Conjunts

Conjunts

Objecte que é un "contenidor" i té elements (Elements del conjunt). NO estàn ordenats. Podem saber si està o no està. NO hi ha repeticions.

$x \in A$ x pertany a A $x \notin A$ x no pertany a A

↳ x é qualsevol cosa/objecte   ↳ A és un conjunt.

Descripció Conjunt

Extensió: Llista dels seus elements i no importa ordre $A = \{1, 2, 3\}$

Comprensió: Donem Propietat que caracteritza els seus elements $A = \{x \mid P(x)\}$ → Només els elements que compleixen P

"A és el conjunts dels x que compleixen $P(x)$"

• $A = \{x \mid x \text{ és senar}, 0 \leq x \leq 10\}$ 0, 1, 3, 5, 7, 9   • $\{x \in B \mid P(x)\} = \{x \mid x \in B, P(x)\}$

$\boxed{A = \{x \mid P(x)\} \text{ llavors, per tot } x : x \in A \Leftrightarrow P(x)}$

$\boxed{\text{Si } A = \{x \in B \mid P(x)\} \text{ llavors, per tot } x \in B \quad x \in A \Leftrightarrow P(x)}$

Igualtat entre Conjunts

Conjunts seràn iguals si i només si tenen exacte els mateixos elements.

$\boxed{A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$

El conjunt buit

No té elements i s'escriu $\emptyset$ $\boxed{\emptyset = \{\} = \{x \mid x \neq x\}}$

Inclusió entre conjunts

$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)}$ A és una "part" de B. (Pot ser igual)

$\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A}$

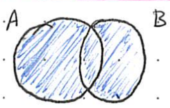
Propietats

$\boxed{\emptyset \subseteq A}$ $\boxed{A \subseteq A}$ $\boxed{A \subseteq B \text{ i } B \subseteq C \text{ implica } A \subseteq C}$

Operacions amb Conjunts

Unió

$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$



$\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B}$

Són tots

Aquestes té propietats de la lògica preposicional:

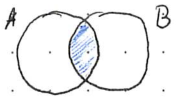
$A \cup A = A$ $A \cup \emptyset = A$ $A \cup B = B \cup A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C, B \subseteq C$

Intersecció

$\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ i } x \in B}$ $\quad A \cap A = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap B = B \cap A$



$\boxed{A \cap B = \emptyset}$

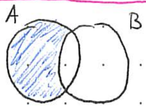
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ i } x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ i } x \in B \text{ i } x \in C$
$\Leftrightarrow (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ i } x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ i } x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

$A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B \qquad A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \qquad C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \text{ i } C \subseteq B$

Diferència

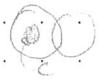
$\boxed{x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ i } x \notin B}$ $\quad A - A = \emptyset \quad A - \emptyset = A \quad (A-B) \cap B = \emptyset$



"Exclusiu només de A"

$\emptyset - A = \emptyset \quad A - B \subseteq A \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

$C \subseteq A - B \Leftrightarrow C \subseteq A,\ C \cap B = \emptyset$



Altres Propietats

$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

Distributiva de via

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \underset{\text{def } \cap}{\Leftrightarrow} x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \underset{\text{Def. Unió}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$

$A \cup B = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)$

$A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

Volem veure

$A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$; $x \in A - (B \cup C) \underset{\text{Def dif.}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \underset{\text{def de } \neg}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C)$

$\underset{\text{Def d'unió}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \underset{\text{De Morgan}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C)) \underset{\text{Associativa } \neg}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \Leftrightarrow (A-B) \cap (A-C)$

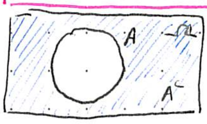
Repetir $\varphi \wedge \varphi = \varphi$

Complementari

És com la negació però s'ha de definir aquí què és no ser

$\boxed{A^c = \Omega - A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}}$ $\quad (A^c)^c = A \quad \emptyset^c = \Omega,\ \Omega^c = \emptyset$

$A \cap A^c = \emptyset,\ A \cup A^c = \Omega$



$x \in A^c \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge x \notin A$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$B = A^c \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = \Omega$

$A - B = A \cap B^c$

$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A^c \cup B = \Omega$

Parts d'un Conjunt

"conjunt format per tots els subconjunts de A"

A conjunt $P(A)=\{X \mid X \subseteq A\}$

$\boxed{X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A}$

$A=\{1,2\}$ SENSE parentesi

$P(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$P(\emptyset)=\{\emptyset\}$

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

No té elements — Té un element

$P(\{a,b,c,d\})=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \dots, \{a\,b\,c\,d\}\}$

$P(\{\emptyset,\{1\}\})=\{\emptyset, \{\emptyset,\{1\}\}, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}\}$

$\boxed{|P(A)|=2^{|A|}}$ $A \in P(A)$ $\emptyset \in P(A)$ $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

Exemple: $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

$x \in P(A)\cap P(B) \overset{\text{def}\cap}{\Leftrightarrow} x \in P(A) \wedge x \in P(B) \overset{\text{def}P}{\Leftrightarrow} x \subseteq A \wedge x \subseteq B \Leftrightarrow x \subseteq A\cap B \overset{\text{def}P}{\Leftrightarrow} x \in P(A\cap B)$

Demo. per Inducció $P(A)=2^{|A|}$ per $|A|=n$

- Cas Base $n=0$; $A=\emptyset$, $|P(A)|=1=2^0$ ☑ Compleix
- Pas Inductiu: Suposem cert que funciona per $n-1$ t.q. $|A|=n-1$ i $|P(A)|=2^{n-1}$

  Volem demostrar per n t.q $|A|=n$ i $|P(A)|=2^n$.

  Hi ha 2 tipus de Subconjunts de A: $X\subseteq A$ t.q. $b\notin X \rightarrow X \subseteq A-\{b\}$

$\therefore |A-\{b\}|=n-1 \Rightarrow |P(A-\{b\})|=2^{n-1}$ $Y\subseteq A$ t.q. $b \subseteq Y \rightarrow Y\subseteq A$ t.q $Y=Z\cup\{b\}$ on $Z\subseteq A-\{b\}$

De tipus ▪ hi ha 2^{n-1} possibles X's

De tipus ▪ hi ha 2^{n-1} possibles Y's

En total hi ha $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ subconjunts de A. $2^n\cdot\frac{1}{2}+2^n\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2^n+2^n)=\frac{1}{2}(2\cdot 2^n)$

⚠ OBS: $P(A\cup B) \neq P(A)\cup P(B)$ en general fals.

En $P(A\cup B)$ hi haurà el $\emptyset$ i el total ($\emptyset$ no interessa). Això vol dir que $A\cup B \in P(A\cup B)$

Si volem demostrar-ho $A\cup B \in P(A)\cup P(B)$?? Però això no és possible pq. si $P(A)$ hi ha x subconjunts i $P(B)$ y subconjunts, $A\cup B$ no pot estar en algun d'aquests. Són indeps.

Producte Cartesià

En general, si A i B són subconjunts (Poden ser $\neq$ o $=$) a (a,b) on $a\in A$ i $b \in B$ li diem parell ordenat.

⚠ OBS: $(a,b)\neq(b,a)$ (en general) ORDRE IMPORTA $\{a,b\}$ ← Pot no estar ordenat

Si agafem tots els parells ordenats, tenim Producte Cartesià. Estem comparant un element amb Prod. Cartesià

$\boxed{A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}}$ (Si $A = B$, $A \times A$ ho escrivim A^2) $34 \notin \mathbb{Z} \times A$

$\mathcal{P}(\overbrace{\{a,b,c\}}^{3} \times \overbrace{\{1,2\}}^{2}) = \{\emptyset, \{(a,1)\}, \{(a,2)\}, \ldots, \text{total}\}$ ← 2^6 elements $3 \times 2 = 6$

$A \times \emptyset = \emptyset \quad \emptyset \times A = \emptyset$ Pq. no hi ha cap parella que estigui A i $\emptyset$

? Quan $A \times B = B \times A$?

- Si $A = B$ - Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$

△ Si $A \neq B$ i no buits $\Rightarrow \overbrace{A - B \neq \emptyset}^{\otimes} \vee B - A \neq \emptyset$

$\otimes$ $a \in A - B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$
$b \in B$
$(a,b) \in A \times B$
però $(a,b) \notin A \times B$ pq. $a \notin B$

$A \times B \neq B \times A$

$\boxed{|A \times B| = |A| \cdot |B|}$ Quantitat d'elements # Si conjunt $|A| = 3$ i $|B| = 2$ $|A \times B| = 6$ elements

$\boxed{A \times B \times C = \{\underbrace{(a,b,c)}_{\text{Terna}} \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}}$

$\in$ Pertany
$\subset$ Subconjunt

①. $X = \{1,2,3,4\}$; $Y = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$; $Z = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$

o $\{\{1\}\} \in X$ Fals $\{\{1,2\}\} \in Y$ Fals $\{\{1\}\} \in Z$ Fals (Però $\{\{1\}\} \subseteq Z$ Cert) $\{\{1\}\} \subseteq X$ Fals $\{\{1,2\}\} \subseteq Y$ Cert

⑯. $A = \emptyset$. $\forall x, x \notin A$

⑰. $\neg(A \subseteq B)$ $\exists x : x \in A \wedge x \notin B$

⑱. $A - A = \emptyset$ $x \in A - A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \rightarrow$ Absurd $\Leftrightarrow A - A = \emptyset$

Algo absurd i algo = Algo absurd

$\emptyset - A = \emptyset$ $x \in \emptyset - A \Leftrightarrow x \in \emptyset \wedge x \notin A \Leftrightarrow \underbrace{x \neq x}_{0} \wedge x \notin A \Leftrightarrow x \neq x \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

$C \subseteq A - B \Leftrightarrow x \in A, C \cap B = \emptyset$ ← "Suposició"

$\psi \to p \wedge q \equiv (\psi \to p) \wedge (\psi \to q)$

$\Rightarrow$] $x \in C \underset{C \subseteq A-B}{\Rightarrow} x \in A - B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B$ | ① Hem vist que si $x \in C$, llavors $x \in A$. Això vol dir que C és subconjunt de A. $\rightarrow C \subseteq A$

② Si $x \in C \Rightarrow x \notin B$ això vol dir que $B \cap C = \emptyset$ ← Disjunt.

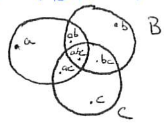
$\Leftarrow$] Si $C \subseteq A$ i $C \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x \in C, x \in A \wedge x \notin B \rightarrow C \subseteq A - B$

㉒. Dem. $(A-B) \cap (A-C) \subseteq A - (B \cap C)$. Val la igualtat?

Per la propietat ③ ja demostrada. diu: $(A-B) \cap (A-C) = A - (B \cup C)$.

Com que $B \cap C \subseteq B \cup C$ aleshores $(A-B) \cap (A-C) \subseteq A - (B \cap C)$ já que $A - (B \cup C) \subseteq A - (B \cap C)$ ⊛

⊛ $x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$.



No, no val la igualtat.

Per exemple $A = \{a, ab, ac, abc\}$ $B = \{a, ba, bc, abc\}$ $C = \{c, ca, cb, abc\}$

Comprovem que no val la igualtat.

㉓. Dem. que si $A \cup C = B \cup C$ llavors $A - C = B - C$. Val el recíproc?

$A \cup C = B \cup C \Rightarrow A - C = B - C$ |

Cert; Dem.:

$x \in A - C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge x \notin C \Leftrightarrow (x \in B \vee x \in C) \wedge x \notin C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in B - C$ Queda Dem. cert :).

$A - C = B - C \Rightarrow A \cup C = B \cup C$ | # Recíproc

Cert; Dem.:

$x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in A \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in B \wedge x \notin C) \vee x \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in B \vee x \in C) \wedge (x \notin C \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in B \vee x \in C \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in B \vee x \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in B \cup C$

⑤. Demo. $A \cup \emptyset = A$

Com que és una igualtat hem de veure que es compleixen les dues parts, això vol dir que $A \cup \emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A \cup \emptyset$.

• $A \cup \emptyset \subseteq A$; $x \in A \cup \emptyset$ [Def. un elmt]
$x \in A \vee x \in \emptyset$ [Def de $\cup$]
$x \in A \vee$ Fals [$V \vee \neg F = V$]
$\underline{x \in A}$ [Demostrat]

• $A \subseteq A \cup \emptyset$; $x \in A$ [$V \vee F = V$]
$x \in A \vee$ Fals [$V \vee F = V$]
$x \in A \vee x \in \emptyset$ [Sub. de Fals]
$\underline{x \in A \cup \emptyset}$ [Def d'unió]

Podem afirmar que la igualtat és certa.

⑧. Demo. $C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B$

$\Rightarrow$] $C \subseteq A \cap B$;
$x \in C$ [Agafar x arbitrari]
$x \in A \cap B$ [$C \subseteq A \cap B$] #Aplicar Hipòtesi
$x \in A \wedge x \in B$ [Def $\cap$]
Demo que si x està en C tmb ho estarà en A i en B $P \wedge q \to P$ Tautologia
C⊆B per simetria.

$\Leftarrow$] $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$;
$x \in C \wedge x \in C$ [Agafar x arbitrari]
$x \in A \wedge x \in B$ [Aplicar hipòtesi]
$x \in A \cap B$ [Def $\cap$]
Demo que si x està en C tmb. ho estarà en $A \cap B$.

D'aquesta manera hem demostrat les dues bandes igualtat fent cert l'enunciat.

⑮. Expressa amb quantificadors i '∈' que A i B no són disjunts.

$\exists x : x \in A \wedge x \in B$ | Això és així pq. ser disjunts sig. $A \cap B = \emptyset$. Per fer el contrari diem que sí que hi haurà un x comú.

⑯. A i B són disjunts.

$\forall x : x \notin A \wedge x \notin B$ | Es MOLT important fer servir $\forall$ en aquest cas pq si volem que siguin disjunts no pot haver CAP.

㉙. $B \subseteq C$ llavors $A - C \subseteq A - B$

$B \subseteq C$ [Hipòtesi Inicial]
$\forall x (x \in B \to x \in C)$
$\forall x (x \notin B \vee x \in C)$
$\forall x (x \in C \vee x \notin B)$
$\forall x (x \notin C \to x \notin B)$
[Conseqüència directa. Si no pertany a C, llavors tampoc a B]

$x \in A - C$ [x arbitraria]
$x \in A \wedge x \notin C$ [Def de dif]
$x \in A \wedge x \notin B$ [Aplicació Hipo]
$x \in A - B$ [Def. diferència]

Així hem demostrat que $A - C \subseteq A - B$.

✓

∇ Fer diagrama inicial
○ i començant [Veritat], Demo:
[Fals], Demo:

(26). $A-(A-B) = A \cap B$.

$\underbrace{A-(A-B) \subseteq A \cap B}_{1}$; $\underbrace{A \cap B \subseteq A-(A-B)}_{2}$

(1) $A-(A-B) \subseteq A \cap B$

$x \in A-(A-B)$ [x arbitrari]

$x \in A \wedge x \notin (A-B)$ [Def −]

$x \in A \wedge \neg(x \in (A-B))$ [Reescriure]

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B)$ [Def −]

$x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)$ [De Morgan]

$(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ [Prop. dist]

$(x \in A-A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ [Def −]

$(x \in \emptyset) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ [Prop $A-A=\emptyset$]

$x \in A \wedge x \in B$ [Contradicció donat que x no pot pertànyer a $\emptyset$]

$x \in A \cap B$ [Def ∩] ✓

(2). $A \cap B \subseteq A-(A-B)$

$x \in A \cap B$ [x arbitrari]

$x \in A \wedge x \in B$ [Def ∩]

$(x \in A-A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ [False ∨ True = True]

$(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ [Def −]

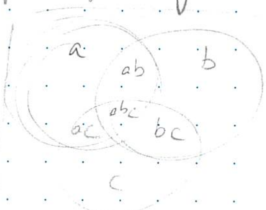
$x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)$ [Prop. distributiva]

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B)$ [De Morgan]

$x \in A \wedge \neg(x \in A-B)$ [Def −]

$x \in A \wedge x \notin A-B$ [Aplicar negació]

$x \in A-(A-B)$ [Def −] ✓



$A=\{a, ab, ac, abc\}$

$B=\{b, ab, bc, abc\}$

$C=\{c, ac, bc, abc\}$

$A-B=\{a, ac\}$

$A-(A-B)=\{ab, abc\}$

$A \cap B=\{ab, abc\}$

~~No són iguals així que no val la igualtat.~~ Sí són

Sí són iguals.

#Havia fet malament dir si eren iguals.

FM-3-E-2

$(A-B) \cup B = A \cup B$

$\underbrace{(A-B) \cup B \subseteq A \cup B}_{①}$; $\underbrace{A \cup B \subseteq (A-B) \cup B}_{②}$

① $(A-B) \cup B$

$x \in (A-B) \cup B$ [x arbitrari]

$x \in (A-B) \vee x \in B$ [Def $\cup$]

$(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B$ [Def $-$]

$\neg(x \notin A \vee x \in B) \vee x \in B$ [De Moorgan]

$\neg((x \notin A \vee x \in B) \wedge x \notin B)$ [De Moorgan]

$\neg((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B))$ [Prop. Dist]

$\neg((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (Fals))$ [$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv Fals$]

$\neg(x \notin A \wedge x \notin B)$ [$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \varphi$]

$x \in A \vee x \in B$ [De Moorgan]

$x \in A \cup B$ [Def $\cup$]

② $A \cup B \subseteq (A-B) \cup B$

$x \in A \cup B$ [x arbitrari]

$x \in A \vee x \in B$ [Def $\cup$]

$\neg(x \notin A \wedge x \notin B)$ [De Moorgan]

$\neg((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (Fals))$ [$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \varphi$]

$\neg((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B))$ [Reescriure Fals]

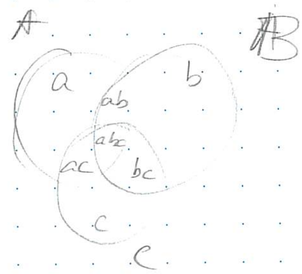
$\neg((x \notin A \vee x \in B) \wedge x \notin B)$ [Prop Commutative]

$\neg(x \notin A \vee x \in B) \vee x \in B$ [De Moorgan]

$(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B$ [De Moorgan]

$(x \in A-B) \vee x \in B$ [Def $-$]

$x \in A-B \cup B$ [Def $\cup$]



$A = \{a, ab, ac, abc\}$

$B = \{b, ab, bc, abc\}$

$C = \{c, ac, bc, abc\}$

$A-B = \{a, ac\}$

$(A-B) \cup B = \{b, ab, bc, abc, a, ac\}$

$A \cup B = \{b, ab, bc, abc, a, ac\}$

Els subconjunts són els mateixos així que es certa la igualtat.

(38). Dem IV

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Sigui $x \in \Omega$ qualsevol : $x \in (A \cup B)^c$ [x qualsevol]

$x \notin (A \cup B)$ [Def. Comple]

$\neg(x \in (A \cup B))$ [Reescrim]

$\neg(x \in A \vee x \in B)$ [Def $\cup$]

$x \notin A \wedge x \notin B$ [De Moorgan]

$x \in A^c \wedge x \in B^c$ [Def Complentari]

$x \in A^c \cap B^c$ [Def $\cap$]

(58). Dem: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$x \in A \times (B \cap C)$ [Punt Partida]

$x = (a, y)$ amb $a \in A$ i $y \in B \cap C$ [Def Prod. Cart]

$x = (a, y)$ amb $a \in A$ i $y \in B \wedge y \in C$ [Def $\cap$]

$x = (a, y)$ amb $a \in A$ i $a \in A$ i $y \in B$ i $y \in C$ [$\varphi \wedge \varphi = \varphi$]

$x = (a, y)$ amb $a \in A$ i $y \in B$ i $a \in A$ i $y \in C$ [Ordenar pq tot son 'i']

$x \in (A \times B) \cap (A \times B)$ [Punt final]

Com que tot son $\Leftrightarrow$ no fa falta fer la tornada del subconjunt.

(40). Dem alguna:

$A^c \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A$ # Aquí s'havia de fer $1 \Rightarrow 2$; $2 \Rightarrow 3$; $3 \Rightarrow 4$; $4 \Rightarrow 1$

$\Rightarrow$| $A^c \subseteq B$ Hipòtesi que agafem certa [$x \in A^c \to x \in B$] NO. $1 \Leftrightarrow 2$

$x \in B^c \underset{def}{\Leftrightarrow} x \notin B \underset{per\ Hipòtesi}{\Rightarrow} x \notin A^c \underset{def}{\Leftrightarrow} x \in A$. Llavors $B^c \subseteq A$:) # però bueno.

$\Leftarrow$| $B^c \subseteq A$ Hipòtsi que agafem certa [$x \in B^c \to x \in A$]

$x \in A^c \underset{def}{\Leftrightarrow} x \notin A \underset{per\ Hipo.}{\Rightarrow} x \notin B^c \underset{def}{\Leftrightarrow} x \in B$. Llavors $A^c \subseteq B$. :)

(63). $A \times B = C \times D$, $B \neq 0$, $D \neq 0 \Rightarrow A = C$

Tenim qualsevol tupla pertany a $A \times B$, t. q. $\forall tup \in A \times B$.
Per la Hipòtesi sabem que totes tup. tmb. pertanyen a $C \times D$ t.q $\forall tup \in C \times D$.
Aquesta tup es pot reescriure com (x, y). Per def. de x als passos anteriors s'escriuen:
$\forall x \in A \wedge \forall y \in B = \forall x \in C \wedge \forall y \in D$.
Podem veure que $\forall x \in A = \forall x \in C$ això vol dir que $A = C$ pq. tenen mateixos elemts.
No sé si està ben demo.

(49). $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow \underbrace{A \subseteq B}_{q} \text{ o } \underbrace{B \subseteq A}_{r}$ # Per no treballar amb 'v' 'o'

$\Rightarrow$| $\underbrace{\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)}_{p}$ ← Suposem ~~Cert~~ no fiquem cert ; $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$ ← Volem demo: Si $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \wedge A \not\subseteq B \Rightarrow B \subseteq A$

$A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B)$ [Aquest element seria el total]

$A \cup B \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ [Suposem cert]

$A \cup B \in \mathcal{P}(A) \vee A \cup B \in \mathcal{P}(B)$ [Def $\cup$]

$A \cup B \subseteq A \vee A \cup B \subseteq B$ [Def $\mathcal{P}$]

$(A \subseteq A \wedge B \subseteq A) \vee (A \subseteq B \wedge B \subseteq B)$ [*]

$B \subseteq A \vee A \subseteq B$ [$p \wedge$ True $= p$] ← El que voliem demo.

$\Leftarrow$| $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ ← Suposem ~~Cert~~ ; $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ ← Volem Demo.

$\subseteq$| $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

$x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ [x arbitraria]

$x \in \mathcal{P}(A) \vee x \in \mathcal{P}(B)$ [Def $\cup$]

$x \subseteq A \vee x \subseteq B$ [Def $\mathcal{P}$]

Case 1: $x \subseteq A$

$x \subseteq A$ [Put Partida]

$x \subseteq A \vee x \subseteq B$ [Hip]

$x \subseteq A \cup B$ [Def $\cup$]

Case 2: $x \subseteq B$

$x \subseteq B$ [Put Partida]

$x \subseteq B \vee x \subseteq A$ [Hip]

$x \subseteq B \cup A$

$x \subseteq A \cup B$ [Demostrat per cassos]

$x \in \mathcal{P}(A \cup B)$ ← On voliem Arribar

$\supseteq$| $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

$x \in \mathcal{P}(A \cup B)$ [x arbitrària]

$x \subseteq A \cup B$ [Def $\mathcal{P}$]

$x \subseteq A \vee x \subseteq B$ [Def $\cup$]

$x \in \mathcal{P}(A) \vee x \in \mathcal{P}(B)$ [Def $\mathcal{P}$]

$x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ [Def $\cup$]

Queda demo :)

✓

(61). Demo. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$\subseteq$| $A \times (B \cup C)$ ← Sup. Cert

$x \in A \times (B \cup C)$ [x arbitrarie]

$(y, z) \in A \times (B \cup C)$ [Reescriure]

$y \in A \wedge z \in B \cup C$ [Def $\times$]

$y \in A \wedge z \in B \vee z \in C$ [Def $\cup$]

$y \in A \wedge (z \in B \vee z \in C)$ [Reescriure]

$(y \in A \wedge z \in B) \vee (y \in A \wedge z \in C)$ [Prop. Dist]

$(y, z) \in A \times B \vee (y, z) \in A \times C$ [Def $\times$]

$(y, z) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ [Def $\cup$]

On voliem arribar.

$\supseteq$| $(A \times B) \cup (A \times C)$ ← Sup. Cert

$(y, z) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ [y, z arbitrari]

$(y, z) \in A \times B \vee (y, z) \in A \times C$ [Def $\cup$]

$(y \in A \wedge z \in B) \vee (y \in A \wedge z \in C)$ [Def $\times$]

$(y \in A) \wedge (z \in B \vee z \in C)$ [Factor comú]

$y \in A \wedge z \in B \cup C$ [Def $\cup$]

$y \in A \times (B \cup C)$ [Def $\times$]

On voliem arribar

✓

$\neq$ No sé si fa falta fer que estl powerset és el mateix.

35. Raonem si cert o fals i demo:

a) $(A \cup B) - B = A$ Fals.

Contra exemple: $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ $\left.\right\}$ $A \cup B = \{1,2,3\} \rightarrow A \cup B - B = \{1,2,3\} - \{2,3\} = \{1\} \neq A = \{1,2\}$

b) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ Cert.

Demostració:

$$x \in (A \cup B) - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow \underbrace{(x \in A}_{\alpha} \vee \underbrace{x \in B)}_{\beta} \wedge \underbrace{(x \notin A \wedge x \notin B)}_{\varphi} \Leftrightarrow$$

$\alpha \vee \beta \wedge \varphi = (\alpha \wedge \varphi) \wedge (\beta \wedge \varphi)$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg((x \in A \vee x \in B) \vee x \notin A) \vee ((x \in A \vee x \in B) \vee x \notin B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \notin A) \vee (x \in B \vee x \notin A)) \vee \neg((x \in A \vee x \notin B) \vee (x \in B \vee x \notin B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(x \in B \vee x \notin A) \vee \neg(x \in A \vee x \notin B) \Leftrightarrow (x \notin B \wedge x \in A) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A)$$ ☑.

Fet en pissarra i molt pel lapicer

c) Si $A \cup B = \emptyset \rightarrow A = B = \emptyset$. Cert.

Demo. amb contrarecíproc: $A \neq B \neq \emptyset \rightarrow A \cup B \neq \emptyset$

~~$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \neq \emptyset$.~~
~~Partim d'x qualsevol de $A \cup B$. Per hipòtesi A i B no són buits llavors l'unió tampoc pot ser buida. És per això que arribem a que $A \cup B \neq \emptyset$ demostrant com a cert l'enunciat que diu $A \cup B = \emptyset \rightarrow A = B = \emptyset$.~~ :)

Mateix error que en l'exàmen. S'ha de fer per casos. $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$ $\rightarrow A \cup B \neq 0$.

Cas $A \neq \emptyset$: Com que $A \neq 0$ sig. que $\exists x \in A$ llavors la unió amb un altre conj. l'independent de quin sigui aquest, mai podrà ser buit.

Cas $B \neq \emptyset$: Mateix argument que cas 1.

Donat que cumpleixen els dos casos i fent contrarecíproc, queda demo cert l'enunciat.

CONJUNTS

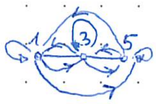
Relacions d'Equivalència
Relacions Binaries

Saber si dos elements tenen relació.

Una relació en el conjunt A és un subconjunt R de $A \times A$. ($R \subseteq A \times A$) → Quines parelles estàn relacionades.

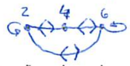
En comptes de $\underbrace{(a,b) \in R}_{\text{a està relacionat amb b}}$, escriurem aRb.

Podem tindre prop. de simetria o no.



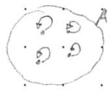
Ex: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ R: Tenir mateixa paritat. $1R1, 1R3, 1R5, 3R1, \dots$

Tenim conjunt A xRy → "x relacionat amb y" $2R2, 2R4, 2R6, 4R2, \dots$

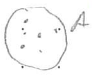


∴ 3 relacions que sempre tenim:

- Identitat $R = I_A$: $x I_A y \iff x = y$



- Nul·la : $\forall x,y : x \not R y$



- Total: $\forall x, y : xRy$

Totes les possibilitats (ells mateixos tmb)

∴ Propietats que pot tenir (o no) una relació:

- Reflexiva: $\forall x \quad xRx$
- Simètrica : $\forall x,y : xRy \Rightarrow yRx$ ← # Totes les relacions anterior són simètriques. # Alguns comparadors no poden $x < y \not\Rightarrow y < x$.
- Antisimètrica : $\forall x,y : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ ← # $\leq$ si que és antisimètric # La "total" no ho és
- Transitiva: $\forall x,y,z \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRy$ # $\leq$ ho compleix

Una relació d'equivalència en un conjunt A és una relació reflexiva, simètrica i transitiva. # A = {Autobussos que circulen ARA per BCN} xRy : x i y fan mateixa línia.

Obs: SEMPRE cal comprovar que sigui
- ☐ Simètrica
- ☐ Reflexiva
- ☐ Transitiva

Si no són totes, no serà Req.

Un element pot NO estar relacionat amb ell mateix xd.

Classes d'Equivalència, quocients i particions

∇ Són disjuntes. Unió és tot A

Tenim una rel. d'equiv. R en un conjunt A.

Classe d'equivalència de $a \in A$ és $\boxed{\{x \in A \mid xRa\} = \bar{a}}$ (Conjunt dels que compleixen) $\boxed{x \in \bar{a} \iff xRa}$

Conjunt quocient és conjunt de totes les classes (d'equiv) $\boxed{A/R = \{x \mid x = \bar{a} \text{ per a un cert } a \in A\} = \{\bar{a} \mid a \in A\}}$

Obs: $\bar{a} = \bar{b} \iff aRb$ $\quad a \in \bar{a}$ (per la reflex.) $\quad \bar{a} \cap \bar{b}$: o $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ o $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a} = \bar{b}$

Fi Fa Demo si prox. me Sops pq.

Es diu que formen una partició de A $\mathbb{Z} = \{parells\} \cup \{senars\}$

<u>Ex. (Semblant al 91)</u>

$A = \mathbb{Z}$ $n R m \Leftrightarrow n - m$ és múltiple de 4

Equivalent? - Reflexiva: $n R n \Leftrightarrow \underbrace{n-n}_{0}$ i 0 es múltiple de 4.

- Simètrica: $n R m \overset{?}{\Rightarrow} m R n$

$\Updownarrow$ $n-m$ multiple $= -\underbrace{(n-m)}_{m-n}$ tmb múltiple de 4.

- Transitiva: $\left.\begin{array}{l} n-m \text{ multi de } 4 \\ m-k \text{ multi de } 4 \end{array}\right\} \Rightarrow n-k$ múltiple de 4

<u>Si</u>: pq. $n-k = \underbrace{(n-m)}_{4i} + \underbrace{(m-k)}_{4j} = 4(j+i) =$ multiple.

$\overline{4} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 4 R m\}$
$= \{m \in \mathbb{Z} \mid 4-m$ múltiple de $4\}$
$= \{20, 24, 4, 0, -4, \dots\} =$ múltiples de 4.

$\overline{6} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 6-m$ múltiple de $4\}$
$= \{6, 2, 0, -6, \dots\}$ $6-m = 4k$, $m = 6-4k$, $m = \underbrace{4(1-k)}_{\text{múltiple}} + 2$
= Donen residu 2 en divisió per 4.

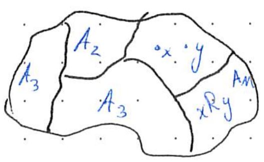
$\overline{1} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 1-m$ múltiple de $4\}$
$= \{1, 17, 5, -3, \dots\}$ $4 \cdot (-1) + 1$
= Donen residu 1 quan dividim entre 4.

$\overline{3} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 3-m$ múltiple de $4\}$
$= \{1, 3, 7, 5, \dots\}$
= Donen residu 3 quan dividim entre 4.

$\mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\} = \{\overline{4}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{3}\}$ (Classes que compleixen ser múltiple de 4.

Ara escollim un <u>representant</u> per cada classe (no importa quin).

<u>Particions</u>



Partició P de A és un <u>conjunt</u> <u>format</u> per <u>subconj</u> <u>no buits</u> de A, tots <u>disjunts</u> tal que la <u>unió</u> és <u>A</u>.

(94). B, C conjunts i $B \subseteq C$

Al conjunt $A = \mathcal{P}(C)$ definim relació: $x, y \in \mathcal{P}(C)$: $xRy \Leftrightarrow x - B = y - B$

Demo que és d'equivalència. Calc. totes classes de R i A/R $C = \{1,2,3,4\}$ $B = \{1,2\}$

- Reflexiva: xRx?

$xRx \Leftrightarrow x - B = x - B \Leftrightarrow x = x$. Cert.

- Simètrica: $xRy \overset{?}{\Rightarrow} yRx$

$xRy \Leftrightarrow x - B = y - B \Leftrightarrow y - B = x - B \Leftrightarrow yRx$ cert per la def de R del enunciat.

- Transitiva: $xRy, yRz \overset{?}{\Rightarrow} xRz$

$\left.\begin{array}{l} x - B = y - B \\ y - B = z - B \end{array}\right\} x - B = z - B \Leftrightarrow xRz$ cert

---

• $B = \{1,2\}$ $C = \{1,2,3,4\}$ $A = \mathcal{P}(C) \leftarrow 2^{|C|} = 2^4 = 16$ elemts

$\overline{\emptyset} = \{x \in \mathcal{P}(C) \mid x - B = \emptyset - B\}$
$= \{x \subseteq C \mid x - B = \emptyset\}$
$= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\overline{\{3\}} = \{x \in \mathcal{P}(C) \mid x - B = \{3\} - B\}$
$= \{x \subseteq C \mid x - B = \{3\}\}$
$= \{\{3\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,1,2\}\}$

Pq si $\{3\} - \{1,2\} = \{3\}$ pq $\{3\}$ no té ni 1 ni 2.

Agafem tots els subconjunts de C que si reste $\{1,2\} = \{3\}$

(83). Relació R a A és diu circular si $\forall x, y, z \in A: [xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx]$.

Demo que una relació binaria és d'equivalència $\Leftrightarrow$ és reflexiva i circular.

~~La propietat reflexiva ja esta suposada que complex donat que totes dues la tenen.~~

~~# La circular sembla fer un conjunt de simetria i transitiva.~~

~~Equivalència $\Rightarrow$ Circular |~~

~~Suposem que $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ [Prop. Tras].~~

~~Suposem que $xRy \Rightarrow yRx$ [Prop Simitria].~~

~~Això ho podem reformular que $zRy \wedge yRx \Rightarrow zRx$~~

~~Per la prop de simetria,~~

(83). Una Relació R a A és diu circular si $\forall x,y,z: [xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx]$

Demo que relació binaria d'equivalència $\Leftrightarrow$ reflexiva i circular. #GPT

Preliminars: - Transitiva: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
- Simètrica: $xRy \Rightarrow yRx$
- Reflexiva: xRx

Conjunt d'aquestes Equivalència.

Equivalència $\Rightarrow$ Simètrica i Circular |

R és d'equivalència (Per def. és Trans, Sim, Reflex.)

- circularitat:

$\forall x,y,z: xRy \wedge yRz$ [Punt partida]

xRz [Transitiva]

zRx [Simètrica] ← Aquí és on acaba circular així que primer implica ✓.

Reflexiva i Circular $\Rightarrow$ Equivalència |

Suposem que R compleix reflexiva i circular.

- Reflexiva: Per Hipòtesi.

- Transitiva: $\forall x,y,z: xRy \wedge yRz$ [Punt partida]

zRx [Circularitat] * Ara ens falta Demo que és simètrica.

xRz [Simètrica] ↓ Demo.

- Simètrica: $\forall x,y \in xRy$ [Punt partida]

yRy [Reflexivitat així que cert]

Tenim $xRy \wedge yRy$, per circularitat yRx ← ser simètric. Ara ja podem acabar Trans.

(106). $x,y,z \in A$ i R relació a A. Fent ús de def. rel. equiv. i classe Demo $x \in \bar{z}, y \in \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$

$x \in \bar{z} \wedge y \in \bar{z} \Rightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$ |

$x \in \bar{z} \wedge y \in \bar{z} \Leftrightarrow xRz \wedge yRz \Leftrightarrow xRz \wedge zRy \Leftrightarrow xRy$.

$a \in \bar{x} \Leftrightarrow aRx$.

$aRx \wedge xRy \Leftrightarrow aRy \Leftrightarrow a \in \bar{y}$ ← Es on volíem arribar.

$x \in \bar{z} \wedge y \in \bar{z} \Rightarrow \bar{y} \subseteq \bar{x}$ |

$x \in \bar{z} \wedge y \in \bar{z} \Leftrightarrow xRz \wedge yRz \Leftrightarrow xRy$.

$a \in \bar{y} \Leftrightarrow aRy$.

$xRy \wedge aRy \Leftrightarrow xRa \Leftrightarrow aRx \Leftrightarrow a \in \bar{x}$ ← Que és on volíem arribar.

Queda demo cert ☺

(97). Sigui $A \subseteq \mathbb{N}$ i S aplicació $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $S(n) = $ Suma dels digits de n.
Demo la relació $xRy \Leftrightarrow S(x) = S(y)$ és r. eq. a A.
Calc conjunt quocient $A = \{4, 44, 42, 22, 36, 8, 11, 35, 13, 15, 17, 18, 51, 33, 6\}$.

- Reflexive: $x \in A$ [x arbitrari]
  $S(x) = S(x)$ [La suma de digits és la mateixa que la suma dels digits d'un mateix].
  xRx [Per definició]. ← Demo. Refle.

$\# \bar{4} = \{x \in A \mid xR4\} =$
$= \{x \in A \mid S(x) = S(4)\} =$
$= \{x \in A \mid S(x) = 4\}$

- Simètrica: $x, y \in A$ xRy [Punt partida]
  $S(x) = S(y)$ [Relació]
  $S(y) = S(x)$ [Prop. de la igualtat]
  yRx ← Demo Simètrica.

$\# \bar{4} = \{4, 22, 13\} = \overline{22} = \overline{13}$

- Transitiva: $x, y \in A: xRy$ i $y, z \in A: yRz$ [Punt partida]
  $S(x) = S(y)$ i $S(y) = S(z)$ [Relació]
  $S(x) = S(y) = S(z)$ [Prop igualtat]
  xRz ← Demo Trans.

Conjunt Quocient

$A/R = \{\bar{4}, \bar{8}, \bar{6}, \overline{11}, \overline{36}\}$

NO pots ficar com a representant un nombre que no està en la classe.

$[4] = \{4, 22, 13\}$ $[8] = \{8, 44, 35, 17\}$ $[6] = \{6, 42, 15, 51, 33\}$ $[\cancel{2}] = \{11\}$ $[\cancel{9}]$ 36 $= \{36, 18\}$

(98). B, C Conjunts $B \subseteq C$. Al conjunt $A = \mathcal{P}(C)$ i $x, y \in \mathcal{P}(C): xRy \Leftrightarrow x \cup B = y \cup B$.
Demo relació eq. Calc Totes classes de R i A/R $C = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 2\}$

- Reflexiva: $x \in A$ [x arbitrari]
  $x \in \mathcal{P}(C)$ [Enunciat]
  $x \subseteq C$ [Def $\mathcal{P}$]
  $x \cup B = x \cup B$ ← Donat que és igualtat és compleix Reflexiva.

- Simètrica: $x, y \in A: xRy$ [x, y arbi]
  $x \cup B = y \cup B$ [Relació]
  $y \cup B = x \cup B$ [Prop =]
  yRx ← Demo. Simètrica.

- Transitiva: $x, y, z \in A: xRy$ i yRz [x, y, z arbi]
  $x \cup B = y \cup B$ i $y \cup B = z \cup B$ [Relació]
  $x \cup B = y \cup B = z \cup B$ [Reescriure]
  $x \cup B = z \cup B$ [Prop =]
  xRz ← Demo. Trans.

$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\},$
$\{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\# 2^4 = 16$ $\# x \circ B = y \circ B$.

$[\emptyset] = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$ → Subconj de $\mathcal{P}(C)$ que no contenen ni 1 ni 2.

$[\{1,2\}] = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ → Sub de $\mathcal{P}(C)$ que contenen 1 i 2.

$[\{1\}] = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,3,4\}\}$ → Tenen 1 i no 2

$[\{2\}] = \{\{2\}, \{2,3,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$ → Tenen 2 i no 1

$A/R = \{[1], [2], [1,2], [\emptyset]\}$

(99). $\mathbb{Z}$ $xRy \Leftrightarrow x^2+3y = y^2+3x$. Demo. eq. . Calc classes $[1], [2], [0]$.
Calc $[n]$ i $\mathbb{Z}/R$.

- Reflexiva: $xRx \Leftrightarrow x^2+3x = x^2+3x \Leftrightarrow x = x$ ☑

- Simètrica: $xRy \overset{?}{\Leftrightarrow} yRx$
$x^2+3y = y^2+3x \Leftrightarrow y^2+3x = x^2+3y \Leftrightarrow yRx$ ☑

- Transitiva: $xRy \wedge yRz \overset{?}{\Rightarrow} xRz$
$xRy: x^2+3y = y^2+3x$
$yRz: y^2+3z = z^2+3y$
$x^2+3y = z^2+3y$ ☑ [Fet la resta]

$1Ry: 1^2+3y = y^2+3\cdot 1 \Rightarrow y^2-3y = -2 \Rightarrow y^2-3y+2 = 0 \to y=2, y=1$

$2Ry: 2^2+3y = y^2+3\cdot 2 \Rightarrow 4+3y = y^2+6 \Rightarrow y^2-3y+2=0 \to y=2, y=1$

$0Ry: 0^2+3y = y^2+3\cdot 0 \Rightarrow y^2-3y \Rightarrow y(y-3) \to y=0, y=3$

$[0] = \{0,3\}$ $[1] = \{1,2\}$ $[2] = \{1,2\}$

$nRy: n^2+3y = y^2+3n \Rightarrow y^2-3y+(3n-n^2) = 0$

$\frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot(3n-n^2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12n+4n^2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{(2n-3)^2}}{2} = \frac{3 \pm (2n-3)}{2}$ → $\frac{3+2n-3}{2} = n$; $\frac{3+3-2n}{2} = 3-n$

~~$\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], [2], [n]\}$~~ $\bar{n} = \{n, 3-n\}$

!! No sabia fer això i no ho he vist en classe.

~~Aquí estem repetint classes donat que $\bar{1} = \bar{2} = \{1,2\}$.~~
~~$\mathbb{Z}/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{n}\}$~~

NOMÉS ficar classes úniques.

$\mathbb{Z}/R = \{\bar{n} \mid n \geq 2\}$

-2 -1 0 1 | 2 3 4 5

Com que són parelles agafem a partir del 2.

(100). "Tenir mateixa part entera" a $\mathbb{R}$. Demo. que és d'eq. Calc. classes 1'2, π, -1'2. Conjunt quocient.
$e(x)$ = part entera.

- Reflexiva: $x \in \mathbb{R}$ [x arbi.]
  $e(x) = e(x)$ [Prop =]
  $x R x$ ← Demo Reflexiva.

- Simètrica: $x, y \in \mathbb{R}$ [x, y arbi]
  $e(x) = e(y)$ [Relació]
  $e(y) = e(x)$ [Prop. Igualtat]
  $y R x$ ← Demo simètrica.

- Transitiva: $x, y, z \in \mathbb{R}$ [x, y, z arbi].
  $\left.\begin{array}{l} e(x) = e(y) \\ e(y) = e(z) \end{array}\right\}$ [Relació]
  $e(x) = e(y) = e(z)$ [Prop. igualtat]
  $x R z$ ← Demo transitiva.

$\lfloor -1'2 \rfloor = \{ \lim_{x \to 0} 1'x < a < \lim_{x \to -2} x \}$

$\lfloor -1'2 \rfloor = \{ (-1, -2] \}$

$\lfloor 1'2 \rfloor = \{ [1, 2) \}$

$\lfloor \pi \rfloor = \{ [3, 4) \}$

(101). Si $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ considerem $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow xy = x'y'$.
Demo que és equivalència. Calc classes per (1,0), (1,1), (2,1), (2,3), (-2,4). Conj. quo.

- Reflexiva: $x, y \in A$ [x, y arbi]
  $xy = xy$ [Relació]
  $xy R xy$ ← Demo. Reflexiva

- Simètrica: x, y i $x', y' \in A$ [Tots arbi]
  $xy = x'y'$ [Relació]
  $x'y' = xy$ [Prop igualtat]
  $x'y' R xy$ ← Demo. Simètria.

- Transitiva: x, y i x', y' i $a, b \in A$ [Tots arbi]
  $\left.\begin{array}{l} xy = x'y' \\ x'y' = ab \end{array}\right\}$ [Relació]
  $xy = x'y' = ab$ [Prop igualtat]
  $xy R ab$ ← Demo. Transitiva.

~~$\lfloor (1,0) \rfloor = \{ (0, y'), (x', 0) \}$~~

$\lfloor (1,1) \rfloor = \{ (1,1), (-1,-1) \}$

$\lfloor (2,1) \rfloor = \{ (2,1), (1,2), (-2,-1), (-1,-2) \}$

$\lfloor (2,3) \rfloor = \{ (1,6), (6,1), (-1,-6), (-6,-1), (2,3), (3,2), (-3,-2), (-2,-3) \}$

$\lfloor (-2,4) \rfloor = \{ (1,-8), (-1,8), (-8,1), (8,-1), (2,-4), (-2,4), (-4,2), (4,-2) \}$

$\overline{(1,0)} = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x,y) R (1,0) \} = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0 \} = \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{Z} \} \cup \{ (0,y) \mid y \in \mathbb{Z} \}$

$A / R = \{ [0, \infty) \}$

(102). R relació a A simètrica i transitiva. Demo que són equivalents (Només fent ús de def de rela. eq i tbs).

a) $\lfloor x \rfloor \cap \lfloor y \rfloor \neq \emptyset$

Segons enunciat R és simètrica ($xRy \Leftrightarrow yRx$) i transitiva ($xRy \wedge yRz \Leftrightarrow xRz$).

~~$x, y, z \in A$ [x, y, z arbi]~~
~~$xRz \wedge zRy$ [Prop tras]~~
~~$zRx \wedge zRy$ [Prop. simètrica]~~
~~$z \in \bar{x} \wedge z \in \bar{y}$ [Def de R]~~
~~$z \in \bar{x} \wedge \bar{y}$ [Def $\wedge$]~~

Volem demostrar que $\bar{x} \cap \bar{y}$ no és buit. Això sig. que hi ha un (com a mínim) que compleix que està en $\bar{x}$ i $\bar{y}$.

$zRx \wedge zRy$ [Punt partida]

$xRz \wedge zRy$ [Simètrica]

xRy [Transitiva]

Amb això demo que si hi ha un element que està en $\bar{x}$ i en $\bar{y}$, llavors xRy estàn relacionats.

b) $\bar{y} \subseteq \bar{x}$

$a \in \bar{y} \overset{\text{def } R}{\Leftrightarrow} aRy \overset{p \equiv T \wedge p}{\Leftrightarrow} aRy \wedge xRy \overset{\text{sim.}}{\Leftrightarrow} aRy \wedge yRx \overset{\text{trans}}{\Leftrightarrow} aRx \overset{\text{def } R}{\Leftrightarrow} a \in \bar{x}$

c) $\bar{x} \subseteq \bar{y}$

$a \in \bar{x} \Leftrightarrow aRx \Leftrightarrow aRx \wedge xRy \Leftrightarrow aRy \Leftrightarrow a \in \bar{y}$

(114). Definim $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ així:

$f(x,y) = 1$ si $xy > 0$
$f(x,y) = 0$ si $xy = 0$
$f(x,y) = -1$ si $xy < 1$

A $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim $(x,y) R (u,v) \Leftrightarrow f(x,y) = f(u,v)$. Demo que és classe equiv. Calc. Classes i conj.

- Reflexiva: Partim d'una relació que diu $\forall x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(x,y) R (u,v)$ si i només si $f(x,y) = f(u,v)$
  Volem veure si compleix quan $u = x$ i $v = y$ t.q. $f(x,y) = f(x,y)$ cosa que és certa ☑
- Simètrica: $(x,y) R (u,v) \Leftrightarrow f(x,y) = f(u,v) \Leftrightarrow f(u,v) = f(x,y) \Leftrightarrow (u,v) R (x,y)$ ☑
- Transitiva: $\left.\begin{matrix}(x,y) R (u,v) \\ (u,v) R (a,b)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f(x,y) = f(u,v) \wedge f(u,v) = f(a,b) \Leftrightarrow f(x,y) = f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) R (a,b)$ ☑

$\bar{1} = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ $\bar{0} = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ $\overline{-1} = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}$

$\mathbb{R}^2 / A = \{\overline{-1}, \bar{0}, \bar{1}\}$ GPT

(104). Demo. $\bar{x}\cap\bar{y}\neq\emptyset \wedge \bar{x}\cap\bar{z}\neq\emptyset \Rightarrow \bar{y}\cap\bar{z}\neq\emptyset$ (Només fent ús def. rel. equiv. i classe).

- $\bar{x}\cap\bar{y}\neq\emptyset \Leftrightarrow \exists a: a\in\bar{x}\cap\bar{y} \Leftrightarrow a\in\bar{x}\wedge a\in\bar{y} \Leftrightarrow aRx \wedge aRy$
- $\bar{x}\cap\bar{z}\neq 0 \Leftrightarrow \exists b: b\in\bar{x}\cap\bar{z} \Leftrightarrow b\in\bar{x}\wedge b\in\bar{z} \Leftrightarrow bRx\wedge bRz$

$aRx \wedge aRy \wedge bRx \wedge bRz \Rightarrow \bar{y}\cap\bar{z}\neq\emptyset$

$aRx\wedge aRy \wedge bRx\wedge bRz$ [Punt partida]

$aRx\wedge aRx\wedge bRy\wedge bRz$ [Reordenar]

$aRx\wedge aRy\wedge aRz$ [$T\wedge T\equiv T$]

$aRx\wedge yRa\wedge aRz$ [Prop. simètrica]

$aRx\wedge yRz$ [Prop. transitiva]

yRz [$T\wedge p\equiv p$]

$\Rightarrow \exists a: a\in\bar{y}\wedge a\in\bar{z}$ [Def R]

$a\in\bar{y}\cap\bar{z}$ [Def $\wedge$]

$\bar{y}\cap\bar{z}\neq 0$ ← On volíem arribar.

(98). [Fet anteriorment però refer classes]

$\mathcal{P}(c)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

$\bar{\emptyset}=\{x\in A \mid xR\emptyset\}=\{x\in\mathcal{P}(c)\mid x\cup\{1,2\}=\emptyset\cup\{1,2\}=\{1,2\}\}=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$\overline{\{3\}}=\{x\in A\mid xR\{3\}\}=\{x\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})\mid x\cup\{1,2\}=\{3\}\cup\{1,2\}=\{1,2,3\}\}=\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$\overline{\{4\}}=\{x\in A\mid \{4\}\cup\{1,2\}=\{1,2,4\}\}=\{\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,2,4\}\}$

$\overline{\{3,4\}}=\{x\in A\mid \{3,4\}\cup\{1,2\}=\{1,2,3,4\}\}=\{\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

Ara sí.

(102). R rel. d'equiv. en $A\neq\emptyset$. Demo que són equivalents.

a) $\bar{x}\cap\bar{y}\neq\emptyset \Rightarrow$ b) $\bar{y}\subseteq\bar{x}$ | Hem de demo que $\bar{y}\subseteq\bar{x}$. Vol dir $\forall t: tRy\rightarrow tRx$.

$\bar{x}\cap\bar{y}\neq\emptyset \overset{def}{\Rightarrow} \exists m: m\in\bar{x}\wedge m\in\bar{y} \overset{def R}{\Rightarrow} mRx\wedge mRy \overset{sim}{\Rightarrow} yRm\wedge mRx \overset{trans}{\Rightarrow} yRx.$

$\exists t: tRy \overset{p\wedge T\equiv p}{\Rightarrow} tRy\wedge yRx \overset{trans}{\Rightarrow} tRx \Rightarrow t\in\bar{x}.$ ☑

b) $\bar{y}\subseteq\bar{x} \Rightarrow$ c) $\bar{x}\subseteq\bar{y}$ | Hem de demo $\forall t: t\in\bar{x}\rightarrow t\in\bar{y}$.

$\exists t\in\bar{x} \overset{def R}{\Rightarrow} tRx \overset{p\wedge T\equiv p}{\Rightarrow} tRx\wedge yRx \overset{sim}{\Rightarrow} tRx\wedge xRy \overset{trans}{\Rightarrow} tRy \overset{def R}{\Rightarrow} t\in\bar{y}$ ☑.

$\bar{y}\subseteq\bar{x}\Rightarrow y\in\bar{y}\subseteq\bar{x}\Rightarrow yRx$

c) $\bar{x}\subseteq\bar{y} \Rightarrow$ a) $\bar{x}\cap\bar{y}\neq\emptyset$ | Hem de demo que $\exists t: tRx\wedge tRy$.

$\bar{x}\subseteq\bar{y} \Rightarrow x\in\bar{x}\subseteq\bar{y}\Rightarrow xRy$ ($xRx\Leftrightarrow x\in\bar{x}$)

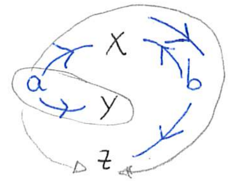
Llavors com que xRx (reflexiva)
Tambe tenim que xRy.
Volem demo que $\exists t: tRx\wedge tRy$

{ Aquest t pot ser x t.q. $xRx\wedge xRy$. Queda demo. ☑.

(104). Demo que si R equiv. $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \wedge \bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset$.

$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \exists a : a \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow a \in \bar{x} \wedge a \in \bar{y} \Rightarrow a R x \wedge a R y$

$\bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset \Rightarrow \exists b : b \in \bar{x} \cap \bar{z} \Rightarrow \exists b : b \in \bar{x} \wedge b \in \bar{z} \Rightarrow \exists b : b R x \wedge b R z$



Volem demo que $\exists c : c \in \bar{y} \cap \bar{z} \Rightarrow c \in \bar{y} \wedge c \in \bar{z} \Rightarrow \exists c : c R y \wedge c R z$

☐ Acabar

(114). $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$; $(x, y) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } xy > 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \\ -1 & \text{si } xy < 0 \end{cases}$; $(x,y) R (u,v) \Leftrightarrow f(x,y) = f(u,v)$

- Reflexiva: Volem demo que $(x,y) R (x,y)$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
  Llavors tenim $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ i amb la def de R $f(x,y) = f(x,y)$ cosa que certa ☑.

- Simetria: Volem demo que $\forall (x,y), (u,v) \in \mathbb{R}$ $(x,y) R (u,v) \to (u,v) R (x,y)$
  Llavors tenim $\forall (x,y), (u,v) \in \mathbb{R}^2$ amb def $f(x,y) = f(u,v) \Leftrightarrow f(u,v) = f(x,y)$ llavors podem veure que $(u,v) R (x,y)$ ☑.

- Transitiva: Volem demo que $\forall (x,y), (u,v), (a,b) \in \mathbb{R}$ i $(x,y) R (u,v) \wedge (u,v) R (a,b) \to (x,y) R (a,b)$
  Tenim $(x,y) R (u,v)$ $\forall (x,y), (u,v) \in \mathbb{R}^2$. t.q. $f(x,y) = f(u,v)$
  Tenim $(u,v) R (a,b)$ $\forall (u,v), (a,b) \in \mathbb{R}^2$. t.q. $f(u,v) = f(a,b)$
  $\Big\}$ $f(x,y) = f(u,v) = f(a,b) \Leftrightarrow f(x,y) = f(a,b)$
  Queda demostrat que $(x,y) R (a,b)$ que és la trans ☑.

$\overline{(x_0, y_0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) R (x_0, y_0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = f(x_0, y_0)\}$ ← General.

$\overline{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}$ — Donat que $+ \cdot + = 1$, $- \cdot - = 1$. Pel que dia anterior

$\overline{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ — Està amb eix.

$\overline{(-1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = -1\}$ — Donat que $+ \cdot - = -1$, $- \cdot + = -1$ Quadrants negatius.

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 / R = \{\overline{(1,1)}, \overline{(0,0)}, \overline{(-1,1)}\}$