# DIAGONALITZACIÓ

Un $f: E \to E$ endomorfisme és **diagonalitzable** si existeix alguna base $B \subseteq E$ t.q $M_B(f)$ diagonal.

Obs: Suposem que $M_B(f)$ no és diagonal, però sabem que l'endomorfisme $f$ diagonalitza en una altra base $B$. Llavors $\boxed{D = P\binom{B'}{B}^{-1} \cdot M_B(f) \cdot P_B^{B'}}$ és diagonal. $D^K = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^K = \begin{pmatrix} \lambda^K & 0 \\ 0 & \lambda^K \end{pmatrix}$

"Ser diagonalitzable" $\equiv$ Existeix $P$ invertible t.q $P^{-1} M_B(f) P$ sigui diagonal.

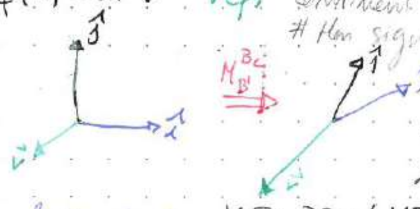
## Vectors propis i Valors propis

Els veps són els vectors que després d'aplicar una Transf. lineal continuen en la "seva línia"
# Han sigut escalats i ja.

**Vectors propis:** $v \in E$ amb $v \neq 0_E$ t.q. $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ $f(v) = \alpha \cdot v$ "veps"

**Valors propis:** $\lambda \in \mathbb{K}$ t.q. $f(v) = \lambda v$ "vaps"

" $v$ és un vector propi de valor propi $\lambda$ "




Obs que $\vec{v}$ en $B'$ podria dir-se que és $2\vec{v}$ afirmant que 2 és el valor propi i $\vec{v}$ és un vec. propi
# $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ no ho són.

L'endomorfisme $f$ diagonalitza $\Leftrightarrow$ $\exists$ alguna base formada per VEC. PRO (VEP)

## Polinòmi Característic de f

$\boxed{P_f(x) = \det(M_B^f - x \cdot I_n)}$ $\triangleright$ Mat. Identitat

### Teorema

Els valors propis (vaps) $f$ són les arrels del polinòmi característic

**Multiplicitat algebraica** d'un valor propi $\lambda$ és multiplicitat de $\lambda$ com a arrel $P_f(x)$ i es denota com $m_\lambda$. $p_f(x) = 0$ és eq. característica.

Això només passarà si reduim la dim on treballem

## ✳ 3Blue 1Brown

Els vectors propis són aquells que, després d'aplicar una transformació lineal, el vector resultat tmb s'hagués pogut aconseguir multiplicant el vector per un escalar determinat.

Això fa que puguem dir que el vector $\vec{m}$ sera "vep" i l'escalar $\lambda$ sigui el seu "vap". $\boxed{A \cdot \vec{m} = \lambda \cdot \vec{m}}$

Podem pensar que "$A\vec{m}$" és Mat * vec i que "$\lambda$" és $\lambda \cdot I_{\mathbb{R}} \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{m}$.

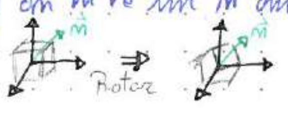
Llavors com que tenim a dues bandes multiplicacions de mat. podem fer $A\vec{m} - \lambda I \vec{m} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A - \lambda I)\vec{m} = \vec{0}$ i pq això sigui cert hem de veure per quins valors $A - \lambda I = 0$.

Es per això que fem det i igualem a 0 per trobar-ho.

Obs 1: NO sempre una transformació té "veps". Per exemple rotar 90° en $\mathbb{R}^2$

Obs 2: Si estem en $\mathbb{R}^3$ hi tenim un cub amb una transf on hi ha un $\vec{m}$ amb $\lambda = 1$ aquest no es modificarà i podem interpretar és l'eix de rotació



## Espais de vec. propis

Espai format pels vectors propis que tenen el mateix valor propi $\boxed{E_\lambda = \{\vec{n} \in E : A\vec{n} = \lambda \vec{n}\}}$

NOTA: Tmb. s'inclou el vector $\vec{0}_E$

- $E_\lambda$ és un subespai vectorial de $E$
- $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$ on $m_\lambda$ és la multiplicitat algebràica de $\lambda$: nº vegades $\lambda$ és arrel $P_f(\lambda)=0$

on $\dim(E_\lambda)$ és la multiplicitat geomètrica: nº vec. L.I. en l'espai $E_\lambda$.

## Caracterització endomorfismes diagonalitzables

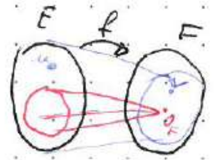
Sigui $f: E \to E$ on $\dim(E) = n$:

$\boxed{f \text{ és diagonalitzable} \Leftrightarrow \text{Hi ha } n \text{ valors propis i per cadascun } m_\lambda = \dim(E_\lambda)}$

$\boxed{\text{" Si } f \text{ té } n \text{ valors propis diferents} \Rightarrow f \text{ diagonalitzable "}}$

El que significa és que si hi ha **dim(E)** valors propis, podrem fer una $B'$ base amb aquests. Això comporta avantatges de temps de càlcul donat que podem fer:

$[\vec{v}]_{B_c} \Rightarrow [\vec{v}]_{B'}$ {Operem} $\rightarrow [\vec{u}]_{B'} \Rightarrow [\vec{u}]_{B_c}$ i com que {Operem} és una matriu Diagonal, tenim propietats com $D^K = \begin{pmatrix} \lambda^K & 0 \\ 0 & \ddots \; \lambda^K \end{pmatrix}$ i això és molt més ràpid.




En realitat tot és tot F pq f exhaustiva

## Nucli i Imatge

- **Nucli**: Tots elements del espai E que van a parar a $0_F$ en F. Ker (f) és un subespai. $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = 0_F\}$
- **Imatge**: Subespai de F que conté totes les imatges de E. $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{v} \in F : v = f(\vec{u}) \text{ per algun } \vec{u} \in E\}$

### Canvi de Base

$$\begin{tikzcd} E_B \arrow[r, "f"', "M^B_W(f)"] & F_W \arrow[d, "P^W_{W'}"', "I_F"] \\ E_{B'} \arrow[u, "I_E", "P^B_{B'}"'] \arrow[r, "f", "M^{B'}_{W'}(f)"'] & F_{W'} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f &= I_F \circ f \circ I_E \\ M^{B'}_{W'}(f) &= P^W_{W'} M^B_W(f) P^{B'}_B \end{aligned}}$$

Proposició

$\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$ són subespais d'E i F, respectivament.

Càlcul efectiu del nucli i Imatge

▶ Nucli

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_B \in E \;\middle|\; M^B_{B'}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{0_F} \right\}}$$

▶ Imatge

Vec. de les columnes de la mat. associada

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(b_1), \ldots, f(b_m)\} = \left\langle \overset{f(b_1)}{\begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix}}, \ldots, \overset{f(b_m)}{\begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Sabem que $b_1, \ldots, b_m$ són base però les imatges $(f(b_1), \ldots, f(b_m))$ no tenen pq ser L.I. i fer la mateixa base. Llavors hem de fer matriu i escalonar-la per veure si és L.I. i són base de Im (f).

Teorema

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{= \mathrm{rang}(M^B_{B'}(f))}}$$

▽ Això és molt impo.

Les f bijectives s'anomenen isomorfismes.

$\boxed{f \text{ injectiva} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E)$

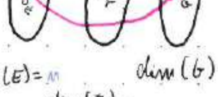
$\boxed{f \text{ exhaustiva} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(F)$

$f$ és un isomorf $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E) = \dim(F)$

Si $\dim(E) = \dim(F) \Rightarrow f$ isomorfisme $\Leftrightarrow f$ inj $\Leftrightarrow f$ exh.

## Composició d'aplicacions lineals

$E_B \xrightarrow{f} F_{B'} \xrightarrow{g} G_{B''}$



$\dim(E) = n$ $\dim(F) = m$ $\dim(G) = p$

$g \circ f(u) = g(f(u))$ és apl. lineal $E \to G$. Tmb. compleixen prop. de aplicacions.

- $g \circ f(u) + g \circ f(v) = g \circ f(u + v)$
- $g \circ f(u) \lambda = g \circ f(\lambda u)$ on $\lambda \in \mathbb{k}$

$$\boxed{M^B_{B''}(g \circ f) = M^{B'}_{B''}(g) \cdot M^B_{B'}(f)}$$

- Si $f: E \to E$ isomorf $\Rightarrow f^{-1}: F \to E$ tmb ho és. $\boxed{M^{B'}_B(f^{-1}) = (M^B_{B'}(f))^{-1}}$