ESPAIS VECTORIALS

$\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n \}$.

Sigui $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ elements de $\mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Suma: $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ **Prod. per Escalar**: $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Propietats

Suma	Prod per Escalar
s1) $x + (y + z) = (x + y) + z$	p1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$
s2) $x + y = y + x$	p2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
s3) $x + 0 = x$ on $0 = (0, 0, \dots, 0)$	p3) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$
s4) $x + x' = 0$ i x' sempre existeix	p4) $1 x = x$

Espais Vectorials (E)

Un espai vectorial sobre un $\mathbb{K}$ consisteix:
1. Conjunt no buit E
2. Op. interna $E \times E \to E$ (Suma +)
3. Aplicació $\mathbb{K} \times E \to E$ (producte per escalar)

e1) $u + (v + w) = (u + v) + w$

e2) $u + v = v + u$

e3) $0_E \in E$: $u + 0_E = u$

e4) $u' \in E$: $u + u' = 0_E$ i és únic.

e5) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v$

e6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

e7) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

e8) $1 u = u$ on 1 prod. neutre en $\mathbb{K}$

! En essència un espai vectorial és un conjunt de vectors que tots aquests (per def) compleixen aquests axiomes.

// Els elements de E s'anomenen vectors.

! SELH si s_1, s_2 solucions llavors $s_1 + s_2$ també és sol.

Sistema Eq. Lineal Homogeni

Propietats

I) $0_v = 0_E$ II) $\lambda 0_E = 0_E$ III) Si $\lambda v = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ o $v = 0_E$ IV) Oposat v és $-v$

El conjunt de les solucions d'un SELH és un espai vectorial

Subespai Vectorial d'un espai Vect de $\mathbb{K}$.

Subconjunt $S \subseteq E$ és un subespai vectorial (SEV) si:

- □ $0_E \in S$
- □ $\forall u, v \in S : u + v \in S$
- □ $\forall u \in S \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda u \in S$

✳ Si algun d'aquests no compleix llavors S no és subespai de E.

Bàsicament és un subset qualsevol que compleix aquestes condicions. Aquest subespai en essència també serà un espai vectorial. Pq al ser subconjunt d'un, aquest subespai també complirà axiomes i podrà (per def) ser considerat un espai vectorial.

Intersecció de Subespais

$\boxed{\text{Si } S \text{ i } S' \text{ són subespais d'}E \Rightarrow S \cap S' \text{ tmb és subespai d'}E}$

L'unió ($S \cup S'$) no sol ser-ho.

Combinació Lineal

Donats $u_1, u_2, \dots, u_k$ vectors d'E, una combinació lineal és del tipus: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$.

El vector v és comb. lineal de $u_1, u_2, \dots, v_k$ si existeixen escalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$: $\boxed{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k}$

Subespai Generat

No té pq ser L.I.

$v_1, v_2, \dots, v_k$ vectors d'E. El Subespai generat és: $\boxed{\langle u_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \}}$

Això realment és el conjunt de totes les comb. lineals de $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Demo: "Conjunt de vectors tals que qualsevol vector de E pot ser expresat com C.L. d'aquests vectors".

1) $\langle u_1, \dots, v_k \rangle \neq 0$? Si, pq: $0_E \in \langle u_1, \dots, v_k \rangle$ ja que $0_E = 0u_1 + \dots + 0v_k$ ☑

2) $u, v \in \langle u_1, \dots, v_k \rangle$ $u + v \in \langle u_1, \dots, v_k \rangle$?

Sigui $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ on $\lambda_i \in \mathbb{K}$

Sigui $v = \alpha_1 v_k + \dots + \alpha_k v_k$ on $\lambda_i \in \mathbb{K}$

$\overset{+}{\Rightarrow} \underbrace{(\lambda_1 + \alpha_1)}_{\gamma_1} u_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_k + \alpha_k)}_{\gamma_k} v_k$ on $\gamma_i \in \mathbb{K}$

Podem veure que $u+v$ és C.L. de $\langle u_1, \dots, v_k \rangle$ llavors $v+v \in \langle u_1, \dots, v_k \rangle$ ☑

3) $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \langle u_1, \dots, v_k \rangle \Rightarrow \alpha v \in \langle u_1, \dots, v_k \rangle$?

Sigui $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \Rightarrow \alpha v = \overbrace{(\alpha \lambda_1)}^{\gamma_1} v_1 + \dots + \overbrace{(\alpha \lambda_k)}^{\gamma_k} v_k$ on $\gamma_k \in \mathbb{K}$

Podem veure que αv és C.L de $\langle u_1, \dots, v_k \rangle$ llavors $\alpha u \in \langle u_1, \dots, v_k \rangle$ ☑

Proposició:

El subespai $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ és el subespai vectorial més petit de E que conte els vectors $u_1, \dots, v_k$.

Conjunt Generador d'un espai vectorial (S) és un conjunt de vectors tals que qualsevol vector de S pot ser expresat com C.L dels vectors del conjunt.

// "Un conjunt generador és un conjunt de vectors que, al combinar-se linealment, generen tot l'Espai S".

$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in S$ és generador de S si $\forall s \in S$ és de la forma $s = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$

El "Subespai generador" està format per un conjunt de vectors i és, en si, un subespai vectorial.

Per exemple estem en l'espai $\mathbb{R}^3$ i definim un $S = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ on S el subespai generat per S serà el pla "xy" (Llavors tots els vectors de xy poden ser obtinguts com C.L. dels vectors de S)

Aquí està l'essència.

Independència lineal

Siguin $u_1, \dots, u_k \in E$ (vectors) l'eq. $\lambda u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0_E$ sempre té la solució $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

- Sol. Única $\Rightarrow$ Direm que $u_1, \dots, u_k$ són Linealment Independents (LI)
- NO Sol. Única $\Rightarrow$ Direm que $u_1, \dots, u_k$ són Linealment Dependents (LD)

(*) Exemple: $u_1 = 2x + 3y$, $u_2 = 4x + 6y$. Hem de veure $\lambda u_1 + \gamma u_2 = 0_E$. Però si fem $\lambda = -2$ i $\gamma = 1$: $(-4x - 6y) + (4x + 6y) = 0_E$ i, donat que $\lambda \neq \gamma \neq 0$ podem dir que $\{u_1, u_2\}$ no són L.I.

✳ 0_E és L.D. ✳ $\{u_1\}$ i $u_1 \neq 0_E$ és L.I. ✳ $\lambda \in \mathbb{K}$ $\{u, \lambda u\}$ és L.D.

Si $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$ i no tots els $\lambda_i = 0$ és degut a que almenys un dels vectors és una C.L dels altres.

Mètode de Gauss

Per descobrir si conj. vectorial és L.I o no i quin vector és dependent i quin no.

$\mathbb{R}^3$ $\left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\}$ són l.i? $\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Hem d'igualar-ho a 0_E pq. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ llavors és l.i com volem veure.

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reestructuració}} \begin{array}{c} u_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - 3F_1]{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 11 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = \frac{1}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 11 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 = F_1 + 4F_2]{F_3 = F_3 - 11F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = \frac{1}{7}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_3]{F_1 = F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podem veure que el Rang és 3 que és el nº de vectors llavors $\Rightarrow$ L.I.

En aquest cas tmb compleix que Rang = nº incog $\Rightarrow$ S.C.D i la sol. trivial és única.

Propietats

Sigui $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ conjunt vectors $\mathbb{K}$ espai:

- Si $0_E \in S \Rightarrow u_1, \dots, u_k$ són L.D.
- Si $u_1, \dots, u_k$ són L.I $\Rightarrow$ Tot subconjunt de S és L.I.
- Si $0_E \notin S \Rightarrow u_1, \dots, u_k$ són L.I.
- Si $u_1, \dots, u_k$ són L.D $\Rightarrow$ Tot conjunt que contingui S serà L.D (pq no desapareix.)

Teorema

$\boxed{\text{Si } u_1, \dots, u_k \text{ són L.D i } u_1 \text{ és C.L. dels altres vec de } S \Rightarrow \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \langle u_2, \dots, u_k \rangle}$

Caracterització: $v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k \Rightarrow \lambda_1(\beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \dots + \beta_k u_k) + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 \beta_2)}_{\gamma_2} u_2 + \underbrace{(\lambda_1 \beta_3)}_{\gamma_3} u_3 + \dots + \underbrace{(\lambda_k \beta_k)}_{\gamma_k} u_k \Rightarrow \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 + \dots + \gamma_k u_k \Rightarrow v \in \langle u_2, \dots, u_k \rangle$

Teorema

$\boxed{\text{Conjunt vectors } S \text{ és LD} \Leftrightarrow \text{Hi ha un vector } v \in S \text{ que és C.L de la resta de vec de } S.}$

Bases i Dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$ espai vectorial. Un conjunt vectors $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ és base d'E si:

1) B és linealment Independent. Això fa que el conjunt sigui el mínim pq. un conjunt gen. pot ser L. D.

2) $E=\langle b_1, b_2, \dots, b_m\rangle$ és a dir $b_1, b_2, \dots, b_m$ generen E.

La Base canònica:

▷ de $\mathbb{K}^n$ és $\{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\}$.

▷ de $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ és $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Corol·lari

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} S=\{u_1, v_2, \dots, v_k\} \text{ l.i.} \\ v\in E \end{array}\right\} \Rightarrow \text{si } \{v, u_1, v_2, \dots, v_k\} \text{ li } \Rightarrow v\notin \{u_1, u_2, \dots, v_k\}}$$

Proposició: $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ base de E.

Tot vector v de E s'expressa de forma única com una c. l. dels vectors de B (Base).

$v=\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m \Rightarrow \vec{V}_B=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ que és el vector coordenades de v en la Base.

Proposició

Sigui $\{u_1, \dots, v_k\}$ conjunt vectors de E que son L. I. $\Rightarrow k\leq m$ (això representa el nº d'elements).

Dimensió

Nº de vectors de la Base d'aquell espai "$\dim(E)$". # Tmb. es pot pensar com el nº d'escalars.

▷ $\dim(\mathbb{K}^n)$: n. Es necessiten n vectors per representar qualsevol vector de l'Espai.

▷ $\dim(\mathcal{M}_{m\times m})$: $m\cdot m$. Pq. cada fil/col. a_{ij} ha de ser tractada independentment (Pensa en la base).

▷ $\dim(P_d(\mathbb{K}))$: $d+1$. Donat que hi ha un terme constant + termes fins x^d.

Dimensions de Subespais

▷ $S=0_E$: 0. Pq. no és necessita cap paràmetre per ser representat.

▷ $S=\langle u_1, \dots, v_k\rangle$: Max nº vec. L.I. També conegut com el Rang de la mat formada.

▷ S homogeni: Nº de graus de llibertat o quantes variables lliures.

Propietats $\dim(E)=m$ i $W=\{w_1, \dots, w_m\}$. | S és subespai de E

• Si W és L.I. $\Leftrightarrow$ W és Base de E.	• $\dim(S)\leq \dim(E)$
• Si W genera E $\Rightarrow$ W és Base de E.	• Si $\dim(S)=\dim(E) \Rightarrow S=E$

Recorda que $\dim(S)$ agafa els L.I. i si S pot representar tot E, E no "aporta" res, així que podem considerar que són mateix Espai.

Canvi de Bases $\boxed{P\cdot X = X'}\ \boxed{X = P^{-1}X'}$

Suposem que tenim un espai E amb múltiples bases B, C. Cada vector de E pot ser expressat de forma única en termes de cada Base. Si volem veure la equivalència ens farà falta "Matriu canvi de Base" denotada com $P_{B\to C} = P_C^B$ on en aquest cas tenim un vector expressat respecte Base B, al multiplicar-lo per $P_{B\to C}$ obtindrem el vector representat respecte Base C.

Exemple: $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$; $B = \{(1,-1,1),(0,1,1),(0,0,-1)\}$. $\boxed{P_{B_c\to B}}$?

1) Trobar les coordenades del primer vector de B_c respecte B

$(1,0,0) = x(1,-1,1) + y(0,1,1) + z(0,0,-1)$

$(1,0,0) = (x,-x,x) + (0,y,y) + (0,0,-z)$

$(1,0,0) = (x, -x+y, x+y-z)$

$$\begin{cases} x = 1 \\ -x+y = 0 \\ x+y-z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{matrix}}$$

$\boxed{(1,0,0) = (1,1,2)_B}$

2) Repetim procés per a la resta de vectors de B.

✳ Fixa't que realment només fa falta canviar l'igualtat en el sistema.

$$\begin{cases} x = 0 \\ -x+y = 1 \\ x+y-z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ -x+y = 0 \\ x+y-z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=-1 \end{matrix}$$

$\boxed{(0,1,0) = (0,1,1)_B}$ | $\boxed{(0,0,1) = (0,0,-1)_B}$

3) Ara ja només queda representar $P_{B_c\to B}$ per columnes.

$$\boxed{P_{B_c\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Ara si tenim $\vec{V}_{B_c} = (2,3,1)$ en B_c i volem representat en B fem.

$$\vec{V}_B = P_{B_c\to B}\cdot \vec{V}_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}_c = (2,5,6)$$

Exemple: $B = \{(1,-1,1),(0,1,1),(0,0,-1)\}$; $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ $\boxed{P_{B\to B_c}}$?

*) Absolutament mateix procediment però ara l'igualtat serà B.

$(1,-1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$ $\boxed{(0,1,1) = (0,1,1)_B}$ $\boxed{(0,0,-1) = (0,0,-1)_B}$

$(1,-1,1) = (\alpha,0,0) + (0,\beta,0) + \gamma(0,0,\gamma)$

$(1,-1,1) = (\alpha,\beta,\gamma) \Rightarrow \boxed{(1,-1,1) = (1,-1,1)_B}$

$$\boxed{P_{B\to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Exemple: $B = \{(1,-1,1),(0,1,1),(0,0,-1)\}$ i $P_{B_c\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Coord $\vec{v} = (-1,0,-1)$ en B?

$\vec{v} \overset{①}{=} (-1,0,-1)_{B_c} \overset{②}{=} (-1,-1,-1)_B$ ✓

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Demo Propietat 4

$\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle = E \Rightarrow \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ són L.I i per tant W es Base.

Si $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ no son L.I sig. que $\exists \omega' \in \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ on ω' es C.L. dels altres.

Llavors com que W està generant E i ω' es C.L. implica que $\langle \omega_2, \dots, \omega_m \rangle \Rightarrow Dim(E) \leq m-1$

però la dim (E) no pot ser $\neq m$ així que com que fèiem R.A $\Rightarrow$ W és L.I.

Matriu Canvi de Base

$$\boxed{P_{B'}^{B} = P_{B'}^{B_c} \cdot P_{B_c}^{B}} \qquad \boxed{P_{B_c}^{B} \cdot [\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B'}}$$

$\Rightarrow P_{B_c}^{B}$: Ficar $b_1, \dots, b_m$ en columna

$\Rightarrow P_{B'}^{B_c}$: Ficar $b'_1, \dots, b'_m$ en colune i fer inversa.

Imaginem la base $B = \{\underbrace{(0'64, 0'77)}_{b_1}, \underbrace{(-0'5, 0'87)}_{b_2}\}$. Realment les coord. dels vectors b_1, b_2 estan en base a la canònica. No seria possible inventar o oblidar l'existència d'aquesta base B_c.

Llavors realment $b_1 = 0'64\hat{i} + 0'77\hat{j}$ i $b_2 = -0'5\hat{i} + 0'87\hat{j}$.

Si tenim un vector $\vec{v}_B = (4,3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ aquests 4, 3 no son les coord. respecte B_c sino B.

$\vec{v}_B = 4b_1 + 3b_2$ i si ara vulguerim saber valor en B_c de $\vec{v}_B$ doncs hauriem de sub $\vec{v}_{B_c} = \begin{pmatrix} 1'07 \\ 5'66 \end{pmatrix}$

#Tots aquests càlculs son extensos llavors fem ús de la mat. canvi de base.

Ens podem fixar que $\begin{pmatrix} 0'64 & -0'5 \\ \underbrace{0'77}_{b_1} & \underbrace{0'87}_{b_2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1'07 \\ 5'66 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{B_c}}$ i identifiquem que la mat és $P_{B_c}^{B}$.

#Aquest procés només és fàcil si $\longrightarrow B_c$.

(6.7). Digues quins conjunts són subespais sobre $\mathbb{R}$. Justifica.

$E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0,\ x-t=0 \right\}$

1) $E_5 \neq \emptyset$ com certa pq $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_5$ així que $E_5 \neq \emptyset$.

2) $\left.\begin{array}{l}(x,y,z,t) \in E_5 \Rightarrow x+y+z+t=0,\ x-t=0 \\ (x',y',z',t') \in E_5 \Rightarrow x'+y'+z'+t'=0,\ x'-t'=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \\ t+t' \end{pmatrix} \overset{?}{\in} E_5$

Clarament certa pq quan sumen les dues igualtats tenim.

- $(x+x') + (y+y') + (z+z') + (t+t') = 0+0 = 0$ ☑
- $(x+x') - (t+t') = 0+0 = 0$ ☑

3) Agafem un $\lambda \in \mathbb{R}$ i un $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_5$ volem saber si $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda t \end{pmatrix} \overset{?}{\in} E_5$

- Sabem que $(x+y+z+t)=0 \Rightarrow \lambda(\underbrace{x+y+z+t}_{0}) = \lambda \cdot 0 = 0$ ☑
- Sabem que $(x-t)=0 \Rightarrow \lambda(\underbrace{x-t}_{0}) = \lambda \cdot 0 = 0$ ☑

(6.16)

1) $\left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}} \right\}$ l.i?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Rang $= 2 =$ nº vectors $\Rightarrow$ l.I.

5) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$ l.i?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = F_4 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = F_4 + F_2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = F_4 - 4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = \frac{-1}{14} F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ L.I.

(6.4). Siguin u, v, w elements d'espai vectorial i α, β, γ elements del cos d'escalars $(\alpha \neq 0)$. Sup: $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$
Escriu ~~tots~~ els vectors u, $u-v$, $u + \alpha^{-1}\beta v$ en funció de v i w.

u) $\alpha u = -\beta v - \gamma w \Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{\alpha}(-\beta v - \gamma w)}$ // Això és possible pq sabem que $\alpha \neq 0$.

$u-v$) Busquem $u-v$ i podem fer servir el punt anterior.

$u = \frac{1}{\alpha}(-\beta v - \gamma w) \Rightarrow u-v = \frac{1}{\alpha}(-\beta v - \gamma w) - v \Rightarrow u-v = \frac{-\beta v}{\alpha} - v - \frac{\gamma w}{\alpha} = \boxed{v\left(\frac{-\beta}{\alpha} - 1\right) - \frac{\gamma w}{\alpha}}$

$u + \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot v$) $u + \frac{\beta}{\alpha} v$ = Són el mateix

$u = \frac{1}{\alpha}(-\beta v - \gamma w) \Rightarrow u + \frac{\beta}{\alpha} v = \frac{1}{\alpha}(-\beta v - \gamma w) + \frac{\beta}{\alpha} v = \boxed{\frac{-\gamma w}{\alpha}} =$

(6.8). Denotem $P(\mathbb{R})$ espai vec. dels poli amb coeficients reals i variable x.
Digues quins dels subconjunts són subespais vectorials de $P(\mathbb{R})$. Justifica.

$F_1 = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P(\mathbb{R}) \mid a_2 = a_0\}$ → Això és lineal i homogeni $-a_0 + a_2 = 0$

RECORDA: Per saber si subconjunt (F_1) ~~està~~ és un sub. espai → $F_1 \neq \emptyset$; $\forall u,v \in F_1 : u+v \in F_1$; $\forall u \in F_1 \wedge \lambda \in \mathbb{R} : \lambda u \in F_1$

→ $F_1 \neq \emptyset$

Podem agafar $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ i tenim 0_E que compleix $a_2 = a_0$ per descomptat.

→ $\forall u,v \in F_1 : u+v \in F_1$

$$\left.\begin{aligned} u &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ v &= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{u+v} \underbrace{(a_3+b_3)}_{c_3}x^3 + (a_2+b_2)x^2 + \underbrace{(a_1+b_1)}_{c_1}x + (a_0+b_0) \text{ i com que tenim}$$

$a_2 = a_0 \;,\; b_2 = b_0 \Rightarrow (c_3)x^3 + \underbrace{(a_2+b_2)}_{c_2}x^2 + (c_1)x + \underbrace{(a_2+b_2)}_{c_2} = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_2 \in F_1$

→ $\forall u \in F_1, \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda u \in F_1$

$u = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \xrightarrow{\lambda} \lambda a_3x^3 + \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0$ i com que $a_2 = a_0 \Rightarrow \lambda a_2 = \lambda a_0$

$F_6 = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) \mid p'(5) = 0\}$ Si fos $p'(5) = 1$ no pq no ~~tindria cap valor que $p(x)=0$~~ seria homogeni

→ $F_1 \neq \emptyset$

Cosa certa pq $0_E \in P(\mathbb{R})$ i compleix en efecte que $p'(5) = 0$

→ $\forall u,v \in F_6 : u+v \in F_6$

$$\left.\begin{aligned} u &= p(x) \text{ on } p'(5) = 0 \\ v &= q(x) \text{ on } q'(5) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u+v = p(x) + q(x) \text{ on } (p(x)+q(x))' = p'(x) + q'(x) = 0 + 0 = 0$$

→ $\forall u \in F_6 \wedge \lambda \in \mathbb{R} : \lambda u \in F_6$

$u = p(x) \Rightarrow \lambda u = \lambda p(x)$ on $(\lambda p(x))' = \lambda(p'(x)) \Rightarrow \lambda p'(5) = 0$

(6.9). Considerem $M_{m\times m}(\mathbb{R})$ digues quins són subespais i justifica.

$M_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i A, B commuten (Sí)

→ $M_1 \neq \emptyset$ | Cosa certa pq $0 \in M_1$ donat que $0B = B0$

→ $\forall A_1, A_2 \in M_1 : A_1 + A_2 \in M_1$ | Sabem que $A_1B = BA_1$ i $A_2B = BA_2$ ⇒ Fem la suma i obs

$A_1B + A_2B = BA_1 + BA_2 \Rightarrow (A_1 + A_2)B = B(A_1 + A_2)$ que compleix def de M_1

→ $\forall A_1 \in M_1 \wedge \lambda \in \mathbb{R} : \lambda A_1 \in M_1$ | Sabem $A_1B = BA_1 \Rightarrow \lambda A_1B = \lambda BA_1 \Rightarrow (\lambda A_1)B = B(A_1\lambda)$

$\lambda\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda a + c & 2\lambda b + d \\ \lambda a + \lambda c & \lambda b + \lambda d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda a + \lambda c & 2\lambda b + \lambda d \\ \lambda a + \lambda c & \lambda b + \lambda d \end{pmatrix}$

(6.10). $T \subseteq \mathbb{R}^4$. Demo $\vec{u}$ pot escriure's com C.L. dels vec del conjunt d'maneys de dues maneres.

$$T = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} \right\} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix}0\\3\\5\\1\end{pmatrix}$$

Primer verifiquem si els vectors de T generen un espai que inclogui a '$\vec{u}$'.

(Que això no demo que T sigui un subespai generador.)

$$\left.\begin{aligned} x + y \qquad &= 0 \\ y + z + t &= 3 \\ -x + y + z + 2t &= 5 \\ z \qquad &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Veiem primerament que $\boxed{z = 1}$. Resolem sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 + F} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Veiem que rang < nº incog $\Rightarrow$ S.C.I. amb paràm = nº incog − rang = 1.

Diem que $\boxed{t = \lambda}$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$ i queda $\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ \boxed{y = 2 - \lambda} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x = \lambda - 2}$

Llavors podem concloure que $(x, y, z, t) = (\lambda - 2, 2 - \lambda, 1, \lambda) \Rightarrow \boxed{\lambda \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\5\\1\end{pmatrix}}$

(6.11). Per quins valors de 'a' de $\vec{u}$ es pot escriure com C.L. de T?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\5\\a\end{pmatrix} \quad T = \left\{ \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$\vec{u}$ serà C.L. de T si es pot escriure en funció els vectors que formen T.

$5 + a + 2(1 + 3a) = 5 + a + 2 + 6a = 7a + 7$

$$\left.\begin{aligned} 3x \qquad - z &= 1 \\ x + 7y + 2z &= 5 \\ -x - y \qquad &= a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & a \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 6 & 2 & 5+a \\ 0 & -3 & -1 & 1+3a \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 7a+7 \\ 0 & -3 & -1 & 1+3a \end{array}\right)$$

Veiem que hi ha un punt crític en F_2 $7a + 7 = 0 \Rightarrow 7a = -7 \Rightarrow a = -1$.

Si $a \neq -1$ el sistema serà incompatible donat que rang (ampliada) > rang (T).

Si $\boxed{a = -1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -(-1) \\ 0 & -3 & -1 & 1 + (-3) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right)$ Sistema Comp. Indet (1 paràm).

(6.12). Per quins val de a, b la mat $\begin{pmatrix}1 & 0\\a & b\end{pmatrix}$ és C.L. de $\begin{pmatrix}1 & 4\\-5 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}$?

$$\alpha \begin{pmatrix}1 & 4\\-5 & 2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\a & b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha + \beta & 4\alpha + 2\beta\\-5\alpha + 3\beta & 2\alpha - \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\a & b\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ 4\alpha + 2\beta &= 0 \\ -5\alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha - \beta &= b \end{aligned}\right\}$$

$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$

$4(1 - \beta) + 2\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$

$5 + 6 = \boxed{a = 11}$

$-2 - 2 = \boxed{b = -4}$

$\boxed{\text{Si } a = 11,\ b = -4}$

(6.13). $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$. Troben cond que han de complir components vec $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ pq pertany al subespai gen per $\{\vec{u},\vec{v}\}$.

El vec. incog. ha de ser C.L. de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ per poder pertanyer al subespai generat.

$$\left.\begin{aligned} a \quad &= x\\ a+b &= y\\ 2a+b &= z\end{aligned}\right\}$$ Veiem que $x=a$,, $b=y-a=y-x \Rightarrow z=2x+(y-x)=\boxed{x+y=z}$

(6.14). Doneu forma gen dels Poli de $P(\mathbb{R})$ que pertanyen al subespai gen per $\{1+x, x^2\}$.

La forma gen. serà un vector que és C.L dels vec del sub. espai sent i de la forma

$\vec{p(x)}=\alpha(1+x)+\beta(x^2)$ on $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(6.16). Digueu si els vectors són linealment independents al espai vectorial.

2) $\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}\right\}$ a $\mathbb{R}^3$ Igualem a 0_E perquè així es comprova si són o no.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&0\\-3&-1&-4&0\\1&5&5&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&5&0\\2&3&1&0\\-3&-1&-4&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&5&0\\0&-7&-9&0\\0&14&11&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&5&0\\0&-7&-9&0\\0&0&-7&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&5&0\\0&-7&-9&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$ Podem veure que rang = nº incog

així que S.C.D $\Rightarrow$ Són L.I.

Està Bé

(6.17). En $\mathbb{R}^4$ considerem $\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\a\end{pmatrix}}$, $\underset{v_2}{\begin{pmatrix}3\\-1\\b\\-1\end{pmatrix}}$ i $\underset{v_3}{\begin{pmatrix}-3\\5\\a\\-4\end{pmatrix}}$. Det a,b pq siguin L.D i expresa.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&a&0\\3&-1&b&-1&0\\-3&5&a&-4&0\end{array}\right)\xrightarrow[U_3+3U_1]{U_2-3U_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&a&0\\0&-4&b&-1-3a&0\\0&8&a&-4+3a&0\end{array}\right)\xrightarrow[(U_3+3U_1)+2U_2]{U_2-3U_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&a&0\\0&-4&b&-1-3a&0\\0&0&a+2b&-6-3a&0\end{array}\right)$$

Primer havíem de ~~resoldre~~ buscar que $\det(A)=0$ però al no ser quadrada fem Sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-3&0\\1&-1&5&0\\0&b&a&0\\a&-1&-4&0\end{array}\right)\xRightarrow{\text{*Passem en pissarra}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&a+2b&0\\0&0&-6+6b&0\end{array}\right)$$

On pq no sigui S.I veiem que $\underline{b=1}$; $\underline{a=-2}$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 \quad + 3\alpha_3 &= 0\\ \alpha_2-2\alpha_3 &= 0\end{aligned}\right\}$$ # Recorda que α_i són els escalars que busquem i que no poden ser tots 0.

Veig que tinc 2 eq i 3 incog $\Rightarrow$ Inf. Solucions (no només la trivial) $\Rightarrow$ És L.D.

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= -3\alpha_3\\ \alpha_2 &= 2\alpha_3\end{aligned}\right\}$$ i podem dir que $\boxed{\alpha_3=1}$,, $\boxed{\alpha_1=-3}$,, $\boxed{\alpha_2=2}$ Fent que:

Pq al final busquem els α_i i en algun moment hem de

$\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2+\alpha_3 U_3=\boxed{-3U_1+2U_2+U_3=0_E}$ $\boxed{\text{amb } b=1,, a=-2}$ donar resposta num.

(6.18). Demo conjut $\{u-v, v-\omega, \omega-u\}$ són L.D.

Aquests vectors seràn L.D. si compleixen $\lambda_1(u-v)+\lambda_2(v-\omega)+\lambda_3(\omega-u)=0_E$ i $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\neq 0$.

$\lambda_1(u-v)+\lambda_2(v-\omega)+\lambda_3(\omega-u)=\lambda_1 u-\lambda_1 v+\lambda_2 v-\lambda_2\omega+\lambda_3\omega-\lambda_3 u=$

$=u(\lambda_1-\lambda_3)+v(-\lambda_1+\lambda_2)+\omega(-\lambda_2+\lambda_3)$ on volem que sigui igual a 0_E.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1-\lambda_3=0\\-\lambda_1+\lambda_2=0\\-\lambda_2+\lambda_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda_1=\lambda_3\\\lambda_2=\lambda_3\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$$

Donat que $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{K}$ ~~que no de~~ hem de determinar un valor exacte per veure que pensa

$\lambda_2=\lambda_1$, $\lambda_3=\lambda_1\Rightarrow\lambda_1(u-v)+\lambda_1(v-\omega)+\lambda_1(\omega-u)=(0)u+(0)v+(0)\omega=0_E$

(6.7). Digueu si és subespai

$E_4=\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid x\in\mathbb{R}\}$

NO pq no compleix la multiplicació pq $\sqrt{2}x$ no pertany als $\mathbb{Q}$.

$E_6=\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid x^2+2xy+y^2=0\}$

Sí pq $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=0$

$E_7=\{\begin{pmatrix}a+b\\a-2b\\c\\2a+c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$

$a\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}}_{u}+b\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v}+c\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\omega}$ i això és vàlid pq $a=b=c=0$ complix i

$$\left.\begin{array}{l}au+bv+c\omega\\+a'v+b'v+c'\omega\end{array}\right\}\Rightarrow(a+a')v+(b+b')v+(c+c')\omega \checkmark$$

$E_8=\{\begin{pmatrix}a^2\\a\\b+a\\2+a\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid a,b\in\mathbb{R}\}$

Veiem que $0_E\notin E_8$ pq $2+a$ ~~no~~ no ho permet.

Però el més impo és que $a+a$ amb $a=1\Rightarrow 1+1=2$ i $a^2+a^2\Rightarrow 1+1=2$ quan hauria de ser 4.

(6.19). Demo mat en $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ són l.i. $A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\3&-2&0\end{pmatrix}$

Busquem que $\alpha A+\beta B+\gamma C=\mathbf{0}$ només quan $\alpha=\beta=\gamma=0$ (Llavors seran L.I).

$$\alpha\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1&1&-2\\3&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\beta-\gamma&\alpha+\beta+\gamma&-2\alpha-2\beta-2\gamma\\\alpha+3\gamma&\alpha+\beta-2\gamma&\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Tenim les eq. següents:

$\beta-\gamma=0\Rightarrow\beta=\gamma\Rightarrow\boxed{\beta=0}$ Veiem que només té sol $\mathbf{0}$ si $\alpha=\beta=\gamma=0$

$\alpha+\beta+\gamma=0\Rightarrow\alpha+2\gamma=0\Rightarrow\alpha=2\gamma\Rightarrow\boxed{\alpha=0}$ cosa que fa que $\{A,B,C\}$ siguin L.I.

$-2(2\gamma)-2(\gamma)-2\gamma=0\Rightarrow-4\gamma-2\gamma-2\gamma=-8\gamma=0\Rightarrow\boxed{\gamma=0}$

Provem que $\forall\lambda$ és C.L de A i B $D=\begin{pmatrix}\lambda&2&-4\\2-\lambda&2&2\end{pmatrix}$

$$\alpha\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}\lambda&2&-4\\2-\lambda&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta+\lambda\gamma&\alpha+\beta+2\gamma&-2\alpha-2\beta-4\gamma\\\alpha+2\gamma-\lambda\gamma&\alpha+\beta+2\gamma&\alpha+\beta+2\gamma\end{pmatrix}$$

[~~Podem reduir la matriu t.q.~~ ~~$\beta+\lambda\gamma$ $\alpha+\beta+2\gamma$ $-2\alpha-2\beta-4\gamma$~~] Tenim les següents eq.

$\beta+\lambda\gamma\Rightarrow\boxed{\beta=-\lambda\gamma}$

$\alpha+\beta+2\gamma=0\Rightarrow\boxed{\alpha=-2\gamma+\lambda\gamma}$

Si fem totes les comb veiem que $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ si $\beta=-\lambda$ i $\alpha=-2\gamma+\lambda\gamma$

Tenim que $\alpha A+\beta B+\gamma D=\mathbf{0}$ tal i com buscàvem demo.

(6.20). Demo que polinomis $\underbrace{-1+2x+x^2}_{P_1}$, $\underbrace{1+x^2}_{P_2}$ i $\underbrace{x+x^2}_{P_3}$ són L.D. en $P(\mathbb{R})$.

$\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0_E\Rightarrow\alpha(-1+2x+x^2)+\beta(1+x^2)+\gamma(x+x^2)=$

$=-\alpha+2\alpha x+\alpha x^2+\beta+\beta x^2+\gamma x+\gamma x^2=(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(2\alpha+\gamma)x+(-\alpha+\beta)=0_E$

Això sig. que: $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=0\\2\alpha\quad+\gamma=0\\-\alpha+\beta\quad=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&0&1&0\\-1&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-2&-1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&2&1&0\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{array}\right)$

$\boxed{\gamma=\lambda}\in\mathbb{R}\Rightarrow\boxed{\beta=\frac{-\lambda}{2}}\Rightarrow\alpha=-\lambda+\frac{\lambda}{2}=\boxed{\frac{-\lambda}{2}=\alpha}$

amb $\lambda\neq0$

Això vol dir que podem agafar qualsevol valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ i que si $\alpha=\frac{-\lambda}{2}$, $\beta=\frac{-\lambda}{2}$, $\gamma=\lambda$ tindrem que $\{P_1,P_2,P_3\}$ són L.D t.q.

$\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0_E$ i $\alpha,\beta,\gamma\neq0$

Coordenades del vector respecte la Base B

(YT). $B=\{\binom{-1}{2},\binom{3}{1}\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Calcula coord de $v=(2,-1)_B$ respecte base canònica $\mathbb{R}^2$.

Si $\vec{v}$ és representat com C.L dels vectors de la Base, els escalars són 2, -1.

$v = 2(-1,2) + -1(3,1) = (-2,4)+(-3,-1) = (-5,3)$

$(-5,3) = -5(1,0) + 3(0,1)$. Així que les coord de $\vec{v}$ respecte base canònica són -5, 3

(2.10). Demo que si $\{a,b,c\}$ d'un cert E són L.I. llavors $\{3a+2b+3c,\ 2a-b,\ 5c\}$ tmb.

Sabem que $\alpha a+\beta b+\gamma c=0_E$ només si $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Volem veure si passa el mateix amb el conjunt de vectors mencionats

$x(a+2b+3c)+y(2a-b)+z(5c)=0_E \Rightarrow xa+2bx+3cx+2ay-by+5cz=0_E \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x+2y)+b(2x-y)+c(3x+5z)=0_E$ ara volem veure si aquests escalars

tenen alguna solució on no tots siguin 0 → Si això passa el conjunt serà L.D → Altrament serà L.I

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\2&-1&0&0\\3&0&5&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-5&0&0\\0&-6&5&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-6&5&0\\0&-5&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-6&5&0\\0&0&25&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-6&5&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-6&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

Veiem que $x=y=z=0$ és l'única solució el que fa que els escalars del conjunt de vectors siguin 0 tots fent que conjunt sigui L.I.

(2.11). Demo que subespais són iguals.

$S_1=\langle(1,0,1,0),(0,-1,1,1),(2,-1,0,1)\rangle$ i $S_2=\langle(3,-2,2,2),(0,0,1,0),(1,2,-1,-2)\rangle$.

Per a demostrar-ho fem: $\alpha(1,0,1,0)+\beta(0,-1,1,1)+\gamma(2,-1,0,1)=x(3,-2,2,2)+y(0,0,1,0)+z(1,2,-1,-2)$

Veiem que trobem que:
$$\left.\begin{array}{l}\alpha+2\gamma=3x+z\\-\beta-\gamma=-2x+2z\\\alpha+\beta=2x+y-z\\\beta+\gamma=2x-2z\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{3x+2y+3z}{3}}\quad\boxed{\beta=\frac{3x+y-6z}{3}}\quad\boxed{\gamma=\frac{3x-y}{3}}$$

Si fem sub d'aquests valors en S_1 veurem que resulta ser S_2. # Feticheck en pissarra

(6.22). Digues si cert o fals. Demo o contraexemple.

1) Si $\{e_1,\dots,e_r\}$ L.I i $v \neq e_i \Rightarrow \{e_1,\dots,e_r,v\}$ és L.I.

Cert pq. tot i que v pugui ser C.L d'~~algun e_i~~, al ser el conjunt prèviament L.I l'única forma que sigui igual a 0_E és amb ~~solució trivial~~. Fals

~~2) Si $\{e_1,\dots,e_r\}$ L.I i $v\notin\langle e_1,\dots,e_r\rangle \Rightarrow \{e_1,\dots,e_r,v\}$ L.I.~~

~~En fix~~ FALS. Ens fixem que afegir un $\vec{v}$ qualsevol pot modificar la L.I donat que si $\vec{v}$ és C.L d'un e_i llavors hi haurà un escalar d'aquest $\vec{v}$ que podria fer que $ae_i + b\vec{v} = 0_E$ i no ho de pq. ser $a=b=0$ (Donat que $\vec{v}$ és C.L).

#Aquí no ens preocupem de la resta de e_j on $j\neq i$ pq. aquests poden seguir sent 0.

Per exemple: $\{(1,0),(0,1)\}$ i $v=(1,1) \Rightarrow 1(1,0)+1(0,1)-1(1,1)=(0,0)$ i són dif.

2) $\{e_1,\dots,e_r\}$ L.I i $v\notin\langle e_1,\dots,e_r\rangle \Rightarrow \{e_1,\dots,e_r,v\}$ L.I.

CERT. Agafem v que al no estar gen. pel conjunt sig. que v no és C.L de cap e_i. Si considerem ara el conjunt $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_r e_r+\lambda_v v = 0_E$ Volem clarо que això només passa si tots $\lambda_i=0$.

Suposem que no tots són 0 (Que sig. que L.D). per exemple $\lambda_v\neq 0$ això sig. que
$v = \frac{-(\lambda_1 e_1)}{\lambda_v} - \frac{\lambda_2 e_2}{\lambda_v}+\dots+\frac{-\lambda_r e_r}{\lambda_r} \Rightarrow v = \frac{-\lambda_1}{\lambda_v}e_1+\frac{-\lambda_2}{\lambda_v}e_2+\dots+\frac{-\lambda_r}{\lambda_r}e_r$ però això contradiu que v no és C.L. del conjunt així que $\lambda_v=0$ com tota la resta.

3) $\{e_1,\dots,e_r\}$ conjunt gen E i $v\neq e_i \Rightarrow \{e_1,\dots,e_r,v\}$ conjunt gen de E.

CERT. Pq. tot i que $v\neq e_i$ si v és del Espai llavors pot ser escrit com C.L del conjunt i afegir-lo a aquest no es més que afegir redundància (pq. abans ja generaven E). Però si $v\notin E$ llavors contradiu que $\{e_1,\dots,e_r\}$ generin E.

4) $\{e_1,\dots,e_r\}$ conjunt gen d'E i $e_r\in\langle e_1,\dots,e_{r-1}\rangle \Rightarrow \langle e_1,\dots,e_{r-1}\rangle$ gen E.

CERT. Pq. veiem que e_r era redundant i el que realment gen. E era $\langle e_1,\dots,e_{r-1}\rangle$.

5) Tot conjunt d'un vec és L.I.

FALS. Pq el conjunt de $\{0_E\}$ és L.D. donat que $\lambda(0,\dots,0)=(0,\dots,0)\ \forall\lambda\in\mathbb{K}$.

$M^T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow (M^T)^{-1}M^T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=(M^T)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow I\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=(M^T)^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=(M^{-1})^T\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-3\end{pmatrix}$

(6.23). Considera $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ tot i que en el rang no importa

Si només fa falta mirar que siguin L.I. i que dim(conjt) = n ⇒ 4 = 4.

1) Demo que formen Base de $\mathbb{R}^4$

Si només hi hagués 3 vec no podrien gen $\mathbb{R}^4$ pq dim = 3 < 4. (Tot i que sigui L.I.)

- ☐ Són L.I.? ▽ Cuidado amb l'ordre. Aquí estem amb A^T ▷

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&4&0\\0&0&0&2&0\end{array}\right) \xrightarrow[F_4=\frac{1}{2}F_4]{F_3=F_3-F_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&-1&0&4&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-F_4]{F_3=F_3-4F_4} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+F_3} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

Veiem que són L.I.

i que podem aplicar transformacions fins arribar a tindre Base canònica de $\mathbb{R}^4$!

2) Troba coordenades vector $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-3\end{pmatrix}$ en aquesta Base.

$a(1,1,0,0)+b(0,0,1,1)+c(1,0,0,4)+d(0,0,0,2)=(1,0,2,-3)$

$$\left.\begin{array}{l}a+c=1\\a=0\\b=2\\b+4c+2d=-3\end{array}\right\} \boxed{a=0,\ b=2,\ c=1} \quad 2+4+2d=-3 \Rightarrow \boxed{d=-9/2}$$

$\boxed{\text{Coordenades: } (0,2,1,-9/2)}$

3) Troben coordenades del vec. arbitrari. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$. # Mateix procediment

$$\left.\begin{array}{l}a+c=x\\a=y\\b=z\\b+4c+2d=t\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=y,\ b=z,\ c=x-y} \quad z+4(x-y)+2d=t \Rightarrow d=\frac{t-z-4x+4y}{2}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}y\\z\\x-y\\\frac{t-z-4x+4y}{2}\end{pmatrix}}$$

(6.24). Sigui $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ Demo que és base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Donen coordenades $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$ en Base B.

- ☑ Mirem si les matrius són L.I.

$a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

L'única solució és la Trivial així que B és L.I.

$$\begin{pmatrix}a+b+c&b+2c\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a+b+c=0\\b+2c=0\\\boxed{c=0}\\\boxed{d=0}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=0}\ \boxed{a=0}$$

- ☑ B forma sistema generador.

Però que signif. això?

$a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

El sistema generador:

$$\begin{pmatrix}a+b+c&b+2c\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a+b+c=x\\b+2c=y\\\boxed{c=z}\\\boxed{d=t}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=y-2z} \quad a=x-z-(y-2z) \quad \boxed{a=z+x-y}$$

$$\begin{cases}a=x-y+z\\b=y-2z\\c=z\\d=t\end{cases}$$

$a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}a+b+c=1\\b+2c=3\\\boxed{c=3}\\\boxed{d=1}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=-3}\ \boxed{a=1}$$

$B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$

(6.25). Sigui $P_3(\mathbb{R})$ grau max 3. Demo $\{1+x, -1+x, 1+x^2, 1-x+x^3\}$ formen base en $P_3(\mathbb{R})$

Dona coordenades de "$\underset{x}{-5} + \underset{y}{6x} + \underset{z}{3x^2} + \underset{t}{x^3}$" en aquesta base.

$b = y+t-a = y+t-\left(\frac{x+y-z}{2}\right) = y+t+\frac{-x-y+z}{2} = y + \frac{2t-x-y+z}{2} = \frac{2y+2t-x-y+z}{2}$

$a(1+x) + b(-1+x) + c(1+x^2) + d(1-x+x^3) = 0$

$a+ax-b+bx+c+cx^2+d-dx+dx^3 = 0 \Rightarrow \underset{t}{d}x^3 + \underset{z}{c}x^2 + \underset{y}{(a+b-d)}x + \underset{x}{(a-b+c+d)} = 0$

$\left.\begin{array}{l} a-b+c+d=0 \\ a+b-d=0 \\ \boxed{c=0 \quad d=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}}$ Podem veure que és L.I

$\left.\begin{array}{l} a-b+c+d=x \\ a+b-d=y \\ \boxed{c=z \quad d=t} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a-b=x-z-t \\ a+b=y+t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=\frac{-x+y+z+2t}{2}}$

$2a = x+y-z \Rightarrow \boxed{a=\frac{x+y-z}{2}}$ Aquest és el SG.

$a = \frac{-5+6-3}{2} = \boxed{-1=a}$ $b = \frac{-(-5)+6+3+2(1)}{2} = \boxed{8=b}$ $\boxed{c=3}$ $\boxed{d=1}$. Coordenades són $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(6.26). Subespai $F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Troba una base i la condició que ha de satisfer $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per pertanyer a F.

Un subespai pot ser L.D però una base no, així que em hem d'assegurar que F sigui L.I per després trobar una base.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2-2F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0 \ 0 \ 0} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Aquesta és una representació equivalent de F però L.I i llavors podem dir que

$\boxed{B = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$ i pq $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pertany a F ha de poder ser escrit com C.L de la Base t.q.

$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha = x \\ \alpha+\beta = y \\ \beta = z \end{array}\right\}$ $\beta = z$, $\alpha = y-z$, $2(y-z) = x \Rightarrow 2y-2z = x \Rightarrow \boxed{x-2y-2z=0}$

I Però no entenc pq aquesta és la cond. i com afecta

(6.27). $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Demo que F=G i que són Bases.

Esbrina si $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertanyen a F i digues coordenades en les dues bases.

Tmb podem veure si L.I i $F \subseteq G$ o $G \subseteq F \Rightarrow F = G$ donat que tenen mateixa dim

$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Aquest sistema és L.I.

Veiem que són el mateix.

Equivalent $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = H$

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Aquest sistema és L.I

Aquesta subespai H (¿que és base de $\mathbb{R}^4$) pq és L.I. D No sé si això es correcte dir-ho.

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\gamma = \sqrt{3} \\ -\alpha+\beta = \sqrt{2}-1 \\ \alpha-\beta = 1-\sqrt{2} \\ \beta-\gamma = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha+\gamma = \sqrt{3} \\ \beta-\gamma = 0 \end{array}\right.$ Sí.

$\left.\begin{array}{l} -\alpha+\beta = 1 \\ \alpha-\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0=1}$ NO

(6.28). Siguin $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de E. Deno $\{v_1+2v_2,\ 2v_2+3v_3,\ 3v_3+v_1\}$ tmb és base.

Sabem que $\{v_1, v_2, v_3\}$ és L.I. pq és Base.

$a(v_1+2v_2)+b(2v_2+3v_3)+c(3v_3+v_1)=0_E$ [ ] No sé si ben fet fer $\delta_1=0$, $\delta_2=0$, $\delta_3=0$

$av_1+2av_2+2bv_2+3bv_3+3cv_3+cv_1=(a+c)v_1+(2a+2b)v_2+(3b+3c)v_3$ i ~~dono~~ podem veure que el conjunt tmb és base donat que a pot escriure com el que siguinen.

(6.37). $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-5\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\right\}$ B base de $\mathbb{R}^3$?

#Només fa falta veure si són L.I.

$$\begin{pmatrix}1&5&6\\-2&-5&3\\1&4&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&5&6\\0&5&15\\0&-1&-7\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&5&6\\0&1&3\\0&-1&-7\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&5&6\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$ B és base de $\mathbb{R}^3$ pq conjunt és L.I.

$B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$ B' base de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&5\\0&2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&7\\0&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&7\\0&0&-5\end{pmatrix}$$ B' és base de $\mathbb{R}^3$ pq. conjunt és L.I.

$$\begin{tikzcd}\mathbb{R}^3_{B} \arrow[rr] \arrow[dr, "P^{B}_{B_c}"'] & & \mathbb{R}^3_{B'} \\ & \mathbb{R}^3_{B_c} \arrow[ur, "P^{B_c}_{B'}"'] & \end{tikzcd}$$

on $B_c=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $P^{B}_{B_c}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\5&-5&4\\6&3&-1\end{pmatrix}$

$P^{B}_{B'}=P^{B}_{B_c}\cdot P^{B_c}$

(6.38). $B_c=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ | $B'=\left\{\overset{u_1}{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}},\overset{u_2}{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}},\overset{u_3}{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}},\overset{u_4}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}\right\}$

1) Comprovem que B' és L.I.

$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ Veiem a simple vista que és Base.

2) $M(\mathbb{R})_{B'}\to M(\mathbb{R})_{B_c}$

$P^{B'}_{B_c}=\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3&u_4\\ B_c&B_c&B_c&B_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}=P^{B'}_{B_c}$

3) Ara fem l'altre $P^{B_c}_{B'}=\left(P^{B'}_{B_c}\right)^{-1}$

$\left(P^{B'}_{B_c}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

$B_c\xrightarrow{P^{B_c}_{B'}}B'$

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\\d'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-a+b\\a-b+c\\-a+b-c+d\end{pmatrix}$

$\boxed{a'=a,\ b'=-a+b,\ c'=a-b+c,\ d'=-a+b-c+d}$

(6.29). Troba Base subespai E en $\mathbb{R}^5$ i completar-la a una base de $\mathbb{R}^5$. $E=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^5: x_3=x_1+x_2-x_4,\ x_5=x_2-x_1\right\}$

$$\left.\begin{matrix}x_1+x_2-x_3-x_4=0\\-x_1+x_2-x_5=0\end{matrix}\right\}\left(\begin{matrix}1&1&-1&-1&0\\-1&1&0&0&-1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)\Rightarrow\left(\begin{matrix}1&1&-1&-1&0\\0&2&-1&-1&-1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)\Rightarrow\left(\begin{matrix}1&1&-1&-1&0\\0&1&-1/2&-1/2&-1/2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)\Rightarrow\left(\begin{matrix}1&0&-1/2&-1/2&1/2\\0&1&-1/2&-1/2&-1/2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)$$

Aquesta matriu és equivalent a les restriccions, no és una base. Podem veure que x_3, x_4, x_5 son lliures.

$$\left.\begin{matrix}x_1=1/2x_3+1/2x_4-1/2x_5\\x_2=1/2x_3+1/2x_4+1/2x_5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=1/2\lambda_1+1/2\lambda_2-1/2\lambda_3\\x_2=1/2\lambda_1+1/2\lambda_2+1/2\lambda_3\end{matrix}\right\}$$ on $\lambda_1=x_3$, $\lambda_2=x_4$, $\lambda_3=x_5$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$

- Si $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=0$: $x_1=1$ (Sub), $x_2=1$ (Sub) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$
- Si $\lambda_2=2$, $\lambda_1=\lambda_3=0$: $x_1=1$, $x_2=1$ (Sub) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$
- Si $\lambda_3=2$, $\lambda_1=\lambda_2=0$: $x_1=-1$, $x_2=1$ (Sub) $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$

! Ara agafem 2 vec L.I a aquests 3 i ja podem completar.

M1-6-E-6

6.30. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix}1&4\\-1&10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6&10\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$. Demo són L.I. Troba vec que formin base $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&10\\6&10&1&0\\2&2&1&1\end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{F_2=F_2-6F_1\\F_3=F_3-2F_1}} \begin{pmatrix}1&4&-1&10\\0&-10&7&-60\\0&-6&3&-19\end{pmatrix} \xRightarrow{F_2=-\frac{1}{10}F_2} \begin{pmatrix}1&4&-1&10\\0&1&-7/10&6\\0&-6&3&-19\end{pmatrix} \xRightarrow{F_3=F_3+6F_2} \begin{pmatrix}1&4&-1&10\\0&1&-7/10&6\\0&0&-12/10&17\end{pmatrix}$$

$3+6\cdot\left(\frac{-7}{10}\right) = 3-\frac{42}{10} = \frac{30-42}{10} = \frac{-12}{10}$

$\Rightarrow$ Veiem que són L.I.

Podem agafar $(0,0,0,1) \equiv \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ i ja tindrim $B=\left\{\begin{pmatrix}1&4\\-1&10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-7/10&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\-12/10&17\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

6.31. Per quin val de λ $\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\\\lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$ generen subespai vec de $\mathbb{R}^4$ de dim 2? ✓

Recordem que la dim ≡ nº vec base. Un subespai no té pq ser L.I.

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&1&\lambda\\\lambda&1&2&1\\1&0&\lambda&\lambda\end{pmatrix} \xRightarrow{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix}\lambda&0&1&\lambda\\0&1&1&1-\lambda\\1&0&\lambda&\lambda\end{pmatrix} \xRightarrow{F_1=F_1-\lambda F_3} \begin{pmatrix}0&0&1-\lambda^2&\lambda-\lambda^2\\0&1&1&1-\lambda\\1&0&\lambda&\lambda\end{pmatrix}$$

(*) Aquí busquem tindre 2 vec en compte de 3 $\boxed{\lambda=1} \Rightarrow \begin{pmatrix}\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\0&1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$ Són L.I

6.32. $F_a = \left\langle \begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&a\\0&-1\end{pmatrix}\right\rangle$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ✓

1) Troba a pq $\dim(F_a)=2$. Sig. que uno és C.L. ✓

$\alpha(1,2,0,2)+\beta(-1,1,0,1)+\gamma(2,a,0,-1)=(0,0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\2&1&a&0\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\2&1&-1&0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\2&1&a&0\\2&1&-1&0\end{array}\right)$$

Veiem que si $\boxed{a=-1}$ podem eliminar una fila significat que en el subespai F_a i havia una matriu redundant i que la $\dim(F_a)=2$.

2) Sigui $a=a_0$ (-1). Troba cond en forma S.E.L.H. pq $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ sigui del espai gen per F_a.

$F_a\left\langle \begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&-1\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\right\rangle$

$\alpha(1,2,0,2)+\beta(-1,1,0,1)+\gamma(2,-1,0,-1)+\mu(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&x&0\\2&1&-1&y&0\\0&0&0&z&0\\2&1&-1&t&0\end{array}\right) \Rightarrow \boxed{z=0} \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&x&0\\2&1&-1&y&0\\0&0&0&t-y&0\\0&0&0&z&0\end{array}\right) \boxed{t=y}$$

i ja no podem extreure res més respecte les incog.

☒ Això així és correcte? corregit / millorat

3) Raonen $B=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ i $B'=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ són bases de F_{a_0}. ∇ Les bases o hem d'estar en l'espai

B clarament si pq és F_{a_0} però sense que hi hagi redundància.

B' hem de comprovar que sigui L.I pq si ho és tindrà ~~mateixa dim~~ que F_{a_0}.

$\alpha\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha(0,1,0,1)+\beta(2,1,0,1)=(0,0,0,0)$ ☐.

$\left.\begin{array}{l}2\beta=0\\\alpha+\beta=0\\\alpha+\beta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\beta=0\\\alpha+\beta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\beta=0\\\alpha=0\end{array}}$ Veiem que sí és L.I. i que $\dim(B')=\dim(F_{a_0})$

☐ Però si això és correcte

∇ ∇ ∇ Hauríem de veure que tots els vectors de B' ~~pod~~ són C.L. ~~dels vect~~ de la base F_{a_0}.
En aquest cas, com que ja tenim les eq. que han de complir $\left\{\begin{array}{l}z=0\\t=y\end{array}\right.$ ja estaria.

Però això no es pot donar per sentat i s'ha de mencionar.

L'intersecció entre espais son els que compliren totes les equacions a l'hora (fer sistema). Però en aquest cas

6.33. Doneu base i dim $E, F, E\cap F$

3) $E=\left\{\begin{pmatrix} a \\ a+3b \\ 2a-b \\ c\end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$, $F=\left\{\begin{pmatrix} -2a \\ b \\ 0 \\ 3b\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$ com subespai $\mathbb{R}^4$.

• E: Veiem que té 3 incog. (a,b,c)

$a(1,1,2,0)+b(0,3,-1,0)+c(0,0,0,1)=(a,a+3b,2a-b,c)$.

$B_E=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ i $\dim(E)=3$ ← Quantitat vec base.

Veiem que son L.I.

• F: Veiem que hi ha 2 incog (a,b)

$a(-2,0,0,0)+b(0,1,0,3)=(-2a,b,0,3b)$

$B_F=\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$ i $\dim(F)=2$.

Diem que $t=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$x=\frac{\lambda}{21}$ $z=0$

$y=\frac{\lambda}{3}$ $t=\lambda$

Agafem $\lambda=21$ per comoditat

$B_{E\cap F}=\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\0\\21\end{pmatrix}\right\}$ Té 1 grau de llibertat (λ). Llavors $\boxed{\dim(E\cap F)=1}$

• $E\cap F$: Són els vectors que poden estar en els dos espais. Hem de trobar les eq de cada espai.

En el base de E hem d'afegir un nou vector d'incog. que no aporti res (continuem vang -dim - 3).

Podem fer Gauss o det. $\begin{pmatrix}1&0&0&x\\1&3&0&y\\2&-1&0&z\\0&0&1&t\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&x\\0&0&0&y-7x+3z\\0&-1&0&z-2x\\0&0&1&t\end{pmatrix}$ i volem que no aporti res així que $\underline{y-7x+3z=0}$ Eq espai E

$\left.\begin{matrix}z=0\\t=3y\end{matrix}\right\}$ Eq. espai F.

$\left.\begin{matrix}-7x+y+3z=0\\3y-t=0\\\boxed{z=0}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-7x+y=0\\3y-t=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=7x\Rightarrow y=7\left(\frac{t}{21}\right)\Rightarrow\boxed{y=\frac{t}{3}}$

$3(7x)=t\Rightarrow 21x=t\Rightarrow\boxed{x=\frac{t}{21}}$

6.34. Considere els subespais anteriors. Amplia base fins obtenir base en l'espai que es troben.

• $B_E=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ i ja te $\dim=4=\dim(\mathbb{R}^4)$.

• $B_F=\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ i ja te $\dim(B_F)=\dim(\mathbb{R}^4)=4$.

• $B_{E\cap F}=\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\0\\21\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\0\\21\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ Hem fixo amb aquest i completa amb la canònica.

6.37. $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Comprova que són Bases.

$-7+\left(-18\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=-7+\frac{18}{5}=\frac{-35+18}{5}=\frac{-17}{5}$

$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\5&-5&4&0\\6&6&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&5&-1&0\\0&18&-7&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&1&-1/5&0\\0&18&-7&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&1&-1/5&0\\0&0&-17/5&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&1&-1/5&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$ ☑ Es Base.

$B'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\3&-2&2&0\\2&5&4&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&2&0\\0&7&4&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&-10&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$ ☑ Es Base.

$$\underbrace{P_{B'}^{B_c}\cdot P_{B_c}^{B}}_{P_{B'}^{B}}\cdot[\vec v]_B=[\vec v]_{B'}$$

2) Donem cànvi mat. $P_{B'}^{B}$ i $P_{B}^{B'}$.

$$B \to B' \qquad P^{B}_{B_c} \quad B_c \quad P^{B_c}_{B'}$$

$B=\{(1,-2,1),(5,-5,4),(6,3,-1)\}$, $B'=\{(1,-1,0),(3,-2,2),(2,5,4)\}$

$$P_{B_c}^{B}=\begin{pmatrix}1&5&6\\-2&-5&3\\1&4&1\end{pmatrix},\quad P_{B'}^{B_c}=(P_{B_c}^{B'})^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&5\\0&2&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}9/5&4/5&-19/10\\-2/5&-2/5&7/10\\1/5&1/5&-1/10\end{pmatrix}=P_{B}^{B_c}$$

$$P_{B'}^{B}=P_{B'}^{B_c}\cdot P_{B_c}^{B}=\begin{pmatrix}9/5&4/5&-19/10\\-2/5&-2/5&7/10\\1/5&1/5&-1/10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&6\\-2&-5&3\\1&4&1\end{pmatrix}=-7/2\quad -189/25$$

$$P_{B'}^{B}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&-1&0\\3&-5&4&3&-2&2\\2&3&-1&2&5&4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|}1&-2&1\\0&1&2\\0&7&4\end{array}\right)$$

$$P_{B'}^{B}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&-2&1\\3&-2&2&5&-5&4\\2&5&4&6&3&-1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&-2&1\\0&1&2&2&1&1\\0&7&4&4&7&3\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&3&-1&2\\0&1&2&2&1&1\\0&0&-10&-10&0&-10\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&3&-1&2\\0&1&2&2&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow \boxed{P_{B'}^{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}}\qquad P_{B}^{B'}=(P_{B'}^{B})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=P_{B}^{B'}$$

3) Calc $\vec v_{B_c}=(2,5,2)$ en B i B'

$\vec v_B=P^{B}_{B_c}\cdot$

$$c_1\vec b_1+c_2\vec b_2+c_3\vec b_3=\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\-5\\3\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\5&-5&4\\6&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&2\\5&-5&4&5\\6&3&-1&2\end{array}\right)\Rightarrow[\ldots]\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&7/4\\0&1&0&5/4\\0&0&1&-5/4\end{array}\right)$$

DNatal Boom

(6.39). $B=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ $B'=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Comprova que són Base de $\mathbb{R}^3$.

Sigui $\vec u\in\mathbb{R}^3$ on $\vec u_B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ i $\vec u_{B'}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Expressa x,y,z en funció de x',y',z' i viceversa.

$$P_{B'}^{B}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&2&1&1\\1&0&1&1&2&1\\1&1&0&1&1&2\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&2\\1&0&1&1&2&1\\0&1&1&2&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&2\\0&-1&1&0&1&-1\\0&1&1&2&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&2&1\\0&-1&1&0&1&-1\\0&0&2&2&2&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&2&1\\0&1&-1&0&-1&1\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)=P_{B'}^{B}\qquad P_{B'}^{B}\cdot\vec u_B=\vec u_{B'}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}-x+y+z&=x'\\x+z&=y'\\x+y&=z'\end{aligned}}$$

$$P_{B}^{B'}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&0&1&1\\1&2&1&1&0&1\\1&1&2&1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=P_{B}^{B'}\qquad\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}x&=y'+z'\\y&=x'+z'\\z&=x'+y'\end{aligned}}$$

(6.32). Considerant $F_a = < \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} >$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2) Sigui $a = a_0$ pq $\dim(F_a) = 2$. Troba cond. en la forma de S.E.L.H pq. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de F_{a_0}.

Hem vist que $a = -1 \Rightarrow E_1 = < \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$ # Només dels dun mat. que no hi ha redundància.

Pq. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de E_1 sig. que es pot ficar dins del espai gen de E_1 i no aporta res (pq això sig. que no està ampliant la base).

Implica que E_{1+mat} ha de continuar tenint dim 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y-2x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 3 & t-2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y-2x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t-y \end{pmatrix}$$

Necessito que tingui aquesta pinta llavors $\boxed{z=0}$

$t - y = 0 \Rightarrow \boxed{t = y}$

(6.33). Doneu base i Dim de E, F i $E \cap F$.

1) $E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x = 2y = z \}$ i $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x+y-z = 0,\ 3x+y+z = 0 \}$

- Veiem que $2x = 2y$ i $2x = z$ llavors només té 1 variable lligada llavors $\boxed{\dim(E) = 1}$

$\left.\begin{matrix} 2x = 2y \\ 2x = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = z - 2y \Rightarrow \underline{z = 2y}$ com que E és dim 1 i necessitem algun valor doncs

Si $x = 1 \Rightarrow 2 = 2y \Rightarrow \underline{y = 1}$, $z = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow B_E = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$

- $\left.\begin{matrix} x+y-z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y-z=0 \\ 0-2y+4z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2y = -4z$ on $\boxed{\begin{matrix} z = \lambda \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}}$ $\boxed{y = 2\lambda}$ $x + 2\lambda - \lambda = 0$ $\boxed{x = -\lambda}$

$y = 2z$

Veiem un altre vegada que x és l'únic que depèn d'algo $\boxed{\dim(F) = 1}$

i si $\lambda = 1 \Rightarrow B_F = < \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

-

$$\left.\begin{matrix} 2x = 2y \\ 2x = z \\ x+y-z=0 \\ -2y+4z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - 2y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ x+y-z=0 \\ -2y+4z=0 \end{matrix}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow [\ldots] \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ $\boxed{x = y = z = 0}$

Només complixen que passa pel punt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ i un punt té dim $= 0$ $\Rightarrow \boxed{\dim(E \cap F) = 0}$

6.40. Sigui $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ base de $P_2(\mathbb{R})$.

$\vec{u}(x)_B = (2,1,0)$
$\vec{v}(x)_B = (2,0,2)$
$\vec{\omega}(x)_B = (1,1,-2)$

Considerem $\vec{u}(x) = x^2+x+2$, $\vec{v}(x) = 2x^2+3$, $\vec{\omega}(x) = x^2+x$.

Donen coord. vectors en B_c.

Sabem que tenim algo com $(M)\begin{array}{c}\vec{u}_{B_c}\\ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\vec{u}_B\\ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\end{array}$, $(M)\begin{array}{c}\vec{v}_{B_c}\\ \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\vec{v}_B\\ \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\end{array}$, $(M)\begin{array}{c}\vec{\omega}_{B_c}\\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\vec{\omega}_B\\ \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\end{array}$

Podem obs que $M \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\2&3&0\end{pmatrix}}_{N} = \underbrace{\begin{pmatrix}2&2&1\\1&0&1\\0&2&-2\end{pmatrix}}_{A}$ i podem trobar N^{-1} i sabrem quina és la matriu de canvi:

Refer.

$$N^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\2&3&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-2&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&2&0&-1\\0&-2&1&-1&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&0&2\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&3&1&-2\end{array}\right)$$

$M \cdot N = A \Rightarrow M \cdot N \cdot N^{-1} = A \cdot N^{-1} \Rightarrow M = A \cdot N^{-1}$

$M = \begin{pmatrix}2&-3&-1\\0&1&0\\1&0&1/2\end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix}2&2&1\\1&0&1\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&0&2\\2&0&-1\\3&1&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\-2&-2&2\end{pmatrix}$$

M'estàn preguntant pels vectors de la base B aquests són $p_1(x)$, $p_2(x)$ i $p_3(x)$

Puc imaginar algo com:

$M_{B_c}^{B}\vec{u}_B = \vec{u}_{B_c}$,, $M_{B_c}^{B}\vec{v}_B = \vec{v}_{B_c}$,, $M_{B_c}^{B}\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_{B_c}$ $\Rightarrow M\overbrace{\begin{pmatrix}2&2&1\\1&0&1\\0&2&-2\end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\2&3&0\end{pmatrix}}^{B}$

$MA = B \Rightarrow MA \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow M \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{M = B \cdot A^{-1}}$ i aquesta M té forma $M = \begin{array}{ccc}p_1(x) & p_2(x) & p_3(x)\\ (\,| & | & |\,)\end{array}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix}-1&3&1\\1&-2&-1/2\\1&-2&-1\end{pmatrix}$,, $M = \begin{pmatrix}2&-3&-1\\0&1&0\\1&0&1/2\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}p_1(x) = 2x^2+1\\ p_2(x) = -3x^2+x\\ p_3(x) = -x^2+1/2\end{array}}$

càlculs fets en pissarra

(2.12). Troba conj. gen del subespai següent (a $\mathbb{R}^4$).

$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 + 4x_2 + 7x_4 = 0,\ 6x_1 = 5x_3\}$

Veiem clarament que el conjunt és un E (subespai) on els vec han de complir totes dues eq.

Resolem els sisteme: $\underline{x_1 = \frac{5x_3}{6}}$,, $3\left(\frac{5x_3}{6}\right) + 4x_2 + 7x_4 = 0 \Rightarrow \underline{5x_3 + 8x_2 + 14x_4 = 0}$

En la segona eq. veiem que es pot ordenar com $8x_2 = -5x_3 - 14x_4$ i x_3 i x_4 en el sistema $\left.\begin{array}{l} x_1 = 5x_3/6 \\ 8x_2 = -5x_3 - 14x_4 \end{array}\right\}$ són variables lliures llavors $\begin{array}{l} x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \end{array}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Llavors podem id. quels vec que pertanyen al subespai han de ser de la forma:
$\left(\frac{5\lambda}{6}, \frac{-5\lambda - 14\mu}{8}, \lambda, \mu\right)$. Si no tenen aquesta forma no pertanyen a E.

Si volguéssim donar una base del subespai E hauríem d'agafar $\lambda = 1$,, $\mu = 0$ / $\lambda = 0$,, $\mu = 1$ i formar conjunt base (que tindria $\dim(B) = 2$).

∇ Es important no deixar-se $x_1 = \frac{5\lambda}{6}$ pq. altrament podrien no estar considerant vectors que si estàn en el subespai

(2.14). Donem coord de $p(x) = 1 - 2x + x^3$ en la canònica de $\mathbb{R}_4[x]$

~~[La Base canònica de $\mathbb{R}^4$ és $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$]~~

∇ Fixe't que $\mathbb{R}_4[x]$ és l'espai dels vectors polinòmis (no $\mathbb{R}^4$).
on $d = 4$ (grau) llavors els vec. són de la forma $P(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4$
La Base canònica (C) és $C = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

\# Podria ser $C' = \{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$ però hauriem de canviar com és mostra.

Llavors veiem que per complir la forma dels vec del espai polinòmic
$\alpha_1 = 1$,, $\alpha_2 = -2$,, $\alpha_3 = 0$,, $\alpha_4 = 1$,, $\alpha_5 = 0 \Rightarrow \boxed{P(x)_C = (1, -2, 0, 1, 0)}$

\# $P(x)_{C'} = (0, 1, 0, -2, 1)$

(2.15). Done coord $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en B_C de $\mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$.

$B_C\ \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\boxed{A_{B_C} = (1, 2, 0, 2, -1, 0)}$

2.18. (2.19). Comprova que conj. és base de $\mathbb{R}_3[x]$ i dona coord $p(x)=4+2x-x^2+5x^3$.

$\{\underbrace{x-2x^2+x^3}_{P_1(x)},\ \underbrace{1+x+2x^2-x^3}_{P_2(x)},\ \underbrace{1+x^3}_{P_3(x)},\ \underbrace{2+2x-x^3}_{P_4(x)}\}$ Pq sigui base han de ser L.I. i gen. $\mathbb{R}_3[x]$.

$a P_1(x)+bP_2(x)+cP_3(x)+dP_4(x)=0_{\mathbb{R}_3[x]}$

$a(x-2x^2+x^3)+b(1+x+2x^2-x^3)+c(1+x^3)+d(2+2x-x^3)=(0,0,0,0)$.

$(a-b+c-d)x^3+(-2a+2b)x^2+(a+b+2d)x+(b+c+2d)=(0,0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&0\\-2&2&0&0&0\\1&1&0&2&0\\0&1&1&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&-2&1&-3&0\\0&4&0&4&0\\1&1&0&2&0\\0&1&1&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&2&0\\0&-2&1&-3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&-2&0\end{array}\right)$$

Veiem que les uniques solucions son $a=b=c=0$ així que el conjunt és L.I

i com que té 4 vec dim(Conj)$=4$ i dim$(\mathbb{R}_3[x])=4 \Rightarrow$ Conj es base de $\mathbb{R}_3[x]$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&5\\-2&2&0&0&-1\\1&1&0&2&2\\0&1&1&2&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&-2&1&-3&3\\0&4&0&4&3\\1&1&0&2&2\\0&1&1&2&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&2\\0&1&0&1&3/4\\0&1&1&2&4\\0&-2&1&3&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&2\\0&1&0&1&3/4\\0&0&-1&1&13/4\\0&0&1&5&9/2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&2\\0&1&0&1&3/4\\0&0&-1&1&13/4\\0&0&0&6&31/4\end{array}\right)$$

$6d=\frac{31}{4} \Rightarrow d=\frac{\frac{31}{4}}{6}=\frac{31}{24}=$ Es resol així però m'he equiv. en càlcul. Shit Happens.

2.24. Base i dim $S=\{(s+4t,\ t,\ s,\ 2s-t)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$. Amplia per $\mathbb{R}^4$.

Veiem que sigui un vec incog que pertany a S $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

NO podem afirmar directament que la dim és 2 pel fet que hi hagi 2 vec lliures donat que podrien ser que un fos C.L de l'altre.

Hem de veure que siguin L.I. (per veure si podem agafar aquests i que siguin la nostre base).

$\begin{pmatrix}1&4\\0&1\\1&0\\2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&4\\0&1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ~~dim~~ Rang 2 $\Rightarrow \boxed{\dim(S)=2}$

Ara agafem 2 val $(s,t)=(1,0)$ i $(s,t)=(0,1)$ i donat que necessitem 2 vec en la base pq dim (2) i veiem que $\boxed{B_S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}}$

Per ampliar ens falten 2 vec L.I. per passar de dim$=2\to$ dim$=4$:

$B_S^4=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

2.25. Dona base i dim R. Amplia a $\mathbb{R}^4$.

$R=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+z=0,\ y+z+t=0,\ x+2z+t=0\}$

Veiem que hi ha 4 incog. i 3 eq. llavors segur que $\dim(R)\neq 4$.

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\0&1&1&1\\1&0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Obs que només en queden 2 eq i 4 incog. $\Rightarrow$ 2 var lliures.

$\boxed{z=\lambda}$, $\boxed{t=\mu}$ on $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. $\boxed{y=-\lambda-\mu}$ $\boxed{x=-2\lambda-\mu}$.

Això implica que $\boxed{\dim(R)=2}$ i que si $v\in R$ ha de complir aquesta restricció.

Per a donar una base qualsevol agafarem $(\lambda,\mu)=(1,0)$ i $(\lambda,\mu)=(0,1)$.

$\boxed{B_R=\{(-2,-1,1,0),(-1,-1,0,1)\}}$ si volem ampliar haurem d'afegir 2 vec més: $\boxed{B_R'=\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}$

2.26. Dona dim i base de $R\cap S$.

Aquests seran els vec que compleixen les restriccions de R, S. Per a fer-ho més fàcil farem un sistema eq amb les eq. de R (que ja les tenim) ((les "optimitzades")) i les de S (que les havem de trobar).

Per trobar les de S afegim un vec incog a la base i aquest no pot aportar nova info. Queda de la forma: $\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\0&\cdot\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&4&x\\0&1&y\\1&0&z\\2&-1&t\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&4&x-z\\0&1&y\\1&0&z\\0&-1&t-2z\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&x-z-4y\\0&1&y\\1&0&z\\0&0&t-2z+y\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&z\\0&1&y\\0&0&x-z-4y\\0&0&t-2z+y\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix}x-4y-z=0\\y-2z+t=0\end{matrix}\right\}$ Aquestes són les eq de S.

Fent $R\cap S$ ens queda el sistema:

$$\left.\begin{matrix}x+2z+t=0\\y+z+t=0\end{matrix}\right\}S\quad\left.\begin{matrix}x-4y-z=0\\y-2z+t=0\end{matrix}\right\}R\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\0&1&1&1&0\\1&-4&-1&0&0\\0&1&-2&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\0&0&3&0&0\\0&-4&-3&-1&0\\0&1&-2&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&-11&3&0\\0&1&-2&1&0\end{array}\right)$$

Podem veure que és S.C.I. Llavors

Només coincidiran en $P=(0,0,0,0)=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow R\cap S=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ però la dim d'un punt és 0.

(2.27). B_c i $B' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Dona mat $P^{B_c}_{B'}$ i $P^{B'}_{B_c}$

#Sabem que de $\to B_c$ és fàcil. Comencem per aquí.

$P^{B'}_{B_c} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -1 & 3\\1 & 2 & -5\end{pmatrix}$ # Tmb sabem que $\left(P^{B'}_{B_c}\right)^{-1} = P^{B_c}_{B'}$ doncs fem inv.

$1+(-2)\left(\frac{-1}{9}\right) = 1+\frac{2}{9} = \frac{11}{9}$

$2+(-2)(1) = 0$

$$\left(P^{B'}_{B_c}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 9 & -1 & 2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 1/9\end{array}\right) \sim$$

$1+\frac{-6}{9} = \frac{9-6}{9} = \frac{3}{9}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 11/9 & -4/9 & -2/9\\0 & -1 & 0 & 3/9 & 3/9 & -3/9\\0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 1/9\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 11/9 & -4/9 & -2/9\\0 & 1 & 0 & -3/9 & -3/9 & 3/9\\0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 1/9\end{array}\right) \Rightarrow P^{B_c}_{B'} = \begin{pmatrix}11/9 & -4/9 & -2/9\\-3/9 & -3/9 & 3/9\\-1/9 & 2/9 & 1/9\end{pmatrix} ✓$$

(2.28). $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ i $B' = \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$. Dona $P^{B}_{B'}$ i $P^{B'}_{B}$.

#Podem fer punt intermig en B_c per a transformar $B \to B_c \to B'$

$$P^{B}_{B_c} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad ;; \quad P^{B_c}_{B'} = \left(P^{B'}_{B_c}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -4\\0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \Rightarrow P^{B_c}_{B'} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\1 & 2 & -4\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Ara necessitem la de $P^{B}_{B'}$ i podem pensar com $P^{B}_{B_c} \cdot v_B = v_{B_c} \Rightarrow P^{B_c}_{B'}\, v_{B_c} = v_{B'}$ tal i com volem així que podem fer sub t.q. $P^{B_c}_{B'}\left(P^{B}_{B_c} \cdot v_B\right) = v'_{B'} = P^{B}_{B'} \cdot v_B = v_B'$

$$P^{B}_{B'} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\1 & 2 & -4\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -1+6 & -1+2\\1-8 & 2-12 & 1+2-4\\-2 & 1-3 & 1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\-7 & -10 & -1\\-2 & -2 & 0\end{pmatrix} ✓$$

$\frac{-1}{2} + \frac{-11}{8} = \frac{-8-22}{16} = \frac{30}{16}$

Per acabar, per fer $P^{B'}_{B}$ podem dir que $P^{B'}_{B} = \left(P^{B}_{B'}\right)^{-1}$ i calculem.

$2 - \frac{11}{8} = \frac{16-11}{8} = \frac{5}{8}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0\\-7 & -10 & -1 & 0 & 1 & 0\\-2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2\\4 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0\\-7 & -10 & -1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 7/2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 11/2\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{11}{8}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & -30/16\\0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 5/8\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1/4 & 11/8\end{array}\right) \sim \begin{pmatrix}-1/4 & -1/4 & -15/8\\1/4 & 1/4 & 11/8\\3/4 & -1/4 & 5/8\end{pmatrix} = P^{B'}_{B}$$

Algún error en càlcul però concepte correcte.