Лекция 12

Ilya Yaroshevskiy

January 12, 2021

Contents

1 Экспонента

Теорема 1. $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$

Proof.

$$\exp(z)\cdot\exp(w) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!} = \sum c_n \tag{1}$$

$$\text{, где } c_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\cdot n! = \frac{(z+w)^n}{n!} \tag{2}$$

$$\sum c_n = \sum\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w) \tag{3}$$

□

Следствие 1. $\forall z\in\mathbb{C} \quad \exp(z)\neq 0$

4. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

   Proof. $\overline{w_1+w_2} = \overline{w_1}+\overline{w_2}$
   Потому что коэффицент вещественный:

$$\overline{\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(\overline{z})^n}{n!} \tag{4}$$

□

1.1 Замечания о тригонометрических функциях

Пусть $\exp(ix) = \mathrm{Cos}(x) + i\mathrm{Sin}(x),\ x\in\mathbb{R}$
Тогда $\exp(-ix) = \mathrm{Cos}(x) - i\mathrm{Sin}(x)$

$$\mathrm{Cos}(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} \quad \mathrm{Sin}(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-iz)}{2i} \tag{5}$$

Следовательно:

$$\mathrm{Cos}(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots \quad \mathrm{Sin}(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\dots \tag{6}$$

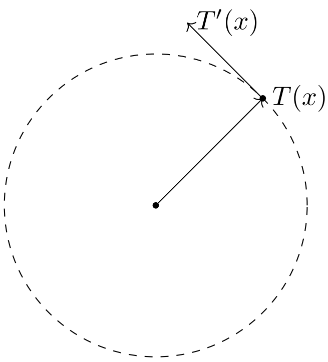
Пусть $T(x) = \exp(ix)$ Тогда $T(x+y) = T(x)T(y)$

$$\mathrm{Cos}(x+y) + i\mathrm{Sin}(x+y) = (\mathrm{Cos}(x)+i\mathrm{Sin}(x))(\mathrm{Cos}(y)+i\mathrm{Sin}(y)) \tag{7}$$

$\mathrm{Cos}(x+y) = \mathrm{Cos}(x)\mathrm{Cos}(y) - \mathrm{Sin}(x)\mathrm{Sin}(y)$
$\mathrm{Sin}(x+y) = \mathrm{Cos}(x)\mathrm{Sin}(y) + \mathrm{Sin}(x)\mathrm{Cos}(y)$

$$|T(x)|^2 = T(x)\cdot\overline{T(x)} = \exp(ix)\cdot\exp(-ix) = \exp(0) = 1 \tag{8}$$

т.е. $(\mathrm{Cos}(x), \mathrm{Sin}(x))$ — точка на единичной окружности
$T' = iT$, т.е. $x \mapsto T(x)$ — движение по единичной окружности с единичным вектором скорости, вектор скорости $\perp$ радиус-вектору



2 Ряды Тейлора

Все вещественно

Определение. f — **разлагается в степенной ряд** в окрестности x_0 если:
$\exists\varepsilon > 0\ \exists C_n$ — вещественная последовательность $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(x-x_0)^n$ (*)

Примечание. Тогда $f \in C^\infty(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ по следствию

Теорема 2 (единственности)**.** f — разлагается в сепенной ряд в окресности x_0
Тогда разложение единственно

Proof. выполняется (*)

$$c_0 = f(x_0), \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nC_n(x-x_0)^{n-1} \tag{9}$$

$$c_1 = f'(x_0), \quad f''(x) = \dots \tag{10}$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)C_n(x-x_0)^{n-k} \tag{11}$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{12}$$

□

Определение. Ряд Тейлора функции f в точке x_0 — формальный ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Примечание. Ряд Тейлора может оказаться сходящимся только в точке x_0

Примечание. Ряд Тейлора может сходится *не туда*

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$. Тогда $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
при $x = 0 \quad \forall n\ f^{(n)}(0) = 0$ — мы это доказывали $\Rightarrow$ Ряд Тейлора в $x_0 = 0$ тождественно равен нулю