Лекция 12

Ilya Yaroshevskiy

January 13, 2021

Contents

1 Экспонента

Теорема 1. $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$

Proof.

$$\exp(z)\cdot\exp(w) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!} = \sum c_n \tag{1}$$

$$\text{, где } c_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\cdot n! = \frac{(z+w)^n}{n!} \tag{2}$$

$$\sum c_n = \sum\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w) \tag{3}$$

□

Следствие 1. $\forall z\in\mathbb{C}\quad \exp(z)\neq 0$

4. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

   Proof. $\overline{w_1+w_2} = \overline{w_1}+\overline{w_2}$
   Потому что коэффицент вещественный:

$$\overline{\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(\overline{z})^n}{n!} \tag{4}$$

□

1.1 Замечания о тригонометрических функциях

Пусть $\exp(ix) = \text{Cos}(x) + i\text{Sin}(x),\ x\in\mathbb{R}$
Тогда $\exp(-ix) = \text{Cos}(x) - i\text{Sin}(x)$

$$\text{Cos}(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}\quad \text{Sin}(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-iz)}{2i} \tag{5}$$

Следовательно:

$$\text{Cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\quad \text{Sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{6}$$

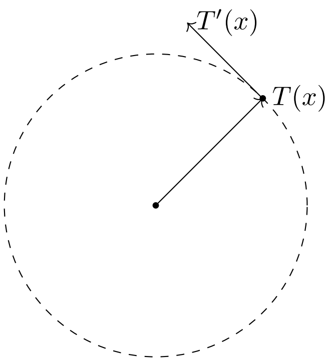
Пусть $T(x) = \exp(ix)$ Тогда $T(x+y) = T(x)T(y)$

$$\text{Cos}(x+y) + i\text{Sin}(x+y) = (\text{Cos}(x)+i\text{Sin}(x))(\text{Cos}(y)+i\text{Sin}(y)) \tag{7}$$

$\mathrm{Cos}(x+y) = \mathrm{Cos}(x)\mathrm{Cos}(y) - \mathrm{Sin}(x)\mathrm{Sin}(y)$
$\mathrm{Sin}(x+y) = \mathrm{Cos}(x)\mathrm{Sin}(y) + \mathrm{Sin}(x)\mathrm{Cos}(y)$

$$|T(x)|^2 = T(x) \cdot \overline{T(x)} = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(0) = 1 \tag{8}$$

т.е. $(\mathrm{Cos}(x), \mathrm{Sin}(x))$ — точка на единичной окружности
$T' = iT$, т.е. $x \mapsto T(x)$ — движение по единичной окружности с единичным вектором скорости, вектор скорости $\perp$ радиус-вектору



2 Ряды Тейлора

Все вещественно

Определение. f — **разлагается в степенной ряд** в окрестности x_0 если:
$\exists \varepsilon > 0\ \exists C_n$ — вещественная последовательность $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n$ (*)

Примечание. Тогда $f \in C^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ по следствию

Теорема 2 (единственности)**.** f — разлагается в сепенной ряд в окресности x_0
Тогда разложение единственно

Proof. выполняется (*)

$$c_0 = f(x_0), \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nC_n(x - x_0)^{n-1} \tag{9}$$

$$c_1 = f'(x_0), \quad f''(x) = \dots \tag{10}$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)C_n(x - x_0)^{n-k} \tag{11}$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{12}$$

□

Определение. Ряд Тейлора функции f в точке x_0 — формальный ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Примечание. Ряд Тейлора может оказаться сходящимся только в точке x_0

Примечание. Ряд Тейлора может сходится *не туда*

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Тогда $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
при $x = 0 \quad \forall n\ f^{(n)}(0) = 0$ — мы это доказывали $\Rightarrow$ Ряд Тейлора в $x_0 = 0$ тождественно равен нулю

3 Теория меры

Определение. σ - алгебра $\mathfrak{A} \subset 2^X$

1. $\mathfrak{A}$ — алгебра
2. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

Примечание. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$
$X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$

Примечание. $E \in \underset{\sigma\text{-алгебра}}{\mathfrak{A}}$ Тогда $\mathfrak{A}_E := \{A \in \mathfrak{A} \big| A \subset R\}$ — σ - алгебра подмножеств множества E

Пример. 2^X

Пример. X - бесконечное множество $\mathfrak{A}$ = не более чем счетные множества и их дополнения
Аналогично примеру 2 для алгебр

Пример. $X = \mathbb{R}^2$ $\mathfrak{A}$ — ограниченое множество и их дополнение — не σ-алгебра

3.1 Объем

Определение. $\mu : \underset{\text{полукольцо}}{\mathcal{P}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **аддитивная функция множества**, если:

1. μ — не должна принимать значение $\pm\infty$ одновременно(если принимает одно на каком либо множестве, не должно принимать другое на любом другом множестве)
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ — дизъюнктны. Если $A = \bigsqcup A_i \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

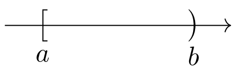
Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ — **объем**, если $\mu \geq 0$ и μ — аддитивная

Примечание. Если $X \in \mathcal{P},\ \mu(X) < +\infty$, то говорят, что μ — конечный объем

Примечание. μ — задано на $\mathfrak{A}$: свойство 3 можно заменить на 3'
3'. $\forall A, B \in \mathfrak{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) = \mu(B)$

Обозначение. $\mu(A) = \mu A$

Пример. $\mathcal{P}^1$ — ячейки в $\mathbb{R}$, $\mu[a, b) = b - a,\ b \geq a$



$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
$[a, b) = \bigsqcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i)$
$\sum_{i=1}^{n} \mu[x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underset{\text{телескоп.}}{=\!=\!=\!=} x_n - x_0 = b - a = \mu[a, b)$

Пример. Классический объем в $\mathbb{R}^m$ $\quad \mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$
$\mu[a, b) = \prod\limits_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$
μ не является конечным объемом

Определение. $A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$ — **монотонность объема**

Теорема 3 (о свойствах объема)**.** $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем
Тогда он имеет свойства:

1. Уиленная монотонность
   $\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}_{\text{дизъюнктны}} \in \mathcal{P} \quad \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \quad \sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A$

2. Конечная полуаддитивность
   $\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \mu A \leq \sum_{i=1}^n A_i$

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ пусть еще известно: $A \setminus B \in \mathcal{P}$, μB — конечный
   Тогда $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

Примечание.

- в пунктах 1 и 2 не предполагается, что $\bigcup A_i \in P$
- в пункте 3 если $\mathcal{P}$ — алгебра то условие $A \backslash B \in P$ можно убрать(оно выполняется автоматически)

Proof.

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца: $A \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigsqcup_{l=1}^S B_l$ — доказано ранее
   таким образом $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$ — дизъюнктное объединение конечного числа множеств
   $\mu A = \sum \mu A_i + \sum B_l \geq \sum \mu A_i$

2. объем $\Rightarrow$ конечная полуаддитивность

$$A \subset \bigcup_{\text{кон.}} A_k \mu A \leq \sum \mu A_k \quad (A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}) \tag{13}$$

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \quad A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k \tag{14}$$

   Сделаем эти множества дизъюнктными

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i) \quad A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k \tag{15}$$

   Но эти C_k вообще говоря $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i) = \bigsqcup_i D_{kj}, \; D_{kj} \in \mathcal{P} \tag{16}$$

   Тогда:

$$A = \bigsqcup_{k,j} D_{kj} \qquad \mu A = \sum \mu D_{kj} \tag{17}$$

   При этом $\forall k$:

$$\sum_j \mu D_{kj} = \mu C_k \leq \mu A_k \tag{18}$$

   Неравенство в (18) в силу монотонности объема(п.1 теоремы). Итого

$$\mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{kj} = \sum \mu C_k \leq \sum \mu A_k \tag{19}$$

3. (a) $B \subset A \quad A = B \sqcup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$
   (b) $B \not\subset A \quad A \setminus B = A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{P}} \quad \mu(A \setminus B) \underset{\text{(a)}}{=\!=} \mu A - \mu(A \cap B) \underset{\text{монот.}}{\geq} \mu A - \mu B$

$\square$