Лекция 7

Ilya Yaroshevskiy

2 апреля 2021 г.

Содержание

- $\Gamma \vDash \alpha$ — α следует из Γ при всех оценках, что все $\gamma \in \Gamma \quad [\![\gamma]\!] = \text{И}$, выполнено $[\![\alpha]\!] = \text{И}$
- $x = 0 \vdash \forall x.x = 0$
- $x = 0 \nvDash \forall x.x = 0$

Определение (Условие для корректности)**.** Правила для кванторов по свободным перменным из Γ запрещены.
Тогда $\Gamma \vdash \alpha$ влечет $\Gamma \vDash \alpha$

1 Полнота исчесления предикатов

Определение. Γ — **непротиворечивое** множество формул, если $\Gamma \nvdash \alpha \& \neg\alpha$ ни при каком α

Пример. Непротиворечивые:

- $\emptyset$
- $A \vee \neg A$

Противоречивые:

- $A \& \neg A$

Примечание. Непротиворечивое множество замкнутых(не имеющая сводных перменных) бескванторных формул

Пример. $\{A\}, \{0 = 0\}$

Определение. Моделью для непротиворечивого множества замкнутых бескванторных формул Γ — такая модель, что каждая формула из Γ оценивается в И

Определение. Полное непротиворечивое замкнутых бескванторных формул — такое, что для каждой замкнутой бескванторной формулы α: либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$

Обозначение. з.б. — замкнутая бескванторная. **непр. мн** — непротиворечивое множество

Теорема 1.1. Если Γ — непротиворечивое множество з.б. фомул и α — з.б. формула.
То либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ — непр. мн. з.б. формул

Доказательство. Пусть и $\Gamma \cup \{\alpha\}$ и $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ Доделать $\square$

Теорема 1.2. Если Γ — непр. мн. з.б. фомул, то можно построить Δ — полное непр. мн. з.б. формул. $\Gamma \subseteq \Delta$ и в языке — счетное количество формул

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ — формулы з.б.

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$ либо $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi_1\}$ — смотря что непротиворечивое
- $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\varphi_2\}$ либо $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi_2\}$

$$\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$$

Свойство 1. Γ^* *— полное*

Свойство 2. Γ^* *— непрерывное*

Доказательство. Пусть $\Gamma^* \vdash \beta \& \neg\beta$
Конечное доказательство $\gamma_1, \dots \gamma_n$, часть из которых гипотезы: $\gamma_1, \dots, \gamma_k$
$\gamma_i \in \Gamma_{R_i}$. Возьмем $\Gamma_{\max R_i}$. Правда ли $\Gamma_{\max R_i} \vdash B \& \neg B$ □

Теорема 1.3. Любое полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул Γ имеет модель, т.е. существует оценка $\llbracket\rrbracket$: если $\gamma \in \Gamma$, то $\llbracket\gamma\rrbracket = \text{И}$

Доказательство. D — все записи из функциональных символов.

- $\llbracket f_0^n \rrbracket$ — константа $\Rightarrow$ "f_0^n"
- $\llbracket f_k^m(\Theta_1, \dots, \Theta_k) \rrbracket \Rightarrow$ "f_k^m(" + $\llbracket\Theta_1\rrbracket$ + "," + $\dots$ + "," + $\llbracket\Theta_k\rrbracket$ + ")"
- $\llbracket P(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \rrbracket = \begin{cases} \text{И} & P(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \in \Gamma \\ \text{Л} & \text{иначе} \end{cases}$
- свободные переменные: $\emptyset$

Так построенные модель — модель для Γ. Индукция по количеству связок.
База очев.
Переход $\alpha \& \beta$. При этом

1. Если $\alpha, \beta \in \Gamma$ $\llbracket\alpha\rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket\beta\rrbracket = \text{И}$ то $\alpha \& \beta \in \Gamma$
2. Если $\alpha, \beta \notin \Gamma$ $\llbracket\alpha\rrbracket \neq \text{И}$ или $\llbracket\beta\rrbracket \neq \text{И}$ то $\alpha \& \beta \notin \Gamma$

Аналогично для других операций □

Теорема 1.4 (Геделя о полноте)**.** Если Γ — полное неротиворечивое множество замкнутых(не бескванторных) фомул, то оно имеет модель

Следствие 1.4.1. Пусть $\vDash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

Доказательство. Пусть $\vDash \alpha$, но $\nvdash \alpha$. Значит $\{\neg\alpha\}$ — непротиворечивое множество замкнутых формул. Тогда $\{\alpha\}$ или $\{\neg\alpha\}$ — непр. мн. з. ф. Пусть $\{\alpha\}$ — непр. мн. з.ф., а $\{\neg\alpha\}$ — противоречивое. При этом $\neg\alpha \vdash \beta \& \neg\beta$, $\neg\alpha \vdash \alpha$, $\beta \& \neg\beta \vDash \alpha$. $\neg\alpha \vdash \alpha$, $\alpha \vdash \alpha$. Значит $\vdash \alpha$ □

- Γ — п.м.з.ф.
- перестроим Γ в $\Gamma^\triangle$ — п.н.м. **б.** з. ф.
- по теореме о существование модели: $M^\triangle$ — модель для $F^\triangle$
- покажем, что $M^\triangle$ — модель для Γ — M

$\Gamma_0 = \Gamma$, где все формулы — в предварительной нормальной форме

Определение. ПНФ — формула, где $\forall\exists\forall \dots (\tau)$, τ — формула без кванторов

Теорема 1.5. Если φ — формула, то существует ψ — в п.ф., то $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$

Доказательство. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma^*$. $\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$
Переход: $\Gamma_i \to \Gamma_{i+1}$
Рассмторим: $\varphi_j \in \Gamma_i$

1. φ_j без кванторов — не трогаем
2. $\varphi_j \equiv \forall x.\psi$ — добавим все формулы вида $\psi[x := \Theta]$, где Θ – терм, состоящий из f: $d_0^e, d_1^{e'} \dots, d_{i-1}^{e'\dots'}$
3. $\varphi_j \equiv \exists x.\psi$ — добавим $\psi[x := d_i^j]$

$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{$все добавленные формулы$\}$ — счетное количество □

Теорема 1.6. Если Γ_i — непротиворечиво, то Γ_{i+1} — непротиворечиво

Теорема 1.7. $\Gamma*$ — непротиворечиво

Следствие 1.7.2. $\Gamma^\triangle = \Gamma*$ без формул с $\forall, \exists$