

КР 2

Ilya Yaroshevskiy

December 24, 2020

Contents

1	Степенные ряды	1
2	Признаки	1
2.1	Дирихле	1
2.2	Абеля	1
2.3	Вейерштрасса	2
3	Непрерывность и дифференцируемость	2
4	Критерий Больцано-Коши	2
5	Разложение в ряд	2
6	Числовые ряды	2

1 Степенные ряды

$\sum a_n(x - x_0)^n$ - сходится при $|x - x_0| < R$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} [= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|]$$

Прим. $\sum e^{-\ln np}$, при $p > 1$ сходится, $p \leq 1$ расходится

2 Признаки

$$\sum a_n(x)b_n(x)$$

2.1 Дирихле

1. Частичные суммы ряда $\sum a_n$ равномерно ограничены
 $\exists C_a \forall N \forall x \in E \left| \sum_{k=1}^N a_k(x) \right| \leq C_a$

2. Фиксируем x $b_n(x)$ монотонна по n
 $b_n(x) \rightarrow 0$

1), 2) \Rightarrow ряд равномерно сходится

2.2 Абеля

1. $\sum a_n(x)$ равномерно сходится

2. $b_n(x)$ монотонна по n
 $b_n(x)$ равномерно ограничена
 $\exists C_b \forall n \forall x |b_n(x)| < C_b$

2.3 Вейерштрасса

$$\sum u_n(x) \quad x \in E$$

1. $\forall x \in E \quad |u_n(x)| \leq C_n$
2. $\sum C_n$ - сходится

3 Непрерывность и дифференцируемость

$$\sum u_n(x) = f(x)$$

1. (a) $u_n(x)$ - непрерывна в x_0
(b) ряд равномерно сходится в $u(x_0)$
Тогда f - непрерывна в x_0
2. $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$
 $\sum u'_n(x)$ - равномерно сходится в $u(x_0)$
Тогда f - дифференцируема в x_0 и $f'(x) = \varphi(x) = \sum u'_n(x)$
3. Ряд $\sum u_n(x)$ - равномерно сходится на $[a, b]$
 $u_n(x)$ - непрерывна на $[a, b]$
Тогда $\int_a^b f(x) = \sum \int_a^b u_n(x) dx$

4 Критерий Больцано-Коши

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad \exists x$$

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| > \varepsilon$$

Если выполняется то ряд сходится не равномерно

Можно выбрать $m = 1$, тогда если $\sup_{x \in E} u_n(x) \not\rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$, то ряд не равномерно сходящийся

5 Разложение в ряд

Известные ряды

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

6 Числовые ряды

1. Прогрессия

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

- 2.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

- 3.

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- 4.

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

- 5.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

6. Телескопические

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$