

Лекция 4

Илья Yaroshevskiy

15 января 2021 г.

Содержание

1 Диффеоморфизмы	1
1.1 Теорема о неявном отображении(продолжение)	1
1.2 Определение	2
1.3 Определение	2
1.4 Теорема	2
1.4.1 Следствие о двух параметризациях	3

1 Диффеоморфизмы

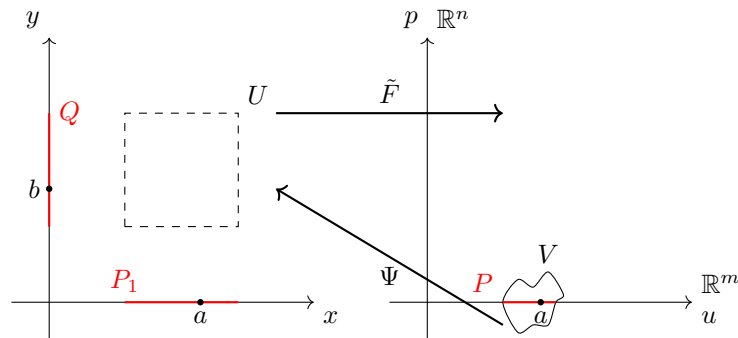
1.1 Теорема о неявном отображении(продолжение)

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Доказательство.

Если 1) выполняется, то 2) очевидно: $F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x)) \cdot \Phi'(x) = 0$

1. $\tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \quad (x, y) \mapsto (x, F(x, y)) \quad \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$
 $\tilde{F}' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$, очевидно $\det \tilde{F}' \neq 0$ в (a, b) , значит $\exists U((a, b)) \quad \tilde{F}|_{U((a, b))}$ - диффеоморфизм



- (a) $U = P_1 \times Q$ - можно так считать
 (b) $V = \tilde{F}(U)$
 (c) \tilde{F} - диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \rightarrow U$
 (d) \tilde{F} - не меняет первые m координат $\Psi(u, v) = (u, H(u, v))$, $H : V \rightarrow \mathbb{R}^n$
 (e) Ось x и ось u идентичны $p = \text{ось } u = \mathbb{R}^m \times \{0\}^n \cap \underbrace{V}_{\text{открыто в } \mathbb{R}^{m+n}} \Rightarrow p \text{ открыто в } \mathbb{R}^m$
 (f) $\Phi(x) = H(x, 0) \quad F(x, \Phi(x)) = 0$, при $x \in P$
 $F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$

Единственность $x \in p \quad y \in u \quad F(x, y) = 0$
 $(x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$

□

1.2 Определение

"поверхность"- многообразие

$$M \subset \mathbb{R}^m \quad k \in \{1, \dots, m\}$$

Определение. M - простое k -мерное многообразие в \mathbb{R}^m если оно гомеоморфно некоторому открытому $O \subset \mathbb{R}^k$

т.е. $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ - непрерывное, обратимое, Φ^{-1} - непрерывное, Φ - параметризация многообразия M

1.3 Определение

Определение. $M \subset \mathbb{R}^m$ - простое k -мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m

$\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \Phi(O) = M \quad \Phi : O \rightarrow M$ - гомеоморфизм

$\Phi \in C^r \quad \forall x \in O \quad \text{rank } \Phi'(x) = k$ — максимально возможное значение

Пример.

1. Полусфера в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

$$\Phi : (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

$$\Phi : B(0, R) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi \in C^\infty(B(0, R), \mathbb{R}^3)$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}, \text{rank } \Phi' = 2$$

Аналогично график гладкой функции ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) - простое двумерное многообразие

2. Цилиндр $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2, z \in (0, h)\}$ $\Phi : [0, 2\pi] \times (0, h) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(\varphi, z) \mapsto (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$ - параметризация цилиндра без отрезка(боковой перпендикуляр)

При $\varphi = 0, \varphi = 2\pi$ проблема

$$\Phi : \underbrace{O}_{\text{откр., односвязно}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right)$$

$$(x, y) \in \text{открытое кольцо } 1 < x^2 + y^2 < (1 + h)^2$$

3. Сфера в \mathbb{R}^3 без ...

$$\Phi : (0, 2\pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad R - \text{радиус}$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \psi \\ R \sin \varphi \cos \psi \\ R \sin \psi \end{pmatrix} - \text{сферические координаты в } \mathbb{R}^3$$

1.4 Теорема

Теорема 1.1. $M \subset \mathbb{R}^m \quad 1 \leq k < m \quad 1 \leq r \leq \infty \quad p \in M$

Тогда эквивалентны:

1. $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ - окрестность точки p в \mathbb{R}^m : $M \cap U$ - простое k -мерное многообразие класса C^r

2. $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ - окрестность точки p

$$f_1, f_2, \dots, f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ все } f \in C^r$$

$$x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0, \text{ при этом } \text{grad}(f_1(p)), \dots, \text{grad}(f_{m-k}(p)) - \text{ЛНЗ}$$

Доказательство.

$$1 \Rightarrow 2 \quad \Phi - \text{параметризация} : \underbrace{O}_{(t_1, \dots, t_k)} \subset \mathbb{R}^k, \in C^r, p = \Phi(t^0)$$

$$\Phi' - \text{матрица } m \times k \quad \text{rank } \Phi'(t^0) = k$$

$$\text{Пусть } \det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_k}\right)_{i,j=1 \dots k} \neq 0$$

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$$

$$L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k - \text{проекция на первые } k \text{ координат } ((x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_k))$$

Тогда $(\underbrace{L \circ \Phi}_{(\varphi_1, \dots, \varphi_k)})'(t^0)$ - невырожденный оператор

$W(t^0)$ - окрестность точки t^0 , $L \circ \Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

$L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ - диффеоморфизм

Множество $\Phi(W)$ - это график отображения $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1} : V \rightarrow W$

Берем $x' \in V$, тогда $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$

Множество $\Phi(W)$ - открытое в $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где \tilde{U} - открытое множество в \mathbb{R}^m

Можно считать, что $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ $f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}$

Тогда $x \in M \cap \tilde{U} = \Phi(W) \Leftrightarrow \forall j : f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad } f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad } f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$$2 \Rightarrow 1 \quad F = (f_1, \dots, f_{m-k})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_m} \end{pmatrix} - \text{матрица } m-k \times m$$

Градиенты ЛНЗ \Rightarrow ранг матрицы равен $m-k$, он достигается на последних $m-k$ столбцах $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1 \dots m-k} \neq 0$

$F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = 0, \quad x \in \tilde{U}$

По теореме о неявном отображении $\exists P$ - окрестность (x_1, \dots, x_k) в $\mathbb{R}^m \quad \exists Q$ - окр (x_{k+1}, \dots, x_m) в \mathbb{R}^{m-k}

$\exists H : P \rightarrow Q \quad H \in C^r \quad F(x', H(x')) = 0, \quad x' \in P$

Тогда $\Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, H_1(x'_1, \dots, x'_k), H_2, \dots, H_{m-k})$ - параметризация многообразия

Φ - гомеоморфизм P и $M \cap \tilde{U}$, Φ^{-1} - практически проекция

□

1.4.1 Следствие о двух параметризациях

Следствие 1.1.1. $M \subset \mathbb{R}^m$ - k -мерное C^k -гладкое многообразие $p \in M$

\exists две параметризации $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_1(t^0) = 0$

$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_2(s^0) = 0$

Тогда \exists диффеоморфизм $\Theta : O_1 \rightarrow O_2$, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

Доказательство. Частный случай. Пусть для Φ_1, Φ_2 , $\text{rang } \Phi'_1(t^0), \text{rang } \Phi'_2(s^0)$ достигаются на первых k столбцах

Тогда $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta}$

Θ - искомый диффеоморфизм

$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$

$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$

Невырожденность не доказана, поэтому то, что это диффеоморфизм не доказано

□