Лекция №14

Интегральные уравнения.
Корректно поставленные задачи.
Понятие о некорректных задачах.

Дополнение по прошлой лекции:

Для 3-D задачи:

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_z)\,w = (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z)\,u + f$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_y)\,v = w$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_x)\,\frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2} = v$$

$$v_{гр} = (E - \sigma\tau^2\Lambda_x)\left(\frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\right)\Big|_{гр}$$

Оператор можно отбросить без потери 2-го порядка

$$v_{гр} = \frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\Big|_{гр}$$

Аналогично

$$w|_{гр} = \frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}\Big|_{гр}$$

Ситуация существенно проще, чем в случае с уравнением теплопроводн.

В интегральных уравнениях неизв. функция стоит под знаком $\int$:

$$\int_a^b K(x, \xi, u(\xi))\,d\xi = F(x, u(x))$$

$$a \le x \le b$$

Здесь $K(x, \xi, u)$ – ядро уравнения.

Запись в форме инт. уравнений более естественна. Задача в терминах инт. уравнения формул. в форме закона сохранения.

Интегр. уравнения удобнее диф. уравнений, т.к. не требуют гранич. условий.
Пример – задача Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{du(x)}{dx} = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

заменяется уравнением

$$u(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, u(\xi))\, d\xi .$$

Никаких доп. условий не нужно!

Задачи естественно обобщаются на многомерный случай:

$$\int\limits_{G} K(\vec{x}, \vec{\xi}, u(\vec{\xi}))\, d\vec{\xi} = F(\vec{x}, u(\vec{x}))$$

$$\vec{x} = \{x_1 \ldots x_p\} \in G(\vec{x}).$$

$\boxed{\text{Линейные интегральные уравнения}}$

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x),$$

$$a \le x \le b$$

Это уравнение Фредгольма II-ого рода.

Ядро $K(x,\xi)$ определено в квадрате $[a;b] \times [a;b]$.

Возможна следующая модификация этого уравнения:

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x),$$

$$a \le x \le b$$

Это уравнение Вольтерра II рода. Если убрать $u(x)$, то получается уравнение I рода. Такие задачи некорректно поставлены.

Для II-ого рода задача корректна.

Для однородного уравнения ставится задача на собств. значения

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \quad x \in [a;b]$$

Имеем пары: $(\underset{\text{с.ф.}}{u_s(x)}, \underset{\text{с.з.}}{\lambda_s})$

Для веществ. симметричных ядер $K^*(x,\xi) = K(x,\xi) = K(\xi,x)$ есть хотя бы одно собств. значение.

У такого ~~уравнения~~ ядра собств. функц. ортогональны друг другу, а собств. знач. вещественны.

Если $\lambda \neq \lambda_s$, то неоднородное уравн. имеет единственное решение.

Если $K(x, y) \in C_p$ и $f(x) \in C_p \Rightarrow$

$u(x) \in C_p$ (непр. вместе с p-тыми производными).

Для симметричного ядра решение выглядит так:

$$u(x) = f(x) + \sum_s \frac{\lambda}{\lambda_s - \lambda} u_s(x) \int_a^b f(y) u_s(y)\, dy$$

Если $\lambda \neq \lambda_s$, то решение $\exists !$

Если $\lambda = \lambda_s$, то решение или $\nexists$ или неединственно.

Уравнение Вольтерра не имеет собственных значений $=$ из $f(x) = 0$ $\Rightarrow u(x) = 0$. Поэтому неоднородное уравнение всегда имеет единств. решение.

$\boxed{\text{Сеточный метод}}$

Как решать? – заменяем $\int$ суммой.

$$\int_a^b \phi(\xi)\,d\xi = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi(x_n)$$

$$\int_a^b K(x,\xi,u(\xi))\,d\xi = F(x,u(x)), \quad a\le x\le b$$

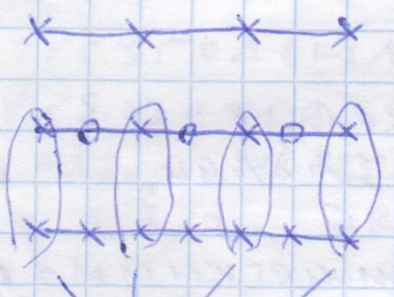
$$u_n = u(x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{m=1}^{N} c_m K(x_n,\xi_m,u(\xi_m)) = F(x_n,u(x_n)), \quad 1\le n\le N.$$

Нелинейная система → решаем Ньютоном.

Нужен многосеточный метод.



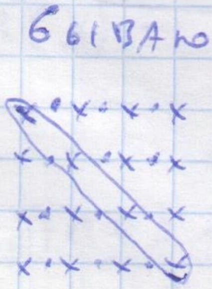
1-ое приближ.

интерполируем на более подр. сети;

2-ое приближ.

оценка погрешн. по Ричардсону. (можно использовать уточнение)

Бывают ядра с разрывом на диагонали



Применяем формулу средних (если сильный разрыв)

Если слабый – можно и трапеции использовать.

Часто удобнее использовать квадратуры Гаусса с $N \sim 5-10$.

Их точность $O(N^{-2N})$

Метод не работает, если есть особенности на диагонали.
Можно использовать аналог многосеточного метода.

Что будет для линейных задач?

– система линейных уравнений.

1. Задача на с.з. для уравнения Фредгольма II рода.

$$\sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} u_m = \frac{1}{\lambda} u_n, \quad 1 \le n \le N$$

$$K_{nm} = K(x_n, x_m)$$

Имеем задачу на с.з. матрицы

$$K^*_{nm} = c_m K_{nm}$$

Только несколько первых с.з. близки к с.з. исходной задачи.

K^*_{nm} может быть несимметрична.
А не получится комплексных с.з.???

~~Возьмем~~ $\cancel{v_n = \frac{u_n}{\sqrt{c_n}}}$, $\cancel{u_n = \sqrt{c_n}\, v_n}$

$$\cancel{\sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} \sqrt{c_m}\, v_m = \frac{1}{\lambda} \sqrt{c_n}\, v_n}$$

$$u_n = \frac{v_n}{\sqrt{c_n}}$$

$$\sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} \frac{v_m}{\sqrt{c_m}} = \frac{1}{\lambda} \frac{v_n}{\sqrt{c_n}}$$

$$\sum_{m=1}^{N} \underbrace{\sqrt{c_m c_n}\, K_{nm}}_{\text{вещ. симм. ядра}}\, v_m = \frac{1}{\lambda} v_n$$

$\Rightarrow v_m$ веществ. и с.з. тоже вещ.

$\Rightarrow u_n$ веществ.

2. Неоднородный Фредгольм.

$$u_n - \lambda \sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} u_m = f_n, \quad 1 \le n \le N, \quad f_n = f(x_n)$$

Решается в лоб и. Погрешность контролируем по Ричардсону. Хорошо решается, если λ далеко от с.з. матрицы. Если близко — плохообусл. задача.

3. Уравнение Вольтерра

Для этого уравнения матрица треугольная $\Rightarrow$ легко решается обратным ходом метода Гаусса за $3N^2/2$ действий.

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ & x & x & x \\ & & x & x \\ & & & x \end{pmatrix}$$

Проблем с обусловленностью не возникает.

$\boxed{\text{Повышение гладкости}}$

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x)$$

~~...~~ и кусочно-гладкое

Тогда и $u(x)$ очевидно кусочно-гладко

Берём $v(x) = u(x) - f(x)$

$$v(x) + \cancel{f(x)} - \lambda \int_a^b K(x,\xi) v(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \underbrace{\lambda \int_a^b K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi}_{\varphi(x)} = \cancel{f(x)}$$

$$v(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi) v(\xi)\, d\xi = \varphi(x)$$

В этой задаче $\varphi(x)$ гладкое. Она решается проще.

Многомерные задачи

Решаются только простейшие. Лучше использовать произведение одномерных формул Гаусса. Ричардсон в этом случае не работает.

Некорректные задачи

Рассмотрим Фредгольма I рода:

$$\int_a^b K(x,\xi) u(\xi)\, d\xi = f(x), \quad c \le x \le d$$

... или Вольтера I рода

$$\int_a^x K(x,\xi) u(\xi)\, d\xi = f(x), \quad c \le x \le d$$

Обращаем внимание, что задача определена в прямоугольнике!!!

Корректность:

1) ∃

2) !

3) непрерывн. решения от правой части

Берём возмущение решения

$\delta u(\xi) = \omega e^{i\omega^2\xi}$, $\omega \gg 1$ – большое возмущение. Загоняем в уравнение...

$$\delta f(x) = \int_a^b K(x,\xi)\,\delta u(\xi)\,d\xi = \omega \int_a^b K(x,\xi) \cdot e^{i\omega^2\xi}\,d\xi = \frac{1}{i\omega}\int_a^b K(x,\xi)\,d e^{i\omega^2\xi} =$$

$$= \frac{1}{i\omega} K(x,\xi)\,e^{i\omega^2\xi}\Big|_{\xi=a}^{\xi=b} - \frac{1}{i\omega}\int_a^b \frac{\partial K(x,\xi)}{\partial\xi} e^{i\omega^2\xi}\,d\xi =$$

$$= O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

Значит для сколь угодно малых возмущений δf имеем сколь угодно большие возмущения δu. => неустойч.

Частный случай – дифференциров.

$$\int_a^x u(\xi)\,d\xi = f(x).$$

Просто так такие задачи не решить. Для решения сужают класс функций, в котором ищется решение. В этом классе задача становится коррект. и может быть решена.

В этом суть метода регуляризации.