

Лекция 5

Илья Yaroshevskiy

6 апреля 2021 г.

Содержание

1	Производящие функции для регулярных языков	1
2	Автомат КМП и автокор. многочлен	2
2.1	Пентагональная формула Эйлера	3

1 Производящие функции для регулярных языков

L — регулярный язык

$$|L \cap \Sigma^n| = a_n$$

$$L(t) = a_0 + a_1 t + \dots$$

Примечание. L — регулярная спецификация

ψ — регулярное выражение:

1. $L(\psi) = L$
2. $\forall x \in L \exists!$ способ x удовлетворяющий ψ

Лемма 1. Σ — конечный алфавит, $L \subset \Sigma^*$

L — регулярная спецификация $\Leftrightarrow L$ получается из Σ :

1. Дизъюнктивное объединение $+$
2. Прямое произведение \times
3. Последовательность Seq

Доказательство. Общее рассуждение: по индукции рассмотрим для каждой операции во что она перейдет, надо показать что единственность вывода сохраняется **Не работает** \square

Пример.

$$ab^*|a^*b$$

$$a \times \text{Seq } b | \text{Seq } a \times b$$

объединение дизъюнктивное? \Rightarrow не регулярная спецификация

Пример.

$$(ab^*)^*$$

$$\text{Seq}(a \times \text{Seq } b)$$

Теорема 1.1. Если у L есть регулярная спецификация, то L — дробно рациональная

Теорема 1.2 (Производящая функция регулярного языка). L — регулярный язык над Σ , ДКА A :

- Состояния Q , $|Q| = n$
- $s \in Q$ — стартовое состояние
- $T \subset Q$ — терминальные

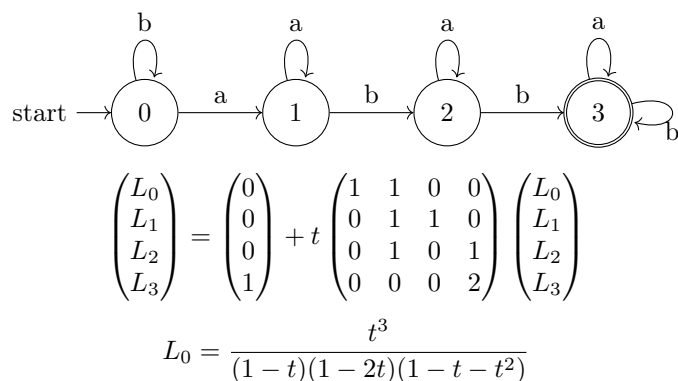
$$u = (\overbrace{0, 0, \dots, 1}^n, \underbrace{0, \dots, 0}_s)$$

$$v = (\overbrace{0, \underbrace{1}_{\in T}, 0, \underbrace{1}_{\in T}, \dots, \underbrace{1}_{\in T}}^n, 0)$$

$$D = (d_{ij})^T, \quad d_{ij} = |\{c | i \xrightarrow{c} j\}|$$

$$L(t) = \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v}$$

Пример. Язык из слов, которые содержат abb как подстроку



2 Автомат КМП и автокор. многочлен

Конструкция Гуибаса-Одлызко

$$p = \boxed{p_1, p_2, \dots, p_k}$$

$$c_i = [p[i+1 \dots k] = p[1 \dots k-i]]$$

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{k-1} t^{k-1}$$

Пример. $p = \text{aabb}aa$
 $c = (1, 0, 0, 0, 1, 1)$
 $c(t) = 1 + t^4 + t^5$

Теорема 2.1.

- $\Sigma, |\Sigma| = m$

S_n — количество слов длины n , не содержащих p

$$S(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \dots$$

$$S(t) = \frac{c(t)}{t^k + (1 - mt)c(t)}$$

Пример. $p = \text{abb}$

$$c(t) = 1$$

$$\frac{1}{t^3 + (1 - 2t) \cdot 1} = \frac{1}{1 - 2t + t^3}$$

2.1 Пентагональная формула Эйлера

$$p_0 \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n \ \dots$$

p_n — количество разбиений n на слагаемые из \mathbb{N} . Порядок не важен

- $U = \{0\}, \ u_1 = 1, \ U(t) = t$
- $N = \text{Seq}^+ U$ =положительно целые числа
- $P = \text{MSet } N$

$$P(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}$$

$$Q(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-t^k)$$

$$R(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+t^k) \quad [t^n]R \rightarrow r_n$$

r_n — количество разбиений на различные слагаемые

$$[t^n]Q = \sum_{\substack{\text{разбиение } n \text{ на} \\ \text{различные слагаемые}}} (-1)^{\text{число слагаемых}}$$

$$q_n = e_n - o_n$$

e_n — число разбиений на четное число различных слагаемых, o_n — число разбиений на нечетное число различных слагаемых,

Теорема 2.2.

$$Q(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(t^{\frac{3k^2-k}{2}} + t^{\frac{3k^2+k}{2}} \right)$$

Лемма 2.

$$n \neq \frac{ek^2 \pm k}{2}, \text{ mo } e_n = o_n$$

$$n = \frac{ek^2 \pm k}{2}, \text{ mo } e_n = o_n + (-1)^k$$