum V_i dx_i = \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \overset{}{\underset{\text{обобщ. ф-ла Н.-Л.}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) = \tag{75}$$

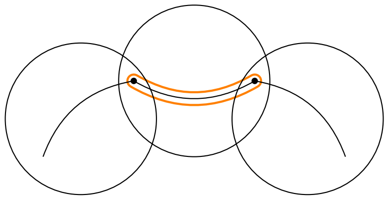
$$= \text{"телесопическая} - f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \tag{76}$$

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k\Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}\Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$
и тогда аналогично $\int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_n(\tilde{\gamma}(a))$ □

2.47 Лемма о похожести путей, близких к данному

Лемма 11. $\gamma : [a,b] \to O$ *- непрерывный,* V *- локально потенциальное векторное поле в* O
Тогда $\exists \delta > 0$ *Если* $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a,b] \to O$ *таковы, что* $\forall t \in [a,b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta,\ |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$
то $\tilde{\gamma}$ *и* $\tilde{\tilde{\gamma}}$ *(и* γ*) —* V *- похожи*

Доказательство. Берем V - гусеницу для γ



δ_k - окрестнось множества $\gamma[t_{k-1}, t_[k]]$
 $\forall k\ \exists \delta_k > 0 : \quad (\delta_k$ - окрестность $\gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$
δ - окрестность множества A: $\{x |\ \exists a \in A\ \rho(a,x) < \delta\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta)$ Следует их компактности:
пусть $B_k = B(w, r)$
$t \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ - непрерывная функция $\Rightarrow$ достигает max
$\rho(\gamma(t), w) \le r_0 < r \quad \delta_k := \frac{r - r_0}{2}$
$\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_k)$ □

2.48 Равенство интегралов по гомотопным путям

Теорема 2.30. V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
γ_0, γ_1 — связанно гомотопные пути
Тогда $\int_{\gamma_0} V_i dx_0 = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

Примечание. То же самое выполнено для петельных гомотопий

Доказательство. $\gamma_u(t) := \Gamma(t, u),\ t \in [a,b]\ u \in [0,1]$
$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$
Проверим: Φ - локально постоянна
$\forall u_0 \in [0,1]\ \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0,1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$
Γ - непрерывна на $[a,b] \times [0,1]$ - компакт $\Rightarrow \Gamma$ - равномерно непрерывна
$\forall \delta > 0\ \exists \sigma > 0\ \forall t, t'\ |t - t'| < \sigma\ \forall u, u'\ |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t,u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$
Лемма 3 $\gamma : [a,b] \to O$
Тогда $\exists \delta > 0$ со свойством
Если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ — близки к γ
т.е. $\forall t \in [a,b]$

- $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \delta$
- $|\tilde{\tilde{\gamma}} - \gamma(t)| < \delta$

то $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ — V - похожие
Возьмем параметр δ из Леммы 3 для пути γ_{u_0}
Если $|u-u_0|<\sigma \quad |\Gamma(t,u)-\Gamma(t,u_0)|<\frac{\delta}{2}$, при $t\in[a,b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} — похожи по Лемме 3
Построим кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0}$ $\frac{\delta}{4}$ - близкий к γ_{u_0} $\forall t\in[a,b] \quad |\gamma_{u_0}(t)-\tilde{\gamma}_{u_0}|<\frac{\delta}{4}$
и кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_u$ $\frac{\delta}{4}$ - близкий к γ_u
Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u$ — δ - близкие к γ_{u_0} $\Rightarrow$ они V - похожие $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int_{\gamma_u}\sum V_i dx_i \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{\tilde{\gamma}_u}\dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}}\dots \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{\gamma_{u_0}}\dots$
т.е. $\Phi(u)=\Phi(u_0)$, при $|u-u_0|<\delta$ □

2.49 $\boxed{\#\text{A}}$ Теорема Пуанкаре для односвязной области

Теорема 2.31. $O\subset\mathbb{R}^m$ — односвязная область
V — локально потенциальное векторное поле в O
Тогда V — потенциальное в O

Доказательство. *Теорема.* Эквивалентны:

1. V — потенциальное
2. ...
3. $\forall$ кусочно гладкой петли γ: $\int_\gamma \sum V_i dx_i = 0$

V - локально постояно, γ_0 — кусочно гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути γ_1 $\Rightarrow$ $\int_{\gamma_0}=\int_{\gamma_1}=\int_a^b\langle V(\gamma_1|t|),\underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0}\rangle dt = 0 \Rightarrow V$ — потенциально □

Следствие 2.31.10. Теорема Пуанкаре верна в односвязной области
Дифференциальный критерий:
$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\frac{\partial V_j}{\partial x_j} \tag{77}$$
Лемма Пуанкаре: (77) $\Rightarrow$ V — локально потенциально

2.50 Теорема о веревочке

Теорема 2.32 (о веревочке)**.**

- $O=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$
- $\gamma:[0,2\pi]\to O$
  $t\mapsto(\cos t,\sin t)$

Тогда эта петля не стягиваема

Доказательство.
$V(x,y)=(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$ — векторное поле в $\mathbb{R}^2$

Проверим что $\frac{\partial V_1}{\partial y}=\frac{\partial V_2}{\partial x}$:
$$\frac{\partial V_1}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial V_2}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{78}$$
Равенство частных производных выполняется если $(x,y)\neq(0,0)\Rightarrow V$ — локально потенциально
При этом
$$\int_\gamma\sum V_i dx_i=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot(-\sin t)+\frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}1dt=2\pi \tag{79}$$
(3) $\Rightarrow$ петля не стягиваема(Если бы была стягиваема, то интеграл изначально должен был быть равен 0, т.к. интеграл при гомотопиях не меняется), а поле V — не потенциально □

2.51 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

Теорема 2.33 (о свойствах объема). $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем
Тогда он имеет свойства:

1. Уиленная монотонность
$\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}_{\text{дизъюнктны}} \in \mathcal{P} \quad \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A \quad \sum_{i=1}^n \mu A_i \le \mu A$

2. Конечная полуаддитивность
$\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \mu A \le \sum_{i=1}^n \mu A_i$

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ пусть еще известно: $A \setminus B \in \mathcal{P}$, μB — конечный
Тогда $\mu(A \setminus B) \ge \mu A - \mu B$

Примечание.

- в пунктах 1 и 2 не предполагается, что $\bigcup A_i \in P$
- в пункте 3 если $\mathcal{P}$ — алгебра то условие $A \setminus B \in P$ можно убрать(оно выполняется автоматически)

Доказательство.

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца: $A \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigsqcup_{l=1}^S B_l$ — доказано ранее
таким образом $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$ — дизъюнктное объединение конечного числа множеств
$\mu A = \sum \mu A_i + \sum B_l \ge \sum \mu A_i$

2. объем $\Rightarrow$ конечная полуаддитивность

$$A \subset \bigcup_{\text{кон.}} A_k \mu A \le \sum \mu A_k \quad (A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}) \tag{80}$$

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \quad A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k \tag{81}$$

Сделаем эти множества дизъюнктными

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i) \quad A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k \tag{82}$$

Но эти C_k вообще говоря $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i) = \bigsqcup_{i} D_{kj}, \ D_{kj} \in \mathcal{P} \tag{83}$$

Тогда:

$$A = \bigsqcup_{k,j} D_{kj} \qquad \mu A = \sum \mu D_{kj} \tag{84}$$

При этом $\forall k$:

$$\sum_j \mu D_{kj} = \mu C_k \le \mu A_k \tag{85}$$

Неравенство в (18) в силу монотонности объема(п.1 теоремы). Итого

$$\mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{kj} = \sum \mu C_k \le \sum \mu A_k \tag{86}$$

3. (a) $B \subset A \quad A = B \sqcup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$
   (b) $B \not\subset A \quad A \setminus B = A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{P}} \quad \mu(A \setminus B) \underset{\text{(a)}}{=\!=} \mu A - \mu(A \cap B) \underset{\text{монот.}}{\ge} \mu A - \mu B$

∎

2.52 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полу-аддитивности

Теорема 1. $\mu : \underset{\text{п/к}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем

Тогда эквивалентны:

1. μ — мера, т.е. μ — счетно аддитивна
2. μ – счетно полу-аддитивна:
   $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \le \sum \mu A_i$

Доказательство.

(1 ⇒ 2) Как в предыдущей теореме(доказательство п.2) в формклах 15, 17, 19 вместо конечных объединений и сумм надо рассматривать счетные

(2 ⇒ 1) $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ проверим $\mu A = \sum \mu A_i$:

$$\forall N \quad A \supset \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i \quad \mu A \ge \sum_{i=1}^{N} \mu A_i \tag{87}$$

$$A \subset \bigcup A_i \quad \mu A \le \sum \mu A_i \tag{88}$$

Тогда $\mu A = \sum \mu A_i$

□

2.53 Теоремы о непрерывности сверху

Теорема 3. $\mathfrak{A}$ — алгебра $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ — конечный объем

Тогда эквивалентны:

1. μ — мера, т.е. счетно аддитивная функцяи множества
2. μ — непрерывна сверху: $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$
   $A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad A = \bigcap A_i \Rightarrow \mu A = \lim \mu A_i$

Доказательство.

(1 ⇒ 2) $B_k = A_k \setminus A_{k+1} \quad A_1 = \bigsqcup B_k \sqcup A$

$\underbrace{\mu A_1}_{\text{кон.}} = \underset{\Rightarrow\text{сх.}}{\sum} \mu B_k + \mu A$

$$A_n = \bigsqcup_{k \ge n} B_k \sqcup A \quad \mu A_n = \sum_{k \ge n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu A \tag{89}$$

(2 ⇒ 1) Дана непрерывность сверху. Воспользуемся ей для случая $A = \emptyset$

Проверяем счетную аддитивность: $C = \bigsqcup C_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum \mu C_i$

$$A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{\infty} C_i \tag{90}$$

Тогда:

$$A_k \in \mathfrak{A} : \; A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \tag{91}$$

последнее выражение содержит конечное число операций

$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \; \bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k \quad \mu C = \sum_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \sum \mu C_i \tag{92}$$

□

2.54 Счетная аддитивность классического объема

Теорема 2.34. $\mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$ — классический объем в $\mathbb{R}^m$
Тогда μ — σ-конечная мера

Доказательство. σ-конечность очевидна
Проверим, что μ — счетно адддитивна, для этого достаточно проверить счетную полуаддитивность
$P = [a, b),\ P_n = [a_n, b_n)\ P \subset \bigcup P_n$, проверить $\mu P \le \sum \mu P_n$

$P = \emptyset\ \Rightarrow$ утверждение тривиально

$P \neq \emptyset$ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Чуть уменьшим координаты вектора b: $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\mu P - \mu[a, b') < \varepsilon$
Уменьшим слегка координаты векторов a_n:

- $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n] \quad \mu[a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$
- $\underset{\text{комп.}}{[a, b']} \subset \bigcup (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие: $[a, b'] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b') \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} [a'_n, b_n)$

Тогда

$$\mu[a, b') \le \sum_{1 \le n \le N} \mu[a'_n, b_n) \tag{93}$$

$$\mu P - \varepsilon \le \sum_{n=1}^{N} (\mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) \tag{94}$$

$$\mu P - \varepsilon \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon \tag{95}$$

$\square$

2.55 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

Лемма 12.

1. *$O \subset \mathbb{R}^m$ — открыто*
   Тогда $O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — ячейки с рациональными координатами(можно считать Q_i — кубические ячейки, двоичные рациональные координаты)
2. *Можно считать, что $\overline{Q_i} \subset O$*
3. *E — измеримо, $\lambda E = 0$*
   Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad E \subset \bigcup Q_i :\ Q_i$ — кубическая ячейка и $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$

Доказательство.

1. $\forall x \in O$, пусть $Q(x)$ — какая-то ячейка с рациональными координатами, $Q(x) \subset O$(можно потребовать $\overline{Q(x)} \subset O$; Q — куб; двоично рациональные координаты)
   $O = \bigcup_{x \in O} Q(x)$ — здесь не более чем счетное множество различных ячеек
   $\Rightarrow O = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$ — сделаем ячейки дизъюнктными

   $$Q_1 := Q(x_1) \quad Q(x_2) \setminus Q(x_1) \overset{\text{св-во п/к}}{=\!=\!=} \bigsqcup D_j \tag{96}$$

   Переобозначим D_j как $Q_2, Q_3, \ldots, Q_k$

   $$Q(x_3) \setminus (\bigsqcup_{i=1}^{k} Q_i) = \bigsqcup P_l \tag{97}$$

   переобозначим P_l, как $Q_{k+1}, \ldots, Q_s$ и так далее.
   Можно считать что координаты всех ячеек двоично рациональны
   В $\bigsqcup Q_i$ — можно подразбить эти ячейки, чтобы они стали кубическими
   $[a_i, b_i)$ — двоично рациональные координаты. $\frac{1}{2^l}$ — самый крупный знаенатель
   $[a_i, b_i]$ — конечное объединение кубических ячеек со стороной $\frac{1}{2^l}$

2. уже доказано

3. Следует из теоремы о Лебеговском продолжении(п. 5)
   $\forall\varepsilon > 0\ \exists$ ячейки $P_k \quad E \subset P_k \quad 0 = \lambda E \le \sum \lambda P_k \le \varepsilon$
   $\exists \tilde{P}_k$ — двоично рациональные ячейки: $P_k \subset \tilde{P}_k\ 0 = \lambda E \le \sum \lambda_k \tilde{P}_k \le 2\varepsilon$
   Можно разбить P_k на конечное число кубов

$\square$

2.56 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Пример. $x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y$ если $x - y \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}\big|_{\mathbb{Q}} = A$ — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать $A \subset [0,1]$
Очевидно, что:

$$\bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}} (A+q) = \mathbb{R} \tag{98}$$

$$[0,1] \overset{(1*)}{\subset} \bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+q) \overset{(2*)}{\subset} [-1,2] \tag{99}$$

Верно ли что A измеримо? т.е. $A \in \mathfrak{M}^1$?
Допустим, что да: очевидно $\forall q\ \lambda A = \lambda(A+q)$ (по п.5 Т. о продолжении меры)
из (1*): $\lambda[0,1] = 1 \le \sum_q \lambda(A+q) = \sum_q \lambda(A) \Rightarrow \lambda A > 0$
из (2*): $\lambda((A+q)) = \sum_q \lambda A \le \lambda[-1,2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$
Противречие $\Rightarrow A$ — не измеримо

2.57 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Регулярность меры Лебега

Следствие 2.34.11. $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A\subset G \\ G\text{ — откр.}}} \lambda(G) = \overset{(*)}{\sup_{\substack{F: F\subset A \\ F\text{— замкн.}}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K: K\subset A \\ K\text{— компакт.}}} \lambda(K) \tag{100}$$

Доказательство. (*) следует из σ-конечности

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q(0,n) \tag{101}$$

$$Q(a,R) = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i - R, a_i + R]$$

$$\lambda(A \cap Q(0,n)) \to \lambda A \text{ — по непрерывности снизу} \tag{102}$$

$\square$

2.58 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

Лемма 13. $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *— непрерывное*
Пусть $\forall E \in \mathfrak{M}^m :\ \lambda E = 0$ *выполняется* $\lambda(TE) = 0$
Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad TA \in \mathfrak{M}^n$

Доказательство.

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N} \tag{103}$$

, где K_j — компактное множество, $\lambda(\mathcal{N}) = 0$

$$TA = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \underbrace{TK_j}_{\text{комп.}} \cup \underbrace{T\mathcal{N}}_{\lambda(T\mathcal{N})=0} \tag{104}$$

TK_j — компактно, как образ компакта при непрерывном отображении
(8) $\Rightarrow TA$ — измеримо $\square$

2.59 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

Теорема 2.35. $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $\Phi : O \to \mathbb{R}^m,\ \Phi \in C^1(O)$
<u>Тогда</u> $\forall A \subset O,\ A \in \mathfrak{M}^m \quad \Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$

Доказательство. Достаточно проверить свойство: $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$
$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ шары $B_i :\ E \subset \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon$

($\Rightarrow$) из Т. о лебеговском продолжении меры

($\Leftarrow$) используем полноту меры Лебега

1. $E \subset \underset{\text{ячейка}}{P} \subset \overline{P} \subset O,\ \lambda E = 0$

$$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\| \tag{105}$$

Тогда $\forall x, y \in P \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$ — неравенство Лагранжа

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr) \tag{106}$$

$$Q(x_0, \frac{r}{\sqrt{m}}) \subset B(x_0, r) \Rightarrow \left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m < \lambda B(x_0, r) \tag{107}$$

$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr) \subset \bigcup Q(y_i, Lr) \tag{108}$$

$$\sum \lambda\Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = L^m \sum (2r_i)^m \tag{109}$$

$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow \sum \left(\frac{2r_i}{\sqrt{m}}\right)^m < \varepsilon \Rightarrow \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m})^m \tag{110}$$

$$\sum \lambda B(y_i, Lr) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m}L)^m \tag{111}$$

, где $B_i = B(x_i, r_i),\ y_i = \Phi(x_i)$

2. $E \subset O$ — произвольное, $\lambda E = 0$
$O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — кубические ячейки, $Q_i \subset \overline{Q_i} \subset O$
$E = \bigsqcup (E \cap Q_i)$ по п.1 $\lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$
$\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$

□

2.60 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

Теорема 2.36 (инвариантность меры Лебега относительно линейных ортогональных преобразований)**.** $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — ортогональное преобразование
<u>Тогда</u> $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

1. $TA \in \mathfrak{M}^m$

2. $\lambda(TA) = \lambda A$

Доказательство.

1. $T \in C^1$ — поэтому измеримость сохраняется

2. $\mu A := \lambda(TA)$, μ — мера на $\mathfrak{M}^m$ по Лемме 1, при этом μ — инвариантна относительно сдвигов
$\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \lambda A$
A — ограничена $\Rightarrow TA$ — ограничена $\Rightarrow \mu A < +\infty$
по теореме $\lambda(TA) = k \cdot \lambda A$
Найдем k: возьмем шар B, TB = шар того же радиуса = $B + x_0$, таким образом $\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$

□