Recorreguts, Connexió i Distància

Recorreguts

Un u-v recorregut és una seq. de vèrtex i arestes del graf. $\mathcal{R} = u_0 a_1 u_1 a_2 v_2 \dots v_{k-1} a_k v_k$

$a_i = u_{i-1} v_i$ // $v_0 = u$ = "Primer" // $v_k = v$ = "Últim". ⚠ Vèrtexs han de ser adjacents. ⚠

El nombre d'arestes és la longitud. (k) ⚠ Vèrtexs i Arestes es poden repetir. ⚠

- Si $u = v$ és recorregut tancat. # Un vèrtex es considera recorregut de $k = 0$. / camí de $k = 0$.
- Si $u \neq v$ és recorregut obert.

Hi ha diferents tipus de recorreguts.

- Camí: Si tots els vèrtex són diferents.
- Cicle: És recorregut tancat de $k \geq 3$ amb vèrtex diferents menys $u = v$.

Obs: Graf acíclic no té cap cicle.

Impo: Cicle passa per dos vèrtexs u i v $\Leftrightarrow$ hi ha dos camins que no tenen vèrtexs comuns. (Menys u i v).

Això vol dir que pots anar de $u \to v$ pel Camí$_1$ i tornar ($v \to u$) pel Camí$_2$ sense passar pels mateixos vèrtex.

Proposició 1: Si en G hi ha un u-v recorregut de long k $\Rightarrow$ Hi ha u-v camí de long (l) $\leq$ k que passa per vèrtexs i arestes del recorregut.
Sempre es pot trobar un camí més curt o igual al recorregut original de longitud igual o menor.

1. Considerem recorregut de u a v de long. k. Per def. aquest pot contindre rep. → Vèrtexs / → Arestes.

2.1. Si $\mathcal{R}$ no té vèrtexs repetits, llavors ja és un camí on $l = k$.

2.2. Si $\mathcal{R}$ té vèrtex repetits, aquests formaran un cicle. Aquest pot ser eliminat fent que la longitud de $\mathcal{R}$ (k) disminueixi. Això no afecta a la connectivitat entre u i v.

3. Repetim el punt '2.2' fins que no hi hagi cap cicle, obtenint així un camí on la longitud (l) serà més petita o igual que el de $\mathcal{R}$ (k). $l \leq k$. ☑

Proposició 2: Si en G hi ha 2 camins dif. de $u \to v$ $\Rightarrow$ G té un cicle.

1. Siguin P_1 i P_2 camins diferents de $u \to v$. # Seran diferents en Grafs Simples si tenen almenys 1 vèrtex diferent.

2.1. Si P_1 i P_2 només coincideixen amb els vèrtexs u i v, aquests ja formen un cicle.

2.2. Si P_1 i P_2 comparteixen un altre vèrtex comú, des de aquest punt que divergeixen fins que tornen a convergir, formen un cicle.

Això implica que en tots dos casos → 2.1 / → 2.2 a G hi ha cicle ☑.

Grafs Connexos

Un graf serà connex si hi ha un camí (Path) entre dos vèrtexs qualsevols. Això és així ja que compleix que com que no hi ha parells de vèrtexs diff. entre els quals necessitem un camí, la def. és compleix de forma buida / trivial.

Altrament s'anomena **graf no connex**. !! Graf d'ordre 1 és connex.

IMPO: Si G és connex d'ordre $> 1 \Rightarrow \forall v \in V \; g(v) \geq 1$.

Definim la relació R a V: $\boxed{\forall x, y \in V \quad xRy \Leftrightarrow \exists \text{ camí } x\text{-}y \text{ en } G}$ #Això ens servirà per fer Desconnexions.

R és una relació d'equivalència:

- Reflexiva: xRx: Sempre existeix un x-x camí ($l=0$)
- Simètrica: $xRy \to yRx$: Tot camí x-y es pot fer l'invers i fer y-x.
- Transitiva: xRy i $yRz \to xRz$: Amb x-y i y-z camins podem construir un x-z recorregut i per conseq. de la proposició 1 hi haurà un x-z camí.

Quan un graf és no connex, podem particionar el seu conjunt de Vèrtexs en $k > 1$ subsets. Cada subset representa una R diferent. Aquesta R agrupa els vertexs connectats entre si.

- $V_i \neq \emptyset$, $V_i \cap V_j = \emptyset \quad \forall i, j : i \neq j \Rightarrow V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ #Si tots els subsets tenen vèrtexs diff. la unió de tots aquests resulta ser el conjunt de vèrtex del graf.
- $G[V_i]$ (Subgraf induït per V_i) és **connex**. # Dins de V_i tots els vertexs tenen camí que els uneix. Pq cada subset és R equiv.
- No hi ha camí entre $G[V_i]$ i $G[V_j]$ amb $i \neq j$. # Si hi hagués, podríem fer un altre conjunt que fos l'unió d'aquests.
- $G = \bigcup_{i=1}^{k} G[V_i]$ #El graf principal és la unió de tots els grafs induïts.

Anomenem **components connexos** del graf G als subgrafs $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$.

IMPO: Sigui $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, on G_i són els components connexos de G.

- Ordre de G = ordre $G_1 + \dots +$ ordre G_k
- Mida de G = mida $G_1 + \dots +$ mida G_k

Proposició 3: Un graf és 2-regular $\Leftrightarrow$ Els components connexos són cicles.

$\Rightarrow$| Suposem: Graf 2-regular. Volem Deure: Components connexos són cicles.

1. Partim d'un $v \in V(G)$. Com que és 2-regular $g(v) = 2$. # v arbitrari.
2. Com que té 2 arestes incidents. Seguim una d'aquestes fins un altre vèrtex.
   Com que aquest on anem també té grau 2, podem seguir procés indefinidament.
3. Arriba un punt on passarem per un vèrtex prèviament visitat formant així un cicle.
   # Això passa pq. G és finit.

Aquest cicle que hem "creat" serà un component connex de G (Pq. no podem fer cap "salt" a un altre vèrtex donat que només tenim grau 2).
Com que no especifiquem v inicial, aquest raonament aplica a tots.

$\Leftarrow$| Suposem: Components connexos són cicles. Volem Deure: G és 2-regular.
Com que cada vèrtex de cada component connex és cicle (té grau 2), la unió de tots aquests components resultarà un graf 2-regular.

Proposició 4: Sigui $G=(V,A)$ un graf connex i $e = xy \in A$ i $v \in V$

1) El graf $G-e$ té màxim 2 components connexes. Si en té 2: $\nearrow$ $x \in G[V_1]$ i $y \in G[V_2]$; $\searrow$ $x \in G[V_2]$ i $y \in G[V_1]$.

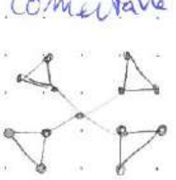
Quan eliminem una aresta (e) d'un graf connex poden passar dues coses:

- $G-e$ continua sent connex. Això sig. que e no desconnecta el graf.
- $G-e$ és desconnectat fent que G tingui exactament dues components connexes.

Donat que $e = xy$ i s'ha desconnectat implica que $x \in G[V_1]$ i $y \in G[V_2]$ o al revés.

2) El graf $G-v$ té màxim $g(u)$ components connexes.

Suposem que v està connectat a $v_1, v_2, \ldots, v_{g(v)}$ vèrtexs. Si eliminem u també s'eliminen les arestes incidents $\{v,v_1\}, \{v,v_2\}, \ldots, \{v, v_{g(v)}\}$ on cadascuna d'aquestes arestes podria haver sigut un camí únic que connecta v amb una part del graf.
En el cas extrem que hi hagin $g(v)$ components connexes significava que l'aresta u, v_i connectava una potencial component connexa al graf G, sense camins alternatius.



*Millorada posteriorment

Proposició 5: Tot Graf connex d'ordre n té com a mínim $n-1$ arestes.

Cassos Base: $n=1$. Donat que no hi ha parell de vèrtex, no necessitem arestes. $n=1 \to m=0=\boxed{1}-1$.

$n=2$. Per complir que sigui connex necessitem 1 aresta que els uneixi. $n=2 \to m=1=\boxed{2}-1$.

Pas Inductiu: Suposarem que compleix per $n-1$ vèrtexs fent que la $\underbrace{\text{mida sigui } (n-1)-1}_{H.I.}$ com a mínim.

Volem Demo que compleix per a n.

1. Partim de $n-1$ vèrtexs on la mida mínima és $(n-1)-1=n-2$.
2. Si afegim un vèrtex nou, necessitarem una nova aresta per a unir-lo al graf i que compleixi en que sigui graf connex.
3. Això es reflecteix t.q.: Ordre $n-1 \xrightarrow{+1} n$. Demostrant que si el graf és d'ordre Mida $n-2 \xrightarrow{+1} n-1$ n, mínim tindrà $n-1$ arestes. ☒.

DFS

Algoritme que escolleix un vèrtex qualsevol del graf i arbitràriament va seguint un camí de vèrtexs adjacents no visitats prèviament. Quan troba que ja no pot "avançar" més (sigui pq és el final o pq tots els connectats ja han sigut visitats), torna al vèrtex anterior i repeteix procés. Quan ja ha visitat tots els vèrtexs d'una component connexa, revisa si hi ha vèrtexs del graf no visitats. Si és així sig. que hi ha més d'una component connexa al graf.

Teorema 6: $G=(V,A)$ i v vèrtex de G. $G[W]$ induït pels vèrtexs de G visitats amb DFS és una component connexa de G que conté v.

1. Comencem DFS desde v i explorem tots els vèrtexs abans de retornar fins a v. Això garanteixa que tots els vèrtexs visitats, són accessibles desde v (i viceversa).
2. Formem el conjunt W amb tots aquests vèrtexs visitats, fent així que, per def. $G[W]$ sigui un graf connex i com a conseq. una component connexa de G.
3. Si després de fer això hi ha vèrtexs sense visitar (u) fem DFS desde u i anomenarem Z als vèrtexs que son "accessibles" desde u, fent així una altre component connexa de G.

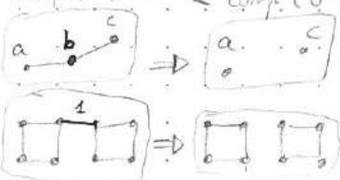
El procés acaba quan no hi ha vèrtexs per visitar fent que $G=G[W]\cup G[Z]$..

Vertex de Tall i Aresta pont

Sigui $G=(V,A)$ amb $v \in V$ i $a \in A$ diem:

- v és vèrtex de tall si $G-v$ té més components que G.
- a és aresta pont si $G-a$ té més components que G.

$comp(G)=1 < comp(G-b)=2$



$comp(G)=1 < comp(G-1)=2$

IMPO:

1) Si G connex i v és vèrtex de tall, $G-v$ com a màxim té $g(v)$ components. #Prnt 2. Prop. 4
2) Vèrtex de grau 1 no són de tall.
3) Si G connex i a és pont, $G-a$ té exactament 2 components connexes.

Teorema 7: Caracterització dels vèrtex de tall.

Sigui $G=(V,A)$ connex. $\boxed{\text{Vertex } v \text{ de } G \text{ és de tall} \Leftrightarrow \exists x,y : x \neq y \text{ i tots els camins passen per } v.}$

$\Rightarrow$] Suposem: $v \in V$ és de Tall. Volem Demo: $\exists x,y$ dif. t.q. tots camins x-y passen per u.
Si u és de tall, sig. que hi haurà (com a mínim) un parell x-y que ja no estaran connectats, donat que hi haurà més components connexes que en el Graf original i x i y estaran en components dif. Això només pot arribar a passar si l'únic punt comú de tots els camins x-y era u. Altrament u no seria de tall.

$\Leftarrow$] Suposem: $\exists x,y$ on $x \neq y$ t.q. tots camins passen per u. Volem Demo: v és de tall.
Si eliminem u del graf fragmentaria aquest en dos parts, donat que x-y deixarien d'estar connectats. Això faria que u, per def., fos de tall.

Teorema 8: Caracterització d'arestes pont.

a) $\Rightarrow$ b)] Suposem: a és pont. Volem Demo: $\exists x,y : \forall x$-y camí, a és aresta camí.
Si a és pont, $G-a$ té 2 components connexes (Exactament). Això fa que hi hagi parell x,y t.q. tots els camins que els uneix, passarien per aresta a. Altrament a no seria pont.

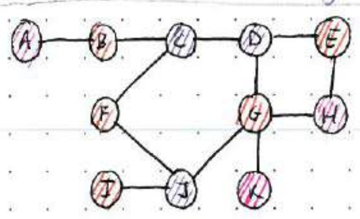
b) $\Rightarrow$ c)] Suposem: $\exists x,y : \forall x$-y camí, a és aresta camí. Volem Demo: a no té cicle.
Pq. hi hagi cicle entre x-y, ha d'haver 2 camins disjunts. Això contradiu que tots els camins de x-y passin per a. Això demo. que a no és part de cap cicle.

c) $\Rightarrow$ a)] Suposem: a no té cicle. Volem Demo: a és pont.
Si a no té cicle, x-y està connectat per a. Si traiem a $G-a$ tindria 2 comps connex fent que a fos pont.

Distància

Sigui $G=(V,A)$ i u,v vèrtexs de G:

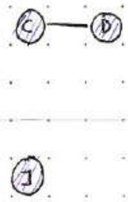
- **Distància entre u i v**: $d(u,v)$ Valor mínim de les longituds de tots els u-v camins.
  Si estan en c.c. diff. $d(u,v)=\infty$.
- **Excentricitat del vèrtex u**: $e(u)$ Dist. més gran de u a qualsevol v. $e(u)=\{\max(d(u,v)) \mid v \in$
- **Diàmetre de G**: $D(G)$ Màxim de les excentricitats de tots els vèrtex. $D(G)=\{\max(e(u)) \mid u \in V\}$
- **Radi de G**: $r(G)$ Mínim de les excentricitats de tots els vèrtex. $r(G)=\{\min(e(u)) \mid u \in V\}$
- **Vèrtexs centrals de G**: Vèrtexs t.q. la seva excentricitat és igual a $r(G)$
  $$\{u \in V \mid e(u)=r(G)\}$$
- **Centre de G**: Subgraf induït pels vèrtexs centrals. Arestes incloses.



$e(u)=3$ $D(G)=5$

$e(u)=4$ $r(G)=3$

$e(u)=5$ $\{C,D,J\}$



Exemple.

IMPO:

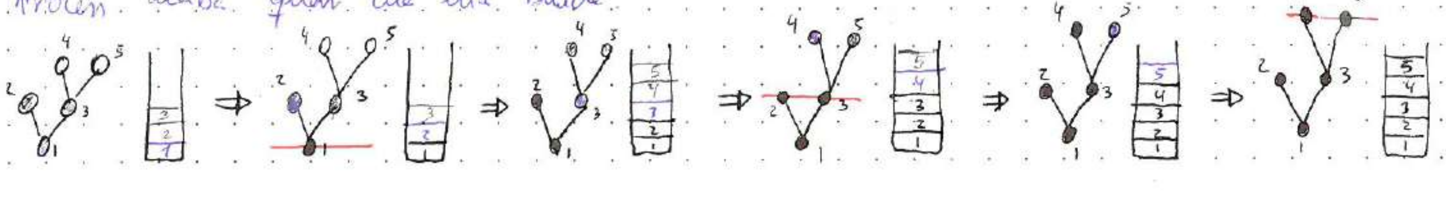
- $xy \in A \Leftrightarrow d(x,y)=1$
- G no és connex $\Leftrightarrow D(G)=\infty \Leftrightarrow r(G)=\infty \Leftrightarrow \forall u \in V : \exists e(u)=\infty$
- $r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$

Sigui $G=(V,A)$ (connex) per a vèrtexs u,v,w qualsevols se satisfà:

1) $d(u,v) \geq 0$, $d(u,v)=1 \Leftrightarrow u=v$ # $d(u,v)\geq 0$ assegura que la dist. no és neg.
2) $d(u,v)=d(v,u)$
3) $d(u,v)+d(v,w) \geq d(u,w)$ (Desigualtat triangular).

BFS (Útil per trobar Shortest Path en graf que no té costos).

Partim de vèrtex arbitrari i afegim a la cua tots els vèrtexs adjacents. Eliminem aquest primer vèrtex i tornem repetim el procés amb el primer vèrtex de la cua. A cada vèrtex visitat no tornarem posteriorment. Això fa que l'exploració sigui per capes. Procés acaba quan cua està buida.



<u>Teorema 9</u>: Sigui $G=(V,A)$ i $v \in V$. Vector D donat per l'algoritme BFS emmagatzema la distància mínima del vèrtex v a qualsevol altre.

Considerem G connexe (per facilitar dem.) i v com vèrtex inicial (qualsevol).
Primer iniciem $D[u] = \infty$ per tots els vèrtexs u que no siguin v i $D[v] = 0$.
Inicialment suposem que no es podem accedir i que la dist. a mi mateix és 0.
Comencem BFS per v. Quan un vèrtex u és descobert per primera vegada a través de l'aresta (w,u) sent w el vèrtex previ, s'actualitza $D[u] = D[w]+1$. Això assegura que la distància de $D[u]$ reflexi la distància desde $v \xrightarrow{D[w]} w$ i $+1$ pq $w \xrightarrow{+1} u$.
Assegurem que la distància sigui mínima pq. BFS va per capes, això implica que la primera vegada que veiem u serà la més pròxima a v.
No com en DFS que anàvem "fins al final" i podria resultar que u era adj a v.

<u>Caracterització dels grafs bipartits</u>

<u>Lema 10</u>: Sigui $G=(V,A)$ un graf
1) Si a G hi ha recorregut tancat de long. senar $\rightarrow$ A G hi ha cicle de long. senar.
Anomenem R a aquest recorregut tancat de long senar $\equiv$ nº arestes senar.
Si R no té cap cicle al seu interior, R ha de ser cicle així que la Dem. s'acaba.
Si R si té cicles al seu interior:
- Si aquests cicles, algun d'ells és senar, ja hem trobat el cicle senar.
- Si tots els cicles són parells els podem eliminar i això no afecta a que R continuï sent senar.

Com que eliminem tots els cicles parells i R és recorregut tancat senar, R ha de ser el cicle senar.
2) L'existència de recorreguts tancats parell no assegura cicles a G
Contraexemple: $A \overset{ab}{—} B \overset{cd}{—} C$ $R_1 = A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ és recorregut tancat i 0 cicles.

Teorema 11: G d'ordre ≥ 2 és bipartit $\Leftrightarrow$ No té cicles de long senar.

$\Rightarrow$) Suposem: G Bipartit $n \geq 2$ Volem Demo: No té cicles long senars

Donat que G Bipartit anomenem U i V a les seves parts estables.

Sense perdre riguositat, agafem el vèrtex $u_1 \in U$ d'algun cicle de G.

Per def. aquest $u_1 \in U$ només pot tindre arestes a vèrtexs de V, fent així que si es vol tornar a $U \in U$, s'hagin de fer "moviments parells" $U \to V$ i $V \to U$.

$\Leftarrow$) Suposem: No té cicles senars. Volem Demo: G Bipartit $n \geq 2$.

Partim de vèrtex u i l'afegim a U, anem al seg. adj. i l'afegim al contrari (V).

Fem aquest procés amb algún algoritme per recorrer el graf, si en algún moment visitem un vertex ja classificat i casualment aquest li tocaria anar al contrari, sig. que hi havia un cicle senar. Donat que hi hauria $U \to V$, $V \to U$, $U \to U$.

Quan acabem de recorrer el graf, tindrem dues parts estables t.q. $U \cup V = V(G)$ i $V \cap U = \emptyset$ complint la definició de part estable.

$\forall G = (V, A) \quad r(G) \overset{①}{\leq} D(G) \overset{②}{\leq} 2r(G)$

Considerem G connex pq. sino no te gaire sentit parlar de ∞.

①. $r(G) = \min\{e(v), v \in V\} \leq \max\{e(v), v \in V\} = D(G)$

②. En tot G connex hi ha 1 graf central (Pot ser únic) i anomenem "ω".

$\exists u, v \in V : D(G) = d(u,v)$ donat que sino no tindria sentit res.

Llavors aquest camí pot passar (o no) per ω, no importa per la demo.

$D(G) = d(u,v) \leq d(u,\omega) + d(v,\omega)$ on $d(u,\omega)$ i $d(v,\omega) \leq r(G)$

Podem concloure que $D(G) \leq 2r(G)$. Serà exactament el doble si ω està en la meitat del camí u-v.

Proposició 5: Tot G connex d'ordre n té com a mínim $n-1$ arestes.

Farem Demo per Inducció Completa sobre les arestes i no els vèrtexs.

// No ho fem afegint un vèrtex (tot i que sigui vàlid en aquesta demo) pq. suposaria obtindre un graf que no sabem com estan connectats aquests nous vèrtexs. Mentre que treballar treient arestes és més senzill de demostrar-ho.

Cas Base: $m = 0 \Rightarrow n = 1$ • Trivial // Recorda que sempre, mínim, 1 vèrtex.

$m = 1 \Rightarrow n = 2$ •—• K_2 T_2

Pas Inductiu: Suposarem que compleix per $m \geq n-1$. // m és una mida qualsevol del graf, mentre que $n-1$ és la mínima pq. sigui connex.

Volem demo que compleix per $m-1 \geq n-1$.

• $G-a$ connex: $\underbrace{m-1 \geq n-1}_{*} \overset{+1}{\Rightarrow} m \geq n \overset{H.I.}{\Rightarrow} m \geq n-1.$

// Podem veure que 'a' no ha desconnectat G, així que ha de continuar tenint una mida mínima $n-1$.

//* Això ho podem dir pq. $n-1$ és la condició que ha de complir un graf connex (respecte mida) i estem en el cas que $G-a$ és connex. No estem aplicant el que volem Demo.

• $G-a$ no connex: Obtenim 2 c.c. donat que a era de pont.

Restriccions de les c.c: $m-1 = m_1 + m_2$ // $n = n_1 + n_2$.

•• G_1: ordre $= n_1$ // mida $= m_1 < m-1 \overset{H.I.}{\Rightarrow} m_1 \geq n_1 - 1$

•• G_2: ordre $= n_2$ // mida $= m_2 < m-1 \overset{H.I.}{\Rightarrow} m_2 \geq n_2 - 1$

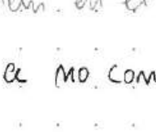
$$\underbrace{m_1 + m_2}_{=} \geq \underbrace{n_1 + n_2 - 2}_{=}$$
$$m-1 \geq n-2$$
$$\Downarrow +1$$

Podem veure que tmb hem obtingut el que volíem demo: $m \geq n-1$

Donat que es compleixen tots dos casos, podem confirmar que la mida mínima de qualsevol Graf d'ordre n serà $n-1$. ☑.

Exemples de la demo:

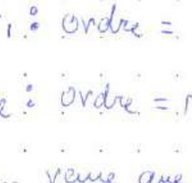
G:



ordre = 6
mida = 5

⇓

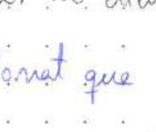
$G-a$:



ordre = 4
mida = 3

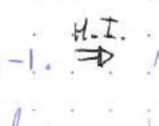
ordre = 2
mida = 1

G:



ordre: 6
mida = 6

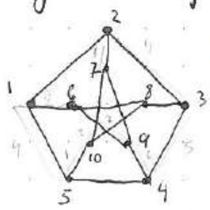
$G-a$:



ordre = 6
mida = 5

Aquesta demo és prou important pel tema de grafs "Arbres".

(2.1). Digues si es possible camins de long 9, 11 i cicles de long. 5, 6, 8 i 9.

G1: 

- Si que és possible un camí de long 9.

$P_9 = v_1 a_1 v_2 a_2 v_3 a_3 v_4 a_4 v_5 a_5 v_{10} a_{10} v_7 a_7 v_9 a_9 v_6 a_6 v_8$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

- No és possible un camí de long 11 pq. suposaria que hi ha 12 vèrtexs en aquest camí i el graf només té 10 vèrtex.

- Si que és possible un cicle de long 5.

$C_5 = v_5 a_5 v_{10} a_{10} v_8 a_8 v_3 a_3 v_4 a_4 v_5$

1 2 3 4 5

- Si que és possible un cicle de long 6.

$C_6 = v_5 a_5 v_{10} a_{10} v_7 a_7 v_2 a_2 v_3 a_3 v_4 a_4 v_5$

1 2 3 4 5 6

- Si que és possible un cicle de long 8.

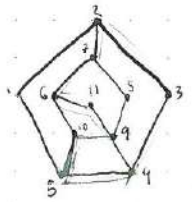
$C_8 = v_1 a_1 v_5 a_5 \, {}^{v_{10} a_{10}} \, v_7 a_7 v_2 a_2 v_3 a_3 v_8 a_8 v_6 a_6 v_1$

1 2 3 4 5 6 7

- Si que és possible un cicle de long 9.

$C_9 = v_1 a_1 v_5 a_5 v_{10} a_{10} v_7 a_7 v_2 a_2 v_3 a_3 v_4 a_4 v_9 a_9 v_6 a_6 v_1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

G2: 

- Si que és possible camí de long 9

$P_9 = v_1 a_1 v_2 a_2 v_3 a_3 v_4 a_4 v_5 a_5 v_{10} a_6 v_9 a_7 v_5 a_8 v_7 a_9 v_6$

- No hi ha camí de long 11 (Mateix argument que en G1)

- Si, el voltant del Graf.

- Si és possible cicle long 6.

$C_6 = v_7 a_1 v_2 a_2 v_3 a_3 v_4 a_4 v_9 a_5 v_5 a_6 v_7$

- Si que és possible cicle long 8.

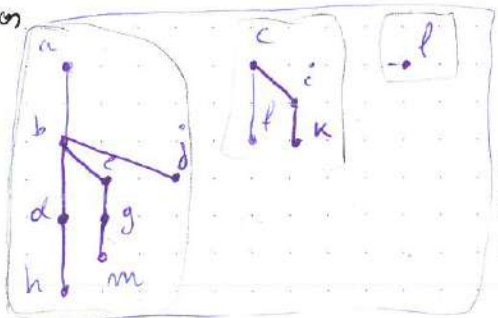
$C_8 = v_1 a_1 v_2 a_2 v_7 a_3 v_6 a_4 v_{11} a_5 v_9 a_6 v_{10} a_7 v_5 a_8 v_1$

- Si que és possible cicle de long 9.

$C_9 = v_2 a_1 v_3 a_2 v_4 a_3 v_5 a_4 v_{10} a_5 v_9 a_6 v_{11} a_7 v_6 a_8 v_7 a_9 v_2$

(2.4). Usa DFS per digues si són connexos

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
b	a	k	b	b	e	b	b	c	a	a		g
j	d	i	h	g		e	d	k	b	i		
	e	k				m						
	g											
	h											
	j											



Tot això és el graf.

Aquests són les components connexes.

$W_1 = \}a, b, , d, e, , g, h, , m\{$

$W_2 = \}c, f, i, k\{$

$W_3 = \}l\{$

És important donar llista ordenada per visitat.

(2.2). G és graf de grau mínim d, G conté camí de long d.

~~# El grau del vèrtex que menys arestes incidents té és "d".~~
~~Agafem nel vertex de grau menor, aquest tindrà d vertexs adjacents. Això sig. que estarà connectat d vertexs a través d'aquest vertex de grau menor. Això està creant un camí entre els vertexs adjacents o, si el grau és 1, hi ha un camí a un altre vertex adjacent.~~

(2.3). G té ordre 13; 3c.c. Demo que un dels components té mínim de 5 vèrtex.

~~Donat que 13 no es divisible entre 5, no es poden fer 3 grafs c.c. de ordre 5. Això vol dir que~~ No sé si el tinc bé

~~Donat que 13 és prim, el nombre El nombre que divideix 13 i permet fer 3 c.c és 6. Això és pq. 13 = 6·2+1 on resulta que hi ha 2 c.c amb ordre ≥ 5. Si en compte de 6 diem 5 fariem 13 = 2·5+3 i continuo havent 2 c.c amb ordre ≥ 5. Si reduïm No podem fer aquest procés amb 4 i inferiors pq. 13 = 3·4+1 i això ens dóna amb 4 c.c i no és el que volem. Com a mínim hi haurà un c.c. de ordre 5.~~

Refer pel paloma o per R.A.

$|A(G_1)| = r$ Farem demo per R.A $r, s, t < 5$ (Pq com a mínim eren 5).

$|A(G_2)| = s$ Llavors sig. que la suma és t.q. $r+s+t \leq 4+4+4 = 12$

$|A(G_3)| = t$ i això és contradicció pq $r+s+t = 13$.

on $r+s+t = 13$

— ho ha dit el GPT

(2.5). Demo graf té exactament 2 vèrtex grau senar $\Rightarrow \exists$ camí que va d'un a l'altre.

Anomenem u i v als vèrtexs de grau senar. Donat que el graf ha de complir el lema del Handshaking, només hi ha un altre de grau senar, la resta de vèrtexs han de ser de grau parell.

Partim de u (Sense perdre rigurositat) i podem passar dues coses:

1. v és adjacent a u: S'acaba la demo.
2. v no és adjacent a u: Implica que hi haurà un vèrtex de grau parell des d'on podrem continuar (Donat que tindrà (mínim) una aresta més).

Com que el graf és finit, en algun punt arribarem a v.
Si en el procés formem un recorregut en compte de camí, per la proposició 1, hi haurà un camí. #Millorat posteriorment

(2.6). Graf ordre n amb 2 c.c. Ki són complerts. Demo mida $\geq \frac{n^2-2n}{4}$.

$n=(n-r)+r$ on $(n-r)$ és la mida de $G[W]$ i (r) és la mida de $G[Z]$

Direm que W i Z que són els conjunts de vèrtexs són disjunts.

mida $G[W] = \frac{(n-r)(n-r-1)}{2}$ i mida $G[Z] = \frac{(r)(r-1)}{2}$

Donat que són disjunts, la suma de les mides $G[W]$ i $G[Z] = G$

mida $G = \frac{n^2-2nr-n+2r^2}{2}$. Hem de tindre en compte que n és constant.

$f'(r) = \frac{1}{2}(n^2-2nr+2r^2-n)$ || $f'(r) = 2r-n$ on el max és $r=\frac{n}{2}$.

Si fem la sub. ens queda $f(\frac{n}{2}) = \frac{n^2-2n}{4}$ que compleix amb l'enunciat.

Si fem que r sigui senar t.q. $r=\frac{n+1}{2}$ tenim que $f(\frac{n+1}{2}) = \frac{n^2-2n+1}{4}$

Tots dos casos compleixen que són com a mínim $\frac{n^2-2n}{4}$ com diu enunciat $\blacksquare$.

(2.7). G d'ordre n amb K c.c. Demo que mida de $G \geq n-K$.

Per def. la mida d'una component connexa haurà de ser com a ~~màxim~~ mínim $n-1$.

Això és així pq si la mida fos n, sig. que estaria connectat a tots els vèrtexs i no seria component connexa.

Donat que hi ha K c.c., aquestes tampoc poden estar connectades entre elles, fent que com a ~~màxim~~ mínim sigui $n-K$. ~~[(n-1), (n-2), ..., (n-n)] + Mida mínima de cada c.c.~~ ~~Podem deduir que la mida màxima de~~ cada] la menor de cada c.c.

Donat que les components son disj. la mida de $G = \sum_{i=1}^{K}$ mida $(G[V_i])$

□ No crec que estigui ben explicat, però la idea està bé.

(2.8). G d'ordre n i exactament $K+1$ c.c. H d'ordre n i $K+1$ c.c. ; $K \geq 1$.

K són isomorfos a K_1 i un component és isomorfo a K_{n-K}.

1) Calculeu la mida de H.

Primer hem d'entendre les components del graf H.

* "K són isomorfos a K_1" - Sig. que hi ha K vèrtexs aïllats donat que K_1 - $\boxed{\bullet^{v_2}}$.

* "Component isomorfo a K_{n-K}" = Hi ha un subgraf del tipus complet d'ordre $n-K$.

$n-K$ són els vèrtexs restants que no estan aïllats.

La mida del K_{n-K} és $\frac{(n-K)(n-K-1)}{2}$ i la mida dels K_1 és 0 així que els la suma de tot això és la mida de K_{n-K}. $\boxed{\text{mida } H = \frac{(n-K)(n-K-1)}{2}}$

Recorda que mida de $K_1 = 0$

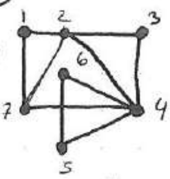
2) Demo. que mida de $H \geq$ mida de G.

La composició ~~del~~ de les components connexes de H fa que la seva mida sigui la màxima (Respectant les imposicions de quant. tot. de c.c.). Això és així pq. K_x és la topologia de graf de mida major. Qualsevol altre, tindrà mida igual o inferior.

Donat que hem de respectar la quant de c.c. intentarem que aquest graf complet tingui el major nombre de vèrtexs $n-K$.

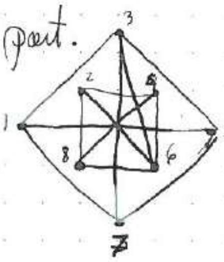
Tot plegat podem dir que, si G no és de la forma de H (Respecte topologia de les c.c) la mida de G serà igual o inferior, donat que H és la màxima.

(2.9). Troba tots els vèrtexs de tall i arestes pont.

G1: 

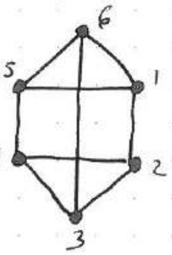
Vèrtex de tall: 4

Aresta pont: Cap

G2: 

Vèrtex Tall: 3, 6

Aresta pont: 36

G3: 

Vèrtex tall: Cap

Aresta pont: Cap

(2.10). $G=(V,A)$ connex ordre ≥ 2. Agafem $z \notin V$ i def. $G+z$ → Vèrtex: $V \cup \{z\}$ → Arestes: $A \cup \{zv : v \in V\}$

Demo $G+z$ no té vèrtexs de tall.

∇ Vèrtex pot ser de tall $\Leftrightarrow g(v) > 1$.

∇∇ $A \cup \{zv : v \in V\}$ sig que hi ha una aresta nova entre tots els v de G i z.

Agafem 2 vèrtexs arbitraris de G (u i v). Donat que G és connex, hi haurà un camí entre u i v (i viceversa).

Al afegir el vèrtex z, tmb afegim una aresta entre tots els vèrtexs de G i z.

Ara eliminem un vèrtex α qualsevol. Poden passar dues coses

- α era un vèrtex del camí entre u i v: No passa res pq ara hi ha un nou camí creat donat que podem fer $u \to z$ i $z \to v$.
- α ~~no~~ no era un vèrtex del camí entre u i v. No hi ha cap diferència.

D'aquesta manera demo que no hi haurà cap vèrtex de tall.

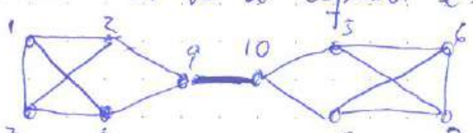
(2.11). Trobem el n més pet. t.q. existeixi 3-regular amb aresta pont.

∇ Si graf és 3-regular n ha de ser parell pq compleixi Handshaking.

Si G és 3-regular, de cap manera $n < 4$.  $2 \cdot 4$.

Si volem que hi hagi aresta pont ≡ separem G en 2 c.c. sig que $n < 8$ mai.

Donat que no podem tindre n senars, després de 8, el mínim n que podem tindre és 10 i aquest és el n més petit que compleix.



sent 910 l'aresta pont

No faig ús del fet que és 3-regular.

(2.12). Demo G 3-regular té vèrtex tall $\Leftrightarrow$ té alguna aresta pont.

~~$\Rightarrow$| Suposem: Vèrtex tall Volem Demo: Té aresta pont.~~
~~Si G té vèrtex de tall (v), sig. que $G-v$ té com a màxim $g(v)$ c.c.~~
~~Agafem 2 vèrtexs qualsevols u i w i agafem el camí u-w (estan mateix c.c.)~~
~~En aquest camí podem~~ Donat que vèrtex v és de tall $g(v) \geq 2$. Aquests u-w han de passar per v
Podem assegurar que hi haurà camí que

$\Rightarrow$| Suposem: Vèrtex tall Volem Demo: Té aresta pont.
Anomenem v al vèrtex de tall. Agafem vèrtexs u,w t.q. el seu camí passi per v
(Considerar altres camins no aporta res a la demo donat que suposem que v és tall).
$G-v$ (donat que v és de tall) deixarà $g(v)$ c.c. on, u w deixaran d'estar connectats. Com que al treure v tmb eliminem les seves arestes, sig que v tenia una aresta pont.

$\Leftarrow$| Suposem: Té aresta pont Volem Demo: $\exists$ vertex tall.
Agafem u,w arbitraris. Anomenem "a" a l'aresta pont. $G-a$ té 2 c.c.
- u, w connectats: No aporta res a la demo.
- u, w desconnectats: Sig que tots els seus camins passaven per vertex v i "a" és incident a "v". Això sig que si eliminessim "v" u,w tmb deixarien d'estar connectats fent així que v fos de tall.

(2.13). Demo cada apartat independentment.

1) Si G no connex $\Rightarrow G^c$ connex.
Diem que G té k c.c. on $k>1$ i denotem $G[V_i]$ on $1 \leq i \leq k$ cada c.c.
Agafem i,j diff. Donat G no connex, per def. no hi ha camí entre $u \in G[V_i]$ i $v \in G[V_j]$
Al fer el complementari afegim una aresta entre tots els $u \in G[V_i]$ i els $v \in G[V_j]$.
També eliminem totes les arestes de $G[V_i]$ i $G[V_j]$.
El que succeix ara és que, $\forall u \in G[V_i]$ hi ha un $v \in G[V_j]$ comú, fent possible un camí entre 2 vertexs qualsevol u_1 i u_2. Anàlogament amb $G[V_j]$.
Donat que hi haurà un camí entre tots els vèrtex, podem afirmar que:
$\boxed{G^c \text{ serà connex}}$ ☒.

(2.2). Demo que si G té grau mínim d, G té camí long. d.
V_0 té grau $\geq d$. Agafem V_1 (qualsevol).
V_0V_1 V_1 té grau $\geq d$. Agafem $V_2 \neq V_0$ (Mínim $d-1$ opcions)
$V_0V_1V_2$ V_2 té grau $\geq d$. Agafem $V_3 \neq V_0V_1$ (Mínim $d-2$ opcions).
⋮
$(i<d)$ V_i té grau $\geq d$. Agafem $V_d \neq V_0V_1 \dots V_{i-1}$ (Mínim $d-i$ opcions)
V_d no té opcions fent que $V_0 \dots V_d$ és un camí de longitud d ☑.

(2.5). Graf té 2 vèrtex grau senar $\Rightarrow \exists$ camí que va d'un a l'altre.
Si hi ha 2 vèrtex de grau senar, aquests han d'estar a la mateixa c.c donat que si no, no compliria el corol·lari. Farem Demo per R.A.
Suposem G és no connex i $v \in G[V_1]$ i $w \in G[V_2]$.
Donat que v és senar i és únic en $G[V_1]$, aquest graf no compleix el Lema del Handshaking. → Contradicció ☑.

(2.7). G graf d'ordre n i k components connexes. Demo que la mida $G \geq n-k$.
Partim que la mida mínima d'un graf és $n-1$ sent n l'ordre.
Descomposem G en les seves k c.c. t.q. n_i el número de vèrtexs de la component i-èsima, t.q. $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.
Pel que sabem, la mida de cada c.c. ha de ser t.q. $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, ...
Si fem la suma de les mides de cada component connexa tenim:
$(n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1) = (n_1+n_2+\dots+n_k)+(-1)\cdot k = \underline{n-k}$
Hem demostrat cert l'enunciat. ☑

(2.13). $G=(V,A)$ i v vèrtex de G.
3) Si v és de tall en G, v no serà de tall en G^c.
Agafem vèrtexs u i w adjacents a v t.q. l'únic camí u-w passi per v.
Quan fem el complementari, u i w estaran connectats directament fent que la eliminació del vèrtex v no suposi deixar a u i w en c.c. diferents. ☑

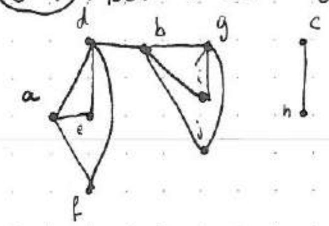
2) $(G-v)^c = G^c - v$

Podem afirmar que resultarà amb el mateix gràfic perquè:

1. Tots dos graf resultants tindràn els mateixos vèrtexs, donat que en tots dos casos s'està eliminant v i fer el complementari no té cap efecte sobre vèrtexs.

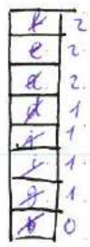
2. Les arestes seràn les mateixes donat que treure v i fer el complementari resultarà amb un graf amb totes les arestes complementàries menys les de v. D'igual forma que fer el complementari de G (amb v inclós) però després eliminar-lo (i les seves arestes adjacents) obtindrem el mateix resultat.

(2.14). Dona distància de a i b a tots els vèrtexs del cas amb BFS



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$d(a,v)$	0	2	∞	1	1	1	3	∞	3	3

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$d(b,v)$	2	0	∞	1	2	2	1	∞	1	1



(2.15). Troben el diàmetre dels grafs següents. # dist màx entre 2 vertexs qualsevols.

1) K_n 1. Donat que sempre hi haurà una aresta incident.

2) Graf ex. 2.1. $G_1 = 2$ $G_2 = 4$.

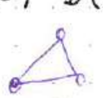
3) $K_{r,s}$ # Complet Bipartit 2 # En cas que es vulgui anar de mateixa part establerta.

4) C_n # Cicle: Si n parell: $\frac{n}{2}$ Si n senar: $\frac{n-1}{2}$

5) W_n # Wheel 2 (Passant pel central) 6) T_n # Path $n-1$ (D'extrem a extrem)

(2.16). Doneu graf connex que satisfacin.

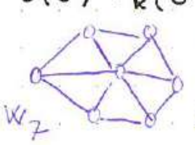
1) $D(G) = D(G-u)$



qualsevol u

K_3

2) $D(G) < D(G-u)$

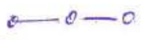


u és el central

W_7

3) $D(G) > D(G-u)$

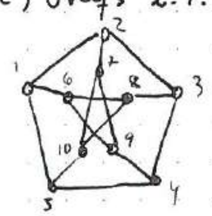
T_3



on u és qualsevol extrem.

(2.17) 1) Troba excentricitat tots vèrtexs, radi, vèrtexs centrals i centre

a) Grafs 2.1.



v_i	e
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2

$r(G) = 2$

$D(G) = 2$

Vertexs Centrals = Tots

Centre de G = G.

2.) Donen graf $r(G) = D(G)$ 3) Graf $D(G) = 2r(G)$

Qualsevol K_n on $n>1$. T_3 

(2.18). G ordre 1001 on $\forall v\ g(v) \geq 500$. Demo que G té diàmetre ≤ 2.

~~Partim de vèrtex qualsevol. Donat que té, com a mínim grau 500, tindrà com a mínim 500 vèrtexs on anar. Anem a un altre vèrtexs d'aquest adjacents i marquem ... i els altres adjacents com a vists. Si aquest on estem és el destí, el camí serà 1. Si no és, aquest nou vèrtexs té com a mínim 500 possibilitats. Escollim la que no haguem visitat marcat.~~

Millorat avall

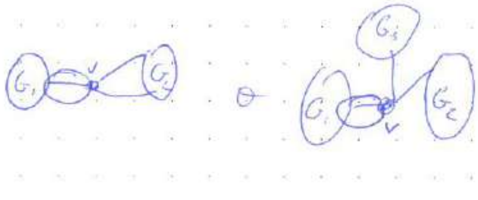
Partim d'un vèrtex qualsevol, aquest haurà d'estar connectat, com a mínim, a la meitat de la resta de vèrtexs (500). Aquestos vèrtexs adjacents poden estar connectats entre ells, menys un, donat que aquest haurà d'estar connectat a la resta de vèrtexs pq sinó el graf no seria connex. Fent així que en el pitjor dels casos, el diàmetre sigui 2.

Això seria si $u_1 \to$ [vèrtex que té 499 vèrtexs visitats adjacents] $\to$ destí

(2.12). Graf 3 regular té vèrtex tall $\Leftrightarrow$ té alguna aresta pont.

Sigui G_1 i G_2 c.c. de $G - v$ (Altres no importen per la demo).

Com que v té grau 3, G_1 o G_2 està connectat per exactament una aresta de v, llavors aquesta serà pont.



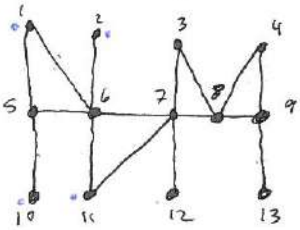
// Només parlem de G_i pq és més fàcil formalitzar.

(2.18). Farem demo per RA

$\forall v, w \in V(G)$ no $\exists x\ v \sim x \wedge x \sim w$ (v, w no són adj. p.q. sinó acaba Demo).

Tenim v té $v_1, \dots, v_{500}$ com a veïns
Tenim w té $w_1, \dots, w_{500}$ com a veïns
$\Rightarrow$ Això suma $v_1, \dots, v_{500} + w_1, \dots, w_{500} + v + w$ que fa 1002 vèrtexs i és Contradicció pq hi havia 1001 vèrtexs.

① Respon i justifica.



a) És Bipartit?

No pq podem observar diferents cicles de long senar $1 \to 5 \to 6 \to 1$ long 3 per exemple.

Si pintem 1 en ▨ 5 i 6 haurien de ser ▨ però dedueix que 5 i 6 tenen el mateix color i són adjacents.

b) Mida del complementari.

Si $m = |A|$ de $G=(V,A)$ la mida (m') de G^c és t.q.: $m' = \frac{n(n-1)}{2} - m$

En G (figura) $m = 16$ i $n = 13$. Llavors $m' = \frac{13(13-1)}{2} - 16 = \frac{156}{2} - 16 = 78 - 16 = \boxed{62 = m'}$

c) Mínim nombre arestes per desconnectar-lo.

1 | Pq. pots eliminar l'aresta que uneix a un vertex de grau 1 al graf fent 2 c.c.

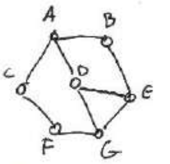
d) Quin radi té? e) Quin diàmetre?

$1 = 5$, $5 = 5$, $10 = 6$ ($10 \to 13$), $2 = 5$, $6 = 4$, $11 = 4$, $3 = 4$, $7 = 3$ ($7 \to 10, 13$), $12 = 4$, $8 = 4$, $4 = 5$, $9 = 5$, $13 = 6$

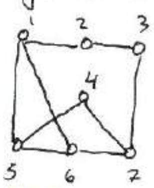
$\boxed{\text{radi} = 3}$ pq l'excentricitat més baixa (mínima) és 3 (del vèrtex 7).

$\boxed{\text{Diàmetre} = 6}$ Pq. màx. excentricitat és 6 i ho justifica $10 \leftrightarrow 13$.

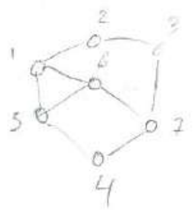
② Son isomorfs els dos grafs? Justifica.



$G = (V, A)$



$H = (W, B)$



Si pq. inicialment comprovem el graf a simple vista i veiem que $|A| = |B|$, i que $|V| = |W|$. A més, hi ha la mateixa quantitat de vèrtex amb el mateix grau.

Això **NO** implica que siguin isomorfs, però pot ser-ho. Si fem algunes proves ens fixem que $\exists\, f: V \to W$ bijectiva t.q. $f(A) = 7$, $f(B) = 4$, $f(C) = 2$, $f(D) = 6$, $f(E) = 5$, $f(F) = 3$, $f(G) = 1$

També ens fixem que $A \sim B$ i $f(A) \sim f(B) = 7 \sim 4$. Donat tot això ja tenim demo que $\boxed{G \cong H}$.

✓

①. Sigui $V = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i K_{10}. $A = A(K_{10}) - \{01, 12, 23, 34, 40, 56, 67, 78, 89, 95\}$.

1) Calc. Ordre, mida i seq. de G.

$\boxed{n = 10}$, $m = \frac{n(n-1)}{2} - 10 = \frac{10(9)}{2} - 10 = \frac{90}{2} - 10 = 45 - 10 = \boxed{35 = m}$

Seq: $\langle 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7 \rangle$

2) Es G o G^c Bipartit. Justifica la resposta.

G no és Bipartit pq $\exists$ cicles de long senar Per exemple:

Partim de 0 així que tots els adj. els pintem de ▨ (Donat que 0 és ▨)

Ara anem al vèrtex 4 (pintat de ▨) i veiem que és adjacent a 2 que tmb està pintat del mateix color ▨ (Donat que tmb era adj a 0) Fent així que no es pugui pintar el graf de dos colors sense repetir vèrtexs adj del mateix.

G^c tampoc pq el complementari serà el conjunt d'arestes que hem tret fent així que hi hagi cicle long senar $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 0$ long = 5.

3) Aplica BFS a D en ordre natural i digues dist.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
dist(0, x)	0	2	1	1	2	1	1	1	1	1

0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
~~0~~	2	3	5	6	7	8	9	4	1

Ara ja els hem vist tots.

X

②. Sigui $G = (V, A)$ ordre n i mida m t.q. vèrtexs grau 2 o grau 4. Demo $m \leq 2n - 1$.

Anomenem x als vèrtexs de grau 2 i y als de grau 4 $n = x + y$

La mida del graf és $m = \frac{2x}{2} + \frac{4y}{2} = x + 2y$ i si fem sub podem veure

que $x + 2y \leq 2n - 1 \Rightarrow x + 2y \leq 2(x+y) - 1 \Rightarrow x \leq 2x - 1 \Rightarrow x \geq 1$ cosa certa

pq. enunciat ens diu que sempre hi ha 1 de cada.

// Si ho fessim per contradicció veu

$m > 2n - 1 \Rightarrow x + 2y > 2x + 2y - 1 \Rightarrow x < 1$ cosa falsa pq enunciat ens diu

que sempre hi ha 1 de cada. Joder estava intentant per derivades i

no sortia. T'has de fixar bé en les coses clau

de l'enunciat. No escrivim per escriure.