Лекция №8

Квазилинейное уравнение переноса

В линейном переносе разрывы решения берутся только из разрывов нач. и гран. данных. В квазилинейном уравнении они могут возникать и для многократно дифф. начальных и граничных данных.

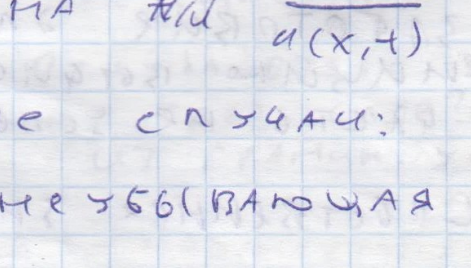
Применение: ударные волны

Простейший случай:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x, t, u > 0 \Longleftarrow \boxed{\text{Уравнение Хопфа}}$$

(u перед $\frac{\partial u}{\partial x}$) выполняет роль c

Задачу решаем в области $t \in [0; +\infty)$ $x(-\infty, +\infty)$, т.е. у нас будут только начальные условия



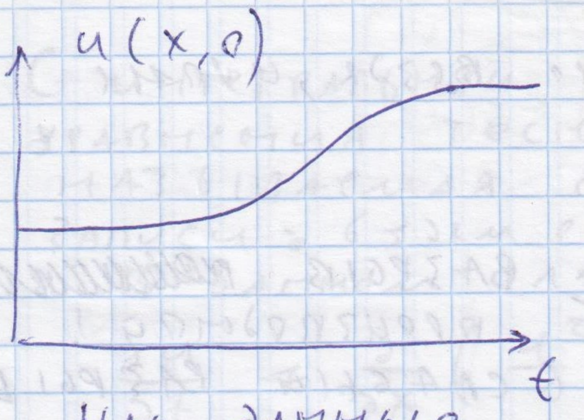
Характеристики имеют вид:

$$x - ut = const$$

$$t = \frac{const}{u} \Rightarrow \text{крутизна} \sim \frac{1}{u(x,t)}$$

Рассмотрим разные случаи:

1. $u(x,0)$ − монотонно неубывающая функция



Нач. данные

Характеристики через каждую точку проходят только одна.

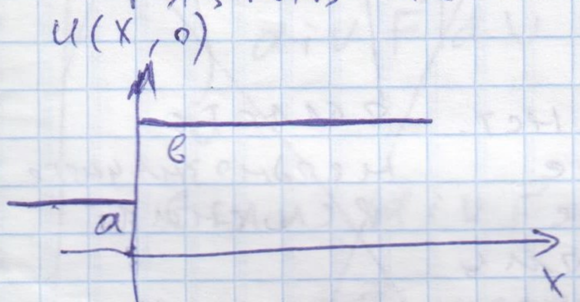
$\boxed{\text{Решение однозначно и гладко}}$

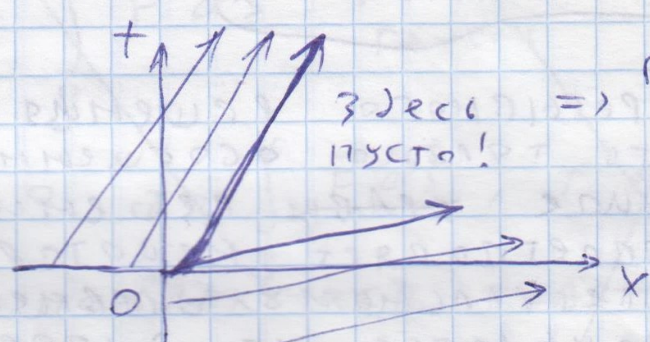
2. Слабый разрыв решения

Нач. данные:

$$u(x,0) = \begin{cases} a, & x < 0 \\ b, & x > 0 \end{cases} \qquad \underline{a < b}$$

Разрыв не нарушает неубывания.





=> решения здесь нет

Для корректности решение надо доопределить

$$\begin{cases} u(x,t) = a, & x \le at, \\ u(x,t) = x/t, & at \le x \le bt, \\ u(x,t) = b, & x \ge bt \end{cases}$$

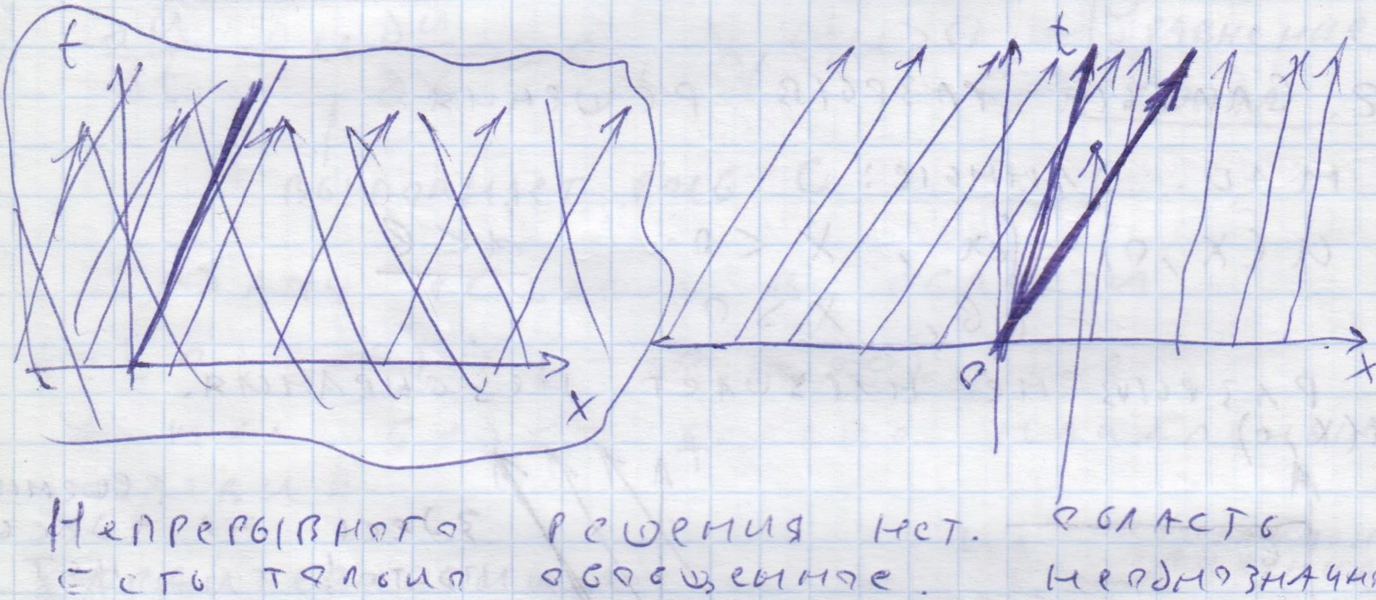
$u_x = a, \quad x \le at$

$u_x = \frac{1}{t}, \quad x \ge at$

разрыв [illegible] производной! (слабый разрыв)

3. Сильный разрыв решения

$$u(x,0) = \begin{cases} a, & x < 0 \\ b, & x > 0 \end{cases} \qquad \underline{a > b}$$



Непрерывного решения нет. Есть только обобщенное. Такое ~~[illegible]~~ решение удовлетворяет некоторому интегральному уравнению, которое получается из дифференциального.

область неоднозначного решения

При разных обобщениях будут получатося разные решения.

Лучше брать обобщение, соответствующ. физической сути задачи (законы сохранения, например)

С интегральной формой записи уравнения тесно связана так называемая дивергентная форма записи, будем работать именно с ней.

В данном случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

Пусть есть F:

$$\begin{cases} F_t = u \\ F_x = \frac{u^2}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$\operatorname{div} \vec{F} = 0$ – вот почему форма дивергентная.

Аналогия:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \int_S \vec{F}\, d\vec{S}$$ формула Остроградского-Гаусса

Если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то $\int_S \vec{F}\, d\vec{S}$, т.е.

поток $\vec{F}$ через поверхность равен 0
=>

Возьмем $\vec{F} = \begin{pmatrix} f_x(x,t) \\ f_t(x,t) \end{pmatrix}$

Возьмём $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x) \\ F_t(t) \end{pmatrix}$ – векторная функция векторного аргумента.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_t}{\partial t}$$

Пусть $\operatorname{div}\vec{F} = 0$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_t}{\partial t} = 0$$

В нашем случае

$$\begin{cases} F_x = \frac{u^2}{2} \\ F_t = u \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{u^2(x,t)}{2} \\ u(x,t) \end{pmatrix}$$

компоненты!

Далее $\int\limits_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \int\limits_S \vec{F}\,d\vec{s} = 0$,

т.к. $\operatorname{div}\vec{F} = 0$

$\int\limits_S \vec{F}\,d\vec{s} = 0 \Rightarrow$ поток $\vec{F}$ через границу $= 0$

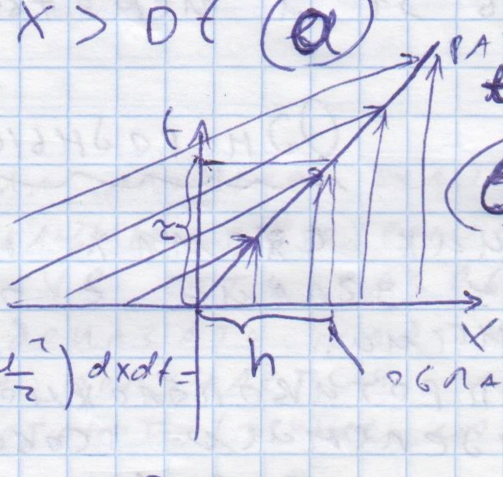
Если $\vec{F}$ есть поток некоторой величины, то отсутствие потока через границу означает её сохранение.

$\operatorname{div}\vec{F} = 0$ выражает некоторый закон сохранения.

Поскольку левую часть удалось записать в виде $\operatorname{div}\vec{F}$, то и сама форма называется дивергентной.

Будем искать разрывное решение, причем пусть разрыв бежит со скоростью D и он один!

$$u(x,t) = \begin{cases} a, & x < Dt \\ b, & x > Dt \end{cases}$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

$$\iint\limits_D \frac{\partial u}{\partial t}\, dt\, dx + \iint\limits_D \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) dx\, dt = 0$$

$$\int_0^h \left(u(x,\tau) - u(x,0)\right) dx + \int_0^\tau \frac{u^2(h,t) - u^2(0,t)}{2}\, dt = 0$$

$$\int_0^h (\underbrace{u(x,\tau)}_{=a} - \underbrace{u(x,0)}_{=b})\, dx + \int_0^\tau \frac{\overbrace{u^2(D+h,t)}^{=b^2} - \overbrace{u^2(D,t)}^{=a^2}}{2}\, dt = 0$$

$$(a-b)h + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\tau = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}(a+b)\frac{\tau}{h} = 0$$

$$\frac{1}{2}(a+b)\frac{1}{D} = 1$$

$$\boxed{D = \frac{a+b}{2}}$$ — скорость движения разрыва

Решение имеет <u>сильный разрыв</u>.

Он распространяется не по характеристике.

Это ударная волна.

Если $u(x,0)$ сколь угодно гладкая, но убывающая, то будут возникать сильные разрывы, число которых может быть >1 и меняться со временем.

Однородные схемы

В таких схемах не делают разницы между узлами с особенностями и обычными.

В противоположность им схемы с выделением особенностей используется явная информация о положении и движении особенностей. В промежутках между особенностями используют обычные схемы для гладких задач. Они точнее однородных, но сложны и громоздки, хотя могут быть точнее. Их удаётся построить только в самых простых случаях.

Схемы для решения задач с разрывами

Однородные (единые формулы для обычных и разрывных узлов)
- + простота
- + не нужна априор. инф. о положении и движении разрывов

С явным выделением особенностей
- + точность

Ложная сходимость

теоретически (разл. в ряд Тейлора)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Аппроксимация} \\ \text{Устойчивость}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Сходимость}$$

↑ экспериментально

Это работает, пока можно надежно доказать аппроксимацию разложением в ряд Тейлора. Если же есть разрывы, то в т. разрыва доказать надёжно аппроксимацию не получается и данные соображения не работают. (точнее могут не работать)

Пример ложной сходимости

Берём явную схему для уравнения Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + u_n \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = 0 -$$

– полный аналог явной схемы.

Начальные данные:

$$\begin{cases} u_n(0) = a, & n \le 0 \\ u_n(0) = b, & n \ge 1 \end{cases}$$

Пусть $\frac{h}{\tau} = b$

$$\cancel{\hat{u}_n - u_n = \frac{u_{n-1} - u_n}{h} \frac{\tau}{u_n} = \frac{u_{n-1} - u_n}{u_n} \cdot \frac{1}{b}}$$

0

$$\cancel{\hat{u}_n = u_n + \frac{u_{n-1} - u_n}{u_n} \cdot \frac{1}{b}}$$

$$\cancel{\hat{u}_n = \begin{cases} a, & n \le 0 \\ b + \frac{a-b}{b} \cdot \frac{1}{b} \end{cases}}$$

$$\hat{u}_n = u_n + \frac{\tau}{h} u_n (u_{n-1} - u_n)$$

$$\hat{u}_n = \begin{cases} a, & n \le 0 \\ b + \frac{1}{b} b (a - b) = a, & n = 1 \\ b, & n > 1 \end{cases}$$

$$\hat{u}_n = \begin{cases} a, & n \le 1 \\ b, & n > 1 \end{cases}$$ Разрыв продвинулся на 1 шаг вправо

Разрыв движется вправо со скоростью $\frac{h}{\tau} = b$, а не $D = \frac{a+b}{2}$

При сгущении с сохранением отношения $\frac{h}{\tau} = b$ скорость движения разрыва будет по-прежнему b, а не D => имеем ~~лот~~ сходимость к неправильному решению... Это и есть ложная сходимость.

Причина в нарушении аппроксимации в точках разрыва.

Консервативные схемы

Как избежать ложной сходимости?

— Писать схемы интегро-интерполяц. методов исходя из реальных физических законов сохранения

Если для точного решения выполн. некоторый закон сохранения, то он должен выполняться и для сеточного решения.

Возьмём „правильную" дивергентную форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

Введём сетку и проинтегрируем по 1 интервалу:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} (\hat{u} - u)\,dx + \frac{1}{2}\int_{t}^{t+\tau} (u_n^2 - u_{n-1}^2)\,dt = 0$$

А теперь по всей области:

$$G = [x_0 \le x \le x_N] \times [t_0 \le t \le t_k]$$

$$\int_{x_0}^{x_N} (u(x, t_k) - u(x, t_0))\,dx + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k} (u_N^2 - u_0^2)\,dt = 0$$

Это и есть закон сохранения для данной задачи.

Суммируя выражения для каждой ячейки получим аналогичное выражение для всей области

$$\sum_n \sum_k \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} (u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k))\, dx + \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u_n^2 - u_{n-1}^2)\, dt \right) = 0 \Rightarrow$$

! точно следует! $\Rightarrow$ выражение для всей области.

Консервативность:

закон сохранения для ячейки $\Rightarrow$ закон сохранения для всей области

Покажем неконсервативность старой схемы:

Запишем её так:

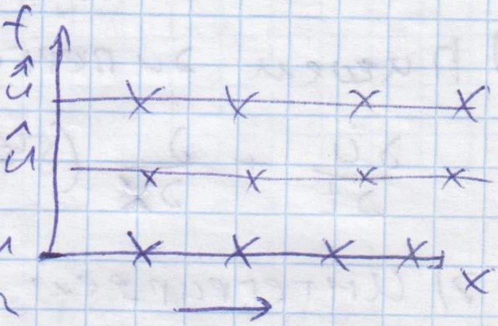
$$\frac{1}{\tau}(\hat{u}_n - u_n) + \frac{1}{2h}(u_n^2 - u_{n-1}^2) + \frac{1}{2h}(u_n - u_{n-1})^2 = 0$$

Если бы она была консервативна, то аналогичное соотношение, выполнялось бы и для всей области.

Просуммируем по ячейкам, умножив сперва всё на τh

$$h(\hat{u}_n - u_n) + \frac{\tau}{2}(u_n^2 - u_{n-1}^2) +$$

$$+ \frac{\tau}{2}(u_n - u_{n-1})^2 = 0$$



Суммируем по времени

$$\hat{\hat{u}}_n - \hat{u}_n + \hat{u}_n - u_n = \hat{\hat{u}}_n - u_n$$

$$h\left(u_n(t_k) - u_n(t_0)\right) + \sum_k \tau \frac{u_n^2 - u_{n-1}^2}{2} +$$

$$+ \sum_k \tau \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{2} = 0$$

Теперь по пространству

$$\sum_n \left(u_n(t_k) - u_n(t_0)\right)h + \sum_k \frac{u_N^2 - u_0^2}{2}\tau +$$

$$+ \underbrace{\sum_k \sum_n \frac{\tau}{2}(u_n - u_{n-1})^2}_{} = 0$$

здесь все узлы — граничные

А здесь нет

Последнее слагаемое $\Delta = \sum_k \sum_n \frac{\tau}{2}(u_n - u_{n-1})^2$ — дисбаланс.

Заметим, что $\Delta > 0$ и для решения с сильным разрывом не стремится к 0 при $h \to 0$, $\tau \to 0$. Тогда $\Delta = O(1)$ и сходимость к правильному решению невозможна.

Для слабых разрывов и гладких решений $D \to 0$ и сходимость возможна.

Правильные схемы

1) Пишем дивергентную форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

2) Интегрируем её по ячейке

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} (\hat{u} - u)\,dx + \frac{1}{2}\int_t^{t+\tau} (u_n^2 - u_{n-1}^2)\,dt = 0$$

3) Аппроксимируем интегралы

$$(\hat{u}_n - u_n)h + \frac{\tau}{2}(u_n^2 - u_{n-1}^2) = 0$$

Схема консервативна, т.к. состоит из первых 2 членов старой схемы, у которой проблемы были в 3 члене. Пригодна для расчета разрывных решений. Схема усл. устойчива ($u_n\tau < h$).

Неявная схема:

$$(\hat{u}_n - u_n)h + \frac{\tau}{2}(\hat{u}_n^2 - \hat{u}_{n-1}^2) = 0$$

безусл. устойчива, консервативна, но нелинейна.

Для поиска $\hat{u}_n$ решаем квадр. уравн.:

$$\frac{\tau}{2}\hat{u}_n^2 + h\hat{u}_n - u_n h - \frac{\tau}{2}\hat{u}_{n-1}^2 = 0$$

$$\hat{u}_n^2 + \frac{2h}{\tau}\hat{u}_n - \left(\frac{2h}{\tau}u_n + \hat{u}_{n-1}^2\right) = 0$$

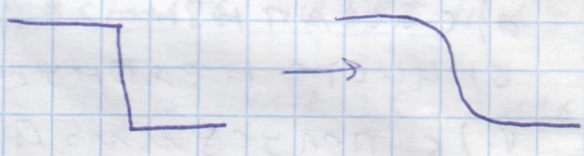
$$\hat{u}_n = -\frac{h}{\tau} \pm \sqrt{\frac{h^2}{\tau^2} + \frac{2h}{\tau} u_n + \hat{u}_{n-1}^2}$$

Берём положит. корень

$$\hat{u}_n = -\frac{h}{\tau} + \sqrt{\frac{h^2}{\tau^2} + \frac{2h}{\tau} u_n + \hat{u}_{n-1}^2}$$

Псевдовязкость

Вся сложность в том, что надо искать разрывные решения. А нельзя так изменить уравнение, чтобы решение было близко к разрывному, но всё же гладко?



Можно, с помощью псевдовязкости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

ε - мало

Решение показывает, что разрыв бежит с правильной скоростью D и размазывается на $\delta x \simeq \frac{8\varepsilon}{a-b}$ интервалов

Т. е. чем больше величина разрыва, тем быстрее он заглаживается. Желательно, чтобы разрыв $\forall$ размера заглажив. за одно и то же число интервалов.

Тогда можно использовать квадратичную вязкость:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$u_t + u u_x = -\varepsilon^2 u_x u_{xx}$$

Тогда разрыв заглаживается за $\delta x \approx 2\varepsilon$ интервалов, т.е. нет зависимости от размера разрыва. Однако есть разрывы $\boxed{\text{I}}$ произв. решения.

~~Э.т.~~. В расчётах берём $\varepsilon = c \cdot h$,

Этот приём широко применяется.

Семинар №8

1. Реализовать разностные схемы
   а) составную
   б) чисто неявную
   в) с полусуммой

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = 3$$

для смешанной задачи Коши в области: $x \in [0; 100]$ $t \in \left[0; \frac{0{,}5 \cdot 100}{c}\right]$

Параметры: $h = 0{,}1$; $\tau = 0{,}01$

2. Показать порядок сходимости с помощью сгущения сетки.

Начальное условие: $u(x,0) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x-20}{10}\right)^{10}}$

Граничное условие: $u(0,t) = 0$

Замечание: составная уже реализована. Надо сделать две оставшиеся