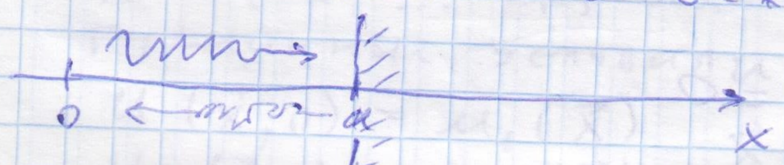
Лекция №13

Неограниченная область. Многомерное уравнение колебаний.

Неограниченная область

Если волна распространяется в на конечном отрезке $[0; a]$, то при достижении правой границы она отражается и бежит обратно.



В неограниченной области такого отражения не происходит. Для решения задачи строим квазиравномерную сетку

$$x(\xi) = \frac{b\xi}{(1-\xi^2)^\Gamma}, \quad 0 \le \xi \le 1, \quad b > 0, \quad a > 0$$

Её последняя точка — бесконечно удалённая. Полуцелые узлы и длины шагов считаем обычным способом.

Обычно $\Gamma = \frac{1}{2}$; b берём так, чтобы в интересной области было 50–75% расчётных точек.

Прозрачная граница

Можно считать и на конечном отрезке вместо бесконечности, но тогда надо убрать обратную волну.

„Хорошая" волна $\varphi_1(x-ct)$ бежит →

„Плохая" волна $\varphi_2(x+ct)$ бежит ←

„Плохой" волны не должно быть вблизи правой границы.

Для „хорошей" волны верно

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0$$

Возьмём это в качестве условия на правой границе

$$(u_t + c u_x)_{x=a} = 0$$

Для ~~[illegible]~~ двухслойной схемы

$$(c u_x + v_x)_{x=a} = 0$$

Его разностный аналог

$$c\,\frac{\hat{u}_{N+1} - \hat{u}_{N-1}}{h_N + h_{N+1}} + \frac{\hat{v}_{N+1/2} - \hat{v}_{N-1/2}}{h_{N+\frac{1}{2}}} = 0$$

Аппроксимация $O(h^2)$

Многомерное уравнение

В изотропной среде (либо если у тензора упругости ≠0 только диагональные элементы)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u + f(\vec{x}, t)$$

$$A_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(C_\alpha^2(\vec{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$$

$$\vec{x} = \{x_1 \dots x_p\} \in G$$

Граничные условия и начальн. условия:

$$u(\vec{x}, 0) = \mu_1(\vec{x}) \qquad \vec{x} \in G$$

$$u_t(\vec{x}, 0) = \mu_2(\vec{x})$$

$$u(\vec{x}, t) = \mu_3(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \Gamma(G)$$

Будем решать в параллелепипеде с прямоугольными равномерными сетками с шагами h_α по переменным x_α.

Многомерный „крест"

Строится аналогично 1-D.

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u} - 2u + \check{u}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u + f$$

Аппроксимация $O\left(\tau^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2\right)$

Исследуем устойчивость методом гармоник

$$u = e^{i \sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha x_\alpha}$$

Делаем замены:

$u \to 1 \quad \check{u} \to \frac{1}{\rho}$

$\hat{u} \to \rho$

$$\Lambda_\alpha u \to -4\left(\frac{c_\alpha}{h_\alpha} \sin \frac{q_\alpha h_\alpha}{2}\right)^2$$

$$\rho - 2 + \frac{1}{\rho} = \underbrace{-4\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{c_\alpha}{h_\alpha} \sin \frac{q_\alpha h_\alpha}{2}\right)^2}_{\gamma}$$

$$\rho^2 - 2\rho + 1 = -4\gamma\rho$$

$$\rho^2 - 2\rho(1 - 2\gamma) + 1 = 0$$

Устойчивость будет при $D \le 0 \Rightarrow$

$$\tau < \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{c_\alpha}{h_\alpha}\right)^2\right)^{-1/2} \sim \frac{h}{c\sqrt{p}}$$

$\Rightarrow$ Обобщенное условие Куранта

Факторизованные схемы

Многом. аналог схемы с весами

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u} - 2u + \check{u}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha \left[\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma) u + \sigma \check{u}\right] + f$$

Преобразуем схему и несколько иному виду

$$\frac{1}{\tau^2}[\hat u - 2u + \check u] = \sigma \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(\hat u - 2u + \check u) + \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u + f$$

$$\underbrace{\left(E - \tau^2 \sigma \sum_\alpha \Lambda_\alpha\right)}_{\Downarrow \text{ замена}} \frac{\hat u - 2u + \check u}{\tau^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u + f$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p} (E - \tau^2 \sigma \Lambda_\alpha) u = E - \tau^2 \sigma \sum_\alpha \Lambda_\alpha + \underbrace{\tau^4 \sigma^2 \sum_\alpha \sum_\beta \Lambda_\alpha \Lambda_\beta + \dots}_{O(\tau^2)}$$

Факторизация работает даже лучше, чем для параболич. уравнения.

$\boxed{\text{Устойчивость Ф.С.}}$

Делаем замены

$$\Lambda_\alpha \to -4\left(\frac{c_\alpha}{h_\alpha}\right)^2 \sin^2 \frac{q_\alpha h_\alpha}{2}, \quad \hat u \to \rho;\ \check u \to \frac{1}{\rho}, \quad u \to 1$$

$$\gamma_\alpha = \frac{2\tau^2 c_\alpha^2}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{q_\alpha h_\alpha}{2}\right)$$

$$\Lambda_\alpha \to -2\gamma_\alpha / \tau^2$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p} (1 + 2\sigma\gamma_\alpha) \frac{\rho - 2 + 1/\rho}{\tau^2} = -2\frac{1}{\tau^2} \sum_{\alpha=1}^{p} \gamma_\alpha$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\sigma\gamma_\alpha)(\rho^2-2\rho+1) = -2\rho\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha$$

$$\rho^2-2\rho+1 = -\rho\,\frac{2\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\sigma\gamma_\alpha)}$$

$$\rho^2-2\rho\left(1-\frac{\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\sigma\gamma_\alpha)}\right)+1=0$$

опять $D \le 0$

$$-1 \le 1-\frac{\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\sigma\gamma_\alpha)} \le 1$$

$$\frac{\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\sigma\gamma_\alpha)} \le 2 \Rightarrow \prod_{\alpha=1}^{p}(1+2\sigma\gamma_\alpha) \ge \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha$$

При $\sigma \ge \frac{1}{4}$ будет верно для $\forall$ гармоники

Условие устойчивости $\boxed{\sigma \ge \frac{1}{4}}$

Или и в 1-р лучше брать $\sigma \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

Алгоритм решения аналогичен главному для параболич. уравнения.

Лекция № 14

Интегральные уравнения.
Корректно поставленные задачи.
Понятие о некорректных задачах.

Дополнение по прошлой лекции:

Для 3-D задачи:

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_z)\,w = (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z)\,u + f$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_y)\,v = w$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_x)\,\frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2} = v$$

$$v_{гр} = (E - \sigma\tau^2\Lambda_x)\left(\frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\right)\Bigg|_{гр}$$

Оператор можно отбросить без потери 2-го порядка

$$v_{гр} = \frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\Bigg|_{гр}$$

Аналогично

$$w|_{гр} = \frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\Bigg|_{гр}$$

Ситуация существенно проще, чем в случае с уравнением теплопроводн.

В интегральных уравнениях неизв. функция стоит под знаком $\int$:

$$\int_a^b K(x, \xi, u(\xi))\,d\xi = F(x, u(x))$$

$$a \le x \le b$$