

Лекция 1

Илья Yaroshevskiy

19 апреля 2021 г.

Содержание

1	Исчисление высказываний	1
1.1	Язык	1
1.2	Мета и предметные	1
1.3	Сокращение записи	1
1.4	Теория моделей	2
1.5	Теория доказательств	2
1.6	Правило Modus Ponens и доказательство	3

1 Исчисление высказываний

1.1 Язык

1. Пропозициональные переменные
 A'_i — большая буква начала латинского алфавита
2. Связки
 $\underbrace{\alpha}_{\text{метавыражение}}, \beta$ — высказывания
Тогда $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg \alpha)$ — высказывания

1.2 Мета и предметные

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi, \dots$ — метавыражения для выражений
- X, Y, Z — метавыражения для предметных переменных

Метавыражение: $\alpha \rightarrow \beta$

Предметное выражение: $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (заменяли α на A , β на $(A \rightarrow A)$)

Пример. Черным — предметные выражения, Синим — метавыражения

$$(\text{синий } X \rightarrow \text{синий } Y)[\text{синий } X := \text{синий } A, \text{синий } Y := \text{синий } B] \equiv A \rightarrow B$$

$$(\text{синий } \alpha \rightarrow (A \rightarrow \text{синий } X))[\text{синий } \alpha := \text{синий } A, \text{синий } X := \text{синий } B] \equiv A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$(\text{синий } \alpha \rightarrow (A \rightarrow \text{синий } X))[\text{синий } \alpha := (\text{синий } A \rightarrow \text{синий } P), \text{синий } X := \text{синий } B] \equiv (A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1.3 Сокращение записи

- $\vee, \&, \neg$ — скобки слева направо (лево-ассоциативная)
- \rightarrow — правоассоциативная
- Приоритет по возрастанию: $\rightarrow, \vee, \&, \neg$

Пример. Расставление скобок

$$(A \rightarrow ((B \& C) \rightarrow D))$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

1.4 Теория моделей

- \mathcal{P} — множество предметных переменных
- $\llbracket \cdot \rrbracket : \mathcal{T} \rightarrow V$, где \mathcal{T} — множество высказываний, $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$ — множество истинностных значений

1. $\llbracket x \rrbracket : \mathcal{P} \rightarrow V$ — задается при оценке $\llbracket \cdot \rrbracket^{A:=v_1, B:=v_2}$:

- $\mathcal{P} = v_1$
- $\mathcal{P} = v_2$

2. $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \overset{\text{определенно естественным образом}}{\star} \llbracket \beta \rrbracket$, где $\star \in [\&, \vee, \neg, \rightarrow]$

Пример.

$$\llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = \llbracket A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} \rightarrow \llbracket A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = \text{И} \rightarrow \text{И} = \text{И}$$

Также можно записать так:

$$\llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = f_{\rightarrow}(\llbracket A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}, \llbracket A \rrbracket^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}) = f_{\rightarrow}(\text{И}, \text{И}) = \text{И}$$

, где f_{\rightarrow} определена так:

a	b	f_{\rightarrow}
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

1.5 Теория доказательств

Определение. Схема высказывания — строка соответствующая определению высказывания, с:

- метаварiableными α, β, \dots

Определение. Аксиома — высказывания:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
3. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
5. $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

#+begin_definition org

1.6 Правило Modus Ponens и доказательство

Определение. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где α_i :

- аксиома
- существует $k, l < i$, что $\alpha_k = \alpha_l \rightarrow \alpha$

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Пример. $\vdash A \rightarrow A$

1	$A \rightarrow A \rightarrow A$	(схема аксиом 1)
2	$A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$	(схема аксиом 1)
3	$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$	(схема аксиом 2)
4	$(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$	(М.Р. 1 и 3)
5	$A \rightarrow A$	(М.Р. 2 и 4)

Определение. Доказательством высказывания β — список высказываний $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — доказательство
- $\alpha_n \equiv \beta$