Funcions Contínues

Límit d'una funció en un punt

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si "quan $\underline{x}$ està a prop de $\underline{a}$, $f(x)$ està a prop de $\underline{L}$"

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \text{si } |x-a| < \delta \text{ llavors } f(x) - L < \varepsilon}$$

Continuïtat (1)

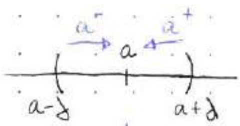
Sigui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció i $a \in \mathbb{R}$. f és contínua en a:

1) $\exists f(a)$ (Es a dir, $a \in \text{Dom de } f$)

2) $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ (Aquest és $\mathbb{R}$)

3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Límits laterals



$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ Mateixa def. de límit, però canviant $x \in (a-\delta, a+\delta)$ per $x \in (a, a+\delta)$.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ Mateixa def. de lim., però canviat per $x \in (a-\delta, a)$.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \text{Existeixen els dos lim lateral i valen } L.}$$

Discontinuïtats

Evitable: Existeixen $f(a)$ i $\lim_{x \to a} f(x)$, però són diferents. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ # si $x \neq 2$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x+2 = 4$ i $f(2) = 1$

Essencial: - Si existeixen 2 lim. laterals i són diferents: Discontinuïtat de salt

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x+3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0^+} x+3 = \underline{3}$ i $\lim_{x \to 0^-} x^2 = \underline{0}$ → Aquí hi ha salt.

- Si algun dels 2 lim laterals és $\pm\infty$: Discontinuïtat assimptòtica.

$f(x) = \frac{1}{x-3}$

Continuïtat (2)

Si D és el domini de f i A és subset de D direm que <u>f contínua en A</u> si és contínua en tots els punts de A.

Si $A=[a,b]$, contínua en A vol dir:

1) Contínua en tots els punts (a,b) 2) $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ 3) $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

Proposició 1: (Continuïtat de funcions elementals)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funció elemental i $a\in D \Rightarrow f$ és contínua en a.

Proposició 2: (Continuïtat i operacions)

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $a\in \text{Dom} f$ i $b\in\text{Dom} g$

$$\left.\begin{array}{l} c\cdot f \ (c \text{ constant}) \\ f+g \\ f\cdot g \\ f\div g \ (g(a)\neq 0) \end{array}\right\} f,g \text{ contínues en } a$$

Proposició 3: (Composició de contínues) # $f\circ g(a)=f(g(a))$

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\text{Dom} g$ i $g(a)\in\text{Dom} f$ i g contínua en a, f contínua en $g(a)$ $\Rightarrow f\circ g$ contínua en a

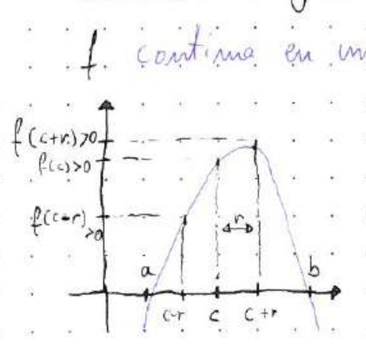
Exemple:

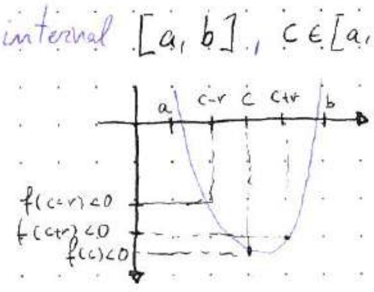
$h(x)=e^{\sin(x)}=f(g(x))$ contínua a $\mathbb{R}$ pq. $\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$; $x\to\sin(x)$; $y\to e^y$

Teoremes sobre funcions contínues (1)

Teorema del signe

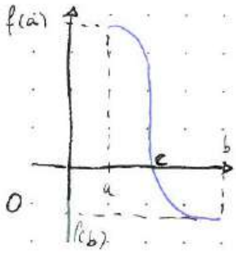
f contínua en un interval $[a,b]$, $c\in[a,b]$ t.q. $c\neq 0 \Rightarrow$ Hi ha interval $(c-r,c+r)$ on tots els punts tenen el mateix signe que $f(c)$.

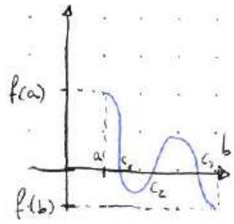




Teorema de Bolzano

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \to f(x) \\ a, b \in \mathbb{R} \text{ amb } a < b \\ f \text{ contínua en } [a,b] \\ \underset{\text{Tenen sig. diff.}}{f(a) \cdot f(b) < 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ t.q. } f(c) = 0$$





Funcions elementals

Funcions trigonomètriques

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) + \operatorname{sen}(y) \cos(x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

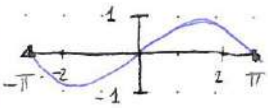
$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

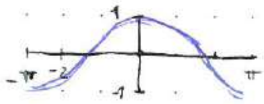
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

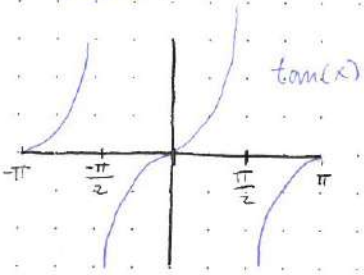
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$



sen(x)



cos(x)



Funcions Exponencials i logarítmiques

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^x \cdot b^x = ab^x$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

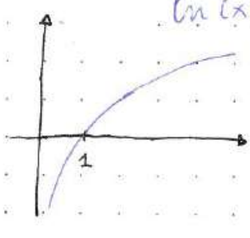
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x)^r = r \cdot \log_a(x)$$

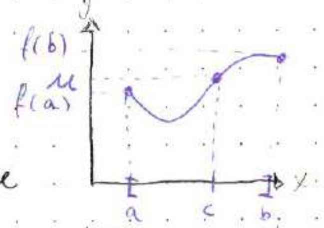
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$\log_e(x)$ $\overset{\shortparallel}{}$ $\ln(x)$



Teoremes de funcions contínues (2)

Teorema dels valors intermedis



f contínua en $[a,b]$
Sigui $u \in \mathbb{R}$ on u està estrictament entre $f(a)$ i $f(b)$
$f(a) \neq f(b)$
$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = u$

\# Diu que almenys $\exists$ 1 valor, podem ser més.

Teorema de Weierstrass

Una funció contínua sobre un "compacte" té màxim i mínim.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua té max i mín:

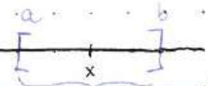
$\exists\, x_m \in [a,b] \,;\, x_M \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \;\; f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

A més, la imatge de f és un interval $[f(x_m), f(x_M)]$.

Es a dir tot $u \in [f(x_m), f(x_M)]$ és imatge d'alguna $x \in [a,b]$.

Bisecció (Mètode)

- Suposem f contínua en $[a,b]$ i $f(a)\cdot f(b) < 0$.



Input: a, b ($a < b$, $f(a)$ i $f(b)$ dif. signe). L'interval és: $\frac{b-a}{2^N}$

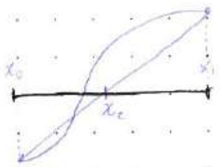
(*)
1. Calculem $m = \frac{a+b}{2}$
2. if($f(a) f(m) < 0$) $b \leftarrow m$; else $a \leftarrow m$;
3. N++;

(*) Això podem fer "for" N vegades o "while" amb cond. d'error.

$\boxed{error = |x_{aprox} - x_{real}| < \text{long interval}}$

\# if($f(m) == 0$) return m;

Secant (Mètode)



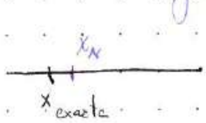
$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\, x + n$

Eq. de la recta tangent

- Suposem f contínua.

Input: x_0, x_1. No hi ha cap restricció.

(*)
1. Calculem $x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$
2. $x_0 \leftarrow x_1$; $x_1 \leftarrow x_2$;
3. N++;



(*) Cond. d'aturada:
- N iteracions
- $|x_{N+1} - x_N| < \varepsilon$
- $f(x_{N+1}) < \varepsilon$ ← Volem que sigui 0.

⚠ Pot NO convergir i no obtindre solució. Però si conv. és més ràpid.

Tangent (Mètode)

- f funció contínua i derivable

Input: x_0 que és valor inicial.

1. Calculem $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
2. $x_0 \leftarrow x_1$;
3. N++;

\# return x_1

(*) Nº iteracions

$|x_1 - x_0| < \varepsilon$ (Precisió arrel)

$|f(x_1)| < \varepsilon$ (Precisió del zero)

Fòrmules Simp

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$

Secant

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Tangent

(1). $x^3-3x^2+1=0$ té sol a $[0,2]$.

1) $f(x)=x^3-3x^2+1$ és polinòmica $\Rightarrow$ Contínua a $\mathbb{R}$.
Això implicarà que $f(x)$ tmb serà contínua en tot $[0,2]$.

Això ho diu el Teorema de Bolzano

2) $f(0)=1$,, $f(2)=8-12+1=-3$. Tenen signe diferent així que hi ha arrel en l'interval.
Mirem en $f(1)=-1$. Això vol dir que l'arrel està en $[0,1]$. # Un altre cop Bolzano.
Mirem en $f(0'5)=\frac{3}{8}$. Això vol dir que l'arrel està en $[0'5,1]$ #

En aquest cas $\boxed{x=0'65}$.

(6.a). Demo que $\ln(x)=x^2-4x$ té sol. en interval $[1,+\infty)$

Que tingui sol. significa que hi ha algun valor que fa que tallin eix-X.
Per com està feta l'expressió, no ho podem saber així que creem funció auxiliar
$\boxed{g(x)=\ln(x)-(x^2-4x)}$

Sabem que $\ln(x)$ és contínua en $x>0$.
Sabem que x^2-4x és contínua per ser polinomi. $\Big\} \Rightarrow g(x)$ serà contínua en $[1,+\infty)$.

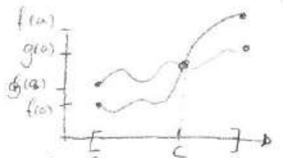
Per saber si $g(x)$ té sol, podem fer servir T.V.M que diu:
$\boxed{\text{Si } f(x) \text{ contínua en interval } [a,b] \text{ i } f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists c\in(a,b): f(c)=0.}$

$g(1)=\ln(1)-((1)^2-4\cdot(1))=0-(1-4)=\boxed{3=g(1)}$

(*) $\cancel{\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} \ln(x)-((x)^2-4x)=\lim_{x\to\infty}-(x)^2} = \boxed{-\infty=\lim_{x\to\infty} g(x)}$

Podem veure que els signes seran dif. demo així que $\boxed{\exists c \text{ t.q. } g(c)=0.}$ IV.

(2). $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, f i g contínues en $[a,b]$. $f(a)<g(a)$ i $f(b)>g(b)$.



Demo $\exists c\in(a,b)$ t.q. $f(c)=g(c)$.
Busquem aplicar Bolzano així que $h(x)=f(x)-g(x)$. Per la prop de funcions, fa que $h(x)$ cont $[a,b]$.
Tmb hem de saber els signes en els extrems:

$\left.\begin{array}{l} -\ h(a)=f(a)-g(a)=[f(a)<g(a)]=\text{negatiu} \\ -\ h(b)=f(b)-g(b)=[f(b)>g(b)]=\text{positiu} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Signe diff.

Ara ja podem aplicar Bolzano pq. $h(x)$ cont. en $[a,b]$ i $h(a)\cdot h(b)<0$.

Això implica que $\exists c\in(a,b): h(c)=0 \Rightarrow h(c)=f(c)-g(c)=0 \Rightarrow \boxed{f(c)=g(c)}$.

(*) $\lim_{x\to\infty}(\ln(x)-x^2+4x)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}^{\to 0}-\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}^{\to 0}\right)=\lim_{x\to\infty} x^2(-1)=\boxed{-\infty=\lim_{x\to\infty} g(x)}$

No es pot anar fent a saco.

(3). Podem assegurar que $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin(\pi x) + 3$ pren 2'5 en interval $[-2,2]$?

Volem veure si $\exists c \in [-2,2] : f(c) = 2'5$. Que és el mateix que $\underline{f(x) - 2'5 = 0 = h(x)}$

$h(x) = \frac{x^3}{4} - \sin(\pi x) + 0'5$. Ara hem de veure continuitat.

" $\frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}$ " és polinomi així que <u>cont.</u> en tot $\mathbb{R}$.

" $\sin(x\pi)$ " És una composició de funcions $\left.\begin{array}{l} g_1(x) = \pi x \\ g_2(x) = \sin(x) \end{array}\right\} g_2(g_1(x)) = g(x) = \sin(\pi x)$.

- $g_1(x)$ és polinomi així que cont en tot $\mathbb{R}$.
- $g_2(x)$ és cont. en tot $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ La composició $(g(x))$ tmb ho serà <u>(contínua en tot $\mathbb{R}$)</u>.

Una altra vegada per la prop. de les funcions: "Diff de funcions cont $\to$ funció cont".

Això vol dir que <u>$h(x)$ serà contínua</u> en $\mathbb{R}$, en concret en <u>interval $[-2,2]$</u>.

Ara hem de veure els signes en els extrems.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = \frac{(-2)^3}{4} - \sin(\pi(-2)) + 0'5 = \frac{-3}{2} < 0 \\ f(2) = \frac{(2)^3}{4} - \sin(2\pi) + 0'5 = \frac{5}{2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Els signes son oposats.}$$

$\boxed{\text{Pel Teorema de Bolzano } \exists c \in (-2,2) \text{ t.q. } h(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 2'5}$

(4). $e^{-x^2} = 2x$. Prova que té sol. $[0,1]$ Calcula amb precisió 0'1.

1) Igualem eq. a 0 per obtindre $f(x)$. $f(x) = e^{-x^2} - 2x = 0$

2) f contínua en $[0,1]$ Pq:

- e^{-x^2} és composició de $-x^2$ que és polinòmica (cont.) i exponencial e^x (cont.) Llavors la composició de dues contínues és una altra contínua.
- $-2x$ és contínua (polinòmica)

L'operació de dues funcions contínues contínua serà contínua.

$\Rightarrow f$ cont. en $[0,1]$

3) Comprovem extrems: $f(0) = e^{-0^2} - 2(0) = e^0 = 1 > 0$; $f(1) = e^{-(1)^2} - 2\cdot(1) = -2 + \frac{1}{e} < 0$

4) Apliquem Bolzano: $\exists c \in (0,1)$ $f(c) = 0$ # c és solució de $f(x)$

5) Ara fem algoritme de Bissecció:

Després de N iteracions $\text{error} < \frac{b-a}{2^N} = \frac{1-0}{2^N} = \frac{1}{2^N}$

Si volem error $< 0'1$, cal que $\frac{1}{2^N} < 0'1 \Rightarrow \frac{1}{2^N} < \frac{1}{10} \Rightarrow 1 \cdot 10 < 1 \cdot 2^N \Rightarrow 10 < 2^N \Rightarrow \frac{N=4}{10 < 16}$

⑥. Demo.

b) $x^2 = \sin(x)\cdot x + \cos(x)$ té sol <u>pos.</u> i <u>neg.</u>

Primer hem de tindre una funció $f(x) = x^2 - x\sin(x) + \cos(x)$. // Sino no podríem aplicar Bolzano

Tenim que $f(x)$ és comb. de funcions trig. i pol. i totes dues són cont. en $\mathbb{R}$ així que $f(x)$ tmb.

$\forall x \in \mathbb{R}$ x^2 és positiu, així que hem de buscar x t.q. $x^2 < \sin(x)\cdot x + \cos(x)$

⇝ Sol. positiva : $x > 0 \to [0, +\infty)$

$f(0) = 0^2 - \sin(0)\cdot 0 - \cos(0) = -1$,, $f(2) = 2^2 - \sin(2)\cdot 2 - \cos(2) \simeq 2'59$ i veiem que ja tenim el canvi de signe que buscàvem.

* $f(x)$ cont. en $[0,2]$ i $f(0)\cdot f(2) < 0 \Rightarrow \exists c_1 \in (0,2) : f(c) = 0 \Rightarrow \boxed{c_1^2 = \sin(c_1)\cdot c_1 + \cos(c_1)}$

⇝ Sol. negativa : $x < 0 \to (-\infty, 0]$

$f(0) = -1$,, $f(-2) = (-2)^2 - \sin(-2)\cdot(-2) - \cos(-2) \approx 2'59$ i ja veiem que tenim el canvi signe.

* $f(x)$ cont. en $[-2,0]$ i $f(-2)f(0) < 0 \Rightarrow \exists c_2 \in (-2,0) : f(c_2) = 0 \Rightarrow \boxed{c_2^2 = \sin(c_2)\cdot c_2 + \cos(c_2)}$

<u>Resultat:</u> La solució positiva és c_1 i la negativa c_2 per l'eq.

⑦. $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ aplicable Bolzano en $[-1, 1]$?

El problema és que $f(0)$ no està definida llavors no és contínua en $[-1,1]$.

Demo que $f(x) + \frac{1}{2} = 0$ té sol. i trobeu interval long $\leq \frac{1}{3}$ que la contingui.

$$\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{2} = \frac{2 + 1(1-e^{\frac{1}{x}})}{2(1-e^{\frac{1}{x}})} = \frac{3-e^{\frac{1}{x}}}{2-2e^{\frac{1}{x}}} = 0; \quad g(x) := f(x) + \frac{1}{2} \text{ i } g(x) \text{ cont } \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

⇝ Interval: $x > 0 \to (0, +\infty)$

$$g(1) = \frac{3-e^{\frac{1}{1}}}{2-2e^{\frac{1}{1}}} \simeq -0'08 \;,,\; \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1-e^{\infty}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{-\infty} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

Ja tenim el canvi de signe que buscàvem i sabem que $g(x)$ cont. $(0,1)$

$\exists c_1 \in (0,1) : g(c_1) = 0 \Rightarrow f(c_1) + \frac{1}{2} = 0$.

⇝ Interval : $x < 0 \to (-\infty, 0)$

$$g(-1) = \frac{3-e^{\frac{1}{-1}}}{2-2e^{\frac{1}{-1}}} \simeq 2'08 \;,,\; \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1-e^{-\infty}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1-0} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \lim_{x\to 0^-} g(x)$$

Però aquí no tenim el canvi de signe que necessitem per Bolzano.

Així que ara ens centrem en $(0, 1]$ i veiem que $g(1)$ és molt pròxim a '0', mentre que si m'aproximo a $g(0)$ No el valor com a tal anem a $0'5 > -0'08$ així que ens centrem en la part alta. provem $0'75$ pq. $1 - \frac{1}{3} = 0'66 < 0'75$

$g(0'75) = 0'14$ i veiem que tenim el canvi signe <u>Resultat:</u> $\boxed{(0'75, 1) \text{ té sol}}$

▽ Cuidado <u>no</u> incloure extrems en la sol.

M2-3-E-2

⑧. a) $f(x) = x^3 - x + 5 = 0$

i) Troba K t.q. $[K, K+1]$ $f(x)$ tingui sol.

$f(-1) = 5$ " $f(-2) = -1$ i al ser polinòmica $\xrightarrow{T.B.} \exists c \in (-2,-1) : f(c) = 0$

ii) Aplica <u>bisecció</u> i calc arrel ($\eta = 0'05$)

N	a	b	$\overset{\frac{b+a}{2}}{c}$	f(a)	f(b)	f(c)	$\left\lvert\frac{b-a}{2^N}\right\rvert$
1	-2	-1	-1'5	-1	5	3'125	0'5
2	-2	-1'5	-1'75	-1	3'125	1'39	0'125
3	-2	-1'75	-1'875	-1	1'39	0'283	0'031

$\frac{-1-(-2)}{2^N} < 0'05 \Downarrow$

$\frac{1}{2^N} - 0'05 < 0 \Downarrow$

$\frac{1 - 2^N 0'05}{2^N} < 0 \Downarrow$

$1 - 2^N 0'05 < 0$

$-2^N 0'05 < -1 \Downarrow$

$-2^N < \frac{-1}{0'05} \Downarrow$

$2^N > \frac{1}{0'05} \Downarrow$

$\log_2(2^N) > \log_2(20) \Downarrow$

$N > 4'32$

⑥c) $2x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ té totes les sol. en interval $[-1, 3]$.

// Aquest ex. podria fer-se amb derivades i analitzant els max. i min., però "no sabem".
La estratègia que hem de fer es assegurar que $(-\infty, -1)$ sempre serà [creixent / decreixent].
$(3, +\infty)$ sempre serà [creixent / decreixent].

Posteriorment hem de fer Bolzano en $[-1, 3]$ per demo que almenys si que hi ha sol.

$2x^3 - 6x^2 + 3 = 2x^2(x-3) + 3 = f(x)$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3 = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$ " $f(-1) = -5$ i tenen mateix signe

així que podem dir que serà decreixent en $(-\infty, -1)$ // Hauria d'explicar més.

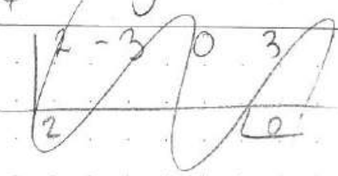
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ " $f(3) = 3$ Mateix bla bla bla.

— — —

Hem vist que $f(-1) \cdot f(3) < 0$ i que al ser polinòmica cont en tot $\mathbb{R}$ així que podem assegurar que $f(x) = 0$ en algun punt t.q. $\exists c \in (-1, 3) : f(c) = 0$.

Llavors $\boxed{2c^3 - 6c^2 + 3 = 0}$ és solució (no sabem si única).

$3 + x(2x-3)$; jugeu en quins valors $x(2x-3)$ és possitiu i en quin neg $3>0$) 0 ( )



⑥. Demo:

b) $x^2 = x\sin(x) + \cos(x)$ té sol. possitiva i negativa.

Primer transformem eq. en una funció $f(x) = x^2 - x\sin(x) - \cos(x)$.

$f(x)$ és el resultat de sumar i restar funcions elementals continues, així que $f(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R}$ #No vull enrollar-me aquí, és fàcil

Analitzem la funció i $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ així que hem de buscar x tal que: $x^2 < x\sin(x) + \cos(x)$. Ho farem per tanteig.

$0^2 < 0 \cdot \sin(0) + \cos(0) \Rightarrow 0 < 0 + 1 \Rightarrow 0 < 1$ Cert.

Això vol dir que $f(0) = -1 < 0$ i $f(5) \simeq 29'51 > 0$ Demo cert l'enunciat.

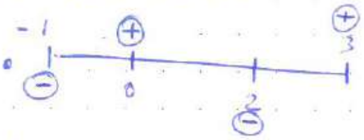
c) $2x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ té totes les arrels en $[-1, 3]$.

Anomenem $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$ i aquesta, al ser polinòmica és contínua en tot $\mathbb{R}$.

$f(-1) = -5$,, $f(3) = 3$. Donat que tenen signe dif. i és contínua, podem assegurar que la funció té, almenys, 1 arrel en l'interval $[-1, 3]$. #Bolzano.

Per saber si totes les arrels estàn en aquest interval, podem fer la derivada i veure en quins K punts s'anul·la. Això implicaria que com a màxim tingui K+1 arrels i podrem analitzar-ho amb més detall.

$f'(x) = 6x^2 - 12x$; $f'(x) = 0$ $\to x = 0$, $\to x = 2$



$f(-1) = -5$
$f(0) = 3$
$f(2) = -5$
$f(3) = 3$

Podem veure la forma de la funció que tindrà arrel entre: $(-1, 0), (0, 2), (2, 3)$

⑦. Es possible aplicar Bolzano $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ en interval $[-1, 1]$?

Demo $f(x) + \frac{1}{2} = 0$ té sol i troben interval long $\leq \frac{1}{3}$ que la contingui. # $y = \frac{1}{x}$

La funció és una composició així que haurem d'analitzar en detall.

- $e^{\frac{1}{x}} \to \frac{1}{x}$ és cont en $\mathbb{R} - \{0\}$ però com que e^y cont en tot $\mathbb{R}$ podem dir que la composició serà contínua en tot $\mathbb{R}$.
- $1 - e^y$ contínua en tot $\mathbb{R}$ per ser resultat de funcions continues: poli - exp.
- $\frac{1}{1 - e^y}$ no serà contínua en tot $\mathbb{R}$ si denominador $= 0$. Això només passarà si $e^y = 1$ cosa que serà impossible pq. $\frac{1}{x} = y$ no pot ser 0.

Ara que hem dem que $f(x)$ contínua en tot $\mathbb{R}$ queda veure els símbols del ext.

$f(-1) = \dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{-1}}} \simeq 1'58 > 0$,, $f(1) \simeq -0'58$ $\Rightarrow f(-1)\cdot f(1) < 0$ això assegura

(juntament que és contínua) $\exists c: f(c)=0 \wedge c \in (-1,1)$.

$f(x) + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2+1(1-e^{\frac{1}{x}})}{2(1-e^{\frac{1}{x}})} = \dfrac{3 - e^{\frac{1}{x}}}{2-2e^{\frac{1}{x}}} = 0$;

La funció serà cont pq. en el punt on s'anul·la el denom $2-2e^{\frac{1}{x}} = 0$ no serà mai possible (mateix argument que punt anterior).

$f(-1) = 2'05$,, $f(1) = -0'08$,, $f(0'75) = 0'14$,, $f(0'85) = 0'05$,, $f(0'95) = -0'03$

Podem veure que hi ha solució entre $(0'85, 0'95)$ #Tot i que no sé si hi ha millor forma que per tanteig.

⑧. Siguin les funcions polinòmiques.

1) Troba k t.q. en interval $[k, k+1]$ existeixi zero de la funció.

a) $f(x) = x^3 - x + 5 = 0$ $[-2,-1]$

Donat que fent Ruffini no trobo sol. fem per tanteig $f(-2) = -1$,, $f(-1) = 5$

Trobo que $f(-2)\cdot f(-1) < 0$ i com que cont. en tot $\mathbb{R}$, pel TVM $\exists c \in (-2,-1)$ $f(c) = 0$.

b) $g(x) = x^5 + x^4 - 2x + 2$ $[-2,-1]$

$g(-1) = 4$ $g(-2) = -10$

c) $h(x) = 4x^4 - 5x - 1$ $[-1, 0]$

$f(0) = -1$ $f(-1) = 8$

$\dfrac{b-a}{2^N} < \eta$

$b-a < 2^N \cdot \eta$

$\ln(b-a) < N \cdot \ln(2\eta)$

$\dfrac{\ln(b-a)}{\ln(2\eta)} < N$

2) Aplicant bisecció, calc arrel $(\eta = 0'05)$

a) $f(x) = x^3 - x + 5 = 0$ $[-2,-1]$

N	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	|·|
1	-2	-1	-1'5	-1	5	3'125	0'5
2	-2	-1'5	-1'75	-1	3'125	1'39	0'125
3	-2	-1'75	-1'875	-1	1'39	0'283	0'03
4	-2	-1'875	-1'937	-1	0'283	-0'335	0'007
5	-1'937	-1'875	-1'9	-0'335	0'283	0'04	0'001
6	-1'937	-1'90	-1'91	-0'335	0'04	-0'05	0'0005

$\dfrac{b-a}{2^N} < 0'05$

$b-a = 2^N \cdot 0'05$

$\ln(b-a) = N \cdot \ln(0'05 \cdot 2)$

$\dfrac{\ln(b-a)}{\ln(0'05\cdot 2)} = N$

$\dfrac{b-a}{2^N}$

$\dfrac{-1-(-2)}{2^N} < 0'05$

#M'ho passat però bueno

$\dfrac{1}{2^N} < 0'05$

$\dfrac{\ln\left(\frac{1}{0'05}\right)}{2} < N$ $1 < 2^N \cdot 0'05$

$\dfrac{\ln(1)}{\ln(0'05)} < N$

3) Aplica **Secant** amb $\eta = 0'05$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

a) $f(x) = x^3 - x + 5$

$$\left| \frac{x_{i+1}^{Act.} - x_{i+1}^{Prev}}{x_{i-1}^{Act}} \right| \cdot 100$$

i	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$\mathcal{E}_a$
1	-2	-1	-1	5	$\frac{-11}{6}$	$\frac{145}{216}$	
2	-1	$\frac{-11}{6}$	5	$\frac{145}{216}$	$\frac{-367}{187}$	$-0'596$	$6'58$
3	$\frac{-11}{6}$	$\frac{-367}{187}$	$\frac{145}{216}$	$-0'596$	$-1'9$	$0'02$	$3'29$

$$\left| \frac{\frac{-367}{187} - \frac{-11}{6}}{\frac{-367}{187}} \right| \cdot 100 = 6'55$$

$\boxed{x = -1'9}$

4) Aplica **tangent** amb $\eta = 0'005$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

a) $f(x) = x^3 - x + 5$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 1$

$x_{i+1} - x_i$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$\mathcal{E}_a$
1	-2	-1	11	$-1'9$	$0'1$
2	$-1'9$	$0'041$	$-0'99$	$-1'85$	$0'05$
3	$-1'858$	$0'518$	$9'26$	$-1'905$	$0'047$
	$-1'905$	$-0'008$	$9'85$	$-1'904$	$0'0088$

$x = 1'904$