Лекция 12

Ilya Yaroshevskiy

14 апреля 2021 г.

Содержание

1 Прямые методы решения СЛАУ

Виды разложения матрицы A:

- LU — L — нижнеругольная матрциа, U — верхнетреугольная матрица
- LL^T — метод квадратного корня
- LDL^T, $L_{ii} = 1$
- D — диагональная матрица

$$A = LU \tag{1}$$
$$LUx = b \quad y = Ux$$
$$Ly = b \tag{2}$$

1. $A \implies L$ и U
2. решить 2 — прямой ход: y
3. $Ux = y$ — обратный ход

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \dots \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \dots \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \dots \\ 0 & 1 & U_{23} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{3}$$

Красным помечено то, что мы находим на текущем шаге

- $A_{11} = L_{11}$
- $A_{21} = L_{21}$
- $A_{12} = L_{11} \cdot U_{12}$
- $A_{22} = L_{21} \cdot U_{12} + L_{22}$
- $A_{31} = L_{31}$
- $A_{32} = L_{31} \cdot U_{12} + L_{32}$
- $A_{13} = L_{11} \cdot U_{13}$
- $A_{23} = L_{21} \cdot U_{13} + L_{22} \cdot U_{23}$

- $A_{33} = L_{31} \cdot U_{13} + L_{32} \cdot U_{23} + L_{33}$

Алгоритм 1 Алгоритм разложения

$A_{11} = L_{11}$
для $i \leftarrow 2$ **до** n **делать**
  для $j \leftarrow 1$ **до** $i-1$ **делать**
    $L_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \cdot U_{kj}$
    $U_{ji} = \frac{1}{L_{jj}} \left[A_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk} \cdot U_{ki} \right]$
  конец для
  $L_{ii} = A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \cdot U_{ki}$
конец для

1.1 Близкие к нулю главные элементы

ЭВМ: 5-разрядная арифметик с плавающей точки

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -1.0 \cdot 10^{-3} & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$6.001 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3} = 1.50025 \cdot 10^4 \approx 1.5003 \cdot 10^4$$

$$1.5005 \cdot 10^4 \cdot x_3 = 1.5004 \cdot 10^4 \implies x_3 = \frac{1.5004 \cdot 10^4}{1.5005 \cdot 10^4} = 0.99993$$

$$-1.0 \cdot 10^{-3} \cdot x_2 + 6 \cdot 0.99993 = 6.0001 \implies x_2 = \frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{-1.0 \cdot 10^{-3}} = -1.5$$

$$10 \cdot x_1 + (-7) \cdot (-1.5) = 7 \implies x_1 = -0.35$$

$$x = (-0.35, -1.50, 0.99993)$$

Хотя правильный ответ: $x^* = (0, -1, 1)$

1.2 Вектор ошибки и невязка

$$\begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.457 & 0.330 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.127 \end{pmatrix}$$

ЭВМ: трехразрядная десятичная арифметика

$$\frac{0.457}{0.780} = 0.586$$

$$\begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0 & 0.0000820 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ -0.000162 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{-0.00162}{0.0000820} = -1.98$$

$$x_1 = \frac{0.217 - 0.563 \cdot x_2}{0.780} = 1.71$$

$$x = (1.71, -1.98)^T$$

Определение. Невязка $\Gamma = b - Ax$. Если решение точное, то вектор невязки близок к 0

$$\Gamma = (-0.00206, -0.00107)^T$$

Точным решением является вектор $x^* = (1, -1)^T$
Величина ошибки решения: $\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|}$

Определение. $\operatorname{cond}(A)$ — число обусловленности A. Отношение максимального и минимального собственного значения матрицы

Величина ошибки в решении приближенно равна величине решения $\times \operatorname{cond}(A) \times \varepsilon_{\text{маш.}}$
Пример. $\operatorname{cond}(A) = 10^6,\ \varepsilon = 10^{-8}$. В решении — 3 верных разряда

1.3 Векторные нормы

1. 2-норма (евклидова) Доделать
2. 1-норма (манхэтенское расстояние)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3. max-норма (∞-норма)

$$\|x\|_\infty = \text{Доделать}$$

$$\|x\| > 0, \text{ если } x \neq 0 \ \|0\| = 0$$

$$\|cx\| = |c| \cdot \|x\| \ \forall c$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$Ax = b$$

$$M = \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies \|Ax\| \leq M \cdot \|x\|$$

$$m = \min_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies \|Ax\| \geq m \cdot \|x\|$$

$\frac{M}{m}$ — число обусловленности матрицы A

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

Будем считать, что Δb — ошибка в b, Δx — ошибка в x. Поскольку $A(\Delta x) = \Delta b$, то можно сказать, что:

$$\|Ax\| = \|b\| \leq M \cdot \|x\|$$

$$\|A\Delta x\| = \|\Delta b\| \geq m \cdot \|\Delta x\|$$

При $M \neq 0$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

1.3.1 Свойства числа обусловленности

$$M \geq m$$

Свойство 1. $\operatorname{cond}(A) \geq 1$
P — *матрица перестановок,* $\operatorname{cond}(P) = 1$
$\operatorname{cond}(I) = 1$

Свойство 2. $\operatorname{cond}(c \cdot A) = \operatorname{cond}(A)$

Свойство 3. D — *диагональная*

$$\operatorname{cond}(D) = \frac{\max |d_{ii}|}{\min |d_{ii}|}$$

Пример. $D = \operatorname{diag}(0.1),\ n = 100$. $\det D = 10^{-100}$ — малое число

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{0.1}{0.1} = 1$$