DERIVADES DIRECCIONALS, PARCIALS

Derivada Direccional

Sigui $a = (a_1, \dots, a_n)$ punt del Dom f.

Sigui $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vector de norma 1 $\left(\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = 1\right)$
(Vector unitari)

Obs: Si us donen un vector qualsevol $(u_1, \dots, u_n) = \vec{u}$ normalitzar vol dir considerar que té norma 1. $\vec{v} = \left(\frac{u_1}{\|\vec{u}\|}, \dots, \frac{u_n}{\|\vec{u}\|}\right)$

Def: La derivada direccional de f en el punt a en la direcció de $\vec{v}$ és $D_v f(a) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda v) - f(a)}{\lambda}$

"Derivada direccional dona el creixement de la funció en la direcció del vector $\vec{v}$".

Com calcular-les

Comencem pels casos fàcils $\vec{v} = \vec{e_i} = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$ $\|\vec{e_i}\| = 1$ i-èssim vector de la base canònica.

$$D_{e_i} f(a) = \lim \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$ [Derivar la funció com si totes les variables (menys de x_i) fossin constants] $= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ Derivada parcial de f respecte x_i

Exemple: $f(x,y) = (\sin(x))^{y^2+1}$

Derivar amb la y const.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\sin(x)^{\text{constant}}\right] \Rightarrow \left[\text{constant} \cdot \sin(x)^{\text{const}-1} \cdot \sin(x)'\right] = (y^2+1) \cdot \sin(x)^{(y^2+1)-1} \cdot \cos(x) = (y^2+1) \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)^{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[\text{const}^{y^2+1}\right] \Rightarrow \left[\text{const}^{y^2+1} \cdot \ln(a) \cdot (y^2+1)'\right] = \sin(x)^{y^2+1} \cdot \ln(\sin(x)) \cdot (2y)$$

Les derivades en un punt: substituir.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = (1^2+1) \cdot \cos(\pi/4) \cdot \sin(\pi/4)^{1^2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = \sin(\pi/4)^{1^2+1} \cdot \ln(\sin(\pi/4)) \cdot 2(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 2 = \boxed{\frac{-1}{2} \ln(2)}$$

Vector Gradient de la funció f en punt $a = (a_1, \dots, a_n)$

És el vector de les derivades parcials de la funció en el punt $\nabla f(a)$.

Exemple: $\nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = \left(1, \frac{-1}{2} \ln(2)\right)$

Això serveix:

- Per calcular derivades direccionals
- Per calcular pla tangent i recta normal a una superfície en un punt.
- Per trobar punts crítics i extrems (màx, mín) de funcions de diverses variables.

$\vec{v} = \left(\frac{u_1}{\|\vec{v}\|}, \dots, \frac{u_m}{\|\vec{v}\|}\right)$

Donats $f, a, \vec{v}$ com al principi $\boxed{D_v f(a) = \underbrace{\nabla f(a)}_{\text{Gradient}} \cdot \vec{v}}$ "$\cdot$" Producte escalar del gradient pel vector unitari.

<u>En l'exemple:</u> $f(x,y) = \sin(x)^{y^2+1}$, $a = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ en la direcció $\vec{u} = (3, 5)$, Derivada direccional?

1) Normalitzem: $\vec{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2+5^2}}, \frac{5}{\sqrt{3^2+5^2}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right)$

2) Fem derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ i fem $\nabla f(a)$: $\nabla f(a) = \left(1, \frac{-1}{2}\ln(2)\right)$

3) Calculem prod. escalar: $D_v f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = \nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) \cdot \vec{v} = \frac{6 - 5\ln(2)}{2\sqrt{34}}$

$\boxed{\nabla f(a) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(a)\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha = \|\nabla f(a)\| \cdot \cos(\alpha)}$ on α angle entre $\nabla f(a)$ i $\vec{v}$

90° amb gradient ⇒ 0 creixement
0° amb gradient ⇒ max creixement
180° amb gradient ⇒ max. baixada

$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 90^\circ \Rightarrow 0 \text{ creixement} \\ \alpha = 0^\circ \Rightarrow \text{max. creixement} \\ \alpha = 180^\circ \Rightarrow \text{max. decreixement} \end{array}}$

$\cos(\alpha) = 1$ (0)
$\cos(\alpha) = 0$ $(\pi/2)$
$\cos(\alpha) = -1$ (π)

<u>Funció classe C^1</u>

<u>És de C^1</u> en el Dom (o subconjunt del Dom) si aquest conjunt existeixen totes les derivades parcials i són contínues en el conjunt.

Exemple: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = (e^x)^{e^y} = e^{xe^y}$

<u>Dom</u>: Tot $\mathbb{R}^2$ sense cap limitació.

<u>Derivada respecte x</u>: Fixem y; $f_1(x) = e^{xe^y} \Rightarrow e^{\text{cost}\cdot x}$ derivable a tot $\mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{const} \cdot e^{\text{const}\, x} = \boxed{e^y \cdot e^{e^y \cdot x}}$ que és cont. en tot $\mathbb{R}^2$

<u>Derivada respecte y</u>: Fixem x; $f_2(y) = (e^x)^{e^y} \Rightarrow (\text{const})^{e^y}$ amb <u>const possitiva</u> derivable a tot $\mathbb{R}$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \text{const}^{e^y} \cdot \ln(\text{const}) \cdot (e^y)' = e^{xe^y} \cdot \ln(e^x) \cdot e^y = e^{xe^y} \cdot x \cdot 1 \cdot e^y = \underbrace{\boxed{xe^y \cdot e^{xe^y}}}_{\text{cont en tot } \mathbb{R}^2}$.

Podem concloure que funció és de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

La derivada direccional <u>és màxima</u> en la $\overbrace{\text{direcció del vec. gradient}}^{\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 1}$ $\nabla f(P)$ i val max $\|\nabla f(P)\|$

La derivada direccional <u>és mínima</u> en la direcció oposada del vec gradient $-\nabla f(P)$ i val mín $-\|\nabla f(P)\|$

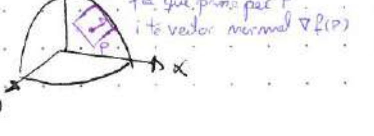
La derivada direccional <u>és zero</u> en la direcció perpendicular del vec gradient.

<u>Superfície</u>

Punts $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.q. satisfan $F(a,b,c) = 0$. (Suposarem F és de classe C^1)

Si podem aïllar 'z' tenim la superfície en forma explícita $z = f(x,y)$ que correspon al gràfic de la funció f, que serà de classe C^1

Si tenim un punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la superfície (és a dir $F(x_0, y_0, z_0) = 0$) el Plà tangent a la superfície en el punt P és el plà $\boxed{\nabla F(P) \times (X - P) = 0} = \nabla F(P) \times (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$



Recta Normal: Passa per P i té vector director $\nabla F(P)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(P) \end{pmatrix}}_{P + \lambda \nabla F(P)}$

Recordatoris

Plà tangent: És un plà que només toca un punt P a la superfície (Com la recta tangent).

Vector Director: Dona la direcció recta i l'orienta. "Uneix dos punts $\vec{AB} = \vec{v} = B - A$"

Vector Normal: Vector perpendicular a un plà. $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n} = (A, B, C)$

$\vec{v} \perp \vec{n}$ (Són perpendicular). 

El vector gradient $(\nabla f(P)) = \vec{n}$ del plà tangent i aquest plà continde a tots els vector tangents en aquell punt P. 

①. $f(x,y) = x^2+y^2$,, $P=(2,3)$,, $\vec{v} = (3/5, 4/5)$. Calcular $D_v f(P)$.

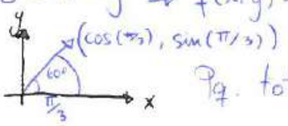
∇∇ CUIDADO $\vec{v}$ ha de ser unitari. $\|\vec{v}\| = \sqrt{(3/5)^2+(4/5)^2} = 1$ així que ja és correcte.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = f'_x$,, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = f'_y$ $\Big|$ $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 2\cdot 2 = 4$,, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cdot 3 = 6$ $\Big|$ $\nabla f(P) = (4,6)$

b) $\nabla f(P) \times \vec{v} = (4,6) \times \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(4\cdot\frac{3}{5}\right) + \left(6\cdot\frac{4}{5}\right) = \boxed{\frac{36}{5} = D_v f(P)}$

②. funció $z = x^2-y^2$,, Punt $(1,1)$,, En la direcció que forma angle $\frac{\pi}{3}$ amb direcció pos de l'eix $\overrightarrow{OX}$.

$z = x^2-y^2 \Rightarrow f(x,y) = x^2-y^2$ on és de classe C^1 a tot $\mathbb{R}$.



Pq. tots els vectors unitaris son $(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(x))$.

$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ on $\|\vec{v}\| = 1$ ☑

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$,, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ $\Big|$ $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$,, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2$ $\Big|$ $\nabla f(P) = (2,-2)$

b) $\nabla f(P) \times \vec{v} = (2,-2) \times \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{1-\sqrt{3} = D_v f(P)}$ $\left(1\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{-3}{2} = -1$

④. Det. a,b,c per tal que la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2+byz+cz^2x^3$,, $P=(1,2,-1)$ tingui valor màxim de 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ. Vec. paral·lel a OZ.

• El val max s'agafa en $\nabla f(P)$ i hem dinem que ha de ser $(0,0,\lambda)$

• El val max és $\|\nabla f(P)\|$. $\Rightarrow \nabla f(P) = (0,0,\lambda)$,, $\|\nabla f(P)\| = \sqrt{\lambda^2} = |\lambda| = 64$

• $\frac{\partial f}{\partial x} = ay^2+byz+cz^2 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1) = 4a+3c$

• $\frac{\partial f}{\partial y} = 2axy + bz \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1) = 4a-b$

• $\frac{\partial f}{\partial z} = by + cx^3 2z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1) = 2b-2c$

$\nabla f(P) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c) = (0,0,\pm 64)$

$$\left.\begin{array}{l} 4a + 3c = 0 \\ 4a - b = 0 \\ 2b-2c = \pm 64 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{b = \pm 24} \\ \boxed{a = \pm 6} \\ \boxed{c = \mp 8} \end{array}$$

ORDRE IMPO.

Llavors ara tenim dues possibilitats:

- Agafem el primer signe: $(a,b,c) = (6,24,-8) \Rightarrow \nabla f(P) = 64$
- Agafem el segon signe: $(a,b,c) = (-6,-24,8) \Rightarrow \nabla f(P) = -64$

Ex: Sup. $z = x^2+y^2$,, $P = (1,2,5)$

$F(x,y,z) = x^2+y^2-z \Rightarrow F(1,2,5) = 1^2+2^2-5 = 0$ ☑ P és de la superfície

• $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

• $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

• $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$

$\Rightarrow$ $\nabla F(P) = (2,4,-1)$ i ara fem la fórmula $\nabla f(P) \times (X-P) = 0$

$0 = (2,4,-1) \times (x-1, y-2, z-5) \Rightarrow 2(x-1) + 4(y-2) - 1(z-5) = 0 \Rightarrow \underline{2x+4y-z=5}$ Pla tangent

Recta Tangent: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}}$

(YT). Troba plà tangent en $z=x^2+y^2+e^{xy}$ en $P=(\overset{a}{1},\overset{b}{0},\overset{c}{2})$. $\nabla F(P)\times(X-P)=0$

Veiem que z està en funció de x, y així que podem ficar-la a l'altre bando o no.

$f(x,y)=z=x^2+y^2+e^{xy}$. Obs que inclús ens haguessin pogut dir $P=(1,0)$ i no passaria res

pq. podem fer servir la fórmula però amb una mod: $z=f(P)+\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-b)$

- $f(P)=(1)^2+(0)^2+e^{1\cdot 0}=1+1=\underline{2=f(P)}$ ← Això ens indica que $f(1,0)=2=c$ el P sí està en sup.
- $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+e^{xy}\cdot y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=2\cdot(1)+e^{1\cdot 0}\cdot 0=2=\underline{\frac{\partial f}{\partial x}}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}=2y+e^{xy}\cdot x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=2\cdot(0)+e^{1\cdot 0}\cdot 1=1=\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}$

$\Rightarrow z=2+2(x-1)+1(y-0)$

$z=2+2x-2+y$ Pla tangent.

$z=2x+y \Leftrightarrow \boxed{\pi\equiv 2x+y-z=0}$

Taxa de creixent

NOTA: Podem veure que $\vec{n}=\underline{(2,1,-1)=\nabla F(1,0,2)}$ i $\|\nabla F(P)\|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\overbrace{\sqrt{5}=\|F(P)\|}$

∇IMPO: Recorda verificar que P està en la superfície.

(7). Troba el gradient

a) $f(x,y,z)=\ln(z+\sin(y^2-x))$ en $P=(1,-1,1)$

- $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P=\frac{1}{z+\sin(y^2-x)}\cdot(\cos(y^2-x))\cdot(-1)\Big|_P=-\cos(y^2-x)\cdot(z+\sin(y^2-x))^{-1}\Big|_P=-\cos(0)\cdot(1+0)^{-1}=\boxed{-1}$
- $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P=\frac{1}{z+\sin(y^2-x)}\cdot(+\cos(y^2-x))\cdot(2y)\Big|_P=+2y\cos(y^2-x)\cdot(z+\sin(y^2-x))^{-1}\Big|_P=\boxed{-2}$
- $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P=\frac{1}{z+\sin(y^2-x)}\cdot 1+0\Big|_P=(z+\sin(y^2-x))^{-1}\Big|_P=\boxed{1}$ $\boxed{\nabla f(P)=(-1,-2,1)}$

b) $f(x,y,z)=e^{3x+y}\cdot\sin(5z)$ en $P=(0,0,\pi/6)$

- $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P=e^{3x+y}\cdot 3\cdot\sin(5z)\Big|_P=e^{30+0}\cdot 3\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=1\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\boxed{3/2}$
- $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P=e^{3x+y}\cdot 1\cdot\sin(5z)\Big|_P=1\cdot 1\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{\nabla f(P)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)}$
- $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P=e^{3x+y}\cdot\cos(5z)\cdot 5=1\cdot 5\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\boxed{-\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

c) $f(x,y,z)=\int_x^{xy+z^2}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ $P=\left(\frac{\pi}{2},1,0\right)$ Sabem que $\frac{\sin(t)}{t}$ contínua $\forall t\in\mathbb{R}$ $\left(\lim\frac{\sin(x)}{x}=1\right)$  no cero antes

$F'(x,y,z)=\left(\frac{\sin(xy+z^2)}{xy+z^2}\cdot\frac{\partial(xy+z^2)}{\partial x_i}\right)-\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\partial(x)}{\partial x_i}\right)$

- $\frac{\partial(xy+z^2)}{\partial x}=y$ • $\frac{\partial(xy+z^2)}{\partial y}=x$ • $\frac{\partial(xy+z^2)}{\partial z}=2z$
- $\frac{\partial(x)}{\partial x}=1$ • $\frac{\partial(x)}{\partial y}=0$ • $\frac{\partial(x)}{\partial z}=0$

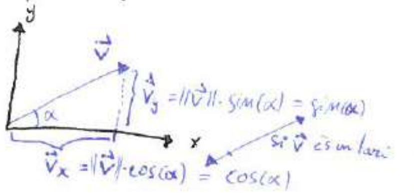
$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P=\left(\frac{\sin(xy+z^2)}{xy+z^2}\cdot(y)\right)-\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot 1\right)\Big|_P=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1+0^2\right)}{\frac{\pi}{2}\cdot 1+0^2}-\frac{\sin(\pi\div 2)}{\pi\div 2}=\boxed{0}$

$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P=\left(\frac{\sin(xy+z^2)}{xy+z^2}\cdot(x)\right)-\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot 0\right)\Big|_P=\boxed{1}$

$\boxed{\nabla F(P)=(0,1,0)}$

$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P=\left(\frac{\sin(xy+z^2)}{xy+z^2}\cdot(2z)\right)-\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot 0\right)\Big|_P=\boxed{0}$

⑧. Troba la derivada $z=x^2-xy+y^2$ en $M(1,1)$ en dir que forma α amb dir posi a l'eix OX



$D_{\vec{v}} f(M) = \nabla f(M) \bullet \vec{v} = \| f(M) \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \cos(\widehat{\nabla f(M), \vec{v}})$ ← Angle que formen

$\nabla f(M) \bullet \vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \bullet (\vec{v}_x, \vec{v}_y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \bullet (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) =$

$= (1,1) \bullet (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) =$

$= \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$ Que això és un num.

- $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = 2x - y|_M = 1$
- $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = -y + 2y = 1$

#Ara hem de trobar α (que va variant) per respondre cada apartat.

Sabem que la direcció màxima és la del gradient ($\nabla f(M) = (1,1)$) però necessitarem que $\vec{v}$ sigui unitari per donar la magnitud de creixement.

Sabem que serà el màxim si apuntem mateix sentit i direcció així que podem dir que $\nabla f(M) = \vec{v}$ però $(1,1)$ no és unitari així que diem que $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\| \nabla f(M) \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \cos(\alpha) = \boxed{\sqrt{2} = \| D_{\vec{v}} f(M) \|}$ Valor de la derivada.

Tindrà valor mínim quan apuntin a direcció dif però mateixa sentit $f(-1,-1) = \vec{v}$ però no unitari:

$\vec{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$; $\| \nabla f(M) \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot (-1) = \boxed{-\sqrt{2} = \| D_{\vec{v}} f(M) \|}$

(10). Calc. recta normal i plà tangent.

a) La superfície $z = \frac{2xy}{x^2+y}$ en $P = (2,-2,-4)$ $z = 2xy \cdot (x^2+y)^{-1} \Rightarrow 2xy \cdot (x^2+y)^{-1} - z = 0$

- $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = 2y \cdot (x^2+y)^{-1} + (2xy(-1(x^2+y)^{-2}) \cdot 2x)\Big|_P = 6$
- $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = 2x \cdot (x^2+y)^{-1} + (2xy(-1(x^2+y)^{-2}) \cdot 1)\Big|_P = 4$
- $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P = \boxed{-1}$

Recta normal: $\boxed{(x,y,z) = (2,-2,-4) + \lambda(6,4,-1)}$

$\boxed{\text{Pla tangent: } \pi: 6x + 4y - z = -8}$

$\nabla f(P) \times (X - P) = (6,4,-1) \times (x-2, y+2, z+4) = 6x - 12 + 4y + 8 - z - 4 = 0 \Rightarrow 6x + 4y - z = -8$

⑬. Sigui $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$; $f(x,x) = 3 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Demo deri. de f en $P = (0,0)$ amb dir bisectriu primer quadrant és 0.

Sabem que $\vec{v} = (1,1)$ però no és unitari $\Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ # Aquest sí.

Com que $f(x,x) = 3$ (constant) la derivada $\frac{d}{dx} f(x,x) = 0$ on sabem que $(y = x)$: $dy = dx$

$\frac{d}{dx} f(x,x) = \frac{df}{dx}(x,x) \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \overset{\frac{dx}{dx}=1}{=} \frac{df}{dx}(1) + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}(1) + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} = 0$

Podem fer sub: $1 + \frac{df}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{df}{dy} = -1$. $\nabla f(P) = (1,-1)$ i $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$D_{\vec{v}} f(P) = \nabla f(P) \bullet \vec{v} = \left[(1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] + \left[(-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0$ tal i com volíem.