Grafs Eulerians / Hamiltonians

Grafs Eulerians

Senderó: Recorregut obert i que no repeteix arestes. Sí que pot vèrtexs.

Circuit: Recorregut tancat i que no repeteix arestes. Sí que pot vèrtexs. No Trivial

→ Senderó Eulerià: Senderó que passa per totes arestes de G. $\forall$ 1 vegada

→ Circuit Eulerià: Circuit que passa per totes arestes de G. $\forall$ 1 vegada

→ Graf Eulerià: Si conté circuit Eulerià. # Dibuixar D1 sense repetir línia i acabar al inici

Teorema Caracterització Grafs Eulerians

G és Eulerià $\Leftrightarrow$ $\forall v \in V$ $2 | g(v)$ # G connex i "$2|g(v)$" sig. ser parell

$\Rightarrow$| Suposem: G és Eulerià   Volem Demo: El grau de tots els vèrtexs serà parell.

Donat que G és Eulerià, aquest conté un cicle Eulerià que visita totes les arestes 1 vegada

i que comença i acaba en el mateix vèrtex. Anomenem al circuit "C" i "u" al vèrtex inicial.

Com que visita totes les arestes, aquest circuit tmb passa per tots els vèrtexs (pot ser varies veg).

Podem dir que $\forall v \in V(C) : v \neq u$ tindrem 1 aresta "que entra" i una altra "que surt".

Suposem que passa $k \geq 1$ vegades per v, fent així que sumi $2k$ graus en total (a v). 

Ara ens fixem en u (inici i final), donat que C és camí eulerià, aquesta aresta des d'on

comencem i acaba ho diem diferent (Això ja suma 2 al grau de u). Pot ser que el

visitem j vegades posteriorment així que seguim mateix raonament que vèrtex v fent $g(u) = 2j + 2$

La suma de graus dels v_i vèrtexs + u vèrtex és parell. # $2k + 2j + 2 = 2(k+j+1)$

$\Leftarrow$| Suposem: El grau de tots els vèrtexs és parell   Volem Demo: G és Eulerià

Definim "T" com com el Recorregut Eulerià de long. màx. de G.

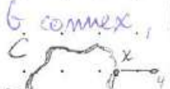
T és un u-v camí i volem demo que $u = v$. Farem R.A. Suposem que $u \neq v$, això sig.

que v és final del camí (+1 aresta) + 2j vegades vist. Això faria el grau senar i no pot ser,

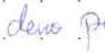
així que v ha d'estar connectat a un altre vèrtex w (cosa que contradiu que T és long màx).

Això implica que $u = v$ fent que T sigui un cicle u-u. L'anomenem C.

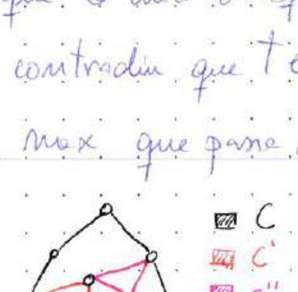
Ara volem demo que aquest C passa per totes les arestes, farem demo per R.A.
Suposem que no passa per totes. Donat que G connex, hi ha un vèrtex x que connecta C amb les arestes que no són del circuit.



Definim com H el graf t.q. $H = G - A(C)$. Pel que suposem inicialment, G té tots els graus parells i els vèrtexs de H tmb ho haurien de complir. Fem el mateix procés. Suposem T' el camí més llarg de H <u>començant per x</u>. Molt important.
Diem que T' és x-z camí i volem demo que $x = z$. Fem demo per R.A ($x \neq z$).
Mateix argument d'arestes senars i que no seria el de llarg. màx.
Hem demo que T' és x-x camí ⇒ És un C' circuit.



Donat que C i C' tenen vèrtex x comú, sig. que la unió d'aquests circuits formaria un recorregut més gran que T i això contradiu que T era mida max.
Podem concloure que T és camí u-u de long max que passa per totes les arestes fent així que T ≡ Circuit Eulerià.
Com que T està en G, G és graf Eulerià.



No tenen arestes en comú

<u>Corol·lari</u>: $G = (V, A)$ connex

G és Eulerià ⇔ Tots vèrtexs tenen grau parell ⇔ Conjunt arestes admet partició en circuits disjunts.
Aquesta tercera propietat es demostra amb l'última part de la Demo de Teorema 1 que parla de C'. Aquell mateix procés es pot repetir fins que no quedin arestes restants.

<u>Corol·lari</u>: $G = (V, A)$ connex conté Recorregut Eulerià ⇔ G té exactament 2 vèrtexs grau senar.
⇒| <u>Suposem</u>: G conté Recorregut Eulerià <u>Volem Demo</u>: té 2 vèrtexs senar.
G té Recorregut Eulerià R u-v. Tots els vèrtexs menys u-v han de ser grau parell. (Mateix argument que Circuit Eulerià). Això implica que u i v senars pq si fossin parells no serien els extrems i si u senar i v parell no compliria el Lema del Handshaking (viceversa).
⇐| <u>Suposem</u>: G té 2 arestes senar <u>Volem Demo</u>: G conté Recorregut Eulerià.
G té vèrtexs x, y de grau senar (Resta parells). Si en G' afegim aresta que uneix x amb y tenim que tots els v. tenen grau parell (∃ Circuit Eulerià en G'). Això mostra clarament que G ha de tindre recorregut Eulerià que uneix x i y.

Grafs Hamiltonians

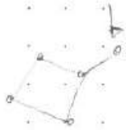
→ Camí Hamiltonià: Camí no tancat que passa per tots vèrtexs sense repetir de G.

→ Circuit Hamiltonià: Circuit que passa per tots els vèrtexs de G.

→ Graf Hamiltonià: Si conté circuit Hamiltonià.

Condicions Necessàries

Sigui $G=(V,A)$ graf Hamiltonià:



1) $\forall v \in V \quad g(v) \geq 2$ # Fixat que si hi hagués $g(v)=1$ no podria haver circuit Hamiltonià

2) Si $S \subseteq V$ i $k=|S| \rightarrow G-S$ té màx. k c.c.

Demo "2)" per R.A.

Suposem que G Hamiltonià i que $G-S$ té $k+1 \leq$ c.c. → ⚡

Si $G-S$ té $k+1$ c.c. sig. que hi ha v_1, v_2 en G t.q. tots els camins $v_1 - v_2$ passaven per algun $v \in S$. Això sig. que S conté vèrtex de tall o aresta pont i això és una contradicció donat que G és Hamiltonià.

Teorema de Ore

No adjacents

$$\boxed{G=(V,A) \text{ on } |V| \geq 3. \ \forall x,y \in V \ \ x \neq y \wedge x \not\sim y \wedge g(x)+g(y) \geq n \rightarrow G \text{ és Hamiltonià.}}$$

Exemples:

$g(C)+g(D)=4<5$
No és Hamiltonià

Tots compleixen $g(x)+g(y) \geq 6$
Sí és Hamiltonià

IMPO: El teorema no descarta l'existència, simplement no pot afirmar-ho.

$2+2<5$ però sí hi ha

Farem Demo per contradicció:

(*) Suposem que $G=(V,A), |V|=n \geq 3$. $\forall x,y \in V \ x \neq y \wedge x \not\sim y \wedge g(x)+g(y) \geq n \rightarrow G$ no Hamil.

(1) Afegim arestes a G fins tindre graf NO Hamiltonià de mida màx. # Que si afegíssim una més tindríem G Hamiltonià.

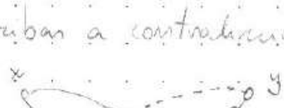
Això resulta ser $G'=(V,A')$ i aquest tmb. compleix que $\forall x,y \in V \ x \neq y \wedge x \not\sim y \wedge g(x)+g(y) \geq n$.

Agafem $x,y \in V$ t.q. $xy \notin A' \rightarrow (x=v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n=y)$ és un camí Hamiltonià.

Ara ens falta centrar-nos en restringir els graus de x, y per arribar a contradicció.

$2 \leq i \leq n$

$\underbrace{\forall v_i : xv_i \in A', \ yv_{i-1} \notin A'}_{\text{Això és super impo.}}$ Imaginem que passaria si no fos així:



I hem dit que G' no pot ser-ho

Si no tinguéssim aquesta restricció i $yv_{i-1} \in A'$ hi hauria un cicle Hamiltonià.

Tindríem $(x, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, y, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, x)$.

Ell mateix no pot esta connectat i G' té $|V| = n$.

Això sig que y pot estar connectat a tots els vèrtexs $(\underbrace{n-1})$ i a tots els vèrtexs

prèvis que x està connectat. Així fa que $g(y) \leq n-1-g(x) \Rightarrow g(x)+g(y) \leq n-1$

Aquí tenim la contradicció a (1) donat que suposàvem $g(x)+g(y) \geq n$ contradient

a (*) tmb i tot plegat demostra cert l'enunciat ☑.

Teorema de Dirac

$$\boxed{G=(V,A) \text{ on } |V|=n \geq 3 \,.\, \forall v \in V \; g(v) \geq \frac{n}{2} \rightarrow G \text{ Hamiltonià}}$$

Demo 1: # Fent ús de Teorema d'Ore

Farem Demo per contradicció:

Suposem que $\forall v \in V \; g(v) < \frac{n}{2}$. Si agafem 2 vèrtex no adj x, y. $g(x)+g(y) \geq n$ però

donat pel que suposem $g(x)+g(y) < \frac{n}{2}+\frac{n}{2} = n$ i tenim la contradicció. ☑.

Demo 2:

1. Def P com el camí més llarg de v_0 fins v_k. Aquest tindrà long. K. // Noté pq. tindrà tots v_i

// Aquest P tindrà tots els veïns de v_0 i v_k. Altrament P no seria el més llarg.

// Volem un camí (Path) de màx. long. pq. em permet aprofitar el màxim arestes de G.

// No volem cicle pq. és una disposició difícil. No podríem alterar-lo gaire.

//// Haurem de ser nosaltres els que fem mod. en P per tindre Cicle i post. dem que és Hamiltonià

2. Tenim el camí P i Suposem que $\exists j : 0 \leq j \leq k-1$ i $\exists v_0 v_{j+1} \in A(G)$ i $\exists v_j v_k \in A(G)$

// Parlar de v_j em permet més rigurositat i joc que dir que $v_0 \sim v_k$ (Que podria ser fals).

//// De fet, $v_0 \sim v_k$ podria passar, però no ho mencionem específicament.

No podem dir que $\exists j$ i ja. Ho hem de demo i farem per Contradicció: $\nexists j$ [...].

Si $\nexists j$ el P conté tots els veïns de v_0 $(g(v_0))$ i tots els de v_k $(g(v_k))$ que no són adj veí de v_0

// Sino, afirmaríem que si $\exists j$ aquest.

A sobre ara hem de comptar la possibilitat que $v_0 \sim v_k$ i per això hem de $+1$ a les arestes.

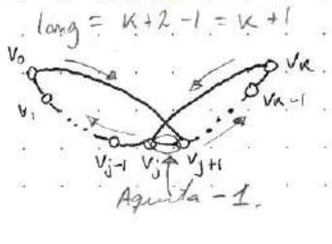
$$g(v_0)+g(v_k)+1 \leq k+1 \Rightarrow \frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1 \leq g(v_0)+g(v_k)+1 \leq k+1 \Rightarrow \underline{n+1 \leq k+1}$$

Aquesta és la contradicció pq. és impossible que long P sigui més que n (nº vèrtexs totals)

$\text{long} = k+2-1 = k+1$

// Fixat que sense '+1' no arribaríem a tindre la contradicció.

Així arribem a la conclusió que P és un cicle donat que $\exists j$ t.q.



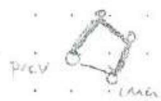
3. Ara que tenim un C hem de demo que passa per totes les arestes (i tots vèrtexs).

Com que no podem afirmar-ho, farem contradicció. Suposem que C no conté tots $v_i \in V$.

Això sig que $\exists\, \omega \in V$ i que al ser G connex, estarà connectat a $v_\omega \in C$.

// Sabem que això és així pq. sempre hi haurà (si és que hi ha) un vèrtex adj. a $v_i \in C$.

Anomenem $v_{\omega+1}$ al vèrtex següent adjacent a v_ω.

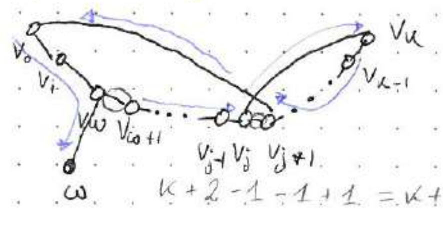


// Sabem que tot cicle de long k, hi ha camí entre $v_{inici} \to v_{prev\text{-}inici}$ que és $k-1$ de long.

Partim de $v_{\omega+1}$ i fem el cicle que hem definit prev. fins v_ω i ens dirigim a ω.

Això faria que tinguéssim un camí de $k+1$ i això és contradicció pq. suposem que P ja era el camí més llarg amb long k.

És per això que C ha de contindre tots els vèrtex (i arestes) pq sinó hi hauria un P' més llarg.



$k+2-1-1+1 = k+1$ que seria la long de P' si partíssim de $v_{\omega+1}$.

(3.1). Troba Circuit Eulerià o demo que no existeix.

$G_1, G_2, G_3, G_5, G_6, G_8, G_9, G_{10}$ tenen algun vèrtex de grau senar.

G_4, G_7 sí que és pot.

(3.2). Digues si els dibuixos ~~son~~ es poden representar sense aixecar llapis.

D_1, D_2 no || D_3, D_4, D_5 sí ~~per~~ fixant-se si els punts de tall tenen grau par.

(3.4). Troba r,s t.q. $K_{r,s}$ sigui Eulerià.

Tant r, s han de ser parells o sino $K_{1,2}$ 

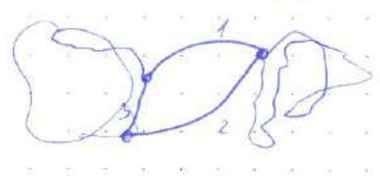
(3.5). G té 2 c.c. que són Eulerians. Troba mínim arestes pq G eulerià & connex

~~Si les c.c. son d'ordre 3 no es pot.~~

~~Altrament~~ És necessiten 4 arestes Si els dos són K_n

1. Unir V_{inici} v V_{inici} (+1)

3 altrament (1 és K_n i l'altre no)



2. Equilibrar el grau impar que generem a aquests vèrtexs (+2).
Això ho fem afegint aresta a 2 vertexs qualsevols.
3. Unir aquests vertexs que acabem de fer servir "d'equilibri" entre ells (+1)

(3.6). G connex amb tots vèrtex grau parell no té aresta pont.

// 0 és parell però no comptem en aquest cas pq. no té cap aresta.

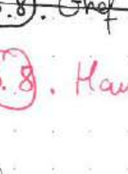
Donat que tots parells, G és graf Eulerià i compleix que hi ha cicle que passa per totes les arestes de G 1 vegada i de forma única, implicant que hi haurà, com a mínim 2 formes d'anar de $u \to v$, pq. sino contradiu ser G Eulerià (Hauria de passar 2 vegades per mateixa aresta i aquesta seria pont).

~~(3.8). Graf n-cub Q_n vèrtex $30,1f^n$ i connex.~~

(3.8). Haurà d'aixecar el llapis si hi ha 2 vertexs senar $\to 1$. // no poder haver sense mai cap vèrtex senar.

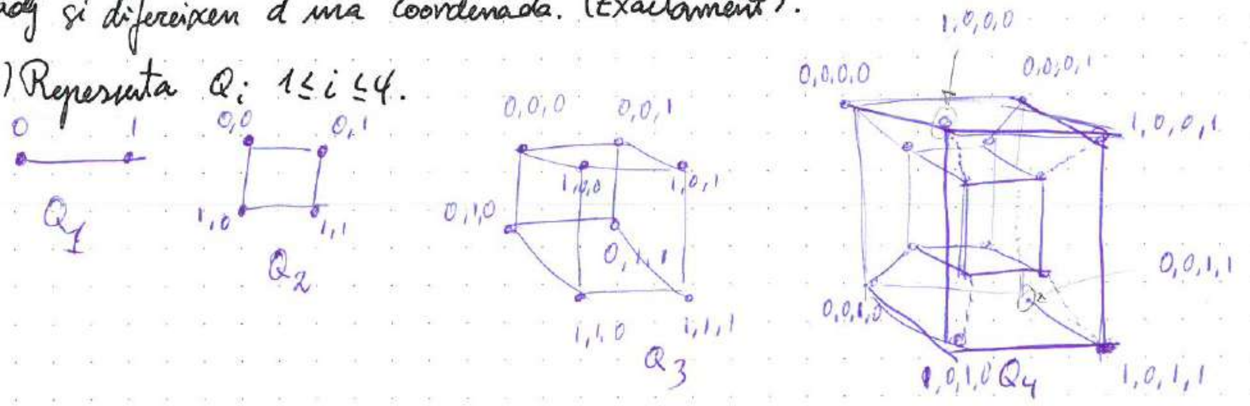
4 vertexs senars $\to 2$.

Quina relació hi ha entre els Hamiltonians i medul.



(3.8). Graf n-cub Q_n. $\{0,1\}^n$ i dos vèrtex $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ són adj si difereixen d'una coordenada. (Exactament).

1) Representa Q_i $1 \leq i \leq 4$.



2) Det. Ordre, mida i seq. de graus.

Q_1: Ordre $= 2^1 = 2$
Mida $= (2 \cdot 1) \div 2 = 1$
Seq $=$

Q_2: Ordre $= 2^2 = 4$
Mida $= (4 \cdot 2) \div 2 = 4$
Seq $-=$

Q_3: Ordre $= 2^3 = 8$
Mida $= (8 \cdot 3) \div 2 = 12$
Seq $=$

Q_4: Ordre $= 2^4 = 16$
Mida $= (16 \cdot 4) \div 2 = 32$
Seq $=$

3) Troba n tq. Q_n eulerià

Els n han de ser parells, pq con és el num de vèrtexs adjacents a tots els v.

(3.9) Troba Cicle Hamiltonià al ex. (3.1). o demo que no $\exists$.

SI: G_1, G_2,

NO: G_3, G_4, No compleixen Ore #M'he cansat

(3.10). Bipartit Hamiltonià, les parts estables tenen mateixa cardinalitat.

~~Si ha la~~ Si G és Hamiltonià i ha un C que passa per tots els vèrtex 1 vegada

Si suposem que és Bipartit, implica que l'ordre de G ha ~~sola~~ ser parell

Demo per R.A. Suposem que no és parell:

Si no es parell i si que hi ha un cicle el vèrtex previ a finalitzar cicle serà de la mateixa part estable fent això contradicció amb el que suposem Bipartit.

Com que G es parell, Bipartit, i $\exists$ un Cicle que passa per tots

(3.10). G Bipartit i Hamiltonià ⇒ Parts estables mateixa cardinalitat. Demo:

Suposem G Hamiltonià i llavors existeix cicle C que passa per tots els vèrtexs de G 1 vegada. Si G Bipartit podrem "separar" els vèrtexs en dos parts estables amb el criteri que dos vèrtexs qualsevols no poden tindre com adjacent un vèrtex de G seva mateixa "part estable".

Suposem que G té ordre parell i farem demo que això és així per RA.

(*) Suposo que no és ordre parell, Això implica que si seguim el cicle Hamiltonià i a cada vèrtex "l'assignem un color" al ser de long senar el camí tindrem que hi ha 2 vèrtexs adjacents del mateix color, fent així que G no sigui Bipartit, però entra en una contradicció. (*)

Com que G té ordre parell i Bipartit, les parts estables tindràn mateixa cardinalitat $\frac{n}{2}$ sent n l'ordre de G.

(3.11). Demo. G Bipartit $K_{r,s}$ ordre $n \geq 3$ Hamiltonià ⇔ $r = s$.

⇒] Suposem: ~~G Bipartit $K_{r,s}$~~ Hamiltonià   Volem Demo: $r = s$

Partim d'un vèrtex $u \in G[V_1]$ qualsevol, aquest només tindrà adj. vèrtexs $v \in G[V_2]$. Com que suposem que hi ha un cicle Hamiltonià (que passa per tots els vèrtexs 1 vegada) podem dir: $\square$ No sé

no sé ...

1. Comencem des de $u_1 \in G[V_1]$ i sumem al comptador r ++.
2. Anem a un adjacent $v_1 \in G[V_2]$ i sumem ~~s~~ ++
3. Fem aquest procés i quan arribem a $v_{s-1} \in G[V_2]$ el comptador estarà t.q. $r > s$ i al fer el següent salt, com que fem la suma, obtindrem que $r = s$.

⇐] Suposem: $r = s$ Volem Demo: Hamiltonià.

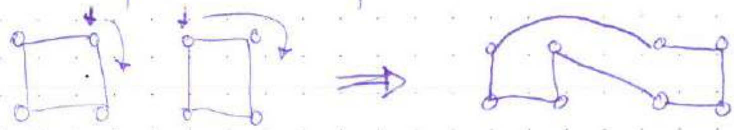
Donat que graf és $K_{r,s}$ tots els vèrtexs de cada part estable compleix $g(U_i) = s$ i $g(V_i) = r$. Agafem qualsevol vèrtexs no adjacents i sumem el grau ens queda $r + s$ i l'ordre de $K_{r,s} = r + s$ i compleix.

Per Ore podem afirmar que és és Hamiltonià.   M1-3-E-2

(3.12). G graf amb 2 c.c. Hamiltonian. Mínim arestes per fer G connex Hamiltonià

2! 1 per unir el penúltim de c.c.1 amb el vèrtex inici de la c.c.2

1 per unir el penúltim de c.c.2 amb el vèrtex inici de la c.c.1.



(3.13). G Hamiltonià no cicle. Demo que G té 2 o més vèrtexs de $g(v) \geq 3$.

Farem Demo per contradicció. Suposarem que G no té 2 o més vertex grau ≥ 3.
Donat que G suposem Hamiltonià, sig que $\exists$ un C camí que passa per tots els vèrtexs de G 1 sola vegada. Això només és possible si $g(v_i) \geq 2$.
Donat pel que suposem de la contradicció, tots els $g(v_i) \leq 2$ fent així que $g(v_i)$ sigui exactament 2. Aquesta conclusió entra en conflicte amb el fet que G no sigui un graf cicle demostrant així que la contradicció era falsa i el nostre enunciat és cert $\square$.

(3.15). G graf d-regular amb ordre $n \geq 2d+2$ i $d \geq 1$. Demo que G^c Hamiltonià.

El grau de tots els vèrtexs de G és d.

El grau de tots els vèrtexs de G^c és $(n-1)-d$ on $n \geq 2d+2 \Rightarrow g^c(v_i) \geq \underbrace{(2d+2)-1-d}_{d+1}$

Això sig. que podem agafar 2 vèrtex qualsevols (no adj) de G^c t.q.

$g(v_i) \geq d+1$, $g(v_j) \geq d+1$ amb $v_i \not\sim v_j \Rightarrow g(v_i) + g(v_j) \geq (d+1)+(d+1) \geq 2d+2 = n$

Podem veure que G^c compleix el teorema de Ore llavors podem assegurar G^c Hamiltonià.

(3.16). G $n \geq 2$ on $g(v_i) \geq \frac{n-1}{2}$. Demo conté camí Hamiltonià.

Creem un G+v on v està connectat a tothom. v tindrà grau n. v_i de G tenen $\frac{n-1}{2}+1$ que això és $\frac{n+1}{2}$. $n+1$ és l'ordre de G+v llavors compleix el teorema de Dirac, per lo tant, hi haurà cicle Hamiltonià en G+v i G té el camí resultant de treure v.