4) Нормировка вектора при обратной итерации

5) Для эффективной работы обратных итераций со сдвигом нужна ленточная форма матрицы!

Лекция №7

Линейное уравнение переноса

Уравнение переноса

- распростр. частиц в веществе
- определение нейтронных потоков в реакторе
- конвективная теплопроводность

Простейший случай:

u - скаляр!

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{c}(x,t)\,\vec{\nabla} u = f(\vec{x}, t)$$

1-D случай

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$$

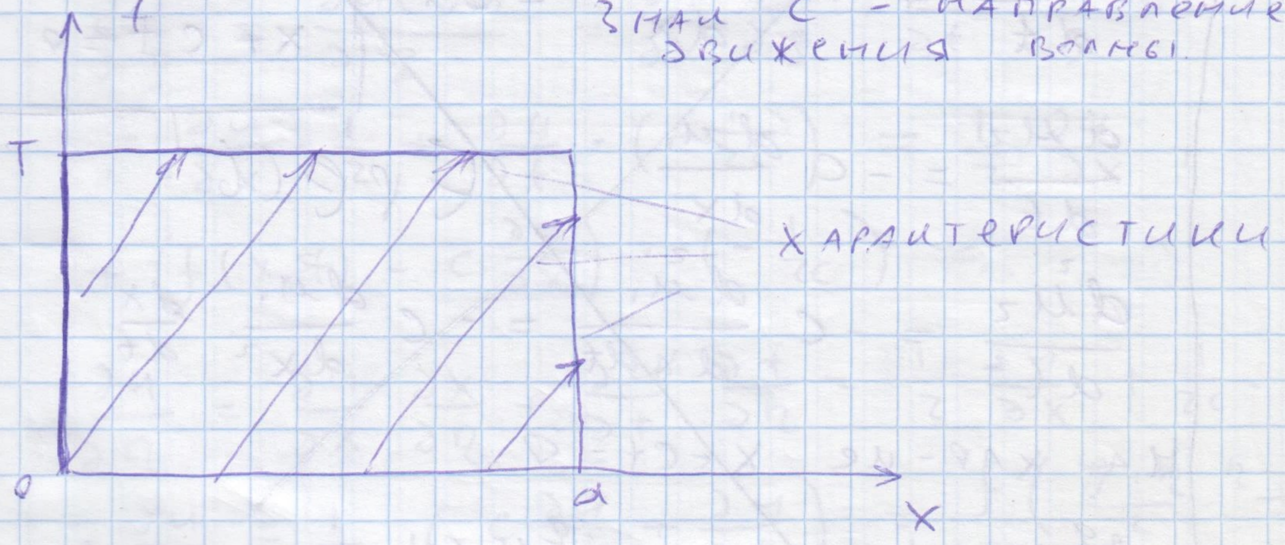
Автомодельное решение - решение, зависящее от одной комбинации аргументов.

Если $f(x) \equiv 0$

$u(x,t) = \Phi(\xi)$, $\xi = x - ct$ – пример автомодельного решения.

Линии $\xi = \text{const}$ – характеристики

знак c – направление движения волны.



Постановка задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t) \\ u(x,0) = \mu_1(x),\ x \in [0;a] \text{ – нач. условие} \\ u(0,t) = \mu_2(t),\ t \in [0;T] \text{ – гран. условие} \end{cases}$$

$G = [0;a] \times [0;T]$

Смешанная задача Коши.

1) μ_1 и μ_2 (нач. и гран. условия) непрерыв. вместе с p-тыми произв. $\Rightarrow$ решение будет p-гладким везде кроме линии ($x = 0$, $t = 0$).

Для гладкой p-гладкости условия должны быть согласованы.

Для однородного уравнения

$$\frac{du_2(0)}{dt} + c\frac{du_1(0)}{dx} = 0$$

$$\frac{du_2}{dt} = -c\frac{du_1}{dx}$$

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = -c\frac{d^2u_1}{dx\,dt} = -c\frac{d^2u_1}{dx^2}\frac{dx}{dt}$$

на хар-ке $x+ct=0$

$$\frac{d^q u_2(0)}{dt^q} = (-c)^q\frac{d^q u_1(0)}{dx^q}, \quad 0 \le q \le p$$

$\boxed{\text{на } x+ct=0 \text{ !}}$

Ересь!

Для неоднородного уравн. должно быть $f(x,t)$ – $(p-1)$ гладко и меняются условия согласования

Интегрирование по характеристикам

Пусть $\xi = x - ct$

$\eta = x + ct$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)$$

$$x = \frac{\xi+\eta}{2}$$

$\cancel{t = \frac{\xi}{c} - \frac{\xi+\eta}{2}}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad !$$

$$\frac{\partial u_2}{dt} + c\frac{du_1}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)'_x = \dots$$

$ct = x - \xi$

$$t = \frac{x-\xi}{c} = \frac{\eta - \xi}{2c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\left(-\frac{1}{2c}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ \left(f(x,t) - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2c}\right) = \ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2c}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2c}\left(c\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right)}{2c}$$

$$\boxed{2c\frac{\partial u}{\partial \eta} = f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)}$$

Фиксируем ξ и решаем ОДУ по η
$\Rightarrow$ получаем решение при $\xi = const$
это и есть интегр. по характ.

Если $c = c(x,t) > 0$ и непр. в G,
то решать тоже можно.

Монотонность

(для однородного уравнения)

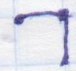
У.П. сохраняет монотонность,
если $u(x,0)$ и $u(0,t)$ оба монотонны
и с против. знаком монотонности
это следует из того, что решение
имеет вид бегущей волны.

Схемы бегущего счёта

Заменим производные разностями:

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + c\,\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \varphi_n$$ 

$$\frac{\hat{u}_{n-1} - u_{n-1}}{\tau} + c\,\frac{\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}}{h} = \varphi_n$$ 

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + c\,\frac{\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}}{h} = \varphi_n$$ 

$\Rightarrow$

I порядок

$$\frac{\hat{u}_n + \hat{u}_{n-1} - u_n - u_{n-1}}{\tau} + c\,\frac{\hat{u}_n + u_n - \hat{u}_{n-1} - u_{n-1}}{h} = 2\varphi_n\left(x_{n-\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

середина ячейки

II порядок

Хоть все схемы кроме 1 и неявной, на $\hat{u}_n$ легко выразить через $\hat{u}_{n-1}$, u_n, u_{n-1}. u_n и u_{n-1} берём с предыд. слоя, $\hat{u}_{n-1}$ берём из граничн. условия.

Аппроксимацию легко получить разложением в ряд Тейлора.

Устойчивость. Метод гармоник.

Правая часть $\to 0$

$u_n \to 1 \quad \hat{u}_n \to \rho \quad u_{n-1} \to e^{-iqh}$

Лучше по порядку: $u_n = e^{iqx_n}$ – это компл. гармоника. Она должна не нарастать в однородном уравнении с нулевыми нач. и гран. условиями. Иначе $\forall$ отклонение от 0 (напр. из-за ошибки округления) будет приводить к „раскачиванию" ошибки.

Пример:

$\hat{u}_n = \rho e^{iqx_n}$, ρ – множ. роста

$u_{n-1} = e^{iqx_{n-1}}$; $\frac{u_{n-1}}{u_n} = e^{-iqh}$, $h = x_n - x_{n-1}$

$$\frac{\rho e^{iqx_n} - e^{iqx_n}}{\tau} + c\,\frac{e^{iqx_n} - e^{iqx_{n-1}}}{h} = 0$$

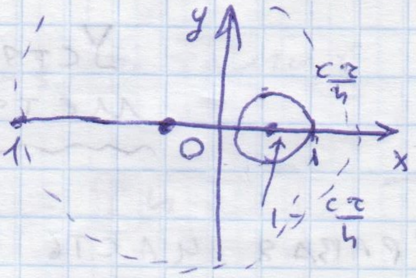
$$\frac{\rho - 1}{\tau} + c\,\frac{1 - e^{-iqh}}{h} = 0$$

$$\rho = 1 + \frac{c\tau}{h}\left(e^{-iqh} - 1\right)$$

Можно было сразу: $u_n \to 1$, $\hat{u}_n \to \rho$, $u_{n-1} \to e^{-iqh}$

Далее $|\rho| \le 1$

$$\rho = 1 - \frac{c\tau}{h} + \frac{c\tau}{h}\cos qh - \frac{c\tau}{h} i \sin qh$$



При $\frac{c\tau}{h} < 1$ все точки лежат внутри о.и.р. $|\rho| \le 1$

Если $\frac{c\tau}{h} > 1$, то нет.

Если $\cos qh = -1$

$\rho = 1 - \frac{2c\tau}{h}$; $1 - \frac{2c\tau}{h} < -1$; $-\frac{2c\tau}{h} < -2$; $\frac{c\tau}{h} > 1$

$$\boxed{\varkappa = \frac{c\tau}{h} \le 1}$$

условие Куранта (усл. устойчив.)

число Куранта

Это всё в норме l_2, в норме C – также условие устойчивости.

Для II схемы: $\frac{c\tau}{h} \ge 1$

Для III схемы – безусловная устойчив., хотя точность меньше.

Идея сост. схемы: если $\frac{c\tau}{h} \le 1$ – берём I схему, иначе – II схему. безусловная уст. + большая точность.

Симметричная схема:

$$\frac{\rho + \rho e^{-iqh} - 1 - e^{-iqh}}{\tau} + c\,\frac{\rho + 1 - \rho e^{-iqh} -}{h}$$

$$- \frac{e^{-iqh}}{\text{[illegible]}} = 0$$

$$\frac{\rho(1+e^{-iqh})-(1+e^{-iqh})}{\tau}+c\,\frac{\rho(1-e^{-iqh})+}{h}$$

$$\frac{+1-e^{-iqh}}{}=0 \quad \times(1-e^{-iqh})$$

$$\rho\left(\frac{1+e^{-iqh}}{\tau}+\frac{c}{h}\right)=\frac{1+e^{-iqh}}{\tau}-\frac{c}{h}(1-e^{-iqh})$$

$$\rho=\frac{\frac{1+e^{-iqh}}{\tau}-\frac{c}{h}(1-e^{-iqh})}{\frac{1+e^{-iqh}}{\tau}+\frac{c}{h}(1-e^{-iqh})}=$$

$$=\frac{(1+e^{-iqh})h-c\tau(1-e^{-iqh})}{(1+e^{-iqh})h+c\tau(1-e^{-iqh})}=$$

$$=\frac{h-c\tau+e^{-iqh}(h+c\tau)}{h+c\tau+e^{-iqh}(h-c\tau)}=$$

$$=e^{-iqh}\,\frac{h+c\tau+(h-c\tau)e^{+iqh}}{h+c\tau+(h-c\tau)e^{-iqh}}$$

$|\rho|=1 \Rightarrow$ безусловно устойчива

Метод гармоник не является строгим, но это мощный инструмент исследования устойчивости схем.

Монотонность

Если разностная схема сохраняет монотонный профиль решения, то она монотонна.

Теорема

Монотонность явной двухслойной схемы

$$\hat{u}_n = \sum_m \beta_m u_{n+m} \Leftrightarrow \forall m\ \beta_m \geq 0$$

Док-во:

$$\hat{u}_{n-1} - \hat{u}_n = \sum_m \beta_m (u_{n-1+m} - u_{n+m})$$

Если $\beta_m \geq 0$, то из $u_{n-1+m} - u_{n+m} \geq 0$ (невозрастание на текущем слое) $\Rightarrow$ $\hat{u}_{n-1} - \hat{u}_n \geq 0$ (невозрастание на новом слое).

Пусть теперь профиль невозрастающий и $\exists\ \beta_k < 0$.

Пусть теперь $\begin{cases} u_{n+m} = 1, & m \leq k-1 \\ u_{n+m} = 0, & m \geq k \end{cases}$

$$\hat{u}_{n-1} - \hat{u}_n = \beta_k (u_{n-1+k} - u_{n+k}) = \beta_k < 0$$

$\Rightarrow$ нет монотонности.

Теорема работает для $\forall$ уравнения

Для неявной схемы сумма будет бесконечна.

Теорема

Двухслойная линейная монотонная схема для уравнения $u_t + cu_x = 0$ не может иметь порядок $p \geq 2$

Док-во:

1) Пусть такая схема $\exists$.

Возьмём $x_n = nh$ и такие нач. данные

$$u(x,0)=\left(\frac{x}{h}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Значит на „0" слое

$$u_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge 0$$

Легко видеть, что $u_{xxx}(x,0)=0$, так что схема II и более порядка должна быть точной. (так как $u_{ttt}(x,t)=0$ также из вида точного решения)

$$u(x,t)=\left(\frac{x-ct}{h}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

На след. слое

$$u(x,\tau)=\left(\frac{x-c\tau}{h}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\quad \text{— точно}$$

$$\hat{u}_n=\left(n-\frac{c\tau}{h}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

А что будет по схеме?

$$\hat{u}_n=\sum_m \beta_m u_{n+m}$$

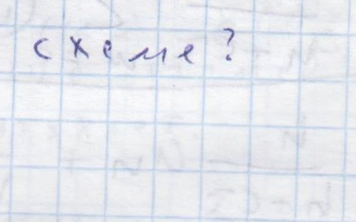
Считаем:

$$\underbrace{\left(n-\frac{c\tau}{h}-\frac{1}{2}\right)}^2-\frac{1}{4}=\sum_m \beta_m \underbrace{\left(\left(n+m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)}_{\ge 0}$$

(из монот. схемы)

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge 0$$

$$(x-1)x\ge 0$$



$\Rightarrow$ для целых x $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge 0$

при $n-\frac{c\tau}{h}\in(0;1)$ слева выраж. отриц. $\Rightarrow$ противоречие, доказ. теорему.

Примеры:

1) Явная схема при $c\tau \le h$ имеет неотрицат. коэффиц. $\Rightarrow$ монотонна

2) Схема

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + c\,\frac{\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}}{h} = \varphi_n$$

берём $\varphi_n \equiv 0$

$$\hat{u}_n\left(\frac{1}{\tau} + \frac{c}{h}\right) = \frac{u_n}{\tau} + \frac{c\,\hat{u}_{n-1}}{h}$$

$$\hat{u}_n\,(h + c\tau) = h u_n + c\tau\,\hat{u}_{n-1}$$

$$\hat{u}_n = \frac{c\tau\,\hat{u}_{n-1} + h u_n}{h + c\tau}$$

Аналогично

$$\hat{u}_{n-1} = \frac{c\tau\,\hat{u}_{n-2} + h u_{n-1}}{h + c\tau} \quad \text{и т.д.}$$

Можно показать, что

$$\boxed{\hat{u}_n = \frac{h}{h+c\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{c\tau}{h+c\tau}\right)^m u_{n-m}}$$

$$\hat{u}_n = \frac{h}{h+c\tau}u_n + \frac{c\tau}{h+c\tau}\left(\frac{c\tau\,\hat{u}_{n-2} + h u_{n-1}}{h+c\tau}\right) =$$

$$= \frac{h}{h+c\tau}\left(u_n + \frac{c\tau}{h}\,\frac{c\tau}{h+c\tau}\,\hat{u}_{n-2} + \frac{c\tau}{h+c\tau}\,u_{n-1}\right)$$

$\Rightarrow$ А из этого следует монотонность!

Схема второго порядка согласно теореме немонотонна

Итого:

1) Составная схема, I пор., монот.
2) Чисто неявная схема, I пор., монот.
3) Схема с полусуммой, II пор., немонот.

Можно брать схему I пор. монот., а можно схему II пор. с мелким шагом, немонот., тогда немонот. будет мало проявляться.

Диссипативность

У точного решения все гармоники имеют множители роста $|\rho_q| = 1$ и эти гармоники не сдвигаются друг относительно друга по фазе.

У схем I порядка $\rho_0 = 1$, $|\rho_0| > |\rho_1| > |\rho_2| \ldots > |\rho_{N-1}|$, (т. к. $\exists$ лишь конечное число гармоник $e^{i\frac{\pi q x}{L}}$ на сетке), т.е. чем выше номер гармоники, тем сильнее она затухает.

Схемы с затуханием гармоник — диссипативные (обладают аппроксимационной вязкостью). Такое поведение схем „давит" пилу, но портит точность.

Схема II порядка имеет $|\rho_q| = 1$, однако фазы всех гармоник разные и они „разъезжаются" => немонотонность.

Многомерность

3-р задача:

$$G = [0 \le x \le a] \times [0 \le y \le b] \times [0 \le t \le T]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t)$$

$$u(x, y, 0) = \mu_1(x, y)$$
$$u(0, y, t) = \mu_2(y, t)$$
$$u(x, 0, t) = \mu_3(x, t)$$

Вводим сетки x_n по x и y_m по y

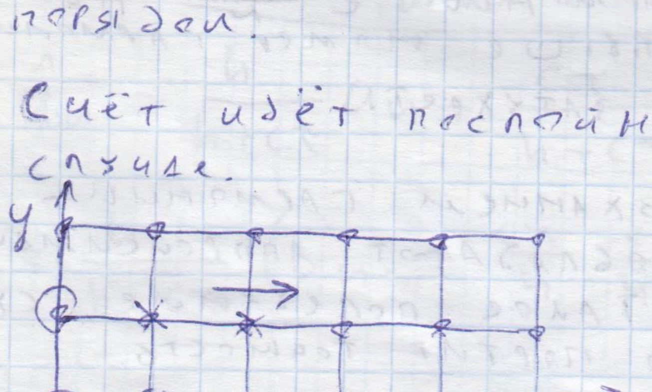
$$u(x_n, y_m, t) = u_{nm}$$
$$u(x_n, y_m, t+\tau) = \hat{u}_{nm}$$

Аналог чисто неявной схемы:

$$\frac{1}{\tau}(\hat{u}_{nm} - u_{nm}) + \frac{c_x}{h_x}(\hat{u}_{nm} - \hat{u}_{n-1,m}) +$$
$$+ \frac{c_y}{h_y}(\hat{u}_{nm} - \hat{u}_{n,m-1}) = \varphi_{nm}$$

Схема безусл. устойчива, имеет I порядок.

Счёт идёт послойно, как и в 1-D случае.



На прев. слое все значения есть.

Откуда взять знач. на след. слое? — из гранич. условий

Схема с полусуммой имеет II порядок. Расчёт ведётся аналогично.