INTEGRACIÓ

Preliminars

F és primitiva de f si $F' = f$ // F' és la derivada de l'integral

Dues primitives de f difereixen en una constant

Regla de Barrow: Si F primitiva de f $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Hi ha funcions que "no tenen" primitiva. $f(x) = e^{-x^2}$

Funcions Integrables

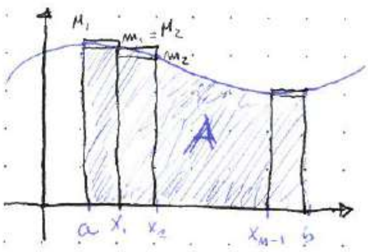
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fitada $m \le f(x) \le M$

Partició de $[a,b]$ és dividir $[a,b]$ en n parts. $a = x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n = b$

· Particions Uniformes: Parts iguals $h = \frac{b-a}{n}$ llavors $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ on $b = x_0 + nh$

En cada interval $[x_{i-1}, x_i]$ la funció fitada

- m_i = infim $\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
- M_i = Suprem $\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$



– Suma Superior: $S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

Suma d'àrees de rectangle $I(f, P_n) \le A \le S(f, P_n)$

– Suma Inferior: $I(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

✳ Recorda $\int_a^b f = -\int_b^a f$ i $\int_a^a f = 0$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fitada i monòtona
contínua
fitada amb nº finit de discontinuïtats
} ⇒ f ÉS INTEGRABLE

Mitjana d'una funció contínua en interval $\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(\alpha) \text{ on } \alpha \text{ entre } a \text{ i } b}$

Teorema fonamental del Càlcul

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrable
$F:[a,b] \to \mathbb{R}$
$x \to F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
}
1. F és contínua en $[a,b]$.
2. Si f contínua en algun $x \in [a,b] \Rightarrow$ F deri. en x $F'(x) = f(x)$

Obs: $F(a) = 0$

Obs: e^{-x^2} contínua a tot $\mathbb{R}$

Llavors aquí podem fer Taylor
$F(x) \approx P_n(f, x, 0)$

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ És una primitiva i $F'(x) = e^{-x^2} = f(x)$ i $F(0) = 0$

Corol·lari: Regla de Barrow

$$\left.\begin{array}{l} f\ [a,b] \text{ contínua} \\ g \text{ contínua i derivable } [a,b] \\ \quad g'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)}$$

Regla Cadena

$$\left.\begin{array}{l} f[a,b] \to \mathbb{R} \text{ contínua} \\ u, v \text{ derivables en } x \\ u(x), v(x) \text{ puts } [a,b] \end{array}\right\} \boxed{F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(v(x))\cdot u' - f(u(x))\cdot v'}$$

Mètodes aproximats per calcular $\int_a^b f$

- Si coneixem explícitament una primitiva de f fem càlcul exacte usant regla Barrow.
- Càlcul aproximat:

  $\int_a^b f$. Sumant (inferior) $I(f, P_n)$ o $S(f, P_n)$ (superior).

Mètode dels Trapezis

$\boxed{A = \frac{B+b}{2}\cdot h}$ Recordem: $x_i = a + i\cdot h$ i $h = \frac{b-a}{n}$ → nº de divisions

$$\text{Àrea} \approx \frac{f(a)+f(x_1)}{2}\cdot h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} h + \dots + \frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2}\cdot h \approx A_{T_1} + A_{T_2} + \dots + A_{T_n}$$

$$\boxed{\text{Àrea} \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)}$$

Fórmula de l'error absolut

f t.q. f'' i f''' contínua en $[a,b] \Rightarrow \boxed{\varepsilon \leq \frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}\cdot \left|\text{màx}\{f''(x) \mid x \in [a,b]\}\right|}$

Obs: Si sabem $|f''(x)| \leq M \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{(b-a)^3}{12 n^2}\cdot M$

Integrals Inmediates

$\int u^r \cdot u' \, dx = \int \frac{u^{r+1}}{r+1} + K \quad (r \neq -1)$

$\int \frac{u'}{u} \, dx = \ln |u| + K$

$\int u' \cdot a^u \, dx = \int \frac{a^u}{\ln(a)} + K \quad (a > 0)$

$\int u' \cdot e^u \, dx = e^u \cdot K$

$\int u' \cdot \cos(u) \, dx = \sin(u) + K$

$\int u' \cdot \sin(u) \, dx = -\cos(u) + K$

$\int \frac{u'}{\sin(u)} \, dx = \ln \left| \tan\left(\frac{u}{2}\right) \right| + K$

$\int \frac{u'}{\sin^2(u)} \, dx = -\cot(u) + K$

$\int \frac{u'}{\cos^2(u)} \, dx = \tan(u) + K$

$\int \frac{u'}{a^2+u^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + K$

$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} \, dx = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + K$

Canvi Variable

$\_\_\_ = t \rightarrow dx \, \_\_\_ = dt \rightarrow dx = \_\_\_ \circ dt. \; / \; x = \_\_\_ \circ t$

En la nostra integral on hi hagi una 'x' o 'dx' fem la substitució i treballem amb 't'.

Integració per parts

Aplicar quan tinguem una funció que és producte de funcions.

$$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \, du}$$

un dravi una vaca vestida d'uniforme

$\int \underset{u}{x} \, \underset{dv}{\sin(x) \, dx} = \left[\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin(x) \, dx \rightarrow v = \int \sin(x) \, dx = -\cos(x) = v \end{array} \right.$

Integrals Racionals

Quan $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ poden passar dos casos: $\begin{cases} \text{grau}(P(x)) \geq \text{grau}(Q(x)) \\ \text{grau}(P(x)) < \text{grau}(Q(x)) \end{cases}$

Si tenim que grau $(P(x)) \geq$ grau $(Q(x))$ podem dir que $\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{\text{quocient}}{C} + \frac{\overset{\text{Residu}}{R(x)}}{\underset{\text{divisor}}{Q(x)}}}$

és a dir = fem la divisió de polinomis i $\int C \, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} \, dx$

Si grau $(P(x)) <$ grau $(Q(x))$ hem de descompondre en solucions $Q(x)$ (factors) i per cada factor fer una suma t.q. $\boxed{Q(x) = (x-a)^n \Rightarrow \frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}}$

Ara haurem de trobar el valor de cada A_i.

$\int \frac{2x^2-4x+1}{x(x^2-4x+4)} \, dx \Rightarrow \frac{2x^2-4x+1}{x \cdot (x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A \cdot (x-2)^2 + B \cdot (x-2) \cdot x + Cx}{x(x-2)^2} \Rightarrow$ [Tenen mateix den.]

$\Rightarrow A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx = 2x^2 - 4x + 1$ i ara trobem $\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}$ agafant $x = 0$, $x = 2$

M2 - 6 - T - 2

Mètode Simpson

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n/2}\left[f(x_{2i-2}) + 4\cdot f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right]}$$

on $\underline{n}$ ha de ser parell

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$

Fòrmula del error absolut

$$\boxed{|\varepsilon| \leq \frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\cdot \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|}$$

(6.1)

d) $S(x) = \int_{x^2+3x}^{x^4+2x+1} e^{\sin(t)} dt$

Sin (t) continua en $\mathbb{R}$.

$e^{\sin(t)}$ contínua a $\mathbb{R}$ (comp. d'elem) $\Rightarrow$ Integrable en qualsevol interval

$\Rightarrow \forall x$, és integrable a l'interval $[x^2+3x, x^4+2x+1]$.

A més, com que és contínua i $u(x) = x^2+3x$ // Són derivables
$v(x) = x^4+2x+1$ (polinomis)

S és deri. i $S'(x) = e^{\sin(x^4+2x+1)} \cdot (4x^3+2) - e^{\sin(x^2+3x)} \cdot (2x+3)$

$f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$

(6.7)

d) $\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + K = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + K = \boxed{\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + K}$

a) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x^2} dx = \int \frac{x^2}{x^2} dx - \int \frac{2x}{x^2} dx + \frac{1}{x^2} dx = \int 1\, dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx =$

$= x - 2 \cdot \left(\ln(x) \right) + \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) = x - 2\ln(x) + \frac{x^{-1}}{-2} = \boxed{-2\ln(x) + x - \frac{1}{x} + K}$

b) $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \boxed{\frac{1}{4} \cdot \ln|x^4+1| + K}$ $\boxed{\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + K}$

f) $\int x 5^{2x^2} dx = \frac{1}{4} \int 4x\, 5^{2x^2} = \boxed{\frac{1}{4} \cdot \frac{5^{2x^2}}{\ln(5)} + K}$ $\boxed{\int u' \cdot a^u dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + K}$ $\boxed{\text{si } r \neq -1}$ $\boxed{\int u^r \cdot u' dx = \frac{u^{r+1}}{r+1}}$

c) $\int \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\arcsin(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int (\arcsin(x))^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\arcsin(x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + K = \boxed{\frac{2}{3} \arcsin(x)^{\frac{3}{2}} + K}$

e) $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(x)} dx = \left[\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + K\right] = \boxed{\ln|\ln(x)| + K}$

g) $\int \frac{1}{1+16x^2} dx = \int \frac{1}{1+(4x)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4}{1+(4x)^2} dx = \boxed{\frac{1}{4} \operatorname{arctg}(4x) + K}$ $\boxed{\int \frac{u'}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + K}$

h) $\int tg^2(x) dx = \int tg^2(x) + 1 - 1\, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} - 1\, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} - \int 1\, dx = \boxed{\tan(x) - x + K}$ $\boxed{\int \frac{u'}{\cos^2(u)} dx = tg(u)}$

h*) $\int tg^2(x)\, dx = \int \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} dx =$

⑧. Calculem per parts. $\boxed{\int u \cdot dv = u v - \int v \cdot du}$

d) $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(2x)\, dx}_{dv} =$ $u = x \to du = dx$; $dv = \sin(2x)\,dx \to v = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \sin(2x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot (-\cos(2x))$

$x \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos(2x)) - \int \frac{1}{2} \cdot (-\cos(2x)) \cdot dx = \frac{-x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx = \frac{-x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\, dx =$

$$\boxed{\frac{-x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin(2x) + k}$$

b) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx}_{dv} =$ $u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x}\, dx$; $dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \to v = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

$\ln(x) \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = 2 \cdot \ln(x) \cdot \sqrt{x} - 2\int \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = 2\ln(x)\sqrt{x} - 2\int x^{\frac{1}{2}-1} dx = 2\ln(x)\sqrt{x} - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$

$= 2\ln(x) \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot 2\sqrt{x} = \boxed{2\sqrt{x}\,(\ln(x) - 2)}$

a) $\int \underbrace{e^{2x}}_{u} \underbrace{\sin(x)\, dx}_{dv} =$ $u = e^{2x} \to du = e^{2x} \cdot 2\, dx$; $dv = \sin(x)\, dx \to v = \int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$

$e^{2x} \cdot (-\cos(x)) - \int -\cos(x) \cdot e^{2x} \cdot 2 \cdot dx = e^{2x} \cdot (-\cos(x)) + 2\int \underbrace{\cos(x)}_{dv} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{u} dx =$ $u = e^{2x} \to du = e^{2x} \cdot 2\, dx$; $dv = \cos(x)\, dx \to v = \int \cos(x)\, dx = \sin(x)$

Per aquí tenim inici

$= e^{2x} (-\cos(x)) + 2\left(e^{2x} \cdot \sin(x) - 2\boxed{\int \sin(x) \cdot e^{2x} dx}\right) = \int \sin(x) \cdot e^{2x} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{2x} \cdot (-\cos(x)) + 2(e^{2x} \cdot \sin(x) - 2I) = I \Rightarrow -e^{2x}\cos(x) + 2e^{2x}\sin(x) - 4I = I \Rightarrow -e^{2x}\cos(x) + 2e^{2x}\sin(x) = 5I.$

$$I = \frac{-e^{2x}\cos(x) + 2e^{2x}\sin(x)}{5} + k = \boxed{\frac{e^{2x}}{5}\left(-\cos(x) + \sin(x) \cdot 2\right) + k}$$

⑨. $y_{parab.} = x^2 + 7$, $y_{recta} = 10$

~~Pas 1: Punts de tall. y_P, y_r~~

~~$x^2 + 7 = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$~~

~~Pas 2: Area $= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 10 - x^2 - 7\, dx = 2\left|\int_0^{\sqrt{3}} -x^2 + 3\, dx\right| = 2\int_0^{\sqrt{3}} x^2 + 2\int 3\, dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 6x$~~

~~Pas 3: Resolem Integral: $-2\left|\int_0^{\sqrt{3}} x^2 - 3\, dx\right| = -2\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx - 2\int_0^{\sqrt{3}} 3\, dx = -2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot 3x =$~~

~~• En $\sqrt{3} \Rightarrow -2 \cdot \frac{\sqrt{3}^3}{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} =$~~

Repetir

⑩. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = -2$ i $x = 2$

Pas 1: Punts de tall

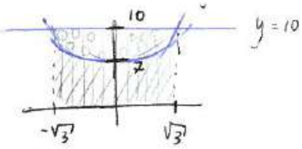
$e^x = e^{-x} \Rightarrow \boxed{x = 0}$ #Aull

Pas 2: Area $= 2\left|\int_0^2 e^{-x} dx\right| = 2 \cdot \left|(-1)\int_0^2 (-1) \cdot e^{-x} dx\right| = 2\left|(-1) \cdot \left((-1)e^{-0} - (-1) \cdot e^{-2}\right)\right| =$

$= 2\left|(-1) \cdot (-1 + e^{-2})\right| = 2\left|1 - e^{-2}\right| = \boxed{2 - 2e^{-2} \text{ unitat àrea}}$

$-\sqrt{3}^2 + 3 = 0$

⑨. Calcula Àrea entre $y=x^2+7$ i $y=10$.



Pas 1: Punts de tall: $x^2+7=10 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Pas 2: Config. Integral: Podem fer la integral definida per saber les àrees que hi ha entre les funcions i l'eix X i després restar-li a la de $y=10$ la de $y=x^2+7$.
Un altre enfoc és fer-ho directament. Així que primer definim la integral indefinida i després fem Barrow.

Àrea delimitada amb ...

$$\int 10-(x^2+7)\,dx = \int -x^2+3\,dx = -1\cdot\int x^2\,dx + \int 3\,dx = -1\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+3x = \boxed{\frac{-x^3}{3}+3x = F(x)}$$

Pas 3: Eval. Límits: Ara que ja tenim la funció de l'Àrea que busquem podem fer dues coses:
- $[F(x)]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$ o $-2\cdot[F(x)]_0^{\sqrt{3}}$ Donat que veiem que són simètriques.

$$[F(x)]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left[\frac{-x^3}{3}+3x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left(\frac{-(\sqrt{3})^3}{3}+3\cdot\sqrt{3}\right)-\left(\frac{-(-\sqrt{3})^3}{3}+3\cdot(-\sqrt{3})\right) = \boxed{4\sqrt{3}\text{ unitats d'Àrea}}$$

①.

a) $F(x)=\int_3^x \sin(\ln(t))\,dt$

$\ln(t)$ és cont. $(0,+\infty)$, $\sin(z)$ cont en tot $\mathbb{R}$ llavors composició cont $(0,+\infty)$.
Dom de $F(x)$ és $(0,+\infty)$ pq. aquesta x ha d'estar def en $\sin(\ln(t))$.
Al ser contínua $\Rightarrow F(x)$ derivable i $\boxed{F'(x)=\sin(\ln(x)).}$

b) $F(x)=\int_x^{10}\sin(\ln(t))\,dt$ i $x>0$

$$F(x)=\int_x^{10}\sin(\ln(t))\,dt = -\int_{10}^{x}\sin(\ln(t))\,dt \Rightarrow \boxed{F'(x)=-\sin(\ln(x))}$$

d) $S(x)=\int_{x^2+3x}^{x^4+2x+1} e^{\sin(t)}\,dt$

$e^{\sin(t)}$ contínua en tot $\mathbb{R}$. $\left.\begin{array}{l}x^4+2x+1\\ x^2+3x\end{array}\right\}$ Derivables en tot $\mathbb{R}$ (per ser polinòmica).

$$\boxed{S'(x)=e^{\sin(x^4+2x+1)}\cdot(4x^3+2)-e^{\sin(x^2+3x)}\cdot(2x+3)}$$

② $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{t})\,dt}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$ pq. $\int_0^0 \sin(\sqrt{t})\,dt = \sin(\sqrt{0})-\sin(\sqrt{0})=0$

Fixem que $t>0$ pq. sinó $\sqrt{t}$ no def. llavors $\sin(\sqrt{t})$ cont $\Rightarrow F(x)=\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{t})\,dt$ derivable
Com que x^2 i 0 derivables $F'(x)=\sin(\sqrt{x^2})\cdot 2x = \sin|x|\cdot 2x$ i si $x>0 \Rightarrow \sin(x)\cdot 2x$
Fem l'Hôpital per resoldre lím.

lím conegut.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x)}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\cdot\sin(x)}{3x^2} = \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{2}{3}\cdot 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

③. $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt \quad f:(0,+\infty)-\{1\} \to \mathbb{R}$ pq. $\ln(1)=0$ i $\frac{1}{0}$ no def.

$\frac{1}{\ln(t)}$ cont. en $(0,+\infty)-\{1\}$ i x^2, x són deri. en tot $\mathbb{R}$ per ser polinòmique.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(x^2)}\cdot 2x - \frac{1}{\ln(x)}\cdot 1 = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \boxed{\frac{x-1}{\ln(x)} = f'(x)}$$

$x-1$: $-$, $+$; $\ln(x)$: $-$, $+$; punts 0, 1

Podem veure que $f'(x)$ sempre positiu $\forall x>0$ i $x\neq 1$ i podem dir $f(x)$ sempre creixent de $(0,1)\cup(1,+\infty)$

⑤. $I = \int_0^4 (1 - e^{\frac{x}{4}})\,dx$

a) Calculem amb Borrow

$$I = \int_0^4 1\,dx - \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}\,dx = \ldots$$

$$= x - 4\int_0^4 \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}}\,dx =$$

$$= \left[x - 4\cdot e^{\frac{x}{4}}\right]_0^4 = (4 - 4\cdot e^{\frac{4}{4}}) - (0 - 4\cdot e^{\frac{0}{4}}) = \boxed{8 - 4e^1 \text{ unitats d'àrea}}$$

b) Trapezis amb $n=4$. $h = \frac{4-0}{4} = 1$

$$\text{Area} \approx 1\cdot\left(\frac{f(0)+f(4)}{2} + \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\right) = \frac{-1+e^1}{2} + f(1)+f(2)+f(3) =$$

$$\approx \frac{1-e^1}{2} + (1-e^{\frac{1}{4}}) + (1-e^{\frac{1}{2}}) + (1-e^{\frac{3}{4}}) \approx \boxed{-2'9088 \text{ unitats d'àrea}}$$

c) Simpson per $n=4$. $h = \frac{4-0}{4} = 1$

$$\text{Area} \approx \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{2}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right]\right) = \frac{1}{3}\left(\left[f(0)+4f(1)+f(2)\right] + \left[f(2)+4f(3)+f(4)\right]\right) = \frac{1}{3}\left(-1'784 + (-6'833)\right) =$$

$$\boxed{\approx -2'8730 \text{ unitats d'àrea}}$$

d) Avalua error absolut de "b)" i "c)".

$f(x) = 1 - e^{\frac{x}{4}}$, $f'(x) = 0 - e^{\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4}$, $f''(x) = \frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{4}}$, $f'''(x) = \frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{4}}$, $f^{IV}(x) = \frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{4}}$

$f(x) = 1 - e^{\frac{x}{4}}$, $f'(x) = \frac{-1}{4}e^{x/4}$, $f''(x) = \frac{-1}{4^2}\cdot e^{\frac{x}{4}}$, $f'''(x) = \frac{-1}{4^3}\cdot e^{\frac{x}{4}}$, $f^{IV}(x) = \frac{-1}{4^4}\cdot e^{\frac{x}{4}}$

• "b)"

Sabem que $c\in[a,b]$ per al $\max_{[a,b]}|f''(x)|$ ha d'estar entre $[0,4]$ pq. són els límits.
Veiem que la funció és decreixent pq. a cada $x > x_0$ $f(x) < f(x_0)$ donat que $\exp(x \div 4)$ serà més gran i al multiplicar per $\frac{-1}{4^2}$ darà num més petit. Llavors el max (en abs.) està en $f''(4)$.

$$|\varepsilon| \leq \left|\frac{(4-0)^2\cdot f''(4)}{12\cdot(4)^2}\right| = |-0'0566| \Rightarrow \boxed{\varepsilon \leq 0'05}$$

• "c)"

En aquest cas, la quarta derivada és similar a la segona i el raonament mateix $\max_{[0,4]} = |f^{IV}(4)|$

$$|\varepsilon| \leq \left|\frac{(4-0)^5\cdot f^{IV}(4)}{180\cdot(4)^4}\right| = |-0'000236| \Rightarrow \boxed{\varepsilon \leq 0'0005}$$

⑥. Sigui $f(x) = (\sin(x) \cdot \cos(x))^{4/3}$ i $I = \int_{0'6}^{1} f(x)\,dx$

a) Sabent $0 < f^{(4)}_{(x)} < 20 \quad \forall x \in [0'6, 1]$. Calc 'n' per obtindre error de $0'5 \times 10^{-4}$ amb simpson.

Per la fórmula de l'error absolut de Simpson sabem $|\varepsilon| \leq \left|\frac{(b-a)^5 \cdot f^{(4)}_{(c)}}{180 \cdot n^4}\right|$

on 'c' és un valor entre $[0'6, 1]$ que fa que $|f^{(4)}_{(x)}|$ sigui màx.

L'enunciat ens diu que $f^{IV}_{(x)} < 20$ (no importa quin x sigui) llavors podem veure que

$$|\varepsilon| < \left|\frac{(b-a)^5 \cdot 20}{180 \cdot n^4}\right| \Rightarrow 0'5 \times 10^{-4} < \frac{(1-0'6)^5 \cdot 20}{180 \cdot n^4} \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{(0'4)^5 \cdot 20}{180 \cdot (0'5 \times 10^{-4})}} = 2'18.$$

Recordem que en Simpson n ha de ser parell i 2 no és suficient $\Rightarrow \boxed{n = 4}$.

b) Doneu el valor aprox de l'integral amb 'n' de "a)".

$$\text{Area} \approx \frac{h}{3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n/2} \left[f(x_{2i-2}) + 4 f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right] \right) ; \qquad h = \frac{1-0'6}{4} = \frac{0'4}{4} = 0'1 = h$$

$x_i = a + i \cdot h \Rightarrow x_0 = 0'6$,, $x_1 = 0'6 + 1 \cdot 0'1 = 0'7 = x_1$,, $x_2 = 0'8$,, $x_3 = 0'9$,, $x_4 = 1$

$$\text{Area} \approx \frac{0'1}{3} \cdot \left[\left(f(0'6) + 4 \cdot f(0'7) + f(0'8) \right) + \left(f(0'8) + 4 f(0'9) + f(1) \right) \right] =$$

$$\approx \frac{0'1}{3} \left[(0'3613) + 4(0'3891) + 2(0'3966) + 4(0'3830) + (0'3495) \right] = \frac{0'1}{3}(4'5924)$$

$\boxed{\text{Area} = 0'15308 \text{ unitats d'area}}$

(QT-1011). ②. Troba eq. recta i parabola tangents a $F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\sin(t) + 8}\,dt$ en $x = 0$.

Sabem que $\sin(t) + 8$ contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.
Sabem que $\sqrt[3]{u}$ contínua i derivable a tot $\mathbb{R}$. $\Big\} \Rightarrow$ F(x) cont. i der. en tot $\mathbb{R}$.

Pel teorema fonamental del càlcul $F'(x) = f(x)$ així que recta tangent de F(x) és f(x).

Sabem que la fórmula de la recta tangent és $y = mx + n$ on m és la derivada.

Si evaluem $F'(0) = f(0)$ (Donat que volem l'eq. en aquest punt) $f(0) = \sqrt[3]{\sin(0)+8} = 2 = m$

'n' és el punt d'eix Y que F(0) talla però si fem $\int_0^0 = 0$ així que $n = 0$

Ens queda la funció de la recta pendent en $x = 0$ com $\boxed{y = 2x + 0}$

⑫. Mètode Simpson i Trapezi amb $n=4$ i calcula cota superior.

a) $\int_0^1 e^{x^2}dx$

Trapezis: $h=\frac{b-a}{4}=\frac{1}{4}$ | $h\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{3}f(x_i)\right]$ on $x_i=a+i\cdot h$, $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=3/4$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \simeq \frac{1}{4}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2}+\sum_{i=1}^{3}f(x_i)\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1+e^1}{2}+(1'06449+1'2840+1'75505)\right]=\frac{1}{4}[5'96271]\simeq\boxed{1'49067}$$

$f(x)=e^{x^2}$

$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x$

$f''(x)=e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x+e^{x^2}\cdot 2=4x^2\cdot e^{x^2}+e^{x^2}\cdot 2=2e^{x^2}(1+2x^2)=f''(x)$ [Veiem que la funció és creixent així que max $=1$].

$f'''(x)=8x\cdot e^{x^2}+4x^2\cdot 2xe^{x^2}+e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2=8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}+4xe^{x^2}=4xe^{x^2}(2+2x^2+1)=4xe^{x^2}(2x^2+3)=f'''(x)$

$f'''(x)=0 \Rightarrow 4xe^{x^2}(2x^2+3)=0$ → $x=0$ // Però si em fixem això correspon a mínim i no màxim, → $2x^2+3=0 \Rightarrow 2x^2=-3 \Rightarrow \nexists$ així que hauem de mirar-ho a "mà".

$$\varepsilon<\frac{(b-a)^3}{12\cdot m^2}\left|\max_{[0,1]}f''(x)\right| \Rightarrow \varepsilon<\frac{(1-0)^3}{12\cdot(4)^2}\cdot f''(1)=\frac{1\cdot 6e}{12\cdot 16}\Rightarrow\boxed{\varepsilon<\frac{e}{32}}$$

Simpson: $h=\frac{1}{4}$ | $\frac{\frac{1}{4}}{3}\sum_{i=1}^{4/2}\left[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right]$ $x_0=0$, $x_1=0'25$, $x_2=0'5$, $x_3=0'75$, $x_4=1$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\simeq\frac{1}{12}\left[f(0)+4f(1)+f(2)+f(2)+4f(3)+f(4)\right]=\frac{1}{12}[17'56452]\simeq\boxed{1'46371}$$

$f(x)=e^{x^2}$ $f''(x)=2e^{x^2}(1+2x^2)$ $f^{iv}(x)=4e^{x^2}(4x^4+12x^2+3)$ [Veiem que és creixent així que màxim és $f^{IV}(1)$]

$f'(x)=e^{x^2}2x$ $f'''(x)=4xe^{x^2}(2x^2+3)$

$$\varepsilon<\frac{(b-a)^5}{180m^4}\cdot\left|\max_{[0,1]}f^{IV}(x)\right| \Rightarrow \varepsilon<\frac{1^5}{180\cdot(4)^4}\cdot f(1)\simeq 0'004483\Rightarrow\boxed{\varepsilon<0'004}$$

⑬. Troba m → Simpson, → Trapezis per error $<0'5\times10^{-2}$

b) $\int_0^1\cos(x^2)\,dx$

$f(x)=\cos(x^2)$ $f''(x)=-2\sin(x^2)-4x^2\cdot\cos(x^2)$ $f^{IV}(x)=-12\cos(x^2)+48x^2\sin(x^2)+16x^4\cos(x^2)$

$f'(x)=-2x\sin(x^2)$ $f'''(x)=-12x\cos(x^2)+8x^3\sin(x^2)$

Trapezis:

$$\frac{(b-a)^3}{12m^2}\cdot f''(c)<\frac{(1-0)^3}{12m^2}\cdot 6=\frac{1}{2m^2}<0'5\times10^{-2}\Rightarrow m\geq\sqrt{\frac{1}{2\cdot 0'5\times10^{-2}}}\Rightarrow\boxed{m\geq 10}$$

$[|\max f''(x)|=|-(2\sin(x^2)+4x^2\cos(x^2))|=|2\sin(x^2)+4x^2\cos(x^2)|<2\sin(1)+4\cdot1\cdot\cos(1)<2+4=6]$

Simpson:

$$\frac{(b-a)^5}{180\cdot m^4}\cdot f^{IV}(c)<\frac{(1-0)^5}{180\cdot m^4}\cdot 64<0'5\times10^{-2}\Rightarrow m\geq\sqrt[4]{\frac{64}{180\cdot 0'5\times10^{-2}}}\Rightarrow\boxed{m\geq 4}$$

Pq m ha de ser parell i surt $\simeq 2'90$

$[|\max f^{IV}(x)| \leq 4 +48+16=64$

Això és impossible però d'aquesta manera ens assegurem que és més petit

⑮. $F(x) = \int_1^{x^2+2} \frac{e^t}{t}\, dt$

a) Comprova que $x=0$ és punt crític.

$f(t)$ contínua $\forall t \in \mathbb{R}-\{0\}$ i x^2+2 és contínua en tot $\mathbb{R}$ per ser polinòmica.

Ara podem dir (pel TFC) que $F(x)$ és contínua i derivable i $F'(x) = f(x^2+2)\cdot(2x) - f(1)\cdot 0 = f(x^2+2)\cdot 2x$

Ara mirem si $x=0$ és crític $\quad \underset{0}{\overset{\searrow \; | \; \nearrow}{}} \quad F'(0'1) = f(0'1^2+2)\cdot 2\cdot 0'1 = 14'92$

$F'(-0'1) = f((-0'1)^2+2)\cdot(2\cdot(-0'1)) < 0$

Exactament $x=0$ és crític.

(16/11/2010). Feu servir TFC per calcular lím.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{t})\, dt}{x^3} = \frac{0}{0} \quad \text{Fem servir L'Hôpital.}$$

Sabem que $\sin(\sqrt{t})$ contínua per tot $\mathbb{R}$ i x^2 tmb per ser polinòmica.

Llavors $F(x)$ contínua i derivable així que $F'(x) = 2x\cdot \sin(\sqrt{x^2})$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin(\sqrt{x^2})}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin|x|}{\cancel{x}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

CUIDADO

M2-6-E-4.