

Лекция 5

Илья Yaroshevskiy

16 января 2021 г.

Содержание

1 Многообразия	1
1.1 Касательные пространства	1
2 Относительный экстремум	2
3 Функциональные последовательности и ряды	3
3.1 Равномерная сходимость последовательности функций	3

1 Многообразия

Лемма 1. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^r -гладкое - параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M - гладкое k -мерное многообразие, $\Phi(t^0) = p$
Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть k -мерное линейное подпространство в \mathbb{R}^m . Оно не зависит от Φ

Доказательство. $\text{rank } \Phi'(t^0) = k$

Если взять другую параметризацию Φ_1 $\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$
 $\Phi' = \Phi'_1 \cdot \Psi'$ $\Psi'(t^0)$ - невырожденный оператор

□

1.1 Касательные пространства

Определение. $\Phi'(t^0)$ — касательное пространство к M в точке p

Обозначение. $T_p M$

Пример. M - окружность в \mathbb{R}^2

$$\Phi : t \mapsto (\cos t, \sin t)^T \quad t^0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Phi'(t^0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$$

$$h \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} h$$

Примечание. $v \in T_p M$. Тогда \exists путь $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$, такой что $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$

Доказательство. $u := (\Phi'(t^0))^{-1}(v)$

$$\tilde{\gamma}_v(s) := t^0 + s \cdot u, \quad s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$\gamma_v(s) := \Phi(\tilde{\gamma}_v(s))$$

$$\gamma'_v(0) = \Phi'(\underbrace{\tilde{\gamma}_v(0)}_{t^0}) \cdot u = v$$

□

Примечание. Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$ - гладкий путь

Тогда $\gamma'(0) \in T_p M$

Доказательство. $\gamma(s) = (\Phi \circ \Psi \circ L)(\gamma(s))$

$$\gamma' = \Phi' \cdot \Psi' \cdot L' \cdot \gamma'(s) \in T_p M$$

□

Примечание. Аффинное подпространство $\{p + v, v \in T_p M\}$ - называется аффинным касательным пространством

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкая, $y = f(x)$ - поверхность в \mathbb{R}^{m+1} (x, y)

Тогда (аффинная) касательная плоскость в (a, b) задается уравнением $y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$

Доказательство. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ $\Phi(x) = (x, f(x))$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \dots + \alpha_m f'_{x_m} \quad \square$$

Примечание. $y = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$

$f(x) - y(x) = o(x - a)$

Примечание. $\Phi(x_1, \dots, x_m) = 0$ $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $\Phi(a) = 0$

Уравнение касательной плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

γ - путь в M $\Phi(\gamma(s)) = 0$, $\Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$

$\Phi'_{x_1} \cdot \gamma'_1 + \dots + \Phi'_{x_m} \cdot \gamma'_m = 0$

Определение дифференцируемости Φ в точке a

$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1} \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m} \cdot (x_m - a_m) + o$

2 Относительный экстремум

Пример. Найти наибольшее/наименьшее значение выражения $f(x, y) = x + y$, при условии $x^2 + y^2 = 1$
 $f = \text{const}$ - линии уровня (прямые в данном случае)

В точке \max линии уровня $f = \max$

$\Phi(x, y) = 0$ $\Phi'_x(x - a) + \Phi'_y(y - b) = 0$

(Φ'_x, Φ'_y) - вектор нормали к касательной прямой

Определение. $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$

$M_\Phi \subset O := \{x | \Phi(x) = 0\}$

$x_0 \in M_\Phi$, т.е. $\Phi(x_0) = 0$

x_0 - **точка локального относительного \max, \min , строгого \max , строгого \min**

Если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$

$\forall x \in U \cap M_\Phi$ (т.е. $\Phi(x) = 0$) $f(x_0) \geq f(x)$ (для максимума)

т.е. x_0 - локальный экстремум $f|_{M_\Phi}$

Уравнения $\Phi(x) = 0$ - уравнения связи

Как можно решать эту задачу

Если $\text{rank} \Phi'(x_0) = n$, выполнено условие теоремы о неявном отображении

Теорема 2.1 (Необходимое условие относительно экстремума). $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ - гладкое в O

$a \in O$ $\Phi(a) = 0$ - точка относительного экстремума, $\text{rank} \Phi'(a) = n$

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda \cdot \Phi'(a) = 0 & \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

В координатах:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(a) - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} - \dots - \lambda_m(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}}(a) - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} - \dots - \lambda_m(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Неизвестные: a_1, \dots, a_{m+n} $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Доказательство. Пусть ранг реализуется на столбцах x_{m+1}, \dots, x_{m+n} , обозначим $y_1 = x_{m+1}, \dots, y_m = x_{m+n}$

$$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y) \quad a = (a_x, a_y)$$

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a) = 0 \quad \text{По теореме о неявном отображении} \exists U(a_x) \exists V(a_y)$$

$$\exists \varphi : U(a_x) \rightarrow V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) = 0$$

отображение $x \mapsto (x, \varphi(x))$ есть параметризация $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$

a - точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ - точка локального экстремума функции

$$g(x) = f(x, \varphi(x))$$

Необходимое условие экстремума:

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi'_x)(a_x) = 0 \quad (1)$$

$$\Phi(x, \varphi(x)) = 0$$

$$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi'_x = 0 \text{ - в точке } (a_x, a_y)$$

Тогда

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m \quad \lambda \cdot \Phi'_x + \lambda \cdot \Phi'_y \varphi'_x(a_x) = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2): f'_x + \lambda \Phi'_x + (f'_y + \lambda \Phi'_y) \varphi'_x = 0$$

$$\text{Пусть } \lambda = -f'_y (\Phi'_y(a_x, a_y))^{-1}$$

$$\text{Тогда } f'_y + \lambda \Phi'_y = 0 \text{ и } f'_x + \lambda \Phi'_x = 0 \text{ (из (1) + (2))} \quad \square$$

Определение. $G := f - \lambda_1 \Phi_1 - \lambda_2 \Phi_2 - \dots - \lambda_n \Phi_n$ - Функция Лагранжа

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - множители Лагранжа

$$\begin{cases} G' = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \text{- то что в теореме}$$

Пример. $A = (a_{ij})$ - симметричная вещественная матрица

$f(x) = \langle Ax, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^m$ - квадратичная форма

Найти $\max f(x), \quad x \in S^{m-1}$ - существует по теореме Вейрштрасса

$$G(x) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j - \lambda \left(\underbrace{\sum_{i=1}^m x_i^2 - 1}_{\text{уравнение сферы}} \right)$$

$$\Phi' = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_m)^T, \text{ на сфере } \text{rank} \Phi' = 1$$

$$G'_{x_k} = \sum_{j=1}^m a_{kj} x_j - 2\lambda x_k \quad k = 1 \dots m, \text{ т.е. } Ax = \lambda x$$

λ - собственное число A , x - собственный вектор

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda |x|^2 = \lambda$$

Теорема 2.2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Тогда $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} | \lambda - \text{собственное число оператора } A^T A\}$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$$

$$\langle A^T Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0$$

Доказательство. $x \in S^{m-1}$

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T A x, x \rangle}_{\text{симм.}} \quad (A^T A)^T = A^T A$$

$$\max |Ax|^2 = \max \langle A^T A x, x \rangle = \lambda_{\max} \quad \square$$

3 Функциональные последовательности и ряды

3.1 Равномерная сходимость последовательности функций

Определение. Последовательность функций

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F} \quad n \mapsto f_n$$

$$\mathcal{F} : \{f | \underbrace{X}_{\text{м.п.}} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Пусть $E \subset X$

Определение. Последовательность f_n **сходится поточечно к f** на множестве $E, \forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\text{Пример. } f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

$$\text{Тогда } E = [0, 1] \quad f_n(x) \rightarrow 0$$

Если $E \cap (1, +\infty) \neq \emptyset$ то нет поточечной сходимости ни к какой функции

Пример. $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2} \quad x \in [0, 1] \quad 0 < \alpha < 2$
 Ясно, что $\forall \alpha \quad f_n(x) \rightarrow \not\prec$ поточечно на $[0, 1]$
 $\max_{x \in [0, 1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2} = n^\alpha \cdot \max_{x \in [0, 1]} \frac{x}{1+n^2 x^2} = n^\alpha \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} n^{\alpha-1}$

Определение. f_n равномерно сходится к f на $E \subset X$ если $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad 0 \leq M_n < \varepsilon$, т.е. $\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Обозначение. $f_n \rightrightarrows_E f$

Примечание. $x_0 \in E \quad f_n \rightrightarrows_E f$ Тогда $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$
 равномерная сходимость \Rightarrow поточечная сходимость к тому же пределу

Примечание. $E_0 \subset E \quad f_n \rightrightarrows_E f \Rightarrow f_n \rightrightarrows_{E_0} f$

Пример. $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2} \quad E = [\frac{1}{10}, 1]$
 Тогда $f_n \rightrightarrows \not\prec$
 $f = 0 \quad \sup_{x \in [\frac{1}{10}, 1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2} \leq \frac{n^\alpha}{1 + \frac{1}{100} n^2} \rightarrow 0$

Примечание. $\mathcal{F} = \{f | X \rightarrow \mathbb{R} - \text{ограничены}\}$
 Тогда $\rho_X(f_1, f_2) := \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ - метрика в \mathcal{F} (Чебышевское расстояние)

1. $\rho(f_1, f_2) \geq 0$
2. $\rho(f_1, f_2) = 0 \Leftrightarrow f_1 = f_2$
3. $\rho(f_1, f_2) = \rho(f_2, f_1)$
4. $\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_3, f_2)$

Доказательство. Берем $\varepsilon > 0 \exists x : \rho(f_1, f_2) - \varepsilon = \sup |f_1 - f_2| - \varepsilon < |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \leq \rho(f_1, f_2) + \rho(f_3, f_2)$ \square

Примечание. $f_n \rightrightarrows_E f \quad f_n \rightarrow f$ по метрике ρ_E

Примечание. $E = E_1 \cap E_2 \quad f_n \rightrightarrows_{E_1} f$ и $f_n \rightrightarrows_{E_2} f \Rightarrow f_n \rightrightarrows_E f$

Доказательство. $M_n^{(1)} \rightarrow 0 \quad M_n^{(2)} \rightarrow 0$
 $\max(M_n^{(1)}, M_n^{(2)}) \rightarrow 0$ \square