Лекция №2

Обыкновенные дифференциальные уравнения

ОДУ

- управление (сист. с обр. связью)
- механика
- химия
- электрич. цепи
- решение уравн. в частн. произв.

Уравнение n-ого порядка

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(u, u', u'', \dots u^{(n-1)}, t)$$

n нач. условий

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_{n-1}(t)}{dt} = f(u_0, u_1, \dots u_{n-1}, t) \\ \dfrac{du_m}{dt} = u_{m+1}(t), \quad 0 \le m \le n-2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = f(\vec{u}, t) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \leftarrow \text{нач. условия} \\ t \in [t_0; T] \end{cases}$$

Задача Коши

Теоремы о существовании и единственности решения

1

1. $\vec{f}(\vec{u}, t)$ — непрерывна относит. своих переменных в некоторой окр. нач. точки
2. $f(\vec{u}, t)$ — ограничена в той же окрестности

$\Downarrow$

Решение $\exists$

2

1. Выполнены условия Липшица в области решения

$$\|\vec{f}(\vec{u}_1, t) - \vec{f}(\vec{u}_2, t)\| \le L\,\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|$$
$$\forall t \in (t_0, T)$$
$$\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in D$$

$\Downarrow$

Решение $\exists!$
Задача корректна
(т.е. непр. зависит от нач. данных)

3

Правые части имеют p непрерыв. производных по $u_1 \ldots u_M$ и по t

$\Downarrow$

Решение $u(t)$ имеет $p+1$ непр. производную по t

Правая часть имеет p непр. производн. => можно выписывать разложение в ряд Тейлора до p-ого порядка включительно => можно использовать метод p-ого порядка, но ~~не~~ выше

Выше – бессмысленно.

~~Заменим правую часть полиномом n-го порядка. Он может передать n первые производных правильно. И можно исп. метод, имеет смысл до n-го порядка включительно.~~

~~Это производные решения~~

~~=> речь идет о производных решения => правой части~~

Наличие $p+1$ непрерывной производной ~~правой~~ решения достаточно для обоснованного выписывания ряда Тейлора до p производной => можно применять метод p-ого порядка.

Если мы правую часть заменили полиномом n-ой степени, правильно передающим n первых производных, то чтобы их все пустить в дело надо исп. метод $n+1$ порядка. Однако тут априори известно о непрерывности $n+1$ й производной.

Пример

$$\frac{du}{dt} = t^3$$

Точно решается схемой 4-го порядка, правильно передающей 4 ~~перв~~ производные решения

$$\left(u = \frac{t^4}{4} \right)$$

$$\frac{du}{dt} = t^4$$

Не решается точно схемой 4-го порядка (нужна 5 производн.)

Пусть

$$f = t^3 + t^4 D(t)$$

↑ функция Дирихле

Продифф. $t D(t)$ в т. t_0

$$\frac{(t_0 + \Delta t) D(t_0 + \Delta t) - t_0 D(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{t_0 (D(t_0 + \Delta t) - D(t_0)) + \Delta t \, D(t_0 + \Delta t)}{\Delta t} -$$

ни к чему хорошему не сходятся => плохой пример

Методы

Точные — приближ. (Пикара) — численные

$$\frac{du}{dt} = u^2 + t^2$$ — не решается в элементарных функциях

Обусловленность

$$\begin{cases} u'(t) = u - t, & 0 \le t \le 100 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$u(t, c) = 1 + t + ce^t$

при $c = 0 \Rightarrow u(t, 0) = 1 + t$; $u(100, 0) = 101$

при $c = 10^{-6}$ $u(0) = 1{,}000001$

$u(100) = 101 + 10^{-6} e^{100} \approx 2{,}7 \cdot 10^{37}$

Автономизация

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = f(\vec{u}, t) \Rightarrow \frac{d\vec{u}^*}{dt} = f^*(\vec{u}^*)$$

$\vec{u}^* = \{\vec{u}_{1\times n}, u_{n+1}\}$ $\vec{u}^*_0 = \{\vec{u}_0, t_0\}$

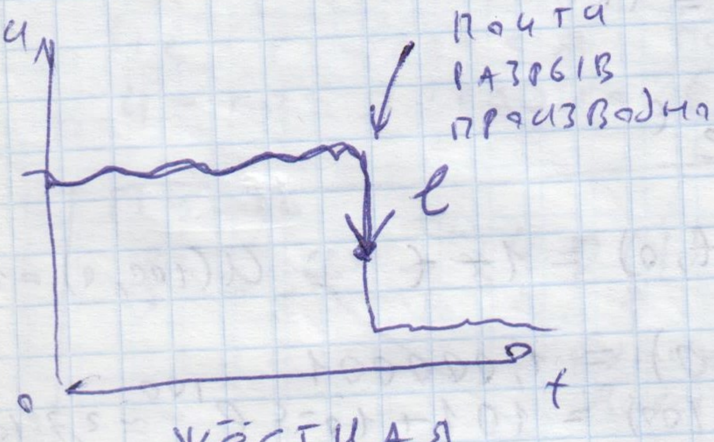
$\vec{f}^* = \{\vec{f}(\vec{u}, u_{n+1}), 1\}$

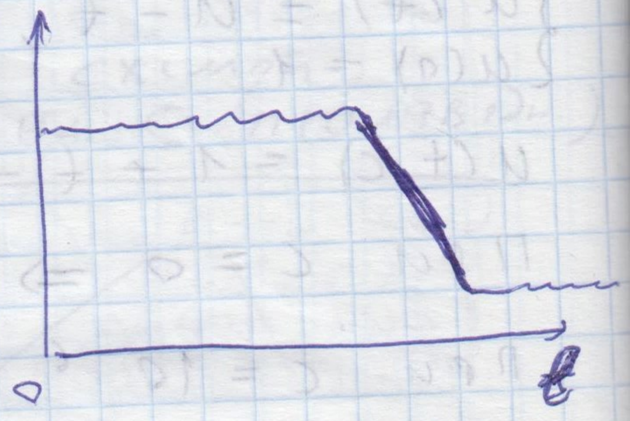
Пример

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2 + t^2 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u^2 + t^2 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Длина дуги





жёсткая задача

обычная задача

$$dl^2 = dt^2 + \sum_{m=1}^{M} (du_m)^2$$

$$dl^2 = dt^2 \left(1 + \sum_{m=1}^{M} \Big(\underbrace{\frac{du_m}{dt}}_{f_m}\Big)^2\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = f_1(u_1 \dots u_M) \\ \dfrac{du_2}{dt} = f_2(u_1 \dots u_M) \\ \vdots \end{cases}$$

ЛУЧШЕ РАССКАЗАТЬ ИНАЧЕ.

$$(de)^2 = (dt)^2 + \sum_{m=1}^{M} (du_m)^2 -$$

длина дуги в пространстве $M+1$ измерений

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = f_1(u_1, u_2 \dots u_M, t) \\ \dfrac{du_2}{dt} = f_2(u_1, u_2 \dots u_M, t) \\ \vdots \\ \dfrac{du_M}{dt} = f_M(u_1 \dots u_M, t) \\ u_1(t_0) = u_{10} \\ u_2(t_0) = u_{20} \\ \vdots \\ u_M(t_0) = u_{M0} \end{cases}$$

пока система неавтономна

$$\left(\frac{de}{dt}\right)^2 = 1 + \sum_{m=1}^{M} (\dot{d u_m})^2$$

$$de = \sqrt{1 + \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{du_m}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$de = \sqrt{1 + \sum_{m=1}^{M} f_m^2}\, dt \qquad (*$$

берём u_{m^*} (любое u_n)

$$\frac{du_{m^*}}{dt} = f_{m^*}(u_1 \dots u_m, t)$$

$$\frac{du_{m^*}}{d\ell} \cdot \frac{d\ell}{dt} = f_{m^*}$$

ЗАМЕНИТЬ НА „n"

$$\frac{du_{m^*}}{d\ell} = \frac{f_{m^*}}{\frac{d\ell}{dt}} = \frac{f_{m^*}}{\sqrt{1 + \sum_{m=1}^{M} f_m^2}}$$

$$\frac{du_n}{d\ell} = \frac{f_n}{\sqrt{1 + \sum_{m=1}^{M} f_m^2}}$$

Теперь смотрим на (*)

теперь функция!

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\ell} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{m=1}^{M} f_m^2}} \\ \frac{du_1}{d\ell} = \frac{f_1(u_1 \dots u_m, t)}{\sqrt{1 + \sum_{m=1}^{M} f_m^2}} \\ \vdots \\ \frac{du_M}{d\ell} = \frac{f_M(u_1 \dots u_M, t)}{\sqrt{1 + \sum_{m=1}^{M} f_m^2}} \\ u_1(0) = u_{10} \\ \vdots \\ u_M(0) = u_{M0} \\ t(0) = t_0 \end{cases}$$

! система автономна!

можно взять $u_{M+1} = t$

Обозначим правую часть за F_m,

т. е.

$$F_m = \frac{f_m}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{M} f_i^2}}, \quad 1 \le m \le M$$

$$F_{M+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{M} f_i^2}}$$

Ясно, что $\sum_{m=1}^{M+1} F_m^2 = \sum_{m=1}^{M} \frac{f_m^2}{1 + \sum_{i=1}^{M} f_i^2} +$

$+ \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{M} f_i^2} = 1$, т. е. нет

больших по модулю производных.

Можно брать с весами,

т. е.

$$dl^2 = dt^2 + \sum_{m=1}^{M} (a_m \, du_m)^2$$

Разумно сбалансировать все слагаемые, т. е. если du_m большое – берём a_m маленько и наоборот

Методы Рунге-Кутты

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}, t) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Введём сетку $t_0, t_1 \dots t_n \dots$

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \frac{d\vec{u}_n}{dt}(\underbrace{t_{n+1} - t_n}_{h_n}) + o(t_{n+1} - t_n)$$

$$\frac{d\vec{u}_n}{dt} = f(\vec{u}_n, t)$$

$$\boxed{\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \vec{f}(\vec{u}_n, t)(t_{n+1} - t_n)}$$

Схема Эйлера

Введём 3 упрощ. предположения

1. Система автономна
2. ~~бу Не будем~~ Не будем акцентировать внимание на том, что работаем с векторами. Потом можно провести формальную замену
3. Не будем писать индексов.

Итак: (для схемы Эйлера)

$$\frac{du}{dt} = f \qquad \hat{u} = u_{n+1}$$

$$u = u_n$$

$$\hat{u} = u + f \cdot h \qquad h = t_{n+1} - t_n$$

h - шаг

$\hat{u} = u + f h$

Пусть u - точное решение

$$\hat{u} = u + \frac{du}{dt} h + \frac{d^2u}{dt^2}\frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{d^{(n)}u}{dt^n}\frac{h^n}{n!} T + o(h^n)$$

$$\frac{du}{dt} = f$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{du}\frac{du}{dt} =$$

$= f_u f$ - исп. автономность

Если не исп.:

$$\frac{df(u,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

$= f_u f + \underline{\underline{f_t}}$ ← частн. произв.

доп. член!

полн. производн.

$$\frac{d^3u}{dt^2} = (f_u f)'_t = f_{ut} f + f_u f_t =$$

$$= \frac{d f_u}{du}\frac{du}{dt} f + f_u f_u f = f_{uu} f f + f_u f_u f$$

Чем дальше ~~т~~ тем хуже - больше членов.

А в векторном виде?

$$\frac{du}{dt} = f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ — вектор}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f_u f$$

очевидно тоже вектор

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{\cancel{1\times n}\ n\times 1} = (f_u)_{n\times n}\, f_{\cancel{1\times n}\ n\times 1}$$

!!! МАТРИЦА !!!

$$(f_u)_{ij} = \frac{df_i}{du_j}$$

что такое f_{uu} — ?

$$(f_{uu})_{ijk} = \frac{d(f_u)_{ij}}{du_k} = \frac{d^2 f_i}{du_i du_k}$$

"3D матрица"

ТЕНЗОР

Формула перехода до 3 произв.

$$\hat{u} = u + fh + \underline{f_u f}\frac{h^2}{2!} + \underline{(f_{uu}ff + f_u f_u f)}\frac{h^3}{3!} + \ldots + O(h^3)$$

Откуда взять?

Общий вид схем РК

$$\hat{u} = u + h\sum_{k=1}^{s} b_k w_k$$

$$w_k = f\left(u + h\sum_{e=1}^{L} \alpha_{ke} w_e,\ t + h a_k\right),\quad 1 \le k \le s$$

S - стадийная схема РК

Имеем 2 вектора параметров $(a_1 \ldots a_s)$; $(b_1 \ldots b_s)$ и матрицу

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1s} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{s1} & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_{ss} \end{pmatrix}$$

МАТРИЦА α_{ij} - матрица Бутчера

Классификация

1. $L < k$ - след. w_k выражается через предыд. - явная схема
2. $L = k$ - диаг. - неявная.
Вектор w_k каждый раз получается решением уравнения (системы) <u>по очереди</u>

$$w_k = f\left(u + h\left(\alpha_{k1} w_1 + \alpha_{k2} w_2 + \dots + \alpha_{kk} w_k\right),\ t + h a_k\right)$$

3. $L = S$ — полностью неявная схема

все w_k получаются из решения сост. системы. Все и сразу

<u>показать вид матриц Бутчера</u>

ε Аппроксимация

Схема должна аппроксимировать $\hat{u} - u$, передавая max кол-во производных.

Рассмотрим ~~автономные~~ 2-стад. схемы (автоном. случай)

$$\hat{u} = u + h\left(b_1 w_1 + b_2 w_2\right)$$

$$w_1 = f\left(u + h\left(\alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2\right)\right)$$

$$w_2 = f\left(u + h\left(\alpha_{21} w_1 + \alpha_{22} w_2\right)\right)$$

распишем

$$f(u + hw) = f(u) + hw f_u + \frac{h^2}{2} w^2 f_{uu} + \dots$$

$$w_1 = f(u) + h\left(\alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2\right) f_u + f_{uu} \frac{h^2}{2}\left(\alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2\right)^2 + \frac{h^3}{6}\left(\alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2\right)^3 \cdot f_{uuu} + \dots$$

берём только явные схемы

$w_1 = f(u)$

$w_2 = f(u + h\alpha_{21} w_1) = f(u + h\alpha_{21} f) =$

$= f + h\alpha_{21} f_u f + \frac{h^2}{2}\alpha_{21}^2 f_{uu} f f + \ldots$

$\hat{u} = u + h b_1 f + h b_2 f + h^2 b_2 (\alpha_{21} f_u f +$

$+ \frac{h}{2}\alpha_{21}^2 f_{uu} f f)$

$\hat{u} = u + hf(b_1 + b_2) + h^2 b_2 \alpha_{21} f_u f +$

$+ h^3 \frac{b_2 \alpha_{21}^2}{2} f_{uu} f f$

было

$\hat{u} = u + fh + f_u f \frac{h^2}{2} + (f_{uu} f f + \underline{f_u f_u f})\frac{h^3}{6}$

передать 2 стадиями нельзя

Итого:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 \alpha_{21} = \frac{1}{2} \\ \frac{b_2 \alpha_{21}^2}{2} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 \alpha_{21} = \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha_{21}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_{21} = \frac{2}{3} \\ b_2 = \frac{3}{4} \\ b_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$ – оптимальная схема

Другие варианты

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = \frac{1}{2} \\ a_{21} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ a_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

↑ особенно проста

1) $\hat{u} = u + h f\left(u + \frac{h}{2} f\right)$

2) $\hat{u} = u + \frac{1}{2} h \left(f(u) + f(u + hf)\right)$

Предиктор - корректор

I стадия - грубый прогноз

II стадия - уточнение

Правильно передаются первые 2 производные $\Rightarrow$ 2 порядок аппрокс.

3) $\hat{u} = u + \frac{h}{4}\left(f(u) + 3 f\left(u + \frac{2}{3} h f\right)\right)$

Тоже 2 порядок, но передает часть членов 3-го.

Неавтономный вариант

При автоном. - появляется переменная - время u^*

$$\frac{du^*}{dt} = f^* = 1$$

Рассмотрим добавку и u на k-той стадии

$$h \sum_{e=1}^{L} \alpha_{ke} w_e$$

w_e – вектор

$$\vec{w}_e = \begin{pmatrix} f_{e1}(\ldots) \\ f_{e2}(\ldots) \\ \vdots \\ f_e^*(\ldots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{e1} \\ f_{e2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

компоненты

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u^* \end{pmatrix} + h \sum_{e=1}^{L} \alpha_{ke} \begin{pmatrix} f_{e1} \\ f_{e2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для посл. строчки

$$u^* + h \sum_{e=1}^{L} \alpha_{ke} = t + h \sum_{e=1}^{L} \alpha_{ke}$$

Это приращение времени.

система => авт. система => рассматрели что происходит с переменной – временем => заменили u^* опять на t => получили неавт. вариант.

Например:

$$\hat{u} = u + h f\left(u + \frac{h}{2} f,\ t + \frac{h}{2}\right)$$

$$\hat{u} = u + \frac{h}{2}\left(f(u,t) + f(u + hf),\ t + h\right)$$

$$\hat{u} = u + \frac{h}{4}\left(f(u) + 3f\left(u + \frac{2}{3}hf\right), t + \frac{2}{3}h\right)$$

ВАЖНО! интерполяции.

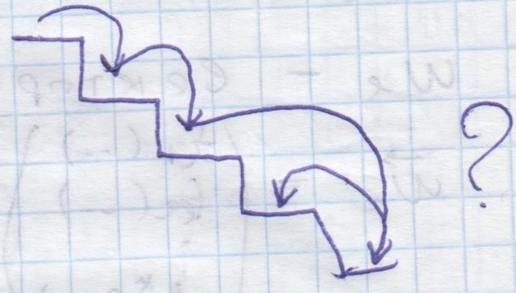
$0 \le a_k \le 1$

$0 \le b_k \le 1$

$0 \le \sum \alpha_{ke} \le 1$

$\alpha_{ke} \ge 0$

сдвиги не должны вылезывать за пределы интервала



!! вместо интерполяц. → экстраполяция !!

Схема 4-ого порядка (схема Кутты)

Матрица Бутчера

$$\alpha_{ke} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1/2 & 0 & \varnothing & \\ 0 & 1/2 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Нет вложен. схемы

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

! ПРОПУСТИ СТРАНИЦУ !

Самое важное её свойство - интерп. Далеко не все схемы обладают этим св-вом. ode45 (Дормана - Принца не инт.)

Автоматический выбор шага

!!! (лучше это в самом конце) !!!

1. На каждом шаге оценивается погрешность.
2. Сравнивается с допустимой
3. $\varepsilon < TOL$ – оставляем шаг без изменения или немного увелич.
4. $\varepsilon > TOL$ – уменьшаем шаг и пересчитываем.

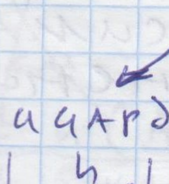
В результате получается адапт. сетка. Это „+“

Но погрешность далека от TOL из-за накопления ошибки.

Т. е. ошибка на n-ном шаге действует и на послед. шагах.

Оценка погрешности

Ричардсон



Влож. схема

Схема сост. из тех же стадий, но меньшего порядка

$$\hat{u} = u + \frac{h}{2}\left(f(u) + f(u + hf)\right) \text{ – осн.}$$

$$\hat{u} = u + h f(u) \text{ – влож.}$$

Важно, что не надо пересчит. $f(u)$ в других точках. Отличаются только вк.

~~МИНУ~~

" $-$ ": ~~на~~ метод не дает гарантированной оценки точности

ode45 — схема 5-го порядка с влож. схемой 4-го порядка.

Как можн. получить оценку? Глобально сгустить сетку

Порядок сходимости

p-того порядка аппроксимации обеспечивается выполнением уравнений порядка

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 \alpha_{21} = \frac{1}{2} \\ \alpha_{21} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

частный случай для двухстад. схемы.