Уравнения в частных производных

(1)

Общий вид:

$A[\vec{u}] = \vec{f}$

интегро-дифференц. оператор

$\vec{u}, \vec{f}$ - функции, т.е. $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$, $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x})$

Здесь $\vec{x} \in G$ ← некоторая область

Γ - граница области G

$$\vec{u}(\vec{x})\Big|_{\vec{x} \in \Gamma} = \alpha(\vec{x})$$ - краевое (граничное) условие

Если уравнение нестационарно (зависит от времени)

$$\vec{x} = (\vec{x}^*, t)$$

$\vec{x}^*$ — простр. переменные; t — время

$$\vec{u}(\vec{x}^*, t)\Big|_{t = t_0} = \beta(\vec{x}^*), \quad \vec{x}^* \in G$$

Это начальное условие

Формально включают все условия в число основных уравнений. Тогда пишут просто

$$A[\vec{u}] = \vec{f}$$

и ничего более.

Как решаем?

- точно — аналитические методы
- приближенно — численные методы
  - сеточные — предмет курса
  - конечных эл-тов (ANSYS)
  - другие: метод Пикара, метод Галеркина, ⋮

②

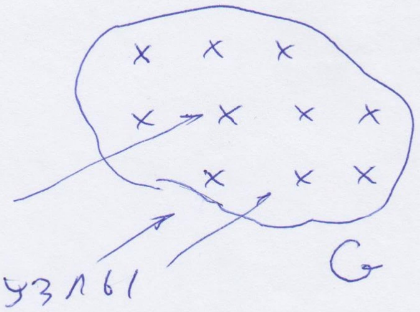
Сеточные методы

Наша задача $A[\vec{u}] = \vec{f}$ - непрерывная

заменяем на $B[\vec{v}] = \vec{f}^*$ - дискретная

$\vec{v}$ и $\vec{f}^*$ - определены на сетке

Мы ищем искомую функцию в точках сетки



B - алгебраический оператор } узлы сетки

В дальнейшем вместо $\vec{f}^*$ будем писать $\vec{f}$ ← без звёздочки

Невязка

Пусть $\vec{u}$ - точное решение $A[\vec{u}] = \vec{f}$

тогда $B[\vec{u}] = \vec{f} + \underline{\underline{\vec{\Delta f}}} \neq f$ ← невязка

Характеризует качество перехода от A (интегр.-диф.) к B (алгебраич.), то есть аппроксимацию

$$\underset{Ⓐ}{\frac{df}{dx}} \longrightarrow \underset{Ⓑ}{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}$$ аппроксимация

Свойство аппроксимации

Итак) $A[\vec{u}] = \vec{f}$

$B_h[\vec{u}] = \vec{f} + \vec{\Delta f_h}$

шаг сетки, возможно неравномерной

Собственно аппроксимация:

$$\lim_{h\to 0} \|\vec{\Delta f_h}\| = 0$$

↑ некоторая норма

Сходимость

$A[\vec{u}] = \vec{f}$ $\qquad \lim\limits_{h \to 0} \|\vec{v}_h - \vec{u}\| = 0$

$B_h[\vec{v}_h] = \vec{f}$

точное решение

Устойчивость
(разностной схемы)

Было:

$B_h[\vec{v}_h] = \vec{f}$

Исказим решение на $\delta\vec{v}$...

$B_h[\vec{v}_h + \delta\vec{v}] = \vec{f} + \delta\vec{f}$

возмущение решения

возмущение правой части

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon): \ \|\delta\vec{f}\| < \delta \ \ \|\delta\vec{v}\| < \varepsilon$

от шага h не зависит!!!

$\lim\limits_{\|\delta\vec{f}\| \to 0} \|\delta\vec{v}\| = 0$ - равномерное по шагу h!

Корректность
(разностной схемы)

$B[\vec{v}] = \vec{f}$

1. Решение $\vec{v}$ существует $\exists$
2. Оно единственно!
3. Схема устойчива

для всех допустимых f

$\left.\begin{array}{l}\text{Аппроксимация} \\ \text{Устойчивость}\end{array}\right\} \Rightarrow$ сходимость

(корректность)

$A[\vec{u}] = \vec{f}$

$B_h[\vec{v}_h] = \vec{f}$

$B_h(\vec{u}) = \vec{f} + \vec{\Delta f_h}$ — из аппроксимации

невязка

$B_h[\vec{v}_h + \vec{u} - \vec{v}_h] = \vec{f} + \vec{\Delta f_h}$

Из устойчивости:

при $\|\vec{\Delta f_h}\| \to 0$ должно быть $\|\vec{u} - \vec{v}_h\| \to 0$ <u>равномерно по h</u>

Из аппроксимации:

$\lim\limits_{h\to 0} \|\vec{\Delta f_h}\| = 0$

Объединяем...

при $h \to 0 \Rightarrow \|\vec{\Delta f_h}\| \to 0 \Rightarrow \|\vec{u} - \vec{v}_h\| \to 0$

А это и есть сходимость

Зачем равномерная сходимость?

1) $\lim\limits_{h\to 0} \|\vec{\Delta f_h}\| = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon): h < \delta(\varepsilon) \ \|\vec{\Delta f_h}\| < \varepsilon$

2) $\|\vec{\Delta f_h}\| \to 0 \Rightarrow \|\vec{u} - \vec{v}_h\| \to 0$

$\forall \gamma > 0 \ \exists \varepsilon(\gamma): \|\vec{\Delta f_h}\| < \varepsilon \ \ \|\vec{u} - \vec{v}_h\| < \gamma$

зависимость от h не дала бы соединить две строчки

3) $\forall \gamma > 0 \ \exists \delta(\gamma): h < \delta(\gamma) \ \ \|\vec{u} - \vec{v}_h\| < \gamma$

Порядки точности и сходимости

Если пишут $f(h) = \underline{O}(h^p)$, то это значит $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)}{h^p} = c, \ c \neq 0$

Если $f(h) = \bar{o}(h^p)$, то
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h^p} = 0$$

Линейные схемы

Схема линейна:
$$B_h[\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}] = \alpha B_h[\vec{u}] + \beta B_h[\vec{v}]$$

Запишем устойчивость:
$$B_h[\vec{V}_h + \delta \vec{v}] = \vec{f} + \delta \vec{f}$$
$$B_h[\vec{V}_h + \delta \vec{v}] = B_h[\vec{V}_h] + B_h[\delta \vec{v}] = \vec{f} + \delta \vec{f},$$
т. к. $B_h[\vec{V}_h] = \vec{f}$, то
$$\cancel{\vec{f}} + B_h[\delta \vec{v}] = \cancel{\vec{f}} + \delta \vec{f}$$
$$B_h[\delta \vec{v}] = \delta \vec{f}$$

В силу линейности (а значит ограниченности) B_h имеем
$$\|\delta \vec{v}\| \leq M \|\delta \vec{f}\|$$

$\uparrow$ некоторая константа

$\boxed{\text{Зависимости от } h \text{ нет!}}$

Теперь пусть $\|D\vec{f}_h\| = \underline{O}(h^p)$ — это порядок аппроксимации

Тогда $\|\vec{u} - \vec{V}_h\| \leq M \|D\vec{f}_h\|$ — см. док-во теоремы и то, что выше

Значит $\|\vec{u} - \vec{V}_h\| \leq \underline{O}(h^p)$, т.е.

$\boxed{\text{Порядок сходимости не хуже (не меньше) порядка аппроксимации для линейных схем}}$

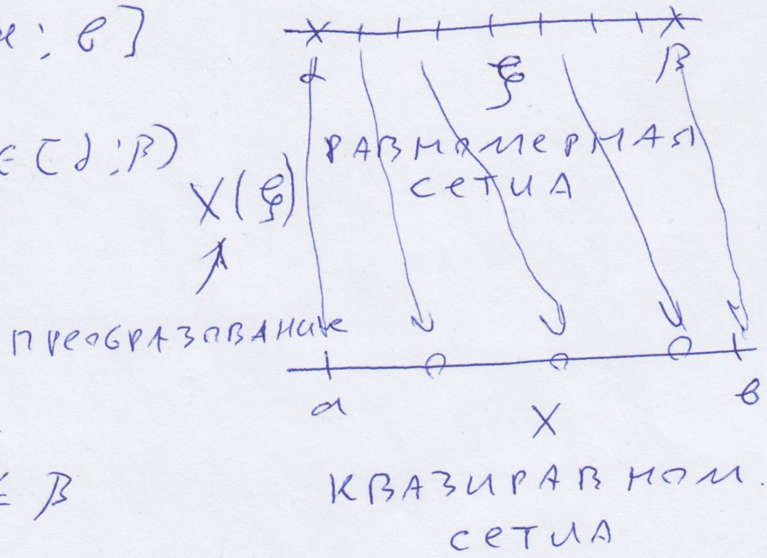
Квазиравномерные сетки

$X(\xi): [\alpha;\beta] \to [a;b]$

1) $|X^{(q)}(\xi)| \le M_q \quad \xi \in [\alpha;\beta]$

$q = 0, 1 \dots Q$

$Q \gg 1$



2) $X'(\xi) \ge \theta > 0; \ \alpha \le \xi \le \beta$

3) $a = X(\alpha); \ b = X(\beta)$

Если $X(\xi)$ удовлетворяет, то сетка квазиравномерная

Точки, полуцелые точки, шаги

Шаг:

$h_n = x_n - x_{n-1} \simeq X'(\xi_{n-\frac{1}{2}}) \Delta\xi$

шаг равн. сетки

Полуцелые точки

$x_{n-\frac{1}{2}} = X(\xi_{n-\frac{1}{2}}) \ne \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$!!!

Пример: формула средней точки для вычисления интеграла

$U = \int_a^b u(x)\,dx \ ; \quad U_N = \sum_{n=1}^{N} u(x_{n-\frac{1}{2}})\, h_n$

На квазиравн. сетке:

$U_N = \sum_{n=1}^{N} u(X(\xi_{n-\frac{1}{2}}))\, X'(\xi_{n-\frac{1}{2}})\, \Delta\xi$

Если $\xi \in [0;1]$ и $\Delta\xi = \frac{1}{N}$, то

$U_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u(X(\xi_{n-\frac{1}{2}}))\, X'(\xi_{n-\frac{1}{2}})$

Квазиравномерная сетка в неограниченной области

$X(\xi): [0;1] \to [0;+\infty)$

$$X(\xi) = \frac{c\xi}{(1-\xi^2)^m}$$

можно взять $m = \frac{1}{2}$, например.

Тогда можно считать $U = \int_0^\infty u(x)\,dx$ по формуле

$$U_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u\left(X\left(\xi_{n-\frac{1}{2}}\right)\right) X'\left(\xi_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

Интеграл несобственный, а все шаги квазиравномерной сетки конечны