CONJUNTS

Relacions d'Equivalència
Relacions Binaries

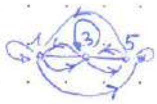
Saber si dos elements tenen relació.

Quines parelles estan relacionades

Una relació en el conjunt A és un subconjunt R de $A \times A$. ($R \subseteq A \times A$)

En comptes de $(a,b) \in R$, escriurem $a R b$.
a està relacionat amb b

Podem tindre prop. de simetria o no.



Ex: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ R: Tenir mateixa paritat. $1R1, 1R3, 1R5, 3R1, \dots$

Tenim conjunt A $xRy \to$ "x relacionat amb y" $2R2, 2R4, 2R6, 4R2, \dots$

∴ 3 relacions que sempre tenim:

- Identitat $R = I_A$: $x I_A y \Leftrightarrow x = y$
- Nul·la : $\forall x, y : x \not R y$
- Total: $\forall x, y: x R y$ # Totes les possibilitats (ells mateixos també)

∴ Propietats que pot tenir (o no) una relació:

- Reflexiva: $\forall x \quad xRx$
- Simètrica: $\forall x, y : xRy \Rightarrow yRx$ # Totes les relacions anteriors són simètriques. # Alguns comparadors no podem $x < y \nRightarrow y < x$
- Antisimètrica: $\forall x, y : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ # $\leq$ sí que és antisimètrica # La "total" no ho és
- Transitiva: $\forall x, y, z \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRy$ # $\leq$ ho compleix

Una relació d'equivalència en un conjunt A és una relació reflexiva, simètrica i transitiva. # A: {Autobusos que circulen ARA per BCN} xRy : x i y fan mateixa línia.

Obs: SEMPRE cal comprovar que sigui
☐ Simètrica
☐ Reflexiva
☐ Transitiva
si no són totes, no serà R eq.
Un element pot NO estar relacionat amb ell mateix xd.

Classes d'Equivalència, quocients i particions

∀ Són disjuntes
Unió és tot A

Tenim una rel. d'equiv. R en un conjunt A. Conjunt dels que compleixen

Classe d'equivalència de $a \in A$ és $\boxed{\{x \in A \mid xRa\} = \bar{a}}$ $\boxed{x \in \bar{a} \Leftrightarrow xRa}$

Conjunt quocient és conjunt de totes les classes (d'equiv) $\boxed{A/R = \{x \mid x = \bar{a} \text{ per a un cert } a \in A\} = \{\bar{a} \mid a \in A\}}$

Obs: $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow aRb$ $\quad a \in \bar{a}$ (per la reflex.) $\quad \bar{a} \cap \bar{b}$: o $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$
o $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a} = \bar{b}$

El Fa Demo si prox. no
Sope pcy

Es diu que formen una partició de A $\mathbb{Z} = \{\text{parells}\} \cup \{\text{senars}\}$

Ex. (Semblant al 91)

$A = \mathbb{Z}$ $nRm \Leftrightarrow n-m$ és múltiple de 4

Equivalent? - Reflexiva: $nRn \Leftrightarrow \underbrace{n-n}_{0}$ i 0 es múltiple de 4.

- Simètrica: $nRm \overset{?}{\Rightarrow} mRn$

$\Updownarrow$ $n-m$ múltiple $= \underbrace{-(n-m)}_{m-n}$ tmb múltiple de 4.

- Transitiva: $\left.\begin{array}{l} n-m \text{ multi de } 4 \\ m-k \text{ multi de } 4 \end{array}\right\} \Rightarrow n-k$ múltiple de 4

Si: pq. $n-k = \underbrace{(n-m)}_{4i} + \underbrace{(m-k)}_{4j} = 4(j+i) =$ múltiple.

$\bar{4} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 4Rn\}$

$= \{n \in \mathbb{Z} \mid 4-n$ múltiple de $4\}$

$= \{20, 24, 4, 0, -4, \dots\} =$ múltiples de 4.

$\bar{6} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 6-n$ múltiple de $4\}$

$= \{6, 2, 0, -6, \dots\}$ $6-n = 4k$, $n = 6-4k$, $n = \underbrace{4(1-k)}_{\text{múltiple}} + 2$

= Donen residu 2 en divisió per 4.

$\bar{1} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1-n$ múltiple de $4\}$

$= \{1, 17, 5, -3, \dots\}$ $4 \cdot (-1) + 1$

= Donen residu 1 quan dividim entre 4.

$\bar{3} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3-n$ múltiple de $4\}$

$= \{1, 3, 7, 5, \dots\}$

= Donen residu 3 quan dividim entre 4

$\mathbb{Z}/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = \{\bar{4}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{3}\}$ Classes que compleixen ser múltiple de 4.

Ara escollim un representant per cada classe (no importa quin)

Particions

Partició P de A és un conjunt format per subconj no buits de A, tots disjunts tal que la unió és A.

(94). B, C conjunts i $B \subseteq C$

Al Conjunt $A = \mathcal{P}(C)$ definim relació: $x, y \in \mathcal{P}(C)$: $x R y \Leftrightarrow x - B = y - B$

Demo que és d'equivalència. Calc, totes classes de R i A/R $C = \{1,2,3,4\}$ $B = \{1,2\}$

- Reflexiva: $x R x$?

$$x R x \Leftrightarrow x - B = x - B \Leftrightarrow x = x. \text{ Cert.}$$

- Simètrica: $x R y \overset{?}{\Rightarrow} y R x$

$$x R y \Leftrightarrow x - B = y - B \Leftrightarrow y - B = x - B \overset{\text{per la def de R del enunciat}}{\Leftrightarrow} y R x \quad \underline{\text{cert}}$$

- Transitiva: $x R y,\ y R z \overset{?}{\Rightarrow} x R z$

$$\left.\begin{matrix} x - B = y - B \\ y - B = z - B \end{matrix}\right\} x - B = z - B \Leftrightarrow x R z \quad \underline{\text{cert}}$$

- $B = \{1,2\}$ $C = \{1,2,3,4\}$ $A = \mathcal{P}(C) \leftarrow 2^{|C|} = 2^4 = 16$ elements

$\overline{\emptyset} = \{x \in \mathcal{P}(C) \mid x - B = \emptyset - B\}$
$= \{x \subseteq C \mid x - B = \emptyset\}$
$= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\overline{\{3\}} = \{x \in \mathcal{P}(C) \mid x - B = \{3\} - B\}$
$= \{x \subseteq C \mid x - B = \{3\}\}$

Pq si $\{3\} - \{1,2\} = \{3\}$ pq $\{3\}$ no té ni 1 ni 2

$= \{\{3\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,1,2\}\}$

Agafem tots els subconjunts de C que si resta $\{1,2\} = \{3\}$

(83). Relació R a A és diu circular si $\forall x, y, z \in A: [x R y \wedge y R z \rightarrow z R x]$.

Demo que una relació binaria és d'equivalència $\Leftrightarrow$ és reflexiva i circular.

La propietat reflexiva ja esta expressada que compleix donat que totes dues la tenen.

La circular sembla ser un conjunt de Simetria i transitiva.

Equivalència $\Rightarrow$ Circular |

Suposem que $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ [Prop. Tras]. | Això ho podem reformular que

Suposem que $x R y \Rightarrow y R x$ [Prop Simetria]. | $z R y \wedge y R x \Rightarrow z R x$

Per la prop de simetria,

(83). Una Relació R a A és diu circular si $\forall x,y,z: [xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx]$
Demo que relació binaria d'equivalencia $\Leftrightarrow$ reflexiva i circular. #GPT

Preliminars: – Transitiva: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
- Simètrica: $xRy \Rightarrow yRx$
- Reflexiva: xRx

Conjunt d'aquestes Equivalència.

Equivalència $\Rightarrow$ Simètrica i Circular |

R és d'equivalència (Per def. és Trans, Sim, Refle.)

- circularitat:

$\forall x,y,z: xRy \wedge yRz$ [Punt partida]

xRz [Transitiva]

zRx [Simètrica] ← Aquí és on acaba circular així que primer implica ✓.

Reflexiva i Circular $\Rightarrow$ Equivalència |

Suposem que R compleix reflexiva i circular.

- Reflexiva: Per Hipòtesi.
- Transitiva: $\forall x,y,z: xRy \wedge yRz$ [Punt partida]
  zRx [Circularitat] * Ara ens falta Demo que és simètrica.
  xRz [Simètrica] Demo.
- Simètrica: $\forall x,y \in xRy$ [Punt partida]
  yRy [Reflexivitat així que cert]

Tenim $xRy \wedge yRy$, per circularitat yRx ← ser simètric. Ara ja podem acabar Trans.

(106). $x,y,z \in A$ i R relació a A. Fent ús de def. rel. equiv. i classe Demo $x \in \bar{z}, y \in \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$

$x \in \bar{z} \wedge y \in \bar{z} \Rightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$ |

$x \in \bar{z} \wedge y \in \bar{z} \Leftrightarrow xRz \wedge yRz \Leftrightarrow xRz \wedge zRy \Leftrightarrow xRy$.

$a \in \bar{x} \Leftrightarrow aRx$.

$aRx \wedge xRy \Leftrightarrow aRy \Leftrightarrow a \in \bar{y}$ ← Es on volíem arribar.

$x \in \bar{z} \wedge y \in \bar{z} \Rightarrow \bar{y} \subseteq \bar{x}$ |

$x \in \bar{z} \wedge y \in \bar{z} \Leftrightarrow xRz \wedge yRz \Leftrightarrow xRy$.

$a \in \bar{y} \Leftrightarrow aRy$.

$xRy \wedge aRy \Leftrightarrow xRa \Leftrightarrow aRx \Leftrightarrow a \in \bar{x}$ ← Que és on volíem arribar.

Queda demo cert ☺.

(97). Sigui $A \subseteq \mathbb{N}$ i S aplicació $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $S(n)$ = Suma dels dígits de n.
Demo la relació $xRy \Leftrightarrow S(x) = S(y)$ és r. eq. a A.
Calc conjunt quocient $A: \{4, 44, 42, 22, 36, 8, 11, 35, 13, 15, 17, 18, 51, 33, 6\}$.

- Reflexiva: $x \in A$ [x arbitrari]

$S(x) = S(x)$ [la suma de dígits és la mateixa que la suma dels dígits d'un mateix].

xRx [Per definició]. ← Demo. Refle.

- Simètrica: $x, y \in A$ xRy [Punt partida]

$S(x) = S(y)$ [Relació]

$S(y) = S(x)$ [Prop de la igualtat]

yRx ← Demo Simètrica.

$\# \bar{4} = \{x \in A \mid xR4\} =$

$= \{x \in A \mid S(x) = S(4)\} =$

$= \{x \in A \mid S(x) = 4\}$

$\# \bar{4} = \{4, 22, 13\} = \overline{22} = \overline{13}$

- Transitiva: $x, y \in A : xRy$ i $y, z \in A : yRz$ [Punt partida]

$S(x) = S(y)$ i $S(y) = S(z)$ [Relació]

$S(x) = S(y) = S(z)$ [Prop igualtat]

xRz ← Demo Trans.

Conjunt Quocient

$A/R = \{\bar{4}, \bar{8}, \bar{6}, \overline{11}, \overline{36}\}$

NO pots ficar com a representant un nombre que no està en la classe.

$[4] = \{4, 22, 13\}$ $[8] = \{8, 44, 35, 17\}$ $[6] = \{6, 42, 15, 51, 33\}$ $[\cancel{X}] = \{11\}$ $[\cancel{X}] = \{36, 18\}$ 11 36

(98). B, C Conjunts $B \subseteq C$. Al conjunt $A = \mathcal{P}(C)$ i $x, y \in \mathcal{P}(C) : xRy \Leftrightarrow x \cup B = y \cup B$.
Demo relació eq. Calc Totes classes de R i A/R $C = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 2\}$

- Reflexiva: $x \in A$ [x arbitrari]

$x \in \mathcal{P}(C)$ [Enunciat]

$x \subseteq C$ [Def $\mathcal{P}$]

$x \cup B = x \cup B$ ← Donat que és igualtat és compleix Reflexiva.

- Simètrica: $x, y \in A : xRy$ [x, y arbi]

$x \cup B = y \cup B$ [Relació]

$y \cup B = x \cup B$ [Prop =]

yRx ← Demo. Simètrica.

- Transitiva: $x, y, z \in A : xRy$ i yRz [x, y, z arbi]

$x \cup B = y \cup B$ i $y \cup B = z \cup B$ [Relació]

$x \cup B = y \cup B = z \cup B$ [Reescriure]

$x \cup B = z \cup B$ [Prop =]

xRz ← Demo. Trans.

$$\cancel{\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}}$$

$\cancel{\# 2^4 = 16}$ $\cancel{\# x \circ B = y \circ B.}$

$\cancel{[\emptyset] = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}}$ → subconj de $\mathcal{P}(C)$ que no contenen ni 1 ni 2.

$\cancel{[\{1,2\}] = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}}$ → Sub de $\mathcal{P}(C)$ que contenen 1 i 2.

$\cancel{[\{1\}] = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,3,4\}\}}$ → Tenen 1 i no 2

$\cancel{[\{2\}] = \{\{2\}, \{2,3,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}}$ → Tenen 2 i no 1

$A/R = \{[\{1\}], [\{2\}], [\{1,2\}], [\emptyset]\}$

(99). $\mathbb{Z}$ $xRy \Leftrightarrow x^2+3y = y^2+3x$. Demo. eq.. Calc classes $[1], [2], [0]$.
Calc $[n]$ i $\mathbb{Z}/R$.

- Reflexiva: $xRx \Leftrightarrow x^2+3x = x^2+3x \Leftrightarrow x = x$ ☑

- Simètrica: $xRy \overset{?}{\Leftrightarrow} yRx$

$$x^2+3y = y^2+3x \Leftrightarrow y^2+3x = x^2+3y \Leftrightarrow yRx \quad ☑$$

- Transitiva: $xRy \wedge yRz \overset{?}{\Leftrightarrow} xRz$

$$\left.\begin{array}{l} xRy: x^2+3y = y^2+3x \\ yRz: y^2+3z = z^2+3y \end{array}\right\} x^2+3y \doteq z^2+3y \quad ☑ \quad \text{[Fet la resta]}$$

$1Ry: 1^2+3y = y^2+3\cdot 1 \Rightarrow y^2-3y = -2 \Rightarrow y^2-3y+2=0$ → $y=2$, $y=1$

$2Ry: 2^2+3y = y^2+3\cdot 2 \Rightarrow 4+3y = y^2+6 \Rightarrow y^2-3y+2=0$ → $y=2$, $y=1$

$0Ry: 0^2+3y = y^2+3\cdot 0 \Rightarrow y^2-3y \Rightarrow y(y-3)$ → $y=0$, $y=3$

$[0] = \{0,3\}$ $[1] = \{1,2\}$ $[2] = \{1,2\}$

$nRy: n^2+3y = y^2+3n \Rightarrow y^2-3y+(3n-n^2) = 0$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot(3n-n^2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12n+4n^2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{(2n-3)^2}}{2} = \frac{3 \pm (2n-3)}{2}$$

→ $\frac{3+2n-3}{2} = n$

→ $\frac{3+3-2n}{2} = 3-n$

$\cancel{\mathbb{Z}/R = \{[0],[1],[2],[n]\}}$ $\overline{n} = \{n, 3-n\}$

No sabia fer això i no ho he vist en classe.

~~Aquí estem repetint classes donat que $\overline{1} = \overline{2} = \{1,2\}$.~~ NOMÉS ficar classes úniques.

$\cancel{\mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{n}\}}$

$\mathbb{Z}/R = \{\overline{n} \mid n \geq 2\}$

-2 -1 0 1 | 2 3 4 5

Com que són parelles, agafem a partir del 2.

(100). "Tenir mateixa part entera" a $\mathbb{R}$. Demo. que és d'eq. Calc. classes 1'2, π, -1'2. Conjunt quocient.

$e(x)$ = part entera.

- Reflexiva: $x \in \mathbb{R}$ [x arbi.]
  $e(x) = e(x)$ [Prop =]
  $x R x$ ← Demo Reflexiva.

- Simètrica: $x, y \in \mathbb{R}$ [x, y arbi]
  $e(x) = e(y)$ [Relació]
  $e(y) = e(x)$ [Prop. Igualtat]
  $y R x$ ← Demo simètrica.

- Transitiva: $x, y, z \in \mathbb{R}$ [x, y, z arbi]
  $\left. \begin{array}{l} e(x) = e(y) \\ e(y) = e(z) \end{array} \right\}$ [Relació]
  $e(x) = e(y) = e(z)$ [Prop. igualtat]
  $x R z$ ← Demo transitiva.

$[-1'2] = \{ \lim_{x \to 0} \ldots x < a < \lim_{x \to -2} x \}$

$[-1'2] = \{(-1, -2]\}$

$[1'2] = \{[1, 2)\}$

$[\pi] = \{[3, 4)\}$

(101). Si $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ considerem $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x y = x' y'$.

Demo que és equivalència. Calc classes per (1,0), (1,1), (2,1), (2,3), (-2,4). Conj. quo.

- Reflexiva: $x, y \in A$ [x, y arbi]
  $x y = x y$ [Relació]
  $x y R x y$ ← Demo. Reflexiva

- Simètrica: x, y i $x', y' \in A$ [Totes arbi]
  $x y = x' y'$ [Relació]
  $x' y' = x y$ [Prop igualtat]
  $x' y' R x y$ ← Demo. Simètria.

- Transitiva: x, y i x', y' i $a, b \in A$ [Totes arbi]
  $\left. \begin{array}{l} x y = x' y' \\ x' y' = a b \end{array} \right\}$ [Relació]
  $x y = x' y' = a b$ [Prop igualtat]
  $x y R a b$ ← Demo. Transitiva.

~~$[(1,0)] = \{(0, y'), (x', 0)\}$~~

$[(1,1)] = \{(1,1), (-1,-1)\}$

$[(2,1)] = \{(2,1), (1,2), (-2,-1), (-1,-2)\}$

$[(2,3)] = \{(1,6), (6,1), (-1,-6), (-6,-1), (2,3), (3,2), (-3,-2), (-2,-3)\}$

$[(-2,4)] = \{(1,-8), (-1,8), (-8,1), (8,-1), (2,-4), (-2,4), (-4,2), (4,-2)\}$

$\overline{(1,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x,y) R (1,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$

$A / R = \{[0, \infty)\}$

(102). R relació a A simètric i transitiva. Demo que són equivalents (Només fent ús de def de rela. eq i (bs)).

a) $\lfloor x \rfloor \cap \lfloor y \rfloor \neq \emptyset$

Segons enunciat R és simètrica ($xRy \Leftrightarrow yRx$) i transitiva ($xRy \wedge yRz \Leftrightarrow xRz$).

~~$x, y, z \in A$ [x, y, z arbi]~~
~~$xRz \wedge zRy$ [Prop tras]~~
~~$zRx \wedge zRy$ [Prop. simètrica]~~
~~$z \in \bar{x} \wedge z \in \bar{y}$ [Def de R]~~
~~$z \in \bar{x} \wedge \bar{y}$ [Def $\wedge$]~~

Volem demostrar que $\bar{x} \cap \bar{y}$ no és buit. Això sig. que hi ha un (com a mínim) que compleix que està en $\bar{x}$ i $\bar{y}$.

$zRx \wedge zRy$ [Part partida]

$xRz \wedge zRy$ [Simètrica]

xRy [Transitiva]

Amb això demo que si hi ha un element que està en $\bar{x}$ i en $\bar{y}$, llavors xRy estan relacionats.

b) $\bar{y} \subseteq \bar{x}$.

$a \in \bar{y} \overset{\text{def } R}{\Leftrightarrow} aRy \overset{\text{ESTAP}}{\Leftrightarrow} aRy \wedge xRy \overset{\text{Sim.}}{\Leftrightarrow} aRy \wedge yRx \overset{\text{trans}}{\Leftrightarrow} aRx \overset{\text{def } R}{\Leftrightarrow} a \in \bar{x}$

c) $\bar{x} \subseteq \bar{y}$

$a \in \bar{x} \Leftrightarrow aRx \Leftrightarrow aRx \wedge xRy \Leftrightarrow aRy \Leftrightarrow a \in \bar{y}$

(114). Definim $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ així:

$f(x,y) = 1$ si $xy > 0$
$f(x,y) = 0$ si $xy = 0$
$f(x,y) = -1$ si $xy < 1$

A $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim $(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow f(x,y) = f(u,v)$. Demo que és classe equiv. Calc. Classes i conj.

- Reflexiva: Partim d'una relació que diu $\forall x,y \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $(x,y)R(u,v)$ si i només si $f(x,y) = f(u,v)$.
  Volem veure si compleix quan $u = x$ i $v = y$ t.q. $f(x,y) = f(x,y)$ cosa que és certa ☑

- Simètrica: $(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow f(x,y) = f(u,v) \Leftrightarrow f(u,v) = f(x,y) \Leftrightarrow (u,v)R(x,y)$ ☑

- Transitiva: $\left.\begin{array}{l}(x,y)R(u,v) \\ (u,v)R(a,b)\end{array}\right\} \Leftrightarrow f(x,y) = f(u,v) \wedge f(u,v) = f(a,b) \Leftrightarrow f(x,y) = f(a,b) \Leftrightarrow (x,y)R(a,b)$ ☑

$\bar{1} = \{x,y \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ $\quad \bar{0} = \{x,y \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ $\quad \overline{-1} = \{x,y \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}$

$\mathbb{R}^2/A = \{\overline{-1}, \bar{0}, \bar{1}\}$ $\quad$ GPT

(104). Demo. $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \wedge \bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset$ (Només fent ús def. rel. equiv. i classe).

- $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists a: a \in \bar{x} \cap \bar{y} \Leftrightarrow a \in \bar{x} \wedge a \in \bar{y} \Leftrightarrow aRx \wedge aRy$
- $\bar{x} \cap \bar{z} \neq 0 \Leftrightarrow \exists b: b \in \bar{x} \cap \bar{z} \Leftrightarrow b \in \bar{x} \wedge b \in \bar{z} \Leftrightarrow bRx \wedge bRz$

$\underline{aRx \wedge aRy \wedge bRx \wedge bRz \Rightarrow \bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset}$

$aRx \wedge aRy \wedge bRx \wedge bRz$ [Punt partida]

$aRx \wedge aRx \wedge bRy \wedge bRz$ [Reordenar]

$aRx \wedge aRy \wedge aRz$ [$T \wedge T \equiv T$]

$aRx \wedge yRa \wedge aRz$ [Prop. simètrica]

$aRx \wedge yRz$ [Prop. trasitiva]

yRz [$T \wedge p \equiv p$]

$\Rightarrow a \in \bar{y} \wedge a \in \bar{z}$ [Def R]

$a \in \bar{y} \cap \bar{z}$ [Def $\wedge$]

$\bar{y} \cap \bar{z} \neq 0$ ← On volíem arribar.

(98). [Fet anteriorment però refer classes]

$\mathcal{P}(c) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

$\bar{\emptyset} = \{x \in A \mid xR\emptyset\} = \{x \in \mathcal{P}(c) \mid x \cup \{1,2\} = \emptyset \cup \{1,2\} = \{1,2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\overline{\{3\}} = \{x \in A \mid xR\{3\}\} = \{x \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid x \cup \{1,2\} = \{3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\}\} = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\overline{\{4\}} = \{x \in A \mid \{4\} \cup \{1,2\} = \{1,2,4\}\} = \{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$

$\overline{\{3,4\}} = \{x \in A \mid \{3,4\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\}\} = \{\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

Ara sí.

(102). R rel. d'equiv. en $A \neq \emptyset$. Demo que són equivalents.

$\underline{a)\ \bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow b)\ \bar{y} \subseteq \bar{x}}$ Hem de demo que $\bar{y} \subseteq \bar{x}$. Vol dir $\forall t: tRy \to tRx$.

$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \overset{def}{\Rightarrow} \exists m: m \in \bar{x} \wedge m \in \bar{y} \overset{def R}{\Rightarrow} mRx \wedge mRy \overset{sime}{\Rightarrow} yRm \wedge mRx \overset{trans}{\Rightarrow} yRx$.

$\exists t: tRy \overset{p \wedge T \equiv p}{\Rightarrow} tRy \wedge yRx \overset{trans}{\Rightarrow} tRx \Rightarrow t \in \bar{x}$. ☑

$\underline{b)\ \bar{y} \subseteq \bar{x} \Rightarrow c)\ \bar{x} \subseteq \bar{y}}$ Hem de demo $\forall t: t \in \bar{x} \to t \in \bar{y}$.

$\exists t \in \bar{x} \overset{def R}{\Rightarrow} tRx \overset{p \wedge T \equiv p}{\Rightarrow} tRx \wedge yRx \overset{sim}{\Rightarrow} tRx \wedge xRy \overset{trans}{\Rightarrow} tRy \overset{def R}{\Rightarrow} t \in \bar{y}$ ☑.

$\bar{y} \subseteq \bar{x} \Rightarrow y \in \bar{y} \subseteq \bar{x} \Rightarrow yRx$

$\underline{c)\ \bar{x} \subseteq \bar{y} \Rightarrow a)\ \bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset}$ Hem de demo que $\exists t: tRx \wedge tRy$.

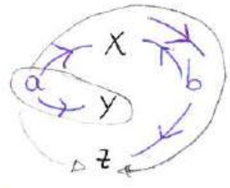
$\bar{x} \subseteq \bar{y} \Rightarrow x \in \bar{x} \subseteq \bar{y} \Rightarrow xRy$

Llavors com que xRx (reflexiva)
També tenim que xRy.
Volem demo que $\exists t: tRx \wedge tRy$

Aquest t pot ser $\underline{x}$ t.q. $xRx \wedge xRy$. Queda demo. ☑

(104). Demo que si R equiv. $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \wedge \bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset$.

$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \exists a : a \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow a \in \bar{x} \wedge a \in \bar{y} \Rightarrow a R x \wedge a R y,$



$\bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset \Rightarrow \exists b : b \in \bar{x} \cap \bar{z} \Rightarrow \exists b : b \in \bar{x} \wedge b \in \bar{z} \Rightarrow \exists b : bRx \wedge bRz$

Volem demo que $\exists c : c \in \bar{y} \cap \bar{z} \Rightarrow c \in \bar{y} \wedge c \in \bar{z} \Rightarrow \exists c : cRy \wedge cRz$

☐ Acabar

(114). $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$; $(x,y) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } xy > 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \\ -1 & \text{si } xy < 0 \end{cases}$; $(x,y) R (u,v) \Leftrightarrow f(x,y) = f(u,v)$

- Reflexiva: Volem demo que $(x,y) R (x,y)$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
  Llavors tenim $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ i amb la def de R $f(x,y) = f(x,y)$ cosa que certa ☑.

- Simetria: Volem demo que $\forall (x,y), (u,v) \in \mathbb{R}$ $(x,y) R (u,v) \to (u,v) R (x,y)$
  Llavors tenim $\forall (x,y), (u,v) \in \mathbb{R}^2$ amb def $f(x,y) = f(u,v) \Leftrightarrow f(u,v) = f(x,y)$ llavors podem veure que $(u,v) R (x,y)$ ☑.

- Transitiva: Volem demo que $\forall (x,y), (u,v), (a,b) \in \mathbb{R}$ i $(x,y) R (u,v) \wedge (u,v) R (a,b) \to (x,y) R (a,b)$
  Tenim $(x,y) R (u,v)$ $\forall (x,y), (u,v) \in \mathbb{R}^2$. t.q. $f(x,y) = f(u,v)$
  Tenim $(u,v) R (a,b)$ $\forall (u,v), (a,b) \in \mathbb{R}^2$. t.q. $f(u,v) = f(a,b)$
  $\Big\}$ $f(x,y) = f(u,v) = f(a,b)$ $\Downarrow$ $f(x,y) = f(a,b)$
  Queda demostrat que $(x,y) R (a,b)$ que és la trans ☑.

$\overline{(x_0, y_0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) R (x_0, y_0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = f(x_0, y_0)\}$ ← General.

$\overline{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}$ → Donat que $+ \cdot + = 1$, $- \cdot - = 1$ Pel que dins aniràt

$\overline{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ → Està amb eix.

$\overline{(-1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = -1\}$ → Donat que $+ \cdot - = -1$, $- \cdot + = -1$ Quadrats negatius.

$\Rightarrow \mathbb{R}^2/R = \{\overline{(1,1)}, \overline{(0,0)}, \overline{(-1,1)}\}$