# Теоретический материал к семинару №3

Семейство одностадийных схем Розенброка для задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}, t\right) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \tag{1}$$

имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\mathbf{E} - \alpha\tau\mathbf{f}_{\mathbf{u}}\right)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}, t + \dfrac{\tau}{2}\right) \\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tau \operatorname{Re} \boldsymbol{\omega} \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\alpha$ - параметр схемы, $\tau$ - шаг схемы по времени, $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ - матрица производных правой части по вектору $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ - численное решение в текущий и следующий моменты времени соответственно. Практический интерес представляют схемы из семейства одностадийных схем Розенброка при

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 1, \qquad \alpha = \frac{1+i}{2}.$$

Векторная переменная $\boldsymbol{\omega}$ получается из решения системы линейных уравнений с правой частью $\mathbf{f}\left(\mathbf{u}, t + \tau/2\right)$ и матрицей системы $\mathbf{E} - \alpha\tau\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$. Эту матрицу ***не следует*** обращать численно, так как если вычислять $\boldsymbol{\omega}$ как

$$\left(\mathbf{E} - \alpha\tau\mathbf{f}_{\mathbf{u}}\right)^{-1}\mathbf{f}\left(\mathbf{u}, t + \frac{\tau}{2}\right),$$

то это потребует большего объема вычислений, чем решение линейной системы. Особенно заметна разница в производительности, если матрица системы имеет ленточную форму, что часто бывает при применении схем Розенброка к решению систем дифференциальных уравнений, возникающий при численном решении уравнений в частных производных.

Матрицу производных $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ при реализации схем Розенброка в общем виде лучше вычислять численно с помощью центральной разности с шагом $\Delta u = 10^{-5}$. Ее надо строить таким образом, чтобы в 1 строке $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ были производные 1 компоненты вектор-столбца $\mathbf{f}$, по всем компонентам $\mathbf{u}$, во 2 строке - производные 2 компоненты $\mathbf{f}$ по всем компонентам $\mathbf{u}$ и т.д.

## Задачи к семинару №3

1. Решить задачу Коши с правой частью, задаваемой функцией

   Python:

```python
import numpy as np

def f(t, u):
    y = np.array([-50*(u[0]-np.cos(t))+10*u[1],
                  1.2*u[0]-u[1]*u[0]])
    return y
```

   MATLAB:

```matlab
function y = f(t, u)
     y = [-50*(u(1)-cos(t))+10*u(2);
           1.2*u(1)-u(2)*u(1)       ];
end
```

   на временном отрезке $[0; 0.75]$ при начальном значении $u0 = [1; 1]$ с помощью явной схемы Рунге-Кутта второго порядка типа предиктор-корректор, задаваемой матрицей Бутчера $\mathbf{A}$ и векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. предыдущий семинар)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T.$$

   Расчет провести с шагом по времени $\tau = 1/8$ и $\tau = 1/128$.

2. Реализовать семейство одностадийных схем Розенброка в общем виде. Для тестирования использовать задачу Коши из предыдущей задачи. Положить на один график результаты расчета этой задачи при $\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = 1, \alpha = \frac{1+i}{2}$. Взять шаг по времени $\tau = 1/8$. На тот же график положить результат расчета, полученный явной схемой, при $\tau = 1/128$. На графике должны присутствовать обе компоненты вектора решения (т.е. всего должно быть 8 кривых). Для построения графика удобно использовать, например, такие команды:

Python:

```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(t, cros, 'r+-', label='cros')
plt.plot(t, ros05, 'g+-', label='ros05')
plt.plot(t, ros1, 'b+-', label='ros1')
plt.plot(t0, rk2, 'k', label='rk2')
plt.legend()
plt.show()
```

MATLAB:

```matlab
plot(t,cros,'r+-',t,ros05,'g+-',t,ros1,'b+-',t0,rk2,'k');
```

Здесь $t$ задает редкую сетку по времени, а $t_0$ – более подробную.

Объяснить поведение кривых численного решения в терминах $A$-устойчивость, $Lp$-устойчивость, $t$–монотонность.