Лекция 5

Ilya Yaroshevskiy

22 марта 2021 г.

Содержание

1 Помеченные КО и экспоненциальные производящие функции

$$a_0\ a_1\ a_2\ \dots\ a_n\ \dots \quad A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + \dots$$

Определение. Экспоненциальная производящая функция:

$$a(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot t + \frac{a_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

Обозначение. Мы будет обозначать ЭПФ так-же большой буквой

Пример. $1, 1, 1, 1, , 1, 1, 1, 1, 1$

ОПФ $\frac{1}{1-t}$

ЭПФ $1 + 1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot t^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot t^n = e^t = \exp(t)$

Пример. $1, 1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots \quad a_n = n!$

ОПФ $1 + t + 2 \cdot t^2 + 6 \cdot t^3 + \dots + n! \cdot t^n + \dots$

ЭПФ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n!} \cdot t^n = \frac{1}{1-t}$

$$A(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot t + \frac{a_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$
$$B(t) = \frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!} \cdot t + \frac{b_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{b_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

Свойство 1.

$$C(t) = A(t) \pm B(t) \quad c_n = a_n \pm b_n$$

Свойство 2.

$$C(t) = a(t) \cdot B(t)$$
$$\frac{C_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}$$
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

Свойство 3.

$$C(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$$
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} + b_0 c_n$$
$$c_n = \frac{a - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k}}{b_0}$$

Далее все производящие функции — экспоненциальные, а объекты помеченые

1.1 Помеченные объекты

Пример. Перестановок. $P_n = n!$ — количество перестановок из n элементов
Пример. Пустые графы. $E_n = 1$ — количество графов с n вершинами
ЭПФ: $\exp(t)$
Пример. Циклы. $C_n = (n-1)!$ — количество циклов из n вершин. Направление обхода фиксировано.
ЭПФ: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot t^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}$

1.2 Операции

1.2.1 Дизъюнктное объединение (сумма)

- A
- B
- $A \cap B = \emptyset$
- $C = A \cup B$

$$c_n = a_n + b_n \quad C(t) = A(t) + B(t)$$

1.2.2 Пара (произведение)

- A
- B
- $C = A \times B$

$$C = \{\langle \underbrace{\quad a \quad}_{k \text{ атомов}}, \underbrace{\quad b \quad}_{n-k \text{ атомов}} \rangle\}$$

Получим последовательность $c_1 c_2 \dots c_n$. Перенумеруем элементы:
Первые k в $d_1 d_2 \dots d_k$, где $d_i = |\{c_j | 1 \le j \le k,\ c_k \le c_i\}|$.
А остальные $c_{k+1} \dots c_n$ в $e_1 \dots e_{n-k}$, где $e_i = |\{c_j | k+1 \le j \le n,\ c_j \le c_{i+k}\}|$.
Пусть $d_i = a_i$, а $e_i = b_i$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \quad C(t) = A(t) \cdot B(t)$$

Пример. Пары перестановок. $C(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Тогда $c_n = (n+1)n!$

1.2.3 Последовательность

$$C = \operatorname{Seq} A = \emptyset + A \times \operatorname{Seq} A$$
$$C(t) = 1 + A(t) \cdot C(t)$$
$$C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$

Пример.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$
- $\operatorname{Seq} U = P$

$$P(t) = \frac{1}{1-t}$$

1.2.4 Множества (Set)

- $\operatorname{Set}_k A$ — множества, содержащие k обхектов

$$B_k = \operatorname{Seq}_k A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k} \quad B_k(t) = A(t)^k$$

$$\operatorname{Set}_k A = \operatorname{Seq}_k A/_\sim$$

$[x_1 x_2 \dots x_k] \sim [y_1 y_2 \dots y_k]$. $\exists$ перестановка $\pi : x_i = y_{\pi[i]}$

$$C_k(t) = \frac{1}{k!} \quad B_k(t) = \frac{A(t)^k}{k!}$$

$$\operatorname{Set} A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{Set}_k A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(t)^k}{k!} = e^{A(t)}$$

Пример.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$

$$\operatorname{Set} U = E \quad E(t) = e^t$$

, где E — пустые графы

Пример. Циклы.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$
- $B = \operatorname{Set} \operatorname{Cyc} U$

$$B(t) = e^{C(t)} = e^{\ln \frac{1}{1-t}} = \frac{1}{1-t}$$

Набор помеченных циклов являеся престановкой

1.2.5 Циклы

- $\operatorname{Cyc}_k A$ — количество циклов длины k

$$C = \operatorname{Cyc}_k A = \operatorname{Seq}_k A/_\sim$$

, где классы эквивалентности с точностью до циклических сдвигов.
$[x_1 \dots x_k] \sim [y_1 \dots y_k]$. $\exists i : \ x_j = y_{(i+j) \mod k+1}$

$$\operatorname{Cyc} U = \ln \frac{1}{1-t}$$

$$C_k(t) = \frac{1}{k} A(t)^k$$

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A(t)^k = \ln \frac{1}{1 - A(t)}$$

$$\operatorname{Set} \operatorname{Cyc} U = P$$

$$\operatorname{Set} \operatorname{Cyc} A \simeq \operatorname{Seq} A$$

1.3 Обобщение

Теорема 1.1 (о подстановке)**.**

- A — помеченные КО — $A(t)$
- B — помеченные КО — $B(t)$

$C = A[B]$ — вместо каждого атома A подставляем КО B, перенумеруем получившиеся атомы произвольным образом

$$C(t) = A(B(t))$$

Пример. $A \times A$ — пара атомов. Их две $B(t) = t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2$. Подставляем $B(A(t)) = A(t)^2$