

Выбор моделей пространства состояний в задаче декодирования

Владимиров Э.А.

Московский физико-технический институт

17 мая 2023 г.

Декодирование сигнала

Проблема

Декодирование многомерного сигнала в пространство с меньшей размерностью либо с некоторой структурой

Задача

Выбор модели пространства состояний

Решение

Сделать выбор на основе анализа свойств моделей

Модель пространства состояний

Непрерывная модель пр-ва состояний

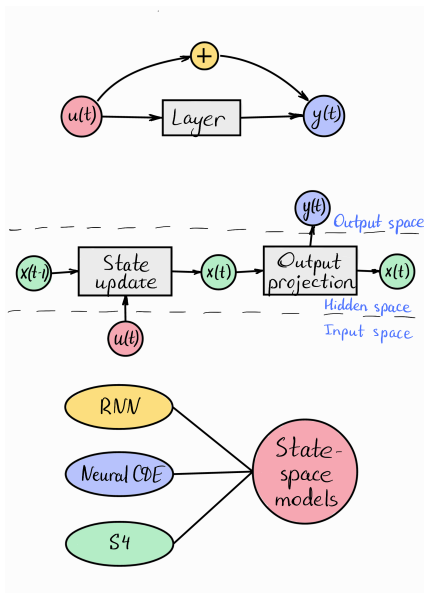
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

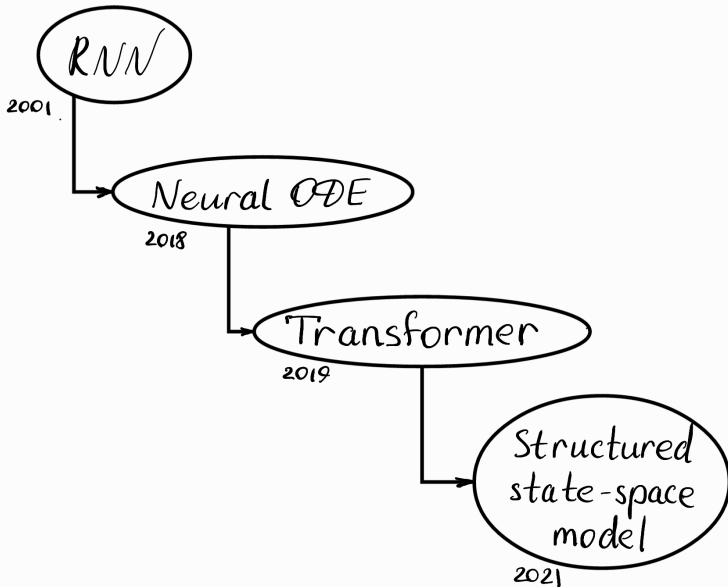
Дискретная модель пр-ва состояний

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k$$

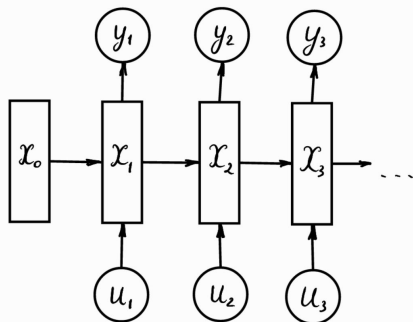
$$y_k = Cx_k + Du_k$$



История моделей



Реккурентные нейронные сети



$$\mathbf{x}_t = \sigma(W_x \mathbf{x}_{t-1} + W_u \mathbf{u}_t)$$

$$\mathbf{y}_t = W_y \mathbf{x}_t,$$

где $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^s$
 $\sigma: \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$ — функция активации
 $W_x \in \mathbb{R}^{K \times K}$, $W_u \in \mathbb{R}^{s \times K}$, $W_y \in \mathbb{R}^{K \times d}$
— матрицы весов

¹Medsker L. R., Jain L. C. Recurrent neural networks // Design and Applications. – 2001. – Т. 5. – С. 64-67.

Сравнение РНС с моделью пространства состояний

Модель пространства состояний

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1} + B\mathbf{u}_t$$

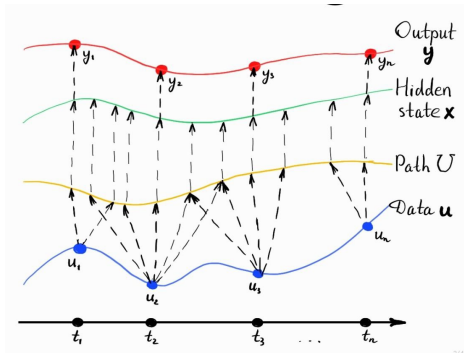
$$\mathbf{y}_t = C\mathbf{x}_t$$

Рекуррентная нейронная сеть

$$\mathbf{x}_t = \sigma(W_x\mathbf{x}_{t-1} + W_u\mathbf{u}_t)$$

$$\mathbf{y}_t = W_y\mathbf{x}_t$$

Нейронные контролируемые дифференциальные уравнения



где $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^s$

$\mathbf{x} : [t_1, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^K$ — функция скрытого состояния

$U : [t_1, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ — кубический сплайн

$\zeta : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^K$ — проектор в скрытое пространство

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{K \times (d+1)}$ — динамика скрытого состояния

$\mathbf{g} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^s$ — линейное отображение

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_1) = \zeta(\mathbf{u}_1, t_1) \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) dU(\tau) \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i)) \end{cases}$$

Сравнение НКДУ с моделью пространства состояний

Модель пространства состояний

$$\mathbf{x}(t_1) = \text{Const}$$

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

Нейронные КДУ

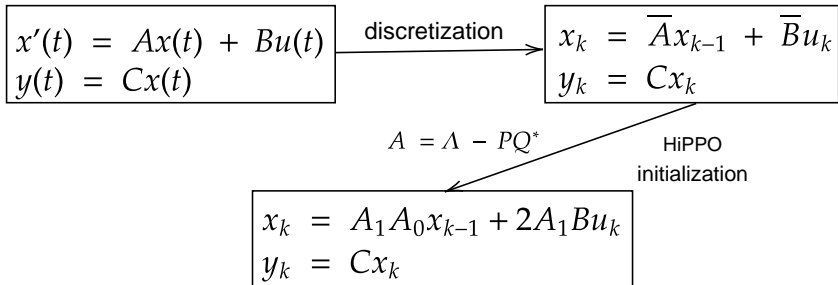
$$\mathbf{x}(t_1) = A\mathbf{u}(t_1) + f(t_1)$$

$$\mathbf{x}'(t) = BU'(t) \cdot \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

¹Kidger P. et al. Neural controlled differential equations for irregular time series //Advances in Neural Information Processing Systems. – 2020. – Т. 33. – С. 6696-6707

Модели структурированного пространства состояний



$$u_k = u(k\Delta)$$

$$\bar{A} = (I - \frac{\Delta}{2}A)^{-1}(I + \frac{\Delta}{2}A)$$

$$\bar{B} = (I - \frac{\Delta}{2}A)^{-1}\Delta B$$

$$A = \Lambda - PQ^* - \text{диаг.} + \text{ранг } 1$$

$$A_0 = \frac{2}{\Delta}I + A$$

$$D = (\frac{2}{\Delta} - \Lambda)^{-1}$$

$$A_1 = D - DP(1 + Q^*DP)^{-1}Q^*D$$

Итоговое сравнение моделей

L — длина последовательности

d — размерность исходного пространства

K — размерность скрытого пространства

s — размерность целевого пространства

$M = \max(d, K, s)$

	Parameters	Forward	Memory to train
RNN	$O(KM)$	$O(KML)$???
Transformer	$O(K^2d + Ks)$	$O(LK \cdot (L + S))$???
Neural CDE	$O(K^2d + Ks)$	$O(K^2dL)$	$O(L + K)$
S4	$O(Kd + Ks)$	$O(KML)$???

Вычислительный эксперимент

Цель

На примере задачи классификации сигналов ЭЭГ сравнить работу различных моделей пространства состояний

Анализ ошибки

Заключение