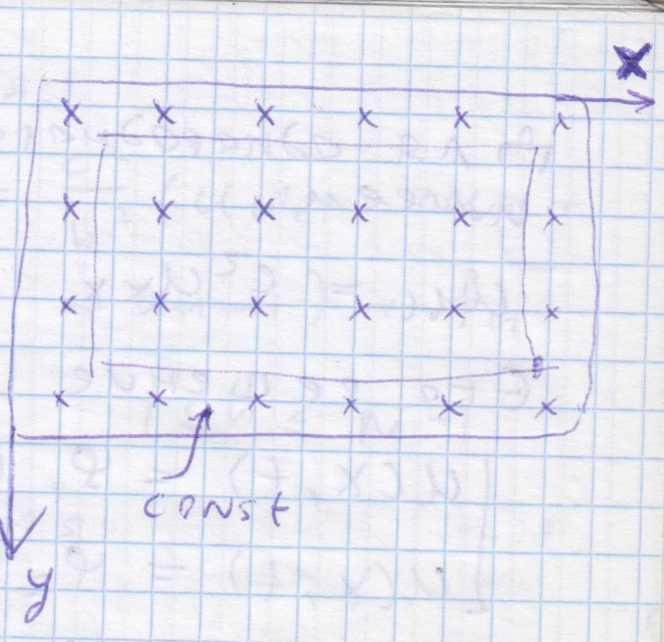
В матричной форме

$\Lambda_x(U) = U \times L_x$

$\Lambda_y(u) = L_y \times U$



$P_x P_y \Delta U = \Lambda U$

$P_y \Delta U = P_x^{-1}(\Lambda u)$

оператор!

$\Delta U = P_y^{-1}(P_x^{-1}(\Lambda u))$

Надо записать с использованием левого и правого матр. деления с помощью „/" и „\"

Лекция №12

Гиперболические уравнения

Г. У.

- колебания струны
- движение сжимаемого газа
- распростр. возмущений электромагн. полей

Типичная задача – малые колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$x \in [0; a]$

$t \in [0; T]$

Для однородного уравнения ($f \equiv 0$) имеем:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Его решение автомодельно

$$\begin{cases} u(x,t) = \varphi_1(x+ct) \\ u(x,t) = \varphi_2(x-ct) \end{cases}$$

$$u(x,t) = k_1 \varphi_1(x+ct) + k_2 \varphi_2(x-ct)$$

общее решение.

Нужны 2 граничных условия по x

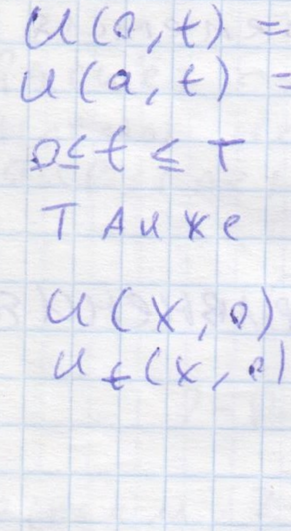
$u(0,t) = \mu_1(t)$
$u(a,t) = \mu_2(t)$
$0 \le t \le T$

Также нужны 2 условия по t

$u(x,0) = \mu_3(x)$
$u_t(x,0) = \mu_4(x)$, $0 \le x \le a$

$\boxed{\text{Схема „крест"}}$

Шаблон – крест имеет 3 слоя по времени



Сетка - равномерная.

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u}_n - 2u_n + \check{u}_n) = \frac{c^2}{h^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + f_n$$

$$1 \le n \le N-1$$

Граничные условия:

$$\hat{u}_0 = \mu_1(\hat{t})$$

$$\hat{u}_N = \mu_2(\hat{t})$$

Решение.

На 0 слое известна

$$u_n^0 = \mu_3(x_n), \quad 0 \le n \le N$$

На 1 слое придётся вычислять отдельно

Самый простой метод:

$$\hat{u}_n \approx u_n + \tau u_t(x_n, 0) = \mu_3(x_n) + \tau \mu_4(x_n)$$

$\boxed{\text{I порядок}}$

Лучше

$$\hat{u}_n \approx u_n + \tau u_t + \underbrace{\frac{\tau^2}{2} u_{tt}}_{?}$$

$\boxed{\text{II порядок}}$

$\Rightarrow$ из уравнения

$$\hat{u}_n = \mu_3 + \tau \mu_4 + \frac{\tau^2}{2}\left[c^2 \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x^2} + f(x_n, 0)\right]$$

Вместо u_{xx} можно исп. 2 простр. разность.

Схема — явная. Начиная со 2 слоя все стандартно.

$\boxed{\text{Аппроксимация}}$

Из самой записи следует 2 порядок аппроксимации по пространству и времени (нужны непрерывн. 4 производные).

Значит $O(\tau^2 + h^2)$, но при простейшей аппроксимации на 1 слое получается только $O(\tau + h^2)$.

$\boxed{\text{Устойчивость}}$

$u_n \to 1$

$u_{n\pm 1} \to e^{\pm iqh}$

$\hat{u}_n \to \rho u_n$

$\check{u}_n \to \frac{u_n}{\rho}$

Для q-той гармоники...

$$\frac{1}{\tau^2}\left(\rho - 2 + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{c^2}{h^2}\left(e^{iqh} - 2 + e^{-iqh}\right)$$

$$\rho^2 - 2\rho + 1 = \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 \rho \left(e^{i\frac{qh}{2}} - e^{-i\frac{qh}{2}}\right)^2$$

$$\rho^2 - 2\rho + 1 = \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 \rho \left(2i \sin\frac{qh}{2}\right)^2$$

$$\rho^2 - 2\rho + \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 4\rho \sin^2\frac{qh}{2} + 1 = 0$$

$$\rho^2 - 2\rho \Big(\underbrace{1 - 2\left(\frac{c\tau}{h}\sin\frac{qh}{2}\right)^2}_{\gamma_q}\Big) + 1 = 0$$

По т. Виета $\rho_q' \rho_q'' = 1 \Rightarrow |\rho_q'|\,|\rho_q''| = 1$

Но должно быть $|\rho'| \le 1$ $\forall N$ и $|\rho''| \le 1$

Значит $|\rho'| = |\rho''| = 1$

$$\rho_{1,2} = \frac{2\gamma_q \pm \sqrt{D}}{2} = \gamma_q \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}$$

$$D = 4\gamma_q^2 - 4 = 4(\gamma_q^2 - 1)$$

$$\rho_{1,2} = \gamma_q \pm \sqrt{\gamma_q^2 - 1}$$

Мы знаем $|\rho_{1,2}| = 1$

Имеем 2 варианта:

1. ρ − вещественна

   $\rho_1 = \rho_2 = 1$ или $\rho_1 = -\rho_2 = \pm 1$

2. ρ − комплексна

Для веществ. ρ

$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow \gamma_q^2 - 1 = 0 \Rightarrow |\gamma_q| = 1$

$$\begin{cases} Y_q + \sqrt{Y_q^2-1} = 1 \\ Y_q - \sqrt{Y_q^2+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_q = 0 \\ Y_q + \sqrt{Y_q^2-1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y_q = 0 \\ \sqrt{-1} = 1 \end{cases}$$ несовместна.

ρ – комплексно

$|Y_q| < 1$

Тогда

$$\rho_1 = \left| Y_q + \sqrt{Y_q^2-1} \right|$$

$$\rho_2 = \left| \underset{Re}{Y_q} - \underset{Im}{\sqrt{Y_q^2-1}} \right|$$

$$|\rho| = \rho_1 \rho_2 = Y_q^2 - (Y_q^2-1) = 1$$

Итого $|Y_q| < 1$ – условие устойчив.

$$-1 \le 1 - 2\left(\frac{c\tau}{h} \sin\frac{qh}{2}\right)^2 \le 1$$

всегда верно

$$\frac{c\tau}{h}\left|\sin\frac{qh}{2}\right| \le 1$$

Должно выполнятся для всех гармоник. $\Rightarrow$

$$\boxed{k = \frac{c\tau}{h} \le 1}$$

число Куранта

Постановка условий Неймана

$$u_x(0,t) = \mu_1(t)$$

Тогда удобно брать $x_0 = -\frac{h}{2}$
$x_1 = \frac{h}{2}$

Значит $\frac{u_1 - u_0}{h} = \mu_0(t)$ — II порядок!

Если C может меняться и условие Куранта нарушается, то расчёт может развалиться, хотя явная схема совсем не дурна.

$\boxed{\text{Неявная схема}}$

По аналогии с теплопроводностью:

$$\frac{1}{\tau^2}(\hat{u} - 2u + \check{u}) = \Lambda\left[\sigma\hat{u} + (1-2\sigma)u + \sigma\check{u}\right] + f$$

$$\Lambda u_n = \frac{c^2}{h^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

1 слой считаем как раньше.

Сам счёт — обычная прогонка с 3-диагональной матрицей.

Аппроксимация: $O(\tau^2 + h^2)$ при любом σ.

$\boxed{\text{Устойчивость}}$

Исследуется методом гармоник аналогично явной схемы.

После обычных подстановок получим:

$$\rho_q^2 - 2\gamma_q \rho_q + 1 = 0$$

$$\gamma_q = \frac{1 - 2(1-2\sigma)\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2} \qquad \beta_q = \frac{c\tau}{h}\sin\frac{qh}{2}$$

Аналогично прошлому случаю

$$|\gamma_q| \le 1$$

$$-1 \le \frac{1 + 4\sigma\beta_q^2 - 2\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2} \le 1$$

$$-2 \le -\frac{2\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2} \le 0$$

$$\beta_q^2 \le 1 + 4\sigma\beta_q^2$$

$$(1-4\sigma)\beta_q^2 \le 1$$

$$\boxed{\varkappa = \frac{c\tau}{h}}$$

$$(1-4\sigma)\varkappa^2 \sin^2\frac{qh}{2} \le 1$$

По худшему случаю...

$$\varkappa^2 \le \frac{1}{1-4\sigma}, \quad \sigma < \frac{1}{4}$$

$\varkappa$ - любое, при $\sigma \ge \frac{1}{4}$ - без усл. устойчивость

$$\boxed{\sigma \ge \frac{1}{4}}$$

Разумно брать $\sigma \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$, чтобы коэффиц. $1-2\sigma$ не становился отрицательным.

$\boxed{\text{Двухслойные схемы}}$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$

Возьмём

$$v(x,t) = \int_0^x u_t(\xi, t)\,d\xi$$

$$F(x,t) = \int_0^x f(\xi, t)\,d\xi$$

тогда

$$v_x = u_t$$

$$v_t = \int_0^x u_{tt}(\xi, t)\,d\xi = \int_0^x (c^2 u_{xx} + f(\xi,t))\,d\xi$$

$$v_t = c^2 u_x + F(x,t)$$

Итого:

$$\begin{cases} v_x = u_t \\ v_t = c^2 u_x + F \end{cases}$$

Граничные условия – старые

$u(0,t) = \mu_1(t)$

$u(a,t) = \mu_2(t)$

Начальные условия

$u(x,0) = \mu_3(x)$ $\quad v(x,0) = \int_0^x \mu_4(\xi)\,d\xi$

Уравнение II порядка свели к системе уравнений 1 порядка.

Это – задача акустики

Она бывает удобнее для числ. счёта.

Всё это делается ради неравном. сетки.

Используем метод прямых

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = c^2 u_x + F \end{cases}$$

$$\frac{du_n}{dt} = \left(v_{n+\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}}\right) / h_{n+\frac{1}{2}} \qquad 1 \le n \le N-1$$

$$h_{n+\frac{1}{2}} = x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dv_{n-\frac{1}{2}}}{dt} = c^2 (u_n - u_{n-1}) / h_n + F_{n-\frac{1}{2}}(t) \qquad 1 \le n \le N$$

Всего $2N-1$ неизв. функций.

При $n=1$ исп. $u_0(t)$

$n=N$ исп. $u_N(t)$

Так исп. граничные условия

На произв. сетке аппрокс. только $O(h)$, на равном. и квазиравном. $O(h^2)$

Где взять $v_{n-\frac{1}{2}}(0)$? — интегр. μ_4

$$v_{1/2}(0) = \frac{1}{2}\left(\mu_4(x_0) + \mu_4(x_{1/2})\right)(x_{1/2} - x_0)$$

$$v_{n+\frac{1}{2}}(0) = v_{n-\frac{1}{2}}(0) + \mu_4(x_n)\, h_{n+\frac{1}{2}}$$

$$1 \le n \le N-1$$

Где взять $F(x_{n-1/2}, t)$?

$$F_{1/2}(t) = \frac{1}{2}\left(f(x_0,t) + f(x_{1/2},t)\right)(x_{1/2} - x_0)$$

$$F_{n+\frac{1}{2}}(t) = F_{n-\frac{1}{2}}(t) + f(x_n,t)\, h_{n+\frac{1}{2}}$$

$$1 \le n \le N-1$$

$\boxed{\text{Единая система}}$

Введём новые обозначения

$w_{2n}(t) = u_n(t)$, $0 \le n \le N$ $k = 2n$

$w_{2n-1}(t) = v_{n-\frac{1}{2}}(t)$, $1 \le n \le N$ $k = 2n-1$

k — общий индекс, $0 \le k \le 2N$

$$\frac{dw_k}{dt} = \varphi_k(w_{k-1}, w_{k+1}) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{w_{k+1} - w_{k-1}}{h_{(k+1)/2}}, & k = 2, 4, \ldots 2N-2 \\ \dfrac{c^2(w_{k+1} - w_{k-1})}{h_{(k+1)/2}} + F_{k/2}(t), & k = 1, 3, \ldots, 2N-1 \end{cases}$$

$2N-1$ уравнений.

Гран. условия

$w_0(t) = u_0(t) = \mu_1(t)$

$w_{2N}(t) = u_N(t) = \mu_2(t)$

Начальные условия

$w_{2n}(0) = u_n(0) = \mu_3(x_n)$

$w_{2n-1}(0) = v_{n-\frac{1}{2}}(0)$ ← это считать умеем.

$\boxed{\text{Разностная схема}}$

Систему ОДУ решаем Розенброком

$$\hat{\vec{w}} = \vec{w} + \tau \operatorname{Re} \vec{\xi}$$

$$\left(E - \alpha\tau \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{w}}\right)\vec{\xi} = \Phi\left(\vec{w}, t + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\alpha = 0;\ \underbrace{\tfrac{1}{2};\ 1;\ \tfrac{1+i}{2}}_{\text{неявные схемы}}$$

Схема двухслойная, так что можно произвольно менять шаг по времени τ и не надо отд. формул для 1 слоя.

$\boxed{\text{Гармонический анализ}}$

Исследуем устойчивость при действительном α

Схема имеет след. вид:

$$\hat{u}_n - u_n = \frac{\tau}{h}\left(\alpha\left(\hat{v}_{n+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{n-\frac{1}{2}}\right) + \right.$$

$$\left. + (1-\alpha)\left(v_{n+\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$\hat{v}_{n-\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}} = \frac{\tau c^2}{h}\left(\alpha\left(\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}\right) + \right.$$

$$\left. + (1-\alpha)\left(u_n - u_{n-1}\right)\right) + \tau F_{n-\frac{1}{2}}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$$

У нас 2 функции, но множ. роста один на двоих

$$u(x) = e^{iqx}$$

$$v(x) = \beta e^{iqx}$$ – может иметь др. амплитуду

$$\hat{u} = \rho_q u$$

$$\hat{v} = \rho_q v$$

подставим и получим

$$\rho_q - 1 = \frac{\tau\beta}{h}\left(\alpha\rho_q \frac{e^{iq\frac{h}{2}} - e^{-iq\frac{h}{2}}}{2i} + \right.$$

$$\left. + (1-\alpha)\frac{e^{iq\frac{h}{2}} - e^{-iq\frac{h}{2}}}{2i}\right) 2i$$

$$\beta(\rho_q - 1) = 2i\frac{\tau c^2}{h}\left(\alpha \sin\frac{qh}{2}\rho_q + \right.$$

$$\left. + (1-\alpha)\sin\frac{qh}{2}\right)$$

Умножаем...

$$(\rho_q - 1)^2 = \underbrace{-4\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 \sin^2\frac{qh}{2}}_{S_q}\left(\alpha\rho_q + 1 - \alpha\right)^2$$

$$(\rho_q - 1)^2 + (\alpha\rho_q + 1 - \alpha)^2 S_q = 0, \quad S_q > 0$$

$$(1 + \alpha^2 S_q)\rho_q^2 - 2(1 - \alpha(1-\alpha)S_q)\rho_q +$$

$$+ 1 + (1-\alpha)^2 S_q = 0$$

Уравнение имеет или 1 вещ. или 2 компл.-сопр. корня. т.е. модули корней равны $\Rightarrow$ по т. Виета

$$|\rho_q| = \left(\frac{1 + (1-\alpha)^2 S_q}{1 + \alpha^2 S_q}\right)^{1/2}$$

Должно быть $|\rho_q| \le 1$

$$0 \le \frac{1 + S_q\alpha^2 - 2\alpha S_q + S_q}{1 + \alpha^2 S_q} \le 1$$

$$0 \le 1 + \frac{S_q(1 - 2\alpha)}{1 + \alpha^2 S_q} \le 1$$

$$\frac{S_q(1-2\alpha)}{1 + \alpha^2 S_q} \le 0$$

$\boxed{\alpha \ge \frac{1}{2}}$ – условие устойчивости

$\alpha = 0$ – безусл. неуст.

$\alpha = \frac{1}{2}$ – безусл. уст., но $|\rho_q| = 1 \Rightarrow$ не диссипат.

$\alpha > \frac{1}{2}$ – безусл. уст. и диссипативна.

Схемы:

1. CROS $\alpha = \frac{1+i}{2}$

$O(\tau^2 + h^2)$

по t – произв. сетка

по x – равном. или квазиравном.

Схема немонотонна, т. к. уравнение подобно 2 уравн. переноса с волнами, бегущ. навстречу друг другу, а для уравн. переноса из II пор. $\Rightarrow$ немонот.

2. ROS 1 (чисто неявная)

$O(\tau + h^2)$

Монотонна

3. ROS $\frac{1}{2}$ (полусумма)

$O(\tau^2 + h^2)$, но немонотонна гораздо сильнее, чем CROS

Явная схема безусл. неустойчива, но можно построить уст. явную схему не вход. в семейств. схем Розенброка. Но смысл в ней есть только для ~~мон~~ постр. монотон. схем.