

# Выбор моделей пространства состояний в задаче нейронного декодирования

Владимиров Э.А.

Московский физико-технический институт

*Эксперт:* В. В. Стрижов

*Консультант:* А. М. Самохина

2023

# Нейронное декодирование

## Проблема

Агрегирование информации во времени

## Задача

Выбор модели пространства состояний

## Решение

Сделать выбор на основе анализа свойств моделей

# Модель пространства состояний

Непрерывная модель пр-ва состояний

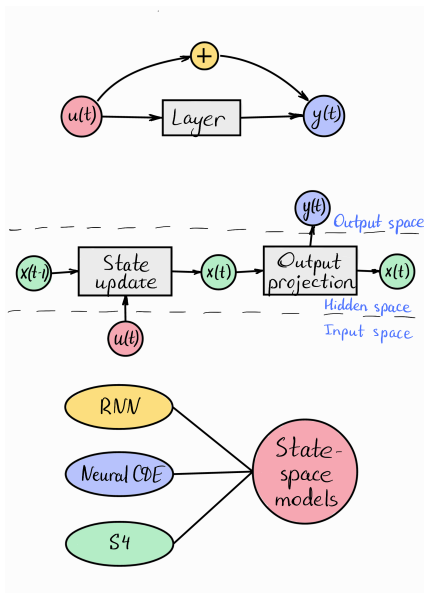
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Дискретная модель пр-ва состояний

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$



# Нейронное декодирование

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times N \times T}$  —  $M$  измерений ЭКГ, где  $N$  — число электродов,  $T$  — число элементов временного ряда

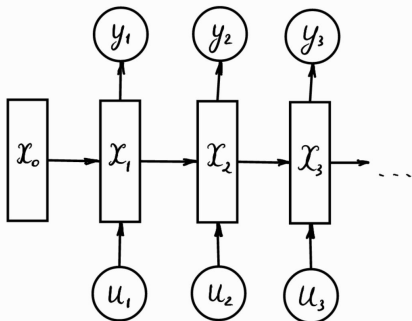
$Y \in \{0, 1\}^M$  — целевая переменная

Критерий качества — бинарная кросс-энтропия

$$L(\mathbf{w}) = -\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M y_m \log(f(\mathbf{w}, \mathbf{x})) + (1 - y_m) \log(1 - f(\mathbf{w}, \mathbf{x}))$$

Оптимизационная задача:  $\hat{\mathbf{w}} = \arg \max_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w})$

# Рекуррентные нейронные сети



$$\mathbf{x}_t = \sigma_x(W_x \mathbf{x}_{t-1} + W_u \mathbf{u}_t)$$

$$\mathbf{y}_t = \sigma_y(W_y \mathbf{x}_t),$$

где  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^K$ ,  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^s$

$\sigma: \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$  — функция активации

$W_x \in \mathbb{R}^{K \times K}$ ,  $W_u \in \mathbb{R}^{s \times K}$ ,  $W_y \in \mathbb{R}^{K \times d}$

— матрицы весов

---

<sup>1</sup>Medsker L. R., Jain L. C. Recurrent neural networks // Design and Applications. – 2001. – Т. 5. – С. 64-67.

## Сравнение РНС с моделью пространства состояний

Модель пространства состояний

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1} + B\mathbf{u}_t$$

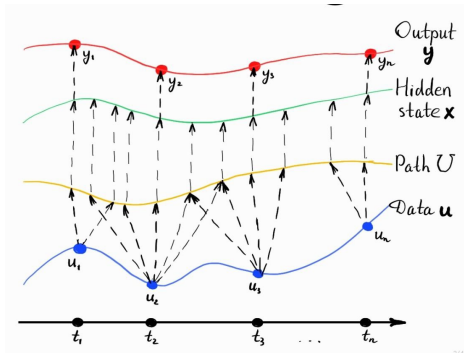
$$\mathbf{y}_t = C\mathbf{x}_t$$

Рекуррентная нейронная сеть

$$\mathbf{x}_t = \sigma(W_x\mathbf{x}_{t-1} + W_u\mathbf{u}_t)$$

$$\mathbf{y}_t = W_y\mathbf{x}_t$$

# Нейронные контролируемые дифференциальные уравнения



где  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^s$

$\mathbf{x} : [t_1, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^K$  — функция скрытого состояния

$U : [t_1, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  — кубический сплайн

$\zeta : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^K$  — проектор в скрытое пространство

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{K \times (d+1)}$  — динамика скрытого состояния

$\mathbf{g} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^s$  — линейное отображение

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_1) = \zeta(\mathbf{u}_1, t_1) \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) dU(\tau) \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i)) \end{cases}$$

# Сравнение НКДУ с моделью пространства состояний

Модель пространства состояний

$$\mathbf{x}(t_1) = \text{Const}$$

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

Нейронные КДУ

$$\mathbf{x}(t_1) = A\mathbf{u}(t_1) + f(t_1)$$

$$\mathbf{x}'(t) = BU'(t) \cdot \mathbf{x}(t)$$

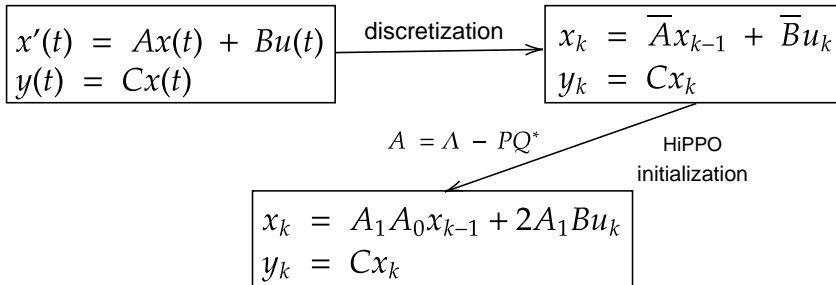
$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

---

<sup>1</sup>Kidger P. et al. Neural controlled differential equations for irregular time series //Advances in Neural Information Processing Systems. – 2020. – Т. 33. – С. 6696-6707



# Модели структурированного пространства состояний



$$u_k = u(k\Delta)$$

$$\bar{A} = (I - \frac{\Delta}{2}A)^{-1}(I + \frac{\Delta}{2}A)$$

$$\bar{B} = (I - \frac{\Delta}{2}A)^{-1}\Delta B$$

$$A = \Lambda - PQ^* \text{ — диаг. + ранг 1}$$

$$A_0 = \frac{2}{\Delta}I + A$$

$$D = (\frac{2}{\Delta} - \Lambda)^{-1}$$

$$A_1 = D - DP(1 + Q^*DP)^{-1}Q^*D$$

## Итоговое сравнение моделей

$L$  — длина последовательности

$d$  — размерность исходного пространства

$K$  — размерность скрытого пространства

$s$  — размерность целевого пространства

$M = \max(d, K, s)$

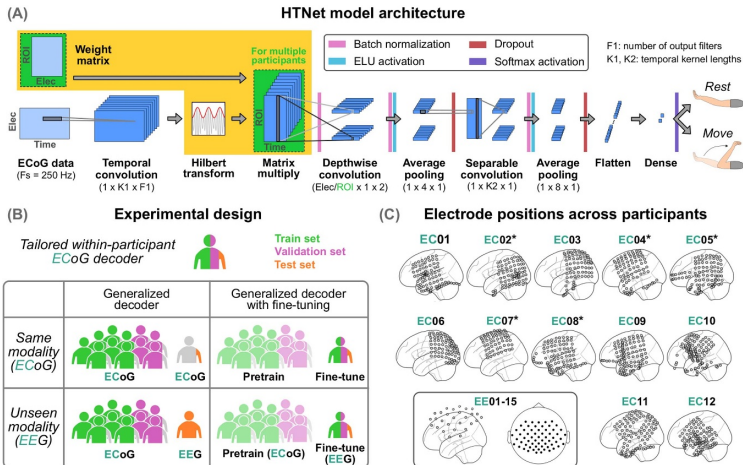
	Parameters	Forward
RNN	$O(KM)$	$O(KML)$
Neural CDE	$O(K^2d + Ks)$	$O(K^2dL)$
S4	$O(Kd + Ks)$	$O(KML)$

# Вычислительный эксперимент

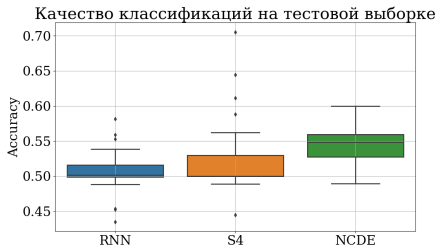
## Цель

На примере задачи классификации сигналов ЭКГ сравнить работу различных моделей пространства состояний

Основная модель — HTNet



# Анализ ошибки



	Parameters	Time per epoch (sec)	Accuracy
RNN	34.2k	5.86	$0.506 \pm 0.027$
S4	33.3k	10.07	$0.521 \pm 0.049$
Neural CDE	31.5k	37.23	$0.546 \pm 0.026$

# Заключение

- 1 Показано, что рекуррентные нейронные сети, нейронные контролируемые уравнения и модель S4 являются частными случаями модели пространства состояний
- 2 Продемонстрировано, что NeuralCDE имеет лучшее качество на тестовой выборке по сравнению с другими моделями, однако её время обучения сильно превышает время обучения других моделей