Лекция №4

Комплексная схема Розенброка и дифф.-алгебраич. системы

Возьмём коэффициенты $\alpha = \frac{1+i}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$ и немного изменим схему

$$\left(E - \frac{1+i}{2}\tau f_u\right) w = f\left(u, t + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\hat{u} = u + \tau \underline{\underline{\mathrm{Re}}}(w)$$

новое качество

1) Аппроксимация

$$w = \left(E - \frac{1+i}{2}\tau f_u\right)^{-1} f\left(u, t + \frac{\tau}{2}\right) \approx$$

$$= \left(E + \frac{1+i}{2}\tau f_u + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 \tau^2 f_u^2\right) \cdot f(u, \ldots)$$

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{1+2i-1}{4} = \frac{i}{2}$$

все мнимое)

$$w = \left(E + \frac{1}{2}\tau f_u + i \cdot A\right) f\left(u, t + \frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= \left(E + \frac{1}{2}\tau f_u + iA\right)\left(f + f_t \frac{\tau}{2}\right) =$$

$$f + \frac{1}{2}\tau f f_u + \frac{1}{2}\tau f_t + iB + O(\tau)$$

$$\hat{u} = u + \tau \cdot f + \frac{\tau^2}{2}(f f_u + f_t) + o(\tau^2)$$

$\Rightarrow$ 2 порядок аппроксимации

2) Устойчивость

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \Rightarrow f_u = \lambda \; ; \; z = \tau\lambda$$

$$\left(1 - \frac{1+i}{2} z\right) \tau w = u z$$

$$\hat{u} = u + \mathrm{Re}(\tau w)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z \text{ - вещественное !!!} \\ \text{Для комплексного } z \text{ схема} \\ \text{пишется иначе.} \end{array}}$$

$$\left(1 - \frac{1+i}{2} z\right)\left(1 - \frac{1-i}{2} z\right) \tau w = u\left(z - \frac{1-i}{2} z^2\right)$$

$$\left(\left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{z^2}{4}\right) \tau w = u\left(z - \frac{1-i}{2} z^2\right)$$

$$\left(1 - z + \frac{z^2}{2}\right) \tau w = u\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{i}{2} z^2\right)$$

$$\tau w = \frac{z - z^2/2}{1 - z + \frac{z^2}{2}} u + i A$$

$$\hat{u} = u + \frac{z - z^2/2}{1 - z + \frac{z^2}{2}} u = \frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}} u$$

$$\boxed{R(z) = \frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}}}$$

А что делать для комплексного f?

$$\begin{cases} \left(E - \frac{1+i}{2}\tau f_u\right) w_1 = f\left(u, t + \frac{\tau}{2}\right) \\ \left(E - \frac{1-i}{2}\tau f_u\right) w_2 = f\left(u, t + \frac{\tau}{2}\right) \\ \hat{u} = u + \tau \frac{w_1 + w_2}{2} \end{cases}$$

Функция устойчивости всё равно

$$R(z) = \frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}}$$

Докажем A-устойчивость

$$|R(z)| \le 1, \quad \mathrm{Re}(z) < 0$$

На после семинар

$$R(z)\, R^*(z) \le 1$$

$$\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{1 - z^* + \frac{(z^*)^2}{2}} \le 1$$

$$\left(1 - z + \frac{z^2}{2}\right)\left(1 - z^* + \frac{(z^*)^2}{2}\right) \ge 1$$

$$\cancel{1} - z + \frac{z^2}{2} - z^* + zz^* - \frac{z^2 z^*}{2} +$$

$$+ \frac{(z^*)^2}{2} - z\frac{(z^*)^2}{2} + \frac{(zz^*)^2}{4} \geq \cancel{1}$$

$$-(z+z^*) + \frac{(z+z^*)^2}{2} - \frac{zz^*(z+z^*)}{2} + \frac{(zz^*)^2}{4} \geq 0$$

$$-\frac{z+z^*}{2}\left(2+|z|^2\right) + \frac{(z+z^*)^2}{2} + \frac{(zz^*)^2}{4} \geq 0$$

$$-\operatorname{Re} z\left(2+|z|^2\right) + 2(\operatorname{Re} z)^2 + \frac{|z|^4}{4} \geq 0$$

Неравенство выполняется при $\operatorname{Re} z < 0 \Rightarrow$ есть A-устойчивость

LZ-устойчивость

$R(z) \sim \frac{1}{z^2}$ при $z \to \infty$

t-монотонность

при $z<0$ $\quad 1 - z + \frac{z^2}{2} > 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}} > 0 \Rightarrow$ есть t-монотонность

$$\boxed{\begin{cases} b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1+i}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} A\text{-уст.} \\ LZ\text{-уст.} \\ t\text{-монотон.} \\ \underline{II} \text{ порядок} \end{array}}$$

Как считать f_u?

точно

приближенно

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2 \dots u_m) \\ f_2(u_1, u_2 \dots u_m) \\ \vdots \\ f_m(u_1, u_2 \dots u_m) \end{pmatrix}$$

$$f_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & & \vdots \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial u_k} = \frac{f_m(u_1, u_2, \dots u_k + h, \dots u_m) - f_m(u_1, u_2 \dots u_k - h, u_m)}{2h}$$

Центральная разность

$$\boxed{h \simeq 10^{-5}}$$

Дифф. - алгебраические системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}, \vec{v}, t) & \text{- диф. компонента} \\ \cancel{\vec{g}(\vec{u}, \vec{v}, t)} \quad \vec{g}(\vec{u}, \vec{v}, t) = 0 & \text{- алгебр. компонента} \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

$\vec{v}_0$ и $\vec{u}_0$, t_0, удовлетвор. $\vec{g} = 0$

Считаем, что $\left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{v}} \right\| \neq 0$

Это системы индекса 1

Уравнений алгебр. столько же, сколько переменных v, иначе не получится $\| \ldots \|$. Просто определителя не будет.

Сделаем замену...

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}, \vec{v}, t) \\ \varepsilon \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}(\vec{u}, \vec{v}, t) \end{cases}$$

ε - мало!

нач. условия.

Получим жёстную/плохоусл. систему.

В пределе - бесконечн. жёсткости.

Можно это
записать так:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} & \emptyset \\ \emptyset & \begin{bmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{bmatrix} \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} \frac{d\vec{u}}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{pmatrix}$$

можно и „0" поставить

$$G \begin{pmatrix} \frac{d\vec{u}}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{pmatrix}$$

общий вид диф./алг. систем

Не будем делать различий между u и v

$$G \frac{d\vec{u}}{dt} = F(\vec{u}, t)$$

Если G невырождена...
и от $\vec{u}$ не зависит...

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = G^{-1} F(\vec{u}, t)$$

Применим схему Розенброка
(лучше с α, а не $\frac{1+i}{2}$) ?!!

$$\hat{u} = u + \tau \operatorname{Re} w$$

$$\left(E - \frac{1+i}{2}\tau (G^{-1}F)'_{\hat{u}}\right) w = G^{-1} F(\vec{u}, t + \tau)$$

α

G^{-1} от u не зависит...

$$\left(E - \frac{1+1}{\tau}\tau G^{-1} F_u\right) w = G^{-1} F\left(\vec{u}, t + \frac{\tau}{2}\right)$$

α

умножаем на G...

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(G - \frac{1+1}{\tau}\tau F_u\right) w = F\left(\vec{u}, t + \frac{\tau}{2}\right) \\ &\hat{u} = u + \tau \operatorname{Re} w \end{aligned}}$$

α

Обобщенная схема на случай Б/А систем

$$\boxed{\begin{aligned} &(G - \alpha\tau F_u) w = F \\ &\hat{u} = u + \tau \operatorname{Re} w \end{aligned}}$$

Рассмотрим случай $\alpha = 1$ и простейшую задачу

$$(G - \tau F_u)\frac{\hat{u} - u}{\tau} = F$$

Вместо $\vec{u}$ возьмём $\begin{pmatrix}\vec{u} \\ \vec{v}\end{pmatrix}$ — n штук, — m штук

$$G = \begin{pmatrix} E_{n\times n} & \emptyset \\ \emptyset & O_{m\times n} \end{pmatrix}$$

~~F_u = ...~~

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{f}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} \\ \vec{g}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

матрицы

$$F_u = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

$$G - \tau F_u = \begin{pmatrix} E - \tau f_u & -\tau f_v \\ -\tau g_u & -\tau g_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E - \tau f_u & -\tau f_v \\ -\tau g_u & -\tau g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} - u \\ \hat{v} - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau f \\ \tau g \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (E - \tau f_u)(\hat{u} - u) - \tau f_v (\hat{v} - v) = \tau f \text{ — РОДС} \\ g_u(\hat{u} - u) + g_v(\hat{v} - v) = -g \end{cases}$$

1 итерация Ньютона

Где брать F?

$F(\vec{u}, \hat{t})$ — алгебр. поле

$F(\vec{u}, t + \frac{\tau}{2})$ — для полнст.

Для РОДС — нет разницы, т.к. I порядок

Для CROS - проблема - не получается II порядок => надо делать автономизацию.

Лучше по этим дням.

С автоном. CROS имеет II порядок и на Д/А системах.

Многостадийный розенброк

$$\hat{u} = u + \tau \operatorname{Re}(b_1 w_1 + b_2 w_2)$$

$$(E - a_{11}\tau F_u) w_1 = F$$

$$(E - a_{22}\tau F_u(u + \tau \operatorname{Re}(a_{21} w_1))) w_2 = F(u + \tau \operatorname{Re}(c_2 w_1))$$

Просматривается аналогия со схемами Р/К.

$\exists$ схема с комплексн. коэфф. точности $O(\tau^4)$, L2-уст.

На Д/А системах только $O(\tau^3)$