Лекция №9

Параболические уравнения

Параболические уравнения

теплопроводность   диффузия

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$k = const > 0$
$x \in [0; a]$
$t \in [0; T]$

Нужно 1 начальное (I произв. по t) и 2 граничных (II произв. по x)

$u(x,0) = \mu(x)$, $x \in [0; a)$ – нач. условие

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(a,t) = \mu_2(t) \\ t \in [0; T] \end{cases}$$
Граничные условия I рода

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(a,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$
Граничные условия II рода (тепловые потоки)

$$\begin{cases} u(0,t) + \alpha_1 u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u(a,t) + \alpha_2 u_x(a,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Граничные условия III рода

(линейный (ньютоновск.) обмен с окружающей средой)

Для указанных выше краевых условий корректность доказана.

Бывают и более сложные формы уравнения и более экзотические граничные условия.

Например при остывании абсол. чёрного тела появляется лучистый теплообмен $u^4(0,t)$. Для высокотемпературной плазмы $k(u) \sim u^{5/2}$

Уравнение теплопроводности диссипативно и сглаживает разрывы начальных данных и граничных условий.

При $f(x,t)$ неограничен. дифф. $u(x,t)$ тоже неограничен. дифференц.

Если $x \in (-\infty; +\infty)$, $f(x,t) = 0$, $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$, то

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{\lambda_m t} \sin \frac{\pi m x}{a}$$

$$\lambda_m = -k \frac{\pi^2 m^2}{a^2}$$

c_m - коэффициенты разложения начальных данных $\mu(x)$

при $m \to \infty$ $\lambda_m \to -\infty$, т.е. более высокие гармоники сильнее затухают $\Rightarrow$ жёсткость задачи.

Построение схем методом прямых.

$$\left\{ x_n = nh,\ 0 \le n \le N,\ h = \frac{a}{N};\quad t_k = k\tau,\ k = 0, 1, \ldots \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$$u_n(t) = u(x_n, t),\quad f_n(t) = f(x_n, t)$$

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{k}{h^2}\left(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}\right) + f_n(t)$$

$1 \le n \le N-1$

Граничные условия: $u_0(t) = \mu_1(t)$, $u_N(t) = \mu_2(t)$

Начальные условия: $u_n(0) = \mu(x_n)$, $1 \le n \le N-1$

Невязка по пространству $O(h^2)$

Если $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$, $f(x,t) = 0$, то

можно написать точное решение

$$u_n(t) = \sum_{m=1}^{N-1} \gamma_m e^{\nu_m t} \sin\frac{\pi m x_n}{a}$$

$$\nu_m = -\frac{4k}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi m}{2N}\right),\quad 1 \le n \le N-1$$

При $m \ll N$

численные $\nu_m \sim$ точных λ_m

При $m \sim N$

ν_m отличается от λ_m в 1,6 раза

$$\frac{\nu_{N-1}}{\nu_1} = ctg^2 \frac{\pi}{2N} \approx \left(\frac{2N}{\pi}\right)^2$$

Всё ν_m отрицательны, могут быть большими отриц. и сильно отличаются друг от друга $\Rightarrow$ жёсткая задача.

Жёсткость $\Rightarrow$ схемы для ж. задач $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ схемы Розенброка
(нужна хотя бы
A-устойчивость)

Запишем в векторной форме:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \Lambda \vec{u} + \vec{f}$$

$$\Lambda = \frac{k}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \emptyset \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ \emptyset & & & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}(\vec{u}, t)$$

$$\vec{F} = \Lambda \vec{u} + \vec{f}$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{u}} = \Lambda$$

Схема Розенброка:

$$\hat{u} = \vec{u} + \tau \,\mathrm{Re}\, \vec{w}$$

$$(E - \gamma \tau \Lambda)\vec{w} = \Lambda \vec{u} + \vec{f}$$

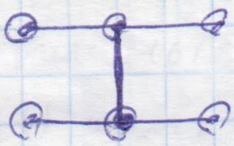
Варианты, обеспеч. A-уст.:

$$\gamma = \frac{1+i}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}$$

Матрица в левой части — трёхдиаг., пятиточечная.

$\gamma = 0$ — плохо, т.к. нет A-уст.

Из трёхдиаг. $\Rightarrow$ исп. по 3 точки с каждого временного слоя $\Rightarrow$ шаблон такой:



При вещественном γ получаются классические схемы.

Использование CROS

$$\gamma = \frac{1+i}{2}$$

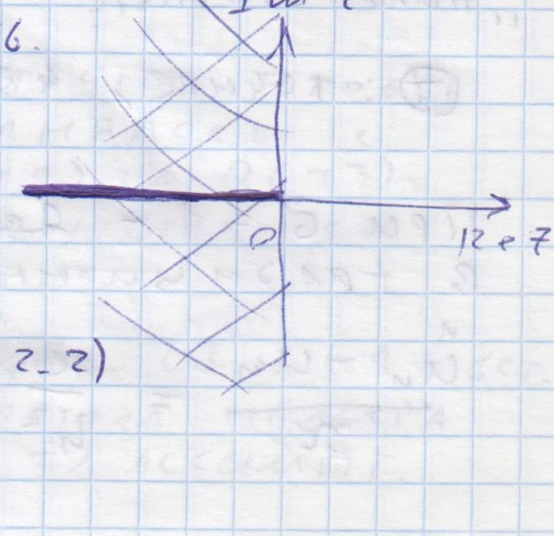
Функция устойчивости

$$R(z) = \frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}}, \quad z = \mu\tau$$

μ — спектральные множители, т.е. собственные значения

У оператора Λ они все веществ. и отрицательные.

Из A-уст. $\Rightarrow |R(z)| < 1$ при $\operatorname{Re} z < 0$
$\Rightarrow$ безусл. устойчивость.



Вообще: все A-уст. схемы будут безусл. устойчивы.

Есть также уст. по правой части (теорема 2.2)
(надо посмотреть!)

. По пространству $O(h^2)$, по времени $O(\tau^2) \Rightarrow$ все $O(\tau^2 + h^2)$.

CROS t-монотонна $\Rightarrow$ по времени монотонность есть, но есть незначит. немонотонность по пространству (для разрывных решений)

При $\sigma = \frac{1}{2}$ - „схема с полусуммой"
(схема Кранка-Николсон)

В традиционной форме

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{K}{2h^2}\left((\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}) + (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \right) + f\left(x_n, t + \frac{\tau}{2}\right)$$

$\boxed{O(\tau^2 + h^2)}$

А-уст. => безусл. устойчива
(нужна ещё уст. по нач. данным...)

Но она не τ-монотонна => возможны „пилообразные" решения - проблема.

(+): точнее, чем CROS

При $\sigma = 1$ - ~~явна~~ чисто неявная схема в традиционной форме

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2}\left(\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}\right) + f\left(x_n, t + \frac{\tau}{2}\right)$$

Эта схема $O(\tau + h^2)$, безусл. устойчива.

Явная схема ($\sigma = 0$) не А-уст. => непригодна.

На самом деле есть устойчивость при $\frac{k\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, но это значит, что $\tau \sim h^2$, что неприемлимо для практики (слишком трудоёмко).

$\boxed{\text{Асимптотическая устойчивость}}$

В точном решении чем ↑ номер гармоники, тем ↑ затухание (меньше множитель роста).

В частности все гармоники ~~кроме~~ должны затухать не медленнее, чем первая

$|\rho| \le \rho_1$

На самом деле достаточно, чтобы это неравенство выполнялось с точностью до членов порядка $O(\tau^2)$. Тогда при $\tau \to 0$ такая неточность несущественна.

Схемы CROS и ROS1 L2 и L1 - уст. соответственно $\Rightarrow$ с ростом номера гармоники ρ убывает $\Rightarrow$ асимпт. устойчивость

Схема $ROS\frac{1}{2}$ не L - уст.

$$R(z) = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} \Rightarrow \text{при } z \to -\infty \quad R(z) \to -1$$

$\Rightarrow$ с определенного момента множители роста растут по модулю $\Rightarrow$ нет асимптотич. устойчивости.

Такая устойчивость особенно важна при расчетах на большие времена.

Также схемы CROS и ROS1 имеют качественно правильное поведения затухания гармоника а $ROS\frac{1}{2}$ - нет.

$\boxed{\text{Монотонность}}$

Было показано, что

монотонность $\Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{u}_n = \sum_m \beta_m u_{n+m} \\ \beta_m \ge 0 \end{cases}$

Явная схема

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2}\left(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}\right)$$

$$\hat{u}_n = \frac{k\tau}{h^2} u_{n-1} + \left(1 - 2\frac{k\tau}{h^2}\right) u_n + u_{n+1} \frac{k\tau}{h^2}$$

Для монотонности все коэф. ≥ 0

$\Rightarrow 1 - \frac{2k\tau}{h^2} \geq 0$ условие монотонности

совп. с условием устойчивости.

$\Rightarrow$ монотонная

Неявная схема (чисто неявная)

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2}\left(\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}\right)$$

$$\hat{u}_n - u_n = \frac{k\tau}{h^2}\left(\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}\right)$$

$$\hat{u}_n\left(1 + \frac{2k\tau}{h^2}\right) = u_n + \frac{k\tau}{h^2}\left(\hat{u}_{n-1} + \hat{u}_{n+1}\right)$$

$$\hat{u}_n = \frac{u_n + \frac{k\tau}{h^2}\left(\hat{u}_{n-1} + \hat{u}_{n+1}\right)}{1 + \frac{2k\tau}{h^2}}$$

Здесь все коэффициенты всегда положительны. Дальше выразим $\hat{u}_{n-1}$ и $\hat{u}_{n+1}$ через соседей.

При рекуррентной подстановке эта положительность будет сохраняться.
=> монотонность.

Схема с полусуммой.

ROSOS не t-монотонна — сигнал!

Связи типа
t-монот. $\not\Leftrightarrow$ мон. схемы нет,
но это о многом говорит.

Условие мон.
$2\varkappa\tau \le 3h^2$ => нет безусл. монот.
и на разрывах и даже на резких фронтах => плохо

Схема CROS

t-монотонность есть, но монотонности строго говоря нет, хотя немонотонность крайне незначительна.

Отступление.

Для уравнения переноса доказано, что II порядок и строгая мон. не совместимы.

Для уравнения теплопроводности такой теоремы нет, но такой схемы пока никто не построил.

Вообще ни для какого типа эволюц. уравнений не построены схемы совмещающие II порядок и строгую монотонность.

Бикомпактные схемы

Более общий вид:

$$c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t)$$

$c(x,t)$ – теплоёмкость среды.

В т. разрыва $k(x,t)$ дифф. делать нельзя ⇒ по сути ищется обобщенное решение.

Нужны внутр. граничные условия. Их берём из физич. соображений.

Вспомним правила:

1. Узел в разрыв
2. Система уравн. I порядка

$$\begin{cases} c(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + f(x,t) \\ w = k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

Обосн. внутр. гран. условия – непр. решения u (температура!) и теплового потока w (энергия через границу!)

3. Интегро-интерп. метод (инт. точно по пространству!)

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = w_n - w_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,t)\,dx$$

$$\cancel{\frac{w_n + w_{n-1}}{2}} \qquad \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{w}{\varkappa(x,t)}\,dx = u_n - u_{n-1}$$

$$\cancel{\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{w}{\varkappa(x,t)}\,dx = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \varkappa(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\,dx}$$

4. Аппроксимируем

$$c_{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{du_{n-1}}{dt} + \frac{du_n}{dt}\right) h_n =$$

$$= w_n - w_{n-1} + h_n f_{n-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{w_{n-1} + w_n}{2\varkappa_{n-\frac{1}{2}}}\, h_n = u_n - u_{n-1}$$

Далее исключаем w_n. и получаем систему ОДУ.
Потом решаем его с помощью того же CROS.

При расчетах в неограниченной области нужна квазиравном. сетка + изменение определения шага

$$x = x(\xi), \quad \xi_n = \frac{n}{N}$$

$$\boxed{h_n = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{N}}$$

Семинар №9

Квазилинейное уравнение переноса

1. Реализовать консервативную схему для уравнения переноса. (квазилин.)
   После каждого слоя сделать отрисовку решения.
   Добавить оператор pause(1e-6)
   (после plot)

   Указания: убрать ($c \equiv 1$)
   или взять $c = 1$.

2. Исследовать схему II порядка
   (проверить на сходимость)

3. У доски: делаем вывод аналога схемы с полусуммой.

Схема II-го порядка оказалась неустойчива.

Вывод схем для У.Т. в традиционной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k u_{xx} + f$$

$$\frac{du_n}{dt} = \underbrace{k\,\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2}}_{\Lambda u} + f_n$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \underbrace{\Lambda\vec{u} + \vec{f}}_{\vec{F}}$$

$$\hat{u} = u + \tau w$$

$$(E - \sigma\tau F_u)\, w = \bar{\bar{F}}$$

|| Действительный ROS

В данном случае:

$$(E - \sigma\tau\Lambda)\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda\bar{\bar{u}} + \bar{\bar{f}}$$

$$(E - \sigma\tau\Lambda)(\hat{u} - u) = \tau\Lambda\bar{\bar{u}} + \bar{\bar{f}}$$

$$\hat{u} - u = \sigma\tau\Lambda(\hat{u} - u) + \tau\Lambda u + \bar{f}$$

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \sigma\Lambda\hat{u} + (1-\sigma)\Lambda u + \bar{f}$$

f на $\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$!

$\sigma = 0$

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda u + \bar{f} \quad \text{Явная схема}$$

$\sigma = 1$

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda\hat{u} + \bar{f} \quad \text{Неявная схема}$$

$\sigma = \frac{1}{2}$

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda\frac{u + \hat{u}}{2} + \bar{f} \quad \text{схема с полусуммой}$$

|| Разобраться, как спектр. влияет на устойчивость. || !!!