INDUCCIÓ

Inducció Simple

Es bassa en aquest principi : $\forall n \geq n_0 : [P(n)] \equiv P(n_0) \wedge \forall n > n_0 : [P(n-1) \rightarrow P(n)]$

Primer fem el pas base per saber d'on partim $P(n_0)$. ! MOLT IMPORTANT

Després el pas inductiu Sigui $n > n_0$

- Hipòtesi d'inducció $P(n-1)$
- Volem veure (Tesi d'inducció) $P(n)$

Ex: $2^n > n^2 \quad n > 4$

Pas Base: Agafem un valor de n (ha poder ser el més petit). $n = 5$

Per $n = 5 \rightarrow 2^5 > 5^2 \rightarrow 32 > 25 \rightarrow$ Es compleix per $n = 5$.

Hipòtesi Inducció: Supossem que enunciat complirà per un n arbitrari anomenat K.

Això significa que $\underset{①}{2^K > K^2}$ on $K > 4$ es compleix.

Volem demostrar que també es complirà per $n = K+1$

Això significa que creiem que $\underset{②}{2^{K+1} > \overbrace{(K+1)^2}^{K^2+2K+1}}$ es complirà.

Passos Inducció: #Volem anar de ① $\rightarrow$ ② no al revés.

Sabem que $K>4$ compleix
Això és igual a dir $K \cdot K > 4K$
Així que fem sub.

$2^K > K^2 \rightarrow 2^K \cdot 2 > 2K^2 \rightarrow 2^{K+1} > 2K^2 \rightarrow 2^{K+1} > K^2 + K^2 \rightarrow 2^{K+1} > K^2 + (K \cdot K) \rightarrow$

$\rightarrow 2^{K+1} > K^2 + (4K) \rightarrow 2^{K+1} > K^2 + 2K + \underbrace{(2K)}_{K>4 = 2K > 2 \cdot 4 = 2K > 8} \rightarrow 2^{K+1} > K^2 + 2K + (8) > K^2 + 2K + 1$

$\rightarrow 2^{K+1} > K^2 + 2K + 1 = (K+1)^2$

Podem veure que hem demostrat com a cert el que creiem a l'inici.

Inducció Completa

Em compter de veure una implicació, agafem totes les implicacions anteriors per demostrar lo següent.

① . $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ per $n \geq 0$

Pas base: $\sum_{i=0}^{0} i = 0 \Rightarrow \frac{0(0+1)}{2} = 0$ per tant $n = 0$ es compleix.

Hipòtesi Inducció: Per $n > n_0$, pera a $n > 0$, tenim $P(n-1)$. Suposem que
$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2};$$

Volem veure si $P(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;

$$\sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n-1} i + n \underset{\text{sub}}{\overset{}{=}} \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n^2 - n + 2n}{2} =$$
$$= \frac{n^2+n}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$ Considerem que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ☺

④. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ per $n \geq 2$

Pas base: $\sum_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Si $n = 2$ es compleix $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)$

No hem de fer cap moviment pq perdim de 2 fins 2

Hipòtesi Inducció: Per $n > n_0$, que és aquel que diu $n > 2$., suposem $P(n-1)$
$$\prod_{k=2}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n-1};$$

Això significa que $n-1 \geq 2$ i que sempre retornarà un número dif. de 0 $\Rightarrow$ Productori NO buit.

Volem veure que si $P(n) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$;

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot n = \frac{1}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \overset{\text{Algebra}}{=} \frac{1}{n}$$ ☺

⑥ $3^n < (n+2)!$ per $n \geq 0$ $\quad (n+2)! = \overbrace{(n+2)(n+2-1)(n+2-2)\cdots(1)}^{\text{Per definició}}$

Pas base: $3^0 = 1$; $(0+2)! = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow 1 < 2$ llavors per $n = 0$ es compleix.

Hipòtesi Inducció: $n - 1 \geq 0$ i ho volem per a n

Suposem que $3^{n-1} < ((n-1)+2)!$ i volem $3^n < (n+2)!$

Tenim que $3^n = 3^{n-1} \cdot 3$ i per (HI) $3^{n-1} < ((n-1)+2)!$

Donat que $x = y \rightarrow 2x = 2y$

Per tant $3^n = 3^{n-1} \cdot 3 < ((n-1)+2)! \cdot 3$, per continuar mantenint igualtat.

Volem aconseguir que aquest 3 sigui $(n+2)!$ (que és el que falta pq l'altre és $(n-1)$)

Per la (HI) $n-1 \geq 0$ podem modificar $n \geq 1 \rightarrow n+2 \geq 1+2 \rightarrow n+2 \geq 3$

$3 \in n+2$

Ara sabem que $((n-1)+2)! \cdot 3 \leq ((n-1)+2)! \cdot (n+2) = (n+2)!$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{a}{3^n} < \underbrace{((n-1)+2)! \cdot 3}_{b} \\ \underbrace{((n-1)+2)! \cdot 3}_{b} \leq \overbrace{((n-1)+2)!\,(n+2)}^{c} \end{array}\right\}$$ Fent axiome $\begin{array}{l} a < b \\ b \leq c \end{array} \Rightarrow a < c$

Podem ajuntar-ho: $3^n < ((n-1)+2)!\,(n+2) \Rightarrow \boxed{3^n < (n+2)!}$

$\hookrightarrow$ Ja tenim HI correcta ☺

⑧. Fibbonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per tot $n > 1$. El nombre $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisfà $\phi^2 = \phi + 1$

Volem demostrar que $\Phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$ per tot $n \geq 1$.

Cas base: $(n=1)$ $\Phi = F_1 \Phi + F_0 \rightarrow \Phi = 1\phi + 0 = \phi$; Per $\phi = \phi$ així que bé.

Hipòtesi inducció: Suposem cert per $n-1 \geq 1$ i volem veure per n.

Suposem que $\phi^{n-1} = F_{n-1}\phi + F_{n-2}$ i volem que $\Phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$

Tenim que $\phi^n = \phi^{n-1} \cdot \phi = (F_{n-1}\phi + F_{n-2}) \cdot \phi \underset{dist}{=} F_{n-1}\phi^2 + F_{n-2}\phi = F_{n-1}(\phi+1) + F_{n-2}\phi =$

$= F_{n-1}\phi + F_{n-1} + F_{n-2}\phi = \phi \cdot (F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-1} = \phi F_n + F_n =$

Ara sabem que $\phi^n = \phi F_n + F_n$ ☐ Falta Acabar

⑨. $f(n)$ mínim nombre passos per resoldre problema.

$$f(n) = \underbrace{f(n-1)}_{\text{Moure totes menys la base}} + \overbrace{1}^{\text{Moure l'últim pesa}} + \underbrace{f(n-1)}_{\text{Moure totes un altre cop a sobre de la base}} \longrightarrow f(n) = 2f(n-1) + 1$$

Tests: $f(0) = 0$; $f(1) = 1 + 2f(1-1) = 1$; $f(2) = 1 + 2f(2-1) = 3$; $f(3) = 1 + 2f(3-1) = 7$; $f(4) = 15$; $f(5) = 31$

Per inspecció sembla que $f(n) = 2^n - 1$. Veiem per inducció que $f(n) = 2^n - 1$

Cas base: $(n=0) \rightarrow f(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Hipòtesi Inducció: $f(n-1) = 2^{n-1} - 1$ per $n-1 \geq 0$

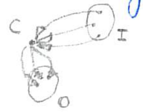
㊸. En un determinat país [...]

Proba Base: $n = 1$, no fa falta moure's. $n = 2$ $\underset{A}{\circ} \longrightarrow \underset{B}{\circ}$ existeix ☑.

H.I.: Si tenim s ciutats amb $s < n$ tal que $\exists$ 1 camí en una sola direcció entre qualsevol parell de ciutats, llavors tenim un R recorregut que passa per tots punts 1 cop.

Per la Hipòtesi és cert per tots amb s entre 1 i $< n$; $s \geq 1$ i $s < n$

Volem demostrar per n ciutats amb C qualsevol sigui I el conjunt de ciutat que tenen el camí entre C i la ciutat que va a C.



Sigui O la que va de C a la ciutat.

- Qualsevol ciutat dif. de C està en I o O.
- En I hi ha menys de n ciutats $I < n$ # Pq C per exemple no està.
- En O hi ha menys de n ciutats $O < n$ # Igual que ↑

(45). Tot $n \geq 2$ és primer o descompon en nombre primers. $n = p_1 \cdots p_k$ per $k \geq 1$ ⟶ Ningú diu que siguin diferents.
(Pista: Si n possitiu no és primer llavors $n = rs$ per $r, s \in \mathbb{Z}$ amb $2 \leq r, s < n$)

Cas Base: $n = 2$; $n = 2$. on no hi ha nombres enters possitius més petits.. donat que $n = rs$ i $r \leq 2$ $s < n$. (Dit d'una altra manera 2 és primer). ↳ És l'única manera de descomposició en prod. $n = 2$ de primers.

H.I.: Suposem que qualsevol m amb $m \geq 2$ i $m < n$ el podem posar com a prod. de primers. Ara volem veure que, aleshores, podem trobar una descomposició de n en nombres primer.
Afirmem $m \geq 2$ pq hem demostrat el cas $n = 2$, si fessim $m > 2$, $m = 3$ i no sabem que passa.

Cas 1: Si n és primer, ja ho tenim $n = p$ per a p primer i ja està.

Cas 2: Si n no és primer, llavors usem "la pista" i podem passar $n = r \cdot s$ amb $2 \leq r < n$ i $2 \leq s < n$.
Per H.I. podem desenvolupar $s = \underbrace{p_1 \cdots p_l}_{\text{primers}}$ per tant, podem reescriure $n = rs$
$r = \underbrace{q_1 \cdots q_t}_{\text{primes}}$

Aquí p i q són primers però els mencionem diferent.

com $\boxed{n = (p_1 \cdots p_l) \cdot (q_1 \cdots q_t)}$. Aquesta nova manera d'escriure el nombre n és un producte de primers.

(22). $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ per $n \geq 1$ Farem aquesta dem. per Inducció. ⟵ Ficar com ho faràs.

Cas Base: Agafem $n = 1$ i probem les dues bandes igualtat. $\frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1+2}{2^1} \to \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ☑.

Pas Inducció: Hem demostrat que $n = 1$ compleix. Sigui $n > 1$ arbitrari
Per Hipòtesi Inducció: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$ ▽ Ho fiquem simplificat directament.
Volem demostrar que $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Llavors: $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} + \frac{n}{2^n} = [H.I.]$

$= \left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}\right) + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+1}{2^n \cdot \frac{1}{2}} + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2(n+1)}{2^n} + \frac{n}{2^n} =$

$= 2 + \frac{-2n - 2 + n}{2^n} = 2 + \frac{-n-2}{2^n} = \boxed{2 - \frac{n+2}{2^n}}$ Hem arribat on volien així que queda demostrada la igualtat $\forall n$

• Podem aplicar H.I. en $\underline{I}$ ~~patrimi~~ tinc recorregut P_I que passa per cada ciutat de I. } $\exists$ un sol cop
• Podem aplicar H.I en $\underline{O}$. Tinc recorregut P_O que passa per totes ciutats O.

Ara recorrem P_I i en el punt final de P_I → anem a C → de C anem a inici de P_O i fem tots els recorreguts en O.

$|O| + |I| = n-1$ ← Aquesta és C

Llavors hem demostrat que hi ha un camí que passa per totes les ciutats.

~~(44). Xocolate $n \times m$ peces, es fan $n \cdot m - 1$ talls. (Tallar 1 de les dues) per deixar-lo 1 tros.~~

~~Cas Base: $n = m = 1 \to 1 \cdot 1 - 1 = 0$ talls ; $n = 2$ i $m = 1$ o $n = 1$ i $m = 2$~~
~~$2 \cdot 1 - 1 = 1$ tall ; $1 \cdot 2 - 1 = 1$ tall~~

~~Hipòtesi Inducció: Per $1 \leq a \leq n$ i $1 \leq b < m$ o Per $1 \leq a < n$ i $1 \leq b \leq m$ } Això significa que tall sols rectangles~~
~~$a \geq 1$ o $b \geq 1 \to n = a + b$; $r \geq 1$ o $s \geq 1 \to m = r + s$~~

~~Tenim que, si hem de tallar xocolate de dimensions $a \cdot b$ necessitem $a \cdot b - 1$ talls.~~

~~Si tenim un rectangle de mides $a \times b$ amb alguna mida estrictament menor i l'altra menor o igual, aleshores el resultat és cert.~~

(44). Xocolate $n \times m$ peces, fan falta $n \times m - 1$ talls per deixar-lo 1×1.

Cas Base: $n = m = 1 \to 1 \cdot 1 - 1 = 0$; $n = 2$ i $m = 1$ o $n = 1$ i $m = 2$
$2 \cdot 1 - 1 = 1$; $1 \cdot 2 - 1 = 1$ ✓

Hipòtesi Inducció: Volem demostrar que és cert per tota $n \times m$. Podem agafar i veure si es compleix per $n \times (m+1)$ o $(n+1) \times m$: Suposant que $n \times m - 1 = t$ és cert.

• Quan afegeixes una nova fila/col. aquesta ha de ser tractada independent (Per naturalesa enunciat) això significa que fa falta '+1' tall.

• Un cop tallada, sigui fila/col, haurem de fer talls per deixar-lo 1×1. Això significa que haurem de fer $n-1$ o $m-1$ (Donat que físicament no podem fer els mateixos talls si volem repetir 1×1)
$\underline{n\_talls} = n - 1 + 1 = \underline{n}$; $\underline{m\_talls = m}$

⚠ No oblidem sumar el tall independent: Agafem el cas d'una columna més..

• Agafem una de les dues HI per veure si compleix igualtat. $n \times (m+1) - 1 = t + n\_talls = t + n$.
$\underline{n \times (m+1) - 1}$ necessita $\underline{t}$ talls + els talls per la files

• Substituim $n \times m - 1 = t$ a l'equació $n(m+1) - 1 = n \times m - 1 + n \to n(m+1) - 1 = n(m+1) - 1$

Això significa que $\underline{n \times m - 1 \text{ talls}}$ serà cert per qualsevol $\underline{n \times m}$.

(24). $\prod_{i=3}^{n}\left(1-\frac{2}{i}\right)=\frac{2}{n(n-1)}$ per $n \geq 3$

Hem de fixar-ho directament. No val igualtats.

$(n-1)((n-1)-1)=(n-1)(n-2)$
$=n^2-3n+2$

Cas Base: $n=3$; $1-\frac{2}{3}=\frac{2}{3(3-1)} \rightarrow \frac{1}{3}=\frac{2}{6} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ☑ compleix.

Pas Inducció: Hem demostrat que compleix per $n=3$. Sigui $n\geq 3$ n arbitrari. $\Bigg\}\ \prod_{i=3}^{n-1}\left(1-\frac{2}{i}\right)=\frac{2}{\boxed{(n-1)(n-2)}}$

Volem demostrar que $\prod_{i=3}^{n}\left(1-\frac{2}{i}\right)=\frac{2}{n(n-1)}$

✓

Llavors:

$$\prod_{i=3}^{n}\left(1-\frac{2}{i}\right)=\prod_{i=3}^{n-1}\left(1-\frac{2}{i}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\overset{H.I.}{=}\left(\frac{2}{(n-1)(n-2)}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{2}{(n-1)(n-2)}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)=$$

$$=\frac{2(n-2)}{n((n-1)(n-2))}=\frac{2(n-2)}{n(n-1)(n-2)}=\boxed{\frac{2}{n(n-1)}}$$

Ja hem demostrat que compleix per qualsevol n (la igualtat de l'enunciat).

(33). Dem. $2^{3n+1}+3\cdot 5^{2n+1}$ multiple de 17 per $n\geq 0$.

Cas Base: $n=0$; $2^{3(0)+1}+3\cdot 5^{2(0)+1}=2^1+3\cdot 5^1=17$ ☑ 17 multiple 17.

Pas Inducció: Agafem un k arbitrari t.q. $n=k$ on $k\geq 0$.

Suposem que es compleix per aquest k t.q. $\exists a: 2^{3k+1}+3\cdot 5^{2k+1}=17a$

Volem demostrar que tmb compleix per $k+1>0$.

Això ens queda t.q. $\underbrace{2^{3k+4}+3\cdot 5^{2k+3}}$ ← Això és el que volem arribar a tindre.

$\exists a: 2^{3k+1}+3\cdot 5^{2k+1}=17a \rightarrow 3\cdot 5^{2k+1}=17a-2^{3k+1} \rightarrow 3\cdot 5^{2k+1}\cdot 5^2=17a\cdot 5^2-2^{3k+1}\cdot 5^2 \rightarrow$

← Aquí ja tenim part

Ara ja tenim tot el que busquem

$\rightarrow 3\cdot 5^{2k+3}=17a\cdot 5^2-2^{3k+1}\cdot 5^2 \rightarrow 3\cdot 5^{2k+3}+2^{3k+4}=17a\cdot 5^2-2^{3k+1}\cdot 5^2+2^{3k+4} \rightarrow$

$2k+3$ d'on volem arribar

$$\rightarrow 3\cdot 5^{2k+3}+2^{3k+4}=17a\cdot 5^2-2^{3k+1}\cdot 5^2+2^{3k+1}\cdot 2^3$$
$$=17a\cdot 5^2-2^{3k+1}(5^2-(2^3))$$
$$=17a\cdot 5^2-2^{3k+1}(25-8)$$
$$=17a\cdot 5^2-2^{3k+1}(17)$$
$$=17(\underbrace{25a-2^{3k+1}})$$

→ Aquest resultat continua essent un enter així que hem demostrat que $2^{3k+4}+3\cdot 5^{2k+3}$ és multiple de 17. $(k+1)$

(55). $a_0 = 2$ i $a_n = 3a_{n-1} + 6$ per $n > 0$. ← Successió.

Demo per inducció que $a_n = 3^n - 3$ per tot $n \geq 0$.

Cas Base: $n=0$; $a_0 = 3^0 - 3 = 1-3 = -2$ (Coincideix amb a_0 de la succeció).

Pas inductiu: Suposem que fórmula és compleix per $n-1 \geq 0$ i volem demostrar que compleix per $n > 0$. Llavors tenim que suposem cert $a_{n-1} = 3^{n-1} - 3$.

Partim de $a_n = 3a_{n-1} + 6$, sub de H.I., $a_n = 3\cdot(3^{n-1} - 3) + 6$;

$a_n = 3\cdot(3^n \cdot \frac{1}{3} - 3) + 6 = (3^n \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} - 3\cdot 3) + 6 = 3^n - 9 + 6 = \boxed{3^n - 3 = a_n}$ Hem arribat on volíem. Hem demostrat per inducció que la fórmula que simplifica la succeció és certa.

(56). $\begin{cases} a_1 := 3 \\ a_2 := 5 \\ a_n := 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \; n > 2 \end{cases}$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
		$15-6$	$3\cdot 9 - 2\cdot 5$	$3\cdot 17 - 2\cdot 9$
3	5	9	17	33

Dem $\forall n \geq 1$ $a_n = 2^n + 1$ Demo per inducció

Cas Base: $(n = 1, 2)$ Hem de veure que compleix per $n = 1$ i $n = 2$

Es a dir $a_1 = 2^1 + 1 = 3$ ☑ ; $a_2 = 2^2 + 1 = 5$ ☑

Pas Inductiu: Volem demostrar que compleix per n t.q. $a_n = 2^n + 1$

Suposem que és cert per ($n-2$ i $n-1$ ⟿ n)

$\begin{cases} a_{n-1} = 2^{n-1} + 1 \\ a_{n-2} = 2^{n-2} + 1 \end{cases}$ Sigui $n > 2$ arbitrari

Això ho diu en enunciat

$\cdot\, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ [D'on partim]

$a_n = \underbrace{3(2^{n-1} + 1) - 2(2^{n-2} + 1)}$ [Sub. de H.I] → Aquí hauré de l'indicació

$a_n = 3\cdot 2^{n-1} + 3 - 2^{n-1} - 2$ [Distributiva]

$a_n = 3\cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} + 1$ [Suma]

$a_n = 2\cdot 2^{n-1} + 1$ [$3x - x = 2x$]

$a_n = 2^n + 1$ [Ja està!]