Лекция 10

Ilya Yaroshevskiy

8 апреля 2021 г.

Содержание

1 Разреженный формат

1.1 Строчно столбцовый формат

1. Вещественный массив $di[n]$ — диагональные элементы
2. Вещественный массив al, au — по строкам и стобцам соответсвенно
3. Целочисленный массив ja — содержит номера столбцов (строк) хранимых внедиагональных элементов нижнего(верхнего) треугольника матрицы. $j \le m$, где m — размерность массивов ja, al, au, $ja[j]$ — номер столбца для $al[j]$, или номер строки для $au[j]$
4. Целочисленный массив ia, $ia[k]$ — равен индексу(в нумерации с 1) с которого начинается k-той строки(столбца)

Размерность ja, al, au: $ia[n+1]-1$. $ia[i+1]-ia[i]$ — количество хранимых внедиагональных элементов i-той строки(столбца) нижнего(верхнего) треугольника. ia и ja — портрет матрицы.

Пример.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & & & & & & & \\
0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & & \Large 0 & & \\
0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & a_{36} & & & \\
0 & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} & & \\
 & & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & a_{58} & a_{59} \\
 & & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} & 0 & a_{68} & 0 \\
 & & & a_{74} & 0 & 0 & a_{77} & 0 & a_{79} \\
 & \Large 0 & & & a_{85} & a_{86} & 0 & a_{88} & 0 \\
 & & & & a_{95} & 0 & a_{97} & 0 & a_{99}
\end{array}$$

$$di = [a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66}, a_{77}, a_{88}, a_{99}]$$

$$ia = [1, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12]$$

$$ja = [2, 2, 3, 4, 3, 5, 4, 5, 6, 5, 7]$$

$$al = [a_{32}, a_{42}, a_{53}, a_{54}, a_{63}, a_{65}, a_{74}, a_{85}, a_{86}, a_{95}, a_{97}]$$

$$au = [a_{23}, a_{24}, a_{35}, a_{45}, a_{36}, a_{56}, a_{47}, a_{58}, a_{68}, a_{59}, a_{79}]$$

Для шестой строчки: $ia[6] = 5$ — начало шестой строчки в массиве ja и al. $ia[6+1]-ia[6] = 7-5 = 2$ — количество элементов.

1. $ja[ia[6]] = ja[5] = 3$
2. $ja[ia[6]+1] = ja[6] = 5$

1.2 Решение СЛАУ. Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$Ax = b$$

- $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — вещественные числа
- $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ Верхний индекс обозначает этап.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1 \quad i, j = \overline{2, n}$$

Примечание. $a_{11} \neq 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + a_{n4}^{(2)}x_4 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)} \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}b_2^{(1)}$$

$n-1$ этап:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{kj}^{(k-1)} \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}b_k^{(k-1)} \qquad k \in \overline{1, n};\ i, j \in \overline{k+1, n}$$

1.3 Обратный ход Гаусса

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$\vdots$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3 - \dots - a_{2n}^{(1)}x_n}{a_{22}^{(1)}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}^{(k-1)} x_i}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad k \in \overline{n,1}$$

$\sum_j^n = 0$, если $j > n$

Алгоритм 1 метод Гаусса

для $k = 1, \ldots, n-1$ **делать**
  для $i = k+1, \ldots, n$ **делать**
    $t_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    $b_i = b_i - t_{ik} b_k$
    для $j = k+1, \ldots, n$ **делать**
      $a_{ij} = a_{ij} - t_{ik} a_{kj}$
    конец для
  конец для
конец для
$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$
для $k = n-1, \ldots, 1$ **делать**
  $x_k = \frac{(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j)}{a_{kk}}$
конец для

Модификация с постолбцовым выбором глваного элемента

Алгоритм 2 Модификация алгоритма Гаусса

$m: \ m \geq k, \ |a_{mk}| = \max_{i \geq k}\{|a_{ik}|\}$
если $a_{mk} = 0$ **тогда**
  Нет однозначного решения. Завершить алгоритм
иначе
  для $j = k, \ldots, n$ **делать**
    Поменять местами b_x и b_m
    Поменять местами a_{kj} и a_{mj}
  конец для
конец если