MATRIUS, SISTEMES i DETERMINANTS

Els Escalars

Cos d'Escalars $\mathbb{K}$: Conjunt de nombres amb dues operacions (suma i producte) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{C}$

- Satisfan propietats habituals. (Commutativa, Associativa, ...)
- Són invertibles (Restar, Dividir) // Per això no agafem $\mathbb{N}$ (no hi ha resta); $\mathbb{Z}$ (no divisió).

Matrius

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ on m = files i n = columnes $a_{ij} \in \mathbb{K}$

- Mat. Fila: $1 \times n$ $(a_1, \dots, a_n)$
- Mat. Columna: $m \times 1$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- Mat. Nul·la: $O_{m,n}$ on tots els a_{ij} són 0. $\begin{pmatrix} 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix}$
- Mat. Quadrada: $n \times n$
  - → Triangular Superior: Tot elements inferior diagonal són 0 $\begin{pmatrix} & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$
  - → Triangular Inferior: Tot elements superior diagonal són 0. $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ & \end{pmatrix}$
  - → Diagonal: Només elements de diagonal no són 0. $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$
- Mat. Identitat: Mat. Diagonal on tots elements són 1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Suma

$A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ $\boxed{A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij})}$

- Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Element Neutre: $0 + A = A$
- Commutativa: $A + B = B + A$
- Element Oposat: $A + (-A) = 0$

Producte per Escalars

$\lambda \in \mathbb{K}$ i $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\boxed{\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij}) = (b_{ij})}$

- Pseudo Associativa: $\lambda(\mu A) = \lambda\mu(A)$
- Distributiva 1: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- Identitat: $1 A = A$ // $-1 \cdot A = -A$
- Distributiva 2: $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

Transposició

$A = (a_{ij})_{m \times n} \in M(\mathbb{K})$ $\boxed{A^T = (a_{ji})_{n \times m}}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

- $(A^T)^T = A$
- A mat. quadrada:
  - → Simètrica: $A^T = A$
  - → Antisimètrica: $A^T = -A$

Producte de Matrius

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ i $B = (b_{ij})_{n \times p}$ $\boxed{A \cdot B = (c_{ij})_{m \times p}}$

∇ AB pot estar def. però BA no. i en general $BA \neq AB$.

- Associativa: $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$
- Distributiva: $A(B+C) = AB + AC$ i $(A+B)C = AC + BC$
- Element Unitari: $AI = A = IA$
- Relació Transposta: $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

Matrius Inverses

Diem que B és la inversa de A si $\boxed{BA = AB = I_n}$

Si això compleix diem que A^{-1} és la invertible.

∇ Si existeix, és única. NO sempre hi ha.

$$\boxed{\begin{array}{lll} (A^{-1})^{-1} = A & (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k & (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1} \\ (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t & (AB)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} & \end{array}}$$

Transformacions Elementals

Hi ha 3 tipus de transformacions per files:

1) Intercanviar dues files $f_i \leftrightarrow f_j$
2) Multiplicar fila per escalar no nul. $f_i \to \lambda f_i$ $(\lambda \neq 0)$
3) Sumar fila + una altra fila multiplicada $f_i \to f_i + \lambda f_j$ $(\lambda \neq 0)$

Matriu Elemental: Matriu que es pot obtindre de fer operacions elementals a la Identitat.

Matrius Equivalents

Dos matrius A, B són equivalents $\boxed{\exists E : A = E \cdot B}$ i expressem $A \sim B$

Matrius Escalonades

Matriu és escalonada (per files) si:

- Si una fila és nul·la i totes les de sota també.
- Cada fila no nul·la el primer element no nul és 1.
- El pivot d'una fila es troba més a l'esquerra que la posterior.

✳ <u>TOTA</u> matriu és equivalent a una matriu escalonada.

Rang: Nº files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equiv. a A.

Aplicació al Càlcul de la inversa (I)

$\boxed{\text{Si } E \text{ és matriu elemental} \Rightarrow E \text{ és invertible i la seva inversa } E^{-1} \text{ tmb. és elemental.}}$

1) $B^{-1} = B$ 2) $C_2^{-1} = C_{\frac{1}{2}}$ 3) $D_\lambda^{-1} = D_{-\lambda}$

Aplicació al Càlcul de la Inversa (II)

$\boxed{M \text{ mat. escalonada equivalent a } A \Rightarrow A \text{ invertible} \Leftrightarrow \text{Tots elemts. diag}(M) \text{ són } 1.}$

$\boxed{A \text{ invertible} \Leftrightarrow \text{Rang d'}A \text{ és } n}$

Determinants

Menor d'A: Submatriu formada treient files i columnes de la matriu A. Han de treure la mateixa quantitat de fil. i col.

Menor associat a a_{ij}: Submatriu al treure la fila 'i' i columna 'j' de l'element a_{ij}.

Determinant d'A: Si $n=1 \rightarrow \det(A) = a_{11}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right) \quad \boxed{a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - c\cdot e\cdot g - a\cdot f\cdot h - b\cdot d\cdot i = \det(A)} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Teorema

$\boxed{A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ invertible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0}$

Corol·lari

$\boxed{A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ te rang } r \Leftrightarrow \det(A) \neq 0}$

Operacions

- $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot \det(B)$
- $\det(A) = \det(A^t)$
- Si A invertible $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

⚠ En general $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Sistemes d'equacions lineals

- **Incompatible**: No hi ha solució $\boxed{S.I.}$. $(0\ 0 \dots 0 \mid x)$ on $x \neq 0$.
- **Compatible Determinat**: Té solució única $\boxed{S.C.D}$. Si nº incog = rang.
- **Compatible Indeterminat**: Té infinites solucions $\boxed{S.C.I}$. Té nº incog − rang = variables.

Sistemes Homogenis

Sistema on tots els termes independents són 0 i serà sempre compatible ja que tenim totes les variables = 0.

⚠ Pot ser $\begin{cases} \to S.C.I \\ \to S.C.D \end{cases}$

(5.3). Donades A i B mat. t.q AB quadrada proveu que BA està def.

Def A $n \times m$ i B $n' \times m'$ on i AB: $n \times m'$ t.q

$(n \times m) * (n' \times m') = (n \times m')$ on dedaim $m = n'$ i al ser quadrada $n = m'$.

Llavors podem dir que BA serà:

$(n' \times m') * (n \times m) = (n' \times n) * (n \times m) = (n' \times m)$. Això és possible pq

n^{o} col de B(n) és igual a n^{o} files de A(n) i BA podem veure que tmb quadrada.

(5.4). Dona elements c_{13} i c_{22} de $C = AB$ sense calcular tot.

$C_{13} = 1 * 0 + 2 * 3 + 1 * 2 = 6 + 2 = \boxed{8 = C_{13}}$. $C_{22} = -3 * 0 + 0 * (-4) + (-1) * 3 = \boxed{-3 = C_{22}}$

(5.6). Volem fórmula per calcular potències de mat. A.

a) Calc A^2, A^3 i A^5 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^3 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}$

b) Quina és mat A^{32}?

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$A^{32} = \begin{pmatrix} 2^{32} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{32} \end{pmatrix}$

c) Sigui D mat $n \times n$ diagonal que te $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Conjecturem D^r per $r \in \mathbb{Z}$ i demo Ind.

Com que A era mat diag. podem veure que $D^r_{n \times n} = \begin{pmatrix} \lambda_1^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^r & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^r \end{pmatrix}$

Cas Base: $r = 2 \to D^2 = D^1 \cdot D^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$ ☑ compleix.

Pas Inducció: Suposarem que compleix $r-1$ t.q $D^{r-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{r-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{r-1} \end{pmatrix}$ i volem Demo per r.

$D^{r-1} \cdot D^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^{r-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{r-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{r-1} \cdot \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{r-1} \cdot \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^r & 0 \\ 0 & \lambda_2^r \end{pmatrix} = D^r$ tal i com volíem

(5.9). A i B mat del mateix tipus. Demo AB simètrica $\Leftrightarrow$ A i B commuten

Matriu és simètrica si la seva transposta és igual.

Matrius que commuten sig. $AB = BA$.

$\Rightarrow$| Suposem: AB simètrica Volem Demo: A, B commuten

Suposem que AB sim. llavors $AB = (AB)^T = B^T \cdot A^T$ i com que sabem que $A = A^T$ i $B = B^T$ podem dir $AB = B^T \cdot A^T = B \cdot A$ ☑.

$\Leftarrow$| Suposem: A, B commuten Volem Demo: AB Simètrica

$A = A^T$,, $B = B^T$,, $AB = BA$

$AB = A^T \cdot B^T = B^T \cdot A^T = (AB)^T$ ☑

(5.10). I identitat $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ i O nul·la $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Troba les matrius.

a) $A^2 = I$ i $A \neq I, -I$;

$A^2 = A \cdot A = I \Rightarrow$ Si $\boxed{A = (-1) \cdot I}$ tenim $A^2 = (-1) \cdot I \cdot (-1) \cdot I = 1 \cdot I \cdot I = I$ ☑

b) $B^2 = O$ i $B \neq O$;

Si $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow B^2 = B \cdot B = O$

c) $C^2 = C$ i $C \neq I, O$;

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + bc = a \\ ab + bd = b \\ ca + dc = c \\ bc + d^2 = d \end{array}\right\} \begin{array}{l} bc = a - a^2 \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ bc = d - d^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a - a^2 = d - d^2 \Rightarrow a(1-a) = d(1-d) \Rightarrow \underline{a = d} \\ \Downarrow \\ a = d - d^2 + a^2 \end{array}$$

• $b(a^2 - d^2 + d + d) = b \Rightarrow b(a^2 - d^2 + 2d) = b(a^2 - a^2 + 2a) = b(2a) = b \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

• $bc = a - a^2 \Rightarrow bc = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = bc \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{4c}}$ $\boxed{d = \frac{1}{2}}$

$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4c} \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ on c pot valdre qualsevol cosa.

d) $DE = O$ però $E \neq D$ i $ED \neq O$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $DE = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

$ED = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ -1-1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq O$

5.11. Digues si totes les mat sat. les igualtats. Sino, dono cond. pq. si.

a) $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ i això només serà igual en el cas que $AB+BA=2AB$ i això passarà quan A,B commutin $AB=BA$.

b) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

$(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2$ i mateix cas que anterior $AB-BA=0$ quan A,B commutin.

5.14. Troba inv de les mat (Gauss).

1) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xRightarrow{F_1=F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&0&0&1\end{array}\right)\xRightarrow{F_2=F_2+F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\2&1&1&2\end{array}\right)\xRightarrow{F_2=F_2-2F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\0&-1&-1&0\end{array}\right)\xRightarrow{F_1=F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&-1&-1&0\end{array}\right)\xRightarrow{F_2=(-1)F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

Inv

2) $\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}5&0&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\xRightarrow{F_1=\frac{1}{5}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/5&0\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

Inv

5) $\begin{pmatrix}K&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $K\neq0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}K&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xRightarrow{F_1=F_1\cdot\frac{1}{K}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/K&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

Inv.

3) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ A^{-1} és ella mateixa

4) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&-3&1&0&0&1\end{array}\right)\xRightarrow{F_3=F_3+3F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&3&1\end{array}\right)$$

Inv.

5.16. Quines són lineals en x,y,z?

1) $x+3xy+2z=2$

NO. Pq. eq. sigui lineal ha de ser formada per la variable multiplicada per un escalar i no poden haver producte entre variables i han de ser primer grau.

2) $y+x+\sqrt{2}\,z=e^2$

SI. Compleix tots els requisits $\sqrt{2}$, e^2 són constants.

3) $x-4y+3z^{1/2}=0$

NO. Pq. $z^{1/2}$ no és primer grau.

4) $y=z\cdot\sin(\frac{\pi}{4})-2y+3\Rightarrow-3=z\cdot\sin(\frac{\pi}{4})-2y-y$

SI. pq $0x$ i $\sin(\frac{\pi}{4})$ és constant

(5.18). Responeu raonadament.

1) Rang mat. associada de sistema 5 eq. i 4 incog si és S.C.D? Si és S.C.I?

Si és S.C.D sig. que rang(A') = nº incog = 4 llavors $\boxed{\text{rang}(A') = 4}$

Si és S.C.I sig. que rang(A') < nº incog = 4 llavors $\boxed{\text{rang}(A') < 4}$

2) Nº eq. mínim per S.C.I amb grau llibertat = 2 i rang = 3? Quantes incog?

Sabem que $\boxed{\text{nº incog} - \text{rang} = \text{grau llibertat}}$ Si el rang és 3 sabem que $\boxed{\text{mínim 3 eq}}$

i si grau és 2 ⇒ nº incog = grau llibertat + rang = 2+3 = $\boxed{5 = \text{nº incog}}$

3) Pot ser compatible det. sistema 7 eq i 10 incog?

NO. pq S.C.D quan nº incog = rang i si hi ha 10 incog el rang mai podrà ser > 7.

4) És possible que S.L nº eq < incog sigui S.I?

SI. Per exemple $\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x+y+z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 0 \quad 0 \quad \boxed{0=3} \end{array}\right\}$ Això és impossible així que $\boxed{\text{S.I}}$.

Un S.L serà $\boxed{\text{S.I quan rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)}$ rang(A) = 1 i rang(A|b) = 2.

5) Inventa S.C.D, S.C.I, S.I de 3 incog i 4 eq.

S.C.D: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 4x+3y+2z=2 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 8x+y+4z=3 \end{array}\right\}$ S.C.I: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 4x+3y+2z=2 \\ 2x+3y+2z=2 \\ 8x+y+4z=3 \end{array}\right\}$ S.I: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+2y+2z=3 \\ 4x+3y+2z=2 \\ 8x+y+4z=3 \end{array}\right\}$

(5.19). Resol en $\mathbb{Z}_2$. Eliminació Gaussiana i resposta en forma paramètrica.

1) $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F_2=F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F_3=F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{F_1=F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

No recordava que era $\mathbb{Z}_2$.

1) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y=1 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

2) $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=1 \\ z+y=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{S.I}}$

3) $\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{l} y+z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = x = -z$ i $-1 = 1$ en $\mathbb{Z}_2$

$(x,y,z) = (0,0,0)$ i $(x,y,z) = (1,1,1)$ # Es veu a ull tmb.

(5.20). Resol amb Gauss i sol. param.

a)
$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=8 \\ -x-2y+3z=1 \\ 3x-7y+4z=10 \\ 3y-2z=-1 \end{array}\right\}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&8\\ -1&-2&3&1\\ 3&-7&4&10\\ 0&3&-2&-1 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2+F_1}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&8\\ 0&-1&5&9\\ 0&-10&-2&-14\\ 0&3&-2&-1 \end{array}\right)
\xrightarrow{F_1=F_1+F_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&7&17\\ 0&-1&5&9\\ 0&-10&-2&-14\\ 0&3&-2&-1 \end{array}\right)
\xrightarrow{F_2=-1\cdot F_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&7&17\\ 0&1&-5&-9\\ 0&-10&-2&-14\\ 0&3&-2&-1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4=F_4-3F_2]{F_3=F_3+10F_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&7&17\\ 0&1&-5&-9\\ 0&0&-52&-104\\ 0&0&13&26 \end{array}\right)
\xrightarrow{F_4=\frac{1}{13}\cdot F_4}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&7&17\\ 0&1&-5&-9\\ 0&0&-52&-104\\ 0&0&1&2 \end{array}\right)
\xrightarrow{F_3=\frac{-1}{52}\cdot F_3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&7&17\\ 0&1&-5&-9\\ 0&0&1&2\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{2} \end{array}\right)
\xrightarrow{\text{Eliminem } F_4}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&7&17\\ 0&1&-5&-9\\ 0&0&1&2 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_2=F_2+5F_3]{F_1=F_1-7F_3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&3\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&2 \end{array}\right)
\boxed{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}}$$

~~b)~~
$$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=3 \\ 2x-2y+5z=4 \\ x+2y-z=-3 \\ 2y+2z=1 \end{array}\right\}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&-2&3\\ 2&-2&5&4\\ 1&2&-1&-3\\ 0&2&2&1 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-2F_1}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&-2&3\\ 0&0&9&-2\\ 0&3&1&-6\\ 0&2&2&1 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_2=\frac{1}{9}\cdot F_2]{F_4=\frac{1}{2}\cdot F_4}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&-2&3\\ 0&0&1&-2/9\\ 0&3&1&-6\\ 0&1&1&1/2 \end{array}\right)
\xrightarrow{F_1=F_1+F_4}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-1&7/2\\ 0&0&1&-2/9\\ 0&3&1&-6\\ 0&1&1&1/2 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4=F_4-F_2]{F_1=F_1+F_2,\ F_3=F_3-F_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&59/18\\ 0&0&1&-2/9\\ 0&3&0&-52/9\\ 0&1&0&13/18 \end{array}\right)$$

Malament copiat.

b)
$$\left.\begin{array}{r} x-y+2z=3 \\ 2x-2y+5z=4 \\ x+2y-z=-3 \\ 2y+2z=1 \end{array}\right\}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&2&3\\ 2&-2&5&4\\ 1&2&-1&-3\\ 0&2&2&1 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-2F_1}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&2&3\\ 0&0&1&-2\\ 0&3&-3&-6\\ 0&2&2&1 \end{array}\right)
\xrightarrow{F_3=\frac{1}{3}F_3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&2&3\\ 0&0&1&-2\\ 0&1&-1&-3\\ 0&2&2&1 \end{array}\right)
\Rightarrow
\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&2&3\\ 0&0&1&-2\\ 0&1&-1&-3\\ 0&0&4&7 \end{array}\right)$$

Veiem que $z=-2$ i $z=\frac{7}{4}$ a la vegada cosa que no es possible així que **NO TÉ**

c)
$$\left.\begin{array}{r} x-y+2z-\omega=-1 \\ 2x+y-2z-2\omega=-2 \\ -x+2y-4z+\omega=1 \\ 3x\qquad\quad -3\omega=-3 \end{array}\right\}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&2&-1&-1\\ 2&1&-2&-2&-2\\ -1&2&-4&1&1\\ 3&0&0&-3&-3 \end{array}\right)
\xrightarrow{F_4=\frac{1}{3}F_4}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&2&-1&-1\\ 2&1&-2&-2&-2\\ -1&2&-4&1&1\\ 1&0&0&-1&-1 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_3=F_3+F_4]{F_1=F_1-F_4,\ F_2=F_2-2F_4}
\left(\begin{array}{cccc|c} 0&-1&2&0&0\\ 0&1&-2&0&0\\ 0&2&-4&0&0\\ 1&0&0&-1&-1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-2F_2]{F_1=F_1+F_2}
\left(\begin{array}{cccc|c} 0&0&0&0&0\\ 0&1&-2&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&-1&-1 \end{array}\right)
\Rightarrow
\boxed{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ \omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\left.\begin{array}{l} x-\omega=-1 \\ y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1+\omega \\ y=2z \end{array}$ $\quad z=s$, $\omega=t$

$x=-1+t$

$y=2s$

d)
$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2-2x_3\qquad\quad +2x_5\qquad\ =0 \\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6=-1 \\ +5x_3+10x_4\qquad +15x_6=5 \\ 2x_1+6x_2\qquad +8x_4+4x_5+18x_6=6 \end{array}\right\}
\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&3&-2&0&2&0&0\\ 2&6&-5&-2&4&-3&-1\\ 0&0&5&10&0&15&5\\ 2&6&0&8&4&18&6 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_3=\frac{1}{5}F_3]{F_4=F_4-F_2}
\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&3&-2&0&2&0&0\\ 2&6&-5&-2&4&-3&-1\\ 0&0&1&2&0&3&1\\ 0&0&5&10&0&21&7 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_4=F_4-5F_3]{F_2=F_2-2F_1}
\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&3&-2&0&2&0&0\\ 0&0&-1&-2&0&-3&-1\\ 0&0&1&2&0&3&1\\ 0&0&0&0&0&6&2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4=\frac{1}{2}F_4]{F_2=F_2+F_3}
\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&3&-2&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&2&0&3&1\\ 0&0&0&0&0&3&1 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_4=\frac{1}{3}F_4]{F_3=F_3-F_4}
\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&3&-2&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1/3 \end{array}\right)$$

$x_6=\frac{1}{3}$

$x_3+2x_4=0 \Rightarrow x_3=-2x_4$

$x_1+3x_2-2x_3+5x_4=0 \Rightarrow x_1+3x_2-2(-2x_4)+5x_4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1+3x_2+4x_5+5x_4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1+3x_2+9x_5=0$

$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2+9x_5=0 \\ x_3=-2x_4 \\ x_6=\frac{1}{3} \end{array}\right\}$$