Sumatori

Introducció

$$\sum_{i=1}^{100} = i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+99^2+100^2 = \sum_{j=-1}^{98} (j+2)^2$$

No importa si és i, j, ...
Són variables mudes (només es fa servir).
NO es parla però sí que es fa servir.

El numero de sumants és $(n-i)+i$; $(98-(-1))+1 = 100 = (100-1)+1$

Sé que la cosa va de 2 en 2

$$-2+0+2+4+\dots+50 = \sum_{k=0}^{\boxed{26}} (\boxed{2k}-2) = (2\cdot0-2)+(2\cdot1-2)+(2\cdot2-2)+\dots+(2\cdot26-2)$$

$2k-2=50$

$2k=52 \rightarrow k=26$

$$\frac{2}{1^3}+\frac{5}{5^3}+\frac{8}{9^3}+\frac{11}{13^3}+\dots+\frac{47}{61^3} = \sum_{l=\boxed{3}}^{18}\left(\frac{3l-7}{(4l-11)^3}\right)$$

$l_{max} \rightarrow 47 = 3l-7 \rightarrow l_{max}=18$

$54 = 3l$

$l = 18$

↑ Aquest num no importa però quan més petit millor.

Això fa el canvi signe

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\dots-\frac{1}{39} = \sum_{r=0}^{9} (\boxed{-1})^r \cdot \frac{1}{\boxed{4r}+3}$$

La cosa va de 4 en 4.

$39 = 4r+3$

$36 = 4r$

$r = 9$

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = \cancel{(a_1+a_2+\dots} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_1+a_2+\dots+a_n) = \boxed{a_{n+1}+a_{n+2}}$$

Propietats formals

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Sabent que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ i que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$, Calcula $\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^2+6k+9) = \sum_{k=1}^{n}(k^2) + \sum_{k=1}^{n}(\boxed{6}k) + \sum_{k=1}^{n}(9) = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 9n$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$$

for x = 1 ...
for ...
print

matriu

Progressió aritmètiques (P.A)

Per no acabar les lletres es fica subíndex.

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} \dots \xrightarrow{+d} a_n$$

el que es va sumant.

És una progressió aritmètica quan hi ha una diferència de progressió (d)

$a_2 = a_1 + d$; $a_4 = a_3 + d = a_2 + 2d$; $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

→ Suma de progressió aritmètica

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{(1+m)}{2} \cdot m} \qquad \boxed{S = \frac{(a_1 + a_m) \cdot m}{2}}$$

$a_1 \cdot \bigcirc$ → Aquí no hi ha r així que havem de restar

$a_1 \cdot r$

$a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \longrightarrow a_1 \cdot r^{(m-1)}$

Progressió geomètrica (P. G.)

$$\overset{\cdot r}{\curvearrowright} \quad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \qquad r \leftarrow \text{raó (de la P. G)} \qquad \boxed{a_m = a_1 \cdot r^{m-1}}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m = S$$

$$a_1 r + a_2 r + a_3 r + \ldots + a_m r = rS$$

$$a_2 + a_3 + a_3 + \ldots + a_{m+1} = rS$$

$$a_{m+1} - a_1 = rS - S = (r-1) \cdot S$$

Suma progressió geomètrica.

$$\boxed{S = \frac{a_1 \cdot (r^m - 1)}{r-1}}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = S$$

$$1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = S$$

$$1 - S = S$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}}$$

Suma de Grandi

Sèrie infinita que no convergeix. Aquesta sèrie es diu "divergent". NO té suma finita.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 = \prod_{i=1}^{100} i$$

$$\# \; p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_m = \bigwedge_{i=1}^{m} p_i$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{m+2} a_i}{\prod_{i=1}^{m} a_i} = \frac{\cancel{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_m} \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2}}{\cancel{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_m}} = a_{m+1} \cdot a_{m+2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \prod_{i=1}^{m} a_i = A \\ \prod_{i=1}^{m} b_i = B \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\prod_{i=1}^{m} (a_i \cdot b_i) = A \cdot B}$$

$$= (a_1 b_1) \cdot (a_2 b_2) \cdot (a_3 b_3) \ldots (a_m b_m) =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_m) \cdot (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_m) =$$

$$= A \cdot B$$

$$\boxed{\prod_{i=1}^{m} (k \cdot a_i) = k^m A} \qquad \boxed{\prod_{i=1}^{m} a_i^k = A^k}$$

⑨. Passeu a notació de sumatori.

b) $3+5+7+\ldots+53 = \sum_{i=1}^{27}(2i+1)$; $2i+1=55 \to i=27$

e) $\frac{2}{1^3}+\frac{5}{5^3}+\frac{8}{9^3}+\frac{11}{13^3}+\ldots+\frac{47}{61^3} = \sum_{i=1}^{16}\frac{(3i-1)}{(4i-3)^3}$; $47=3i-1 \to i=\frac{48}{3}=16$

f) $-3+0+3+6+\ldots+60 = \sum_{i=1}^{22}(3i-6)$; $60=3i-6 \to i=\frac{66}{3}=22$

h) $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\ldots-\frac{1}{39} = \sum_{i=1}^{10}\frac{-(-1)^i}{(4i-1)}$; $4i-1=39 \to i=\frac{40}{4}=10$

⑩. Expressa sumes següents en funció de $S=\sum_{n=1}^{10}a_n$:

a) $S=\sum_{n=1}^{10}a_n = \sum_{m=1}^{10}a_m \leftarrow$ És el mateix pq. variable muda

No importa quin símbol tingui.

b) $\sum_{i=0}^{9}a_i = a_0+a_1+\ldots+a_9 = \left(\sum_{n=1}^{10}a_n\right)+a_0-a_{10} = S+a_0-a_{10}$

⑬. Sabent que[...]:

b) Calc $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}ij\right) = \left[i_1(j_1+\ldots+j_n)\right]+\left[i_2(j_1+\ldots+j_n)\right]+\ldots+\left[i_n(j_1+\ldots+j_n)\right] =$

$= \left[i_1j_1+\ldots+i_1j_n\right]+\left[i_2j_1+\ldots+i_2j_n\right]+\ldots+\left[i_nj_1+\ldots+i_nj_n\right] \boxed{\neq a_{ij}}$

⑭. Si $A=\sum_{i=n}^{m}a_i$ [...]

a) $5A$ b) $A-B$ c) $\sum_{i=n}^{m}-3b_i = -3\sum_{i=n}^{m}b_i = -3B$

d) $\sum_{i=n}^{m}(2a_i+4b_i) = \sum_{i=n}^{m}(2a_i)+\sum_{i=n}^{m}(4b_i) = 2\sum_{i=n}^{m}(a_i)+4\sum_{i=n}^{m}(b_i) = 2A+4B$

⑮. Canvi index sumatoris pq. comencin per $j=0$

a) $\sum_{i=8}^{n}i^2 = 8^2+9^2+\ldots+n^2 = \sum_{i=0}^{n-8}(i+8)^2$

b) $\sum_{i=-3}^{n+2}(2i+3) = (2(-3)+3)+\ldots(2(n+2)+3) =$

$= \sum_{i=0}^{n+5}(2i-3)$

⑯. Expressa suma com únic Σ

a) $\sum_{k=1}^{m}(6k-3)+\sum_{k=1}^{m}(4-5k)=\sum_{k=1}^{m}(k+1)$

$= 4k^2-4k+1$

$\to 4k^2-12k+9 \oplus$

c) $\sum_{k=1}^{100}(2k-1)^2+\sum_{k=0}^{99}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{100}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{100}(2k-3)^2=\sum_{k=1}^{100}(8k^2-16k+10)$

☐ Fer algun de Productori