Лекция 5

Ilya Yaroshevskiy

12 марта 2021 г.

Содержание

1 Программы

программа(функция)

- $P : \alpha \to \beta$ — берет α, возвращает β
- P — доказательство, что из α следует β

  Пример.

```
f a = a
```

$f : A \to A$ — f доказывает что, из A следует A

логическок исчесления	Типизированное λ-исчесление
логическая формула	тип
доказательство	значение
доказуемая формула	обитаемый тип(имеет хотя бы один экземпляр)
$\to$	функция
&	упорядоченная пара
$\vee$	алг. тип(тип-сумма)

Пример. 5 доказывает Int

Пример. Список:

```
Type list = Record
   Nul: boolean;
   case Nul of
     True  : ;
     False : Next: ^list;
end;
```

```
struct list {
        *list next;
};
```

Если `next == NULL` — то конец

Пример. Дерево:

```c
struct tree {
        tree* left;
        tree* right;
        int value;
};
```

Определение. Отмеченное(дизъюнктное) объединение множеств:

- A, B — множества
- $A \sqcup B = \{\langle ``A", a\rangle | a \in A\} \cup \{\langle ``B", a\rangle | b \in B\}$

Пусть $S \in A \sqcup B$. Мы знаем откуда S

```haskell
data List a = Nil | Cons a (List a)
example = Cons 1 (Cons 2 (Cons 3 Nil)) -- [1; 2; 3]
```

```c
union {
        int a;
        char b;
};
```

Пример.

$$\frac{\Gamma \vdash \overset{\text{Nil}}{\alpha} \to \gamma \quad \Gamma \vdash \overset{\text{Cons}}{\beta} \to \gamma \quad \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \underset{\text{int}}{\gamma}}$$

```ocaml
let rec count l (* α + β *) =
match l with
   | Nil (* α *) -> 0 (* α → int *)
   | Cons(hd, tl) (* β *) -> 1 + count tl (* β → int *)
```

1.1 Исчесление предикатов

Определение. Язык исчисление предикатов

- логические выражения "предикаты"/"формулы"
- предметные выражния "термы"

Θ — метаперменные для термов
Термы:

- Атомы:
  - $a, b, c, d, \ldots$ — предметные переменные
  - x, y, z — метапеременные для предметных перменных
- Функциональные Символы
  - f, g, h — Функциональные символы(метаперемнные)
  - $f(\Theta_1, \ldots \Theta_n)$ — применение функциональных символов
- Логические выражения:
  Если $n = 0$, будем писать f, g — без скобок
  - P — метаперменные для предикатных символов
  - A, B, C — предикатный символ
  - $P(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ — применение предикатных символов
  - $\&, \vee, \neg, \to$ — Связки
  - $\forall x.\varphi$ и $\exists x.\varphi$ — кванторы
    «квантор> <переменная>.<выражение>"

1.1.1 Сокращение записи

И.В + жадность $\forall, \exists$
Метавыражение:

$$\forall x.(P(x)\&(\forall y.P(y)))$$

Квантор съедает все что дают, т.е. имеет минимальный приоритет.
Правильный вариант(настоящее выражние):

$$\forall a.B(A)\&\forall b.B(b)$$

1.2 Теория моделей

Оценка формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множетво
2. Кажодму $f_i(x_1, \dots, x_n)$ сопоставим функцию $D^n \to D$
3. Каждому $P_j(x_1, \dots, x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^2 \to V$
4. Каждой x_i сопоставим элемент из D

Пример.

$$\forall x.\forall y.\ E(x, y)$$

Чтобы определить формулу сначала определим $D = \mathbb{N}$

$$E(x, y) = \begin{cases} \text{И} & , x = y \\ \text{Л} & , x \neq y \end{cases}$$

- $[\![x]\!] = f_{x_i}$
- $[\![\alpha \star \beta]\!]$ — смотри ИИВ
- $[\![P_i(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{P_i}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $[\![f_j(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{f_j}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $$[\![\forall x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при всех } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$
- $$[\![\exists x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при некотором } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

$$[\![\forall x.\forall y.E(x, y)]\!] = \text{Л}$$

т.к. $[\![E(x, y)]\!]^{x:=1,\ y:=2} = \text{Л}$

Пример.

$$\forall \boxed{\varepsilon > \boxed{0}}\ \exists N\ \forall \boxed{\boxed{\text{n}} > \boxed{\text{N}}}\quad \boxed{\boxed{|\text{a}_n - a|} < \boxed{\varepsilon}}$$

Синим отмечены функциональные конструкции(термы), зеленым предикатные

$$\forall \varepsilon.(\varepsilon > 0) \to \exists N.\forall n.(n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначим:

- $(>)(a, b) = G(a, b)$ — предикат
- $|\bullet|(a) = m_{|}(a)$
- $(-)(a, b) = m_{-}(a, b)$
- $0() = m_0$
- $a_\bullet(n) = m_a(n)$

$$\forall e.\ \boxed{\text{G}(\boxed{\text{e}}, \boxed{\text{m}_0})} \to \exists n_0.\forall n.\ \boxed{\text{G}(\text{n}, \text{n}_0)} \to \boxed{\text{G}\Big(\text{e}, \boxed{\text{m}_{|}\Big(m_{-}\big(m_a(n), a\big)\Big)}\Big)}$$

1.3 Теория доказательств

Все аксиомы И.В + М.Р.

(схема 11) $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \Theta]$

(схема 12) $\varphi[x := \Theta] \to \exists x.\varphi$

Если Θ свободен для подстановки вместо x в φ.

Определение. **Свободен для подстановки** — никакое свободное вхождение x в Θ не станет связанным

Пример.

```
int y;
int f(int x) {
        x = y;
}
```

Заменим `y := x`. Код сломается, т.к. у нас нет свобод для подстановки

(Правило $\forall$)

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi}$$

(Правило $\exists$)

$$\frac{\psi \to \varphi}{\exists x.\psi \to \varphi}$$

В обоих правилах x не входит свободно в φ

Пример.

$$\frac{x = 5 \to x^2 = 25}{x = 5 \to \forall x.x^2 = 25}$$

Между x и x^2 была связь, мы ее разрушили. Нарушено ограничение

Пример.

$$\exists y.x = y$$

$$\forall x.\exists y.x = y \to \exists y.y + 1 = y$$

Делаем замену `x := y+1`. Нарушено требование свобод для подстановки. y входит в область действия квантора $\exists$ и поэтому свободная переменная x стала связанная.