Матан КР 1

Ilya Yaroshevskiy

December 29, 2020

Contents

1 Пределы

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$, $\forall U(L)\ \exists w((a, b))\ \forall x \in w\ f(x) \in U(L)$

- Повторный $\lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f \stackrel{?}{=} L$
- По направлению $\lim\limits_{r\to 0} f(a + r\cos\varphi, b + r\sin\varphi)$
- Вдоль кривой $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t), y(t))$
- Двойной $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$, $\forall U(L)\ \exists U(a), V(b)\ \forall x \in \dot{U}(a)\ y \in \dot{V}(b)\ f(x, y) \in U(L)$

2 Дифференцирование

$df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy$
$u(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$
$du = f'_I dg + f'_{II} dh$

3 Тейлор

$f(a + h) = f(a) + df(a, h) + \frac{d^2 f(a,g)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(a,h)}{n!} + d^{n+1} f(a + \Theta h, h) * \frac{1}{(n+1)!}$
Че такое h? Вместо dx ставим h_1, вместо dy h_2

4 Замена переменных

$z'_x = xz'_y$
$x = x(u, v)$
$y = y(u, v)$
Пересчитать
$\tilde{z}(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$

$\tilde{z}'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u$
$\tilde{z}'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v$
Из этой системы находим $z'_x,\ z'_y$
Обратная задача:
Можно свести к предыдущей, выразив x и y
$z'_x \to ?$
$u = u(x, y)$
$v = v(x, y)$
$z(x, y) = \tilde{z}(u(x, y), v(x, y))$
$z'_x = \tilde{z}'_u u'_x + \tilde{z}'_v v'_x$ - Ответ(но кривой)
Другая задача
z'_x
$x = x(u, v, w)$
$y = y(u, v, w)$
$z = \tilde{z}(u, v, w)$
w - функция
$z(x(u, v, w), y(u, v, w)) = \tilde{z}(u, v, w)$
$z'_x(x'_u + x'_w w'_u) + z'_y(y'_u + y'_w w'_u) = \tilde{z}'_u + \tilde{z}'_w w'_u$
$z'_x(x'_v + x'_w w'_v) + z'_y(y'_v + y'_w w'_v) = \tilde{z}'_v + \tilde{z}'_w w'_v$
Из системы находим z'_x

5 Эктремумы

Mathprofi

5.1 Функция вида $z = f(x, y)$

5.1.1 Необходимое условие экстремума

Точка M_0 - подозрительная(критическая, стационарная) на экстремум если $f'_x(M_0) = 0, f'_y(M_0) = 0$
Находим:

$$A = f''_{xx}(M_0)$$
$$B = f''_{xy}(M_0)$$
$$C = f''_{yy}(M_0)$$

1. $AC - B^2 > 0$ - экстремум
   (a) $A > 0$ - минимум
   (b) $A < 0$ - максимум
2. $AC - B^2 < 0$ - нет экстремума
3. $AC - B^2 = 0$ - доп. исследование

6 Геометрия

Демидович стр. 360

1. Параметрическое $x = x(t)$
   $y = y(t)$
   $z = z(t)$
   $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} (t - t_0)$
   $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ - направление касательной
   $\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(y_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$ - уравнение касательной прямой
   $x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$ - нормальная плоскость

2. Поверхность $x = x(u, v)$
$y = y(u, v)$
$z = z(u, v)$
$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u_0,v_0) \\ y(u_0,v_0) \\ z(u_0,v_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} (u - u_0) + \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} (v - v_0)$
$\vec{n} = \begin{pmatrix} y'_u z'_v - z'_u y'_v \\ z'_u x'_v - x'_u z'_v \\ x'_u y'_v - x'_v y'_u \end{pmatrix}$ - вектор нормали
$n_1(x - x(u_0, v_0)) + n_2(y - y(u_0, v_0)) + n_3(z - z(u_0, v_0)) = 0$ - касательная плоскость

3. $F(x, y, z) = 0$
$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$
$\vec{n} = \begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \end{pmatrix}$ - Вектор нормали

4. $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0 \\ G'_x(x - x_0) + G'_y(y - y_0) + G'_z(z - z_0) = 0 \end{cases}$ - это уранение прямой