# Лекция 15

Ilya Yaroshevskiy

14 января 2021 г.

## Содержание



# 1 Мера Лебега

*Следствие* 1.0.1. $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad \exists B, C$ — борелевские
$B \subset A \subset C \quad \lambda(C \setminus A) = 0,\ \lambda(A \setminus B) = 0$

*Доказательство.*

$$C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_{\frac{1}{n}} \tag{2}$$

□

*Следствие* 1.0.2. $\forall A \subset \mathfrak{M}^m\ \exists B, \mathcal{N}$ — $B$ - борелевское, $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}^m,\ \lambda\mathcal{N} = 0$
$A = B \cup \mathcal{N}$

*Доказательство.* $B$ — из следствия 1, $\mathcal{N} := A \setminus B$ □

*Примечание.* Обозначим $|X|$ — мощность множества $X$
$\forall X \quad |2^X| > |X|$
$X = \mathbb{R}^m \quad |2^{\mathbb{R}^m}| >$ континуум
$\mathfrak{B} \subset 2^{R^m}$ — борелевская $\sigma$-алгебра, $|\mathfrak{B}| =$ континуум
$|M^m| >$ континуума
$\mathfrak{K}$ — канторово множество. $|\mathfrak{K}| =$ континуум, $\lambda\mathfrak{K} = 0$
$\forall D \subset \mathfrak{K}\ D \in \mathfrak{M}^m,\ \lambda D = 0$(полнота $\lambda$)
$2^{\mathfrak{K}} \subset M^m$

*Следствие* 1.0.3. $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \lambda(G) \overset{(*)}{=} \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{— замкн.}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K \text{— компакт.}}} \lambda(K) \tag{3}$$

*Доказательство.* (*) следует из $\sigma$-конечности

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q(0, n) \tag{4}$$

$$Q(a, R) = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i - R, a_i + R]$$

$$\lambda(A \cap Q(0, n)) \to \lambda A \text{ — по непрерывности снизу} \tag{5}$$

□

**Определение.** Свойства из следствия 3 называются **регулярностью меры Лебега**

## 1.1 Преобразования меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях

**Лемма 1.** *$(X', \mathfrak{A}', \mu')$ — пространство с мерой*
*$(X, \mathfrak{A}, \cdot)$ — "заготовка" пространства*
*$T : X \to X'$ — биекция; $\forall A \in \mathfrak{A}\ TA \in \mathfrak{A}'$ ($T\emptyset \overset{def}{=\!=} \emptyset$)*
*Положим $\mu A = \mu'(TA)$*
*Тогда $\mu$ — мера*

*Доказательство.* Проверим счетную аддитивность:

$$A = \bigsqcup A_i \quad \mu A = \mu'(TA) = \mu'(\bigsqcup TA_i) = \sum \mu'(TA_i) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum \mu A_i \tag{6}$$

□

*Примечание.* $T : X \to X'$ — произвольное отображение, $T\mathfrak{A}$ вообще говоря не алгебра
$T^{-1}(\mathfrak{A}')$ — всегда $\sigma$-алгебра(если исходное $\sigma$-алгебра)

**Лемма 2.** *$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное*
*Пусть $\forall E \in \mathfrak{M}^m :\ \lambda E = 0$ выполняется $\lambda(TE) = 0$*
*Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad TA \in \mathfrak{M}^n$*

*Доказательство.*

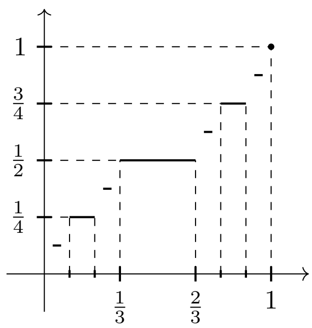
$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N} \tag{7}$$

, где $K_j$ — компактное множество, $\lambda(\mathcal{N}) = 0$

$$TA = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \underbrace{TK_j}_{\text{комп.}} \cup \underbrace{T\mathcal{N}}_{\lambda(T\mathcal{N})=0} \tag{8}$$

$TK_j$ — компактно, как образ компакта при непрерывном отображении
(8) $\Rightarrow TA$ — измеримо □

*Пример.* Канторова лестница




$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in \Delta \setminus \mathfrak{K}_1 \\ \frac{1}{4} & x \in \Delta_0 \setminus \mathfrak{K}_2 \\ \frac{3}{4} & x \in \Delta_1 \setminus \mathfrak{K}_3 \\ \vdots & \\ \sup f(t) & t \le x,\ t \notin \mathfrak{K} \end{cases}$$

, где $\Delta = [0, 1],\ \Delta_0 = [0, \frac{1}{3}],\ \Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1],\ \Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}],\ \Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], \ldots$, а $\mathfrak{K}_0 = \Delta,\ \mathfrak{K}_1 = \Delta_0 \cup \Delta_1,\ \mathfrak{K}_2 = \Delta_{00} \cup \Delta_{01} \cup \Delta_{10} \cup \Delta_{11}, \quad \mathfrak{K}_i = \bigcup\limits_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} \Delta_{\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_n}$
$f([0, 1] \setminus \mathfrak{K})$ — счетное = множество двоично рациональных чисел из $[0, 1]$
$\lambda f([0, 1] \setminus \mathfrak{K}) = 0$
$\lambda f(\mathfrak{K}) = 1$, т.к. $\forall y \in [0, 1]\ \exists x :\ f(x) = y$, при этом $f$ — непрерывна, т.к. образом функции является весь промежуток
Тогда пусть $E \subset [0, 1] \notin \mathfrak{M}^m$
$f^{-1}(E)$ = подиножество множества $\mathfrak{K} \cup$ промежутки прообраза двоично рациональных точек из $E$ — измеримо, т.к. $\lambda\mathfrak{K} = 0$
Еще наблюдение $x \notin \mathfrak{K} \Rightarrow f$ — дифференцируема в $x$ и $f' = 0$

**Теорема 1.1.** $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $\Phi : O \to \mathbb{R}^m,\ \Phi \in C^1(O)$
Тогда $\forall A \subset O,\ A \in \mathfrak{M}^m \quad \Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$

*Доказательство.* Достаточно проверить свойство: $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$
$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ шары $B_i :\ E \subset \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon$

($\Rightarrow$) из Т. о лебеговском продолжении меры

($\Leftarrow$) используем полноту меры Лебега

1. $E \subset \underset{\text{ячейка}}{P} \subset \overline{P} \subset O,\ \lambda E = 0$

$$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\| \tag{9}$$

   Тогда $\forall x, y \in P \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \le L|x - y|$ — неравенство Лагранжа

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr) \tag{10}$$

$$Q(x_0, \frac{r}{\sqrt{m}}) \subset B(x_0, r) \Rightarrow \left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m < \lambda B(x_0, r) \tag{11}$$

$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr) \subset \bigcup Q(y_i, Lr) \tag{12}$$

$$\sum \lambda\Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = L^m \sum (2r_i)^m \tag{13}$$

$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow \sum \left(\frac{2r_i}{\sqrt{m}}\right)^m < \varepsilon \Rightarrow \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m})^m \tag{14}$$

$$\sum \lambda B(y_i, Lr) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m}L)^m \tag{15}$$

   , где $B_i = B(x_i, r_i),\ y_i = \Phi(x_i)$

2. $E \subset O$ — произвольное, $\lambda E = 0$
   $O = \bigsqcup Q_i$, где $Q_i$ — кубические ячейки, $Q_i \subset \overline{Q_i} \subset O$
   $E = \bigsqcup (E \cap Q_i)$ по п.1 $\lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$
   $\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$

□

*Следствие* 1.1.4. $\lambda$ — инвариантна относительно сдвигов(и $\mathfrak{M}^m$ тоже инвариантна)
т.е. $\forall a \in \mathbb{R}^m$: $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad A + a \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda A = \lambda(A + a)$

*Доказательство.* $\Phi : x \mapsto x + a \quad \Phi \in C^1(R^m)$ по теореме $\Rightarrow A + a \in \mathfrak{M}^m$,
$\lambda A = \lambda(A + a)$ следует из теоремы о лебеговском продолжении:
$A \subset \bigcup P_k \Leftrightarrow A + a \subset \bigcup (P_k + a)$
очевидно, что для ячейки при сдвиге $\lambda P_k = \lambda(P_k + a)$
$\Rightarrow \lambda A = \inf(\sum \lambda P_k) = \inf(\sum (P_k + a)) = \lambda(A + a)$ □

**Теорема 1.2.** $\mu$ — мера на $\mathfrak{M}^m$:

1. $\mu$ — инвариантна относительно сдвига
   $\forall a \in \mathbb{R}^m\ \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E + a) = \mu E$

2. Для любого ограниченого множества $E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E) < +\infty$

Тогда $\exists l \in [0, +\infty) :\ \mu = k\cdot$
т.е. $\forall E \quad \mu E = k \cdot \lambda E \quad (0 \cdot \infty = 0)$

*Примечание.* $\mu A := \lambda_1 A$, если $\exists y_0 \quad A \subset \{(x, y_0) \big| x \in \mathbb{R}\}$

*Доказательство.* Нет
Посмотрим как мера $\mu$ задается на рациональных ячейках
В $\mathbb{R}^2$ $Q_1$ — единичная квадратная ячейка $\mu Q_1 = V$
$Q_2$ — ячейки со стороной 2 $\mu Q_2 = 4V \quad \mu Q_n = n^2 V\ \mu Q_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} V$
На $\mathcal{P}^m \mu$ пропорциональна $\lambda$, $k = V$ □

**Теорема 1.3** (инвариантность меры Лебега относительно линейных ортогональных преобразований)**.** $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — ортогональное преобразование
Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

1. $TA \in \mathfrak{M}^m$
2. $\lambda(TA) = \lambda A$

*Доказательство.*

1. $T \in C^1$ — поэтому измеримость сохраняется
2. $\mu A := \lambda(TA)$, $\mu$ — мера на $\mathfrak{M}^m$ по Лемме 1, при этом $\mu$ — инвариантна относительно сдвигов
$\mu(A+a) = \lambda(T(A+a)) = \lambda(TA+Ta) = \lambda(TA) = \lambda A$
$A$ — ограничена $\Rightarrow TA$ — ограничена $\Rightarrow \mu A < +\infty$
по теореме $\lambda(TA) = k \cdot \lambda A$
Найдем $k$: возьмем шар $B$, $TB$ = шар того же радиуса $= B + x_0$, таким образом $\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$

□

*Следствие* 1.3.5. $\lambda$(прямоугольного параллелепипеда) = произведению сторон

*Следствие* 1.3.6. Любое собственное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$ имеет меру 0

*Доказательство.* Достаточно доказать, что $\lambda\{x \big| x_m = 0\} = 0$
$\{x \big| x_m = 0\} \simeq \mathbb{R}^{m-1} = \bigsqcup Q_i$ — единичные кубы $L \subset \bigsqcup Q_i \times [-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}]$
$\lambda_{\mathfrak{M}}(Q_i \times [-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}]) = \frac{2\varepsilon}{2^i}$ □