Лекция 4

Ilya Yaroshevskiy

24 апреля 2021 г.

Содержание

1 Схема Бернулли

Определение. Схемой Бернулли называется серия независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, каждое интересующее нас событие либо произошло либо не произошло.

- n — число испытаний
- p — вероятность события A при одном испытании
- $q = 1 - p$
- ν_k — число успехов при k испытаниях
- $P_n(k) = P(\nu_k = k)$

Теорема 1.1. Вероятность того что при n испытаниях произойдет ровно k успехов равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Доказательство. Рассмотрим один из исходов благоприятных событию A: $A_1 = \underbrace{\text{УУ}\dots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{НН}\dots\text{Н}}_{n-k}$ — независимые события

- $P(\text{У}) = p$
- $P(\text{Н}) = q$

$$P(A_1) = \underbrace{pp\dots p}_{k}\underbrace{qq\dots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

□

Задача 1. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Найти вероятность того что при 5 выстрелах будут 3 попадания

Решение.

- $n = 5$
- $p = 0.8$
- $q = 0.2$
- $k = 3$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

1.1 Наиболее вероятное число успехов

Выясним при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k-1$ будет не больше чем вероятность k успехов

$$P_n(k-1) \leq P_n(k)$$

$$C_n^{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1} \leq C_n^k p^k qn-k$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}q \leq \frac{n!}{(k!(n-k)!)}p$$

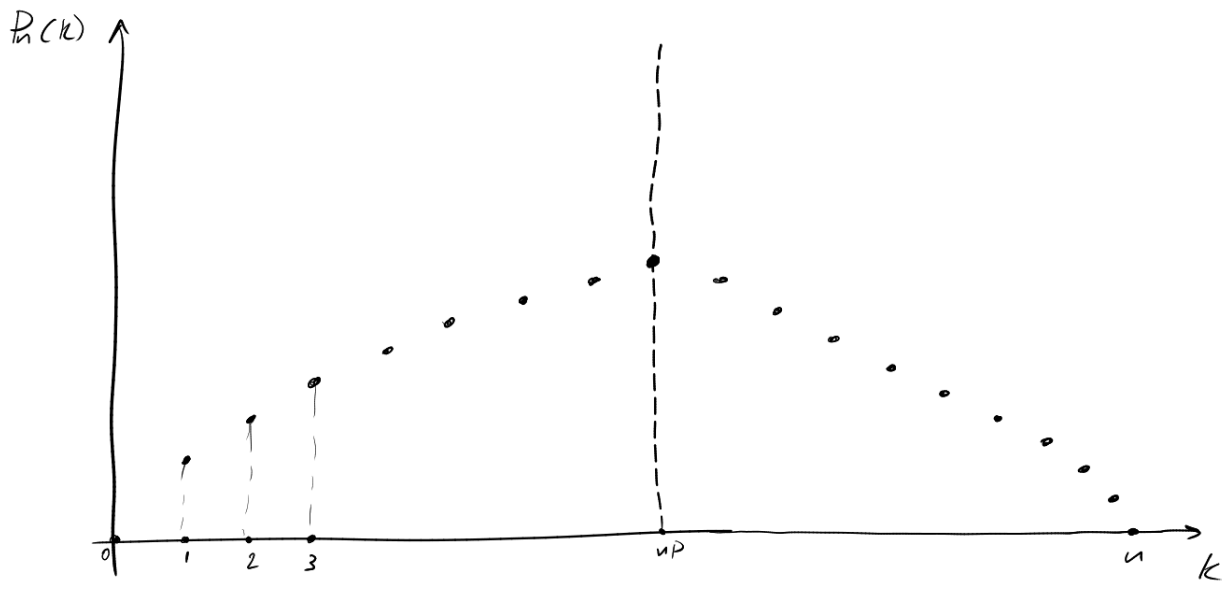
$$\frac{k!}{(k-1)!}q \leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!}p$$

$$k(1-p) \leq (n-k+1)p$$

$$k \leq np+p$$

Так как k — целое то выполняется: $np+p-1 \leq k \leq np+p$
Рассмотрим три ситуации:

1. np — целое. Тогда $np+p$ — целое и $k = np$ — наиболее вероятное число исходов
2. $np+p$ — не целое. Тогда $k = [np+p]$
3. $np+p$ — целое. Тогда $np+p-1$ — целое и $P_n(k-1) = P_n(k)$ и имеем два наиболее вероятных числа успехов:
   - $k = np+p$
   - $k = np+p-1$



1.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли

Определение. Локальная формула Муавра-Лапласа. Применяем когда требуется найти вероятность точного числа успехов.

$$P_n(\nu_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ — функция Гаусса.
Свойства функции Гаусса $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ — четная
2. при $x > 5,\ \varphi(x) \approx 0$

Определение. Интегральная формула Лапласа. Применяем если число успехов лежит в неком диапазоне.

$$P_n(k_1 \le \nu_n \le k_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$$

, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

— функция Лапласа

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства $\Phi(x)$:

1. $\Phi(-x) = \Phi(x)$ — нечетная
2. при $x > 5,\ \Phi(x) \approx 0.5$

Примечание. В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевается несколько иная функция, чаще всего:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{z^2} 2dz$$

$$F_0(x) = 0.5 + \Phi(x) \text{ или } \Phi(x) = F_0(x) - 0.5$$

Примечание. Формулу применяем при $n \ge 100$ и $p, q \ge 0.1$

Задача 2. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того что

1. произошло ровно 330 попаданий
2. произошло от 312 до 336 попаданий

Решение.

1. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 1.25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{8} \cdot \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

2. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k_1 = 312, k_2 = 336$

$$x_1 = \frac{312 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2$$

$$P_{400}(312 \le \nu_n \le 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8185$$

2 Статистическое определение вероятности

- n_A — число появления события A при n испытаниях
- $\frac{n_A}{n}$ — частота события A

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}, \text{при } n \to \infty$$

2.1 Вероятность отклонения относительной частоты

]p — вероятность события A, $\frac{n_A}{n}$ — частота A
По интегральной формуле Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=P(-\varepsilon\leq\frac{n_A}{n}-p\leq\varepsilon)=P(-n\varepsilon\leq n_a-np\leq n\varepsilon)=P(np-n\varepsilon\leq n_A\leq np+n)$$

$$x_1=\frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}=-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2=\frac{np+n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}=\frac{n}{\sqrt{npq}}$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

2.2 Закон больших чисел Бернулли

Более точно последняя формула выглядит так:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

при $n\to\infty$ $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\to\infty$ и $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)\to 0.5$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\to 2\cdot 0.5=1$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=1$$

— закон больших чисел Бернулли
То есть при большом числе испытаний, будет близко к реальной вероятности