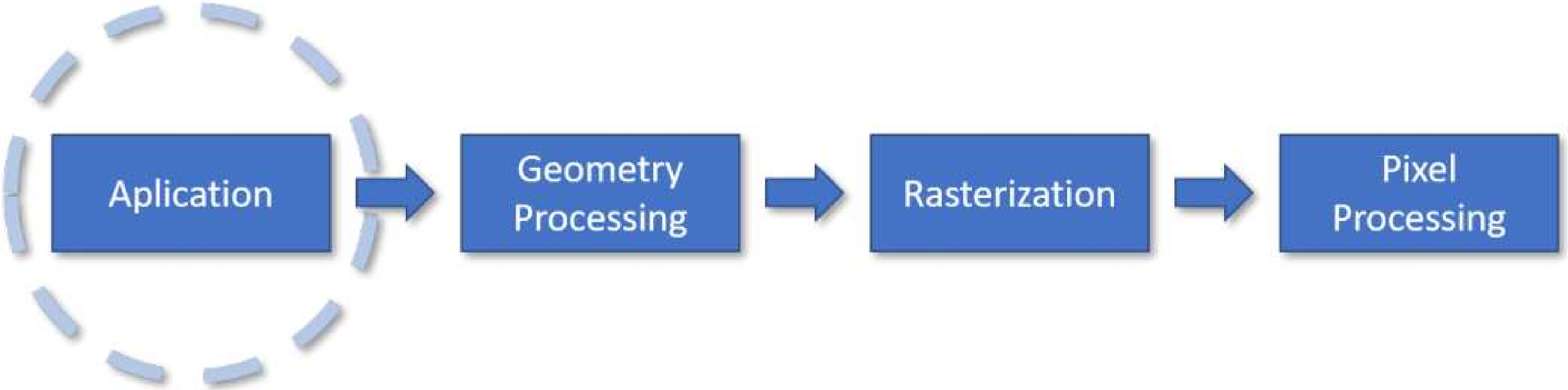
# Curvas y superficies parámetricas

Dr. Ivan Sipiran

# Graphics Rendering Pipeline



# Introducción

- Cómo movemos un objeto a lo largo de un camino determinado?
- Esto incluye cambiar la posición y la orientación

# Introducción

- Cómo movemos un objeto a lo largo de un camino determinado?
- Esto incluye cambiar la posición y la orientación
- Para la orientación es posible usar rotaciones
- Nos concentramos en el caso de cambiar exclusivamente la posición.

# Curvas paramétricas

- Una curva paramétrica $p(t)$ asigna un valor vectorial o escalar (según el propósito) para cada valor del parámetro $t$.
- El parámetro $t$ puede pertenecer a cualquier intervalo $[t_a, t_b]$ donde $p(t)$ generará puntos continuos.
- En particular, estamos interesados en encontrar una curva paramétrica que interpole o aproxime un conjunto definido de puntos

# Ejemplos de casos de uso

- Trayectorias de objetos, cámaras o luces
- Modelación de objetos curvos como pelo, cuerdas, etc.
- Modelación de superficies suaves. Ejemplo: rostro, piel, autopistas, etc.
- Imágenes vectoriales
- Dibujos animados
- Fonts
- Etc.

# Ejemplo

Nalu, NVIDIA Corporation

# Curvas cúbicas

- Balance entre simplicidad y flexibilidad
- Ampliamente utilizadas en aplicaciones de computación gráfica

$$Q(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$$

- $a, b, c, d$ son vectores constantes en $\mathbb{R}^3$
- $Q(t)$ es el punto en la curva correspondiente al parámetro $t$.

# Curvas cúbicas – Formulación matricial

- Escribiendo las ecuaciones por componente

$$Q_x = a_x + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3$$
$$Q_y = a_y + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3$$
$$Q_z = a_z + b_z t + c_z t^2 + d_z t^3$$

- Y de forma matricial tenemos

$$Q(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}}_{T(t)}$$

# Curvas cúbicas – Formulación matricial

- Luego, para una curva cúbica $Q(t) = CT(t)$, su derivada está dada por

$$Q'(t) = C\frac{d}{dt}T(t) = C\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

- Note que la matriz $C$ no cambia
- La derivada nos entrega un vector tangente a la curva

# Camino curvilíneo

- Un largo camino curvilíneo se puede modelar como una serie de pequeños trozos cúbicos
- Dichos trozos están unidos en sus extremos y cumplen ciertas condiciones
- Continuidad paramétrica: Dos curvas tienen continuidad $C^1$ si sus vectores tangentes en sus extremos son iguales en magnitud, dirección y sentido. Se dice que son $C^n$ continuas si las primeras $n$ derivadas son iguales en magnitud, dirección y sentido.
- Continuidad geométrica: De manera análoga, se habla de continuidad geométrica $G^n$, si las curvas sólo poseen sus $n$ primeras derivadas iguales en dirección y sentido, pero NO necesariamente en magnitud.

# Restricciones

- Estudiaremos caminos curvos con determinadas condiciones
- Como una curva cúbica tiene 4 coeficientes, necesitamos 4 restricciones
- Sean $g_1, g_2, g_3$ y $g_4$ vectores en $\mathbb{R}^3$ que representan estas restricciones

$$\begin{aligned} Q(t) = & (a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3) g_1 \\ & + (a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3) g_2 \\ & + (a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3) g_3 \\ & + (a_4 + b_4 t + c_4 t^2 + d_4 t^3) g_4 \end{aligned}$$

# Restricciones

- Lo que de manera matricial queda

$$Q(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}}_{T(t)}$$

- La matriz $G$ de 3x4 se conoce como la matriz de geometría
- La matriz $M$ de 4x4 se conoce como la matriz base

Estudiamos distintas clases de curvas cúbicas, cada una con matrices $M$ y $G$ específicas.

# Curvas de Hermite

# Curvas de Hermite

- Una curva de Hermite se define por sus dos puntos extremos $P_1$ y $P_2$ y las direcciones tangentes en ellos $T_1$ y $T_2$

$$H(t) = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix} M_H \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

- Necesitamos determinar la matriz $M_H$

# Determinando $M_H$

- Imponiendo las 4 restricciones de continuidad, en el valor y la geometría

$$H(0) = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix} M_H \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = P_1$$
$$H(1) = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix} M_H \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = P_2$$
$$H'(0) = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix} M_H \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = T_1$$
$$H'(1) = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix} M_H \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = T_2$$

# Determinando $M_H$

- De forma matricial, sería

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix} M_H \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix}$$

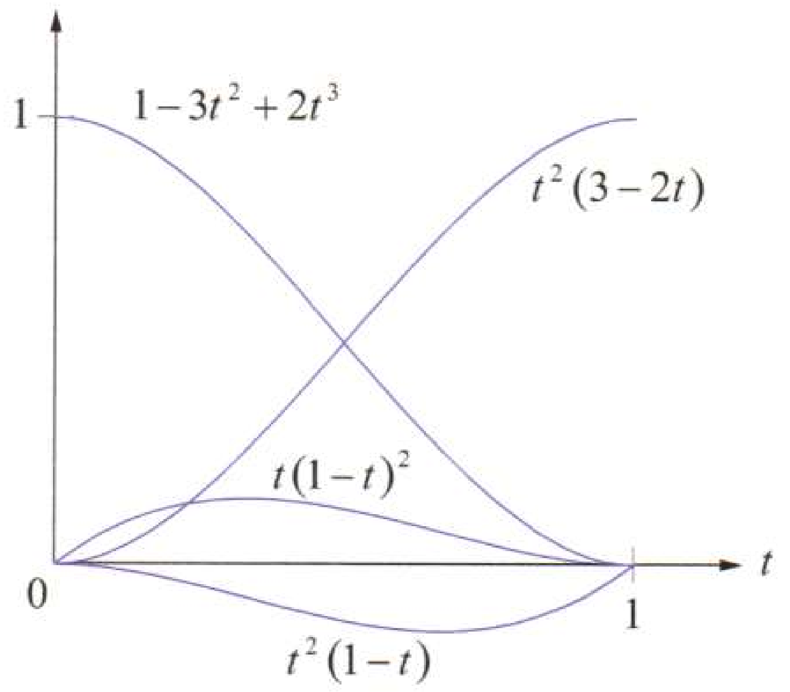
- Para cumplir la igualdad, debe cumplirse que

$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

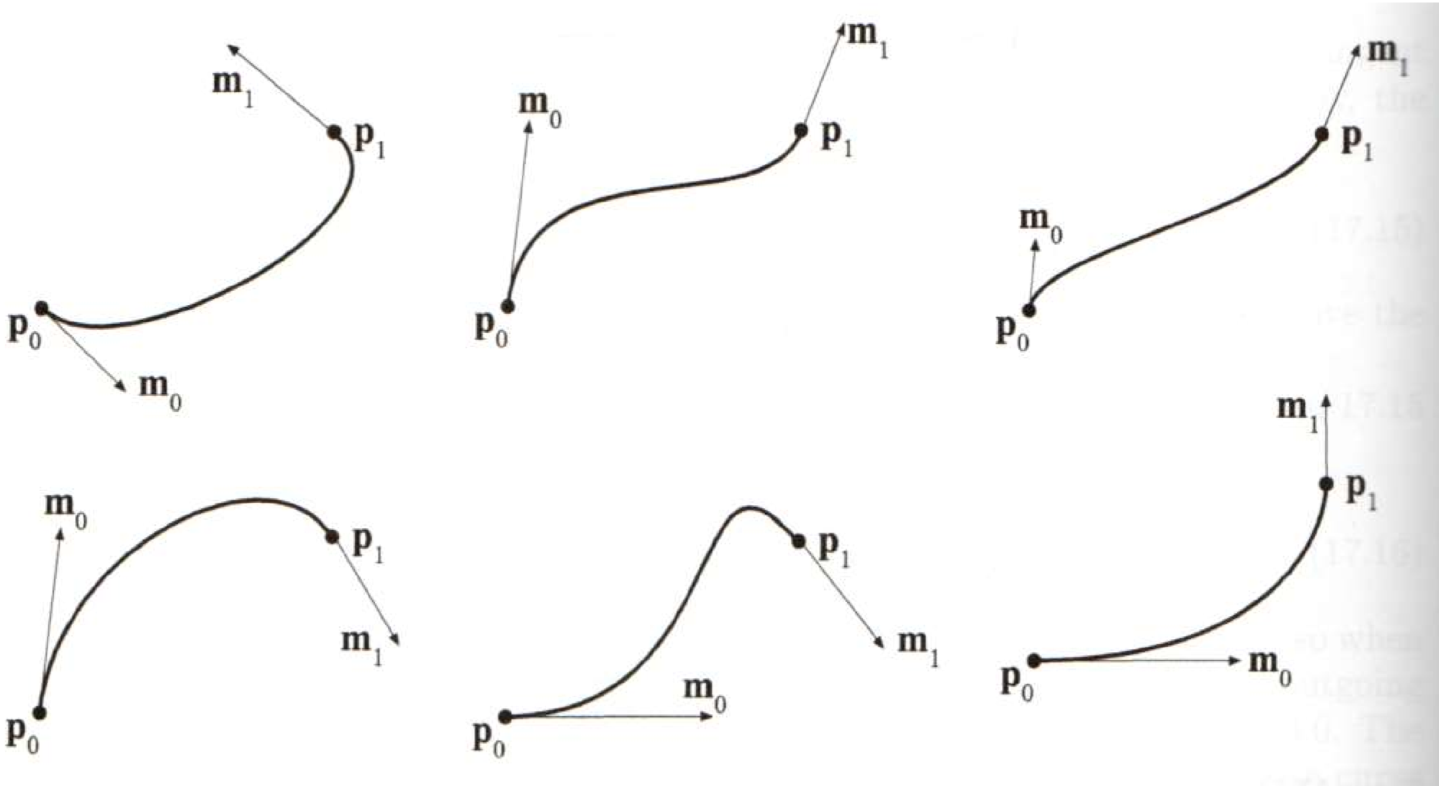
# Curvas de Hermite

- $M_H$ provee los coeficientes de mezcla para ponderar correctamente las restricciones geométricas. Luego, la curva de Hermite queda como

$$H(t) = (1 - 3t^2 + 2t^3)P_1 + t^2(3 - 2t)P_2 + t(t-1)^2 T_1 + t^2(t-1) T_2$$



# Ejemplos de curvas de Hermite



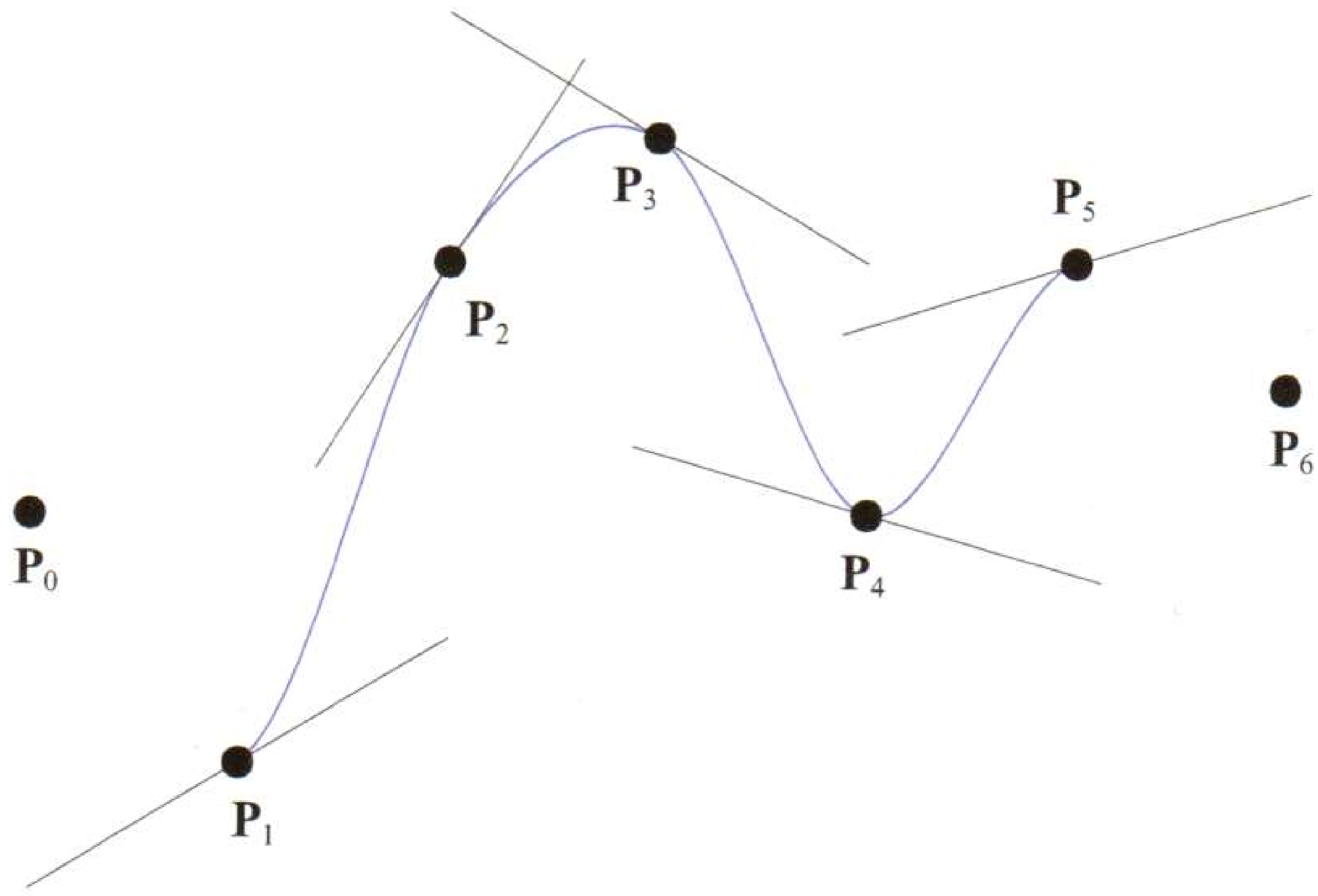
# Splines de Catmull-Rom

# Splines de Catmull-Rom

- Una spline de Catmull-Rom interpola el conjunto ordenado de puntos $P_0, P_1, \dots, P_n$ utilizando una curva cúbica
- Utiliza una fomulación por trozos similar a Hermite
- Añade la restricción de que las tangentes en los puntos son paralelas a la recta que une los puntos vecinos

$$T_i = \frac{1}{2}(P_{i+1} - P_{i-1})$$

# Splines de Catmull-Rom



# Deducción

- Cada trozo de curva puede ser expresado como una curva Hermite

$$C_i(t) = \begin{bmatrix} P_i & P_{i+1} & T_i & T_{i+1} \end{bmatrix} M_H \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

- La restricción de paralelismo añadida exige que

$$\begin{bmatrix} P_i & P_{i+1} & T_i & T_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i-1} & P_i & P_{i+1} & P_{i+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

# Deducción

- Luego, como impusimos una curva Hermite

$$M_{CR} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finalmente, se tiene

$$C_i(t) = \begin{bmatrix} P_{i-1} & P_i & P_{i+1} & P_{i+2} \end{bmatrix} M_{CR} T(t)$$

- La curva completa se define por trozos
- El primer y último punto quedan fuera de la interpolación, se utilizan sólo para establecer las direcciones tangenciales.

# Curvas de Bézier

# Curvas de Bézier

- Inventadas paralelamente por Bézier y Casteljau
- Bézier publicó primero, pero Casteljau escribió su reporte técnico antes
- Ambos trabajaban en la industria automotriz

# Curvas de Bézier

- Una curva de Bézier se define para un polinomio de grado $n$

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) P_k$$

- Los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_n$ son conocidos como puntos de control
- Las funciones de mezcla $B_{n,k}(t)$ son los polinomios de Bernstein definidos como

$$B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# Curvas de Bézier

- El primer y el último punto de control son interpolados
- Los puntos de control intermedios son aproximados
- Los polinomios de Bernstein pueden ser calculados por la siguiente recursión

$$B_{n,k}(t) = (1-t)B_{n-1,k-1} + tB_{n-1,k}$$

$$B_{0,0} = 1; \quad B_{n,k} = 0 \quad si \quad k < 0 \quad o \quad k > n$$

- Esta recursión se asemeja al triángulo de Pascal

# Curvas de Bézier

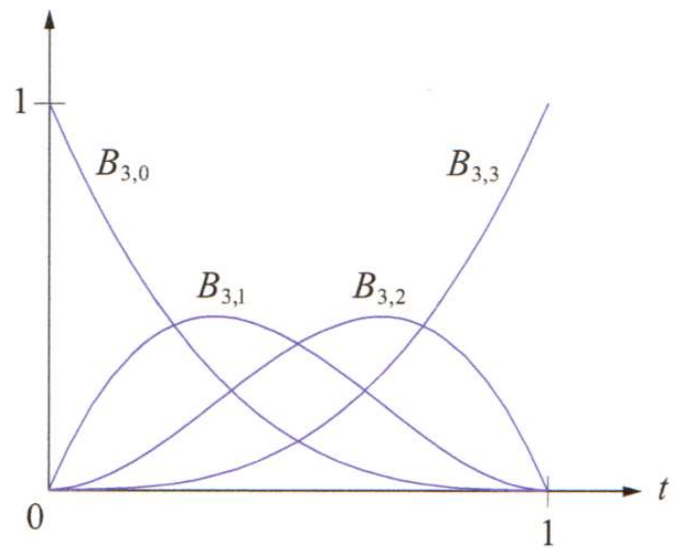
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & 1 \arrow[dl, "(1-t)"'] \arrow[dr, "t"] & & & \\
 & & (1-t) \arrow[dl, "(1-t)"'] \arrow[dr, "t"] & & t \arrow[dl, "(1-t)"'] \arrow[dr, "t"] & & \\
 & (1-t)^2 \arrow[dl, "(1-t)"'] \arrow[dr, "t"] & & 2t(1-t) \arrow[dl, "(1-t)"'] \arrow[dr, "t"] & & t^2 \arrow[dl, "(1-t)"'] \arrow[dr, "t"] & \\
(1-t)^3 & & 3t(1-t)^2 & & 3t^2(1-t) & & t^3
\end{tikzcd}
$$

# Curvas cúbicas de Bézier

- Las curvas cúbicas de Bézier utilizan 4 puntos como restricciones
- La ecuación queda

$$
\begin{aligned}
B(t) &= \sum_{k=0}^{3} B_{3,k}(t) P_k \\
&= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3
\end{aligned}
$$

- Los polinomios son



# Curvas cúbicas de Bézier

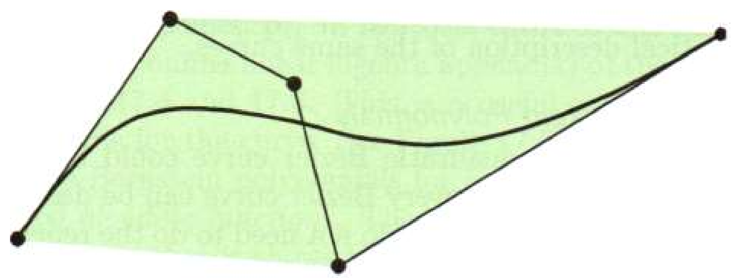
$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

- Reorganizando los términos e identificando la matriz geométrica $G_B = [P_0, P_1, P_2, P_3]$, la matriz base queda de la forma

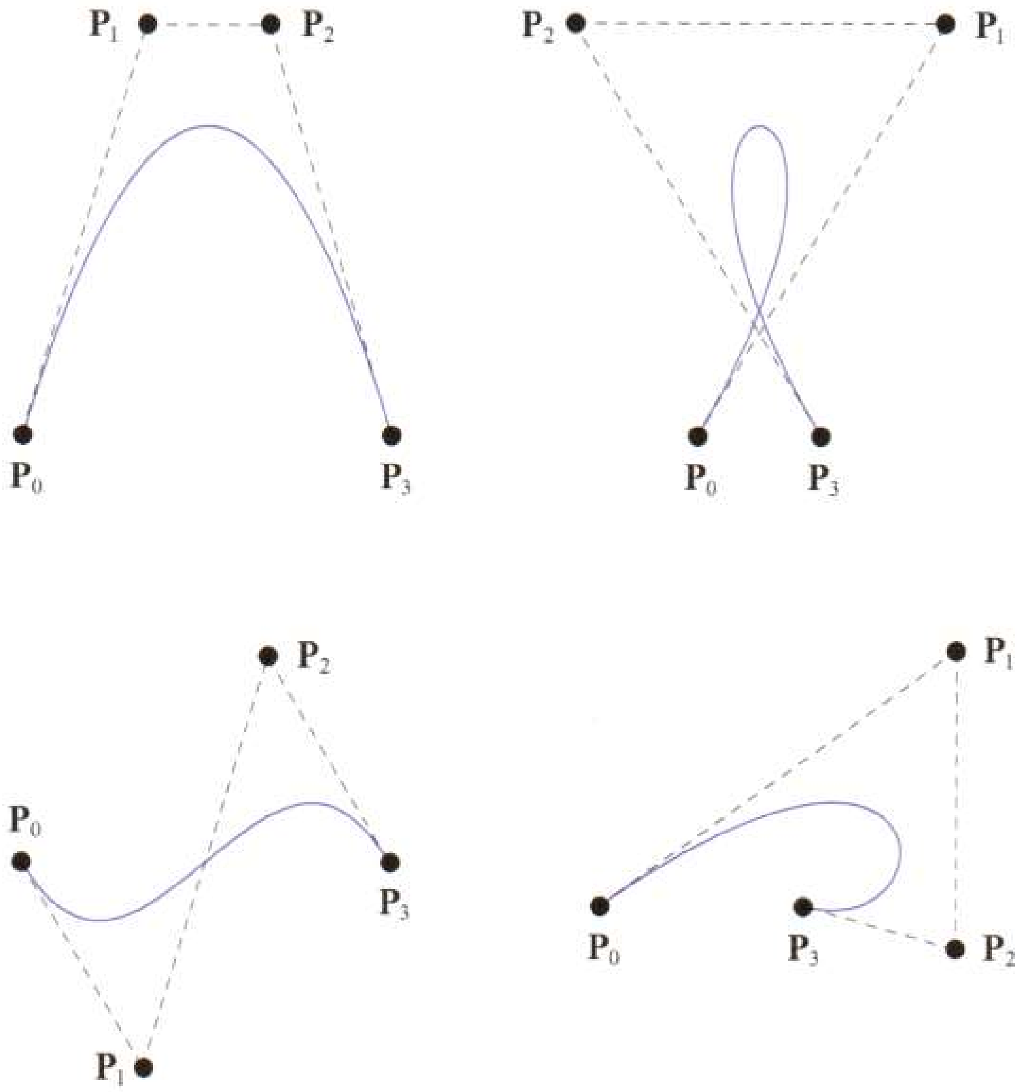
$$B(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}}_{G_B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}}_{T(t)}$$

# Contenido de la cerradura convexa

- Los polinomios de Bernstein suman 1 para todos los valores de $t$, Es decir, $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) = 1$
- La curva de Bézier está completamente contenida en la cerradura convexa de los puntos de control
- La cerradura convexa es el polígono más pequeño que contiene los puntos de control
- Esto es consecuencia de que los polinomios suman la unidad y $t$ pertenece al intervalo $[0,1]$



# Ejemplos de curvas de Bézier



# Conexión entre Bézier y Hermite

- Ambos tipos de curva, en su nivel más básico, corresponden a polinomios de grado 3.
- La derivada en $t = 0$ y $t = 1$ es:

$$B'(0) = 3(P_1 - P_0)$$
$$B'(1) = 3(P_3 - P_2)$$

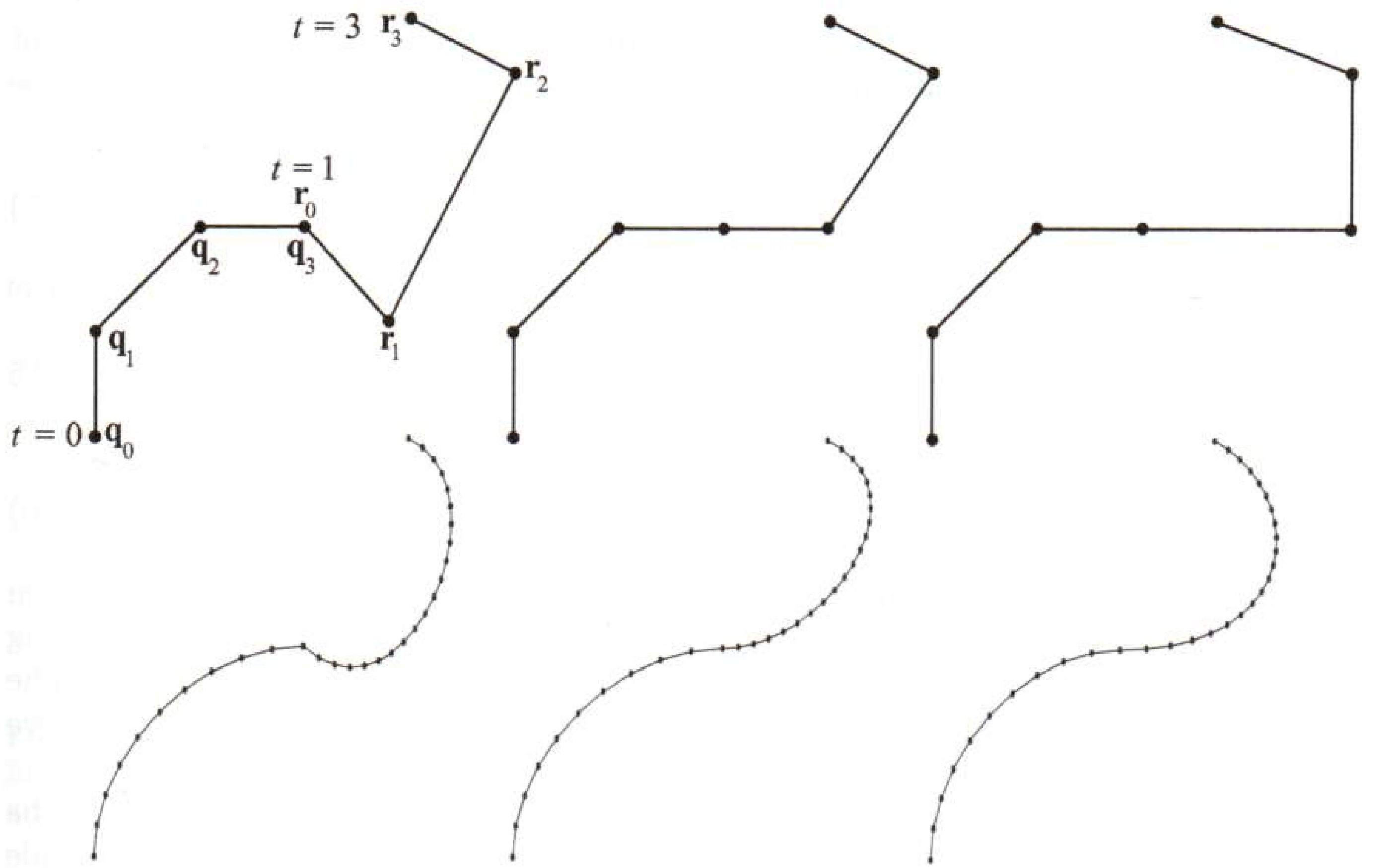
- Para una curva de Hermite, conocíamos las tangentes $T_0$ y $T_3$ en los puntos extremos $P_0$ y $P_3$

$$P_1 = P_0 + \frac{T_0}{3}$$
$$P_2 = P_3 - \frac{T_3}{3}$$

# Continuidad de curvas de Bézier

- Cómo conectamos dos curvas cúbicas de Bézier para lograr curvas de mayor complejidad?
- Igualar el último punto de control de una curva con el primer punto de control de la segunda
- Esto se conoce como una juntura (joint)
- Esta unión no es suave, lo que genera un problema
- Por lo que se necesitan restricciones más complejas

# Piecewise Bézier



# Piecewise Bézier

- Llamemos $p(t)$ a la curva de Bézier por trozos que une las curvas de Bézier definidas por los puntos de control $q_i$ y $r_i$ para $i = 0,1,2,3$
- Se desea que $p(0) = q_0, p(1) = q_3 = r_0$ y que $p(2) = r_3$
- Hemos utilizado $t \in [0,1]$ para generalizar, la segunda curva utiliza el siguiente cambio de variable

$$t' = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

- Donde $t_1$ y $t_2$ marcan los límites del intervalo asociado a la curva de Bézier en la que nos movemos
- Notar que intervalo $[t_1, t_2]$ no necesariamente es unitario, permitiéndonos curva de distinto largo.

# Piecewise Bézier

- Se sabe que la tangente en el primer punto es paralela a $q_1 - q_0$ y que la tangente en el último punto es paralela a $q_3 - q_2$
- Para unir dos curvas de Bézier podemos imponer que los puntos de control describan la misma dirección tangencial en el punto de juntura, esto es

$$r_1 - r_0 = c(q_3 - q_2) \quad c > 0$$

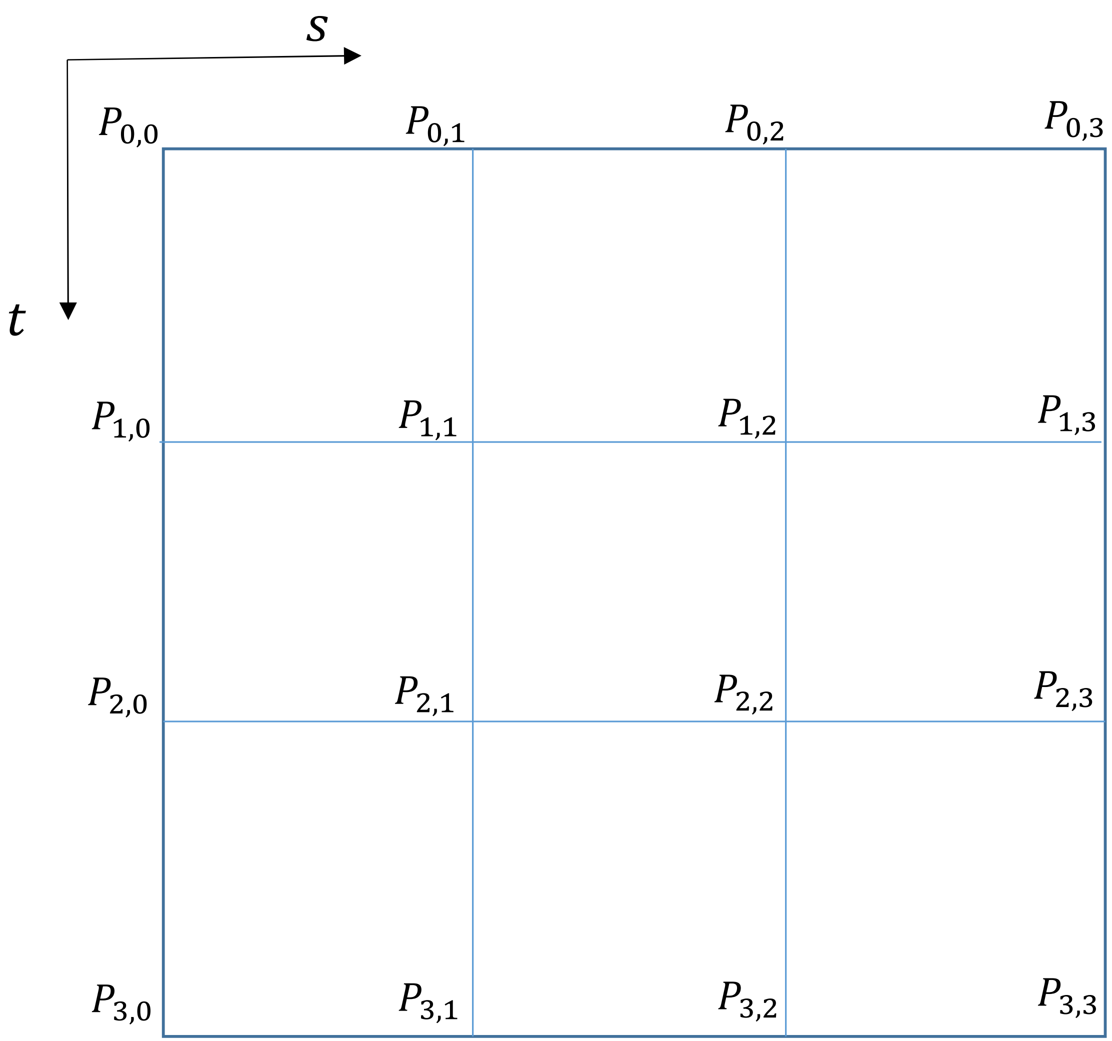
- Con esto se obtiene la misma dirección y sentido de las tangentes, pero las magnitudes no son necesariamente las mismas
- La magnitud de las tangentes se pueden igualar si imponemos

$$c = \frac{t_2 - t_1}{t_1 - t_0}$$

# Superficies de Bézier

- Las curvas se obtienen al definir un parámetro $t$. Curvas unidimensionales requieren de un solo parámetro.
- Por generalización, una superficie requiere de dos parámetros $s$ y $t$.
- Cada parámetro funciona en una determinada dirección. Al formar n dominio bidimensional, los dos parámetros permiten formar una superficie.
- Ahora se requiere 16 puntos de control: formando una malla de 4x4, con 4 puntos por cada lado de la parametrización.

# Superficies de Bézier




- Definir matriz de puntos de control
- Por cada posible valor del parámetro $s$, calcular una curva en la dirección de $t$
- Para un determinado par de parámetros $(s, t)$ se calcula un punto 3D mediante la extensión de la definición de curvas

$$\mathrm{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{i,j}$$

donde

$$B_i^3(u) = \binom{3}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$