ARBRES

Arbres i Caracterització

• **Arbre**: Graf connex i acíclic // acíclic s.g. que no té cicle.

• **Bosc**: Graf acíclic // Pot tindre diferents c.c., però totes han de ser acícliques

• **Fulla**: Tot vèrtex d'un arbre (o bosc) que tingui grau 1.

Obs: Els c.c. d'un bosc són arbres.

IMPO: Sigui $T=(V,A)$ un arbre.

1) T ha de tindre almenys una fulla (1 vèrtex).

2) a és una aresta pont i $T-a$ té 2 c.c exactament. // Això és pq. és acíclic.

3) Si $g(v)\geq 2$ llavors v és de tall i $T-v$ té $g(v)$ c.c. // "És una rama amb fulles"

4) Si u és una fulla, $T-u$ continua sent arbre. // Simplement podem l'arbre.

Proposició 1: Tot arbre ordre n té màx. mida $n-1$.

Demo per Inducció sobre els nodes. // Podria fer-se amb les arestes, però seria semblant al T3.

Cas Base: $n=1 \to m=1-1=0$ • T_1 // $n=2 \to m=2-1=1$ —• K_2, P_2

Pas Inductiu: Suposem cert que passa per $n-1$ vèrtex t.q. mida $=(n-1)-1$

Volem Demo que compleix per n vèrtexs.

Partim d'un arbre T d'ordre n. D'aquest eliminem una fulla (vèrtex de grau 1). Llavors ens queda un $T-u$ arbre d'ordre $n-1$. Apliquem H.I i podem assegurar que $T-u$ té mida màx $(n-1)-1=n-2$. Ara tornem a afegir aquesta fulla que hem tret i la connectem al arbre (amb 1 aresta). Ara tenim $T-u+u=T$ i hem de sumar +1 al ordre i a la mida. Obtenint un T d'ordre n i mida $n-1$ com volíem demo ☑.

Teorema 2: Caracterització d'arbres

Sigui $T=(V,A)$ graf d'ordre n i mida m, llavors prop són equivalents:

1) T és arbre

2) Entre cada parella hi ha 1 sol camí

3) T és connex i mida $m=n-1$

4) T és acíclic i mida $m=n-1$

1) $\Leftrightarrow$ 2) |

$\Rightarrow$| Suposem: T és arbre. Volem Deno: $\forall x,y \in V$: només hi ha 1 x-y camí.
Donat que T és arbre, sig. que és acíclic i connex, llavors serà possible arribar de x $\to$ y però només hi haurà 1 manera (Donat que no hi ha cicles). Això és així pq. si hi haguessin dos camins diferents de x $\to$ y anomenats C_1 i C_2 podríem formar un cicle.
$\Leftarrow$| Suposem: $\forall x,y \in V$ només hi ha 1 x-y camí. Volem Deno: T és arbre.
Suposem que hi ha 2 C_1 i C_2 camins x-y diferents, això implica que $C_1 \cup C_2$ conté un recorregut tancat i per la prop 1., del qual podem fer un cicle. Això no compliria amb la definició d'arbre.

1) $\Leftrightarrow$ 3) |

$\Rightarrow$| Suposem: T arbre. Volem Deno: T és connex i $m = n-1$.
T és connex per la def. d'arbre i que $m = n-1$ podem demostrar-ho per la proposició 1. // No ho tornaré a repetir.
$\Leftarrow$| Suposem: T és connex i $m = n-1$. Volem Deno: T és arbre.
Si T és connex i té la mida mínima que és $n-1$, si li traiem una aresta
$G-a$ connex: Sig. que a era aresta que formava cicle i entra en contradicció pq. la mida era $n-1$ que ja era la mínima (no contempla cicles).
$G-a$ no connex: Deixa existint 2 c.c. que compleixen $m_1 = n_1-1$ i $m_2 = n_2-1$
Llavors cada c.c. té la def. d'arbre.

1) $\Leftrightarrow$ 4) |

$\Rightarrow$| Suposem: T arbre. Volem Deno: T és acíclic i mida $n-1$.
T és acíclic per def. d'arbre i que sigui la mida $n-1$ ho demo en prop. 1.
$\Leftarrow$| Suposem: T és acíclic i mida $n-1$. Volem Deno: T és arbre
Donat que no em asseguren T connex, direm que T té k c.c. $T_1, \dots, T_k$ i def.
$n = n_1 + \dots + n_k$ i $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ on totes respecten $m_i = n_i - 1$.
$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = (n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1) = n + k(-1) = n-k$ què això fa que T sigui connex donat que veiem que $k=1$ per complir $m = n-1$. $\boxed{\checkmark}$

<u>Corol·lari</u>: $G=(V,A)$ t.q. $\forall v \in V \; g(v) \geq 2 \Rightarrow G$ té cicle.

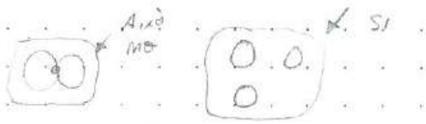
Sigui n l'ordre i m la mida tenim pel Lema de les encaixades:

Aplig. el que suposem.

$$m = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} g(v) \geq \frac{1}{2}\sum_{v \in V} 2 = \frac{1}{2} \cdot 2n = n$$ Llavors hem vist que $m \geq n$

llavors G conté algun cicle.

<u>Corol·lari</u>: G 2-regular és unió de cicles.



Sigui G' una component connexa de G qualsevol, llavors aquesta c.c. és 2-regular.
Això hem vist que G' contindrà cicle.
Tot vèrtex d'aquest graf té grau 2 i aquests vèrtexs són del cicle ⇒
Això implica que no pot ser adjacent a cap altre vèrtex del graf. Aquest cicle ha de ser una c.c. de G, en concret G'.
// Si G és connex directament tot G és un graf C_n.

<u>Corol·lari 3</u>: Bosc G d'ordre n i k c.c. te mida $n-k$.

Donat que G és bosc les c.c. son arbres on la seva mida és $n-1$.
Definim que cada c.c. té mida $m_i = n_i - 1$ on $1 \leq i \leq k$. t.q.
$$\sum_{i=1}^{k} n_i - 1 = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) + k(-1) = n - k$$ com volem. ☑

<u>Corol·lari 4</u>: Si T arbre d'ordre $n \geq 2$, T té almenys 2 vèrtexs de grau 1.

Agafem P com el camí més llarg de T sent u i v vèrtexs inici i final.
Com que P és un camí i T $n \geq 2$, sabem que $u \neq v$. // I ara hem de demo que tenen grau 1 tots dos.
Com que P és el més llarg, tant u i v <u>NO</u> poden tindre un altre veí que no sigui vèrtex del camí. Altrament P no seria el més llarg.
u i v tampoc poden estar connectats a un v_i del camí pq. faria cicle, fent així que el grau de u i v sigui 1 demostrant així que un arbre sempre tingui 2 vèrtexs de grau 1 (Fulles).

Arbres Generadors (o d'Expansió) (Spanning Tree)

Subgrafs d'un graf que són subgrafs generadors i a més, són arbres.

Recorda que subgraf generador és el graf de mida mínima connex.

// Subgraf de G que conté tots els vèrtexs i és arbre.

Teorema 5: $G=(V,A)$ connex $\Leftrightarrow$ G té arbre generador

$\Rightarrow$) Suposem: $G=(V,A)$ connex. Volem Demo: G té arbre generador.

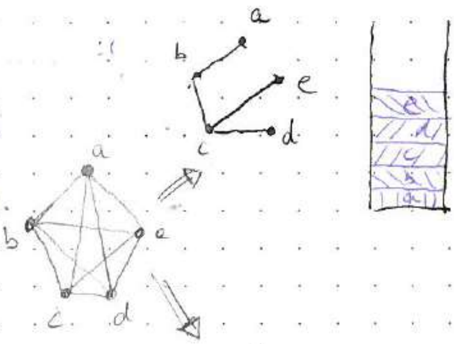
Agafem un vertex V de G i com que és connex arribarà a tots els altres. Fem totes els recorregut fins a tots els vèrtexs i aquests eliminen tots els cicles fins només tindre camins $V-V_i$ en aquest moment tindrem un arbre generador.

$\Leftarrow$) Suposem: G té arbre generador. Volem Demo: G és connex

Cosa certa, podem fer servir el mateix camí del arbre generador en G.

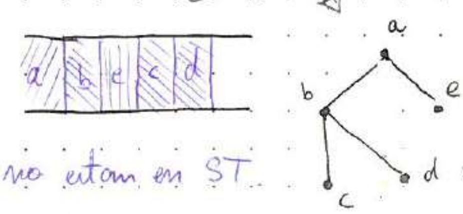
Algoritme DFS per obtindre Spanning Trees.

1. Iniciem en un vèrtex qualsevol que anomenarem "root".
2. Anem a un dels adjacents i el marquem com a vist (al root i al vèrtex actual).
3. Des d'aquest anem a un altre adjacent i repetim el pas 2. o
4. Si no tenim vèrtexs a visitar, anem al anterior i repetim.
5. Quan haguem vist tots els vèrtexs, tindrem un arbre generador.



Algoritme BFS per obtindre Spanning Tree

1. Agafem un vèrtex qualsevol que serà el "root".
2. Afegim al nostre ST els vèrtexs adjacents
3. Anem a un dels vèrtex adjacents i afegim els que no estan en ST.
4. Repetim el procés fins haver afegit tots els vèrtexs.



Teorema 7: $T'=(V,B)$ arbre gen. de $G=(V,A)$. (G connex) sino $W \subseteq V$

Després de fer qualsevol dels algoritmes anteriors obtindrem un arbre T t.q. els vèrtexs són els mateixos, però les arestes pot ser que no.

Enumeració d'Arbres

Teorema de Cayley : $\boxed{\text{Nº Spanning Tree de } K_n \text{ és } n^{n-2}}$

Farem la Demo amb Codi Prüfer:

* Preeliminars: Volem contar la quantitat d'arbres gen. que té un K_n, però això pot ser complicat. Una manera de fer-ho és crear una aplicació bijectiva 1 : 1 i que aquesta sigui més còmode de comptar (comptem seqüències). D'altra banda, al ser bijectiva tindrà una inversa.

La quantitat es refereix a arbres etiquetats (poden ser isomorfes).

1.) Busquem el vèrtex fulla enumerat més petit i anotem en la seq. P el vèrtex adj.

2.) Eliminem aquest vèrtex fulla (grau 1) i repetim el procés).

2.1) Donat que un arbre té mínim 2 fulles, això ho repetim $n-2$ vegades.

// Llavors tindrem una seq. $P = (a_1, \dots, a_{n-2})$ on $1 \leq a_k \leq n-2$

3) Quan hem acabat, donat que hem guardat els vèrtexs adj, és possible que aparegui varies vegades un a_k. Això serà degut que tenia 2 o més fulles.
Cada element de la seq. pot tindre n valors (donat ordre n) i com que hi ha $n-2$ elements, podem concloure que hi haurà $\boxed{n^{n-2}}$ formes de fer la seq.

// Si haguéssim guardat les fulles, no sabríem tanta informació i ens quedaria $(n-2)!$ de possibilitats cosa que no compleix ni un cas simple com $n = 3$.

* Recorda: Potències ≡ Combinacions | Factorial ≡ Permutacions

Cada seq. Prüfer correspon a exactament un únic arbre.

Al guardar vèrtexs adj no fa falta guardar relacions entre parells de vèrtexs, fent així més fàcil.

(1. Agafem una seq. qualsevol $[4, 4, 4, 5]$. Donat que té 4 elements $n = 6$.

(2. Busquem el vèrtex més petit ('1') i el connectem a '4' i l'eliminem seq.

(3. Repetim el procés fins que ens queden 5 i 6 que ja no hi ha elements.
Això sig. que aquests dos estan junts.

D'aquesta manera hem construït un spanning tree d'un K_6 a través de $[4, 4, 4, 5]$.

$1 \to 4,\ 2 \to 4,\ 3 \to 4,\ 4 \to 5,\ 5 \to 6$

(4.1). a_n és nombre d'arbres no isomorfs d'ordre n. Comprova

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	1	1	2	3	6	11

$n=1$ 1. Pq. puguis dir lo de les fulles $n \geq 2$. ~~$n=1$ Fals pq arbre min 2 vèrtexs~~ però, aquí tenim $n=1$.

$n=2$ Cert. o—o no hi ha una altra forma.

$n=3 \Rightarrow$ o—o—o aquest és l'únic.

$n=4 \Rightarrow \langle 1,1,1,1 \rangle$, $\langle 1,1,2,2 \rangle$

$n=5 \Rightarrow \langle 1,1,1,1,4 \rangle$, $\langle 1,1,1,2,3 \rangle$, $\langle 1,1,2,2,2 \rangle$

$n=6 \Rightarrow \langle 1,1,1,3,3,3 \rangle$, $\langle 1,1,1,1,1,5 \rangle$, $\langle 3,2,2,1,1,1 \rangle$, $\langle 1,2,2,2,2,1 \rangle$

$\langle 3,3,1,1,1,1 \rangle$, $\langle 4,2,1,1,1,1 \rangle$.

(4.2). Demo que tot arbre $n \geq 2$ bipartit.

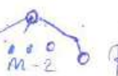
Def. P com el camí més llarg de T t.q. $P = (u_0 = v, \ldots, u_k = v)$ entre u i v qualsevol.
Donat que tot camí bipartit, definim color alternat per cada vèrtex de P.
Si P conté tots els v de T ja hem acabat.
Si P no conté tots, existeix un $v_j \in V(P)$ t.q. és adjacent al vèrtex que no està en P.
Aquest $j \neq 0$ i $j \neq k$ pq. sino P no seria el més llarg.
Partim de v_j que ja té un color definit ~~el~~ fem el camí més llarg des de v_j fins v_a on cap dels vèrtex d'aquest P' estaran en P pq. T no té cicles.
Repetim procés fins que no quedin vèrtexs per visitar. En aquest punt, donat que sempre hem construït camins i aquests son Bipartits obtindrem que tots els vèrtexs de T tenen colors alterns i T és Bipartit.

Com que no te cicles senars $\Rightarrow$ No és bipartit. × ?

(4.3). Sigui T_1 arbre ordre n i $m = 17$ i T_2 ordre $2n$. Calc m i mida de T_2.
La mida d'un arbre és sempre $m = n-1$ així que $n = 18$. Això implica que $\boxed{\text{ordre } T_2 = 36}$ i $\boxed{\text{mida } T_2 = 35}$

(4.4). Troben nº arbres t.q. (ordre n).

a) grau màxim és $n-2$. $n = 6 \Rightarrow \Delta = 4$

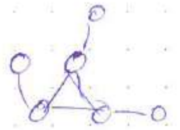
Només hi ha 1 pq.  però falta 1 vèrtex per connectar i no pot haver cicles.

b) grau màxim és $n-3$. $n = 6 \Rightarrow \Delta = 3$

Només hi ha 2. pq faltarien 2 vèrtexs i aquests poden estar connectats al mateix o en dif. vèrtex.

M-4-E-1

(4.6). Trobeu G connex on vèrtex de $g \geq 2$ siguin tall, però no sigui arbre.



Està dient que els que tinguin $g \geq 2$ han de ser tall (no tots)

(4.7). Demostra.

1) T $n \geq 2$ El nombre fulles és $2 + \sum_{g(v) \geq 3} (g(v) - 2)$

~~Sabem que un arbre sempre té 2 fulles (Vist en teoria). 2 + ___~~
~~Si un vèrtex té grau 2, aquest té 1 fulla o ~~segons~~ cap.~~
~~Si vèrtex té grau 3, aquests només poden aportar màx. 1 fulla dif a les 2 sumades.~~
~~Si vèrtex té grau 4, aquests nom poden " " , 2 fulles~~
~~Això és així pq. Suposem $\Delta = 3$ i ja hem sumat +2, el vèrtex que queda es fulla o està connectat a grau 2 que ~~poden~~ té 1 fulla o està conectat a un altre de grau 3 que apliquem les mateixes característiques.~~

~~2) Sigui Δ grau màx. de T. M_i nombre vèrtex grau i. Vegem que la fórmula anterior.~~
- ~~Sumar +2 mínim~~
- ~~Arribar des de 2 (per comoditat) fins al grau màxim restant -2 com hem vist anteriorment.~~
- ~~Multiplicant el nombre de vèrtex que hi ha amb aquell grau en graf.~~

~~$2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2) M_i$ com veiem.~~ Vaja fumetron

(4.8). G només grau 1 o 4. Té K vèrtexs de grau 4. G arbre $\Leftrightarrow$ Nº fulles $2K+2$.

$\Rightarrow$) Suposem: G arbre Volem Demo: Nº fulles $2K+2$.

Agafem P camí més llarg u-v diferents. Donat que G arbre, direm que aquest P conté les 2 fulles obligatòries que sempre ha de tindre. Llavors si u i v adjacents s'acaba la demo pq. $K = 0$ i compleix $2 \cdot 0 + 2 = 2$. Sinó, sig. que hi ha vèrtex V_i del camí de grau 4. Agafem el camí P' més llarg des de V_i fins a un vèrtex que no estigui en el camí. Podem dir que P' va de V_i fins V_ω i V_ω és fulla pq sinó P' no seria el més llarg. Això suma 1 al contador i fem el mateix amb l'altre aresta de V_i fins V_z. Total que V_i ha aportat 2 fulles Repetim i tenim $\underline{2K+2}$

4) Suponem: Nº fulles $2k+2$. Volem Demo: G arbre.
Sabem que té 2 vèrtex de grau 1 (el +2) i si son adj acaba 6 demo.
Si no són adj tenim vèrtex de grau 4 en el camí que els uneix on
veiem que cada vèrtex de grau 4(k) aporta 2 fulles. Això ~~implica~~ sig que
si V_i està connectat a un altre V_{i+1} de grau 4 tots dos aporten 2 fulles
i els vèrtexs restants de cada camí son les fulles (+2). Suponem que
hi ha un cicle. Això implicaria un altre vèrtex de grau 4 (mín 3).
On ~~aquest tenen~~ tenen 2 arestes per connectar-se entre ells i fer cicle. Això
sig. que cada vèrtex de grau 4($k=3$) aporta 2 fulles i $2\cdot 3+2=8$ però $3\cdot 2=6$
així que no poden haver cicles. És per això que 6 arbre.

(4.7) Demo

1) T $n \geq 2$. El nombre de fulles és $2+\sum_{g(v)\geq 3}(g(v)-2)$.

Sabem que $\sum_{g(v)\geq 2} g(v) + n_1 = 2(n-1) = 2n-2$

tots els vèrtex no fulla aporten 2.

$$\sum_{g(v)\geq 2} g(v) = 2n-2-n_1 = \sum_{g(v)\geq 2} 2 + n_1 - 2$$

Ni puta idea.

$$n_1 = \sum_{g(v)\geq 2} g(v) - \sum_{g(v)\geq 2} 2 + 2 \Rightarrow n_1 = \sum_{g(v)\geq 2}[g(v)-2]+2$$

3) Demo que es compleix igualtat llavors és arbre. $n_1 = \sum_{i=2}^{\Delta}[(i-2)n_i] + 2$

Volem veure que el sumatori farà que 6 mida sigui $n-1$.

Suposem la fórmula de l'enunciat.

$$2+\sum_{i=2}^{\Delta}(i-2)\cdot n_i = n_1 \Rightarrow 2+\sum_{i=2}^{\Delta} i\cdot n_i - 2(n-n_1) = 2+\sum_{i=2}^{\Delta} i\cdot n_i - 2n + 2n_1 = n_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{\Delta} i\cdot n_i + n_1 = 2n-2 \Rightarrow \text{G és arbre}$$ Ni puto cas d'aquest exercici

(4.8).

Partim suposant que $n_1 = 2k+2$ i $n_4 = k$

La suma de graus és $(2k+2)*1 + (k)*4 = 2k+2+4k = 6k+2 = 2(3k+1)$

i com que estavem fent la suma de graus, sig. que $3k+1$ és la mida.