Лекция №19

Многомерная теплопроводность

Работа над ошибками: см. предыд. страницу.

2-D теплопроводность в прямоугольнике:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t)$$

$0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < t < T$

$u(0, y, t) = \mu_1(y, t)$, $u(a, y, t) = \mu_2(y, t)$,
$u(x, 0, t) = \mu_3(x, t)$, $u(x, b, t) = \mu_4(x, t)$,
$u(x, y, 0) = \mu(x, y)$.

Сетка: $\{x_n, y_m, 0 \le n \le N, 0 \le m \le M\}$
$h_x = const$, $h_y = const$
$\boxed{u_{nm} = u(x_n, y_m, t)}$???

Операторы простр. дифференц.:

$$(\Lambda_x u)_{nm} = K_x \frac{u_{n-1,m} - 2u_{nm} + u_{n+1,m}}{h_x^2}$$

$$(\Lambda_y u)_{nm} = K_y \frac{u_{n,m-1} - 2u_{nm} + u_{n,m+1}}{h_y^2}$$

Используем метод прямых:

$$\frac{d u_{nm}}{dt} = [(\Lambda_x + \Lambda_y) u]_{nm} + f_{nm}$$

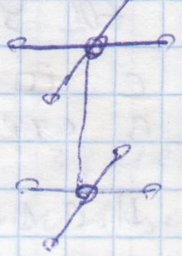
Аппроксимация $\underline{O}(h_x^2 + h_y^2)$

Используем одностадийные схемы Розенброка:

$$\left(E - \alpha\tau(\Lambda_x + \Lambda_y)\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau} = (\Lambda_x + \Lambda_y)u + \bar{f}$$

Аналогично 1-D можно записать!

Схема с весами!



$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = (\Lambda_x + \Lambda_y)(\alpha\hat{u} + (1-\alpha)u) + \bar{f}$$

Из A-устойчивости ($\alpha = 1; \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow$ безусловная устойчивость

+ Трудоёмкость

Для 1-D матрица $E - \alpha\tau\Lambda$ трёхдиагональна, т.к. у E единств. диагональ и Λ - трёхдиагональна

Т. измеряется числом операций при переходе на след. слой в расчёте на 1 узел сетки при $\tau \sim h$.

Схема экономична если

такое число операций $\sim \underline{O}(1)$.

Явная схема: $\tau \sim h^2 \Rightarrow$ на один $\tau \sim h$ шаг надо $N \sim \frac{1}{h}$ шагов $\Rightarrow O(N) \Rightarrow$ нет экономичности.

Схема с весами

Для расчета матрицу u_{ij} придётся вытягивать в вектор, строка за строкой. Тогда матрица оператора $\Lambda x + \Lambda y$ не будет трёхдиагональной у неё будет ленточная форма с шириной ленты $\sim 2N-1$, хотя в строке будет всего 5 ненул. эл-тов.

Полное число операций на узел $\sim N^2 \Rightarrow$ не экономична.

Для 3D – ещё хуже. На один узел $\sim N^4$ операций.

Выход – факторизация

$\boxed{\text{Эволюционная факторизация}}$

Берём „схему с полусуммой":

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \Lambda u + f\left(x, y, z, t + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\Lambda = \Lambda x + \Lambda y + \Lambda z$$

Заменяем:

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right) = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right) \cdot$$
$$\cdot \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) + O(\tau^2)$$

Действительно

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) =$$
$$= E - \frac{\tau}{2}(\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z) + \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_y\Lambda_x +$$
$$+ \Lambda_z\Lambda_x + \Lambda_z\Lambda_y) - \frac{\tau^3}{8}\Lambda_z\Lambda_y\Lambda_x =$$
$$= E - \frac{\tau}{2}\Lambda + O(\tau^2) \Rightarrow$$ такой заменой мы не нарушили аппроксимации.

Итого:

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau}$$
$$= \Lambda u + f\left(x, y, z, t + \frac{\tau}{2}\right)$$
$$\Lambda = \Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z$$

"Строгий" метод гармоник

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = Au$$

Если u – с.ф., а λ – с.з

$$Au = \lambda u$$

$\hat{u} = \rho u$, ρ – множ. роста для с.ф. u

$$\frac{\rho u - u}{\tau} = \lambda u$$

$$\frac{\rho - 1}{\tau} = \lambda$$

$$\rho = 1 + \tau\lambda$$

Должно быть $|\rho| < 1$

$|1 + \tau\lambda| < 1$; $-1 < 1 + \tau\lambda < 1$

$-2 < \tau\lambda < 0$

Разница в том, что вместо $e^{i\varphi x_n}$ на все случаи жизни надо брать собственные функции оператора из правой части (или чего-то другого в соот. с задачей) и работать именно с ними.

В нашем случае (3-р):

$$u_{klm}(x, y, z) = \sin\frac{\pi k x}{a} \sin\frac{\pi l y}{b} \sin\frac{\pi m z}{c}$$

$k \in [1; N_x - 1]$

$l \in [1; N_y - 1]$

$m \in [1; N_z - 1]$

С.ф. получается произведением одномерных

~~[illegible]~~

$$\lambda_{xu} = -\frac{4\varkappa_x}{h_x^2} \sin^2\frac{\pi k}{2N_x}$$

$$\lambda_{yl} = -\frac{4\varkappa_y}{h_y^2}\sin^2\frac{\pi l}{2N_y}$$

$$\lambda_{zm} = -\frac{4\varkappa_z}{h_z^2}\sin^2\frac{\pi m}{2N_z}$$

$\varkappa$ - коэфф. теплопроводности.

$$\Lambda u_{klm} = \Lambda_x u_{klm} + \Lambda_y u_{klm} + \Lambda_z u_{klm} =$$

$$= \lambda_{xk} u + \lambda_{yl} u + \lambda_{zm} u = (\lambda_{xk} + \lambda_{yl} + \lambda_{zm}) u$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) u \, \frac{\rho - 1}{\tau} =$$

$$= (\lambda_{xk} + \lambda_{yl} + \lambda_{zm}) u$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) u = u - \frac{\tau}{2}\lambda_{xk} u =$$

$$= \left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xk}\right) u$$

$$\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{zm}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{yl}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xk}\right)\frac{\rho - 1}{\tau} =$$

$$= (\lambda_{xk} + \lambda_{yl} + \lambda_{zm})$$

$$\boxed{\rho = 1 + \tau\,\frac{\lambda_{xk} + \lambda_{yl} + \lambda_{zm}}{\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xk}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{yl}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{zm}\right)}}$$

Дробь всегда неположительна, т.к. знаменатель всегда положит. из-за отрицат. λ, а числитель - отрицателен по той же причине.

Надо показать, что дробь > -2

$$\frac{\tau(\lambda_{xu} + \lambda_{ye} + \lambda_{zm})}{\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{zm}\right)} > -2$$

Переобозначим $\lambda_{xu} = \lambda_x$, $\lambda_{ye} = \lambda_y$, $\lambda_{zm} = \lambda_z$

$\cancel{\tau(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)}$

$$\tau(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) > -2\Big(1 - \frac{\tau}{2}(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) +$$

$$+ \frac{\tau^2}{4}(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_x\lambda_z) - \frac{\tau^3}{8}\lambda_x\lambda_y\lambda_z\Big)$$

$$\tau(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) > -2 + \tau(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) -$$

$$- \frac{\tau^2}{2}(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_x\lambda_z) + \frac{\tau^3}{4}\lambda_x\lambda_y\lambda_z$$

$$2 > -\frac{\tau^2}{2}\underbrace{(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_x\lambda_z)}_{>0} + \underbrace{\frac{\tau^3}{4}\lambda_x\lambda_y\lambda_z}_{<0}$$

$$2 + \frac{\tau^2}{2}(\lambda_x\lambda_y + \lambda_y\lambda_z + \lambda_x\lambda_z) > \frac{\tau^3}{4}\lambda_x\lambda_y\lambda_z$$

$$\frac{2}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z} + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right) < \frac{\tau^3}{4}$$

$$\underbrace{\frac{\tau^3}{4} - \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right) - \frac{2}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}}_{P(\tau)} > 0$$

$$P(0) = -\frac{2}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z} > 0$$

$$p'_\tau = \frac{3\tau^2}{2} - \tau\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right) = 0$$

$$\tau\left(\frac{3}{2}\tau - \left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right)\right) = 0$$

$$\tau = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right)$$

$$\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right)^3 - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda_z}\right)$$

$p'_\tau > 0$ при $\tau > 0$ => при любом $\tau > 0$

$p(\tau) > 0$ ■

Для 2-D случая – аналогично.

Асимптотическая устойчивость

1-D схема не является асимптотич. устойчивой => скорее всего 2-D и 3-D схемы тоже лишь условно асимптотич. устойчива. $\boxed{\text{2D случай:}}$

$$\rho = \frac{\tau(\lambda_{xu} + \lambda_{ye})}{\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}\right)} + 1 = \frac{\tau(\lambda_{xu} + \lambda_{ye}) + }{(1 - \ldots)(1 - \ldots)}$$

$$+ \frac{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu} - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye} + \frac{\tau^2}{4}\lambda_{xu}\lambda_{ye}}{}$$

$$\rho = \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_{xu} + \frac{\tau}{2}\lambda_{ye} + \frac{\tau^2}{4}\lambda_{xu}\lambda_{ye}}{\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}\right)\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}\right)}$$

$$\rho = \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}}{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{xu}} \cdot \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}}{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_{ye}}$$

Наиболее интересны для ассимпт. устойч. гармоники ρ_{11} и $\rho_{N-1,N-1}$

$$\rho_{11} \simeq 1 + \tau(\lambda_{x,1} + \lambda_{y,1}) \qquad \tau\lambda \ll 1$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{\tau\lambda_{xu}} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\tau\lambda_{xu}} - \frac{1}{2}} \; \frac{\frac{1}{\tau\lambda_{ye}} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\tau\lambda_{ye}} - \frac{1}{2}}$$

$$\rho = \frac{1 + \frac{2}{\tau\lambda_{xu}}}{1 - \frac{2}{\tau\lambda_{xu}}} \cdot \frac{1 + \frac{2}{\tau\lambda_{ye}}}{1 - \frac{2}{\tau\lambda_{ye}}}$$

$$\rho_{N_x-1,N_y-1} \simeq 1 + \frac{4}{\tau}\left(\frac{1}{\lambda_{x,N_x-1}} + \frac{1}{\lambda_{y,N_y-1}}\right) \qquad \tau\lambda \gg 1$$

Условие ассимп. устойчивости

$$\rho_{N_x-1,N_y-1} \le \rho_{11}$$

$$1 + \frac{4}{\tau}\left(\frac{1}{\lambda_{x,N_x-1}} + \frac{1}{\lambda_{y,N_y-1}}\right) \le 1 + \tau(\lambda_{x1} + \lambda_{y1})$$

$$\tau^2 \le \underbrace{\frac{4\left(\frac{1}{\lambda_{x,N_x-1}} + \frac{1}{\lambda_{y,N_y-1}}\right)}{\lambda_{x1} + \lambda_{y1}}}_{\tau_0^2}$$

$$\tau \le \tau_0 = O(h)$$

В 3-D случае $\tau_0 = O(h^{4/3})$

Алгоритм

Имеем 3 стадии счёта для 3-D:

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right) w = (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z) u + f$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right) v = w$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) \frac{\hat{u} - u}{\tau} = v$$

Надо 3 раза решить лин. систему по каждому из направлений. Все матрицы 3-диагон. и проблем нет. Метод экономичен, так как 1 прогонка экономична, а тут их просто 3 подряд.

Граничные условия

Для u граничное условие I рода обычное.

Для v:

$$v_{гр} = \left(\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) \frac{\hat{u} - u}{\tau}\right)_{гр}$$

Для w:

$$w_{гр} = \left(\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) \frac{\hat{u} - u}{\tau}\right]_{гр}$$

или

$$w_{гр} = \left[\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right) \frac{\hat{u} - u}{\tau}\right]_{гр}$$

Можно заменить разности II произв, допуская ошибки в 2-3 порядка, т.е. без потери порядка аппроксим.

$$v_{гр.} = \left[\left(E - \frac{\tau}{2} k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\hat{u} - u}{\tau}\right]_{гр.}$$

Произв. берём точно

$$w_{гр.} = \left(\left(E - \frac{\tau}{2} k \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\tau}{2} k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\hat{u} - u}{\tau}\right)_{гр.}$$

Схема имеет при таких граничн. условиях аппроис. $O(\tau^2 + h^2)$

$\{$ Удовлетворительно вообще, что cros даже на 2-й не получается. $\}$

Для неоднородной среды и гладких коэфф., на неравном сетке запишем:

$$(\Lambda_x u)_n = \frac{2}{h_{x n} + h_{x, n+1}} \left(k_{n+\frac{1}{2}} \frac{u_{n+1} - u_n}{h_{x, n+1}} - k_{n-\frac{1}{2}} \frac{u_n - u_{n-1}}{h_{x n}}\right).$$

k берём в центре по y, z

$\frac{\hat{u} - u}{\tau}$ также берём в центре ячейки.