Funcions Diverses Variables

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $z = f(x,y)$

$(x_1, x_2, \dots, x_m) \to f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ $\qquad$ (x,y)

Preliminars

Producte escalar: $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$. $\quad \langle u, v \rangle = u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_m v_m$

Norma: $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2}$

$dist(P,Q)$: $\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \dots + (q_m - p_m)^2}$

Bola de centre A i radi r = { punt de $\mathbb{R}^m$ que disten de A menys r }

$= \{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < r \}$

$= \{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 < r^2 \}$

Eq. de la circumferència

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$ $\quad$ Centre (a,b)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ $\quad$ Disc (o centre) obert

$(x-a)^2 + (y-b) \leq r^2$ $\quad$ Disc tancat

De $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$

nº $\to$ punts, vectors $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ [llista ordenada de num]

val abs $\to$ norma $\|(x_1, x_2, \dots, x_m)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| \geq 0, \ \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \\ \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \\ \|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\| \end{cases}$$

dist $\to$ distància $((x_1, x_2, \dots, x_m), (y_1, y_2, \dots, y_m)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$

$d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$

$d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ i $0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$

$d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}) \ \forall \vec{z}$

Interval $\to$ Bola on interval centrats en punt $(a-r, a+r)$

Def Bola: Bola Oberta de centre $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ "Bora no hi és" i radi $r > 0$ és el conjunt $\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : dist((x_1, x_2, \dots, x_m), (a_1, a_2, \dots, a_m)) < r \} =$

$= \{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < r \}$

Bola tancada: Tot igual però "$\leq r$"

Definim: Donat un subconjunt $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un punt $a \in \mathbb{R}^m$ és:

- Interior de A: Si existeix bola de centre 'a' i radi > 0 totalment continguda a A.  $a \in A$
- Exterior de A: Si existeix bola de centre a i radi r que no talla per res A.  $a \notin A$
- Frontera de A: Si existeix $B(a,r)$ tenim punts de A i punts que no  Si no està estudiant en la frontera pots reduir radi a que estigui tot dins o tot fora

M2-7-T-1

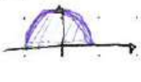
Un conjunt $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és **obert** si tots els punts són interiors. A és obert $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow \partial A \not\subseteq A$

és **tancat** si tots els punts frontera són de A

Interior d'A ($\mathring{A}$) és el conjunt de punts interior de A.

Frontera de A (∂A) és el conjunt de punts frontera de A. $\left.\begin{array}{l} A = [a,b] \\ \mathring{A} = (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \partial A = \{a, b\}$ i $A \neq \mathring{A}$

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és **conjunt tancat** si $\partial A \subseteq A$ (Conté tots els punts frontera).
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **l'adherència de A** és $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ el més petit conjunt tancat que conté A.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és **fitat** si està contingut en alguna bola $B(a,r)$.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és **compacte** si és tancat i fitat. Conté tota la frontera i està dins d'una bola. És com el "conjunt fitat"

⚠ Hi ha conjunts que no són ni oberts ni tancats pq poden tindre una part de frontera però no tota. Per exemple $\{3x^2 + y^2 \leq 1$ i $y > 0\}$ 

Corba de $\mathbb{R}^2$

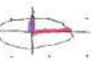
És el conjunt de punts (x,y) que satisfan una eq $F(x,y) = 0$.

Si podem aïllar y, $y = f(x)$ és la gràfica d'una funció. #A vegades no es pot

Exemples

Circumferència Centre (a,b), $r \geq 0$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Paràbola: $y = ax^2 + bx + c$ Recta: $Ax + By + C = 0$ Hipèrbole: $x^2 - y^2 = 1$ 

El·lipse de centre $(0,0)$ i semieixos a, b: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  Semieix Menor / Semieix Major

// Semieix Major és la meitat del diàmetre més llarg

// Semieix Menor és un segment de la recta en forma angle recte amb semieix major

Funcions de diverses Variables

$A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ on A és el dom. de la funció
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Exemple: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$] $f(x,y) = \ln(1 + xy)$

$\text{Dom} = A = \{(x,y) \mid 1 + xy > 0\} = \{(x,y) \mid xy > -1\}$

$f(A)$ recorregut $\{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Límit

$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = L$ si per tot $\varepsilon > 0$. Existeix un radi $\delta > 0$ t.q. $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$ per tot $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta)$

f cont. en $\vec{a} \in A$ si $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x})$ existeix i val $f(a)$.

Exemple:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és polinòmica si és una suma de monomis $c x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ on $i_1 + i_2 + \dots + i_n =$ grau

on $i_n \geq 0$ són nombres naturals i $c \in \mathbb{R}$ és una constant. $4x^2y + y^3 + y + x^2$ (De grau 3).

! Les funcions polinòmiques són contínues a tot $\mathbb{R}^n$.

Continuïtat

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f", "\text{polinòmica}"'] \arrow[rr, bend right, "\text{contínua *}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g", "\text{cont}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

*Sempre que la imatge de f estigui dins del domini on g és contínua.

Operacions

Les operacions amb funcions contínues satisfan el mateix que en 1 variable: Suma, Producte, Quocient

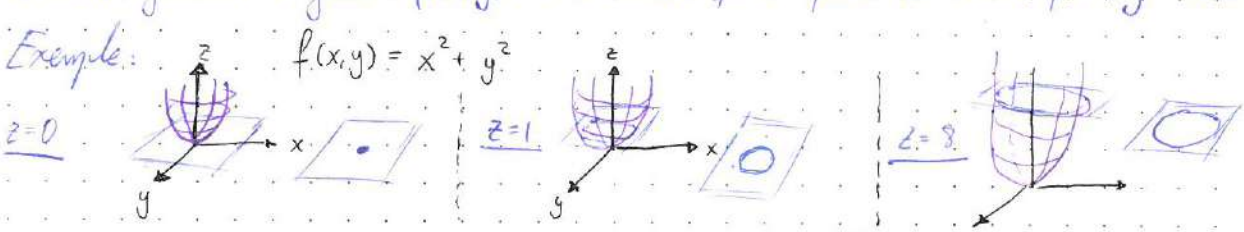
Corbes de nivell

(Corba de $\mathbb{R}^2$ però explicació millorada).

Sabem que en $\mathbb{R}^3$ podem fer plans on en aquest cas farem servir $z = k$ i plà xy. #Com paral·lel al terra

Llavors igualem la funció $f(x,y) = z$ i veiem quins punts del nostre plà xy tallen la funció.

Exemple: $f(x,y) = x^2 + y^2$



Veiem que si haguéssim seguit el mateix plà en queda:  on podem deduir que quan menor és la distància entre les corbes graficades és pq. la superfície creix exponencialment.

Resum de Conceptes

$A =$

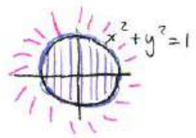
Concepte	Explicació
Obert	Conjunt on tots els punts tenen un entorn contingut en A. Per exemple $A=(a,b)$ és obert pq. mai es pot arribar a 'a' i sempre hi haurà punt amb entorn només de A.
Tancat	Conjunt que conté tots els punts límit. Per exemple $[a,b]$
Interior $\mathring{A}$	Punts que tenen entorn completament contingut dins el conjunt $\mathring{A}$ `if (A == Obert) Å = A, ∂A ⊄ A; else Å ≠ A;`
Frontera ∂A	Punts que tenen entorn amb punts del conjunt i de fora. #El mateix punt compta ∂A `if (A == Closed) ∂A ⊆ A; else ∂A pot no estar en A;`
Adherència $\bar{A}$	Conjunt dels punts frontera i del conjunt A. Serveix com per tancar recinte $\bar{A} = A \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A$
Acotat	Si el conjunt pot estar contingut en una Bola(a,r). #Si no tendeix al infinit.
Compacte	`if (A == Closed && A == Acotat) A = Compacte; else A = No Compacte;`

(7.1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

a) Dibuixar

1) Es dibuixa "la igualtat"
És una corba $x^2+y^2=1$
que és circum de centre $(0,0)$ i $r=1$

2) Identificar la regió del conjunt.
En aquest cas interior.



$x^2+y^2>1$
$x^2+y^2<1$
$x^2+y^2=1$

3) Decidir si la frontera (corba) hi és. En aquest cas no.

b) Frontera de A
$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$
Obs. $\partial A \cap A = \emptyset$

Interior de A
Interior de A $(\mathring{A}) = A$
Obs: $\mathring{A} = A - \partial A = A$.

Adherència
Adherència de A $(\bar{A}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$
$\bar{A} = A \cup \partial A$

c) És obert A?
Sí pq. $A = \mathring{A}$ (no té cap punt frontera)

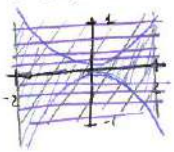
És tancat?
No pq $A \neq \bar{A}$

d) És fitat?
Sí pq. està contingut en un cercle radi 2 i centre $(0,0)$ # Per exemple (Pot ser r qualsevol >1)
De fet, ell mateix és cercle.

És compacte?
Compacte $\equiv$ Tancat i fitat i en aquest cas no és tancat.

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x^2,\ y \neq 0,\ x \in [-2,2]\}$ // Punts que compleixen les tres condicions.

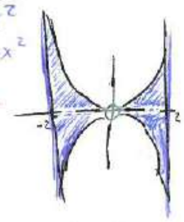
a) Dibuixar



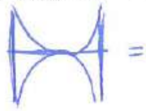
1) Pintem $x=2$ (igualtat)
2) Pintem $x<2$ (regió)
3) Pintem $x=2$ (Frontera)

1) Pintem $y \neq 0$
2) Pintem $y>0$ i $y<0$

a) $|y| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq y \leq x^2$
i) Pintem $y=x^2$ i $y=-x^2$
Veiem que $y \neq 0$



b) Frontera de B



$= \partial B = \cup \cup \cap \cup - \cup | \cup | = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, -2 \leq x \leq 2\}$ [∪]
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2, -2 \leq x \leq 2\}$ [∩]
$\cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\}$ [—]
$\cup \{(-2,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq y \leq 4\}$ [|] # On agafem $-4, 4$ pq són els punts de tall ($2^2=4$, $-2^2=-4$)
$\cup \{(2,y) \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4\}$ [|]

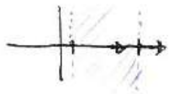
Interior de A
$\mathring{B} = B - \partial B$ No coincideix amb B així que $\mathring{B} \neq B$ no és obert

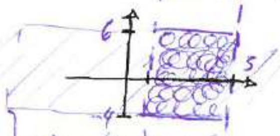
Adherència de A
$\bar{B} = B \cup \partial B$ $\bar{B} \neq 0$ pq. estem afegint la frontera [−] i aquesta no està def en B $\Rightarrow$ No és tancat

⑤. Dibuixa

Tota la frontera no pertany a A

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-3| < 2, |1-y| \le 5\}$ A no és obert ni tancat $\Rightarrow$ Tota la frontera, sí pertany a A.





$\rhd$ $-2 < x-3 < 2$

$\square\rhd$ $-2 < x-3 \Rightarrow 1 < x$

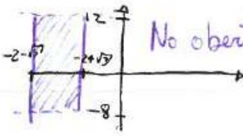
$\square\rhd$ $x-3 < 2 \Rightarrow x < 5$ $\Big\}$ $\underline{1 < x < 5}$

$\rhd$ $-5 \le 1-y \le 5$

$\square\rhd$ $-5 \le 1-y \Rightarrow -6 \le -y \Rightarrow 6 \ge y$

$\square\rhd$ $1-y \le 5 \Rightarrow -y \le 4 \Rightarrow y \ge -4$ $\Big\} \Rightarrow \underline{-4 \le y \le 6}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2+4x+1| = -x^2-4x-1, |y-2| < 10\}$



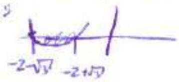
No obert ni tancat.

$\rhd$ $|x^2+4x+1| = -x^2-4x+1$

#Només compleixen aquests punts.

$\rhd\rhd$ Si $x^2+4x+1 \ge 0 \Rightarrow x^2+4x+1 = -x^2-4x-1 \Rightarrow 2x^2+8x^2+2 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = -2+\sqrt{3}}$, $\boxed{x = -2-\sqrt{3}}$

$\rhd\rhd$ Si $x^2+4x+1 < 0 \Rightarrow -x^2-4x-1 = -x^2-4x-1$ $\boxed{\forall x \in (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})}$ # Pq. al final és una parabola i em importa els punts d'aquesta que son negatius



$\rhd$ $-10 < y-2 < 10 \Rightarrow \boxed{-8 < y < 12}$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1, x < y\}$

No obert ni tancat

$\rhd$ $x^2+y^2 \le 1$ Son tots els punts d'una circumferència de ràdi 1. (Centre (0,0)). Amb frontera.

$\rhd$ $x < y$ Aquests són els punts superiors de $y = x$ (no inclos)

⑥.

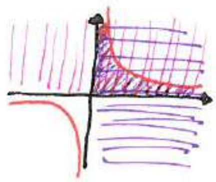
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overbrace{x^2-y^2 < 1}^{\text{Hipèrbole}}\}$

$y=x$ La frontera NO

Veiem que A no està fitat.

- $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2 = 1\} \Rightarrow$ No tancat
- $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2 < 1\} = A \Rightarrow$ A és obert $\Rightarrow$ No compacte (Donat que no fitat)
- $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2 \le 1\}$ # $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy \le 1\}$

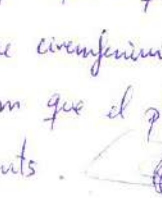


$xy \le 1 \Rightarrow y \le \frac{1}{x}$

Veiem que A no està fitat.

- $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overbrace{y = 0}^{\text{Eix } X}, \underbrace{x \ge 0}_{\text{Part pos}}\} \cup \{\overbrace{x = 0}^{\text{Eix } Y}, \overbrace{y \ge 0}^{\text{Part pos}}\} \cup \{y = \frac{1}{x}, y > 0, x > 0\}$ Part positiva
- $\mathring{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy < 1\}$ $\rightarrow$ Recorda que no pots $y = \frac{1}{0}$ o $0 = \frac{1}{y}$
- $\bar{B} = \mathring{B} \cup \partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, xy \le 1\} \ne B \Rightarrow$ No tancat

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x+y+z = 1}_{\text{Pla}}, \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 1}_{\text{Esfera rellena}}\}$ $r = \sqrt{1} = 1$



Són els punts del pla que tallen esfera rellena

Veiem que $\underline{C}$ està fitat. $\bar{C} = \mathring{C} \cup \partial C = \emptyset \cup \partial C = C = \bar{C}$

- $\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1, x^2+y^2+z^2 \le 1\} = C$
- $\mathring{C} = \emptyset$ Per ser interior en $\mathbb{R}^2$ han de fer una circumferència al voltant d'un punt, però aquí estem en $\mathbb{R}^3$ i hem de fer una circumferència. Que un punt esigui interior és que podem fer una circumferència i que TOTS els punts estiguin dins de C, però veiem que C és la intersecció del pla i esfera i com que el pla és 2D i estem en $\mathbb{R}^3$(3D) en aquest plà no podrem fer una esfera que agafi tot els punts.

Es per aquest motiu que la frontera també és tot C, pq. tots els punts de la intersecció del plà amb l'esfera sols hi pot fer una esfera en aquell punt és de C, però la resta no.

⑦ Troba i representa Dom. de les funcions

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ Dom $(f) = \{x\,y \in \mathbb{R}^2\}$ Tots els punts del pla

b) $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$1-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$ / Dom$(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

c) $h(x,y) = \ln(x+y)$

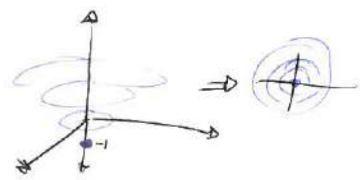
$x+y > 0 \Rightarrow y > -x$ Dom $(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}$

⑧. Dibuixa les corbes de nivell.

b) $z(x,y) = x^2+y^2-1$; Busquem fer que $x^2+y^2-1 = K$ on K és el nivell (També li diuen z).

Valors de $K = z$ de l'conjunt $\{-2,-1,0,1,2\}$.

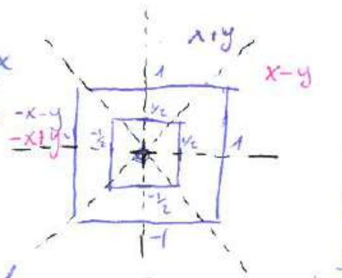
- $z=-2 \Rightarrow x^2+y^2-1=-2 \Rightarrow x^2+y^2=-1$ Això és impossible pq suma de 2 positius no pot ser neg.
- $z=-1 \Rightarrow x^2+y^2-1=-1 \Rightarrow x^2+y^2=0$ Punt $(0,0)$.
- $z=0 \Rightarrow x^2+y^2-1=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$ Circumferència $r=\sqrt{1}$ i centre $(0,0)$
- $z=1 \Rightarrow x^2+y^2-1=1 \Rightarrow x^2+y^2=2$ Circumferència $r=\sqrt{2}$ i centre $(0,0)$
- $z=2 \Rightarrow x^2+y^2-1=2 \Rightarrow x^2+y^2=3$ Circumferència $r=\sqrt{3}$ i centre $(0,0)$.



c) $z(x,y) = |x+y| + |x-y|$

$|x+y| = \begin{cases} x+y & \text{si } x \geq 0 \Rightarrow y \geq -x \\ -x-y & \text{si } x < 0 \Rightarrow y < -x \end{cases}$

$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq 0 \Rightarrow y \leq x \\ -x+y & \text{si } x < 0 \Rightarrow y < x \end{cases}$



Hem de fer les 4 possibles comb.

I) $(x+y)+(x-y) = 2x$

II) $(x+y)+(-x+y) = 2y$

III) $(-x-y)+(x-y) = -2y$

IV) $(-x-y)+(-x+y) = -2x$

Els valors negatius de z no valen pq estan en valor absolut.

$z=0$	$z=1$	$z=2$
I) $2x=0 \Rightarrow (0,0)$	I) $2x=1$ $\Rightarrow \boxed{x=1/2}$	I) $2x=2$ $\Rightarrow \boxed{x=1}$
II) $2y=0 \Rightarrow (0,0)$	II) $2y=1$ $\Rightarrow \boxed{y=1/2}$	II) $2y=2$ $\Rightarrow \boxed{y=1}$
III) $-2y=0 \Rightarrow (0,0)$	III) $-2y=1$ $\Rightarrow \boxed{y=-1/2}$	III) $-2y=2$ $\Rightarrow \boxed{y=-1}$
IV) $-2x=0 \Rightarrow (0,0)$	IV) $-2x=1$ $\Rightarrow \boxed{x=-1/2}$	IV) $-2x=2$ $\Rightarrow \boxed{x=-1}$