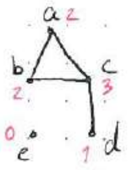
Teoria de Graf

Introducció

Grafo $G=(V,A)$ V: Conjunt de vèrtexs $|V|$: Ordre de G (n) $\frac{n(n-1)}{2}$

A: Conjunt d'arestes $|A|$: Mesura de G (m) $0 \leq |A| = m \leq \binom{n}{2}$



$|V| = 5$ $|A| = 4$

$V = \{a, b, c, d, e\}$ $A = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{d,e\}\}$

$\boxed{V \neq \emptyset}$ ~~st~~ sino no seria graf. $a \sim b$ o $b \sim a$ "a és vèrtex adjacent de b" a ~~∼~~ e "a no és adjacent a e"

Obs: $\cdot a$ Sí que és graf ~~tot~~ tot i que no té cap aresta. Graf Trivial $= K_1$.

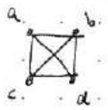
"Número de vèrtex (v) que estan connectats a u."

Grau d'un vèrtex: Número de vèrtexs que formen arestes. (N^o vèrtex adjacents).

$\boxed{u \in V \quad g(u) = |\{v \in V ; \{u, v\} \in A\}|}$ # u, v són vèrtex # $||$ ho fiquem per saber quant.

$0 \leq g(u) \leq |V| - 1$

⚠ no es pot fer, per això '-1'. "No es pot autoreferenciar".



$|A| = m = \binom{4}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = \frac{12}{2} = 6 = m$

Graf Complet	a, b, c
Graf Nul	a, b, c

K_y és nomenclatura de graf complet. y és el nombre d'arestes

Multigraf: Poden haver multiples arestes entre mateixos vèrtex (a, b, c, d)

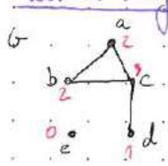
Pseudo graf: Es poden "autoreferenciar" i multiples arestes. (a, b, c, d)

Graf dirigit: Entre vèrtex hi ha direcció. (a, b, c)

Tot i que NO els treballem

Matriu Adjacència de G

Això sig. que no és pseudograf

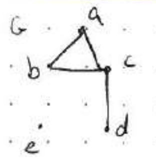


$$M_G = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \\ & \begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

Podem veure que és simètrica respecte diagonal principal donat que $\boxed{a \sim b \Leftrightarrow b \sim a}$

N^o de 1 per fila o col obtenim el grau de cada vèrtex.

Llista d'Adjacència



a	b	c	d	e
b	a	a	c	
c	c	b		
		d		

a, b, c, d, e $L_A = \{\{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,d\}, \{c\}, \{\}\}$

⚠ L'ordre és important

Grau d'un vèrtex:

Grau mínim de G $\delta(G) = \min\{g(v) \mid v \in V\}$ ← Valor del grau del vèrtex amb menys arestes incidents.

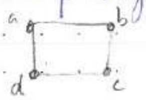
Grau màxim de G $\Delta(G) = \max\{g(u) \mid u \in V\}$ ← Aquí el que més

Seqüència de graus de G

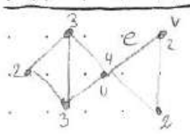
$S(G) = \langle 3, 2, 2, 1, 0 \rangle$ Llista ordenada de major a menor dels graus dels vèrtexs del graf.

Graf regular: Graf t.q. $\delta(G) = \Delta(G)$. Tots els vèrtex tenen mateix grau.

Obs: Graf Regular $\neq$ Graf Complet. Pq. sigui complert cada parell de vèrtexs dif. està connectat per arestes.



Lema de les encaixades: La suma dels graus dels vèrtexs d'un graf és el doble de la mida ($|A|$) del graf.



$$\boxed{2|A| = \sum_{v \in V(G)} g(v)}$$

Prop. matemàtica que és conseq. immediata d'una altre prop. demostrada.

Corol·lari: Donat que aquest sumatori ha de ser par i es pot descomposar amb els vèrtex de grau senar + grau senar, podem concloure que el nº de vèrtex de grau senar ha de ser par.

$$\underbrace{2|A|}_{par} = \sum_{v \in V(G)} g(v) = \underbrace{\sum_{\substack{v \in V(G) \\ g(v)\ par}} g(v)}_{par} + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ g(v)\ senar}} g(v)$$

Això ha de ser par pq. par = par + par. Si fos senar no es compliria.

Havel-Hakimi Algorithm

Permet saber si donat una seq. de graus d'un graf aquesta pot ser representable.

Comprobacions prèv:
- ☐ Nº de vèrtexs amb graus senar és parell. Si no complix llavor no complirà el corol·lari.
- ☐ $\Delta G \leq |V| - 1$ Donat que és impossible (graf simples) que un vèrtex tingui més arestes que vèrtexs totals.

Procediment:

1) Ordenar seqüència.
2) Eliminar zeros. Això és pq. si és '0' sig. que és vèrtex aïllat i sempre és representable.
3) Suma dels graus no és senar. Si fos senar no compliria el corol·lari.
4) Treure primer element (N). Això ho fem pq. simularem que estem connectant vèrtex.
5) Reduïm '-1' els N nombres de la seq.. Ho fem per connectar.
6) Tornar al pas 1. ⚠ A cada iteració hem de fer comprovacions prèvies.

Tipus de graf

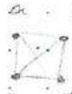
Nº de vèrtexs

Graf nul d'ordre n: N_n. Graf d'ordre n i mida 0. a b c d

Graf trivial: N_1 a

Es veu amb tots mays amb ell i dividim pq. tenim redundància.

Graf complet d'ordre n: K_n. Graf d'ordre n amb totes les arestes possibles $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$



Graf Trajecte d'ordre n: $T_n = (V, A)$. Graf ordre n i mida $n-1$ amb les arestes:
$A = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n\}$ a b c d

\# $\delta(T_n) = 1$ i $\Delta(T_n) = 2$ si $n \geq 3$

Ordre = mesura = n

Graf cicle d'ordre n: $C_n = (V, A)$ amb $n \geq 3$. igual que trajecte però afegim $\{x_n x_1\}$.

\# $\delta(C_n) = 2 = \Delta(C_n)$

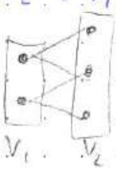
Graf roda d'ordre n: $W_n = (V, A)$ graf ordre n i mida $2n-2$. ⊛

⊛ Tenim un Cicle$_{n-1}$ i un punt central que va a $n-1$ punts
$n-1+n-1 = 2(n-1)$

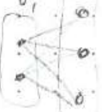
Graf bipartit: $G = (V, A)$ t.q. hi ha dos subconjunts no buits t.q. $V = V_1 \cup V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Tota aresta $uv \in A$ en té $u \in V_1$ i $v \in V_2$ o viceversa.

Parts estables del graf a V_1 i V_2. $\sum_{v \in V_1} g(v) = \sum_{v \in V_2} g(v) = |A|$



Graf bipartit complert: $K_{r,s} = (V, A)$ graf bipartit amb parts estables V_1 i V_2 t.q.



$r = |V_1|$ i $s = |V_2|$ i tots els vèrtex V_1 són adjacent a tots els vèrtexs V_2

$A = \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}$

\# Ordre: $r+s$ i mida: rs

$K_{1,s}$ és graf estrella ⇒

Graf regular: r és el grau dels vèrtex.

$\boxed{G = (V,A) \text{ és } r\text{-regular} \Leftrightarrow \forall v \in V: g(v) = r \Leftrightarrow \delta(G) = \Delta(G) = r}$

K_n és graf regular $(n-1)$-regular

\# 3-regular = grafs cúbics

C_n és graf 2-regular

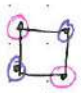
\# $K_n = n-1$ regular

$G = (V, A)$ graf r-regular: $2|A| = r|V|$

Obs. K_n si $n > 2$ no és bipartit.

T_n $n \geq 2$ és bipartit.

C_n $n \geq 3$ → és bipartit si $2 \mid n$

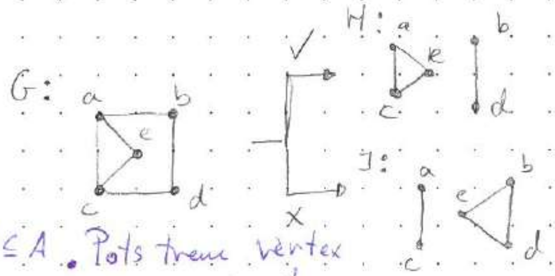


→ no és bipartit si $2 \nmid n$

Això NO és bipartit.

⚠ Bipartit NO pot tindre cicles senars.

Subgrafs

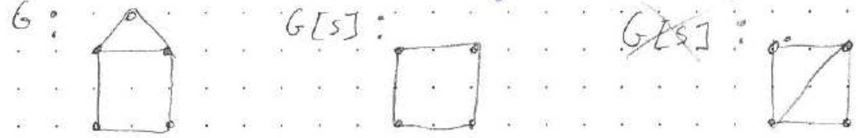


Sigui $G=(V,A)$ un graf:

Subgraf de G: $G'=(V',A')$ on $V'\subseteq V$ i $A'\subseteq A$. Pots treure vèrtex i arestes.

Subgraf generador de G: $G'=(V,A')$ on $A'\subseteq A$. Això sig. que els vèrtex són idèntics.
Pots treure arestes, però NO ficar noves.

Subgraf induït per $S\subseteq V$: $G[S]=(S,A')$ t.q. $A'=\{uv\in A \mid u,v\in S\}$
Subgraf on hem agafat els vèrtex amb totes les seves arestes.



Grafs derivats d'un graf

Sigui $G=(V,A)$ graf d'ordre $=n$ i mida $=m$:

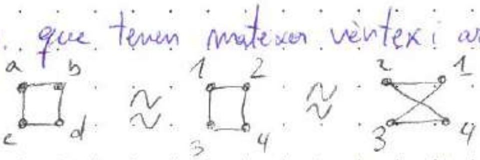
Graf Complementari de G: $G^c=(V,A^c)$ on $A^c=\{uv \mid u,v\in V \wedge uv\notin A\}$

Ordre $G^c = G$ — Són totes les possibles i traiem les

Mida $G^c = \frac{n(n-1)}{2} - |A|$ — que hi havien prev.

$G\cong H \Leftrightarrow G^c \cong H^c$

'$\cong$' sig. graf isomòrfic que sig. que tenen mateixos vèrtex i arestes, però s'anomenen diferent o estan presentats diferents.



Graf Autocomplementari: $G\cong G^c$.

Té la mateixa estructura si re-etiquetem els vèrtexs després de fer el complementari.

Graf per supressió de vèrtexs de S: $G-S$ on eliminem alguns vèrtexs i les seves arestes.

$\forall S < V$

$V'=V-S$ on S són els vèrtexs eliminats.

A' són les arestes que no tenen vèrtexs en S.

$G-v$ si eliminem 1 vèrtex en concret. → Ordre $= n$ → Mida $= m-g(v)$.

Graf per supressió d'arestes de S: $G-S$ eliminem arestes especificades.

$\forall S\leq A$

$V'=V$ i $A'=A-S$.

Si eliminem 1 aresta $G-a$ → Ordre $= n$ → Mida $= m-1$

Isomorfisme de grafs

$\boxed{G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow G_1^c \cong G_2^c}$

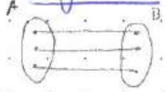
Saber si dos grafs representen mateixa estructura tot i que representats diferent.

G i G' són isomorfos $G \cong G'$ si existeix funció bijectiva t.q. $f: V \to V'$

$|V| = |V'|$

$\boxed{\forall u, v \in V : u \sim v \to f(u) \sim f(v)}$

A B

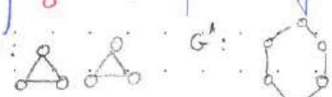


Hi ha $n!$ aplicacions bijectives entre dos elements.

Obs:
- Un vèrtex i la seva imatge tenen mateix grau.
- Dos grafs isomorfos tenen mateixa mida i grau.
- Dos grafs isomorfos tenen mateixa seq. de graus.

} El recíproc és fals

G: G':



Compleixen condicions, però no són polimorfos. Per saber-ho simplement s'hem de comprovar 6! funcions bijectives per a veure-ho.

- Ser isomorfo és una relació d'equivalència.

Demostracions

⊛ $\forall G = (V, A)$ $|V| = n \geq 2$. G té almenys 2 vèrtex amb el mateix grau.

Farem demo per R.A.: Tots els vèrtexs de G tenen graus diferents.

Això vol dir que la seq. de graus és de la forma

- $S(G) = \langle n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1 \rangle$ Això no pot ser pq. $0 \leq g(u) \leq n-1$
- $S(G) = \langle n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0 \rangle$ Això és contradicció pq. $n-1$ sig. que està connectat a tots els vèrtexs del graf, però després diem que hi ha un vèrtex sense cap aresta.

Donat que totes dues possibilitats són contradictòries, arribem a la contradicció que buscàvem fent que enunciat sigui cert. ☑

⊛ Demo. del Lema de les Encaixades: $\sum_{u \in V} g(u) = 2|A|$

Farem demo per "counting argument": Contem el nº d'arestes de G t.q.

"Comptem les arestes que "surten" de cada vèrtex"
"Sumant els graus de cada vèrtex"

] → Estem comptant tot dues vegades. Ja sabem que ho fem "malament".

Llavors podem deduir que el resultat del sumatori serà $2|A|$.

par * par = par
par * senar = par
senar * senar = senar
senar + senar = senar
par + senar = senar
par + par = par

⊛ Demo del Corol·lari: Tot $G = (V, A)$ té nº par de vèrtex de grau senar.

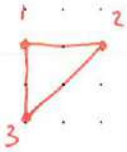
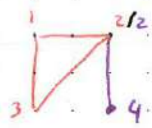
Donat que ja hem demo el Lema de les Encaixades podem dividir el sumatori entre els vèrtex de grau par + grau senar. Aquest resultat ha de ser parell llavors la quantitat de vèrtex que tenen grau senar ha de ser parell.

Operacions amb grafs

Graf Reunió de G i H: $G \cup H$ Graf amb conjunt de vertex $V \cup V'$ i arestes $A \cup A'$

Fixe't que si $V \cap V' = \emptyset \rightarrow$ ordre $= |V| + |V'|$.

$A \cap A' = \emptyset \rightarrow$ mida $= |A| + |A'|$

G: 
H: 
$G \cup H$: 

Graf Producte de G i H: $G \times H$ Suposem que $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$
$V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ — m i n poden ser dif.

Llavors $G \times H$ és el graf amb conjunt de vertex:

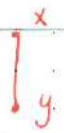
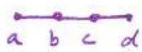
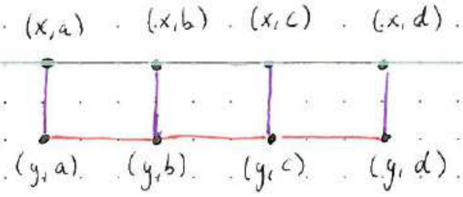
$$\boxed{V(G\times H) = V(G)\times V(H) = \{(u_i, v_j) \mid u_i \in V(G) \wedge v_j \in V(H)\}}$$

i "e" és una aresta de $G \times H$ sii $\boxed{e = (u_i, v_j) \sim (u_k, v_l)}$ on:

1) $i = k$ i $v_j v_l \in A(H)$

o

2) $j = l$ i $u_i u_k \in A(G)$

G: K_2 
H: P_4 
$G \times H$: 

Demostracions

⊛ $G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_1^c \cong G_2^c$

Pel que suposem $G_1 \cong G_2 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ \exists f: V_1 \rightarrow V_2 \text{ bijectiva} \\ 2)\ \forall u,v \in V_1 \quad u \sim v \Leftrightarrow f(u) \sim f(v) \end{cases} \Rightarrow$

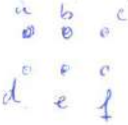
1) $\exists f^{-1}: V_2 \rightarrow V_1$ (Cosa òbvia pq és bijectiva).

2) $f(u) \sim f(v) \Rightarrow f^{-1}(f(u)) \sim f^{-1}(f(v)) \Rightarrow u \sim v$.

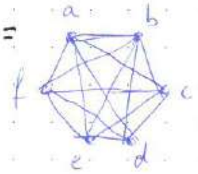
Ja tenim els req. per ser isomorfa.

Queda demo que si $G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_1^c \cong G_2^c$

①. Per cada N_n, K_n, T_n, C_n, W_n per $n = 6$.

$N_6 =$  $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ ordre $= n$ g. max $= 0$

#tot 0's mida $= 0$ g min $= 0$

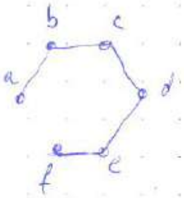
$K_n =$ 

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ordre $= n$

mida $= \dfrac{n(n-1)}{2}$

~~grau~~ g min $=$ g max $= n-1$

$T_n =$ 

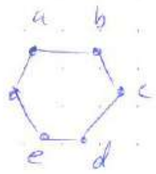
$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

ordre $= n$

mida $= n-1$

g max $= 2$

g min $= 1$

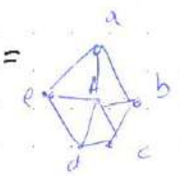
$C_n =$ 

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

ordre $= n$

mida $= n$

g max $=$ g min $= 2$

$W_n =$ 

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ordre $= n$

mida $= n-1 + n-1 = 2(n-1)$

g max $= n-1$

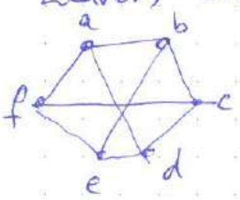
g min $= 3$

②. Dona graf amb dibuix i matriu.

a) 3-regular ordre mínim 5. Tots els punts tenen 3 arestes i mínim 5 punts.

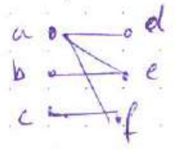
$3 * 5 = 15$ que no és parell. Sig. que la mida és senar i això no pot ser.

Llavors ordre mínim és de 6.



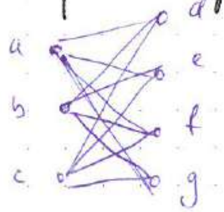
$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

b) bipartit ordre 6.



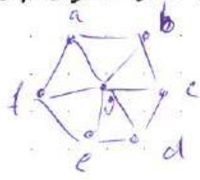
$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0&0&0&1&1&1 \\ b & 0&0&0&0&1&0 \\ c & 0&0&0&0&0&1 \\ d & 1&0&0&0&0&0 \\ e & 1&1&0&0&0&0 \\ f & 0&0&1&0&0&0 \end{array}$$

c) bipartit complet ordre 7.



$$\begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 0&0&0&1&1&1&1 \\ b & 0&0&0&1&1&1&1 \\ c & 0&0&0&1&1&1&1 \\ d & 1&1&1&0&0&0&0 \\ e & 1&1&1&0&0&0&0 \\ f & 1&1&1&0&0&0&0 \\ g & 1&1&1&0&0&0&0 \end{array}$$

d) Estrella ordre 7.



$$\begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 0&1&0&0&0&1&1 \\ b & 1&0&1&0&0&0&1 \\ c & 0&1&0&1&0&0&1 \\ d & 0&0&1&0&1&0&1 \\ e & 0&0&0&1&0&1&1 \\ f & 1&0&0&0&1&0&1 \\ g & 1&1&1&1&1&1&0 \end{array}$$

3. Digues si K_n, T_n i C_n amb $n \geq 1$ o $n \geq 3$ són bipartits i/o regulars.

- K_n no serà bipartit si $n > 2$. Sempre serà regular.
- T_n Sempre bipartit, però si $n > 2$ mai regular.
- C_n Sempre regular. Serà bipartit si es divisible entre 2, sino no.

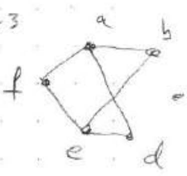
4. Donem la mida.

a) Graf r-regular d'ordre n: $\frac{n \cdot r}{2}$ b) Bipartit Complet $K_{r,s}$: $r \cdot s$

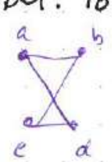
Quan parlem de bipartit complert no tenim en compte les arestes que van entre vèrtex del mateix subgrup. Llavors totes les arestes venen totes les altres però no les del seu mateix.

 $K_{1,3}$  $K_{2,3}$  $K_{3,3}$

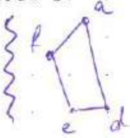
5. Sigui $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ i $A = \{ab, af, ad, be, de, ef\}$ i $G = (V, A)$.



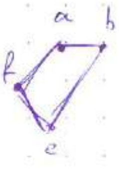
Det. Tots els subgrafs ordre = 4 i mida = 4.



$\{a, b, d, e\}$
$\{ab, ad, be, de\}$



$\{a, d, e, f\}$
$\{ad, de, ef, fa\}$

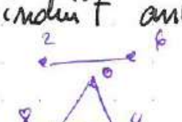


$\{a, b, e, f\}$
$\{ab, be, ef, fa\}$

6. $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Dos vèrtex u i v són adj. $\Leftrightarrow |u - v| \in \{1, 4, 5, 8\}$

a) Subgraf induït amb parells.

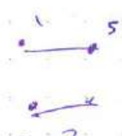
0	4 8
2	6
4	8 0
6	2
8	4 0



Ordre = 5
mida = 4

b) Senars

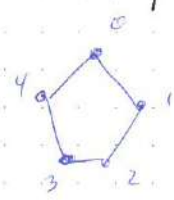
1	5 $\cancel{6}$ $\cancel{2}$
3	$\cancel{8}$ $\cancel{4}$ 7
5	1 $\cancel{6}$
7	3 $\cancel{2}$ $\cancel{6}$



mida = 2
ordre = 4

c) Subgraf induït per $\{0,1,2,3,4\}$.

0	1 4
1	2 0
2	3 1
3	2 4
4	0 3

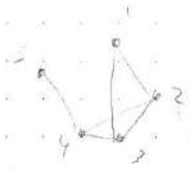


ordre = 5

mida = 5

d) Subg. gen. max arestes, però sense cicles.

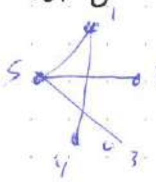
Pq. no tingui cap cicle faria tq. fent que ordre = 9 i mida = 8.



⑦. $G=(V,A)$ $V=\{1,2,3,4,5\}$ i $A=\{12,13,23,24,34,45\}$.

Conjunt arestes, matriu i rep. gràfica.

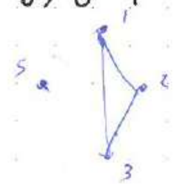
a) G^c



$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$A=\{14,15,25,35\}$

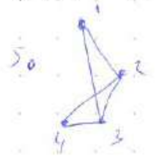
b) $G-4$



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$A=\{12,13,23\}$

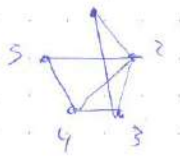
c) $G-45$



$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\{12,13,23,24,34\}=A$

d) $G+25$



$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$A=\{12,13,23,25,34,45\}$

⑧. Dona ordre i mida. Sent $G=(V,A)$ ordre $=n$ i mida $=m$.

a) G^c	b) $G-v$	c) $G-a$
Ordre $= n$	Ordre $= n-1$	Ordre $= n$
mida $=\frac{n(n-1)}{2}-m$	Mida $= m-g(v)$	Mida $= m-a$

⑨. Digues si: a) Complementari de r-regular → r-regular. b) Complementari de bipartit → bipartit. } Demo. o fica contraexemple.

a) Partim que r-regular te mida $\frac{n\cdot r}{2}$ i cada vèrtex té r arestes incidents. ← Treuria s'ell matrix.
El graf complementari passarà que cada vertex tindrà $n-r-1$ arestes incidents.
Per def. la mida del complementari és $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n\cdot r}{2} \Rightarrow \frac{n(n-r-1)}{2}$ on podem veure no similitud on $r \neq n-r-1$ fet que el complementari de r-regular sigui $n-r-1$-regular.

a) Complementari complet bipartit → bipartit.   ⚠ Cuidado que això no és el que demanen.

Fals: Contraexemple; $K_{2,3}$ és un graf bipartit complet, però si fem el complementari $K_{2,3}^c$ resulta amb un graf que té un cicle impar (triangle).

Visualitzat:

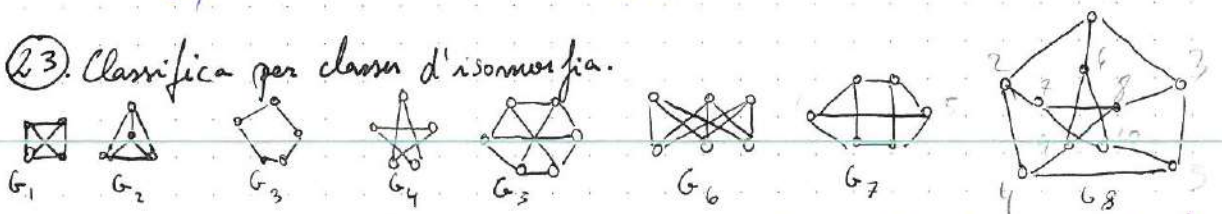
b) Complementari Bipartit → Bipartit.

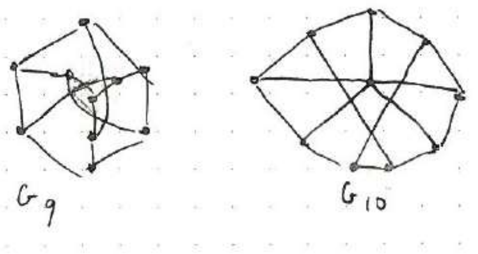
Fals: Contraexemple; T_5 introdueix cicle senar al fer T_5^c.

Gràficant:

On podem veure el cicle 0-2-4 que això és impar.

(23). Classifica per classes d'isomorfia.

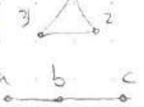




$G_1 \cong G_2$ | $G_3 \cong G_4$ | $G_5 \cong G_6$ | G_7 ||
$G_8 \cong G_9 \cong G_{10}$ ← Aquesta no l'he vist.

(10). Conjunt arestes i rep. gràfica de $K_3 \cup T_3$ i $T_3 \times K_3$ on $T_3 \cap K_3 = \emptyset$.

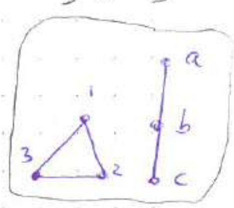
- $K_3 = (V, A)$ on $V = \{1, 2, 3\}$ i $A = \{12, 13, 23\}$



- $T_3 = (V', A')$ on $V' = \{a, b, c\}$ i $A' = \{ab, bc\}$

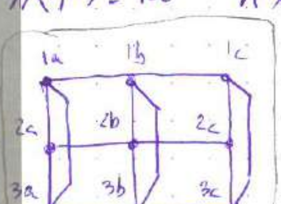
$K_3 \cup T_3$: $V \cup V' = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ i $A \cup A' = \{12, 13, 23, ab, bc\}$

$K_3 \cup T_3$



$K_3 \times T_3$: $V \times V' = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)\}$

$(1,a) = 1a$ $A \times A' = \{1a1b, 1b1c, 2a2b, 2b2c, 3a3b, 3b3c,$
$1a2a, 2a3a, 3a1a, 1b2b, 2b3b, 3b1b, 1c2c, 2c3c, 3c1c\}$



$K_3 \times T_3$

(11). Considera $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$. Dona ordre i mida.

- $V_1 \cap V_2 = \emptyset \Rightarrow$ Ordre de $G_1 \cup G_2 = |V_1| + |V_2|$

  Ordre de $G_1 \times G_2 = |V_1| \cdot |V_2|$

- $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ Ordre de $G_1 \cup G_2 =$ No és pot saber pq. depén de coincidències.

  Ordre de $G_1 \times G_2 =$.

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow$ Mida de $G_1 \cup G_2 = |A_1| + |A_2|$

  Mida de $G_1 \times G_2 = |V| \cdot |A'| + |V'| \cdot |A|$ ← entendre pq.

(12). Proveu o fica contraexemple.

1) Si G_1, G_2 regulars $\rightarrow G_1 \times G_2$ regular.

Cert ; Demo:

- G_1 és un r-regular d'ordre p t.q. mida $= \frac{rp}{2}$
- G_2 és un s-regular d'ordre q t.q. mida $= \frac{q \cdot s}{2}$

Això implica que el graf $G_1 \times G_2$ serà d'ordre pq i la seva mida t.q

$$p \cdot \left(\frac{q \cdot s}{2}\right) + q\left(\frac{rp}{2}\right) = \frac{pqs}{2} + \frac{pqr}{2} = \frac{pq(r+s)}{2}$$ on podem obs.

Que l'ordre correspon a "pq" i el graf serà un r+s-regular.

2) G_1 i G_2 bipartit $\rightarrow G_1 \times G_2$ bipartit.

Parts estables

Definim $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ on $V_1 = \underbrace{V_{11} + V_{12}}_{q}$ i $V_2 = V_{21} + V_{22}$

Definim $A = \{(x,y) \in G_1 \times G_2 \mid x \in V_{11}, y \in V_{21}$ o $x \in V_{12}, y \in V_{22}\}$

$B = \{(x,y) \in G_1 \times G_2 \mid x \in V_{11}, y \in V_{22}$ o $x \in V_{12}, y \in V_{21}\}$ } Conjunts del graf $G_1 \times G_2$

Per demo que no hi ha arestes entre mateixos conjunts A i B considerem:

- $(x = x')$: Sig. que $(y, y') \in V_2$ i G_2 és bipartit a així que estaran en conjunts diferents entre A i B. $\# x = x' \in V_{11} \Rightarrow y \in V_{21}$ i $y' \in V_{22} = A$

  $\# x = x' \in V_{12} \Rightarrow y \in V_{22}$ i $y \in V_{21} = B$

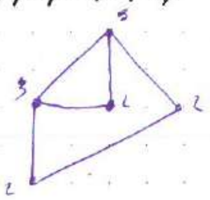
- $(y = y')$: Sig. que $(x, x') \in V_1$ i G_1 és Bipartit així que estaran en conjunts diferents entre A i B $\# y = y' \in V_{21} \Rightarrow x \in V_{11}$ i $x' \in V_{12}$

  $\# y = y' \in V_{22} \Rightarrow x \in V_{11}$ i $x' \in V_{12}$

M1-1-E-3

⑮. Digues si existeix graf. Si existeix → Dibuixa.

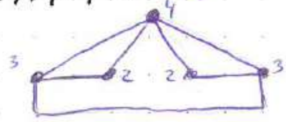
a) $<3,3,2,2,2>$ Sí.



b) $<4,4,3,2,1>$ No

la suma d'~~arestes~~ graus no és parell

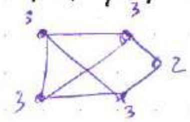
c) $<4,3,3,2,2>$ Sí



d) $<3,3,3,2,2>$ No

Suma d'graus és senar

e) $<3,3,3,3,2>$



f) $<5,3,2,2,2>$

El vèrtex amb més grau (5) no pot ser igual al ordre (5).

⑯. Graf regular de grau senar → Ordre parell.

Pq. sinó no compliria el teorema del Handshaking. En aquest cas només tenim un sumatori però aquest ha de ser amb resultat parell.

$gr(v) = 2k+1$; $n = |V|$ $n(2k+1) = 2j \Leftrightarrow n = 2m$. És curt + molt + i ràpid.

⑰. G bipartit d'ordre n i regular $r \geq 1$. Quina és la mida de G? ~~Pot ser ordre se~~

Pot ser ordre senar?

~~Suposant que~~ $\cancel{n = n_1 + n_2}$ ~~la mida de G és t.q.~~ $\cancel{\frac{(n_1+n_2)\cdot d}{2}}$

~~Donat que la mida ha de ser un nombre ℕ, s'eg que numerador és div. entre 2. Això només s'aconsegueix si~~ $\cancel{n_1 + n_2}$ ~~és div entre 2.~~

~~És per això que l'ordre no pot ser senar.~~

⑱. Graf bipartit ordre n la mida $\leq \frac{n^2}{4}$.

Si G bipartit ordre n podem dir que és $r+(n-r)$. Donat que és bipartit la mida és $r(n-r)$. D'això volem saber el màxim, mida $= rn - r^2$ on r és variable.

Fem la derivada per trobar el màxim t.q. $f'(r) = -2r + n$ i $f'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{n}{2}$ màx.

Ara tornem a saber la mida quan $r = \frac{n}{2} \Rightarrow \frac{n}{2}\left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4}$.

Com a màxim tindrà mida $\frac{n^2}{4}$ (però això només passa si n parell.)

Si l'ordre és senar n és $(r+1)+(n-r)$ on $f(r) = -r^2 - r + rn + n$ i $f'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{n-1}{2}$

$\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(n - \frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-n+1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{4}$ i això és $< \frac{n^2}{4}$. Llavors la mida és $\leq \frac{n^2}{4}$

(19). G graf ordre 9 on vèrtex $\begin{cases} \to gr(v) = 5 \\ \to gr(v) = 6 \end{cases}$. Prova que: $p \to q \vee r$

mín. 5 vèrtex de grau 6 o mín. 6 vèrtex de grau 5.

~~Comencem definint que $V_6 = \{v \in V \mid gr(v) = 6\}$ i $V_5 = \{v \in V \mid gr(v) = 5\}$.~~

~~• Si $|V_6| \geq 6$: Sig. que $|V_5| = |V| - |V_6| = 9 - |V_6|$ faria que $|V_5| \leq 3$ i~~
~~això no faria que el graf fos possible donat que~~

Fem demo per casos:

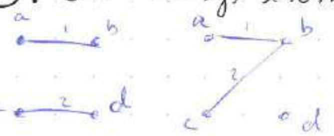
• $|V_5| = 1 \Rightarrow |V_6| = 8$. Això no és possible pq. no compleix corol·lari.

• $|V_5| = 2 \Rightarrow |V_6| = 8$. Aquí veiem que compleix que mín 5 en $|V_6|$

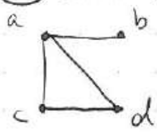
• $|V_5| = 3 \Rightarrow |V_6| = 6$. No és possible.

[...] # Tot i que no sé si es correcte fer-ho així.

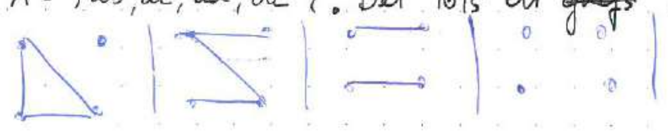
(21). Det. (menys isomorfismes) tots grafs ordre 4 i mida 2.

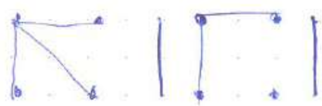


(22). $V = \{a, b, c, d\}$ i $A = \{ab, ac, ad, dc\}$. Det tots els ~~grafs~~ subgrafs (menys isomorfisme).



Ordre = 4
mida = 4





#passo de fer més

(24). $G = (V, A)$ i $H = (W, B)$. Demo $G \cong H \Leftrightarrow G^c \cong H^c$

$\Rightarrow$| Suposem: $G \cong H$ Volem Demo: $G^c \cong H^c$

Si $G \cong H$ sig que: $\begin{cases} \exists f: V \to W \text{ i és bijectiva.} \\ \forall u,v \in V: u \sim v \to f(u) \sim f(v) \end{cases}$ Donat que f bijectiva $\exists f^{-1}: W \to V$

Tenim u, v en G^c que ~~no~~ son adjacents, ~~donat~~ això sig. que u, v no ho seran en G.

~~Si u, v~~ Això vol dir que $u \sim v \to f(u) \sim f(v)$ on $f(u)$ i $f(v)$ són vèrtex de H^c.

D'aquesta mateixa manera si $f(u) \sim f(v)$ son adj en H^c, aquests no ho seran en H. Podem veure que la mateixa funció demostra que si hi ha isomorfisme entre G i H també hi haurà entre G^c i H^c.

$\Leftarrow$) Suposem: $H^c \cong G^c$ Volem Provar: $H \cong G$.

Mateix raonament que $\Rightarrow$)

Si $H^c \cong G^c$ sig. que: $\begin{cases} \exists f: V^c \to W^c \text{ on } f \text{. bijectiva.} \\ \forall u,v \in V^c: u \sim v \to f(u) \sim f(v) \end{cases}$

Si tenim vèrtex a,b adjacents en H^c, aquests també ho seran en G^c.

Per def. de complementari, aquests no seran adjacents en H i per conseq. tampoc en G.

És per això que la mateixa funció mostra que si $H^c \cong G^c$ llavors $H \cong G$.

~~(25). Det. nº grafs no isomorfs d'ordre 20 i mida 188.~~

~~~~Per cada vertex~~ Tenim 20 vertex on cadascun havem de tractar-lo.~~

~~Tenim mida 188 (això és el total d'arestes).~~

~~Sig. que $20! \cdot 188!$ és la quantitat de grafs que es poden fer (No té en compte si son isomorfs).~~

(17).

Ordre.

Considerem G regular ($r \geq 1$) i bipartit. Té dues parts estables $\to G_1$, $\to G_2$ $n_i = |G_i|$

En total, G_1 té $n_1 \cdot d$ arestes (pq. és regular) cap a G_2 i G_2 té $n_2 \cdot d$ cap a G_1

Això vol dir que $d \cdot n_1 = d \cdot n_2$ i com que $d \geq 1$ podem dir $n_1 = n_2$.

Donat que $n = n_1 + n_2$ i $n_1 = n_2$ $n = 2n_1$ i això fa que no pugui ser senar.

(25).

Un graf de 20 vèrtex té $\frac{20 \cdot (19)}{2} = 190$ arestes màximes. L'enunciat demana saber quants grafs hi ha amb 188 arestes que $188 = 190 - 2$. Això vol dir que hi ha 2 parells de vèrtex que no estan units.

Això pot ser difícil de pensar, però pensem amb el complementari: Només hi ha 2 arestes.

Això sig. que pot ser:  o . Només hi ha 2 grafs possibles en el complementari, llavors en el graf que diu, també només poden haver 2 grafs no isomorfs.

$\triangledown$ Un isomorfisme en el complementari es tradueix a un isomorfisme a el normal. Es per això que ho podem fer
~~~~