Aplicacions Entre Espais Vectorials

Definicions

$f: E \to V$ és aplicació lineal si:

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$, $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

2) $\forall \vec{u} \in E$ i $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$

• Aplicació Trivial: $f: E \to F$ on $f(\vec{u}) = 0_F$

• Aplicació Id: $I_E: E \to F$ on $I_E(\vec{u}) = \vec{u}$

✳ Si $E=F$ diem que f és endomorfica.

✳ Si f bijectiva llavors és isomorfica.

Exemple

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2c-b)-(a+d)x+x^2$

1) $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \stackrel{?}{=} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$

• $f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = (2(c+c')-(b+b'))-((a+a')+(d+d'))x+x^2$ ← NO és lineal pq no són iguals els resultats

• $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = (2c-b)-(a+d)x+x^2) + ((2c'-b')-(a'+d')x+x^2) = \dots + 2x^2$

Propietats

▸ $f(0_E) = 0_F$ ▸ $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$ $\forall \vec{u} \in E$

▸ Si S subespai E, $f(S)$ és subespai de F.

▸ Si S' subespai F, $f^{-1}(S')$ és subespai de E.

Proposició

Sigui $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E, llavors f està determinada per $f(b_1), \dots, f(b_n)$

Això sig. que a partir d'una imatge d'una base podem obtenir la imatge de qualsevol vec d'E.

$\vec{u} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n \Rightarrow f(\vec{u}) = \alpha_1 f(b_1) + \alpha_2 f(b_2) + \dots + \alpha_n f(b_n)$

Corol·lari

Si $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ és un subespai d'$E \Rightarrow f(S) = \langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle$

Matriu Associada a f en les Bases B i W És la matriu que té per columnes les imatges dels vec. de base B expressades en coordenades de base W. Denotada $M_W^B(f)$

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \dots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Per trobar el vector de coordenades de la imatge d'un vec $\vec{u} \in E$ n'hi ha prou en fer producte:

$\boxed{f(\vec{u})_W = M_W^B(f) \cdot \vec{u}_B}$ # Posant vec de coordenades en columna

Hem d'agafar els vec necessaris de la base d'origen que siguin L.I (preferiblement els de la canònica) i aplicar la funció a aquests. Els vec resultat ficar-los en columna.

Volem que siguin L.I pq sinó no gen. tot l'espai de destí.

7.8) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = B_c'$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \to f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0+0\\0+0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{B_c}$,, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1+0\\1+0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$M_{B_c'}^{B_c}(f) = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ Si volgue fer $f\begin{pmatrix}7\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\2\\-2\end{pmatrix}$

4) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ $\quad B_c = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad B_c' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right) \to \begin{pmatrix}b+c\\c+d\\2a-b+c-d\end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$,, $f\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,, $f\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,, $f\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Aquests vectors ja estan en B_c de $\mathbb{R}^3$ així que no fa falta fer més

$M_{B_c'}^{B_c}(f) = \begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\2&-1&1&-1\end{pmatrix}$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{u} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ on $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$.

7.10. $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$ base de E ,, $\dim(E) = 4$,, $E_B \xrightarrow{f} E_B$,,
$f(u) = u + 2w$
$f(v) = v + w$
$f(w) = 2u + v + w$
$f(t) = 2u + 2v + 4w$

$\mathrm{Ker}(f) = ?$,, $\mathrm{Im}(f) = ?$ Base i dim.

1) Calculem mat associada.

$$\left.\begin{aligned} f(u) &= u + 0v + 2w + 0t\\ f(v) &= 0u + v + w + 0t\\ f(w) &= 2u + v + w + 0t\\ f(t) &= 2u + 2v + 4w + 0t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} f(u) & f(v) & f(w) & f(t) \end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&2&2\\0&1&1&2\\2&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix} \end{array} = M_B^B$$

2) Calculem $\mathrm{Ker}(f)$ són tots vec $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in E \;\middle|\; f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&0\\0&1&1&2&0\\2&1&1&4&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&0\\0&1&1&2&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&0\\0&1&1&2&0\\0&0&-4&-2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&0\\0&1&1&2&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 2x_4 &= 0\\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0\\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\underline{x_4 = -2x_3} \Rightarrow x_2 + x_3 + 2(-2x_3) = x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow \underline{x_2 = 3x_3}$

$x_1 = -2x_3 - 2x_4 = -2x_3 - 2(-2x_3) = \underline{2x_3 = x_1}$

(1.1). Det. quines són app. lin.

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on $f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = x+y$. SI

Agafem 2 vec d f. t.q. $f(\vec{v}) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x+y$ i $f(\vec{u}) = f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'+y'$

Per complir primera prop ~~tenim~~ hem de veure si $f(\vec{u})+f(\vec{v}) \stackrel{?}{=} f(\vec{u}+\vec{v})$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{u}) &= x'+y' \\ f(\vec{v}) &= x+y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x'+y'+x+y} = f(\vec{u})+f(\vec{v}) \qquad \vec{u}+\vec{v} = (x+x', y+y') \quad f(\vec{u}+\vec{v}) = \underline{(x+x')+(y+y')}$$

Veiem que són iguals així que prop 1 ☑.

Ara hem de veure si $\lambda f(\vec{u}) \stackrel{?}{=} f(\lambda \vec{u})$ sent $\vec{u} = (x,y)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, qualsevol.

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \lambda \cdot f(\vec{u}) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \\ &\bullet\ f(\vec{u}\cdot\lambda) = f((\lambda x, \lambda y)) = \lambda x + \lambda y \end{aligned}\right\}$$ Veiem que tmb són iguals així que prop 2 ☑.

Donat que prop 1 i prop 2 $\Rightarrow$ f és una app. lineal.

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^2y^2$ # No explicaré tant ja. NO

Prop 1: $f(\vec{x})+f(\vec{y}) = f(\vec{u}+\vec{v})$

$\bullet\ f(\vec{v}) = x^2y^2$; $\bullet\ f(\vec{u}) = x'^2y'^2$; $f(\vec{u})+f(\vec{v}) = x^2y^2 + x'^2y'^2$

$\bullet\ f(\vec{u}+\vec{v}) = f((x+x', y+y')) = (x+x')^2 \cdot (y+y')^2$ NO són iguals.

(1.2). Det. quina és app. lineal:

a) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$ Aquí podem veure que si pq $\forall p(x) \in P_2[x]$ $f(p(x)) = 0$ podem dir que $0+0 = (0+0)$ i $\lambda \cdot (0) = 0$,, $(\lambda \cdot 0) = 0$ ☑.

b) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1+a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$ $\vec{u} = \alpha + \beta x + \delta x^2$,, $\vec{v} = a + bx + cx^2$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{u}) &= \alpha + (\beta+\delta)x + (2\alpha - 3\beta)x^2 \\ f(\vec{v}) &= a + (b+c)x + (2a - 3b)x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\alpha + a) + (\beta+\delta+b+c)x + (2\alpha - 3\beta + 2a - 3b)x^2$$

$f(\vec{u}+\vec{v}) = (a+\alpha) + ((b+\beta)+(c+\delta))x + (2(a+\alpha) - 3(b+\beta))x^2$ i podem veure prop 1 ☑.

$f(\lambda\vec{u}) = \lambda\alpha + (\lambda\beta + \lambda\delta)x + (2\lambda\alpha - 3\lambda\beta)x^2$ ← Són iguals prop 2 ☑.

$\lambda f(\vec{u}) = \lambda\left[\alpha + (\beta+\delta)x + (2\alpha - 3\beta)x^2\right] = \alpha\lambda + (\beta+\delta)\lambda x + (2\alpha - 3\beta)\lambda x^2$

(7.3). Det. quines són apl. lineals.

1) $f: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on $f: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$) Veiem quan a ull. que $\boxed{SI.}$

2) $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times3}(\mathbb{R})$ on $f(A) = AB$ amb $B \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ fixada. $\boxed{SI}$

Det. $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Agafem $A = \begin{pmatrix} x & y \\ t & \omega \end{pmatrix}$ i $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} f(A) = AB \\ f(A') = A'B \end{array}\right\} \Rightarrow AB + A'B = (A+A')B = f(A+A')$ prop 1.

$f(\lambda A) = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda t & \lambda\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x a + \lambda y d & \lambda x b + \lambda y e & \lambda x c + \lambda y f \\ \ldots \end{pmatrix}$

$\lambda f(A) = \lambda A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda t & \lambda\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ prop 2.

(7.4). $f: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ amb $f(1) = 1+x$, $f(x) = 3-x^2$, $f(x^2) = 4+2x-3x^2$

Quina és l'img de $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$? Calc $f(2-2x+3x^2)$.

$f(a_0) = 1 + a_0$

$f(a_1) = 3 - (a_1)^2$

$f(a_2) = 4 + 2a_2 - 3(a_2)^2$

$(1+a_0) + (3-a_1^2)x + (4+2a_2-3a_2^2)x^2$

$= \cancel{(8 + a_0 - a_1^2 + 2a_2 - 3a_2^2)}$

$f(2-2x+3x^2) = f(2) + f(-2x) + f(3x^2) = (2)f(1) + (-2)f(x) + (3)f(x^2) =$

$= 2(1+x) + (-2)(3-x^2) + (3)(4+2x-3x^2) = 2+2x-6+2x^2+12+6x-9x^2 =$

$= (2-6+12) + (2x+6x) + (2x^2-9x^2) = \boxed{8+8x-7x^2 = f(2-2x+3x^2)}$

$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = f(a_0) + f(a_1 x) + f(a_2 x^2) = a_0 f(1) + a_1 f(x) + a_2 f(x^2) =$

$a_0(1+x) + a_1(3-x^2) + a_2(4+2x-3x^2) = a_0 + a_0 x + 3a_1 - a_1 x^2 + 4a_2 + 2a_2 x - 3a_2 x^2 =$

$= \boxed{(a_0 + 4a_2 + 3a_1) + (a_0 + 2a_2) + (-a_1 - 3a_2)x^2 = f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)}$