Задача:

1) Реализовать Λx используя функцию spdiags (help spdiags)

2) Поставить условия Дирихле, модифицировав Λx

3) –||– Неймана, модифицировав Λx.

Дирихле: первая и посл. строка – нулевые

Неймана:
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & & & \emptyset \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \emptyset & & & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Лекция №11

Эллиптические уравнения

- Электростатика
- Давление газа в неоднор. силовом поле
- Стац. распределение тепла
- Прогиб мембраны

Предполагается стационарность задачи

Постановка задачи

$$\Delta u(\vec{r}) = -f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in G$$

$$u(\vec{r}) = \mu(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma$$

Начальных условий нет.

В неоднородной среде:

$$\operatorname{div}\left(k(\vec{r})\,\vec{\nabla} u(\vec{r})\right) = -f(\vec{r}),$$

$$k(\vec{r}) > 0, \quad \vec{r} \in G$$

$$u(\vec{r}) = \mu(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma$$

Рассмотрим так называемую эволюционную задачу

$$\frac{\partial U(\vec{r},t)}{\partial t} = \operatorname{div}(k\vec{\nabla} u) + f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in G, \quad t \geq 0$$

$$U(\vec{r},t) = \mu(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Gamma, \quad U(\vec{r},0) = U_0(\vec{r})$$

Найдём разность между эволюц. и стационарной задачами:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\left[U(\vec{r},t) - u(\vec{r})\right] = \operatorname{div}\left(k\vec{\nabla}\left(U(\vec{r},t) - u(\vec{r},t)\right)\right), \quad \vec{r} \in G}$$

$$\cancel{U(\vec{r},t) - u(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U(\vec{r},t) - u(\vec{r})\right) = \operatorname{div}\left(k\vec{\nabla}(U - u)\right)$$

$$U(\vec{r},t) - u(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma$$

Это последнее уравнение имеет произвольное начальное условие и нулевое граничное. Значит в силу диссипативности при $t \to \infty$ решение этого уравнения будет 0, а значит эволюц. задача даст решение стационарной.

Процесс стремления решения нестац. задачи к решению стац. называется установлением, а сам метод — счётом на установление.

Начальные данные формально произвольные, но лучше брать удовлетвор. граничному условию.

$\boxed{\text{Разностная схема}}$

Решаем в параллелепипеде

$G = [0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c]$

$k(\vec{r})$ — скаляр.

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + f(x, y, z)$$

|| Пространственных производных смешанного типа нет! || !!!

Возьмём в G произвольную неравном. сетку

$$\omega = \{ x_n,\ 0 \le n \le N;\ y_m,\ 0 \le m \le M;\ z_k,\ 0 \le k \le K \}$$

Пусть $h_{xn} = x_n - x_{n-1}$

$h_{ym} = y_m - y_{m-1}$

$h_{zk} = z_k - z_{k-1}$

$$(\Lambda_x u)_{nmk} = \frac{2}{h_{xn} + h_{x,n+1}} \left(k(x_{n+\frac{1}{2}}, y_m, z_k) \cdot \frac{u_{n+1,mk} - u_{nmk}}{h_{x,n+1}} - k(x_{n-\frac{1}{2}}, y_m, z_k) \cdot \frac{u_{nmk} - u_{n-1,mk}}{h_{xn}} \right)$$

Аналогично по y и z.

Решаем эволюц. - факт. схемой

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_z\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau} =$$

$$= (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z)u + f$$

Граничные условия:

1. По u:

$(\hat{u} - u)_{гр} = 0$

2. $\left[\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau}\right]_{гр.} = v_{гр.}$

Очевидно $v_{гр.} = 0$

3. $\left[\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\frac{\hat{u} - u}{\tau}\right]_{гр.} = w_{гр.}$

Также $\omega_{гр.} = 0$

Вопрос: как долго считать и какой нужен шаг по времени?

Возьмём не один шаг, а целый набор шагов τ_s, $1 \le s \le S$

Рассмотрим затухание k-той гармоники за все S шагов

$$R_k = \prod_{s=1}^{S} \rho_k(\tau_s) = \prod_{s=1}^{S} \frac{1 + \tau_s \lambda_k / 2}{1 - \tau_s \lambda_k / 2}, \quad 1 \le k \le N-1, \quad \lambda_k < 0$$

Рассмотрим числитель в пределе:

$$1 + \tau_s \lambda_k / 2 = 0$$

$$\tau_s = -\frac{2}{\lambda_k}$$

будем делать так: $\tau_1 = -\frac{2}{\lambda_1}$, $\tau_2 = -\frac{2}{\lambda_2}$ ... $\tau_{N-1} = -\frac{2}{\lambda_{N-1}}$

Проблема в том, что у нас нет всех этих λ_k.

Сделаем иначе: если известны границы спектра λ_1 и λ_{N-1}, то возьмём

$$\tau_1 \simeq -\frac{2}{\lambda_1} \qquad \tau_S \simeq -\frac{2}{\lambda_{N-1}} \qquad \boxed{\lambda - \text{отриц.!}}$$

Остальные τ расположим между ними.

Как?

Если брать фикс. шаг τ для всех, то оказывается, что наибольшее убывание будет при

$$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_S} \quad \text{или}$$

$$\ln \tau = \frac{1}{2}\ln \tau_1 + \frac{1}{2}\ln \tau_2 = \frac{\ln \tau_1 + \ln \tau_s}{2}$$

По аналогии поступим для набора шагов, т.е. расположим τ_i между τ_1 и τ_s равномерно в логарифм. масштабе.

$$\ln \tau_i = \ln \tau_1 + \frac{i-1}{s-1}\ln \frac{\tau_s}{\tau_1}$$

$$\tau_1 \simeq \frac{2}{\lambda_{min}} \qquad \tau_s = \frac{2}{\lambda_{max}}$$

Это логарифмический набор шагов.

Везде фигурируют неизвестные нам границы спектра.
Где их брать?

$\boxed{1-D}$ (интересен скорее методически)

$$\lambda_{min} \simeq \left(\frac{\pi}{\ell x}\right)^2 k_x$$

$$\lambda_{max} \simeq \frac{4k_x}{h_x^2}$$

Оценка точности

$$S = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Замечание: важно сделать все S шагов

$\varepsilon \sim 10^{-10}$; $N \sim 100-1000 \Rightarrow S \sim 50-75$

$\boxed{2-D}$

$$R_{ke} = \prod_{s=1}^{S} \frac{1+\tau_s\lambda_{xk}/2}{1-\tau_s\lambda_{xk}/2}\;\frac{1+\tau_s\lambda_{ye}/2}{1-\tau_s\lambda_{ye}/2}$$

Это можно рассматривать как произведение τ_S однотипных множ. и действовать по старой схеме

Выбираем самый малый возможный τ и самый большой:

$$\lambda_{min} = \min(|\lambda_{x1}|, |\lambda_{y1}|)$$

$$\lambda_{max} = \max(|\lambda_{x N_x - 1}|, |\lambda_{y N_y - 1}|)$$

Интересно, что в 2-D случае при близких границах спектра по 2 направлениям сходимость наступает за существенно меньшее число итераций.

Дело в том, что один ~~[illegible]~~ τ_S давит сразу 2 гармоники по разным направлениям.

Если, например, $u_x = u_y = const$ и $N_x = N_y$, то при $N \sim 100-1000$,

$\varepsilon = 10^{-10}$ $S \sim 25-30$.

$\boxed{3-D}$

Анализировать сложнее, но подход тот же:

$$\lambda_{min} = \min(|\lambda_{x1}|, |\lambda_{y1}|, |\lambda_{z1}|)$$

$$\lambda_{max} = \max(|\lambda_{x N_x - 1}|, |\lambda_{y N_y - 1}|, |\lambda_{z N_z - 1}|)$$

Что нужно для рассчетов с логарифм. набором шагов?

1. Нужны границы спектра по направлениям.

Оценки берём по формулам:

$$\lambda_{min} \approx \left(\frac{\pi}{d_x}\right)^2 K_x$$

$$\lambda_{max} \approx \frac{4K_x}{h_x^2}$$

Лучше λ_{min} брать поменьше, а λ_{max} – побольше. (раза в 3)

Во вне!

Такая перестраховка приводит к росту S, но оно невелико

Типично $\ln \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \simeq 9-14$

После расширения $\ln \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \approx 11-16$

т. е. рост примерно на 20%.

2. Оцениваем S по формуле

$$S = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

— max и min по всем 3 направлениям! (по модулю)

Итерационные методы

Для сложных задач (крив. области, смешан. произв., несамосопр. задачи, высокий порядок) рассмотр. выше метод не работает.

В общем виде схемы к таким задачам имеют вид

$A\vec{u} = \vec{b}$, $A = \{a_{im}\}$, $\vec{b} = \{b_i\}$

$M \sim N^{\nu}$, ν - разм. простр.

$A \sim M \times M$.

A - сильно разрежена.

$\boxed{A\vec{u} \text{ - дешёвая операция!!!}}$

~~[illegible]~~

Эффективные методы

$\swarrow$ сопр. градиенты

$\downarrow$ сопр. невязки

$\searrow$ метод Крейга

Идея:

берём квадратичную форму

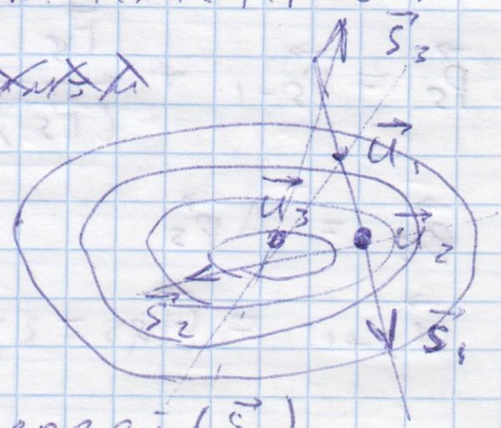
$\Phi(\vec{u}) = \sum\limits_{ij} u_i u_j a_{ij}$ $\quad i, j \in 1..M$

В общем случае она описывает пов-е.

функции общего вида $F(\vec{u})$ вблизи экстремума ($\vec{\nabla} F = 0$ в этой точке).

Берём $\vec{u}_1 \in R_m$ — произв. нач. прибл.

~~Вдоль $\vec{u}_1$ ищем минимум~~



Проводим прямую через $\vec{u}_1$ и вдоль неё ищем минимум.

Получаем $\vec{u}_2$.
Строим прямую $\perp$ первой ($\vec{S}_1$)
$\vec{S}_2 \perp \vec{S}_1$

В плоскости $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ вновь ищем min
Получаем $\vec{u}_3$. Проводим $\vec{S}_3 \perp \vec{S}_1$ и $\vec{S}_3 \perp \vec{S}_2$
Опять ищем min. и т.д. ...

За M шагов строится полный базис и $M+1$ шаг даёт точное решение. Это исчерпывание.

Но в многомерье M очень велико поэтому ставят обычное ε-условие на погрешность.

Сопряжённые
градиенты

Берём A из $A\vec{u} = \vec{b}$. Строится некоторая кв. форма, имеющая min при $A\vec{u} = \vec{b}$. Впрочем явно $\varphi(\vec{u})$ мы не строим.

Метод без вывода:

$$\vec{r}_s = \begin{cases} A\vec{u}_s - \vec{b} & s=1 \\ \vec{r}_{s-1} - \vec{q}_{s-1} / (\vec{q}_{s-1}, \vec{p}_{s-1}) & s = 2,3,\dots \end{cases}$$

$$\vec{p}_s = \vec{p}_{s-1} + \frac{\vec{r}_s}{(\vec{r}_s, \vec{r}_s)}$$

$\vec{r}_s$ – невязка
$\vec{p}_s$ – напр. спуска

$$\vec{q}_s = A\vec{p}_s$$

$$\vec{u}_{s+1} = \vec{u}_s - \frac{\vec{p}_s}{(\vec{q}_s, \vec{p}_s)}$$

берём $\vec{p}_0 = \vec{0}$ и произвольно $\vec{u}_1$

При $s=1$ – 2 умнож. на A

$s \geq 2$ – 1 умнож на A.

Крутим, до тех пор, пока $\|\vec{r}_s\|_{L_2} < \varepsilon$ – условие на невязку!

$$\|\vec{u}_s - \vec{u}_{точн.}\|_{L_2} \leq \varepsilon \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$ – оценка

работает, когда $A = A^H > 0$ или
$A = A^H < 0$

A – знакоопределенная!! и эрмитова

$\boxed{\text{Сопряженные невязки}}$

~~AXXX~~ $A = A^H$ не может быть знаконеопределенной.

$\vec{p}_0 = \vec{0}$

$\vec{u}_1$ – произвольно

$$\vec{r}_s = \begin{cases} A\vec{u}_s - \vec{b} & s=1 \\ \vec{r}_{s-1} - \dfrac{\vec{q}_{s-1}}{(\vec{q}_{s-1}, \vec{p}_{s-1})} & s=2,3,\dots \end{cases}$$

$$\vec{g}_s = A\vec{r}_s$$

$$\vec{p}_s = \vec{p}_{s-1} + \frac{\vec{r}_s}{(\vec{r}_s, \vec{g}_s)}$$

$$\vec{q}_s = \begin{cases} A\vec{p}_s, & s=1 \\ \vec{q}_{s-1} + \dfrac{\vec{g}_s}{(\vec{p}_s, \vec{g}_s)} & s=2,3,\dots \end{cases}$$

$$\vec{u}_{s+1} = \vec{u}_s - \vec{p}_s \frac{(\vec{r}_s, \vec{q}_s)}{(\vec{q}_s, \vec{q}_s)}$$

$$\boxed{\text{Метод Крейга}}$$

Всеядный, но более медленный.

$\vec{p}_0 = \vec{0}$

$\vec{u}_1$ - произв

$$\vec{r}_s = A\vec{u}_s - \vec{b}$$

$$\vec{p}_s = \vec{p}_{s-1} + \frac{\vec{r}_s}{(\vec{r}_s, \vec{r}_s)}$$

$$\vec{q}_s = A^H \vec{p}_s$$

$$\vec{u}_{s+1} = \vec{u}_s - \frac{\vec{q}_s}{(\vec{q}_s, \vec{q}_s)}$$

Есть иной подход, как бороться с произвольными матрицами берём $A \times A^H$ и исп. ~~минимальн.~~ р сопр. невязки. Работает даже получше, чем метод Крейга.

Оценки сходимости

Сопр. невязки и градиенты:

$$S = \underline{O}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}\right) \simeq \underline{O}\left(\cancel{N_x}\right)$$

~~числа узлов~~ ~~в одном~~ ~~из~~ ~~направления~~

Крейг:

$$S = \underline{O}\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)$$

Расчёт останавливаем при выходе нормы невязки на уровень ошибки округления.

Семинар №11

2-р теплопроводность.

Решаем 2-р задачу в прямоугольнике с условиями Дирихле на границе.

$$\underbrace{\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_x\right)}_{P_x}\underbrace{\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_y\right)}_{P_y}\Delta u = \Lambda_x u + \Lambda_y u$$

$$\hat{u} = u + \tau\Delta u$$