B)

Лекция 9

Ilya Yaroshevskiy

10 апреля 2021 г.

Содержание

1 Сингулярное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет **сингулярное распределение**, если существует Борелевское множество $B \in \mathfrak{B}$, с нулевой мерой Лебега $\lambda B = 0$, такое что $p(\xi \in B) = 1$, но $\forall x \in B \ p(\xi = x) = 0$

Примечание.

$$\forall x \in B \ p(\xi = x) = 0 \implies p(\xi \in B) = 0$$

Иными словами, при сингулярном распределении, случайная величина распределена на несчетном множестве меры 0

Примечание. Функция распределения — непрерывная функция, по свойству 7 функии распределения.

Пример. Случайная величина ξ, задана функция распределения, которая — лестница Кантора Доделать

Теорема 1.1 (Лебега)**.** Пусть $F_\xi(x)$ — функция распределения произвольной случайной величины ξ

Тогда

$$F_\xi(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + p_3F_3(x) \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

, где $F_1(x)$ — фунция дискретного распределения, $F_2(x)$ — функция абсолютно непрерывного распределения, $F_3(x)$ — функция сингулярного распределения. Т.е. все распределения делятся на дискретные, абсолютно непрерывные, сингуряные и их смеси

2 Общий взгляд на математическое ожидание

Пусть случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется интеграл Лебега:

$$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega)dp(\omega) \tag{1}$$

, при условии, что данный интеграл существует. Использую интеграл Стилтьеса, эту формулу можно записать в виде:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x) \tag{2}$$

Из определения интеграла Стилтьеса можно получить геометрическую интерпретацию математического ожидания

Рассмотрим две ситуации:

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ — дискретное вероятностное пространство, т.е. Ω состоит из н.б.ч.с числа точек. Тогда из 1 получаем:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(\omega_i) p(\omega_i)$$

Пример. $\boxed{\text{Доделать}}$

2. $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ — непрерывное вероятностное пространство. например $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, тогда из 2 получаем:

$$E\xi = \iint \cdots \int_\Omega \xi(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot p(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

Пример. В круг радиуса 3 наугад бросается точка, случайная величина ξ, расстояния от центра круга до данной точки. Найти мат. ожидание ξ.

$$\Omega = \{(x, y) \Big| x^2 + y^2 \le 9\}$$

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p(x, y) = p = const$$

Из условия нормировки:

$$\int_\Omega \alpha p(\omega) = 1 \text{ или } \iint_\Omega p\, dx\, dy = 1 \implies \frac{1}{9\pi}$$

$$E\xi = \iint_\Omega \xi(x, y) \cdot p dx dy = \iint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{9\pi} dx dy =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 \rho \cdot \rho d\rho = \frac{1}{9\pi} \cdot \pi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^3 = 2$$

$\boxed{\text{Исправить}}$

3 Преобразование случайных величин

ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда функция $g(\xi)$

Определение. Функция $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — Борелевская функция, если $\forall B \in mathfrakB$, $g^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$

Теорема 3.1. Если $g(x)$ — Борелевская функция и ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, то $g(\xi)$ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, p)$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Примечание. Если ξ — дискретная случайная величина, то ее закон распределения находится просто из определения, поэтому в дальнейшем будем считать, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределние

3.1 Стандартизация случайной величины

Определение. Пусть имеется случайная величина ξ с соответствующей ей стандортной величиной:

$$\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$$

Свойство 1. $E\eta = 0$, $D\eta = 1$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Примечание. При стандартизации тип распределения не всегда сохраняется

3.2 Линейное преобразование

Теорема 3.2. Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$
Тогда случайная величина $\eta = a\xi + b,\ a \neq 0$ имеет плотность:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} \cdot f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Доказательство.

1. $a > 0$, тогда:

$$F_\eta(x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi < \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t)dt$$

$$= \begin{bmatrix} t = \frac{y-b}{a} & dt = \frac{1}{a}dy & y = at + b \\ y(-\infty) = -\infty & y\left(\frac{x-b}{a}\right) = x & \end{bmatrix} = \int$$

Доделать ∎

Свойство 1. *Если $\xi \in N(0,1)$, то $\eta = \sigma\xi + a \in N(a, \sigma^{-1})$*

Доказательство. Доделать ∎

Свойство 2. *Если $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то $\xi = \frac{\eta - a}{\sigma} \in N(0,1)$*

Свойство 3. *Если $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то $\xi = \gamma\eta + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$*

Свойство 4. *Если $\xi \in U(0,1)$, то $\eta = a\xi + b \in U(b, a + b)$ при $a > 0$*

Свойство 5. *Если $\xi \in E_\alpha$, то $\eta = \alpha\xi \in E_1$*

Теорема 3.3. Пусть $f_\xi(x)$ — плотность случайной величины ξ и функция (x) — монотонная. Тогда существует обратная $h(t) = g^{-1}(x)$ и случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет плотность:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|f'_\xi(x)|} f_\xi() \boxed{\text{Исправить}}$$

3.3 Квантильное преобразование

Теорема 3.4. Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ — непрерывная, тогда случайная величина $\eta = F(\xi) \in U(0,1)$ — имеет стандартное равномерное распределение

Доказательство. Ясно, что $0 \le \eta \le 1$

1. Предположим сначала, что $F(x)$ — строго возрастающая функция. Тогда она имеет обратную функцию $F^{-1}(x)$ и

$$F_\eta(x) = p(F(\xi) < x) = p(\xi < F^{-1}(x)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ F(F^{-1}(x)) = x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \eta \in U(0,1)$$

2. Пусть функция не является строго возрастающей, т.е. у нее есть интервалы постоянства, в этом случае через $F^{-1}(x)$ обозначим, самую левую точку такого интервала:

$$F^{-1}(x) = \min_t \{t \big| F(t) = x)\}$$

— корректно, т.к. $F(x)$ непрерывна слева. Тогда снова будет верна цепочка:

$$F_\eta(x) = p(F(\xi) < x) = p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x \quad 0 \le x \le 1$$

∎

Сформулируем теперь обратную теорему:
Пусть $F(x)$ — функция распределения случаайной величины ξ, при чем не обязательно непрерывная. Обозначим через $F^{-1}(x) = \inf\{t \big| F(t) \ge x\}$

Теорема 3.5. Пусть $\eta \in U(0,1)$, $F(x)$ — произвольная функция распределения.
Тогда случайная величина $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$

Примечание. $F^{-1}(\eta)$ называется квантильным преобразованием над случайной величиной η

Следствие 3.5.1. Датчики случайных чисел обычно имеют стандартное равномерное распределение. Из теоремы следует, что при помощи датчика случайных числе и квантильного преобразования, мы можем смоделировать любое желаемое распределение, в том числе дискретное.

Пример. E_α:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\eta = 1 - e^{-\alpha x} \implies x = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-\eta)$$

Если $\eta \in U(0,1)$, то $\xi = \frac{1}{\alpha}\ln(1-\eta) \in E_\alpha$

Пример. $N(0,1)$:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$\Phi_0^{-1} \in N(0,1)$$