# Лекция 4

Ilya Yaroshevskiy

11 марта 2021 г.

## Содержание



**Определение. Предпорядок** — транзитивное, рефлексивнре

**Определение. Отношение порядка** (частичный) — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное

**Определение. Линейный порядок** — порядок в котором $a \preceq b$ или $b \preceq a$

**Определение. Полный порядок** — линейный, каждое подмножество имеет наименьший элемент.

*Пример.* $\mathbb{N}$ — вполне упорядоченное множество

*Пример.* $\mathbb{R}$ — не вполне упорядоченной множество

- $(0, 1)$ не имееи наименьшего
- $\mathbb{R}$ не имеет наименьшего

## 1 Табличные модели

**Определение.** Назовем модель **табличной** для ИИВ:

- $V$ — множество истинностных значений
  $f_\rightarrow, f_\&, f_V : V^2 \rightarrow V$, $f_\neg : V \rightarrow V$
  Выделенные значения $T \in V$
  $+i\rrbracket \in V \ \ f_p : p_i \rightarrow V$
- $p_i = f_\mathcal{P}(p_i)$
  $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_\star(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$
  $\llbracket \neg\alpha \rrbracket = f_\neg(\llbracket \alpha \rrbracket)$

~~Если $\vdash \alpha$, то~~ $\vDash \alpha$ означает, что $\llbracket \alpha \rrbracket = T$, при любой $f_\mathcal{P}$

**Определение.** Конечная модель: модель где $V$ — конечно

**Теорема 1.1.** У ИИВ не существует полной табличной модели

## 2 Модели Крипке

$$\begin{tikzcd}
 & \text{все банки лопнут, RSA сломают!!!} \\
P = NP? \arrow[ur, "+"] \arrow[dr, "-"'] & \\
 & \text{RSA устоит}
\end{tikzcd}$$

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок($\succeq$)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
   $(\Vdash) \subseteq W \times \mathcal{P}$
   При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_j \Vdash p$

**Определение.**

1. $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда (и только тогда) $W_i \Vdash \alpha \& \beta$

2. $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
3. Пусть во всех $W_i \preceq W_j$ всегда когда $W_j \Vdash \alpha$ имеет место $W_j \Vdash \beta$
   Тогда $W_i \Vdash \alpha \to \beta$
4. $W_i \Vdash \neg\alpha$ — $\alpha$ не вынуждено нигде, начиная с $W_i$: $W_i \preceq W_j$, то $W_j \nVdash \alpha$

**Теорема 2.1.** Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$

**Определение.** Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\vDash \alpha$

**Теорема 2.2.** ИИВ корректна в модели Крипке

*Доказательство.* 1. $\langle W, \Omega \rangle$ — топология, где $\Omega = \{w \subseteq W | \text{если } W_i \in w,\ W_i \preceq W_j,\ \text{то } W_j \in w\}$

2. $\{W_k | W_k \Vdash p_j\}$ — открытое множество
   Примем $[\![p_j]\!] = \{W_k | W_k \Vdash p_j\}$
   Аналогично $[\![\alpha]\!] = \{W_k | W_k \Vdash \alpha\}$

$\square$

# 3 Доказательство нетабличности

Пусть существует конечная табличная модель $|V| = n$

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \le i,j \le n+1 \\ i \ne j}} (p_i \to p_j \& p_j \to p_i)$$

1. $\nvDash \varphi$

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 & p_1 \\
 & W_2 & p_2 \\
W_0 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots & \\
 & W_{n+1} & p_{n+1}
\end{tikzcd}$$

$$W_1 \nVdash (p_i \to p_k) \& (p_k \to p_1),\ k \ne 1$$

   Значит

$$\nvDash (p_i \to p_j) \& (p_j \to p_i)$$

$$\nvDash \bigvee (p_i \to p_j) \& (p_j \to p_i)$$

$$\nvDash \varphi_n$$

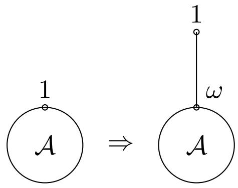
2. $\vDash_V \varphi_n$: по признаку Дирихле найдутся $i \ne j : [\![p_i]\!] = [\![p_j]\!]$
   $[\![p_i \to p_j]\!] = \text{И}$ и $[\![\varphi_n]\!] = \text{И}$
   Значит $\vdash \varphi_n$ — противоречие

**Определение.** **Дизъюнктивность** ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

**Определение.** Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

**Определение.** Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathcal{A})$




Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathcal{A})}$ перенеименуем $1_{\mathcal{A}}$ в $\omega$

**Теорема 3.1.**

- $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга
- $\Gamma(\mathcal{A})$ — Геделева

**Определение.** **Гомоморфизм** алгебр Гейтинга

- $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$
- $\varphi(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$

**Теорема 3.2.** $a \leq b$, то $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

**Определение.**

- $\alpha$ — формула ИИВ
- $f, g$: оценки ИИВ
- $f$: ИИВ $\to \mathcal{A}$
- $g$: ИИВ $\to \mathcal{B}$

$\varphi$ согласованы $f, g$, если $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

**Теорема 3.3.** если $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ согласована с $f, g$ и оценка $[\![\alpha]\!]_g \neq 1_{\mathcal{B}}$, то $[\![\alpha]\!]_f \neq 1_{\mathcal{A}}$

**Теорема 3.4.** ИИВ дизъюнктивно

*Доказательство.* Рассмторим алгебру Линденбаума: $\mathcal{L}$
Рассмотрим $\Gamma(\mathcal{L})$

- $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}} & , \substack{x=\omega \\ x=1_{\Gamma(\mathcal{L})}} \\ x & , \text{иначе} \end{cases}$$

$\varphi$ — гомоморфизм
Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$, тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$
$[\![\alpha + \beta]\!] = 1$, и т.к. $\Gamma(\mathcal{L})$ — Геделева то $[\![\alpha]\!] = 1$ или $[\![\beta]\!] = 1$
Пусть $\not\vdash \alpha$ и $\not\vdash \beta$, тогда $\varphi([\![\alpha]\!]) \neq 1_{\mathcal{L}}$ и $\varphi([\![\beta]\!]) \neq 1_{\mathcal{L}}$, т.е. $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} \neq 1_{\mathcal{L}}$ и $[\![\beta]\!]_{\mathcal{L}} \neq 1_{\mathcal{L}}$, тогда $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$ и $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\Gamma(\mathcal{L})} \Rightarrow$ Противоречие $\square$