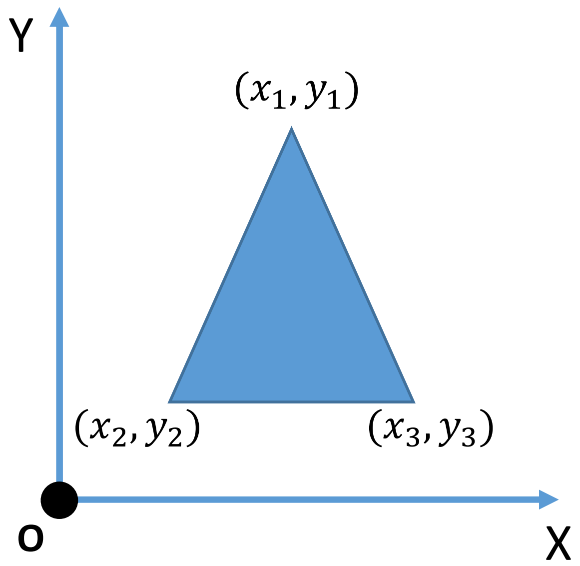
Transformaciones

Dr. Ivan Sipiran

El mundo en 3D

- Hasta ahora hemos trabajado en 2D.
- Sistema coordenado de dos ejes

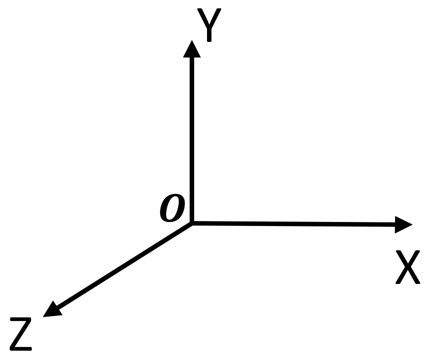


- Objetos se representan como conjuntos de vértices con dos coordenadas

- Nuestro mundo es 3D

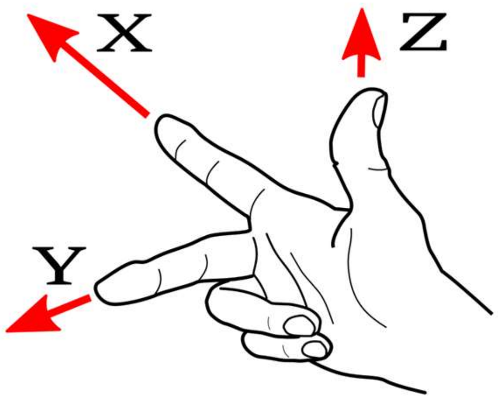
El mundo en 3D

- Necesitamos un sistema de coordenadas de referencia



- Tres vectores ortogonales entre sí que parten de un origen O
- Un sistema de coordenadas puede estar orientado según mano derecha o mano izquierda

- Nosotros usamos el sistema de mano derecha



Más formalmente, sea $V_1, V_2\ y\ V_3$ los vectores que definen el sistema

- Si $(V_1 \times V_2) \cdot V_3 > 0$, mano derecha
- Si $(V_1 \times V_2) \cdot V_3 < 0$, mano izquierda

Coordenadas homogéneas

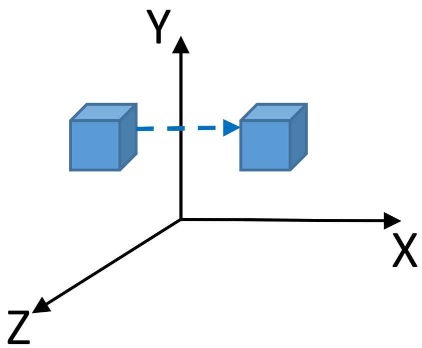
- Para facilitar las operaciones sobre los puntos en 3D, introducimos las coordenadas homogéneas
- Un punto en 3D se representa como un vector columna de 4 componentes

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

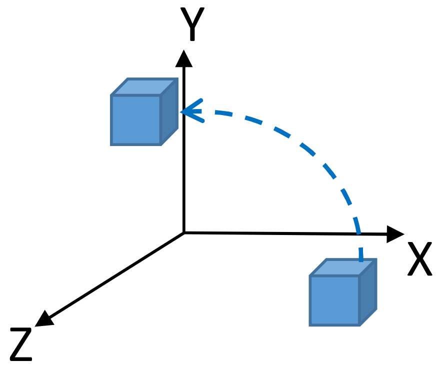
- Esto facilita el trabajo con transformaciones, pues permite generalizar cualquier transformación a una operación común: multiplicación de matrices.

Transformaciones

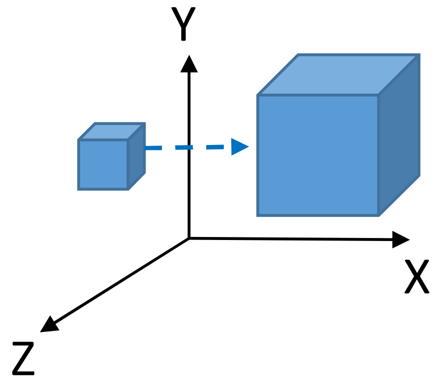
- Transformaciones en 3D
  - Aspecto clave en computación gráfica: animaciones
  - Hay tres transformaciones básicas



Traslación



Rotación

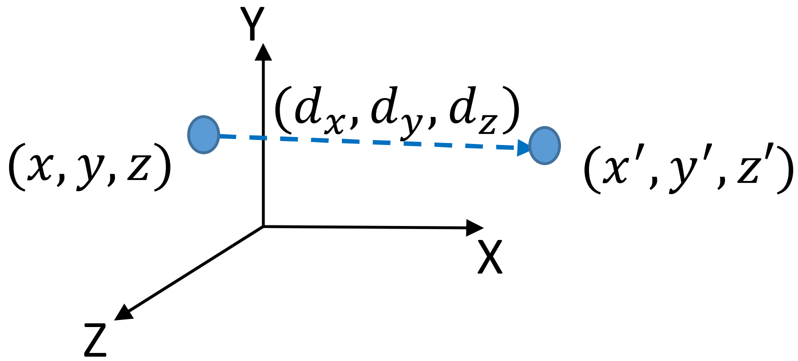


Escalamiento

- Transformar un objeto es lo mismo que transformar cada uno de sus puntos

Traslación

- **Objetivo:** Dado un punto $P(x, y, z)$ se puede mover en cualquiera de tres direcciones d_x, d_y, d_z



- Al mover el punto en las direcciones, tenemos las ecuaciones

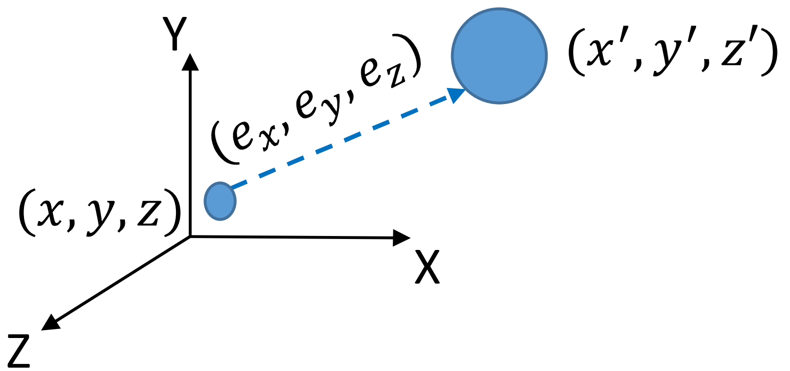
$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$
$$z' = z + d_z$$

$$\xrightarrow{T(d_x, d_y, d_z)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escalamiento

- **Objetivo:** Dado un punto $P(x, y, z)$ escalarlo en un factor e_x, e_y, e_z



- En notación matricial

$$x' = e_x x$$

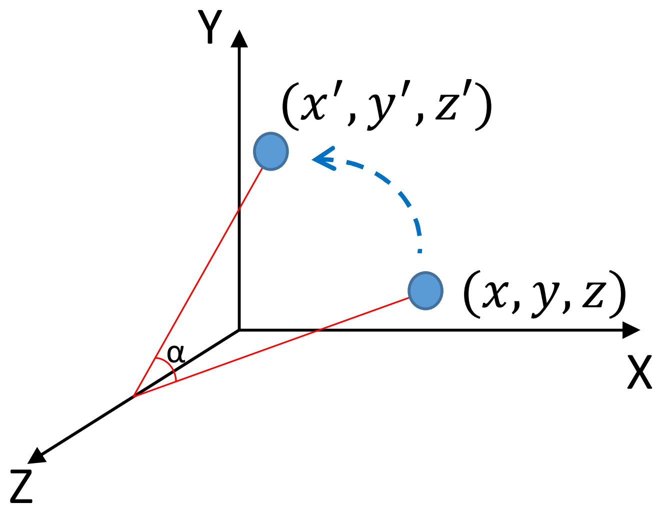
$$y' = e_y y$$

$$z' = e_z z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E(e_x, e_y, e_z)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

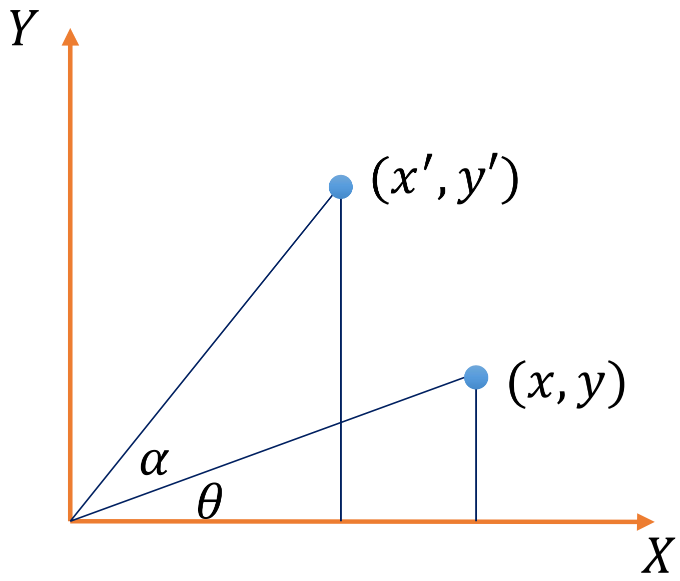
Rotaciones

- **Objetivo:** Dado un punto 3D y un ángulo, rotarlo un ángulo α alrededor del eje Z



- Nos damos cuenta que es lo mismo que hacer rotación en plano XY

Rotaciones



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z(\alpha)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- De la misma forma elaborar las derivaciones para $R_y\,(\alpha)$ y $R_x(\alpha)$

Transformaciones

- Cómo se aplica la transformación a todos los puntos de un objeto?

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1'} & \cdots & \boldsymbol{x_n'} \\ \boldsymbol{y_1'} & \ddots & \boldsymbol{y_n'} \\ \boldsymbol{z_1'} & \cdots & \boldsymbol{z_n'} \\ \boldsymbol{1} & \cdots & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \cdots & \boldsymbol{x_n} \\ \boldsymbol{y_1} & \ddots & \boldsymbol{y_n} \\ \boldsymbol{z_1} & \cdots & \boldsymbol{z_n} \\ \boldsymbol{1} & \cdots & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

- $$P' = T \times P$$

- Esta operación se puede realizar fácilmente en el GPU a través de las variables ***uniform***

Composición de Transformaciones

- Ejemplo: rotar un objeto alrededor de su centro de gravedad.
- Se puede realizar a través de una secuencia de transformaciones básicas.
- Secuencia de transformaciones
  - Mover el objeto de tal forma que el centro de gravedad caiga en el origen

$$P' = T(-c_x, -c_y, -c_z) \times P$$

  - Rotar el objeto alrededor del Eje X
  - Mover el objeto resultante a su posición original

$$P'' = R_x(\alpha) \times P'$$

$$P''' = T(c_x, c_y, c_z) \times P''$$

Composición de Transformaciones

- Si el número de puntos en el objeto es muy grande, realizar las operaciones una por una puede ser un proceso costoso.
- Todas las operaciones pueden escribirse como

$$P' = T(c_x, c_y, c_z) \times R_x(\alpha) \times T(-c_x, -c_y, -c_z) \times P$$

- Es fácil darse cuenta que las transformaciones pueden operarse entre ellas (ya que son matrices de 4 x 4) y de esa forma obtener una sola matriz de transformación.

$$P' = Q \times P$$

$$Q = T(c_x, c_y, c_z) \times R_x(\alpha) \times T(-c_x, -c_y, -c_z)$$

Preguntas?