Теоретический материал к семинару №5

Необходимо решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(k_0 + k_1 u^2\right)\dfrac{du}{dx}\right) = f(x) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

где $[a; b]$ - отрезок, на котором ищется решение.

Для этой задачи можно написать следующую разностную схему:

$$\begin{cases} (u_{n+1} - u_n)\left(k_0 + k_1 \dfrac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{2}\right) - (u_n - u_{n-1})\left(k_0 + k_1 \dfrac{u_n^2 + u_{n-1}^2}{2}\right) - h^2 f_n = 0 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Здесь h - шаг равномерной сетки, N - число интервалов сетки. Данная система уравнений является нелинейной и решать ее лучше всего методом Ньютона.

Многомерный метод Ньютона для задачи

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \tag{3}$$

является итерационным и выглядит так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{x}_s} \mathbf{\Delta x}_s = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_s) \\ \mathbf{x}_{s+1} = \mathbf{x}_s + \mathbf{\Delta x}_s \end{cases}, \tag{4}$$

где $\dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{x}_s}$ - матрица первых производных. В качестве условия окончания итераций можно взять

$$\|\mathbf{\Delta x}_s\| < \varepsilon, \tag{5}$$

где $\varepsilon \approx 10^{-12}$ для 64-разрядных вычислений. Сходимость метода сильно зависит от выбранного начального приближения. Вблизи решения сходимость квадратичная, вдали от него ее может вообще не быть. Одно из возможных решений – использовать вектор из случайных чисел. В случае неудачи можно сгенерировать еще один и повторить расчет, пока расчет не получится.

Задачи к семинару №5

Уточним условие. Отрезок, на котором следует искать решение - $[-1;1]$, число интервалов сетки $N = 128$, $k_0 = 1$, $k_1 = 0.05$, в качестве начального приближения в данном случае удобно брать нулевой вектор. Функция $f(x)$ в правой части задается так:

Python:

```python
import numpy as np

def ff(x):
    return 100 * np.exp(-np.square(10 * (x - 0.5)))
```

MATLAB:

```matlab
function y = ff(x)
    y = 100*exp(-(10*(x-0.5)).^2);
end
```

Построить график решения.