

Лекция 10

Илья Yaroshevskiy

January 12, 2021

Contents

1 Гомотопия путей

1

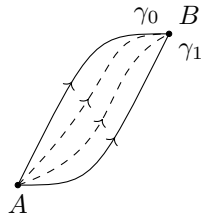
1 Гомотопия путей

Определение (Гомотопия двух путей). $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывны

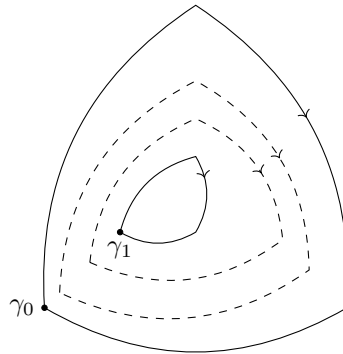
$\Gamma : [a, b] \times [0, 1]$ - непрерывное, такое что:

$$\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \quad \Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$$

- Гомотопия связанная, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$,
 $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_0(b)$



- Гомотопия петельная $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
 $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



Теорема 1. V - локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

γ_0, γ_1 — связанным гомотопные пути

Тогда $\int_{\gamma_0} V_i dx_i = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

Примечание. То же самое выполнено для петельных гомотопий

Proof. $\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b] u \in [0, 1]$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Проверим: Φ - локально постоянна

$$\forall u_0 \in [0, 1] \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

Γ - непрерывна на $[a, b] \times [0, 1]$ - компакт $\Rightarrow \Gamma$ - равномерно непрерывна

$$\forall \delta > 0 \exists \sigma > 0 \forall t, t' |t - t'| < \sigma \forall u, u' |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$$

Лемма 3 $\gamma : [a, b] \rightarrow O$

Тогда $\exists \delta > 0$ со свойством

Если $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} -$ близки к γ

т.е. $\forall t \in [a, b]$

- $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \delta$
- $|\tilde{\gamma} - \gamma(t)| < \delta$

то $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} - V$ - похожие

Возьмем параметр δ из Леммы 3 для пути γ_{u_0}

Если $|u - u_0| < \sigma$ $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$, при $t \in [a, b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} - похожи по Лемме 3

Построим кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0} - \frac{\delta}{4}$ - близкий к $\gamma_{u_0} \forall t \in [a, b] \quad |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}| < \frac{\delta}{4}$

и кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}_u - \frac{\delta}{4}$ - близкий к γ_u

Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u - \delta$ - близкие к $\gamma_{u_0} \Rightarrow$ они V - похожие \Rightarrow

$$\Rightarrow \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$$

т.е. $\Phi(u) = \Phi(u_0)$, при $|u - u_0| < \delta$

□

Определение. Область $O \subset \mathbb{R}^m$ - называется **односвязной** если в ней любой замкнутый путь гомотопен постоянному пути

Примечание. Выпуклая область — односвязна

Примечание. Гомеоморфный образ односвязного множества односвязный

$\Phi : O \rightarrow O'$ — гомеоморфизм, γ - петля в O' , Φ^{-1} — петля в O

$\Gamma : [a, b] \rightarrow [0, 1] \rightarrow O$ - гомотопия $\Phi^{-1}(\gamma)$ и постоянного пути $\tilde{\gamma} \equiv A$

$\Phi \circ \Gamma$ — гомотопия γ с постоянным путем $\Phi(A)$

Теорема 2. $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область

V — локально потенциальное векторное поле в O

Тогда V — потенциальное в O

Proof. **Теорема. Эквивалентны:**

1. V — потенциальное
2. ...
3. \forall кусочно гладкой петли $\gamma: \int_{\gamma} \sum V_i dx_i = 0$

V - локально постоянно, γ_0 — кусочно гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути $\gamma_1 \Rightarrow \int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0 \Rightarrow V$ — потенциально

□

Следствие 1. Теорема Пуанкаре верна в односвязной области

Дифференциальный критерий:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (1)$$

Лемма Пуанкаре: (1) $\Rightarrow V$ — локально потенциально

Теорема 3 (о веревочке). • $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

- $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow O$
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля не стягиваема

Proof. $V(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ — векторное поле в \mathbb{R}^2

Проверим что $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2)$$

Равенство частных производных выполняется если $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow V$ — локально потенциально

При этом

$$\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \quad (3)$$

(3) \Rightarrow петля не стягиваема (Если бы была стягиваема, то интеграл изначально должен был быть равен 0, т.к. интеграл при гомотопиях не меняется), а поле V — не потенциально

□