Лекция №5

Краевые задачи для ОДУ

В таких задачах дополнительные условия задаются более чем в одной точке.

Уравнения порядка n имеют n доп. условий. ⇒ задача минимум 2-го порядка.

Независимая переменная - координата x, а не время t, как в задаче Коши

Новые обозначения:

$$\frac{\partial u}{dx} = u'_x = u_x \quad \frac{d^2u}{dx^2} = u''_{xx} = u_{xx} \ldots$$

Примеры

1) Струна

$$u_{xx} + q(x)u_x - r(x)u = f(x), \quad a<x<b$$

$$\left.\begin{aligned} u(a) &= \alpha \\ u(b) &= \beta \end{aligned}\right\} \text{условия I рода}$$

Жестко закрепленные концы

$u(x)$ имеет на 2 больше непр. производных

$u_{xx} = f(x, u, u_x)$, $x \in (a, b)$ - общий вид
f может быть нелинейной.

2) Брусок (уравнение 4-го порядка)

$$u_{xxxx} = f(x), \quad x \in (a, b)$$

Нужны 4 условия

$u(a) = 0$
$u_x(a) = 0$
$u(b) = 0$
$u_x(b) = 0$

Концы закреплены, брусок прогибается только под действием внешней силы.

Нелокальные краевые условия

Они связывают значения функции в разных точках

$$\frac{du}{dx} = u, \quad x \in [0; a]$$

$$u(a) - u(0) = c$$

Метод сеток

1) Вводим сетку $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ($x_0 = a$, $x_n = b$)

2) Производные → конечные разности. В результате получаем разностную схему. Узлы, которые в неё входят — шаблон схемы.

3) Св-во ∃ решения алг. системы

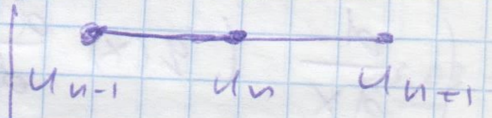
4) Сходимость при сгущении сетки

5) Апостериорная оценка погрешности

Решение задачи для струны

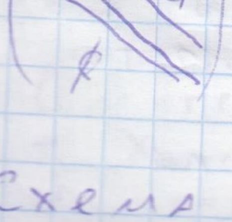
$$\begin{cases} u_{xx} + q(x)\,u_x - r(x)\,u = f(x) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \dfrac{q_n}{2h}\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) - \\ \quad - r_n u_n = f_n, \quad 1 \le n \le N-1 \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$



Трёхточечный шаблон

Матрица системы



Легко решить методом Гаусса или прогонкой (время линейно от числа узлов)

Схема имеет порядок сходимости и аппроксимации $O(h^2)$ (II порядок)

Условия:

1) $q(x), r(x), f(x) \in C_2[a; b]$ (дважды непр.-дифф. на $(a; b)$).
2) $r(x) \ge m > 0$.
3) $h \le \dfrac{2}{\max|q(x)|}$

Условия теоремы достаточные.

Из симметрии схемы следует, что при сгущении сетки порядок точности метода растёт на 2, а не на 1, как в расчётах по РК.

Это работает и при равномерном сгущении.

Бикомпактные схемы

Задачи слоистых сред, где свойства от слоя к слою меняются скачком.

Рассмотрим след. задачу

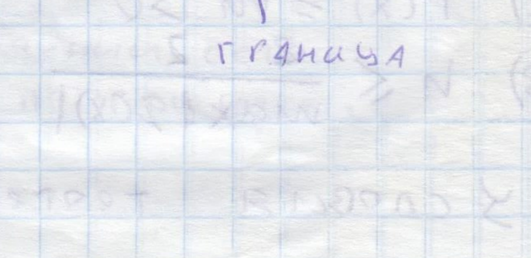
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(q(x)\dfrac{du}{dx}\right) - r(x)u = f(x) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Пример: уравнение теплопроводности.
$(r(x) \equiv 0)$

$f(x)$ - внешние источники тепла

$q(x)$ - коэффициент теплопроводности.

Внутри слоев коэф. непрерывны, а на границе терпят разрыв



Если не ставить условий в граничной точке, то решений может быть бесконечно много.

<u>Как выбрать физически правильное?</u>

1) Непрерывность температуры

$u(x_* - 0) = u(x_* + 0)$

Этого мало...

2) Непрерывность теплового потока

$\underbrace{(q u_x)}_{\text{тепловой поток}}{}_{x_* - 0} = (q u_x)_{x_* + 0}$

15.03.19

Тогда решение задачи ∃! и имеет на 2 непрерывных производных больше, чем коэффициенты.

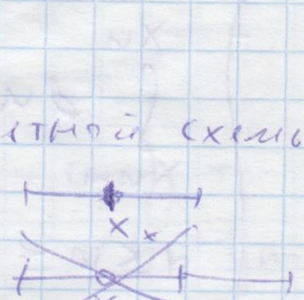
Смотрим: $q(x)$ имеет разрыв в т. x_* => для непрерыв. произведения u_x тоже должна терпеть разрыв => u_{xx} в т. x_* не ∃ => схему через этот узел писать нельзя... (не должна точка x_* попасть внутрь шаблона)

КАК тогда писать

схему???

Дадим определение симплектной схемы:

1) В x_* надо ставить узел



2) переходим к системе уравнений I порядка

3) $u(x)$ берём только в целых точках ($\cancel{u(x_{n+1/2})}$)! и только по двухточ. принципу, т.е. только двухточечн. схемы.

4) Сначала интегрируем, а потом аппрокс. квадратуры.

$\forall$ сетки $\forall$ гладкость коэффиц.!!!

Решим нашу задачу...

Перейдем к системе уравн. I порядка

$$\begin{cases} w = -q(x)\dfrac{du}{dx} \\[2ex] \dfrac{dw}{dx} = -r(x)u - f(x) \end{cases}$$

Зачем "–" будет ясно потом...

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{w(x)}{q(x)}\,dx = -\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{du}{dx}\,dx \\[2ex] \displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_n} dw = -\int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(r(x)\,u(x) + f(x)\right) dx \\[2ex] 1 \le n \le N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{h_n}{2q_{n-1/2}}(w_{n-1}+w_n) = u_{n-1}-u_n \\ w_n - w_{n-1} = -\dfrac{h_n}{2} r_{n-1/2}(u_{n-1}+u_n) - h_n f_{n-1/2} \\ \qquad\qquad 1 \le n \le N \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

На лекции переставить w_n и w_{n-1}

<u>Погрешность аппроксимации $O(h^2)$</u>

Доп. граничные условия в т. x_* автоматич. удовлетворяются.

Решаем методом Гаусса „перемешивая" неизвестные

$u_0, w_0, u_1, w_1, u_2, w_2 \dots u_N, w_N$

Лучше исключить w_n...

$\cancel{w_n + w_{n-1} = \frac{h_n}{2q_{n-\frac{1}{2}}}}$

$$w_{n-1} + w_n = \frac{2q_{n-1/2}}{h_n}(u_{n-1} - u_n)$$

$\cancel{w_n + w_{n-1}}$

$$w_{n-1} - w_n = \frac{h_n}{2} r_{n-1/2}(u_{n-1} + u_n) + h_n f_{n-1/2}$$

Складываем и делим на 2 ...

$$(1)\quad w_{n-1} = \frac{q_{n-1/2}}{h_n}(u_{n-1} - u_n) + \frac{h_n}{4} r_{n-1/2}(u_{n-1} + u_n) + \frac{h_n}{2} f_{n-1/2}$$

Вычитаем и делим на 2 ...

$$(2)\quad w_n = \frac{q_{n-1/2}}{h_n}(u_{n-1} - u_n) - \frac{h_n}{4} r_{n-1/2} \times (u_{n-1} + u_n) - \frac{h_n}{2} f_{n-1/2}$$

Увеличим в 1 уравнении индекс на 1.

$$(1^*)\quad w_n = \frac{q_{n+1/2}}{h_{n+1}}(u_n - u_{n+1}) + \frac{h_{n+1}}{4} r_{n+1/2} \cdot (u_n + u_{n+1}) + \frac{h_{n+1}}{2} f_{n+1/2}$$

Из 2 уравн. вычитаем 1^*:

$$\boxed{-\frac{q_{n-1/2}}{h_n}(u_n - u_{n-1}) + \frac{q_{n+1/2}}{h_{n+1}}(u_{n+1} - u_n) - \frac{1}{4}\left(h_n r_{n-1/2}(u_n + u_{n-1}) + h_{n+1} r_{n+1/2} \cdot (u_n + u_{n+1})\right) = \frac{1}{2}\left(h_n f_{n-1/2} + h_{n+1} f_{n+1/2}\right)}$$

$$\boxed{1 \le n \le N-1}$$

$*$

Схема трёхточечная, но следствие исходной => все свойства те же.

При $q(x) > 0$ и $r(x) > 0$ есть преобладание главного эл-та => разностное решение ∃ и легко находится (нет проблем с обусловл.)

НЕОГРАНИЧЕННАЯ ОБЛАСТЬ

Строим квазиравномерную сетку

$$x(\xi) = \frac{c\xi}{(1-\xi^2)^s}, \quad \xi \in [0;1]$$
$$c > 0, \ s > 0.$$

$$\xi_n = \frac{n}{N}, \quad 0 \le n \le N \text{ – равном. сетка}$$

$x_0 = 0$
$x_N = +\infty$

Что такое $x_{n+\frac{1}{2}}$?

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x(\xi_{n+\frac{1}{2}}) \neq (x_n + x_{n+1})/2$$

$$h_n = \frac{1}{N}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{n-\frac{1}{2}}$$

Подставляя это в схему (*) получим ~~ответ~~ нужную схему для неограниченной области.

Обычно $s = \frac{1}{2}$, c берём так, чтобы в интерес. области, где решение существ. меняется было 75% узлов

Нелинейный случай

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x, u, u_x) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = h^2 f\left(x_n, u_n, \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}\right) \\ 1 \le n \le N-1 \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

А решение-то есть? Чем решать?

Запишем в виде $F(\vec{u}) = 0$

$$\begin{cases} F_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - h^2 f\left(x_n, u_n, \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}\right) \\ 1 \le n \le N-1 \\ F_0 = u_0 - \alpha \\ F_N = u_N - \beta \end{cases}$$

Метод Ньютона:

$$\vec{u}^{(s+1)} = \vec{u}^{(s)} + \vec{y}^{(s)}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{F}(\vec{u}^{(s)})}{\partial \vec{u}}}_{\text{матрица Якоби}} \vec{y}^{(s)} = -\vec{F}(u^{(s)}) \qquad (**)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial u_{n-1}} = \left(1 + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)_n \leftarrow \text{в т. } x_n\text{!!!}$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial u_n} = -\left(2 + h^2\frac{\partial f}{\partial u}\right)_n$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial u_{n+1}} = \left(1 - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)_n$$

При $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} > 0 \\ h\left|\frac{\partial f}{\partial u_x}\right| \le 2 \end{cases}$ решение $\exists!$ $(**)$,

т.к. есть диагональное преобладание

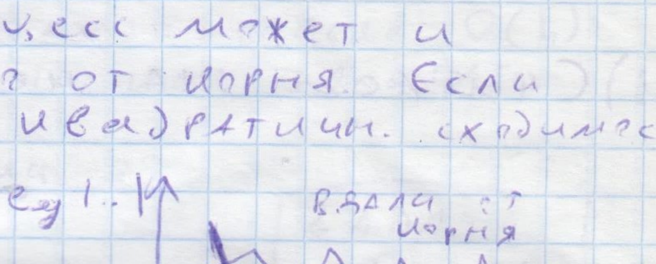
Условие $\underline{\text{достаточное}}$ для $\exists$!

решения системы $(**)$

Итерационный процесс может и не сходится далеко от корня. Если близко к корню - квадратичн. сходимость

Невязка системы

$$\left|\vec{F}(\vec{u}^{(s)})\right|$$



Можно так модиф. метод

$$\vec{u}^{(s+1)} = \vec{u}^{(s)} + \tau_s \vec{y}^{(s)}, \quad 0 < \tau_s \le 1$$

Сначала берем $\tau_s = 1$. Если $\left|\vec{F}(\vec{u}^{(s+1)})\right| < \left|\vec{F}(\vec{u}^{(s)})\right|$

тогда хорошо. Если нет

$$\tau_s^* = \gamma\tau_s, \ 0 < \gamma < 1, \text{ напр } \gamma = \frac{1}{2}$$

Если $|\vec{F}(\vec{u}^{(s+1)})| < |\vec{F}(\vec{u}^{(s)})|$ при новом τ_s – хорошо, иначе продолжаем в том же духе...

Теорема

1) Если $f(x, u, u_x) \in C_2$ по всем перем. x, u, u_x

(~~два~~ есть вторые непр. производные)

2) $f_u \geq m > 0$

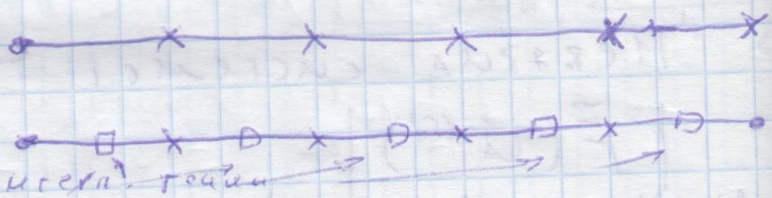
3) $h|f_{u_x}| \leq 2$

Тогда

Если разностное решение $\exists$, то оно сходится к точному в норме C с погр. $O(h^2)$

Многосеточный метод

1) Считаем на нейтор сетке 1



2) Сгущаем сетку вдвое и переносим значения с предыд. сетки.

3) В пром. узлах исп. линейную интерп.

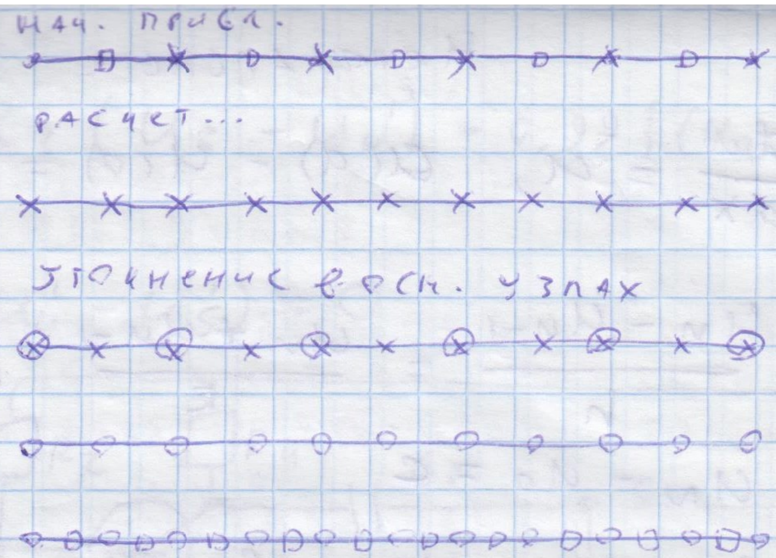
4) Проводим новый расчёт с таким нач. приближением.

5) Делаем уточнение по Ричардсону на новой сетке в основн. узлах

6) Уточнение в промеж. узлах интерп. ошибки по Ричардсону

7) Сгущение с интерп. ...

и т. д.



Процесс хорошо сходится. Проблемы только на 1 итерации. (всего 2-4 итерации)

Невязка должна быть $\sim 10^{-10} - 10^{-12}$.

Граничные условия
II рода
(аппрокс. произв.)

1) По одностор. разностям – только $O(h)$
2) По центр. – $O(h^2)$, но как записать её на краю?

Ответ: фиктивные точки

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_N &= 0 \end{aligned}\right\} \text{условия I рода}$$

$\boxed{\text{Задача Брусса}}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1 - x_{-1}}{2h} &= 0 \\ \frac{x_{N+1} - x_{N-1}}{2h} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{условия II рода}$$

x_{N+1} и x_{-1} – фикт. точки.

Чем ↑ порядок, тем ↓ обусловл. и больше потеря точности.

Нелокальные условия

$$\frac{du}{dx} = u, \quad u(a) - u(0) = c$$

$$\begin{cases} \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} & 1 \le n \le N \\ u_N - u_0 = c \end{cases} \quad \boxed{\text{схема}}$$

Проблем нет. Решаем Гауссом.

У нас аналог схемы с полусуммой $\Rightarrow$ II порядка и немонотонность.

Для монотонности $\underline{\underline{h < 2}}$

Семинар №5

Дифференциально-алгебраические системы

Задача об усилителе (Хайрер/Ваннер, т.2, стр. 419)

$$\frac{U_e(t)}{R_0} - \frac{U_1}{R_0} + C_1 (U_2' - U_1') = 0$$

$$\frac{U_b}{R_2} - U_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + C_1 (U_1' - U_2') - 0{,}01 f(U_2 - U_3) = 0$$

$$f(U_2 - U_3) - \frac{U_3}{R_3} - C_2 U_3' = 0$$