# Lògica i Demostracions

## Proposicions

Un enunciat o proposició és una frase o expressió correcte del llenguatge natural susceptible de ser certa o falsa.

(té sentit preguntar-se si la frase és certa o falsa).

# Afirma que té sentit que sigui certa o falsa.

- $2+3=6$ → És un enunciat pq. podem dir si és cert o fals.
- La pissarra es blava → Si és un enunciat
- La pissarra → No és un enunciat.
- Quina hora es? → No és un enunciat. No podem dir si es cert o fals pq. no sabem resposta.
- Quant val? → No és un enunciat.
- Esborreu la pissarra! → No és un enunciat (Igual que pregunta) és un imperatiu.
- Són les 4:00 de la tarde → Si és un enunciat. Té sentit preguntarse-ho
- Si $2+3=6$ llavors la pissarra és blava → Si és un enunciat.
- Hi ha 10 alumnes a l'aula. → Si és un enunciat.
- Els bombers han vingut. → Si que és un enunciat tot i que no s'especifiqui quan.
- Han vingut els bombers? → No és un enunciat.
- Són les 4 de la tarde i la pissarra és blava. → Si és un enunciat.
- $2+3$ → No és un enunciat pq. no podem dir si és cert o fals.

"Aquesta frase és falsa" No podem assignar un valor. S'està autoreferenciant.

Alguns enunciats anteriors tenen forma composta (Ajunten altres enun. usant connectors lògics).
→ "i", "o", implicació (negació)

# Si $\underbrace{2+3=6}$, llavors $\underbrace{\text{la pissarra és blava}}$, ⟶ Implicació

Si no es poden trencar, diem que són enunciats atòmics (indescomposables).

Connectors lògics: • Binaris (2 entrades)

$\underset{\text{conjunció (i)}}{\_ \wedge \_}$ ; $\underset{\text{disjunció (o)}}{\_ \vee \_}$ ; $\underset{\text{implicació (Si... llavors...)}}{\_ \rightarrow \_}$ ; $\overset{\text{doble implicació (Si i només si)}}{\_ \leftrightarrow \_}$

• Unaris (1 entrada)

$\underset{\text{negació}}{\neg}$

Enunciats atòmics que representem per lletres $p, q, r, \ldots$

$q_1, q_2, q_3, \ldots$

Fòrmula és una combinació particular (amb unes regles) d'enunciats atòmics i connectors lògics i parèntesis "(" i ")".

$(((g \wedge q) \vee r) \to (r \to t))$

Definició recursiva d'una fòrmula:

- Lletres proposicionals són fòrmules.
- Si $\varphi$ és una fòrmula i $\psi$ és una fòrmula llavors $(\varphi * \psi)$ és una fòrmula (on $*$ és $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$)
- Si $\varphi$ és una fòrmula llavors $\neg\varphi$ també és una fòrmula.

\# No es fica parèntesi en les negacions $(\neg p) \leftarrow$ NO

## Significat de les connectives

1 → Cert, 0 → Fals

| $\varphi$ | $\neg\varphi$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \wedge \psi$ | $\varphi \vee \psi$ | $\varphi \to \psi$ | $\varphi \leftrightarrow \psi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Conjunció $(\wedge)$(Y) = IF a AND b ARE BOTH true.

Disjunció $(\vee)$(O) = IF EITHER a OR b IS true.

Implicació $(\to)$(ENTONCES) = IF a IS true, THEN b MUST ALSO BE true.

Bicondicional $(\leftrightarrow)$(SI Y SOLO SI) = IF a AND b ARE BOTH true OR BOTH false.

## Tipus de fórmules importants

Tautologia: Proposició lògica que SEMPRE és VERDADERA (independent dels valors dels components).

Contradicció: Prop. lògica SEMPRE és FALSA (independent valors dels components).

Satisfactible: Hi ha almenys UNA assignació de valors VERDADERA

\# Tautologia: $p \vee \neg p$ ; Contradicció $p \wedge \neg p$ ; Satisfactible: $p \vee q$

## Equivalència de fórmules

Quan dues fórmules prenen mateixos valors de veritat, podem dir que les fórmules són equivalents. $\varphi \equiv \psi$

Totes les tautologies són equivalents (Denotar 1) i totes les contradiccions (0).

## Equivalències

| | | |
|---|---|---|
| Distributiva | $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$ | $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$ |
| Commutativa | $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$ | $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$ |
| Idempotència | $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ | $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$ |
| Absorcions | $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$ | $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$ |
| Associativa | $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$ | $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$ |
| Mínim | $0 \wedge \varphi \equiv 0$ | $0 \vee \varphi \equiv \varphi$ |
| Màxim | $1 \wedge \varphi \equiv \varphi$ | $1 \vee \varphi \equiv 1$ |
| Complement | $\varphi \wedge \neg \varphi \equiv 0$ | $\varphi \vee \neg \varphi \equiv 1$ |
| Morgan | $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$ | $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$ |

## Equivalències Importants

| | | |
|---|---|---|
| Traducció de la $\rightarrow$ | $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$ | $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg \psi$ |
| Traducció de la $\leftrightarrow$ | $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ | $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\neg \varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg \psi)$ |
| | $\equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg \varphi \wedge \neg \psi)$ | $\equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\neg \varphi \vee \neg \psi)$ |
| Reducció a l'absurd | $\varphi \equiv \neg \varphi \rightarrow 0$ | $\varphi \rightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \neg \psi) \rightarrow 0$ |
| V al consegüent | $\psi \vee \theta \equiv \neg \psi \rightarrow \theta$ | $\varphi \rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \neg \psi) \rightarrow \theta$ |
| V a l'antecedent | $(\psi \vee \theta) \rightarrow \varphi \equiv (\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\theta \rightarrow \varphi)$ | |
| Contrarecíproc | $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$ | |

\# Les demostracions de totes les equivalències es poden fer fent ús de les vermell.

1. Remplaçar les fletxes per seva equivalència (2ª taula)

2. Fer ús equivalències primera taula.

Exemple Absorció: $p \wedge (p \vee q) \equiv_{[Max]} (p \wedge (p \vee q)) \wedge 1 \equiv_{[Compl]} (p \wedge (p \vee q)) \wedge (p \vee \neg p) \equiv$

$\equiv_{[Dist]} ((p \wedge p) \vee (p \wedge q)) \wedge (p \vee \neg p) \equiv_{[Idem]} (p \vee (p \wedge q)) \wedge (p \vee \neg p) \equiv$

$\equiv_{[Dist]} p \vee ((p \wedge q) \wedge \neg p) \equiv_{[Dist]} p \vee ((\neg p \wedge p) \wedge (\neg p \wedge q)) \equiv$

$\equiv_{[Comp]} p \vee (0 \wedge (\neg p \wedge q)) \equiv_{[Dist]} p \vee ((0 \wedge \neg p) \wedge (0 \wedge q)) \equiv$

$\equiv_{[Mín]} p \vee (0 \wedge 0) \equiv p \vee (0) \equiv_{[Mín]} p$

# Lògica de primer ordre

## Relacions

Per tenir relacions hem de tenir un "domini d'individus" (amb mínim 1 indiv.) i una propietat d'aquests.

Per exemple $\mathbb{Z} = \{-30, \dots, 27\}$

Que pot complir o no.

### Tipus de Relacions

Unaries: Relació de 1 obj. # $P(x)$ pot representar: "x és parell".

Binaries: Relacions de 2 obj. # $Q(x,y)$ pot representar: "$x > y$"

Ternaries, Quaternaries, ... : Relacions de més de 2 obj. # $R(x,y,z)$ pot representar "$x > y > z$"

## Fórmules atòmiques

Predicats

$R$ és símbol de relació arietat $n$, i $x_1, x_2, \dots, x_n$ són variables $\boxed{R(x_1, x_2, \dots, x_n)}$

- En relacions binàries es pot usar notació infixe $xRy = R(x,y)$
- En fórmules atòmiques poden haver expressions més complicades "noms, 1, $y^2$, $x^2+2x$, ..."

## Fórmules de lògica de primer ordre

Formades per fórmules atòmiques combinades amb $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$ Connectives Lògiques i quantificadors.

Universal: $\forall$ "Per a tot ..." Existencial: $\exists$ "Existeix ..." (com a mínim 1).

### Definició Recursiva de fórmula

- Fórmules atòmiques són fórmules
- Si $\varphi, \psi$ són fórmules i $*$ és una connectiva binària llavors $(\varphi * \psi)$ és fórmula.
- Si $\varphi$ és fórmula, $\neg\varphi$ també.
- Si $\varphi$ és fórmula i $x$ una variable, $\forall x \varphi$ i $\exists x \varphi$ són fórmules.

# $P(x) \rightarrow Q(x,y)$ , $R(z,y,z)$ , $\forall x \exists y (x>0 \rightarrow x = y^2)$

### Significat fórmula primer ordre

Pq. tinguin sentit necessitem:

→ Domini (univers): És el dom. de variació variables. Mínim 1 individu en dom.

→ Significat: Han de ser relacions concretes entre els individus del domini.

# Es pot indicar el Dom. de Variació en la fórmula ## $\forall x \in \underset{\text{Dom. Enters}}{\mathbb{Z}} (M(x) \rightarrow P(x))$

# $\forall x \in \underset{\text{Enters}}{\mathbb{Z}}, \exists y \in \underset{\text{Naturals}}{\mathbb{N}} (x<y)$ NO és fórmula 1r Ordre pq. implica 2 dominis diferents.

Hem de tractar $N(y)$ que s'interpreti com "y és num. N" $\} \rightarrow \forall x, \exists y\ (N(y) \rightarrow x < y)$

## Equivalència en lògica primer ordre

Dues fórmules (sense var. lliures) són equivalents quan prenen el mateix valor de veritat en totes les "interpretacions" possibles.

# En tot "Domini" i en tota "interpretació" dels símbols de relació.

## Algunes equivalències importants

| | |
|---|---|
| $\neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$ | $\neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$ |
| $\forall x \forall y\, \varphi \equiv \forall y \forall x\, \varphi$ | $\exists x \exists y\, \varphi \equiv \exists y \exists x\, \varphi$ |
| $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x \psi$ | $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi$ |

(*) $\varphi(x,y) = (x<y)$ ← Exemple de pq. NO és una igualtat.

$\forall x \exists y\, \varphi$: Per a tot valor de $x$ existeix un num. $y$ més gran.

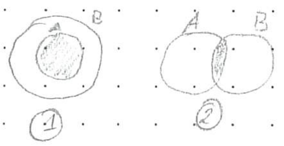
$\exists y \forall x\, \varphi$: Existeix un valor de $y$ que serà més gran que TOTS els números $x$. Això és fals. Pq $y=x+1$ per exemple.

- NO és cert: $\forall x \exists y\, \varphi \equiv \exists y \forall x\, \varphi$ (*)
- NO és cert: $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x \varphi \vee \forall x \psi$ NI $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$

## Formalització

Escriure en un llenguatge "formal" un enunciat. Trobar una fórmula lògica de primer ordre. Pressuposem: - Un Domini d'individus.
- Relacions entre individus que "interpreten" símbols.

Hi ha 2 patrons habituals: ① $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ "Tots individus que compleixen A, també compleixen B".



Patrons comuns

② $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ "Hi ha individus del tipo A que compleixen B".

## Variable lliure (LAB)

- Ocurrència d'una variable en una fórmula: Ocurrència = Aparició; $\forall x(x=y \wedge x=z) \rightarrow x=t$
  - Lligada: Ocurrències que acompanyen a un quantificador ($\forall, \exists$) i estan en l'àmbit d'acció del quantificador. $\forall x(x=y \wedge x=z) \rightarrow x=t$ (Lligada / Lliure. No li afecta la $x$ de "$\forall x$")
  - Lliure: La que no és lligada.

  Em equivocat cos és pq: surt aquí

- Variable lliure (En fórmula) (Definició): És la que té alguna ocurrència lliure. $\varphi(x, y, t)$

$\sum_{i=1}^{3} x^i = x^1 + x^2 + x^3$; $i$ = És lligada (muda) pq li afecta $\sum$; $x$ = És lliure pq aquí no afecta res "Parlem d'ella"

$\forall x(x=y \wedge x=z) \rightarrow x=t$

$\Downarrow$

$\forall \lambda(\lambda=y \wedge \lambda=z) \rightarrow x=t$

Estem parlant de $x$ NO podem canviar el símbol.
Quan $x$ és lligada SÍ que es pot.

$x = a \bmod b \Rightarrow x = bn + a$ on $n \in \mathbb{Z}$

# Veracitat i quantificadors

# Un num. que dividit entre 5 deixa un residu de 1.

$x \equiv 1 \bmod 5$ Per definició vol dir que $x$ es de forma $x = 5n + 1$ per algun $n \in \mathbb{Z}$

Recorda que en $\mathbb{Z}$ no hi ha decimals.

$6 \equiv 1 \bmod 5 \rightarrow 6 \equiv 5 \cdot 1 + 1 \rightarrow 6 \equiv 6$ ; $1 \equiv 1 \bmod 5 \rightarrow \frac{1}{5} + 1 \rightarrow 0 + 1 \rightarrow 1 \equiv 1$

Ser parell $x$ és de la forma $x = 2 \cdot s$ per un cert $s \in \mathbb{Z}$ ; $x \equiv 0 \bmod 2$ ← Ser parell

- $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \rightarrow x \geq 1)$ Es fals pq. $\frac{1}{2} > 0$ pero $\frac{1}{2}$ no és $\geq 1$. Llavors $\neg(\frac{1}{2} \geq 1)$

# Aquí donem un contra exemple i ja serveix per demostrar si és cert o fals.

- $\forall x \in \mathbb{Z}\ (x \equiv 1 \bmod 3 \rightarrow x$ senar$)$ Prenem $x = 4$, $4 \equiv 1 \cdot 3 + 1 \equiv 4 \bmod 3$ # Per congruencia.

4 es parell pq $4 = 2 \cdot 2$ i aquesta és la def. de ser parell.

Com que és parell, no es senar. Enunciat és fals.

## Demostració d'un Universal ($\forall x P(x)$)

Hem de veure que TOTS els elements del domini satisfan prop. P.

Si és petit, l'univers, surt més rentable calcular tots els cassos.

## Quantificadors Barrejats

# $x$ constant

- $\exists x \forall y P(x,y) \equiv \exists x (\forall y P(x,y))$ $x$ no depen de $y$ $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x \leq y)$ $0 \leq 0, 0 \leq 1, 0 \leq 2, \ldots$ ← $x$ no depen de $y$
- $\forall x \exists y P(x,y)$ $y$ normalment depen de $x$. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} (x < y)$ ; Fem $y = x + 1$

  NO SEMPRE

  $0 < 0+1, 1 < 1+1, 2 < 2+1, \ldots$ ← Si que depén de $x$.
- La demostració es pot fer veient que els negats de $\exists x \forall y$ i $\forall x \exists y$.

## Resum

$\exists x \in A\ P(x)$ és Cert — Donar exemple : Donem $x \in A$ tal que $P(x)$

$\forall x \in A\ P(x)$ és Fals — Donar contra exemple : Donem $x \in A$ tal que $\neg P(x)$

$\exists y \in A\ \forall x \in A\ P(x,y)$ és Cert — Donar $y \in A$ tal que $\forall x\ P(x,y)$ # $y$ no depén de $x$ : constant

$\forall x \in A\ \exists y \in A\ P(x,y)$ és Cert — Per cada $x \in A$ donem $y = E(x)$ tal que $\forall x \in A\ P(x, E(x))$

# $y = E(x)$ pot ser $y = x+1$. Podem veure que E és una "funció" on introduïm $x$. Això fa que $y$ depengui de $x$. ¡NO SEMPRE

# DEMOSTRACIONS

Seqüència de "petits" passos que alguns són passos lògics i d'altres Axiomes.

# Axioma: Propietats que no ofereixen cap mena de dubte sobre la seva veracitat.

## Passos Bàsics

$a = b \Rightarrow E(a) = E(b)$

$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

$a = b \wedge a' = b' \Rightarrow a + a' = b + b' \; ; \; aa' = bb'$

$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

- $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$
- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
- $a \leq b,\ c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$
- $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$

# Les que tenen • també serveixen amb < en lloc de ≤

$A \wedge B \Rightarrow A$

$A \Rightarrow A \vee B$

$(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

$A \wedge (A \to B) \Rightarrow \neg A$

$\neg B \wedge (A \to B) \Rightarrow \neg A$

$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$

$\text{ABSURD} \Rightarrow A$

## Llenguatge que fem servir

| Fòrmula | $\wedge$ | $\vee$ | $\neg$ | $\to$ | $\leftrightarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Demostració | i | o | no | $\Rightarrow$ / implica / per tant / si.... llavors.... | $\Leftrightarrow$ si i només si |

## Prova Directa

Partim que $\underbrace{P \text{ és cert}}_{\text{Hipòtesi}}$, i arribem a $\underbrace{Q \text{ és certa}}_{\text{Tesi}}$. Concatenem implicacions bàsiques.

$A \Rightarrow A' \Rightarrow A'' \Rightarrow \dots \Rightarrow B$

## Contrarecíproc

Fem servir llei de contrarecíproc $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ Partim de $\neg Q$ fins $\neg P$

## Reducció Absurd

$p \equiv \neg p \to 0$ Partim de $\neg P$ fins arribar a una contradicció

$p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to 0$ Partim de $p \wedge \neg q$ fins arribar a una contradicció

## Prova d'una disjunció

$(q \vee r) \equiv (\neg q \to r)$ Partim de $\neg q \Rightarrow \dots \Rightarrow r$

# També serveix quan tenim més d'un disjuntant

$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \equiv (\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_{n-1}) \to p_n$ # Tenim més d'un cas que provar.

## Disjunció al conseqüent

$p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \to r$ Partim de $p, \neg q \Rightarrow \dots \Rightarrow r$

# També serveix per múltiples disjuntants.

$p \to (q_1, q_2, \dots, q_n) \equiv (p \wedge \neg q_1 \wedge \neg q_2 \wedge \dots \wedge q_{n-1}) \to q_n$

## Disjunció a l'antecedent

$(q \vee r) \to p \equiv (q \to p) \wedge (r \to p)$ #No importa partir de $q$ o $r$; $q \Rightarrow \dots \Rightarrow A$

$r \Rightarrow \dots \Rightarrow A$

# També múltiples casos

$(q_1 \vee \dots \vee q_n) \to p$ $q_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow p$ [...] $q_n \Rightarrow \dots \Rightarrow p$

## Prova per casos

Considerar 2 o més casos i provar-los tots.

$(p_1 \vee \dots \vee p_n) \to (q \leftrightarrow (p_1 \to q) \wedge \dots \wedge (p_n \to q))$

Cas 1: $p_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow q$ ; Cas 2: $p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow q$; ...; Cas n: $p_n \Rightarrow \dots \Rightarrow q$

## Demostració equivalència

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

# Si volem demostrar múltiples equivalències hem de fer com un cercle d'elles.

$(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \leftrightarrow p_n) \equiv (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \to p_n) \wedge (p_n \to p_1)$

# Es pot canviar l'ordre de l'enunciat

## Demostració Unicitat

Hi ha 1 únic $\equiv$ No hi ha 2 diferents $\forall x \forall y \, (P(x) \wedge P(y) \to x = y)$

⚠ No podem afirmar l'existència de $x$ quan demostrem que és únic. Són coses diferents.

"Com a molt..." però pot ser que no.

①. Demostra sintàcticament (només les vermelles) les equivalències següents:

a) $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$

$\neg\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \neg\varphi$ [Traducció]

$\neg\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ [Commutativa]

b) $\varphi \to \psi \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \to 0$

$\neg\varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vee 0$ [Traducció]

$\neg\varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ [Mínim]

$\neg\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \vee \neg\neg\psi$ [Moorgan]

$\neg\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ [Doble negació]

c) $(\psi \vee \theta) \to \varphi \equiv (\psi \to \varphi) \wedge (\theta \to \varphi)$

$\neg(\psi \vee \theta) \vee \varphi \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \wedge (\neg\theta \vee \varphi)$

$\neg(\psi \vee \theta) \vee \varphi \equiv (\neg\psi \wedge \neg\theta) \vee \varphi$

$\neg(\psi \vee \theta) \vee \varphi \equiv \neg(\psi \vee \theta) \vee \varphi$

d) $\varphi \to (\psi \to \theta) \equiv (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$

a.2) $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$

$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \neg\varphi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$

b.2) $\varphi \to \psi \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \to 0$

$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vee 0 \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \to 0$

c.2) $(\psi \vee \theta) \to \varphi \equiv (\psi \to \varphi) \wedge (\theta \to \varphi)$

$(\psi \vee \theta) \to \varphi \equiv \neg(\psi \vee \theta) \vee \varphi \equiv (\neg\psi \wedge \neg\theta) \vee \varphi \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \wedge (\neg\theta \vee \varphi) \equiv (\psi \to \varphi) \wedge (\theta \to \varphi)$

d.2) $\varphi \to (\psi \to \theta) \equiv (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$

$\varphi \to (\psi \to \theta) \equiv \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \theta) \overset{\text{Treure parèntesi}}{\equiv} \boxed{\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \theta}$

$(a \cdot b) + c =$
$= (ac) + (bc)$

$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\varphi \vee \theta) \equiv (\underset{a}{\varphi} \wedge \underset{b}{\neg\psi}) \vee \underbrace{(\neg\varphi \vee \theta)}_{c} \equiv$

$\equiv (\varphi \vee (\neg\varphi \vee \theta)) \wedge (\neg\psi \vee (\neg\varphi \vee \theta)) \equiv (\underbrace{\varphi \vee \neg\varphi}_{1} \vee \theta) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi \vee \theta) \equiv$

# L'error que estava cometent és que SEMPRE aplicava distributiva. No fa falta.

$\equiv (1) \wedge (\neg\psi \vee \neg\psi \vee \theta) \equiv \boxed{(\neg\psi \vee \neg\varphi \vee \theta)}$

e) (R) $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

- $\neg((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \equiv \neg((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\psi \wedge \varphi) \equiv$

$\equiv \boxed{(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \vee \neg\varphi)}$

- $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \vee \neg\varphi) \equiv$ [No veig que es pot simplificar més

- $(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ No ho havia vist així $\overset{①}{\equiv} (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\psi \vee \neg\varphi) \wedge \overset{1}{(\psi \vee \neg\psi)} \overset{②}{\equiv} (1) \wedge (\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\psi \vee \neg\varphi) \wedge (1)$

$\overset{③}{\equiv} \boxed{(\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\psi \vee \neg\varphi)}$

f) (R) $\varphi \to (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \to \theta$

① Distributiva
② $\square \vee \neg\square = 1$
③ $\square \wedge 1 = \square$

Justificació OBLIGATÒRIA de la demostració

- $\neg\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv \boxed{\neg\varphi \vee \psi \vee \theta}$

- $\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vee \theta \equiv \boxed{\neg\varphi \vee \psi \vee \theta}$

g) (R) $(\varphi \wedge \psi) \to \theta \equiv \varphi \to (\psi \to \theta)$

- $\neg(\varphi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \theta \equiv \boxed{\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \theta}$

- $\neg\varphi \vee (\psi \to \theta) \equiv \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \theta) \equiv \boxed{\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \theta}$

19. (R) $q \vee (p \wedge (\neg p \vee r)) \equiv (q \vee p) \wedge ((q \vee r) \vee (p \wedge \neg p))$

- $q \vee ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge r)) \equiv q \vee ((0) \vee (p \wedge r)) \equiv \boxed{q \vee (p \wedge r)}$

- $(q \vee p) \wedge ((q \vee r) \vee (0)) \equiv (q \vee p) \wedge (q \vee r) \equiv \boxed{q \vee (p \wedge r)}$

20. $\exists x\, (P(x) \to Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$

- $\exists x\, (\neg P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x\, Q(x) \equiv \neg \forall x\, P(x) \vee \exists\, Q(x) \equiv \boxed{\forall x P(x) \to \exists\, Q(x)}$

21. $\neg \forall x\, (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x\, (Q(x) \wedge \neg P(x))$

- $\neg \forall x\, ((P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to P(x))) \equiv \neg \forall x\, ((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee P(x))) \equiv \exists x \neg ((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee P(x))) \equiv$

$\equiv \exists x\, ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg P(x))) \equiv \boxed{\exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x\, (Q(x) \wedge \neg P(x))}$

# Al aplicar "Dist" de $\exists x$ no es així
$(x)\ \exists x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi$

22. Dem. que $\exists x\, (P(x) \to \forall y\, P(y))$ sempre és certa (sigui qui sigui P).

- $\exists x\, (P(x) \to \forall y\, P(y)) \overset{1}{\equiv} \exists x\, (\neg P(x) \vee \forall y\, P(y)) \overset{2}{\equiv} \exists x \neg P(x) \vee \exists x \forall y\, P(y) \overset{3}{\equiv} \exists x \neg P(x) \vee \forall y\, P(y) \overset{4}{\equiv}$

$\equiv \neg \forall x\, P(x) \vee \forall y\, P(y) \overset{5}{\equiv} \neg \forall x\, P(x) \vee \forall x\, P(x) \overset{6}{\equiv} 1$

① Trad. de $\to$
② $\exists x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi$
③ $\exists x \forall y\, P(y)$ no té sentit parlar de x pq no té efecte.
④ Neg. quant. universal
⑤ Canviar nom variable quantificador
⑥ $\varphi \vee \neg\varphi = 1$

25. Un món de Tarski [...]

a) Hi ha un quadrat negre $\exists x\, (Q(x) \wedge N(x))$ ▷ Totes les formes geo. son cercles i blaves. Però no ho sabem així que està malament

b) Tots els cercles són blaus $[\cancel{\forall x\, (C(x) \wedge B(x))}]$ ← Aquesta NO és pq. aquí diem que TOTS els obj són tant Cercles com Blaus. Això No és cert.

b) Tots els cercles són blaus $\forall x\, (C(x) \to B(x))$

c) No hi ha cap cercle negre $[\cancel{\forall x \neg (C(x) \to N(x))}]$ ← NO pq. ~~aquesta~~ dius dues afirmacions: "Per tot x, es fals ~~que~~ si x es cercle, llavors x es negre" "Per tot x,

$\forall x \neg (\neg C(x) \vee N(x)) \equiv$
$\equiv \forall x\, (C(x) \wedge \neg N(x))$

c) No hi ha cap cercle negre: $\neg \exists x\, (C(x) \wedge N(x))$ # El "alcance" de l'afirmació és menor.

d) a està a sobre de e: $S(a, e)$

e) Hi ha un cercle que té mateix color que d $\exists x\, (C(x) \wedge K(x, d))$

f) d està a l'esquerra de qualsevol cercle $\forall y\, (C(y) \to E(d, y))$

g) Alguna forma geo. és blava $\exists x\, (B(x) \wedge (T(x) \vee C(x) \vee Q(x)))$

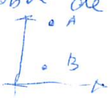
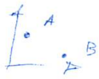
h) Tots els quadrats son negres $\forall x\, (Q(x) \to N(x))$

k) Hi ha triangle que està a sobre de d però no a l'esquerra de a $\exists x\, (T(x) \wedge S(x, d) \wedge \neg E(x, a))$

26. Usant els símbols de relació [...]

a) $\forall x \, (B(x) \to (T(x) \lor Q(x)))$: Tot x que compleix B(x) són T(x) o Q(x).

b) $\exists y \, [C(x) \land \neg S(y,d)]$: Existeix y que és C(x) i no està a sobre de d.
# Però què significa estar "davall"

27. En aquest ex. el dom. [...]

a) 1 no és primer $\neg P(1)$

b) Tot enter múltiple de 6 és també múltiple de 3 i de 2 $\forall x \, [\underset{\text{6 divideix x}}{6|x} \to ((2|x) \land (3|x))]$

c) Cap nombre primer és un quadrat $\neg \exists x \, (P(x) \land Q(x))$ i $\forall x \, (P(x) \to \neg Q(x))$

29. Aquí només podeu [...]

a) Hi ha com a molt 1 element que té prop. P. $\forall x \forall y \, [(P(x) \land P(y)) \to (x = y)]$ Tractar com element

b) Hi ha com a molt 2 elements que tenen prop. P $\forall x \forall y \forall z \, [[P(x) \land P(y) \land P(z)] \to [(x=y) \lor (x=z) \lor (z=y)]]$

c) Hi ha com a mínim 2 elements que tenen la prop P $\exists x \exists y \, [(x \neq y) \land P(x) \land P(y)]$

d) Hi ha exactament 2 elements que tenen P. -

$\exists x \exists y \forall z \, [\neg(x=y) \land P(x) \land P(y) \land [P(z) \to [(z=y) \lor (z=x)]]]$

□ Revisar en futur per veure si ho està. Servir de Resposta

34. Justifica que és fals.

a) $\exists x \in A \, (|x+4| = 2)$ $|0+4| \neq 2$; $|1+4| \neq 2$; $|2+4| \neq 2$; $|3+4| \neq 2$;
Hem vist que per tot element x de A, no és compleix cap $|x+4| = 2$.
Vist que la fórmula diu que $\exists x \in A$, la fórmula és falsa.

b) $\exists x \in A \, (x^3 + 2x^2 - x = 4)$ $(0^3 + 2 \cdot 0^2 - 0 \neq 4)$; $1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 \neq 4$; $2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 \neq 4$; $3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \neq 4$
Donat que hem vist que cap $x \in A$ compleix la igualtat, podem afirmar que efórmula és falsa.

36. $\exists y \forall x \, (x \cdot y) = 0$
y = 0 compleix la fórmula, per tant és cert l'enunciat.

37. $\forall x \exists y \, (xy - 1 = 0)$
$\forall x \exists y \, [\neg(x=0) \land (xy - 1 = 0)]$ és fals. Per exemple x = 0 és un contra exemple.
$\forall x \exists y \, (x \cdot y - 1 = 0) \equiv \forall x \exists y \, (xy = 1)$. Llavors 0 no té un número invers pel qual si el multipliques és 1. $3 \cdot 3^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$2 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$0 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot \frac{1}{0} = \nexists$

29. d) Hi ha exactament 2 elements que P.

$$\exists x \exists y \Big[ \overset{①}{(x \neq y)} \land \overbrace{(P(x) \land P(y))}^{②} \land \overbrace{\forall z \, [\overbrace{P(z) \to ((z=x) \lor (z=y))}^{③}]}^{④} \Big]$$

①. Primer ens assegurem que x i y són dif. pq sinó parlaríem del mateix i volem 2.

②. Com que sabem que seran diferents, tots dos han de complir P.

③. Si hi ha un z que compleix P, ha de ser igual a x o a y (Sino direm que enunciat fals).

④. Fa la comprobació del punt ③ per a tots valors de z. # Assegurar-se que x i y són únics.

Exemple: $n$ senar $\Rightarrow n^2+4n-1$ parell (Demostració)

$n$ senar $\underset{\text{def. senar}}{\Rightarrow} \exists k, n=2k+1 \underset{\text{Sub. en l'expressió}}{;}$ $n^2+4n-1=(2k+1)^2+4(2k+1)-1 \underset{\text{prop del prod. i el de la suma}}{\Rightarrow} 4k^2+12k+4 = 2(2k^2+6k+2) \Rightarrow$ $\underset{\text{def de num parell}}{2y}$; Llavors $n^2+4n-1$ és parell.

pq $k$ és un enter, $y \in \mathbb{Z}$ llavors la suma i la multiplicació continuen sent un enter.

①. Suma de dos enters consecutius és senar.

Considerem dos termes: $n, n+1 \in \mathbb{Z}$

Considerem la suma d'aquests: $n+(n+1) = \text{Suma}$ // Apliquem prop. suma

Simplifiquem equació: $\text{Suma} = 2n+1$

Hem de demostrar que es pot escriure com la def. de senar: $\exists k \in \mathbb{Z} // 2k+1$

Fem sub. de $n=k$ i veiem que enunciat és cert.

25.

i) Tots triangles estàn esquerra de $d$. $\forall x(T(x) \to E(x,d))$

m) Cap quadrat té mateix color que b. $\neg\exists x(Q(x) \wedge K(x,b))$

26.

c) $\forall x(N(x) \to (T(x) \vee Q(x)))$ Tot obj. negre és triangle o quadrat.

e) $\exists y(C(y) \wedge \neg E(y,d))$ Existeix un cercle que no està a l'esquerra de d.

27.

d) Tot múltiple de 3 i de 5 és múltiple de 15. $\forall x[(3|x \wedge 5|x) \to 15|x]$

g) La suma de 2 senars és parell $\forall x \forall y[(\neg(2|x) \wedge \neg(2|y)) \to (2|x+y)]$

$\forall x,y:[(\exists k\ n=2k+1 \wedge \exists l\ l=2l+1) \to (\exists p\ n+m=2p)]$

h) Tot enter possitiu és suma de quatre quadrats. $\forall x[(x>0) \to \exists a,b,c,d\,[x=Q(a)+Q(b)+Q(c)+Q(d)]]$

"a és quadrat" = x ← això no és possible pq. x és un valor

⚠ No podem parlar dels valors de a, b, c, d "a la ligera". Primer hem de mencionar que existeixen.

$\forall x\,[(x>0) \to \exists a,b,c,d:[Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c) \wedge Q(d) \wedge x=a+b+c+d]]$

28.

a) x divideix y (x, y són variables sense quantificar) $\exists a:[y=x\cdot a]$

⚠ x no ha de tindre quantificador "∃" pq. parlem d'un valor específic.

⚠ El fet que $y=x\cdot a$ ja fa que residu sigui 0. no fa falta mencionar-ho.

$10=5\cdot a \to a=2$

⚠ Parlem de núm. $\mathbb{Z}$

c) x és un nombre primer. $(x>1) \wedge \forall y:[\exists a:[x=y\cdot a] \to ((y=x) \vee (y=1))]$ on $x,y,a \in \mathbb{N}$ ①

$(x>1) \wedge \forall a,b:[(x=a\cdot b) \to ((a=x \wedge b=1) \vee (a=1 \wedge b=x))]$ on $x,a,b \in \mathbb{N}$

d) 2 és l'únic nombre primer parell. on $x,y,k,a,z \in \mathbb{N}$ ① $x>1 \wedge \forall y:[\exists a:[x=y\cdot a \wedge a>0] \wedge y>0 \to (y=x \vee y=1)]$

$\exists x,y:[[(x>1) \wedge \forall k(\exists a:[x=ka] \to (k=x \vee k=1))] \wedge [x=2y] \wedge [\forall z:[[(z>1) \wedge \forall k(\exists a:[z=ka] \to (k=z \vee k=1))] \wedge [z=2y]] \to z=x]]$

e) Hi ha infinits nombres primers. Malament

$\forall x:[[(x>1) \wedge \forall k(\exists a:[x=ka] \to (k=x \vee k=1))] \to [\exists y:[(y>1) \wedge \forall k(\exists a:[y=ka] \to (k=x \vee k=1))] \wedge (y>x)]]$

No fa falta afirmar que x és primer; $\forall n \exists m:[m>n \wedge m \text{ primer}]$

(30). $\exists x \in \mathbb{R}\ (x>2 \wedge x<5)$ És cert pq podem agafar el núm. 3 i veure que $3>2$ i $3<5$.

(31). $\forall x \in \mathbb{Z}$ ($x^2$ múltiple de 16 $\rightarrow$ x múltiple de 8) MALAMENT. Fals: $x=4 \rightarrow x^2=16$ però 4 no és múltiple de 8.

~~És cert pq podem dir que si $x^2$ és múltiple de 16 $\equiv$ x és múltiple de $\sqrt{16}$ $\equiv$ x múltiple de 4. Els múltiples de 4 són: 4, 8, 12, 16... I si agafem qualsevol d'aquests, $x^2$ també serà múltiple de 16. Exemple: $x=8 \rightarrow x^2=64$; 64%16=0~~ Fes servir Contra exemple Per quan és fals

(38). $\forall x \exists y : [(x \neq 0) \rightarrow (xy-1=0)]$ Digues si cert o fals. Fes servir "Lletres" Per quan és cert.

- Partim de l'afirmació que $x \neq 0$, llavors hem de buscar un número que compleixi igualtat.
- Modifiquem $xy-1=0$ algebraicament per trobar y i posteriorment fer sub. $xy=1 \rightarrow y=\frac{1}{x}$.
  # Donat que $x \neq 0$, sempre existirà y.
- Substituïm y en la fórmula $x \cdot y = 1 \xrightarrow[\text{sub}]{} x\left(\frac{1}{x}\right)=1 \xrightarrow[\text{multi de fracc}]{} 1=1$ això significa que és possible pq. no tenim cap incoerència.
- Podem afirmar que per tot valor x, existeix un $y=\frac{1}{x}$ tal que $x \cdot y - 1 = 0$. En aquest cas, y es coneix matemàticament com invers multiplicatiu de x. Enunciat cert ← NO OBLIDAR respondre enunciat

(39) $\exists y\ \forall x : [xy=x]$ Digues si cert o fals.

Enunciat diu que tots els valors x tenen un y que si es multipliquen, obtenim x. Donat que treballem en $\mathbb{R}$, existeix la propietat commutativa del producte que diu que $x \cdot y = y \cdot x$. També tenim la definició de element neutre del producte que diu que $\exists a : [(a \neq 0) \wedge \forall x : [x \cdot a = a \cdot x = x]]$. Llavors podem dir que enunciat és cert donat que y es tracta del element neutre del producte. Algebraicament podem veure que:

$xy = x \xrightarrow[\text{multi } x^{-1}]{} x^{-1}xy = xx^{-1} \rightarrow 1 \cdot y = 1 \rightarrow y = 1$

També es pot resoldre exercici ficant un exemple donat que $\exists$ i amb un exemple ho demostres.

(41). $\forall x \exists y : [xy+2y-1=0]$

Per veure si compleix el enunciat, hem de trobar aquest y que menciona. Per a fer-ho, podem modificar algebraicament la condició per aïllar y i veure a què equival. Posteriorment podem provar amb alguns números arbitraris i veure si es compleix.

- $xy+2y-1=0 \xrightarrow[\text{suma } +1]{} xy+2y-1+1=+1 \xrightarrow[\text{suma}]{} xy+2y=1 \xrightarrow[\text{fact. comú}]{} y(x+2)=1 \xrightarrow[\text{dividir per } (x+2)]{} \boxed{y=\frac{1}{x+2}}$

FALS pq quan $x=-2$ $y=\frac{1}{0}$ i això no és possible o $-2y+2y-1=0 \rightarrow -1=0$ i això no és cert.

~~Ara substituïm aquest valor de y a eq.~~

~~$xy+2y-1=0 \xrightarrow[\text{sub}]{} x\left(\frac{1}{x+2}\right)+2\left(\frac{1}{x+2}\right)-1=0 \xrightarrow[\text{multi}]{} \frac{x}{x+2}+\frac{2}{x+2}-1=0 \xrightarrow[\text{suma}]{} \frac{x+2}{x+2}-1=0 \xrightarrow[\text{simpl}]{} 1-1=0 \rightarrow \boxed{0=0}$~~

~~Atès que el resultat de 0=0 no mostra cap contradicció així que podem afirmar que enunciat és cert.~~

⑥. La suma de dos nombres senars, és parell.

Tenim els elements $a, b \in \mathbb{Z}$ i la def. de senar : $\exists k \in \mathbb{Z} : [n = 2k+1]$ i la def de parell : $\exists y \in \mathbb{Z} : [n = 2y]$.

Per la Hipòtesi sabem que a i b són senars així que fem sub : $a = 2k+1$, $b = 2k+1$

\# No importa tractar als dos amb mateixa incog. Si fossin dif. tmb. serveix.

$$\underline{S = a+b} \underset{def}{=} (2k+1)+(2k+1) \underset{sum}{=} 4k+2 \underset{fat\ com}{=} 2(\underbrace{2k+1}_{\text{Com que } k \in \mathbb{Z} \text{ la suma continua sent } \mathbb{Z}.\ z \in \mathbb{Z}}) = 2(z) \leftarrow \text{Definició de parell.}$$

Enunciat és cert.

⑨. n és enter. Si n és senar, llavors $5n^2-1$ és parell.

Partim de $n \in \mathbb{Z}$ i def senar : $\exists k \in \mathbb{Z} : [n = 2k+1]$ i def. parell $\exists y \in \mathbb{Z} : [n = 2k]$

Si n és senar, podem sub. en la equació i veure si resultat és la def. de parell o no.

$$\bullet\ 5n^2-1 \underset{sub}{\Rightarrow} 5(2k+1)^2-1 \underset{id.\ not.}{\Rightarrow} 5(4k^2+4k+1)-1 \underset{multi\ conmutativa}{\Rightarrow} 20k^2+20k+5-1 \underset{Resta}{\Rightarrow} 20k^2+20k+4 \underset{fat.\ comú}{\Rightarrow} 4(5k^2+5k+1)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{Com que } k \in \mathbb{Z}, \text{ el mateix resultat cont.} \\ \text{Sent } \mathbb{Z};\ z \in \mathbb{Z}\end{array}\right] \underset{sub}{\Rightarrow} 4(z) \underset{fat.\ com}{\Rightarrow} 2(\underbrace{2z}_{\lambda \in \mathbb{Z}}) \Rightarrow 2\lambda \leftarrow \text{Def. parell}$$

Enunciat cert.

⑯. Mateix que ⑨, però Contrarecíproc. No he copiat bé enunciat.

P: n és senar $\Rightarrow$ Q : $5n^2-1$ parell $\equiv \neg Q : 5n^2-1$ senar $\Rightarrow \neg P$ : n parell.

• Def Parell : $\exists k \in \mathbb{Z} : [n = 2k]$ • Def senar : $\exists k \in \mathbb{Z} : [n = 2k+1]$

• Per la nostra Hipòtesi, diem que $5n^2-1 = 2k+1$ així que mod. expressió algebraica per veure si és compleix que n és parell.

$$5n^2-1 = 2k+1 \underset{Suma\ +1}{\Rightarrow} 5n^2-1+1 = 2k+1+1 \underset{Suma}{\Rightarrow} 5n^2 = 2k+2 \underset{fat.\ com}{\Rightarrow} 5n^2 = 2(\underbrace{k+1}_{\text{Com que } k \in \mathbb{Z} \text{ pel resultat (z) tmb} \in \mathbb{Z}}) \Rightarrow 5n^2 = 2z.$$

• Podem veure que $5n^2$ té forma par, això implica que $5n^2$ només serà par si n és par.

\# Pq. par · par = par² = par i impar · impar = impar² = impar.

• Si n es par llavors es compleix igualtat (no importa que 5 sigui impar perquè tot num. multiplicat per 2, ⇒ par. Enunciat cert. □ No sé si està ben justificat.

⇔ Equivalencia entre enunciats.

≡

⇒ Vol dir que p → q, és cert.

→

(19). Siguin $x, y \in \mathbb{R}$ positius, Demostra que si $\underbrace{xy > 1}_{P}$, llavors $\underbrace{x > 1 \text{ o } y > 1}_{Q}$.

$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P \Rightarrow xy \leq 1$ llavors $x \leq 1$ i $y \leq 1$

Com diu enunciat que $x, y$ són positius, significa que $x$ i $y$ tenen aquest interval: $[0, 1]$

la multiplicació de $x \cdot y$ tindrà com a resultat un nombre d'aquest interval

llavors això confirma la nostra suposició inicial que $xy \leq 1$.

(28). $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demostra que $\underbrace{a \leq \frac{b+c}{2} \text{ o } b \leq \frac{a+c}{2} \text{ o } c \leq \frac{a+b}{2}}_{P}$. $P \equiv \neg P \to 0$

$\neg P$: $a > \frac{b+c}{2}$ i $b > \frac{a+c}{2}$ i $c > \frac{a+b}{2}$

- Podem modificar l'expressió algebraicament

$2a > b+c$ i $2b > a+c$ i $2c > a+b$

- Com que no hi ha cap contradicció (Aparent) podem fer la suma

$2a + 2b + 2c > (b+c) + (a+c) + (a+b)$

- Ara sumem i arribarem a contradicció

$2a + 2b + 2c > (b+c) + (a+c) + (a+b) \underset{\text{Suma}}{\Rightarrow} 2a + 2b + 2c > 2b + 2c + 2a \underset{\text{fact. com}}{\Rightarrow} 2(a+b+c) > 2(b+c+a) \Rightarrow$

$\underset{\text{propietat commutativa}}{\Rightarrow} 2(a+b+c) > 2(a+b+c) \underset{\text{dividir } \div 2}{\Rightarrow} a+b+c > a+b+c$ ← Això és una contradicció,

Llavors enunciat és cert.

(29). $\underbrace{\log_2(3) \text{ és irracional.}}_{P}$ $P \equiv \neg P \to 0$

$\neg P$: $\log_2(3) = \frac{a}{b}$ ; $\log_b(a) = c \Leftrightarrow a = b^c$ ;

Si $\log_2(3)$ és $\mathbb{Q}$, llavors apliquem Prop. dels log. $3 = 2^{\frac{a}{b}}$

Això ho podem reescriure $3 = \sqrt[b]{2^a}$ → elevem a $b$ das parts $3^b = 2^a$. Qualsevol

número $a$ obtindrem un par i d'altra banda, qualsevol número $b$ obtindrem impar.

Llavors par $\neq$ impar. Tenim contradicció. Enunciat és cert.

(33). $a+c$ senar o $b-a$ senar o $b+c-1$ senar

Abans de començar: par + par $= 2n + 2m = 2(n+m) = 2y$ ← Def par

par + impar $= 2n + 2m + 1 = 2(n+m) + 1 = 2y + 1$ ← Def impar

impar + impar $= (2n+1) + (2m+1) = 2(n+m+1)$ ← Def par

par − par $= 2n - 2m = 2(n-m) = 2y$ ← Def par

1) $a + c$ = par → $a$ i $c$ par

2) $b - a$ = par → $a$ i $b$ par

3) $b + c - 1$ = par → $b + c$ = par + 1 → $b + c$ = impar → par + par = impar → par = impar

R) Contradicció així que, com que és R.A. Enunciat cert.

(16). Si $\underbrace{5n^2-1 \text{ senar}}_{P}$, llavors $\underbrace{n \text{ parell}}_{Q}$. $\neg Q \to \neg P$

$\neg Q$: $n$ senar $\to$ $\neg P$: $5n^2-1$ parell • Def. senar: $\exists_k\ n = 2k+1$ ; Def parell: $\exists_k\ n = 2k$

• $n$ senar $\Rightarrow n = 2k$

(49). $a, b \in \mathbb{N}$. Dem. $a-b$ par o $b-c$ par o $c-a$ par. (Disjunció).

(1). par - par = par $\to 2n + 2m = 2(n+m) = 2y \leftarrow$ Def. Par.

(2). senar - senar = par $\to (2n-1)-(2m-1) = 2n-2m = 2(n-m) \leftarrow$ Def Par.

(3.1). senar - par = senar $\to (2n+1) - 2m = 2n+1-2m = 2(n-m)+1 \leftarrow$ Def impar.

(3.2). par - senar = senar $\to 2n-(2m+1) = 2(n-m)+1 \leftarrow$ Def. impar

S'ha de complir $\neg A$ i $\neg B$ a l'hora pq complei $C$, llavors:

$\left.\begin{array}{l}\neg A = \underline{a} \text{ impar} - \underline{b} \text{ par} = \text{senar} \\ \neg B = \underline{b} \text{ par} - \underline{c} \text{ senar} = \text{senar}\end{array}\right\} C = \underline{c} \text{ senar} - \underline{a} \text{ senar} = \text{par}$ ☺

(39). $x$ quadrat * $y$ no quadrat = $z$ no quadrat | Quadrat $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$ on $a, b \in \mathbb{Z}$ : $\boxed{R.A.}$

Un Racional quadrat és $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

• Dem. per R.A: Partir de negació fins arribar contradicció.

$x$ quadrat i no nul i racional
$y$ no quadrat i racional
$z$ no quadrat i racional

} ja sabem que racional · racional = racional $\Rightarrow xy = z$

Amb directe no puc pq no sé que sig. no ser quadrat.

• $x$ no nul QUADRAT $\mathbb{Q}$, $y$ QUADRAT $\mathbb{Q}$ $\to$ $x \cdot y$ QUADRAT ← Això està negat.

$\exists m, n\ x = \frac{m^2}{n^2}$ $m, n \in \mathbb{Q}$ i $m, n$ dif. 0.

$\exists r, s\ xy = \frac{r^2}{s^2}$ $r, s \in \mathbb{Q}$, $s \neq 0$

$x \cdot y = z \to y = \frac{z}{x} = \frac{\frac{r^2}{s^2}}{\frac{m^2}{n^2}} = \frac{r^2 \cdot n^2}{m^2 \cdot s^2} = \frac{(rn)^2}{(ms)^2}$

# El problema és que no estava representant correctament que és ser $\mathbb{Q}$. Estava dient que $x = a^2$, però això no és correcte.

Havíem dit que $y$ NO QUADRAT i el resultat és quadrat. Hi ha contradicció.

(57) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ positius. Si $\underbrace{d = abc}_{A}$ llavors $\underbrace{a \leq \sqrt[3]{d}}_{B_1}$ o $\underbrace{b \leq \sqrt[3]{d}}_{B_2}$ o $\underbrace{c \leq \sqrt[3]{d}}_{B_3}$ | Disjunció al Consequent

# No puc fer Directa pq hi ha "o" $(A \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_2) \to B_3$

$d = abc \wedge a > \sqrt[3]{d} \wedge b > \sqrt[3]{d} \to c \leq \sqrt[3]{d}$

• $d = abc > \sqrt[3]{d}\sqrt[3]{d}\,c$

$d > \sqrt[3]{d}\sqrt[3]{d}\,c$

$d^3 > d \cdot d \cdot c^3$

$\frac{d^3}{d^2} > c^3$

$d > c^3$ → $\sqrt[3]{d} > c$ i aquesta és una de les possibilitats de $\leq$.

Queda dem. cert ☺

(96). $a, b \in \mathbb{R}$ Son equivalents. (Pista: $(a-b)^2 \geq 0$)

$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ $\underbrace{a^2+b^2 = 2ab}_{a} \Rightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2-2ab+(2ab) \geq (2ab) \Rightarrow \underbrace{a^2+b^2 \geq 2ab}_{b}$

$\boxed{(b) \Rightarrow (c)}$ $a^2+b^2 \leq 2ab \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \leq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \leq 0$

$\boxed{(c) \Rightarrow (a)}$ $a=b \Rightarrow a^2+b^2 = 2ab$ ; $a=b \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow (a-b)^2=0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2=0 \Rightarrow a^2+b^2=2ab$

Demo feta com a certa. Son equivalents ü

(104). La inversa d'una matriu si existeix és única.

$A$ matriu quadrada $(n \times n)$

$B$ inversa de $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} AB = BA = \text{Identitat}$

Dem: Si $\underbrace{B \text{ és inversa de } A}_{BA=AB=Id}$ i $\underbrace{C \text{ tmb és inversa de } A}_{CA=AC=Id}$, hem de veure que $B = C$.

Dem: $\underline{B} = B \cdot Id = B \cdot (AC) = (BA)C = (Id)\underline{C}$ Aquí ja hem demostrat que si existeix, és únic i podem determinar inversa de $A$ con $A^{-1}$.

(396). Es dona per sabut que $\sqrt{2}$ irracional.

$x \in \mathbb{Q}$ qualsevol (no nul) $\rightarrow x\sqrt{2}+7 \in \mathbb{I}$.

Demo. amb R.A.:

$\exists a, b \in \mathbb{Z} : x = \frac{a}{b} \wedge b \neq 0 \leftarrow$ Def de $\mathbb{Q}$

$\exists c, d \in \mathbb{Z} : x\sqrt{2}+7 = \frac{c}{d} \wedge d \neq 0 \leftarrow$ Def $\mathbb{Q}$

Donat que fem R.A. diem que $x\sqrt{2}+7$ no Irracional $\equiv x\sqrt{2}+7$ racional i arribem a contradicció.

$x\sqrt{2}+7 = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b}\sqrt{2}+7 = \frac{c}{d} \rightarrow \sqrt{2}+7 = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} \rightarrow \sqrt{2} = \frac{cb}{da} - 7 \rightarrow \sqrt{2} = \frac{cb-7da}{da}$

Això és una contradicció pq $\sqrt{2}$ sabem que és $\mathbb{I}$ llavors no pot expressar-se com una fracció. (Recorda que $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ i el resultat de 6 div. mai serà $\mathbb{I}$).

És cert el recíproc? Justifica resposta.

$x\sqrt{2}+7 \in \mathbb{I} \rightarrow x \in \mathbb{R}$