EXTREMS CONDICIONATS

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (de Classe C^2) Ara farem que (x,y) han de complir que $g(x,y)=0$
$(x,y) \to f(x,y)$ (han de ser punts d'una corba).

Punt P és [Màx / Mín] relatiu condicionat

Hi ha un entorn de P on tots els punts de la corba que estan en entorn $f(x,y) < f(P)$
$f(x,y) > f(P)$


Corba
$g(x,y)=0$

Exemple: $f(x,y) = y^2 + 4y - x^2 y$ cond: $x^2+y^2=9$

Cond: $x^2+y^2-9=0 \Rightarrow x^2 = -y^2+9$

$g(y) = y^2+4y-(-y^2+9)y$ "Això és $f(x,y)$ sobre punts de la circumferència".

$g'(y) = 3y^2+2y-5 \Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow y = \begin{cases} 1 \\ -5/3 \end{cases}$

Punts: $y=1 \Rightarrow x^2 = -(1)^2+9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow P_1 = (\sqrt{8}, 1)$,, $P_2 (-\sqrt{8}, 1)$

$y=-5/3 \Rightarrow x^2 = -(-5/3)^2+9 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{14}}{3} \Rightarrow P_3 = \left(\frac{2\sqrt{14}}{3}, \frac{-5}{3}\right)$,, $P_4 = \left(\frac{-2\sqrt{14}}{3}, \frac{-5}{3}\right)$

Teorema (Multiplicadors de Lagrange) (amb n variables i 1 cond.)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funció de classe C^1. Es construeix la cond. auxiliar $\boxed{\overbrace{L(x_1,\dots,x_n,\lambda)}^{\text{té 1 var més}} = f(x_1,\dots,x_n) - \lambda g(x_1,\dots,x_n)}$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cond. $g(x_1,\dots,x_n)=0$!IMPO que la cond. estigui igualada a 0.

Aleshores si f té en $(a_1,\dots,a_n)$ un extrem condicionat per $g(x_1,\dots,x_n)=0 \Rightarrow \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla L(a_1,\dots,a_n,\lambda_0) = 0}$

"Els extrems condicionats són punts crítics de la funció auxiliar L".

Exemple: $f(x,y) = y^2+4y-x^2y$ cond: $x^2+y^2=9$

① Construïm $L(x,y,\lambda)$. $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = y^2+4y-x^2y-\lambda(x^2+y^2-9)$

② Punts crítics $\nabla L = (0,0,0)$ # Tenim 3 derivades parcials.

- $\frac{\partial L}{\partial x} = -2xy - 2\lambda x = -2x(y+\lambda)$
- $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y+4-x^2-2\lambda y$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x^2-y^2+9$

$\Rightarrow x=0$: $2y+4-2\lambda y=0$; $-y^2+9=0 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$

$\Rightarrow y+\lambda=0$, $y=-\lambda$: $2(-\lambda)+4-x^2-2\lambda(-\lambda)=0$; $-x^2-(-\lambda)^2+9=0 \Rightarrow x^2=9-\lambda^2$

Fem subs

$2(-\lambda)+4-(9-\lambda^2)-2\lambda(-\lambda)=0$

$3\lambda^2-2\lambda-5=0$

$\lambda = 5/3$,, $\lambda=-1$

③ Punts Candidats:

$\lambda=-1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{8}$

$\lambda=\frac{5}{3} \Rightarrow y=\frac{-5}{3} \Rightarrow x=\frac{\pm 2\sqrt{14}}{3}$

$P_1=(0,3)$,, $P_2=(0,-3)$ $P_5 = \left(\frac{2\sqrt{14}}{3}, \frac{5}{3}\right)$,, $P_6 = \left(\frac{-2\sqrt{14}}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$P_3 = (\sqrt{8}, 1)$,, $P_4 = (-\sqrt{8}, 1)$

Exemple: $f(x,y) = x^2 + y^2 \quad y + x^2 = 1 \Rightarrow y + x^2 - 1 = 0$

1) Construïm funció auxiliar

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\,(g(x,y)) \Rightarrow L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y - 1) = (1-\lambda)x^2 + (y-\lambda)y + \lambda = L(x,y,\lambda)$$

2) Busquem punts crítics de la funció

$$\cdot\ \frac{\partial L}{\partial x} = (1-\lambda)2x = 2x - 2\lambda x \quad (1)$$

$$\cdot\ \frac{\partial L}{\partial y} = (y-\lambda) + y = 2y - \lambda \quad (2)$$

$$\cdot\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x^2 - y + 1 \quad (3)$$

$$\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ -x^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \overset{(1.1)}{x = 0}\ ,,\ \overset{(1.2)}{\lambda = 1}$

$(1.1) \Rightarrow x = 0 \wedge y = 1 \wedge \lambda = 2$

$(1.2) \Rightarrow \lambda = 1 \wedge y = 1/2 \wedge x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$P_{(1.2.1)} = \left(\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}}, 1\right) \quad P_{(1.2.2)} = \left(\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}}, 1\right)$

Punts candidats

$P(1.1) = \left(\boxed{0, 1}, 2\right)$ #Llista de punts crítics de L

Criteri del Hessià

$$\begin{cases} \cdot\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x} \\[2ex] \cdot\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\[2ex] \cdot\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g \end{cases}$$

$$HL(x,y,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & g_x \end{array} \\ & \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ g_y \\ \\ \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} g_x & g_y & \end{array} \end{array}$$

Si $P = (x_0, y_0, \lambda_0)$ és punt crític de L
- $\det H(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \Rightarrow$ MAX
- $\det H(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \Rightarrow$ MÍN
- $\det H(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \Rightarrow$?¿

* *Exemple:*

$$\cdot\ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 - 2\lambda \qquad \cdot\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} = -2x \qquad \cdot\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} = -1 = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y}$$

$$\cdot\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \qquad \cdot\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2 \qquad \cdot\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$HL(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 & -2x \\ 0 & 2 & -1 \\ -2x & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HL(P(1.1)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2\right)(-1) = \frac{-1}{2} < 0 \Rightarrow \text{MÍNIM } P(1.1)$$

Teorema

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad (k < n)$ condicions $\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$

$(x_1, \dots, x_n) \to f(x_1, \dots, x_n)$

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_n)$$

$(a_1, \dots, a_n)$ extrem condicionats de $f \Rightarrow \exists\ \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k : \nabla L(a_1, \dots, a_n, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k) = 0$

Teorema de Weierstrass

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ a tot Dom.} \\ \cdot\ D \subseteq \text{Dom}(f) \text{ compacte} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ P_m, P_M \in D : f(P_m) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq f(P_M) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in D$$

1) Punts crítics de f que estiguin $\mathring{D}$

2) Punts crítics a cada tross de ∂D

3) Punts d'intersecció del conjunt

4) El que tingui
- Imatge més gran $\Rightarrow P_M$
- Imatge més petita $\Rightarrow P_m$

Exercici

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ $\quad \begin{cases} g(x,y)=x^2+y^2=1 & \text{cilindre} \\ h(x,y)=x+y+z=1 & \text{pla} \end{cases}$ } intersecció

1) Multiplicadors de Lagrange

$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda g-\mu h \Rightarrow L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x^2+y^2-1)-\mu(x+y+z-1)$

2) Punts crítics $\nabla L(x,y,z,\lambda,\mu)=0$

$L_x=2x-2\lambda x-\mu=0$ $\quad (2-2\lambda)x=\mu$

$L_y=2y-2\lambda y-\mu=0$ $\quad (2-2\lambda)y=\mu \Rightarrow (2-2\lambda)(x-y)=0$

$L_z=2z-\mu=0$

$L_\lambda=-x^2-y^2+1=0$

$L_\mu=-x-y-z+1=0$

$\Rightarrow x=y$

(1) $2x-2\lambda x=\mu$

(3) $2z=\mu$

(4) $-2x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

(5) $-2x-z=-1 \Rightarrow z=1-2x=\begin{cases}1-2\sqrt{\frac{1}{2}}=1-\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 1-2\cdot(-1)\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=1+\frac{2}{\sqrt{2}}\end{cases}$

$P_0=\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},1-\sqrt{2}\right)$

$P_1=\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},1+\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow (2-2\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-1$

(1) = (2) $\mu=0$

(3) $2z=\mu=0 \Rightarrow z=0$

(4) $x^2+y^2=1$
(5) $x+y=+1$ $\Rightarrow$ $x^2+(1-x)^2=1$, $2x^2-2x=0$ $\Rightarrow x=0$, $\Rightarrow x=1$

$y=1-x$

$P_2=(0,1,0)$

$P_3=(1,0,0)$

3) Classifiquem els punts obtinguts.

Donat que tenim 3 variables no podem saber més (No entra al temari). Hessià només $\begin{cases}2\text{ var} \\ 1\text{ cond}\end{cases}$

$f(P_0)=4-2\sqrt{2}\simeq 1'17$ ← ¿?

$f(P_1)=4+2\sqrt{2}\simeq 6'82$ ← MÀXIM

$f(P_2)=1$ } Mínim
$f(P_3)=1$

Obs: Aquí ja podem fer on tenir Hessià.

*) Alternativa

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$x^2+y^2=1$

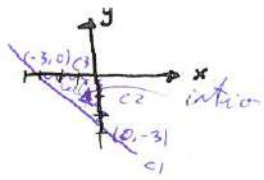
$x+y+z-1=0 \Rightarrow z=1-x-y$

Eliminem z

$h(x,y)=1+(1-x-y)^2=1+1+x^2+y^2-2x-2y+2xy$
$x^2+y^2=1$

$\begin{cases} h(x,y)=3-2x-2y+2xy \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

(1.4). $f(x,y)=x^2+y^2-12x-8y+50$ $\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\le 0,\ y\le 0,\ x+y\ge -3\}$



$f(x,y)$ és polinòmica $\Rightarrow$ De classe C^∞ $\qquad \underset{D}{\nabla}$ TANCAT i Fitat $\Rightarrow$ COMPACTE

llavors podem fer Weierstrass

1) Punts Crítics en $\overset{\circ}{D}$ $(\nabla f=0)$

$\left.\begin{array}{l} f_x=2x-12=0 \\ f_y=2y-8=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x=6\\y=4\end{array}$ $P_0=(6,4)$ NO pq. no està interior

2) Punts Crítics en ∂D

▷ $y\le 0 \Rightarrow x=0$

$f(0,y)=y^2-8y+50=C1(y) \Rightarrow C1'(y)=2y-8=0 \Rightarrow y=4$ $\quad P_0=(0,4)$ NO pq no està en frontera

▷ $x\le 0 \Rightarrow y=0$

$f(x,0)=x^2-12x+50=C2(x) \Rightarrow C2'(x)=2x-12=0 \Rightarrow x=6$ $\quad P_0=(6,0)$ NO pq no està en frontera

▷ $x+y+3\ge 0$

$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x-8y+50+\lambda(x+y+3)$

$\left.\begin{array}{l} L_x=2x-12+\lambda=0 \\ L_y=2y-8+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+3=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1)\ \lambda=-2x+12\\(2)\ 2y-8+(-2x+12)=0\\ \quad -2x+2y+4=0\\(3)\ x+y+3=0\end{array}\Big\}$ $x=\frac{-1}{2}$,, $y=\frac{-5}{2}$ $\quad P_0=\left(\frac{-1}{2},\frac{-5}{2}\right)$ SÍ pq si està en frontera

3) Evaluem els punts

$D_0=(-3,0)$,, $D_1=(0,-3)$,, $D_2=(0,0)$,, $P_0=\left(\frac{-1}{2},\frac{-5}{2}\right)$

$f(D_0)=95$ $\quad f(D_1)=83$ $\quad f(D_2)=50$ $\quad f(P_0)=82'5$

$\boxed{\begin{array}{l}P_M=(-3,0)\\P_m=(0,0)\end{array}}$

(2). $f(x,y)=x^2+y^2$

a) Calcular i classificar els extrems relatius en el seu Dom. ~~No~~ solament punts crítics

f polinòmica $\Rightarrow$ Dom $(f)=\mathbb{R}^2$ i es de classe C^∞.

1) Punts Crítics de $f \Rightarrow \nabla f(x,y)=(0,0)$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f_x=2x=0 \\ \cdot\ f_y=2y=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}$ $\quad P_0=(0,0)$

2) Criteri del Hessià

$\cdot\ f_{xx}=2$

$\cdot\ f_{xy}=f_{yx}=0$ $\quad Hf,P=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=4>0$

$\cdot\ f_{yy}=2$ $\quad a>0 \Rightarrow$ Mínim Relatiu P_0

Aquesta funció és sempre positiva per com és llavors P_0 és mínim absolut.

NOTA: NO podem dir automàticament que per només tindre 1 punt crític ~~el mínim~~ ~~FALS~~ sigui absolut pq aquesta funció baixa fins l'infinit llavors no tindríem mínim absolut, si mínim relatiu

b) Justificar existència d'extrems ~~relatius~~ absoluts de f en conjunt $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{y\le 1-x^2}_{y=1-x^2} \wedge \underbrace{y\ge x-1}_{y=x-1}\}$

Només sabem el teorema de Weierstrass:

- f contínua? Sí pq. és polinòmica.

- K compacte? ~~Sí pq. és tancat~~

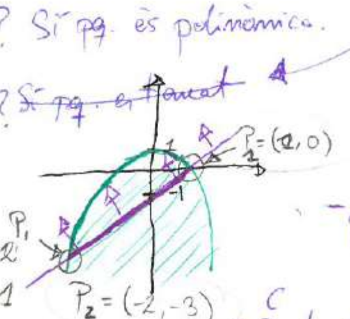
Sí pq és tancat donat que conté tots els punts frontera ▷ $\partial K=\{(x,y): y=1-x^2,\ -2\le x\le 1\}$ $\cup \{(x,y): y=x-1,\ -2\le x\le 1\}$ i $\partial K\subseteq K$

A més és fitat pq $\exists$ cercle que el conté (K) de radi $r=2$ i centre $(0,0)$ tot i que no fa falta dir res.

$1-x^2=x-1$

$2-x^2-x=0$

$\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-1)(2)}}{2\cdot(-1)}=\begin{array}{l}-2\\1\end{array}$



Podem concloure per Teorema de Weierstrass: f té màx i mín absolut sobre K

1) Punts Crítics dins de K $\quad$ 2) Punts en frontera de K $\quad$ 3) Punts intersecció condicions

c) Troba Extrems Condicionats.

$L(x,y,\lambda)=[x^2+y^2]+\lambda(\overbrace{-x^2-y+1}^{c1})$

- $L_x=2x-2\lambda x=0$
- $L_y=2y-\lambda=0$
- $L_\lambda=-x^2-y+1=0$

(1) $(2-2\lambda)x=0$

→ $x=0$
(2) $2y=\lambda$
(3) $-y=-1 \Rightarrow \underline{y=1}$ $P_3=(0,1)$

→ $(2-2\lambda)=0 \Rightarrow 2\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1$
(2) $2y=1 \Rightarrow y=1/2$ $P_4=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$
(3) $-x^2=-1+\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$ $P_5=(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$

$L(x,y,\lambda)=[x^2+y^2]+\lambda(\overbrace{x-1}^{c2})$ o $f(x)=x^2+(x-1)^2$

$f(x)=x^2+(x-1)^2$ $f'(x)=0 \Rightarrow 4x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ Aquí no hem de fer $f(x_0)$

$f'(x)=2x+2(x-1)$ $y=(\frac{1}{2})-1=\frac{-1}{2}$ $P_6=(\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$ Sinó $y(x_0)$

8. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$; $f(x,y)=x^4+y^2$

$f(x,y)=\ln(x-y)\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\xrightarrow{\ln}\mathbb{R}$
$(x,y)\to x-y\to\ln(x-y)$

a) Calcular i classificar extrems relatius en el seu dom.

f polinòmica $\Rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}^2$

▷ Punts Crítics

- $f_x=4x^3=0$ $x=0$ $P_0=(0,0)$
- $f_y=2y=0$ $y=0$ És l'únic punt crític

$f(P_0)=0$
$f(x,y)=x^4+y^2\geq 0\ \forall(x,y) \Rightarrow f(P_0)$ mínim relatiu i absolut de f.

▷ Criteri Hessià

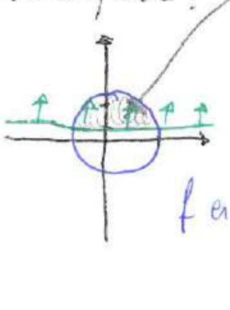
- $f_{xx}=12x^2$
- $f_{yy}=2$
- $f_{xy}=f_{yx}=0$

$\Rightarrow H_{f,P_0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$

$det(H_{f,P_0})=0$ no determina i hem de fer estudi local.

b) Justifiqueu "Citar Teorema" l'existència d'extrems absoluts en
$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \underbrace{x^2+y^2\leq 1}_{c1},\ \underbrace{y\geq\frac{1}{2}}_{c2}\}$ "Funció cont en Compacte té max i min"

- f cont? Si pq és polinòmica. $y-\frac{1}{2}\geq 0$
- K compacte? Aquest és el conjunt i la frontera és .
Donat que $\partial K\subseteq K \Rightarrow K$ fitat
K es fitat pq està dins cercle de radi 1.



Podem concloure pel Teorema de Weierstrass que com que f es contínua sobre un compacte aquesta assoleix màxim i mín absoluts.