Funcions Derivables

Conceptes bàsics

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a punt del domini. f és derivable en a si existeix $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Aleshores posem $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

A subconjunt del Dom. f. f derivable en A vol dir derivable en tots els punts de A.

Proposició: f derivable $\Rightarrow$ f contínua. Al revés no. Exemple $f(x) = |x|$ Contínua en $a=0$ No deriv. en $x=0$

Si la funció "té punxa" no serà derivable en aquell punt.

Interpretació geomètrica

f derivable en $a \Leftrightarrow \exists$ recta tangent a f en a. $y = mx + n$

En aquest cas, la recta tangent és $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

$f'(a)$ és la pendent de la recta tangent a f en el punt a.

Exemple: $f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$ // $a = 0$ // $f'(a) = f'(0) = \cos(0) = 1$ Tangent a $\sin(x)$ en punt 0. || $y = 1(x-0) + \sin(0) = x - 1 + 1 = x = y$

Això ens diu que per valors petits $\sin(x) \simeq x$.

"Els tres" resultats

1) Les funcions elementals són derivables en el seu domini.

2) Les "operacions" amb funcions derivables donen funcions derivables.

3) Si f derivable en a i g és derivable en $f(a) \Rightarrow g \circ f$ és derivable en a.

A sobre obtenim $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ que és La Regla de la Cadena.

Taula Derivades Simples (i alguna composta)

$y = a^{f(x)}$ | $y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \ln(a)$

$y = k$	$y' = 0$	$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$	$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = x^m$	$y' = m \cdot x^{m-1}$	$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$	$y = f(x)^m$	$y' = m \cdot f(x)^{m-1} \cdot f'(x)$
$y = \log_a(x)$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$y = \tan(x)$	$y' = 1 + tg(x)^2$	$y = \frac{1}{f(x)}$	$y' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \arcsin(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{m \sqrt[n]{x^{m-1}}}$	$y = \arccos(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln(a)$	$y = arctg(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$		

Llista Regles Derivades

Constant: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

Constant Múltiple: $g(x) = c \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = c \cdot f'(x)$

Potència: $f(x) = x^n \Rightarrow nx^{n-1}$

Suma i resta: $h(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Producte: $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Quocient: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Cadena: $h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Regla de l'Hôpital

Dades $a \in \mathbb{R}$ o bé $a = \pm\infty$

$f(x), g(x)$ derivables en entorn de a

$\to \lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$

$\to \lim_{x \to a} f(x) = \infty \overset{\text{amb o sense signe}}{=} \lim_{x \to a} g(x)$

Entorn de a

$a \in \mathbb{R}$: Interval centrat en a $(a-r, a+r)$

$a = +\infty$: Semirecta $(c, +\infty)$

$a = -\infty$: Semirecta $(-\infty, c)$

∃ Existeix i val L

Es a dir que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases} \Rightarrow$ Si $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Extrems (màx. i mín.)

Teorema de l'extrem interior

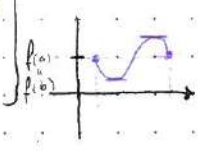
$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{contínua en } [a,b] \\ \text{derivable en } (a,b) \end{array}\right\}$ Si $c \in (a,b)$ és un extrem relatiu, llavors $f'(c) = 0$.

- x_0 és màxim relatiu si hi ha entorn $(x_0 - r, x_0 + r)$ t.q. $f(x_0) \geq f(x)$ per tot entorn.
- x_0 és mínim relatiu si hi ha entorn $(x_0 - r, x_0 + r)$ t.q. $f(x_0) \leq f(x)$ per tot entorn.

Separació d'arrels

Teorema de Rolle

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{contínua en } [a,b] \\ \text{derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\}$ Existeix $c \in (a,b)$ $f'(c) = 0$



Corol·lari

"Entre 2 zeros de la funció hi ha un zero en derivada"

"Si la derivada té n zeros, la funció com a molt té n+1"

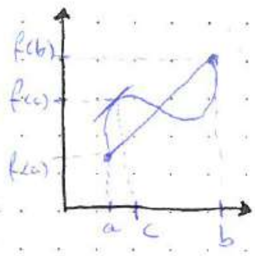
Creixement i Decreixement i Extrems

Teorema de Lagrange (T.V.M)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
contínua en $[a,b]$
derivable (a,b)

$\Big\}$ $\exists c \in (a,b)$ $\quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Pendent derivada és igual a la pendent de la recta tangent.



Conseqüència

- $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f estrictament creixent en $[a,b]$
- $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f estrictament decreixent en $[a,b]$.

- Si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ màxim relatiu en $(x_0, f(x_0))$. [☹]
- Si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ mínim relatiu en $(x_0, f(x_0))$ [☺]

També es pot fer dividint la funció en intervals i analitzant signe.

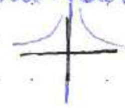
Curvatura i Punts Inflexió

- Si $f''(x_0) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ còncava en (a,b) [$\cup$] // còncava ≡ cuenco
- Si $f''(x_0) < 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ convexa en (a,b) [$\cap$]
- Si $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ punt inflexió en $(x_0, f(x_0))$

Asímptotes de funcions

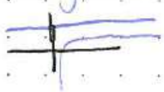
Asímptotes Verticals: Són els valors de x que anulen el denominador.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ "f té asímptota en a"



Asímptota Horizontal: En les funcions racionals passa quan $g(num) \leq g(den)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = k$ "f tendeix a k a l'infinit"

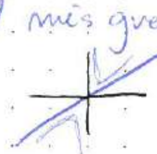


Si f té A.H. NO pot tindre A.O.

Asímptota Obliqua: Són de la forma $y = mx + n$ on:

$m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ i $n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

Quan és racional i $g(num)$ és 1 un tot més gran que $g(den)$.
L'eq. serà el quocient de la divisió



①. Punt de la paràbola $y=x^2$ on la tg. és paral·lela al segment AB.
$A=(1,1)$ $B=(3,9)$; $y=f(x)=x^2$

1) Rectes paral·leles tenen el mateix pendent.

2) El segment AB té pendent $\boxed{\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=m}$ $m=\frac{9-1}{3-1}=4=m$

3) El pendent de la recta tangent és $f'(a)$ llavors volem $f'(a)=4 \Rightarrow f'(a)=2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

4) Comprovem: $y=f'(a)(x-a)+f(a)=4(x-2)+4=4x-8+4=\overset{\to m}{4}x-4=y$

⑤. a)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ • $\ln(x)$ derivable en el seu dom $(0,+\infty) \Rightarrow f(x)$.

• $\sqrt{x}$ Derivable en el seu dom $[0,+\infty) \Rightarrow g(x)$.

$\to \lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$,, $\to \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ i ja tinc el $\frac{\infty}{\infty}$ així que L'Hôpital.

$f'(x)=\frac{1}{x}$,, $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}=\boxed{0}$. L'Hôpital diu que:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0}$$

b) $\lim_{x\to0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln(x)}{1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$ • $\ln(x)=f(x)$ derivable $(0,+\infty)$
• $\frac{1}{x}=g(x)$ derivable $\mathbb{R}-\{0\}$.
en particular qualsevol $(0,r)$

$\to \lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$,, $\to \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

$f'(x)=\frac{1}{x}$,, $g'(x)=\frac{-1}{x^2}$ | $\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\frac{-x^2}{x}=-x=0$ Cuidado que està mal escrit así que $\boxed{\lim_{x\to0^+}x\ln(x)=0}$

②. Demo l'eq. $3^{-x}=x$ té sol única. Quina és la seva part entera?

1) Eq. igualada a '0': $f(x)=3^{-x}-x=0$

2) La $f(x)$ és cont i deri. a tot $\mathbb{R}$ per ser polinòmica + exponencial que son elementals.

3) Calculem la derivada $f'(x)=-1\cdot3^{-x}\cdot\ln(3)-1 \Leftrightarrow \underbrace{-3^{-x}\ln(3)}_{\text{Això és sempre negatiu.}}=1$

$f'(x)$ no s'anul·la mai (és funció negativa) això sig (per Rolle) que $f(x)$ només té 1 zero.

Ara hem de veure valors de x que $f(x)$ canvii de signe. $f(0)=1$,, $f(1)=\frac{-2}{3}$

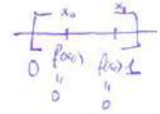
Llavors amb Bolzano podem concloure que $\exists c\in(0,1): f(c)=0$

4) Concloiem que l'eq. té una única solució i aquesta és $\boxed{3^{-c}=c}$

③. $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no té dos zeros a $[0,1]$ (Sigui quina sigui m).

1) $f_m(x)$ polinòmica $\Rightarrow$ Contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.

2) Rolle aplicat a $[x_0, x_1]$ ens diu que si la funció té $\overbrace{\text{dos zeros}}^{x_0, x_1}$, la derivada en té 1.
i aquest està dins de l'interval (x_0, x_1).



3) Calculem la derivada $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. La derivada no té cap arrel a $(0,1)$ llavors la funció no pot tindre 2 zeros en l'interval $[0,1]$.

④. $e^{-x} = \ln(x)$

a) Té solució a $[1, +\infty)$

1) Igualem eq. a 0 t.q. $e^{-x} - \ln(x) = 0$ i fem $f(x) = e^{-x} - \ln(x)$.

- $\ln(x)$ contínua en $(0, +\infty)$
- e^{-x} contínua en tot $\mathbb{R}$ per ser expo.

$\Big\}$ $f(x)$ contínua en $[1, +\infty)$.

$f(1) = \ln(1) - e^{-1} = \frac{-1}{e} < 0$ // $f(2) = \ln(2) - e^{-2} > 0$ i ja tenim $f(1) f(2) < 0$

Per Bolzano diem que $f(x)$ té sol t.q. $\exists c \in (1,2)$ $f(c) = 0$. Així que $\boxed{e^{-c} = \ln(c)}$

[~~b) Interval de long. 0'1 que contingui sol.~~]

⑥. $f: [0,1] \to [0,1]$ cont. i derivable t.q. $f'(x) \neq 1$ $\forall x \in [0,1]$.
Demo existeix únic $x_0 \in [0,1]$ t.q. $f(x_0) = x_0$.

Si $f(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ o $f(1) = 1 \Rightarrow x_0 = 1$.

Si $f(0) \neq 0 \Rightarrow f(0) \in (0,1]$ i $f(1) \neq 1 \Rightarrow f(1) \in [0,1)$ // Donat que estem dient que no és possible

Definim $g(x) = f(x) - x$ // que surt de $f(x_0) = x_0$ i sabem que $g(x)$ cont. i derivable.

Llavors si $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ pq està en el rang $(0,1]$.
si $g(1) = f(1) - 1 < 0$ pq. $f(1) < 1$ i si li trens 1 el fan negatiu.

Per Bolzano podem dir que $\exists c \in (0,1) : g(c) = 0 = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$.

// Aquí Demo que existeix, però no que és únic.

Demo que és únic ho farem per RA: Supp que $\exists\, c, d$ t.q. $g(c) = g(d) = 0$.

Si hi ha dos punts que passen per 0, entre aquests hi ha d'haver màxim o mínim.

Anomenem aquest punt m. // Això ho diu Rolle.

$g'(m) = 0 \Rightarrow f'(m) - 1 = 0 \Rightarrow f'(m) = 1$ però això entra en contradicció amb l'enunciat

donat que diu que $\forall x \in [0,1]$ $f'(x) \neq 1$. Això implica que $\boxed{c \text{ és únic}}$

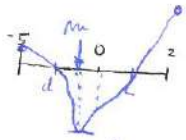
⑦. $e^x = \frac{x}{2} + 2$

a) Demo que en $[-5,2]$ hi ha 2 solucions → una positiva. $x>0$ → una negativa. $x<0$

Def. una $f(x) = e^x - \frac{x}{2} - 2$. Aquesta serà cont. pq. és suma d'$\overset{\text{cont.}}{\text{exp.}}$ + $\overset{\text{cont = cont.}}{\text{polinòmica}}$.

- $f(0) = e^0 - \frac{0}{2} - 2 = -1$,, $f(2) = e^2 - 1 - 2 = e^2 - 3 > 0 \overset{\text{T.B.}}{\Rightarrow} \exists c \in (0,2): f(c) = 0 \Leftrightarrow e^c = \frac{c}{2} + 2$
- $f(-5) = e^{-5} - \frac{-5}{2} - 2 = e^{-5} + 2'5 > 0$,, $f(0) = -1 < 0 \overset{\text{T.B.}}{\Rightarrow} \exists d \in (-5,0): f(d) = 0 \Leftrightarrow e^d = \frac{d}{2} + 2$

b) Demo que només hi ha 2 sol.



Més o menys no de fer això.

Ara hem de trobar aquest m on la pendent és 0. Això ho fem amb la derivada.

$f(x)$ derivable en $[-5,2)$ pq és comp. de funcions derivables així que $f(x)$ tmb.

$f(c) = f(d) = 0$

→ Per Rolle podem dir que $\exists m \in (-5,2)$ $f'(m) = 0$.

$f'(m) = 1 \cdot e^m - 1 \cdot (\frac{1}{2}) + 0 = e^m - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow e^m = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(e^m) = \ln(\frac{1}{2}) \Rightarrow \boxed{m = \ln(\frac{1}{2})}$

c) $n = ?$ Bissecció pq. $\eta < 10^{-8}$

$\frac{b-a}{2^n} < \eta \Rightarrow \frac{2-0}{2^n} < 10^{-8} \Rightarrow \boxed{n \geq 28}$

⑧. Resol per L'Hòpital.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{x^5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \left[\begin{matrix}\text{Tots dos} \\ \text{són} \\ \text{Derivable}\end{matrix}\right] = \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot e^x}{5 \cdot x^{5-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{5x^4}$ i això continua

Sent derivable i si fem fins al final tenim $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{5!} = \infty}$

b) $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = [\infty^0$ no podem fer L'H$] = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = L \Rightarrow \ln(L) = \lim_{n\to\infty} \ln(x^{\frac{1}{x}}) \Rightarrow$

$\boxed{1 = L}$ ⇑ $e^0 = e^{\ln(L)}$ ⇑

$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \ln(x) \Rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \ln(L) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} = \ln(L) \Rightarrow 0 = \ln(L)$

d) $\lim_{n\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(\frac{a^0+b^0}{2}\right)^{\infty} = 1^{\infty}\right] = \ldots = e^{\lim_{n\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{n\to 0} \frac{a^x+b^x-2}{2x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$\left[\lim_{n\to 0} \frac{a^x \cdot \ln(a) + b^x \ln(b) - 0}{2} = \frac{a^0 \cdot \ln(a) + b^0 \ln(b)}{2} = \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}\right] = e^{\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}} =$

$= e^{\frac{1}{2}\ln(ab)} = e^{\ln((ab)^{\frac{1}{2}})} = e^{\ln(\sqrt{ab})} = \boxed{\sqrt{ab}}$

$\boxed{\ln(x) = r \Leftrightarrow e^r = x}$

⑨.

a) $\lim_{n\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \lim_{n\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot \lim_{n\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\lim_{n\to 0} \sin(x) = x\right] = \lim_{n\to 0} \frac{x}{x} \cdot \lim_{n\to 0} x \cdot \sin(\infty)$

$= 1 \cdot 0 \cdot \sin(\infty) = \boxed{0 = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{\sin(x)}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{x}} = \left[\frac{-1}{x} \leq \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 0} \leq \frac{1}{x}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+0}{\frac{1}{x}-0} = \frac{x}{x} = \boxed{1} =$

⑧.

$\lim_{x\to 0} \sin(x) = x$

c) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = \left[0^0\right] \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \sin(x) \cdot \ln(x) = \ln(L) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = \ln(L)$

$\Rightarrow 0 = \ln(L) \Rightarrow e^0 = e^{\ln(L)} \Rightarrow \boxed{1 = L}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot (1+0)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = \boxed{1}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\right] \left[y = \ln(u) \Rightarrow y' = \frac{1}{u} \cdot u'\right] \left[y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\right]$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1+x}{1-x} = \left[\frac{(1-x)-[(1+x)\cdot(-1)]}{(1-x)^2}\right]$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \boxed{1}$

g) $\lim_{x\to 0} [\cos(x)]^{\frac{1}{x}}$ $\lim_{x\to 0} [\cos(x)]^{\frac{1}{x}} = L \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(\cos(x)) = \ln(L)$

- $\ln(\underbrace{\cos(x)}_{\to 0}) = \ln(1) = 0$
- $\underbrace{x}_{\to 0} = 0 \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x} = \ln(L) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))}{1} = \lim_{x\to 0} -\tan(x) = \ln(L) \Rightarrow \boxed{L = 1}$

h) $\lim_{x\to+\infty} x^{\tan\left(\frac{1}{x}\right)} \left[\infty^0\right]$ $\lim_{x\to\infty} \tan\left(\frac{1}{x}\right) \ln(x) = \ln(L) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) = \ln(L)$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \ln(L) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \ln(L) \Rightarrow \boxed{L = 1}$

IMPO $\lim \tan(\theta) = \theta$ quan θ petit
és igual que el $\sin(\theta) =$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^{\alpha})}{\ln(1+x^{\beta})}$ si $(\alpha>\beta>0)$ constats. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{1+x^{\alpha}}\cdot\frac{d}{dx}(1+x^{\alpha})}{\frac{1}{1+x^{\beta}}\cdot\frac{d}{dx}(1+x^{\beta})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}}{\frac{\beta\cdot x^{\beta-1}}{1+x^{\beta}}}$

$= \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}}{\frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\beta}}} = \dfrac{\alpha}{\beta}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{\alpha-1}(1+x^{\beta})}{x^{\beta-1}(1+x^{\alpha})} = \dfrac{\alpha}{\beta}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{\alpha-1}+x^{\alpha-1+\beta}}{x^{\beta-1}+x^{\alpha-1+\beta}} =$

$= \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha+\beta-1}}{x^{\alpha+\beta-1}} = \boxed{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

(10). Feu ús de T.V.M per demo que és complix.

a) $\arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$ si $x>0$.

Hem de demo que serà així per tots l'interval així que no el podem limitar (superiorment).
Definim $f(x)=\arctan(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$ on $f(x)$ contínua $[0,x]$ donat que és composició de dues funcions elementals (ambdues contínues). $f(x)$ tmb és derivable [bla bla bla].
Pel T.V.M tenim que $f(x)$ cont en $[0,x]$; deri. en $(0,x) \Rightarrow \exists c\in(0,x)\ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Calculem $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\arctan(x)-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1(1+x^2)-[x(2x)]}{(1+x^2)^2}=$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{b^2}=\frac{b^2a-bc}{b\cdot b^2}=\frac{b(ba-c)}{b\ b^2}=\frac{ba-c}{b^2}$

$=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1+x^2(1)-(-x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\boxed{\dfrac{+2x}{(1+x^2)^2}=f'(x)}$

Ens podem fixar que aquesta expressió serà sempre positiva t.q. $f'(x)>0\ \forall x\in(0,x)$
Això assegura tmb que $\boxed{\arctg(x)>\dfrac{x}{1+x^2}\quad\forall x>0}$.

— — —

Que $f'(x)>0$ en (a,b) assegura que la funció serà creixent en aquest interval (a,b) ?? imagina tota aquesta tenir pendent pos. Si tenim alguna sig que decreix. Per això $f'(x)>0$ assegura que SEMPRE creixent en aquell interval obert

En aquest exercici com a tal no importa especificant la 'c'

Problemes Batx.

(15). Det. punt $f(x)=(x-2)^2$ tangent perpendicular a $2x-y+2=0$ $\quad m_2 = \frac{-1}{m_1}$

$f(x)=x^2-2x+4$,, $y=\overset{m_1}{2x}+2$ P.q. sigui perpendicular ha de tenir pendent inversa negativa.

La $f'(x)=2x-2$ i $m_2 = \frac{-1}{2} = -0'5$ | $f'(x)=2x-2=-0'5 \Rightarrow x=\frac{1'5}{2} = \boxed{0'75 = x}$

(16). Calc a,b,c $f(x)=x^2+ax+b$ i $g(x)=x^3-c$ tallin $(1,2)$ i mateixa tangent en el punt.

$f(1)=g(1)=2 \Rightarrow f(1)= \underline{a+b=1}$,, $g(1)=-c=2-1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$

$f'(x)=2x+a$,, $g'(x)=3x^2$ | $f'(1)=2+a$,, $g'(1)=3 \Rightarrow 2+a=3 \Rightarrow \boxed{a=1}$ $\Big\}\ \boxed{b=0}$

(17). Calcula i simplifica.

a) $y=\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]$ $\quad y'=\frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\cdot\left(\frac{d}{dx}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\left[\frac{2x(x^2+1)-[(x^2-1)(2x)]}{(x^2+1)^2}\right]=$

$=\frac{\cancel{x^2+1}}{x^2-1}\cdot\frac{\cancel{2x^3}+2x-\cancel{2x^3}+2x}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}=\frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}=\boxed{\frac{4x}{x^4-1}=y'}$ ✓

b) $y=\arctan\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]$ $\quad y'=\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]=\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\cdot\left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]\right]=$

Això ha desaparegut

$=\frac{1}{\frac{1+x+1-x}{1+x}}\cdot\left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-1(1+x)-[(1-x)\cdot 1]}{(1+x)^2}\right]=\frac{1+x}{2}\cdot\left[\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^{\cancel{2}}}\right]=\frac{-2}{2(1+x)}=\boxed{\frac{-1}{1+x}=y'}$ X

Repetir

c) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$ $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2x+1\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(2x+1)^2}{3}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\right]=$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+4x^2+4x+1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\cdot 3}{\sqrt{3}(4x^2+4x+4)}=\frac{6}{3(4x^2+4x+4)}=\boxed{\frac{1}{2x^2+2x+2}=y'}$ ✓

d) $y=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\cdot\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{-1}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\cdot\left[\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\right]=$

$=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x}}}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3\left(\frac{x-1}{x}\right)}}=\frac{-1}{2\sqrt{x^2(x-1)}}=\boxed{\frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}=y'}$ ✓

$$\boxed{f(x)=\arcsin(g(x)) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\cdot g'(x)}$$

$$b)\ y = \text{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] \quad y' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] = \frac{1}{\ }$$

$$b)\ y = \text{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] \quad \frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}\text{arctg}(u) \cdot \frac{d}{da}\sqrt{a} \cdot \frac{d}{dx}\frac{1-x}{1+x} \quad \Bigg| \begin{array}{l} u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ a = \frac{1-x}{1+x} \end{array}$$

$$\square\ \frac{d}{du}\text{arctg}(u) = \frac{1}{1+u^2} \quad // \quad \square\ \frac{d}{da}\sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad // \quad \square\ \frac{d}{dx}\frac{1-x}{1+x} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-\cancel{2}}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1+x}{2} \cdot \frac{-1}{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)(1+x)^2} = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1+x)} = \boxed{\frac{-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}(1+x)} = \frac{d}{dx}y} \checkmark$$

$$e)\ y = \ln\left[\sqrt{x^2+x+1}\right] \quad \frac{d}{dx}y = \frac{d}{da}\ln(a) \cdot \frac{d}{dx}x^2+x+1 \quad \Big|\ a = x^2+x+1$$

$$\square\ \frac{d}{da}\ln(a) = \frac{1}{a} \quad // \quad \square\ \frac{d}{dx}x^2+x+1 = 2x+1$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{1}{x^2+x+1} \cdot 2x+1 = \boxed{\frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{d}{dx}y} \checkmark$$

$$f)\ y = e^{\sin\left[(2x)^{\frac{1}{3}}\right]} \quad \begin{array}{l} a = \sin\left[(2x)^{\frac{1}{3}}\right] \\ b = (2x)^{\frac{1}{3}} \end{array} \quad \Bigg| \quad \frac{d}{dx}y = \frac{d}{da}e^a \cdot \frac{d}{db}\sin(b) \cdot \frac{d}{dx}(2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\square\ \frac{d}{da}e^a = e^a \quad // \quad \frac{d}{db}\sin(b) = \cos(b) \quad // \quad \frac{d}{dx}(2x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$ Δ – Cuidado aquesta

$$\frac{d}{dx}y = e^{\sin\left[(2x)^{\frac{1}{3}}\right]} \cdot \cos\left[(2x)^{\frac{1}{3}}\right] \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{4x^2}} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{2} \cdot e^{\sin(\sqrt[3]{2x})} \cdot \cos(\sqrt[3]{2x})}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{d}{dx}y}$$ X

$$g)\ y = \sin[\ln(x)]$$

$$y' = \cos[\ln(x)] \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{\cos[\ln(x)]}{x} = y'}$$

h) $y = x^{x^{\ln(x)}}$ $\quad \left| \begin{array}{l} a = x^{\ln(x)} \\ b = \ln(x) \end{array} \right.$ $\quad \frac{d}{dx}y = \frac{d}{da}x^{a} \cdot \frac{d}{db}x^{b} \cdot \frac{d}{dx}\ln(x)$

□ $\frac{d}{da}x^{a} = a x^{a-1}$ " □ $\frac{d}{db}x^{b} = b x^{b-1}$ " □ $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$. Repetir.

$\frac{d}{dx}y = x^{\ln(x)} x^{x^{\ln(x)}-1} \cdot \ln(x) \cdot x^{\ln(x)-1} \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln(x)} \cdot \frac{x^{x^{\ln(x)}}}{x} \cdot \frac{\ln(x) \cdot x^{\ln(x)}}{x} \cdot \frac{1}{x} =$

$= \frac{x^{\ln(x)} \cdot x^{x^{\ln(x)}} \cdot \ln(x) x^{\ln(x)}}{x^{3}} = \frac{x^{x^{\ln(x)}} \cdot x^{2\ln(x)} \cdot \ln(x)}{x^{3}}$

h) $y = x^{x^{\ln(x)}} \Rightarrow \ln(y) = x^{\ln(x)} \cdot \ln(x)$

$\frac{d}{dx}[\ln(y)] = \frac{d}{dx}[x^{\ln(x)} \cdot \ln(x)] \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^{\ln(x)}] \cdot \ln(x) + x^{\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = [\ln(x) x^{\ln(x)-1} \cdot \frac{1}{x}] \cdot \ln(x) + \frac{x^{\ln(x)}}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\ln(x)^{2} \cdot x^{\ln(x)-1}}{x} + \frac{x^{\ln(x)}}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y($

h) $y = x^{x^{\ln(x)}} \Rightarrow \ln(y) = x^{\ln(x)} \cdot \ln(x)$

$\frac{d}{dx}[\ln(y)] = \frac{d}{dx}[x^{\ln(x)} \cdot \ln(x)] \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^{\ln(x)}] \cdot \ln(x) + x^{\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[e^{\ln(x)\ln(x)}]\ln(x) + x^{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = [e^{\ln(x)\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)^{2}]]\ln(x) + \frac{x^{\ln(x)}}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = [e^{\ln(x)^{2}} \cdot \frac{2\ln(x)}{x}] \cdot \ln(x) + \frac{x^{\ln(x)}}{x} \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\ln(x)} 2\ln(x)^{2}}{x} + \frac{x^{\ln(x)}}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\ln(x)}(1+2\ln(x)^{2})}{x} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = x^{x^{\ln(x)}}\left(\frac{x^{\ln(x)}(1+2(\ln(x)^{2}))}{x}\right)}$ Joder nen.

$\boxed{x = e^{\ln(x)}}$

(18). Det. i classifica els punts crítics. | $f(x) = e^{8x - a(x^2+16)}$
Té asimptotes?

$f(x) = e^{-ax^2+8x-16a}$

$f'(x) = \underbrace{e^{-ax^2+8x-16a}}_{a} \cdot \underbrace{(-2ax+8)}_{b}$

$f''(x) = \underbrace{e^{-ax^2+8x-16a}}_{a} \cdot \underbrace{(-2a)}_{b'} + \underbrace{e^{-ax^2+8x-16a} \cdot (-2ax+8)}_{a'} \cdot \underbrace{(-2ax+8)}_{b}$

$\boxed{\begin{array}{l} \circ\ e^y \neq 0\ \forall y \in \mathbb{R} \\ \circ \text{ Punts Crítics : } x = \frac{4}{a} \\ \circ \text{ Màxim Local } = \frac{x}{4} \text{ si } a > 0 \\ \circ \text{ Té A.H. que tendeix a } 0 \end{array}}$

Per trobar punts crítics igualem derivada a 0.

Per saber si és $\nearrow$ màx / $\searrow$ min mirem signe segona derivada en punt crític. <u>NO</u> igualar a 0.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2ax + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{a}$

$f''(\frac{4}{a}) = e^{-(\frac{4}{a})^2 \cdot a + 8(\frac{4}{a}) - 16a} \cdot (-2a) + e^{-(\frac{4}{a})^2 \cdot a + 8(\frac{4}{a}) - 16a} \cdot \cancel{(-2a \cdot (\frac{4}{a}) + 8)^2}^{\,0}$

$f''(\frac{4}{a}) = e^{\frac{16(1-a)}{a}} (-2a)$ on recordem que e^y <u>SEMPRE</u> positiu així que

analitzem "$-2a$" i per quins valors $f''(x)$ canvia el signe.

• $a < 0 \Rightarrow$ Això fa que $\left.\begin{array}{l} \nearrow \frac{16-16(-a)}{(-a)} = \frac{-(16+16a)}{a} = \ominus \\ \rightarrow -2(-a) = 2(a) = \oplus \end{array}\right\} \Rightarrow e^{\frac{\ominus}{\oplus}}$ = pròxim a 0.

• $a > 0 \Rightarrow$ Això fa que $f''(x) < 0$ així que $[\frown] \Rightarrow x = \frac{4}{a}$ té màx local

— — —

<u>A.V</u>: No té pq. la funció no té denominador ni termes indefinits.

<u>A.H</u>: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-a \cdot x^2} = e^{-\infty} = \boxed{0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-a \cdot (-\infty)^2} = \lim_{x \to -\infty} e^{-a \cdot (\infty)} = e^{-\infty} = \boxed{0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)}$

<u>A.O</u>: No té pq ja té si que té A.H. Juder el que m'ha costat

(19). Descompon 100 en dos sumands que la suma del cub màxima.

$100 = x + y \quad \Big| \quad f(x) = x^3 + y^3 = x^3 + (100-x)^3 = x^3 + 1000000 - 20000x + 100x^2 - 10000x + 200x^2 - x^3$

$\underline{f(x) = 3x^2 - 300x + 10000}$ — Aquesta és la funció que haig de buscar mínim.

$f'(x) = 6x - 300 = 0 \Rightarrow x = \frac{300}{6} = \boxed{50 = x}$ $\quad \begin{array}{ccc} \searrow & 50 & \nearrow \\ \hline f'(49) & & f'(51) \end{array}$ $\quad \boxed{\text{Si } x = 50 \Rightarrow y = 50}$