Матан лекции

Ilya Yaroshevskiy

16 марта 2021 г.

Оглавление

Лекция 1

1.1 Теория меры

Лемма 1 (о структуре компактного оператора). *$V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор, т.е.* $\det V \neq 0$
Тогда:

- *∃ ортонормированные базисы $g_1, \ldots, g_m$; $h_1, \ldots, h_m$*
- *$\exists S_1, \ldots, S_m > 0$*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$ — разложение по базису
При этом $|\det V| = S_1 S_2 \ldots S_m$

Доказательство. $W := V^* V$ $*$ — транспонирование в $\mathbb{R}^m$
W — самосопряженный оператор(матрица симметрична относительно диагонали)
Собственные числа $c_1, \ldots, c_m$ — вещественные
Собственные векторы $g_1, \ldots, g_m$
Заметим что $c_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0 \Rightarrow c_i > 0$

- $S_i := \sqrt{c_i}$
- $h_i := \frac{1}{S_i} V g_i$

$$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{S_i S_j} \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i$$

$$V(x) = V(\sum_{i=1}^{n} \langle x, g_i \rangle g_i) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 = \det(V^*V) = \det W = c_1 \dots c_m \tag{1.1}$$

1.1 — т.к. диагональная матрица $\square$

Теорема 1.1.1 (преобразование меры лебега при линейном отображении)**.**

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда:

- $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$
- $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

($\det V = 0$) $\mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ мера $= 0$

($\det V \neq 0$) $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера
μ — инвариантна относительно сдвигов

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + Va) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k \cdot \lambda$(Лемма из предыдущего семестра)
Q — единичный куб на векторах g_i и $V(g_i) = S_i h_i$, $V(Q) = \{\sum \alpha_i S_i h_i | \alpha_i \in [0, 1]\}$ — паралеллепипед со сторонами $S_i, \dots, S_m$

$\square$

1.2 Интеграл

1.2.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — **разбиение множества**
2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если
$\exists$ разбиение $X = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i :\ \forall i\ f\big|_{e_i} = \mathrm{const} = c_i$
При этом такое разбиение — **допустимое разбиение**

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset \mathcal{X}_E(x) = \left[\begin{array}{ll} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{array}\right.$
2. $f =\subset$ кон.$\sum c_i \mathcal{X}_{e_i}$, где $\mathcal{X} = \bigsqcup e_i$

Примечание.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые
   Тогда $\exists$ разбиения, допутимые и для f, и для g
$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i} \quad h = \sum_{\text{кон.}} b_k \mathcal{X}_{A_k}$$
$$f = \sum_{i,k} c_i \mathcal{X}_{e_i \cap A_k} \quad g = \sum b_k \cdot \mathcal{X}_{e_i \cap A_k}$$
2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$
   Тогда $f + g,\ \alpha f,\ fg,\ max(f, g),\ min(f, g),\ |f|$ — ступенчатые

Определение. $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}},\ a \in \mathbb{R}$
$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество функции** f
$E(f \leq a),\ E(f > a), E(f \geq a)$ — также лебеговы множества
Если f задана на X: $X(f < a),\ X(f \leq a), \ldots$ — лебеговы множества

Примечание. $E(f \geq a) = E(f < a)^C;\ E(f < a) = E(f \geq a)^C$
$$E(f \leq a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E(f < a + \frac{1}{n})$$

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f — **измерима на множестве** E:
$a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ — измеримо(т.е. $\in \mathfrak{A}$)

Обозначение.

- f — измеримо на X — говорят просто "измеримо"
- $X = \mathbb{R}^m$, мера Лебега — измеримо по Лебегу

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \geq a)$ — измеримо

Пример. 1. $E \subset X$, E — измеримо, $\mathcal{X}_E$ — измеримо

$$E(\mathcal{X}_E < a) = \left[\begin{array}{ll} \emptyset & , a < 0 \\ X \setminus E & , 0 <= a <= 1 \\ X & , a > 1 \end{array}\right.$$

2. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывна. Тогда f — измеримо по Лебегу

Примечание. Свойства:

1. f — измерима на E

   $\Rightarrow\ \forall a \in \mathbb{R}\ E(f = a)$ — измеримо

   $\not\Leftarrow\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \mathcal{X} + \mathcal{X}_{\text{неизм.}}$

2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in R \quad \alpha f$ — измерима

3. f — измерима $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$

4. f — измерима на E; $\underset{\text{изм.}}{E'} \subset E \Rightarrow f$ — измерима на E'
   $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$

5. $f \neq 0$ — измерима на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима на E

6. $f \geq 0$, измерима на E, $\alpha \in \mathbb{R}$. <u>Тогда</u> f^α — измерима на E

Теорема 1.2.1. f_n — измерима на X.
<u>Тогда</u>:

1. $$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n; \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \tag{1.2}$$

   1.2 — измеримы

2. $\overline{\lim} f_n; \quad \underline{\lim} f_n$ — измеримы

3. Если
   $$\forall x\ \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = h(x)$$
   , то $h(x)$ — измеримо

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$

2. $$(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf\{s_n : s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)\}$$

3. очев.

□

1.2.2 Меры Лебега-Стильеса

Определение. $\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастает, непрерывна
$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ-конечный объем

$$g(a+0) = \lim_{x \to a+0} g(x), g(a-0) = \lim_{x \to a-0} g(x)$$
$$\mu[a, b) := g(b-0) - g(a-0)$$

— тоже σ-конечная мера
Применим теорему о продолжении, получим меру μg на некой σ-алгебре — **мера Лебега-Стилтьеса**

Определение. $g(x) = \lceil x \rceil$
Пусть μg определена на Борелевской σ-алгебре — **мера Бореля-Стилтьеса**

Лекция 2

2.1 Теореия меры

2.1.1 Измеримые функции

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{R}$ имзмерима
- $\forall a \in R \quad X(f < a) \in \mathfrak{A}$
- $\mathcal{X}_E \quad \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$

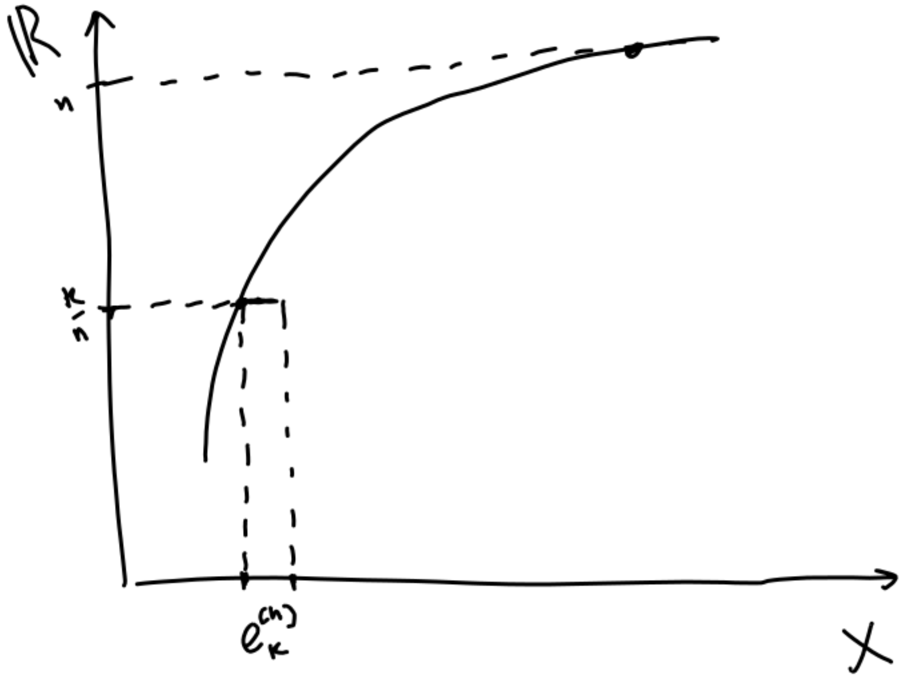
Теорема 2.1.1 (характеризация измеримости функции с помощью ступенчатых)**.**

- $f : X \to \overline{R}$
- $f \geq 0$
- f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2. $\forall x f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$

Доказательство.



$$e_k^{(n)} = X(\frac{k-1}{n} \le f \le \frac{k}{n}) \quad k = 1, \dots, n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \le f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \ge 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

Следствие 2.1.1.1. f — имзерима
Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая, $f_n \xrightarrow{n \to +\infty} f$ всюду и $|f_n| \le |f|$

Следствие 2.1.1.2. f, g — измеримы
Тогда fg — измемрима $(0 \cdot \infty = 0)$

Доказательство. $f_n \to f \quad g_n \to g$, (f_n, g_n) — ступенаčтые
$f_n g_n$ — ступенчатая $f_n g_n \to fg$ □

Следствие 2.1.1.3. f, g — измеримы
Тогда $f + g$ — измерима

Доказательство. $f_n \to f \quad g_n \to g$, (f_n, g_n) — ступеначтые
$f_n + g_n$ — ступенчатая $f_n + g_n \to f + g$
Считаем что $\forall x$, не может быть $f(x) = \pm\infty,\ g(x) = \mp\infty$ □

- $A \subset X$
- A — полная мера
- $\mu(X \setminus A) = 0$

Теорема 2.1.2 (об измеримости непрерывной на множестве полной меры)**.**

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset R$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима

Доказательство. f — измерима на E'
$E'(f < a)$ — открыто в E'

$$\left.\begin{array}{c} e(f < a) \subset e \\ \lambda_n \text{ — полная} \end{array}\right\} \Rightarrow e(f < a) \text{ — измерима в} E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

Пример.

- $E = \mathbb{R}$
- $f = \mathcal{X}_{\mathrm{Irr}}$

Следствие 2.1.2.4.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : E \to \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $E' = E \setminus e$
- f — измерима на E'

Тогда модно так переопределить f на множестве e, что полученая функция $\tilde{f}$ будет измерима на E

Доказательство. Пусть:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in E \\ \text{const} & , x \in e \end{cases}$$

$$E(\tilde{f} < a) = E'(\tilde{f} < a) \cup e(\tilde{f} < a)$$

□

Следствие 2.1.2.5. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — монотонна
Тогда f — измерима

Доказательство. f — непрерывна на $\langle a, b\rangle$ за исключением возможно счетного числа точек □

2.1.2 Сходимость почти везде и по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание ($x \in X$)

$W(x)$ — верное при почти всех $x \in E$

$=$ почти всюду на E

$=$ почти везде на E

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$ — истино при $x \in E \setminus e$

Пример. $x = \mathbb{R}$, x — иррационально

Пример. $f_n(x) \to n \to +\infty f(x)$ при почти всех $x \in E$
$\exists e, \mu e = 0$, при $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

Примечание. Свойства:

1. μ — полная $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
   $f_n(x) \to f(x)$ почти везде на X
   f_n — измерима
   | Тогда f — измерима

   Доказательство. $f_n \to f$ на X', где $e = X \setminus X', \mu e = 0$
   f — измерима на X'
   μ — полная $\Rightarrow f$ — измерима на X

   $$X(f < a) = \underset{\text{изм.}}{X'(f < a)} \cup e(f < a)$$

   □

2. В условии п. 1
   Можно переопределить f на e. Получится $\hat{f}$
   $f_n(x) \to \hat{f}(x)$ почти везде
   $\hat{f}$ — измкрима

   Определение. $f = g$ почти везде
   Будем говорить что f и g эквивалентны

3. Пусть $\forall n\ W_n(x)$ — истинно при почти всех x
   Тогда утверждение " $\forall n\ W_n(x)$ — истинно " — верно при почти всех x
   Это высказывание верно при

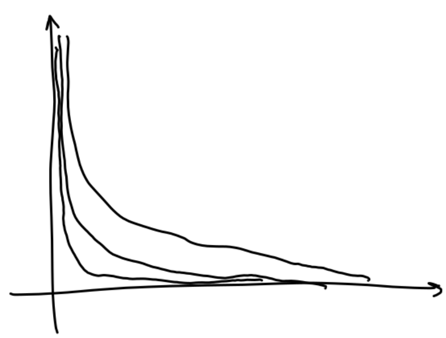
$$x \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i) \quad \mu(\bigcup e_i) = 0$$

- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечные

- f_n сходится к f по мере
- $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0
Т.е. предел не задан однозначно

Пример.



$f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0$
$X\ \mathbb{R}_+\ \lambda$
$f_n \to f$ всюду на $(0, +\infty)$
$f_n \underset{\lambda}{\rightrightarrows} f$

Пример.

$f_n(x) := e^{-(n-x)^2}$ $x \in \mathbb{R}$
$f_n(x) \to 0$ при всех x
$f_n(x) \to 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\to 0$$

, при $0 < \varepsilon < 1$

Пример. $n = 2^k + e, 0 \leq e < 2^k$
$X = [0, 1]$ λ
$f_n(x) := \mathcal{X}_{[\frac{e}{2^k}, \frac{e+1}{2^k}]}$
$\lim f_n(x)$ — не существует ни при каких x

$$\lambda X(f_n > \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$f_n \underset{\lambda}{\rightrightarrows} 0$$

Теорема 2.1.3 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- μX — конечна

Тогда $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду Частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0(т.е. $f < 0$)

$$\left.\begin{array}{r} X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывность меры сверху}$$

Общий случай: $f_n \to f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда $\varphi_n \to 0$, монотонна

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

Теорема 2.1.4 (Рисс)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Тогда $\exists n_k f_{n_k} \to f$ почти везде

Доказательство. $\forall k\ \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \to 0$
$\exists n_k$: при $n > n_k$ $\mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$
можно считать: $n_1 < n_2 < n_3$
Проверим $f_{n_k} \to f$ почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$

$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

При $x \notin E$ $f_{n_k} \to f$

$$x \notin E\ \exists N\ x \notin E_k$$

при $k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, т.е. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ □

Следствие 2.1.4.6.

- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $|f_n| \leq g$ почти везде

Тогда $|f| \leq g$ почти везде

Доказательство. $\exists n_k :\ f_{n_k} \to f$ почти везде □

Теорема 2.1.5 (Егорова)**.**

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \to f$ почти везде

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists e \subset X,\ \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$

@1A[r]$^{>} > +B$

2.2 Интеграл

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Определение. $f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$ $\quad E_k$ — дополнительное разбиение $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu = \sum \alpha_k \mu E_k$$

, считаем $0 \cdot +\infty = 0$

Примечание. Свойства:

1. Не зависит от представления f в виде сумме

$$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k} = \sum \alpha'_k \mathcal{X}_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k \cap E'_j}$$

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. $f \leq g \quad \int f \leq \int g$, f, g — ст.

Определение. $f \geq 0$ — измерима

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Примечание. Свойства:

1. Если f — ступенчатая то Опр. 2 = Опр. 1
2. $0 \leq \int f \leq +\infty$
3. $g \leq f$, f — измерима, g — ступенчатая $\Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение.

- f — измерима
- $\int_X f^+$ или $\int_x f^-$ конечный

Тогда

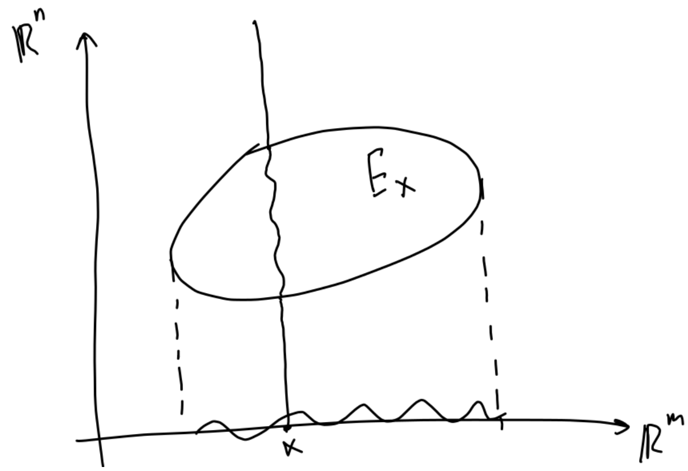
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Теорема 2.2.1 (Тонедди)**.**

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$ — измерима
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$

<u>Тогда</u>



1. при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ — измерима на $\mathbb{R}^n$
2. функция
$$x \mapsto \int_{E_k} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$$
3. $$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y d\lambda_n(y)) \right) d\lambda_m(x)$$

Лекция 3

3.1 Интеграл

1. $f \geq 0$, ступенчатые
   $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{E_k}$, E_k — измеримое
   $\int_X f = \sum \alpha_k \mu E_k$

2. $f \geq 0$, измеримая
   $\int_X f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq g \leq g \\ f \text{ — ступ.}}} \int_X g d\mu$

3. f — измерима, $f^+, f^- \geq 0$ — измеримые
   Пусть $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечные
   Тогда $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$

   Определение. Если $\int_x f^+$, $\int_X f^-$ — оба конечные, то f называется **суммируемой**

   Примечание. f — измеримая, ≥ 0, интеграл 3 = интеграл 2

4.

   Определение. $E \subset X$ — измкримое, f — измерима на X
   $\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E$

Примечание. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$ $\int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$

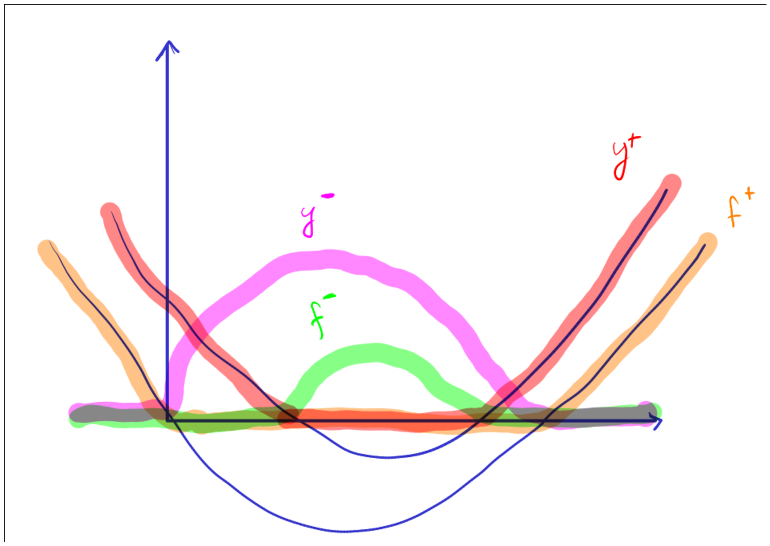
Примечание. $\int_E f d\mu = \sup\{fg : \ 0 \leq g \leq f$ на E, g — ступенчатые$\}$, можно считать что g — тождественный 0 вне множества E

Примечание. $\int_E f$ не зависит от значений f вне E

Примечание. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \subset X$ — измеримое, g, f — измеримые. Свойства:

1. Монотонность $f \leq g$ $\int_E f \leq \int_E g$

   Доказательство.



(a) $f, g \geq 0$ — очевидно

(b) f, g — произвольные
$f^+ \leq g^+$ $f^- \leq g^-$
$\int_E f^+ \leq \int_E g^+$ $\int_E f^- \leq \int_E g^- \Rightarrow$ OK

$\square$

2. $\int_E A d\mu = \mu E$ $\int_E 0 d\mu = 0$

3. $\mu E = 0$ $\int_E f = 0$

Доказательство. (a) f — ступенчатая

(b) $f \geq 0$ — измеримая

$\square$

Змечание:
f — измеримая. Тогда f — суммируемая $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

($\Leftarrow$) следует из свойства 1. $f^+, f^- \leq |f|$

($\Rightarrow$) позже

4. $\int_E (-f) = -\int_E f$, $\forall c \in \mathbb{R}$ $\int_E cf = c \int_E f$

(a) $(-f)^+ = f^-$ $(-f)^- = f^+$

(b) можно считать $c > 0$ для $f \geq 0$ — тривиально

5. $\exists \int_E f d\mu$
   Тогда $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

   Доказательство. $-|f| \leq f \leq |f|$. По свойствам 3 и 4 □

6. $\mu E \leq +\infty,\ a \leq f \leq b$
   Тогда $a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$ $a\chi_E \leq f \leq b\chi_E$

   Следствие 3.1.0.7. f — измерима на E, f — ограничена на E, $\mu E < +\infty$
   Тогда f — суммируемая на E

7. f — суммируемая на E. Тогда f — почти везде конечная

   Доказательство.

   (a) $f \geq 0$ $f = +\infty$ на $A \subset E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_E f \geq n\mu A$
   (b) $f = f^+ - f^-$

   □

Лемма 2.

$$A = \bigsqcup_{i-1}^{+\infty} A_i$$

— измеримые, g — ступенчатая, $g \geq 0$
<u>Тогда</u>

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство. $\int_A g d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} = \sum_i \sum_k \dots = \sum_i \int_{A_i} g d\mu$ □

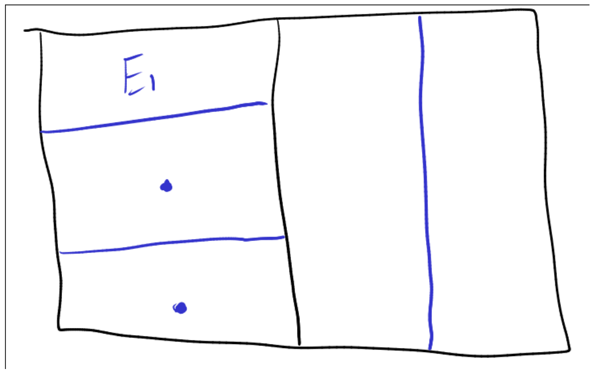
Теорема 3.1.1. $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая на A, $f \geq 0$
<u>Тогда</u> $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$

Доказательство.

($\leq$) ступенчатая $g :\ 0 \leq g \leq f$ $\int_a g = \sum \int_{A_i} g d\mu \leq \sum \int_{A_i} f$ — по Лемме

($\geq$) 1. $A = A_1 \cup A_2$
   $0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}$ $0 \leq g_2 \leq f\chi_{A2}$

$$g_1 = \sum \alpha_k \chi_{E_k}\ g_2 = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$



Считаем что E_k – совместное разбиение

$$0 \le g_1 + g_2 \le f\chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2 \le \int_A f$$

Перейдем к супремуму

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \le \int_A f$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \le \int_A f$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ — индукция по n
3.
$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \sqcup B_n$$

, где

$$B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \ge \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

□

Следствие 3.1.1.8.
- $f \ge 0$ — измеримая
- $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$
- $\nu E := \int_E f d\mu$

Тогда ν — мера

Следствие 3.1.1.9 (аддитивности интеграла). f — суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. $f^+, f^- \dots$??? □

3.1.1 Предельный переход под щнаком интеграла

$f_n \to f$. Можно ли утверждать $\int_E f_n \to \int_E f$?

Пример. $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$ $f \equiv 0$ $f_n \to f$ (даже $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$)

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 3.1.2 (Леви)**.** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, f_n — измеримая
$\forall n$ $0 \le f_n \le f_{n+1}$ почти везде $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ почти везде
Тогда $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_x f d\mu$

Примечание. f — задана всюду, кроме множества меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e
Тогда f — измерима на X.

Доказательство.

$(\le)$ очевидно. $f_n \le f$ почти везде $\int f_n \le \int f$

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \int_e f_n = \int_{X\setminus e} f_n \le \int_{X \setminus e} f \le \int_X f$$

$(\ge)$ Достаточно: $\forall g$ — ступенчатая $0 \le g \le f$

$$\lim \int_X f_n \ge \int_X g$$

Достаточно: $\forall c \in (0,1)$

$$\lim \int_X f_n \ge c \int_X g$$

$$E_n := X(f_n \le cg) \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E = X$ т.к. $c < 1$

$$\int_x f_n \ge \int_{E_n} f_n \ge c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \ge c \lim \int_{E_n} g = c \int_X g$
Последнее равентсво справедливо в силу непрерывности мнизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

□

Теорема 3.1.3. $f, g \geq 0$ измерима на E
Тогда
$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые
$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k},\ \ g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$
$$\int_E f+g = \sum (\alpha_k+\beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_l \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ стпенчатая $f_n:\ 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots\ \lim f_n = f$
$g \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ стпенчатая $g_n:\ 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots\ \lim g_n = g$
$f_n + g_n \to f + g\ \ \int_E f_n + g_n \to \int_E f + g$
$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_E g = \int_E f + g$

□

Следствие 3.1.3.10. f, g — суммируемы на E
Тогда $f + g$ — суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Примечание. Свойство 3 доказано

Доказательство. Суммируемость $|f+g| \leq |f| + |g|$
$h = f + g$. Тогда:
$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$
$$\Rightarrow \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+$$
$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$
$$\int_E h = \int_E f + \int_E g$$

□

Определение. $\mathcal{L}(X) =$ множество функций суммируемых на X

Следствие 3.1.3.11. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ — это линейный функционал на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X)\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X);\ \int_X \sum \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_X f_k$$

Теорема 3.1.4 (об интегрировании положительных рядов)**.** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \in \mathfrak{A}$ $\underset{\text{изм.}}{u_n} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $u_n \geq 0$ почти везде
<u>Тогда</u>

$$\int_E (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. по т. Леви: $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$ $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$ $S_n \to S$ — сумма ряда $\sum u_n$
Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$, $\int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k \to \int_E S$ □

Следствие 3.1.4.12. u_n — измеримые $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$
<u>Тогда</u> ряд $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходится при почти всех x

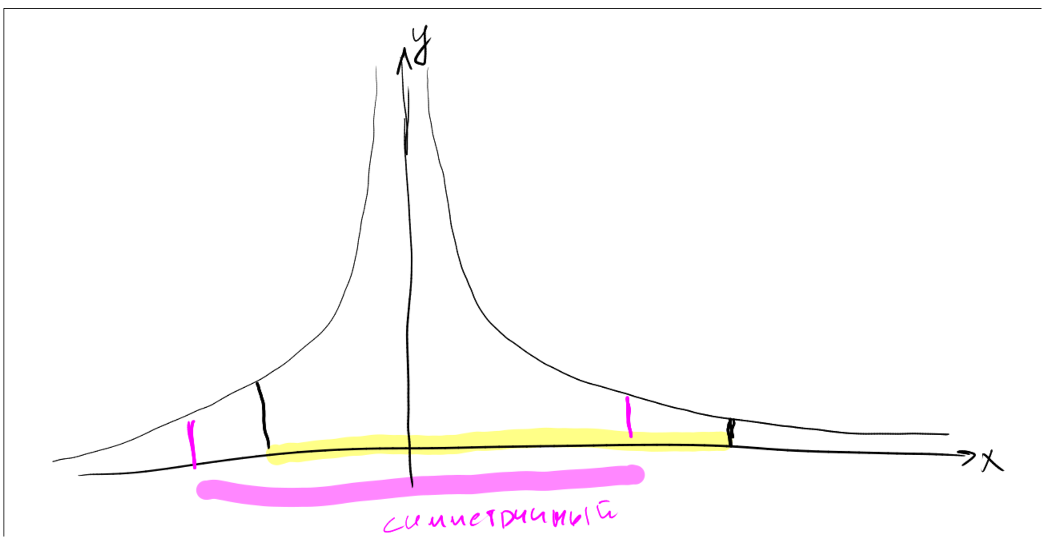
Доказательство. $S(x) := \sum |u_n(x)| \geq 0$ — измеримая

$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow S$ — сумиируема $\Rightarrow S$ почти везде конечена □

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произведение последовательности; $\sum a_n$ — абсолютно сходится
<u>Тогда</u> $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде



$$\int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} = \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}}dx = |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

$$\leq |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{N} \cdot |a_n|$$

$$\sum_n \int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq 4 \int_N \sum |a_n| < +\infty$$

$\square$

Лекция 4

Теорема 4.0.1 (об абсолютной непрерывности ингтерала)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E$ — измеримым, $\mu E < \delta \quad |\int_E f| < \varepsilon$

Следствие 4.0.1.13.

- f — суммируемая
- $\mu E \to 0$

Тогда $\int_{E_n} f \to 0$

Доказательство. Возьмем множества $X_m := X(|f| \geq n)$, очевидно что $X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$, а также $\mu(\bigcap X_n) = 0$
Утвержение: $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ — это свойство непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |F| d\mu$
Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, тода при $\mu E < \delta$

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_{E_n X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n X_{n_\varepsilon}}^C \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n X_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

Правда ли что:

$$f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f \quad \forall \varepsilon > 0\ \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$$

эквивалентны.

(⇒) **Нет**. $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$
$f_n = \frac{1}{nx}\ f_n \underset{\lambda}{\Rightarrow} 0$
$\int |f_n - f| = +\infty$ — при всех n

(⇐) **Да**.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - 1|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_X |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Теорема 4.0.2 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n\ |f_n| \leq g$ почти везде
  2. g — усммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируема в силу 1, f — суммируема по следствию т. Рисса: $|f| \leq g$ почти везде
'тем более' $= \left|\int_X f_n - \int_X f\right| \leq \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$ фиксируем ε $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$
   $f_n \to f$, т.е. $\mu X_n \to 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^C} \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^C} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon\mu X$$

   По следствию т. об абсолютной непрерывности: $\int_{X_n} 2g \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. $\mu X = +\infty$
   Проверим утверждение: $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subset X$ — измеримое, μA — конечная: $\int_{X\setminus A} g < \varepsilon$

$$\int_X g = \sup\{\int g_n,\ 0 \leq g_n \leq g,\ g_n \text{ — ступенчатая}\}$$

$$A := \{x:\ g_n(x) > 0\}$$

   — при достаточно больших n

$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X\setminus A} g < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} 2g$$

По 1 $\int_A |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\int_{X \setminus A} 2g < 2\varepsilon$

т.е. при больших n $\int_x |f_n - f| d\mu < 2\varepsilon$

□

Теорема 4.0.3 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n$ $|f_n| \leq g$ почти везде
  2. g — усммируемая везде

<u>Тогда</u> f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство.

$$h_n := \sup(|f_n - f|,\ |f_{n+1} - f|,\ \dots)$$

- $0 \leq h_n \leq 2g$
- h_n — монотонна убывает
- $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде

$2h - h_n \geq 0$ — эта последовательность возрастает, $2g - h_n \to 2g$ почти везде

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \to 0$$

□

Пример.

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0 - 1} e^{-t} dt$$

Да. $t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow[x \to x_0]{} t^{x_0 - 1} e^{-t}$ при всех $t > 0$

Суммируемая мажоранта: $|t^{x-1} e^{-t}| \leq \underbrace{t^{\alpha - 1} e^{-t}}_{\text{сумм.}}$, $0 < \alpha < x_0$

Теорема 4.0.4 (Фату). • $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

- $f_n \geq 0$ — измеримая
- $f_n \to f$ почти везде
- $c > 0$ $\forall n$ $\int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Примечание. Здесь не требуется чтобы $\int_X f_n \to \int_X f$, это может быть не выполнено

Доказательство.

$$g_n := \inf(f_n,\ f_{n+1},\ \dots)$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1}\ \lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ почти везде}$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq c$$

$$\int_X g_n \to \int_X f \Rightarrow \int_X f \leq c$$

□

Следствие 4.0.4.14.

- $f_n, f \geq 0$ — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightrightarrows f$
- $\exists c > 0$ $\forall n \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Доказательство.

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists n_k\ f_{n_k} \to f \text{ почти везде}$$

□

Следствие 4.0.4.15.

- $f_n \geq 0$ — измеримые

Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство. Как в теореме:

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n$$

Выберем n_k:

$$\int_X f_{n_k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Zzz..

□

4.1 Плотность одной меры по отношению к другой

4.1.1 Замена перменных в интеграле

- $(X, \mathfrak{A}, mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \cdot)$
- $\Phi : X \to Y$
- Пусть Φ — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$
Тогда ν — мера:

$$\nu(E_n) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E)n) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется образом μ при отображении Φ и

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$$

Примечание.

- $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима относительно $\mathfrak{B}$

Тогда $f \circ \Phi$ — измерима относитльно $\mathfrak{A}$ ($f \circ \Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$)

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(\underbrace{Y(f < a)}_{\in \mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}$$

Определение.

- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима(на X относительно $\mathfrak{A}$)
- $\omega \geq 0$

$$\forall B \in \mathfrak{B} \ \nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

— **взвешенный образ меры** μ при отображении Φ, ω — **вес**

Теорема 4.1.1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$

- ν — взвешенный образ меры μ при отображении Φ с весом ω
- $\omega \geq 0$ — измерима на X

Тогда $\forall f$ — измеримые на Y относительно $\mathfrak{B}$, $f \geq 0$ $f \circ \Phi$ — измеримая на X относительно $\mathfrak{A}$ и

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) \underset{\cdot}{\mu}(x) \tag{4.1}$$

То же верно для суммируемых f

Доказательство. $f \circ \Phi$ — измеримая

1. Пусть $f = \mathcal{X}_B, B \in \mathfrak{B}$

   $$f \circ \Phi(x) = f(\Phi(x)) = \left[\begin{array}{ll} 1 & , \Phi(x) \in B \\ 0 & , \Phi(x) \notin B \end{array} \right. = \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)}$$

   Тогда 4.1:

   $$\nu B \overset{?}{=} \int_X \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \mu$$

   — это определение ν

2. f — ступенчатая. 4.1 следует из линейности интеграла

3. $f \geq 0$ — измеримая: таким образом ??? измеримая функция ступенчатая + т. Леви

   $$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots, \ h_i \text{ — ступенчатая } h_i \leq f \ h_i \to f$$

   $$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow[i \to \infty]{}$$

4. f — измеримая $\Rightarrow$ для $|f|$ выполнено 4.1 $\Rightarrow$ $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$
   Что-то про f_+

□

Следствие 4.1.1.16. В условиях теоремы:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f — суммируемая на B

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

Доказательство. В теорему подствить $f \leftrightarrow f \cdot \mathcal{X}_B$ □

Примечание. Частный случай.

- $X = Y$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$
- $\Phi = \mathrm{Id}$
- $\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$, $\omega \geq 0$ — измеримая

В этой ситуации ω — плотность(меры ν относительно меры μ) и тогда по теореме:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x)\omega(x) d\mu$$

Лекция 5

5.1 Плотности

Плотность $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера
Плотность меры ν онсительно μ — это функция $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\forall B \in A \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$

Теорема 5.1.1 (критерий плотности)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), \ \nu$ — еще одна мера
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}, \ \omega \geq 0$ — измеримая

Тогда ω — плотность ν отнсительно $\mu \Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathfrak{A} \ \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A \omega$$

Пример (нет плотности).

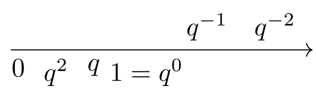
- $X = \mathbb{R}$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}'$
- $\mu = \lambda_1$
- ν — одноточечная мера $\nu(A) = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{, если } 0 \in A \\ 0 & \text{, иначе} \end{array} \right.$
  считаем $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$

Теорема 5.1.2 (Необходимое условие существования плотности)**.** $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Теорема 5.1.3 (теорема Радона-Никодина)**.** Это так-же достаточное условие

Доказательство критерия плотности. $(\Rightarrow)$ очевидно

($\Leftarrow$) Не умаляя общности $\omega > 0 : e = X(\omega = 0)$
$\nu(e) = \int_e \omega d\mu = 0$
Для случая когда $A \cup e = \emptyset$ все только лучше
Фиксируем $q \in (0, 1)$
$A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$



$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \nu A_j \leq \mu A_i \cdot q^{j-1} \tag{5.1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq \mu A_j \cdot q^{j-1} \tag{5.2}$$

Тогда

$$q \cdot \int_A \omega d\mu \leq q \cdot \sum \int_{A_j} \leq \sum q^j \mu A_j \leq \sum \nu A_j \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} = \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

то есть:

$$q \int_A \omega d \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

и $q \to 1 - 0$

$\square$

Лемма 3.

- f, g — *суммируемые*
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\forall A \in \mathfrak{A}$
- $\int_A f = \int_A g$

<u>Тогда</u> $f = g$ почти везде

Доказательство. $g := f - g$
Дано $\forall A \int_A h = 0$
Доказать $h = 0$ почти везде

- $A_+ := X(h \geq 0)$
- $A_- := X(h < 0)$

$X = A_+ \sqcup A_-$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$$

$$\int_{A_-} |h| = -\int_{A_-} h = 0$$

тогда

$$\int_X |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ почти везде $\square$

Примечание. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство отображений $l_A : f \mapsto \int_A f d\mu$ — линейный функционал
Таким образом множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ — разделяет точки $\forall f, g \in \mathcal{L}(X) \exists A l_A(f) \neq l_A(g)$

5.2 Мера лебега

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек)**.**

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $a \in O$
- $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$

Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$
Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall$ *куба* $Q \subset B(a, \delta),\ a \in Q$
выполняется неравенство $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Примечание. Здесь можно считать что кубы замкнутые

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L \cdot (x - a) + o(x - a) \quad x \to a$$
$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o(x - a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар} B_\varepsilon(a)\ \forall x \in B_\varepsilon(A)\ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a) a \in Q$ — куб со стороной h. При $x \in Q:\ |x - a| \leq \sqrt{m} h$

$$|\Psi(x) - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1+2\varepsilon)h$: при $x, y \in Q$

$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \le |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \le |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \le (1+2\varepsilon)h$

$$\lambda(\Psi(Q)) \le (1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \le \underbrace{|\det L| \cdot (1+2\varepsilon)^m}_{\text{выбираем } \varepsilon \text{ чтобы } \ldots < c} \lambda Q$$

потом берем $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ □

Лемма 5.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $f : O \to \mathbb{R}$ — *непрерывное*
- $Q \subset \overline{Q} \subset O$ — *кубическая ячейка*
- $A \subset Q$

Тогда

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — открытое } \subset O}} \left(\lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Теорема 5.2.1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \in O$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| \, d\lambda(x)$$

Доказательство. Обозначим якобиан $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
$\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера. Т.е. надо доказать: J_Φ — плотность ν относительно λ. Тогда достаточно проверить условие критерия плотности

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \le \nu A \le \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5.3}$$

Достаточно проверить только правое неравенство. левое — это "правое для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1}"

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \le \lambda A$$

1. Проверяем второе неравенство 5.3 для случая когда A — кубическая ячейка. $A \subset \overline{A} \subset O$. От противного:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$$

Возьмем $C > \sup_Q J_\Phi : \ C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$. Запускаем процесс половинного деления:
Режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую"ячейку $Q_1 \subset Q : \ C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берем Q_2 : $\mathbb{C} \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и так далее

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{5.4}$$

$$a \in \bigcap \overline{Q_i} \quad c > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi, \text{ в частности } c > |\det \Phi'(a)|$$

Получаем противоречие с леммой: с скол угодно малой окрестности a имеются кубы $\overline{Q_n}$, где выполняется 5.4. **Противоречие**

2. Проверим второе неравенство 5.3 для открытых множеств $A \subset O$
Это очевидно $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q_j} \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5.5}$$

3. По лемме второе неравенство 5.3 выполнено для всех измеримых A

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — куба } Q_j \subset \overline{Q_j} \subset O$$

$$A = \bigsqcup \underbrace{A \cup Q_j}_{A_j} \quad A \subset G \text{ — открытое}$$

$$JA_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \int_G (\sup J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично 5.5 получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

$\square$

Теорема 5.2.2.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое

Тогда $\forall f$ — измеримых, ≥ 0, заданная на $O' = \Phi(O)$

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda$$

, где $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$. То же верно для суммируемых функций f

Доказательство. Применяем теорему о взвешенном образе меры.
Дано:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(T, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$ — с сохранением измеримости
- $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$
- $\omega : Y \to \mathbb{R},\ \geq 0$, измеримый
- ν — взвешенный образ μ с весом ω:

$$\mu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega(x) d\mu$$

В нашем случае

- $X = Y - \mathbb{R}^m$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$
- Φ — диффеоморфизм
- $\mu = \lambda$
- $\nu(A) = \lambda\Phi(A)$

Под действием гладкого отображния Φ, σ-аглебра $\mathfrak{M}^m$ сохраняется
По теореме

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(A)} J_\Phi d\lambda$$

т.е. λ — взвешенный образ исходной меры Лебега по отношению к Φ $\square$

Пример. Полярные координаты в R^2.
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \Phi : \{(r,\varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \to \mathbb{R}^2$
диффеоморфизм

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_\Omega f(x,y) = d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \underset{d\lambda_r(r,\varphi)}{d\lambda_r}$$

Пример. Сферические координаты в R^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{c} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi? & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\det\Phi' = r^2(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi) = r^2\cos\psi = J_\Phi$$

— для географических координат: r — растояние от центра Земли, ψ — угол к плоскости экватора