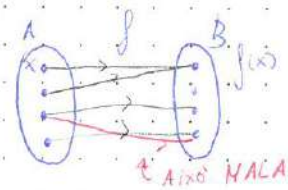
FUNCIONS

Què ha de tenir una funció?

- Conjunt A ("origen") #Domini — #Recorda que conjunt no tant sols té q. ser de números.
- Conjunt B ("destí")
- Una "regla/procediment/fórmula" que per qualsevol $x \in A$ ens dona un únic $y \in B$.

Notació:

$f: A \to B$ (Funció, Dom., Codom. (destí)) $x \mapsto f(x)$ ← la imatge de x ($x \in A$ qualsevol)



Obs: NO pot haver x sense valor de resultat (Valor de A)

Donat $y \in B$, una **antiimatge** de y és $x \in A$ t.q. $f(x) = y$.

Obs: y pot tindre 0, 1, o >1 imatges #Les constants tenen infinites.

Ex:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ NO és funció (No està ben def.) — $f(0)$ no existeix.
  - $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ Sol. 1
  - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 26 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Sol. 2 (Pot ser qualsevol)

Ex:

- $f_1: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$ és funció
- $f_2: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = |x|$ és funció

$f_1 \neq f_2$ pq destí diferent #Absolutament tot ha de ser igual

Quantes imatges té 3? 2 (per f_1 i f_2)   Quantes imatges té 0? 1 (f_1 i f_2)

Quantes imatges té -3? Per f_1 no té sentit (Pq destí $\mathbb{N}$)
Per f_2 té 2.

Ex:

$f(x) = \dfrac{3x-5}{4}$ és funció si considerem

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → Sí
- $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ → Sí
- $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$?→ Sí $\left(\dfrac{3 \cdot \frac{p}{q} - 5}{4} = \dfrac{3p - 5q}{4q} \in \mathbb{Q}\right)$
- $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ → No $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ → No $\left(\dfrac{3 \cdot 1 - 5}{4} = \dfrac{-1}{2} \notin \mathbb{Z}\right)$

Ex: Obs: No té pq si surts de □ → □ sigui possible.

- $A = \{a, b, c\}$ $A = \mathcal{P}(C) = \{X \mid X \subseteq C\}$
- $B = \{\text{PATATA}, \text{PERA}, \text{POMA}\}$ $B = \mathcal{P}(B)$
- C conjunt

$A = \mathcal{P}(C)$ $B = \mathcal{P}(C)$ $f(X) = C - X \in \mathcal{P}(C)$

donat $y \in B$,
la seva antiimatge és $C - Y$

TM-4-T-1

Ex:

• $f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $f_1(x) = |x|$ } Sí: - Domini Origen igual
• $f_2: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $f_2(x) = x$ } - Domini Destí igual
- $f_1(x) = f_2(x)$ pq $|x| = x$ si $x \geq 0$

Ex:

• $f_1: \{1,2\} \to \mathbb{Z}$ $f(x)_1 = x^2$ } Sí: - Dom OG igual
• $f_2: \{1,2\} \to \mathbb{Z}$ $f(x)_2 = 3x-2$ } - Dom END igual
- $f_1(1) = 1^2 = 1$ | $f_1(2) = 2^2 = 4$
$f_2(2) = 3-2 = 1$ | $f_2(2) = 6-2 = 4$

Si intentem ampliar Dom. ja no

$x^2 = 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} \Rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

Igualtat entre funcions

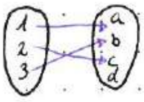
⚠ Si en un Dom def. TOTS els elements tenen mateixa img. tot i regla diferent. Seran iguals

Dues funcions són iguals si tenen Dom, CoDom, Regla iguals. $\boxed{f = g \iff \forall x \in A \ f(x) = g(x)}$

$\{1,2\}$ x^2+1 $3x-2$

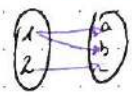
Propietats que poden tindre

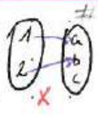
Injectiva: $\boxed{\forall x, x' \in A \ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))}$
També serveix contrarecíproca



Dom: Tots els valors possibles
Rang: Valors que es prenen

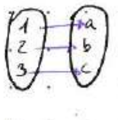
Exhaustiva: $\boxed{Rang(f) = Codom(f). \ \forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y}$
Codom ha d'estar en Rang

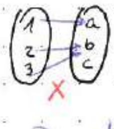


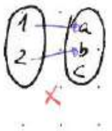


Dom = $\{1,2,3,4\}$ i Rang = $\{1,2,4\}$
No hi ha cap x t.q. $y = 3$.

Bijectiva: Si és Injectiva i Exhaustiva (a l'hora).







Obs: f injectiva $\iff \forall y \in B$ té com a molt 1 antiimatge
f exhaustiva $\iff \forall y \in B$ té com a mínim 1 antiimatge
f bijectiva $\iff \forall y \in B$ té única antiimatge.

Funció Inversa

$f: A \to B$ bijectiva, llavors f^{-1} és funció injectiva i ve def. $f^{-1}: B \to A$.

$\boxed{f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y}$
$\forall y \in B$:

$\boxed{f^{-1}: B \to A \quad f^{-1}(y) \text{ és l'únic } x \in A \text{ t.q. } f(x) = y}$

$\boxed{x \in f^{-1}(A) \iff f(x) \in A}$

En molts llibres/apunts quan tenim $f: A \to B$ usem $f^{-1}(y)$ per referir-nos al conjunt antiimatge de y això és $\{x \in A \mid f(x) = y\}$

La inversa de l'inversa és la funció original $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

Demo: (La inversa de l'inversa és f.)

$f(x) = y$ on $x \in A$ i ($y \in B$ o tmb. es pot dir que $f(x) \in B$) ← Def de funció: $f: A \to B$, $f^{-1}: B \to A$

[1] $f^{-1}(f(x)) = x \in A$ Prop de funció inversa

[2] $f(f^{-1}(y)) = y \in B$

- Tenim $y \in B$ arbi.
- Apliquem inversa t.q $f^{-1}(y) \in A$
- Apliquem funció a la inversa t.q $f(f^{-1}(y)) \in B$
- Per la prop [2] $y \in B$.

Composició de funcions

Donades $f: A \to B$ i $g: B \to C$ definim la composició de f i g que anomenarem f composada de g t.q.

$$\boxed{\begin{aligned} g \circ f &: A \to C \\ x &\longmapsto g(f(x)) = (g \circ f)(x) \end{aligned}}$$

$f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$f: A \to B$, llavors $I_B \circ f = f \circ I_A = f$

Si f i g → Injectiva / → Exhaustiva / → Bijectiva ⇒ $g \circ f$ → Injectiva / → Exhaustiva / → Bijectiva

$g \circ f$ injectiva ⇒ f injectiva

$g \circ f$ exhaustiva ⇒ g exhaustiva

$g \circ f$ bijectiva ⇒ f injectiva i g exhaustiva

$$\boxed{\begin{aligned} I_A &: A \to A \qquad I_A(x) = x \quad \forall x \in A \\ x &\longmapsto x \end{aligned}}$$

Identitat.

$f: A \to B$ $I_B \circ f: A \to B$ $I_B(f) = f$ Apliquem f i l'altre a f $f \circ I_A: A \to B$ $f(I_A) = f$

$\boxed{\text{Si } f: A \to B \text{ bijectiva, llavors } f^{-1} \circ f = I_A \text{ i } f \circ f^{-1} = I_B}$

Si $f: A \to B$ i $g: B \to A$ satisfan $g \circ f = I_A$ i $f \circ g = I_B$

→ Llavors les dues són bijectives i cada una és l'inversa de l'altra: $g = f^{-1}$ i $f = g^{-1}$

Pot ser que $g \circ f = I_A$ però que g no sigui l'inversa de f.

Obs: $f(x) = f(x)$ pq $f(x)$ està ben definida.

Demo: $f: A \to B$ ($f^{-1} \circ f = I_A$)

$f(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = x$

Per def d'identitat $f^{-1} \circ f$ és identitat de A

Demo: (Propietat X). Això demostrarà que l'inversa d'encriptar és desencriptar (i viceversa).

Tenim $g \circ f$ és bijectiva $\Rightarrow$ f injectiva ①
g exhaustiva

Tenim $f \circ g$ és bijectiva $\Rightarrow$ g injectiva ②
f exhaustiva

} Per prop VIII

Per prop ①+② tenim que f bijectiva i g bijectiva. Per conseqüència f i g tenen inverses definides.

Tenim que $g \circ f = I_A \Leftrightarrow g \circ f(x) = x = g(f(x)) \underset{\text{def inv}}{\Leftrightarrow} g^{-1}(x) = f(x) \quad \forall x \in A.$

Llavors $x = g(f(x))$ fem g^{-1} a les dues bandes.

$$g^{-1}(x) = g^{-1}(g(f(x))) \Leftrightarrow g^{-1}(x) = (g^{-1} \circ g) \circ f(x) \Leftrightarrow g^{-1}(x) = I_B \circ f(x) = f(x).$$

①. Estudia injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat de $f(x) = |x|$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f_1$
$\mathbb{Z} \to \mathbb{N} : f_2$
$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} : f_3$
$\mathbb{N} \to \mathbb{N} : f_4$

$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

f_1: Ben def. | NO, $f(-1) = 1 = f(1)$ | NO, negatius no tenen antiimatge

f_2: Ben def. | NO, " | Sí, ja que ara estan en $\mathbb{N}$ i antiimatge de 34 és 34 (a igual que −34).

f_3: Ben def. | Sí, Tots valors de $\mathbb{N}$ tamb estàn en $\mathbb{Z}$ | NO, pq.

f_4: Ben def. | Sí, pq $|x| = x$ per tots valors | Sí.

②. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \begin{cases} f(x) = \frac{-x}{2} & \text{si } x \text{ par} \\ f(x) = \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ senar} \end{cases}$ Demo. que f és bijectiva.

La funció està ben definida. Donat parell, $\frac{-x}{2}$ únic i enter. Donat senar $\frac{x+1}{2}$ únic i senar } → Ben def.

$f(3) = \frac{3+1}{2} = 2$ $\mathbb{Z}$✓

Sí que és injectiva pq. qualsevol valor de $\mathbb{N}$ es pot repetir en $\mathbb{Z}$. $f(2) = \frac{-2}{2} = -1$ $\mathbb{Z}$✓

~~No és exhaustiva pq. quan x és parell (positiu pq és del Dom $\mathbb{N}$) el resultat és un nombre negatiu i aquest no té antii~~

Sí que és exhaustiva pq. si nombre és negatiu, sig. que x parell positiu.
si nombre positiu, sig. que x senar positiu.

Donat que és injectiva i exhaustiva, la funció és bijectiva :).

③. A, B, C, conjunts t.q $A, B \subseteq C$ $f: \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ així: $f(x) = (x \cap A, x \cap B)$

a) Demo que està ben def. GPT

- Unicitat del Dom:

Per a un conjunt $X \in \mathcal{P}(C)$ diem que $\overbrace{(X \cap A \,;\, X \cap B)}^{\text{Això és un par ordenat com } (x,y)}$.

Com que A i B son subconjunts de C, en tots els casos l'element $x \in X$ pot estar o no en la intersecció amb A. Passa el mateix amb B. Si $x \in X$ i $x \notin A$ obtindrem $\emptyset$ i aquest està contemplat en $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Està ben definit.

b) Demo injectiva $\Leftrightarrow A \cup B = C$.

Injectiva $\Rightarrow A \cup B = C$!

Donat que és injectiva, si té antiimatge, sig que valor de X està en $\mathcal{P}(C)$.
Com definit en "a)" tots els valors tenen imatge donat que $A, B \subseteq C$.
La unió de tots els casos de C provoca que estigui format per $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$

Per conseq de def de $\mathcal{P}$(conjunt format per combinació de subconjs) fa que $C = A \cup B$

④. Det. si funcions de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ són inj, bi, exh.

a) $n \to n-1$

- Injectiva: Sí, pq. cada valor de n té un sol valor n-1.
- Exhaustiva: Sí, pq. donat que $\mathbb{Z}$ és infinit sempre hi haurà un valor per n-1.
- Donat que si són les dues, sí és bijectiva.

Al principi no tenia ni puta idea de com fer-ho i ho vaig fer així. Sé de sobres com

b) $n \to n^2-1$

- Injectiva: Sí, pq ""
- Exhaustiva: No pq no es pot repetir ni 1 ni 2. per cap valor de n. se fa.
- Bijectiva: NO

Per demo NO injectivitat
Fer Contraexemple.

c) $n \to n^3$

- Injectiva: Sí, pq ""
- Exhaustiva: No pq no hi ha cap valor de $\mathbb{Z}$ per repetir 2.
- Bijectiva: NO

Bueno aquí ja ho vaig fer

d) $n \to E(\frac{n}{2})$ # E=part entera inferior.

- Injectiva: No, pq 2 i 3 tenen imatge 1.
- Exhaustiva: Sí, pq resultat és inferior a n i aquest és infinit.
- Bijectiva: NO.

⑤. Sabem que $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inj. Considerem $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida $g(x) = 2f(x)+3$

Demo que $g(x)$ injectiva i no exhaustiva.

Donat que $\mathbb{N}$ és infinit, sempre hi haurà un valor proxim (únic) per l'operació $2f(x)+3$. El que passa és que no hi ha cap $x \in \mathbb{N}$ que $g(x) = 1$ o $g(x) = 2$ (per exemple) llavors no la considerem exhaustiva.

* Def injectiva $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

Suposem $f(a) = f(b)$

$f(a) = f(b)$

$2a+3 = 2b+3 \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$ ← ~~Demo injectiva sí~~

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$2f(x_1)+3 = 2f(x_2)+3$

$2f(x_1) = 2f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2)$ → i $f(x)$ injectiva llavors $g(x)$ també.

No sabia fer quan el vaig fer ara sí.

16. Sabem que $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ exhaustiva. Considerem $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ def $g(x) = f(x+1) - 3$.
Demo que g és exhaustiva.

$g(x) = f(x+1) - 3$
$y = f(x+1) - 3$
$y + 3 = f(x+1)$ ← Això és exhaustiu.

Def Exhaustiva: $\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$.

Sigui $y \in \mathbb{Z}$ arbitrari, escollim $f(x+1) = y+3$.

Llavors $g(x) = f(x+1) - 3 = y + 3 - 3 = y$. Això implica que $g(x)$ tmb exhaustiva.

17. $f: (-\infty, 3) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \ln(6-2x)$. Demo ben def. Són bijectives i calc inversa.

Comprovació de definició:

$~~f(3) = \ln(0) =~~$ Està ben definida pq la multiplicació retornarà num positiu si x negativa i, $\ln(0)$ no $\exists$ però mai ho podrem tindre pq no agafa el 3.

Injectiva: $\forall x, y : f(x) = f(y) \to x = y$

$s_1, s_2 \in (-\infty, 3)$ [s_1, s_2 arbi]

$f(s_1) = f(s_2)$ [Suposem]

$\ln(6 - 2s_1) = \ln(6 - 2s_2)$ [Regla de f]

$6 - 2s_1 = 6 - 2s_2$ [Prop de ln donat que aquesta tmb injectiva]

$-2s_1 = -2s_2$

$\boxed{s_1 = s_2}$ ← Demo f és injectiva.

Exhaustiva: $\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$

$y = \ln(6-2x) \to e^y = 6 - 2x \to e^y - 6 = -2x \to \frac{-1}{2} e^y + 3 = x$

Agafem un x t.q. $x = \frac{-1}{2} e^y + 3$

$f(y) = \ln(6 - 2 \cdot (\frac{-1}{2} e^y + 3)) =$

$= \ln(6 + e^y - 6) = \ln(e^y) = \boxed{y}$

Demo funció exhaustiva.

Inversa: Donat que funció està ben def. i bijectiva (Donat que és Exhaustiva / Injectiva) té invers.

$x = \frac{-1}{2} e^y + 3 \to y = \frac{-1}{2} e^x + 3$ i aquesta és $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{-1}{2} e^x + 3}$

18. Sigui $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99, 100\}$ i $f: X \to X$ def $f(x) \begin{cases} 2x & \text{si } 1 \le x \le 50 \\ 2(x-51)+1 & 51 \le x \le 100 \end{cases}$

Demo. ben def. Bijectiva i Inversa.

Definició funció: Ben def per tots valors. Pq és ~~eq. primer grau~~ $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ ✓

Injectiva: $\forall x, y \in X : f(x) = f(y) \to x = y$

$s_1, s_2 \in X$
$f(s_1) = f(s_2)$
$2s_1 = 2s_2$
$\boxed{s_1 = s_2}$
$1 \le s_1, s_2 \le 50$

$s_3, s_4 \in X$
$f(s_3) = f(s_4)$
$2(s_3 - 51) + 1 = 2(s_4 - 51) + 1$
$2s_3 - 102 + 1 = 2s_4 - 102 + 1$
$2s_3 = 2s_4$ $\quad 51 \le s_3, s_4 \le 100$
$\boxed{s_3 = s_4}$

✓

Exhaustiva: $\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$

Agafem x arbi tq. $x = \frac{y}{2}$ $\quad f(x) = 2 \cdot (\frac{y}{2}) = y$ ✓

Agafem x arbi tq $x = \frac{y+101}{2}$ $\quad f(x) = 2(\frac{y+50}{2} - 51) + 1$

$f(x) = y - 1 + 1 = y$ ✓

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 1 \le x \le 50 \\ \frac{x+50}{2} & 51 \le x \le 100 \end{cases}$$

FM-4-E-2

15. $f: [\frac{5}{3}, \infty) \to [0, \infty)$ definida $f(x) = \sqrt{\frac{3x-5}{4}}$

Aquesta funció és bijectiva donat que és estrictament creixent en l'interval $[\frac{5}{3}, \infty)$

En el cas extrem $\sqrt{\frac{3 \cdot \frac{5}{3} - 5}{4}} = \sqrt{\frac{0}{4}} = 0$ i a partir d'aquí sempre augmenta valor.

La primera derivada és ≥ 0.

Obs: si $x \in (-\infty, \frac{5}{3})$ aleshores $\frac{3x-5}{4} < 0$ si $x < \frac{5}{3} \to 3x < 5 \to 3x - 5 < 0 \Rightarrow \frac{3x-5}{4} < 0$

Per altre banda si $x \in [\frac{5}{3}, \infty)$ aleshores $x \geq \frac{5}{3} \to 3x \geq 5 \to 3x - 5 \geq 0 \Rightarrow \frac{3x-5}{4} \geq 0$

Llavors $\sqrt{\ }$ està ben def. (i única) i és un nombre possitiu.

Injectivitat: $f(x) = f(y) \to x = y$

Podem fer aquest pas pq. en aquesta regió donemmé agafem les parts possitives i x^2 sempre serà bijectiva.

$f(x) = f(y) \to \sqrt{\frac{3x-5}{4}} = \sqrt{\frac{3y-5}{4}} \to \frac{3x-5}{4} = \frac{3y-5}{4} \to 3x - 5 = 3y - 5 \to$

$\to 3x = 3y \to \boxed{x = y}$ Podem veure que f és injectiva. ☑

Volem veure que és exhaustiva sigui $y \in [0, \infty)$ volem trobar $x \in [\frac{5}{3}, \infty)$

tal que $\sqrt{\frac{3x-5}{4}} = y \to \frac{3x-5}{4} = y^2 \to 3x - 5 = 4y^2 \to 3x = 4y^2 + 5 \to \boxed{x = \frac{4y^2+5}{3}}$

En aquest cas no hi ha problema pq en el cas anterior podia ser que algun x, y retornessin mateix valor

Obs: Veiem que si $y \geq 0$ llavors $\frac{4y^2+5}{3} \geq \frac{5}{3}$ Pq $y \geq 0 \to y^2 \geq 0 \to 4y^2 \geq 0 \to$

$\to 4y^2 + 5 \geq 5 \to \frac{4y^2+5}{3} \geq \frac{5}{3}$. Llavors és un bon candidat pq el Dom és $[\frac{5}{3}, \infty)$

$f(x) = f\left(\frac{4y^2+5}{3}\right) = \sqrt{\frac{3 \cdot \left(\frac{4y^2+5}{3}\right) - 5}{4}} = \sqrt{\frac{4y^2+5-5}{4}} = \sqrt{y^2} = \boxed{y}$ ⊛

La inversa de $f^{-1}: [0, \infty) \to [\frac{5}{3}, \infty)$ $\quad f^{-1}(z) = \frac{4z^2+5}{3}$

$z \mapsto \frac{4z^2+5}{3}$

Obs: ⊛ En aquest cas $\sqrt{y^2} = |y| = y$ Però no fa falta

Donat que $y \geq 0$ pq. y sempre serà possitiu.

(16). $f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{0\}$ definida $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Demo ben definida, bijectiva, calc inversa.

Validació del Dom: Pq funció no estigui definida el denominador hauria de ser '0'. $x-1=0 \to x=1$. Donat que en la def. de la funció ja treiem el '1' del Dom, aquest estarà ben definit.

~~Validació Codom: El resultat de la divisió sempre serà un nombre real i, l'únic prob. el tindríem quan resultat és 0. Això només podria succeir si numerador = 0 però això és impossible. El codomini està ben definit.~~

Injectiva: $\forall a,b \in \mathbb{R}-\{1\}: f(a)=f(b) \to a=b$

Agafem una a i $b \in \mathbb{R}-\{1\}$ arbitraris t.q. $f(a)=f(b)$. Per def de funció es pot reescriure com $\frac{1}{a-1}=\frac{1}{b-1}$. Volem veure si $a=b$.

Això ho podem simplificar pq. $b-1\neq 0$.

$$\frac{1}{a-1}=\frac{1}{b-1} \to \frac{1}{a-1}\cdot(b-1)=\frac{1}{b-1}\cdot(b-1) \to \frac{b-1}{a-1}=1 \to (a-1)\cdot\frac{b-1}{a-1}=1\cdot(a-1) \to b-1=a-1 \to \boxed{b=a}$$

Podem veure que funció és injectiva ☑.

Exhaustiva: $\forall y \in \mathbb{R}-\{0\}\ \exists x \in \mathbb{R}-\{1\}: f(x)=y$

Agafem un $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ t.q. $x=\frac{1+y}{y}$.

$$f(x)=f\left(\frac{1+y}{y}\right)=\frac{1}{\frac{1+y}{y}-1}=\frac{1}{\frac{1+y-y}{y}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=\frac{y}{1}=\boxed{y}$$ Podem veure que $f(x)$ exhaustiva ☑.

Donada la funció vista és Injectiva i Exhaustiva, $f(x)$ és bijectiva. (I ben definida)

Funció inversa:

Per trobar la funció inversa podem agafar el valor de x que hem fet servir per demo que funció exhaustiva i canviar x per y t.q. $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{1+x}{x}}$. :)

(9). Sabem que $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ exhaustiva. Demo $g(x) = f(x+1) - 3$ $\quad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ g exhaustiva.

$g(x) = f(x+1) - 3$

$y - 3 = f(x+1)$

$x+1 = x'$

$x' = x-1$

; $y - 3 = f(x')$

Com que f exhaustiva, donat $y - 3 \in \mathbb{Z}$ sabem que $\exists x' : f(x') = y+3$, és a dir $\exists x' : f((x-1)+1) = y-3$;

és a dir $\exists x' : \underbrace{f((x'-1)+1) - 3}_{g(x'-1)} = y$

Hem vist que $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x' : g(x-1) = y$.

Si anomenem $x = x'-1$ hem demostrat que $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z}$ t.q. $g(x) = y$.

Això vol dir que $g(x)$ és exhaustiva.

(25). $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def $f(x) = x+1$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def $g(x) = x^2$ } Calc $g \circ f$. Es pot $f \circ g$?

$g(f(x)) = g(x+1) = \boxed{(x+1)^2 = g \circ f}$

Sí que es pot perquè el Codomini de g és $\mathbb{R}$ i el domini de f és $\mathbb{R}$ també.

(26). $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ def $f(x) = x \bmod 5$
$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ def $g(x) = \ln(x+1)$ } Calc $g \circ f$. Es pot $f \circ g$?

$g(f(x)) = g(x \bmod 5) = \ln(x \bmod 5 + 1)$

No és pot pq. el codomini de g és $\mathbb{R}$ i el domini de f és $\mathbb{Z}$.

$$g \circ f(x) = \begin{cases} \ln(1) \text{ si } x \equiv 0 \bmod 5 \ (\ln(0+1) = \ln(1) = 0) \\ \ln(2) \text{ si } x \equiv 1 \bmod 5 \ (\ln(1+1) = \ln(2)) \\ \ln(3) \text{ si } x \equiv 2 \bmod 5 \ (\ln(2+1) = \ln(3)) \\ \ln(4) \text{ si } x \equiv 3 \bmod 5 \ (\ln(3+1) = \ln(4)) \\ \ln(5) \text{ si } x \equiv 4 \bmod 5 \ (\ln(4+1) = \ln(5)) \end{cases}$$

Donat que treballem amb $g(x) = x \bmod 5$ x pot valdre els valors $0 \le x \le 4$.

(30). Demostra prop.

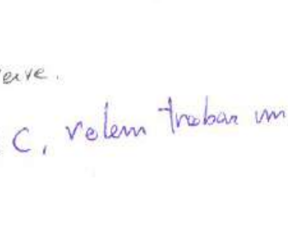
V. Composició funcions exhaustives és exhaustiva.

Volem veure.

$\underbrace{f: A \to B}_{\text{exhaustiva}}$, $\underbrace{g: B \to C}_{\text{exhaustiva}}$, $\underbrace{g \circ f: A \to C}_{\text{exhaustiva.}}$; $\forall y \in C$, volem trobar un $x \in A$ t.q $g \circ f(x) = y$.

Sabem g exhaustiva $\Rightarrow \exists z \in B : g(z) = y$

Sabem f exhaustiva $\Rightarrow \exists x \in A : f(x) = z$ } $g \circ f(x_0) = g(f(x_0)) = y$, per tant, $x = x_0$



VII. Composició de funcions bijectives, és bijectiva.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ inj} \\ g \text{ inj} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ injectiva

* Volem veure que compleix injectivitat pq. en V ja hem dit que funciona per exhaustivitat.

Prenem s_1, s_2 arbitraris diferents de A i volem veure que $g \circ f(s_1) \neq g \circ f(s_2)$

$\left.\begin{array}{l} g \circ f(s_1) = g(f(s_1)) \\ g \circ f(s_2) = g(f(s_2)) \end{array}\right|$ Com que $x = x' \to f(x) \neq f(x')$ tenim que $g \circ f(s_1) \neq g \circ f(s_2) \to$ Llavors $g \circ f$ injectiva.

Això i la prop V demostra propietat VII

(32). $f: A \to A$ satisfà $f \circ f = f$ Demo que són equivalents.

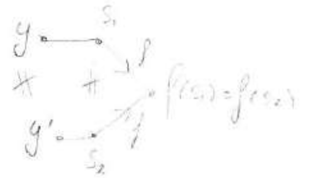
$\boxed{a) \to b) \equiv f = I_A \to f \text{ bijectiva}}$

$f = I_A \Rightarrow f$ bijectiva Donat que la Identitat és bijectiva i estem dient que són iguals ☑.

$\boxed{b) \to c) \equiv f \text{ bijectiva} \to f \text{ exhaustiva}}$

f bijectiva $\Leftrightarrow f$ injectiva i f exhaustiva $\Rightarrow f$ exhaustiva. ☑.

$\boxed{c) \to d) \equiv f \text{ exhaustiva} \to f \text{ injectiva}}$



Suposem no injectiva fins arribar contradicció

No injectiva sig $\exists\, s_1, s_2$ on $s_1 \neq s_2$ i $f(s_1) = f(s_2)$

Com que f exhaustiva : $\left.\begin{array}{l} \exists\, y \text{ t.q. } f(y) = s_1 \\ \exists\, y' \text{ t.q. } f(y') = s_2 \end{array}\right\}$ i $y \neq y_1$

$s_1 = f(y) = f(f(y)) = f(s_1) = f(s_2) = f(f(y')) = f(y') = s_2$ i és una CONTRADICCIÓ

pq hem dit que $s_1 \neq s_2$.

$\boxed{d) \to a) \equiv f \text{ injectiva} \to f = I_A}$

Volem demo que $f(x) = x$

Sabem que $-f$ injectiva . Si f injectiva implica que, si y te antiimatge és única
$\quad\quad\quad\quad - f \circ f = f$ pq $f: A \to A$

Agafem un $x \in A$ i considerem $f(x) \in A$ llavors tornem a aplicar f pq sabem que $f \circ f = f$

$f(f(x)) = f(x)$ i sabiem que l'ÚNIC que anava a $f(x)$ era $\underline{x}$. llavors per continuar complint la injectivitat $f(x) = x$.

$x \xrightarrow{f} f(x) \longrightarrow f(x)$

$\boxed{\text{LLAVORS } f = I_A \text{ pq envia a ell mateix}}$

FM-4-E-4

(35). Sigui $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ def per $f(x) \begin{cases} x & \text{si } x \text{ par} \\ x+1 & \text{si } x \text{ senar} \end{cases}$ Demo que $f \circ f = f$.

Haurem de fer la comprovació pels dos casos.

<u>x parell</u>: $\exists k : x = 2k$ on $k \in \mathbb{Z}$.

$f(x) = \exists k\ f(2k) = 2k$ ← Sabem per def de $f(x)$ en enunciat.

$f \circ f = f(f(x)) = \exists k : f(2k) = \boxed{2k}$

<u>x senar</u>: $\exists t : x = 2t+1$ on $t \in \mathbb{Z}$.

$f(x) = \exists t : f(2t+1) = 2t+1+1 = 2t+2 = 2(\overset{y \in \mathbb{Z}}{y})$ ← Això és el que sabem, ~~però~~

Ara podem veure que si x senar, f retorna parell, així que hauem de fer cas de $f(x) = x$. t.q. $\exists y\ f(2y) = \boxed{2y.}$

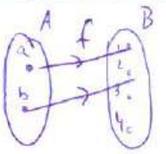
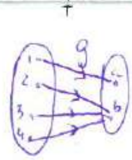
Veiem que totes dues vegades retorna un nombre par

No sé si explicació correcta.

Queda demo que $f \circ f = f$:)

(33). Sigui $f: A \to B$ $g: B \to A$ satisfent $\overset{A \to A}{g \circ f} = I_A$

c) Donem un exemple que $f \circ g \neq I_B$

 i 

$f \circ g(1) = 1$ $f \circ g(3) = 2$
$f \circ g(2) = 2$ $f \circ g(4) = 2$
} $f \circ g \neq I_B$

Però podria ser 2, 3, 4

a) Demo que si f exh $\Rightarrow f \circ g = I_B$

Volem demo que $f(g(b)) = b$.

Partim d'un $b \in B$ arbitrari.

Donat que f exh, sabem que $\forall b\ \exists a : f(a) = b$.

Per la hipòtesi $g(f(a)) = I_A$ podem aplicar $g()$ a l'expressió anterior t.q.

$g(f(a)) = \underset{\text{l'expressió anterior}}{g(b)} \Rightarrow g(f(a)) = a$ Pq sabem que $f(a) = b$ és compleix.

Llavors ~~b~~ es pot reescriure com $g(b) = a$

Ara apliquem f a les dues bandes $f(g(b)) = f(a) \Rightarrow f(g(b)) = b$ ☐ ← Això és el que buscàvem.

Demostrat que si $g \circ f = I_A \wedge f$ exh $\Rightarrow f \circ g = I_B$