Successions

Llista ordenada de nombres i de longitud infinita.

Successió de Nombres Reals

El que ordena són els nombres naturals $a: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$
$$n \longrightarrow a(n) = a_n$$

Pot ser que "Dom." de def. sigui més petit $D \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ però SEMPRE infinit.

La Imatge és la successió $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ és el conjunt termes successió. $a_{n-1}, n \in D$

a_n: Terme general de la successió.

Exemples: 1) $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to \frac{1}{n}$ $\quad \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

2) $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$ $\quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par} \\ -1 & \text{si } n \text{ senar} \end{cases} = (-1)^n = ((-1)^n)_{n \geq 0}$

Maneres de donar una successió:

- Fòrmula de terme general
- Donat una fòrmula recurrent per calcular un terme a partir anteriors.

Exemple: Successió de Fibb). $F_0; F_1; F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ $\quad i \geq 2$.

Exemple: Successió de Polinomi: $S_0(x) = x$

$$S_n(x) = \frac{1}{n+1}\left((x+1)^{n+1} - 1 - \sum_{i=0}^{n-1}\left[\binom{n+1}{i} \cdot S_i(x)\right]\right)$$

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\left((x+1)^2 - 1 - \sum_{i=0}^{0}\left[\binom{2}{1} \cdot S_i(x)\right]\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 1 - 1 - x\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Obs: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = S_1(n)$

Serà veritat que $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$; $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$?

Límit d'una successió de nombres Reals

Una $\left\{\begin{matrix} \text{tendeix a} \\ \text{té límit} \end{matrix}\right\}$ $\ell \in \mathbb{R}$ si els termes de la successió proporcionen aproximacions de ℓ amb tanta precissió com vulguem. És a dir, $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0}$

precissió

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \ell}$$

Obs: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$

Exemple: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donem una precisió $\varepsilon > 0$ i Volem trobar $n_0 : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ $\quad \forall n \geq n_0$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$. Podem dir: $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \geq \varepsilon > \frac{1}{n_0}$

Límits infinits

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ vol dir que els termes es fan arbitràriament grans.

És a dir $\forall K>0\ \exists n_0 : a_n > K$. "Si K fos una barrera, a_n el sobrepassa".

Posarem $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Exemples: $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$; $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ Aquests són fàcils de veure.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n = \infty \Rightarrow \lim |(-1)^n \cdot n| = \lim n = +\infty$$

Tipus

Convergents: Tenen límit un nº $\ell \in \mathbb{R}$

No Convergents: → Divergents: límit $+\infty, -\infty, \infty$

→ Oscil·lants: $\nexists \lim a_n$ $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$; $\lim_{n\to\infty} \sin(n)$

Límits i Desigualtats

Si $a_n \to \ell$, $b_n \to \ell'$, $a_n \leq b_n \Rightarrow \ell \leq \ell'$

IMPO: NO es conserven desigualtats estrictes.

Criteri Sandwich: $\boxed{\text{Si } b_n \to \ell,\ c_n \to \ell \text{ i } b_n \leq a_n \leq c_n \Rightarrow a_n \to \ell}$

Recordatoris

$P(n)$ i $Q(n)$ polinomis.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty \text{ o } -\infty & \text{Si "guanya" el grau de P} : gr\,P > gr\,Q \\ 0 & \text{Si grau } Q > \text{grau } P \\ \text{Quocient dels term de grau màx} & \text{Si } gr\,P = gr\,Q \end{cases}}$$

Exemples

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1n^2 - 6n - 2}{3n^2 - 9n} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\frac{2n-1}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Indeterminacions

$\boxed{\infty - \infty}$ $\boxed{0 \cdot \infty}$ $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ $\boxed{\frac{0}{0}}$ $\boxed{1^\infty}$ $\boxed{0^0}$ $\boxed{\infty^0}$

Altres

$\boxed{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}}$ Prog. Geomètrica

$\boxed{S_n = n \cdot \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)}$ Suma de n conseq.

Resolució d'indeterminacions

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty} \text{ o } \dfrac{0}{0}}$

$$\frac{P(n)}{Q(n)} : \begin{cases} +\infty \text{ o } -\infty & \text{si } gr(P) > gr(Q) \\ 0 & \text{si } gr(P) < gr(Q) \\ \text{Quocient dels coeficients major grau} & gr(P) = gr(Q) \end{cases}$$

Sino es pot fer la divisió, simplificar...

$\boxed{\infty - \infty}$

Conjugat

Si en el lim hi ha una resta d'arrels quadrades, es multiplica i divideix per la suma.

Exemple:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}\right)\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}\right] =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-1-(x+3)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-4}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}\right] = 0$$

$$\boxed{a_n - b_n = a_n\cdot b_n\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{a_n}\right)}$$

$\boxed{1^\infty}$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 1 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n\cdot(a_n-1)}$$

$$\lim\left[1+\frac{1}{n}\right]^n = e$$

$\boxed{0\cdot\infty}$ Hi ha dues possibilitats ⊕⊗

1) Es passa de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

2) Es passa de la forma 1^∞ on

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_n+1 \to 1 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim (a_n+1)^{b_n} = e^{\lim b_n\cdot a_n}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\lim (1+a_n)^{b_n}\right)$$

$\boxed{0^0 \text{ i } \infty^0}$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \ln\left(a_n^{b_n}\right) = b_n\cdot\ln(a_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \infty \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \ln(a_n)^{b_n} = b_n\cdot\ln(a_n)$$

⊕⊗ $\lim_{n\to\infty} \overset{0}{a_n}\cdot\overset{\infty}{b_n} = \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = \dfrac{0}{0}$

Aquí busquem què pots fer: Aplica CQ, $\longrightarrow \lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{\infty}{\infty}$

...

4 Criteris Útils

Criteri Arrel-quocient

$$a_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \wedge \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \ell) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

Criteri del quocient

$$(a_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \wedge \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \ell) \Rightarrow \begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \\ \ell > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \infty \\ \ell = 1 \Rightarrow ?? \end{cases}$$

Criteri del arrel

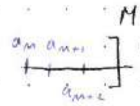
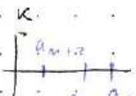
$$(\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell) \Rightarrow \begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \\ \ell > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \infty \\ \ell = 1 \Rightarrow ?? \end{cases}$$

Criteri del Sandwich

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} b_n = \ell$$

Teorema de la Convergència Monòtona

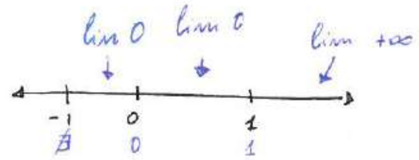
$\begin{cases} \text{Una successió creixent i fitada superiorment té límit i aquest és } \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \text{Una successió decreixent i fitada inferiorment té límit i aquest és } \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$

- Successió creixent: $a_{n+1} > a_n$
- fitada superiorment: $a_n \leq M \; \forall n$ 
- Successió decreixent: $a_{n+1} < a_n$
- fitada Inferiorment: $K \leq a_n \; \forall n$ 

Com a conseq. de ser $\begin{bmatrix}\text{creixent} \\ \text{decreixent}\end{bmatrix}$ i fitada $\begin{bmatrix}\text{superiorment} \\ \text{inferiorment}\end{bmatrix}$ aquella successió és convergent.

①.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$ on $\alpha \in \mathbb{R}$



• $\alpha = 0$; és una successió constant 0, 0, 0, ... té límit 0.

• $\alpha = 1$; és una successió constant 1, 1, 1, ... té límit 1.

• $\alpha = -1$; sig. que tenim $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ i aquest no existeix ∄ límit.

• $\alpha = \frac{1}{2}$; sig. : $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \to 0$

• $\alpha > 1$; Això clarament tendiria a $+\infty$, 2^{1000}, 1000^{6000} ...

• $\alpha < -1$; No existeix pq. va oscil·lant entre pos i negatiu.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

• $\alpha = 0$; Successió constant 1, 1, ... $\lim \to 1$.

• $\alpha > 0$; # $x = n^{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \log(x) = \log(n^{\frac{\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3}\log(n)$ en qualsevol base.

Podem veure que això arriba a infinit per qualsevol base.

• $\alpha < 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}} = 0$

③.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$ El nº de sumands depèn de n.

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$; $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Llavors: - a_n té n sumands

- El més gran és $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

- El més petit és $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Pq. tenim n sumands $n\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+\square}}\right)$

Podem concloure que el més petit (n vegades) $\leq a_n \leq$ el més gran (n vegades) $\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Donat que els extrems tendeixen a '1' $\boxed{a_n \to 1}$.

Fixe't: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n/n}{\sqrt{n^2+1}\cdot\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n^2+1)\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$. Sabem que $\frac{1}{n^2}$ tendeix a '0' llavors

tenim que $\frac{1}{1+0} = 1$. # Podem veure pel mateix procediment que serveix per $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ o $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

① c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$

#En aquest cas vull aplicar el criteri de l'arrel quocient.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1n+1}{1n} = \frac{1}{1} = 1$ ∴ diu que si $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L}$

Podem concloure que en aquest cas tenim $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

⑤.
c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{\frac{2n-1}{5}}$ #Fem per parts

$\boxed{e^{\lim (\text{base} - 1)\,\text{exponent}}}$

- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right) = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5} = +\infty$

→ Tenim que 1^{∞} i aquí hem de fer la fòrmula "nombre e"

Aquí fem la prop. de la constant.

$e^{\lim \left(\frac{n+2}{n-3} - 1\right) \cdot \frac{2n-1}{5}} = e^{\lim \left(\frac{n+2-(n-3)}{n-3}\right) \cdot \frac{2n-1}{5}} = e^{\lim \left(\frac{\cancel{5}}{n-3}\right) \cdot \frac{2n-1}{\cancel{5}}} = e^{\lim \left(\frac{2n-1}{n-3}\right)}$

$= e^{\frac{2}{1}} = \boxed{e^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{\frac{2n-1}{5}}}$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

Sabem que $\lim_{n\to\infty} \cos(n)$ no existeix. i el valor de $\cos(n)$ està limitat $-1 \le \cos(n) \le 1$.

Llavors aquí podem veure que podem aplicar el sandwich primer mirant $\begin{smallmatrix} \to -1 \\ \to 1 \end{smallmatrix}$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

donat que $\cos(n)$ està fitat, tots dos convergeixen a $L = 0$ sig. que.

$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0}$

⑤.
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

Dividim num i deno. per

2^n: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n+3^n}{2^n}}{\frac{2^n-3^n}{2^n}} = \frac{1+\frac{3^n}{2^n}}{1-\frac{3^n}{2^n}} = \frac{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$ Aquí continuem tenint indet. pq. $\frac{3}{2}=1'5$ i $\alpha>0$ $\alpha^n = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha>1 \\ 1 & \text{si } \alpha=1 \\ 0 & \text{si } \alpha<0 \end{cases}$

3^n: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n+3^n}{3^n}}{\frac{2^n-3^n}{3^n}} = \frac{\frac{2^n}{3^n}+1}{\frac{2^n}{3^n}-1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{0+1}{0-1} = -1}$$

d) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}^{\,\infty}-\sqrt{n}^{\,\infty})\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ #Fem el conjugat.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n+1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n+1}{2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n+1}{2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{\frac{n+1}{2}}{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{n}}^{\,0}}}{\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{n}}}+1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{1+1} = \boxed{\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}$$

④a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ #Aquí narem de fer criteri del quocient donat que hi ha factorial.

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \Rightarrow \left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{a^n}{n!}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|a|^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n\cdot|a|}{(n+1)\underbrace{(n+1-1)!}_{n!}}\cdot\frac{n!}{|a|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1}\cdot\frac{1}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = |a|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |a|\cdot 0 = \boxed{0}$$

Això és una const.

④b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}$ on $\alpha\in\mathbb{R}^+$; $|a|>1$ $\frac{\infty}{\infty}$ #Farem C.Q. tmb.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{|a|^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{|a|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{|a|^{n+1}}\cdot\frac{|a|^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{|a|}\cdot\frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a|}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a|}\cdot\left(1+\cancel{\frac{1}{n}}^{\,0}\right)^\alpha = \frac{1}{|a|}\cdot(1)^\alpha = \frac{1}{|a|} < 1$$ Donat que $a>1$ i l'invers serà <1.

Llavors el Criteri del quocient diu que si $\ell<1$ (en aquest cas $\ell=\frac{1}{a}$) $\to 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0}$$

6. $a_1 = \frac{-2}{3}$

$a_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + a_n^3)$ on $n \geq 1$

a) $-2 \leq a_n \leq 1$ — $\forall n \geq 1$ Inducció

b) a_n creixent

c) Convergent i límit

Fet posteriorment

7b. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^0$

dividir per la pot. més gran

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}\to 0}{\frac{2n}{n}}\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\to 0\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+0}{2}\right)^{\sin(0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \boxed{1}$$

8b. $\lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)n^{n-1}}$

- $(n+1)^{n+1} = (n+1)\cdot(n+1)^n$
- $n^{n-1} = n^n \cdot \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)\cdot(n+1)^n}{(3n^2+1)\cdot\frac{n^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)\cdot n}{(3n^2+1)} \cdot \frac{(n+1)^n}{(n^n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+5n}{3n^2+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{3n^2} \lim_{n\to} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \boxed{\frac{5}{3}\cdot e}$$

8e.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+2}{n+1}} = e^{\lim b_n\cdot(a_n-1)} = e^{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1\right)\cdot\frac{n^2+2}{n+1}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n+1}\left(\frac{n^2+n+1-n^2+n-1}{n^2-n+1}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n+1}\left(\frac{2n}{n^2-n+1}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+4n}{n^3+1}} = \boxed{e^2}$$

8d.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot 3^n + 5^{n+1}}{(2^n+1)(3^{n-1}-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{6^n + 5^n\cdot 5}{2^n 3^{n-1} - 2^n + 3^{n-1} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6^n}{6^n} + \frac{5^n\cdot 5}{6^n}}{\frac{6^n}{6^n}\cdot\frac{1}{3} - \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{6^n}} =$$

Donat que $\frac{5}{6} < 1$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 5\left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0}{\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{6^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+0}{\frac{1}{3} - 0 + 0 - 0} = \boxed{3}$$

(7d).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{7^n} \quad \text{\# Fem Criteri Quocient} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^7}{7^n}}{\frac{(n-1)^7}{7^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7 \cdot 7^{n-1}}{(n-1)^7 \cdot 7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7 \cdot 7^n}{(n-1)^7 \cdot 7^n \cdot 7} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{7} \cdot \frac{n^7}{(n-1)^7} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^7 = \frac{1}{7} \cdot (1)^7 = \frac{1}{7}$$

Però aquest no és el límit, sino el del criteri del quocient.

Com que $L = \frac{1}{7} < 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{7^n} = 0}$

\# També podem veure com el grau del deno és més gran que el del num. llavors sempre tendirà a 0.

(7e).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}} \quad \text{\# Apliquem criteri del arrel quocient} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}}{\frac{((n-1)+1)((n-1)+2)\cdots(2n-1)}{(n-1)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)(2n-1)(2n)}{(n)^n}}{\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}{(n-1)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^{n-1}\left[\cancel{(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}(2n-1)(2n)\right]}{n^n\left[\cancel{n}\cancel{(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^{n-1}(2n-1)(2\cancel{n})}{n^n \cdot \cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^{n-1}(2n-1)\cdot 2}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot 2 \cdot (n-1)^n}{(n-1)\cdot(n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot 2}{(n-1)} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n =$$

(8c).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^3+2n+2} - \sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n} - \sqrt{n^3+n^2-3n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^3+2n+2} - \sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n} - \sqrt{n^3+n^2-3n}} \cdot \frac{\sqrt{3n^3+2n+2} + \sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{3n^3+2n+2} + \sqrt{3n^3-2n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n^3+n^2+3n} + \sqrt{n^3+n^2-3n}}{\sqrt{n^3+n^2+3n} + \sqrt{n^3+n^2-3n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^3+2n+2)-(3n^3-2n-1)}{(n^3+n^2+3n)-(n^3+n^2-3n)} \cdot \frac{\sqrt{n^3+n^2+3n} + \sqrt{n^3+n^2-3n}}{\sqrt{3n^3+2n+2} + \sqrt{3n^3-2n-1}} =$$

!! Aquí la cosa és que tinc $\frac{\infty+\infty}{\infty+\infty}$ i puc simplificar-ho a $\frac{\infty}{\infty}$. Si tingués $\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$ seria d.f. i no podria fer-ho.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+4}{6n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+n^2+3n} + \sqrt{n^3+n^2-3n}}{\sqrt{3n^2+2n+2} + \sqrt{3n^3-2n-1}} = \frac{4}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3}}{\sqrt{3n^3} + \sqrt{3n^3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n^3}}{2\sqrt{3n^3}} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n^3}} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3}{3n^3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

(6) $a_1 = \frac{-2}{3}$ i $a_{n+1} = (2 + a_n^3) \cdot \frac{1}{3}$ $\forall n \geq 1$.

a) Prove que $-2 \leq a_n \leq 1$ $\forall n \geq 1$.

Cas Base: $n = 1$; Cert pq $a_1 = \frac{-2}{3}$ i compleix $-2 \leq a_1 \leq 1$.

Pas Inducció: Suposem cert per a_n i volem demo per a_{n+1}

$-2 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow (-2)^3 \leq a_n^3 \leq 1^3 \Rightarrow (-2)^3 + 2 \leq 2 + a_n^3 \leq 1^3 + 2 \Rightarrow \frac{-2^3+2}{3} \leq \frac{2+a_n^3}{3} \leq \frac{1^3+2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{-2 \leq a_{n+1} \leq 1}$ Com volíem. ☑.

b) Demo que és creixent. Es a dir $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$.

Cas Base: $n = 1$; $a_1 = \frac{-2}{3}$ „ $a_{1+1} = a_2 = \left(2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{46}{81}$ i compleix que $a_1 \leq a_2$ ☑.

Pas Inducció: Suposem que compleix $a_n \leq a_{n+1}$

Volem Demo per $a_{n+1} \leq a_{n+2}$

$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n^3 \leq a_{n+1}^3 \Rightarrow 2 + a_n^3 \leq 2 + a_{n+1}^3 \Rightarrow \frac{2+a_n^3}{3} \leq \frac{2+a_{n+1}^3}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a_{n+1} \leq a_{n+2}}$ Com volíem ☑.

c) Prove que a_n és convergent i calc el lim.

Teorema de la Conv. Monòtona: $\{a_n\}$ creixent i fitada superiorment $\Rightarrow \{a_n\}$ convergent.

Com que a_n convergent $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L$ i volem veure per a_{n+1}

$L = \left(\frac{2+L^3}{3}\right) \Rightarrow 3L = 2 + L^3 \Rightarrow L^3 + 2 - 3L = 0$ i aquí fem Ruffini per resoldre.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$(L-1) \cdot (\underbrace{L^2 + L - 2}) = 0$

$\frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2(1)} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Donat que la successió és creixent, on $a_2, a_3, \ldots a_n$ són positius $\Rightarrow L$ ha de ser (+).

$\boxed{L = 1}$

(8). c) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\right)$

Farem criteri del sandwich: Si $b_n \leq a_n \leq c_n$ $\forall n \geq N$; $\lim_{n \to \infty} b_n = L = \lim_{n \to \infty} c_n \to \lim_{n \to \infty} a_n = L$

- més petit $\to \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = n\left(\frac{n}{n^2+n}\right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{n}{n^2+n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$
- més gran $\to \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} = n\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

Ara podem aplicar el criteri del sandwich i afirmar que

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\right) = 1}$$

$a_1 = 1$
$d = 1$

(7a). $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$;

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + 2 + \dots + n \right) = \left[\begin{matrix} \text{Suma dels } n \\ \text{primers termes} \\ \text{d'una prog. arit.} \end{matrix} \right] = \left[S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n \right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1+n}{2} \cdot n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

(9). $\{a_n\}$ $a_1 = 1$; $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ si $n > 1$.

a) Proveu que $0 < a_n < 2$. #Demo per Inducció Simple

Cas Base: $n = 1 \to 0 < 1 < 2$ Cert ☑.

Pas Inductiu: $n > 1$

* Hipòtesi Inductiva: Suposem cert per $n-1$ t.q. $0 < a_{n-1} < 2$.

* Tesi: Comprovem si és cert per n

Partim de H.I. $0 < a_{n-1} < 2 \Rightarrow 1 < 1 + a_{n-1} < 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{1 + a_{n-1}} < \sqrt{3} < 2$

Llavors tenim que $\boxed{0 < a_n < 2}$ Com volíem ☑.

b) Demo que $\{a_n\}$ creixent. #Demo per Inducció

Cas Base: $n = 1 \to a_n = 1$ i $a_{1+1} = a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ i compleix $a_1 < a_2$

Pas Inductiu: $n > 1$

* Hipòtesi Inducció: Suposem cert per $n-1$ t.q. $a_{n-1} < a_n$

* Tesi: Volem demo per n t.q. $a_n < a_{n+1}$

Partim de la Hipòtesi $a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow a_{n-1} + 1 \leq a_n \Rightarrow \sqrt{a_{n-1} + 1} \leq \sqrt{a_n} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$

c) Proveu $\{a_n\}$ és convergent i calculeu L.

Hem demostrat que està fitada superiorment $a_n < 2$ (en apartat "a)")

Hem demostrat que $\{a_n\}$ creixent (en apartat "b)")

Pel Teorema de la conv. monòtona podem afirmar que $\boxed{\{a_n\} \text{ és convergent}}$

També podem dir que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$:

$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} = L = \sqrt{1 + L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$ → $\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1'62 = L}$; → $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0'62$ però no té sentit.

⑩. $\{a_n\} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$

a) Calc. a_1, a_2, a_3 i troba funció $a_{n+1} = f(a_n)$

$a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{3}{8}$; $a_3 = \frac{5}{16}$; $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n}$ però com que demanen per $n+1$

$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$ ← Aquesta és la llei de recurrència.

b) Proveu $\{a_n\}$ és decreixent.

$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ donat que $\frac{2n+1}{2n+2} < 1$ així que $a_n \cdot (\text{valor} < 1) \Rightarrow < 1$.

d) Proveu que $\{a_n\}$ convergent i troba el límit.

#, Hem vist que $\{a_n\}$ decreixent, però no que està acotada.

Probablement diem que $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ així que ja està.

(13). Demo que $\{a_n\}$ és convergent i dona interval $\leq \frac{1}{2}$ pel límit.

$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ # Sabem que si (Acotada + Creixent) $\Rightarrow$ Convergent.

Sabem que $a_n > 0$ pq $a_1 = \frac{1}{1+1} = 0'5$.

El terme més gran de la successió és el primer, així que considerarem que la suma de qualsevol altre fracció $\leq \frac{1}{n+1}$. Donat que hi ha n sumats podem dir que $a_n \leq n \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Si fem el $\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1$, així que podem afirmar $\boxed{0'5 \leq a_n < 1}$. # Aquí ja tenim acotada.

Ens podem fixar que a_{n+1} conté a a_n + algo, així que calculem aquest algo,

$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ || $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}$

Podem dir: $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = a_n + \frac{n+1}{4n^3+10n^2+8n+2}$, # Calc. fet full apart.

Donat que el terme independent serà sempre més gran que 0 $(n > 1)$ $a_{n+1} > a_n$, demostrant així que la successió és creixent.

Donat que està fitada superiorment i és monòtona creixent $\Rightarrow \boxed{\{a_n\} \text{ Convergent}}$

(14). $\{a_n\} = \{\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots\}$

a) Trobeu llei de recurrència $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$ per $n > 1$

b) Proveu que està fitada. $a_1 = \sqrt{3} \simeq 1'73$,, $a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} \simeq 2'17$

Podem obs que té pinta de ser creixent (no demo.)

Podem obs que a_n no podrà ser mai 3 pq $\sqrt{3} < 3$ ~~i regressiva~~ i $\sqrt{3 + a_{n-1}}$ a menys que a_{n-1} aproximi 3 seria $\sqrt{3+3} = \sqrt{6} < 3$.

$\sqrt{3} \leq a_n < 3$. Demo per Inducció: $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$

· Cas Base: $n = 1$ $\sqrt{3} < 3$ ☑.

· Pas Inductiu: $n > 1$. Suposem $a_{n-1} < 3$; Volem demo a_n

$a_{n-1} < 3 \Rightarrow 3 + a_{n-1} < 3 + 3 \Rightarrow \sqrt{3 + a_{n-1}} < \sqrt{6} < \sqrt{3}$ ☑.

M2-2-E-5

c) Demo que $\{a_n\}$ creixent. # Demo per Inducció

Cas Base: $n = 1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ i $\sqrt{3} < \sqrt{3+\sqrt{3}}$ ☑.

Pas Inducció: $n > 1 \Rightarrow$ Suposem cert $a_{n-1} < a_n$. Volem Demo $a_n < a_{n+1}$

Partim H.I. $a_{n-1} < a_n \Rightarrow 3 + a_{n-1} \leq 3 + a_n \Rightarrow \sqrt{3+a_{n-1}} \leq \sqrt{3+a_n}$ ☑

d) Demo convergent i calc. límit.

És convergent $\rightarrow$ fitada superiorment (b))
$\rightarrow$ Creixent monòtona (c)) $\Big\} \Rightarrow \boxed{\{a_n\} \text{ convergent}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$; $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} \Rightarrow L = \sqrt{3+L} \Rightarrow L^2 - L - 3 = 0$

$L = \Rightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} \simeq 2'3$ $\quad \boxed{L = \frac{1+\sqrt{13}}{2}}$