Diferencias Finitas para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Dr. Ivan Sipiran

Qué es una ecuación diferencial?

- Una ecuación donde la incógnita es una función
- Se utilizan para modelar procesos
  - La derivada modela las variaciones de la función respecto de una variable
  - La segunda derivada modela la variación de las variaciones de una función
  - Etc.

Aproximando una derivada

- Una primera aproximación es reemplazar $u'(x)$ por

$$D_+u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x})}{h}$$

- Para un valor de h pequeño
- Esta aproximación viene motivada por la definición basada en el límite cuando $h \to 0$
- Notar que esta aproximación corresponde a la pendiente de la recta que interpola los valores en $\bar{x}$ y $\bar{x} + h$

Aproximando una derivada

- También es posible aproximar por el lado izquierdo

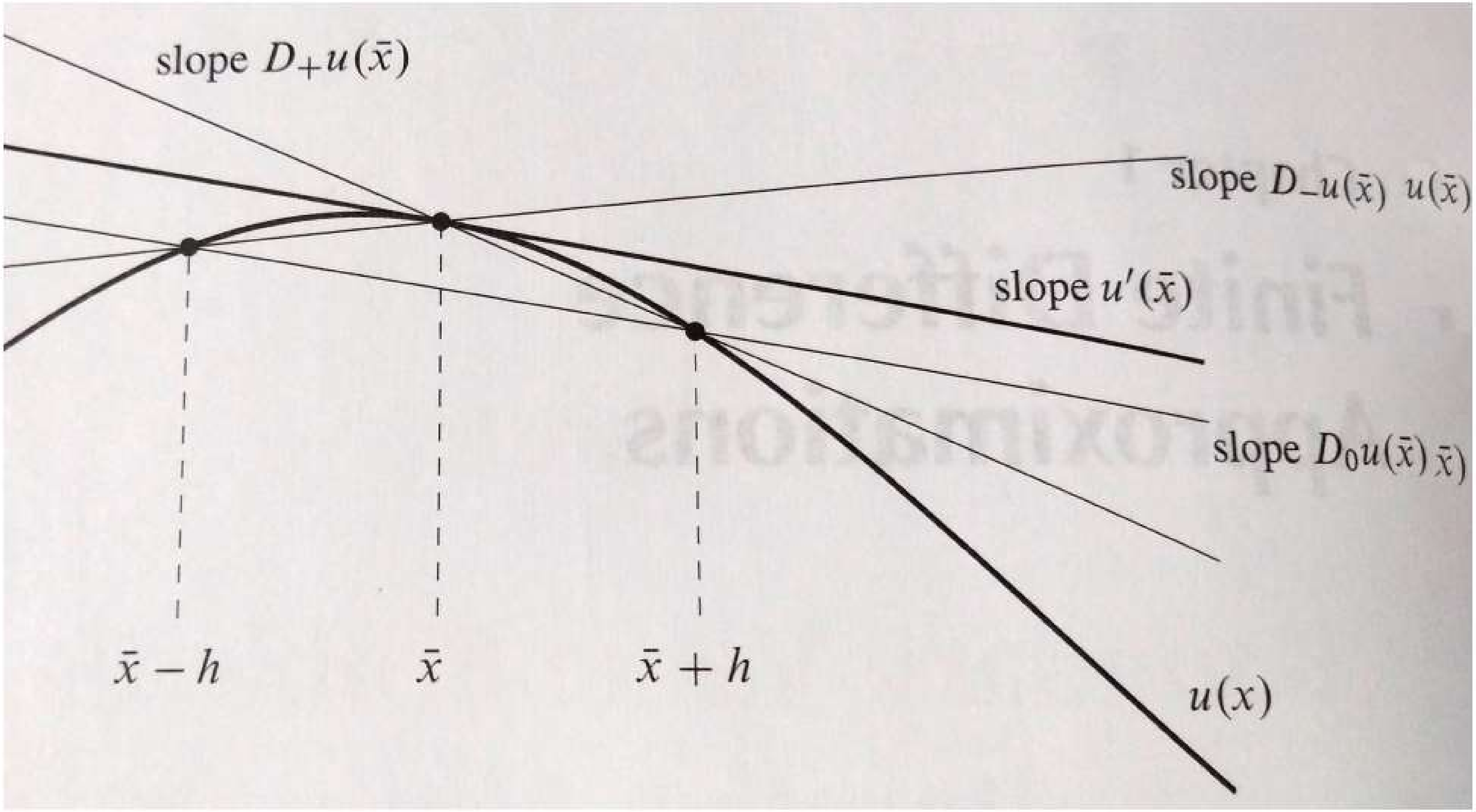
$$D_{-}u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h}$$

- Y de manera centrada

$$D_0 u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h} = \frac{1}{2}(D_+ u(\bar{x}) + D_- u(\bar{x}))$$

- Qué aproximación es mejor?

Aproximando una derivada



Derivadas de segundo orden

- Sumando las expansiones de Taylor

$$u(\bar{x}+h) = u(\bar{x}) + hu'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

$$u(\bar{x}-h) = u(\bar{x}) - hu'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

Se obtiene

$$u(\bar{x}+h) - u(\bar{x}-h) = 2u(\bar{x}) + h^2u''(\bar{x}) + O(h^4)$$

Luego

$$u''(\bar{x}) = \frac{1}{h^2}[u(\bar{x}-h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x}+h)] + O(h^2)$$

Diferencia finita para derivada de segundo orden

$$u''(\bar{x}) = \frac{1}{h^2}[u(\bar{x}-h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x}+h)] + O(h^2)$$

- Por lo que definimos D^2 como

$$D^2u(x) = \frac{1}{h^2}[u(\bar{x}-h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x}+h)] + O(h^2)$$

- Dado que la aproximación es centrada y simétrica, desaparecen los términos con h^n cuando n es impar

Otra derivación…

- También podríamos aplicar sucesivamente D_- y D_+

$$D_+\big(D_-u(\bar{x})\big) = \frac{1}{h}[D_-u(\bar{x}+h) - D_-u(\bar{x})]$$

- Luego,

$$D_+\big(D_-u(\bar{x})\big) = \frac{1}{h}\left[\frac{u(\bar{x}+h)-u(\bar{x})}{h} - \frac{u(\bar{x})-u(\bar{x}-h)}{h}\right]$$

Por lo que

$$D_+\big(D_-u(\bar{x})\big) = D^2u(\bar{x})$$

Discretización

- Con las aproximaciones

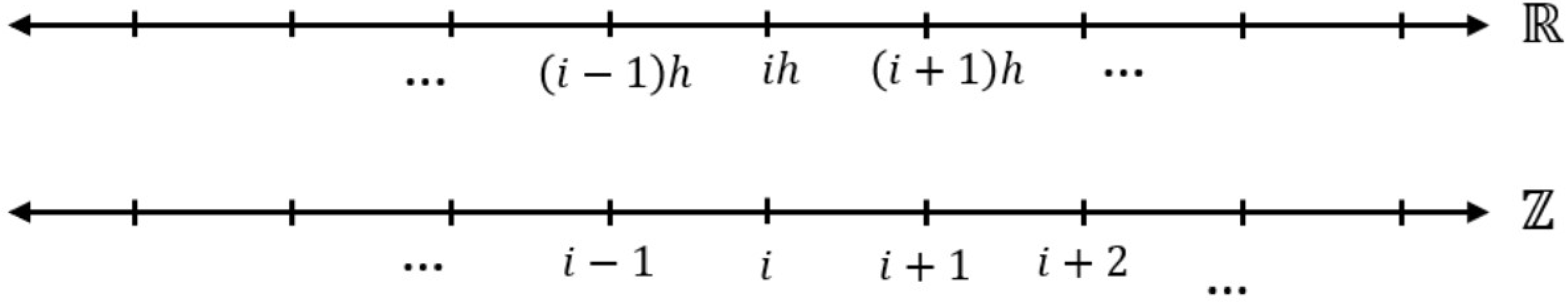
$$D_0 u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x}-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(D_+ u(\bar{x}) + D_- u(\bar{x})\right)$$

$$D^2 u(x) = \frac{1}{h^2}\left[u(\bar{x}-h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x}+h)\right] + O(h^2)$$

- Estamos aproximando las derivadas sobre una grilla regular de espaciado h

Notación

- Por conveniencia, simplemente omitamos h y definamos la siguiente notación:
  - Cada punto i en la grilla , corresponde a un valor de x igual a $x_i = ih$ en el dominio real
  - Llamaremos U_i a la aproximación de $u(x_i)$ para $i = 0,1,2, \dots, m+1$
  - $u'(x)$ es aproximada en las posiciones $x = ih$ por $D_0 u(x_i) = D_0 U_i$
  - Es decir, llamaremos U_i a la aproximación de $u(x)$ en el punto $x = ih$



Problemas con condiciones de borde

Problema tipo

- Consideremos el problema

$$u''(x) = f(x) \qquad \text{para} \qquad 0 < x < 1$$

Donde

$$u(0) = \alpha \qquad u(1) = \beta$$

Por lo que se cumple nuestra aproximación de diferencias finitas

$$D^2 U_i = f(x_i) \qquad \text{para} \qquad i = 1, \dots, m$$

Es decir

$$\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) = f(x_i) \qquad \text{para} \qquad i = 1, \dots, m$$

Lo que corresponde a un sistema lineal de ecuaciones ☺

Formulando un sistema lineal

$$D^2 U_i = \frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) = f(x_i) \quad \text{para} \qquad i = 1, \ldots, m$$

- La primera ecuación involucra $U_0 = \alpha$
- La última ecuación incolucra $U_{m+1} = \beta$
- Tenemos m ecuaciones y m incógnitas

Sistema de ecuaciones

$$D^2U_i = \frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) = f(x_i) \quad \text{para} \qquad i = 1, \dots, m$$

- Anotando cada ecuación para i como una fila del sistema matricial

$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}}_{F}$$

Sistema de ecuaciones

$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}}_{F}$$

- El sistema matricial es
  - Tri-diagonal
  - No singular (tiene inversa)
  - Puede ser resuelto para cualquier lado derecho (F)

Problemas de evolución temporal

Problemas de condiciones iniciales

$$f''(t) = g \qquad\qquad g \in \mathbb{R}^n \qquad n = 1, 2, 3$$

$$f'(t) = v_0 + gt$$

$$f(t) = p_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

- $f(t)$ inicialmente incógnita, puede ser encontrada
- Si disponemos de las condiciones iniciales p_0 y v_0, podemos calcular $f(t)$ y $f'(t)$
- Notar que $p_0, v_0, g \in R^n$

Método de Euler

$$y'(x) = f(x, y)$$

- Aproximando la derivada por una diferencia finita

$$\frac{y(x_0 + h) - y_0}{h} = f(x, y)$$

$$y(x_0 + h) = y_0 + hf(x, y)$$

- Esto nos genera el estado

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

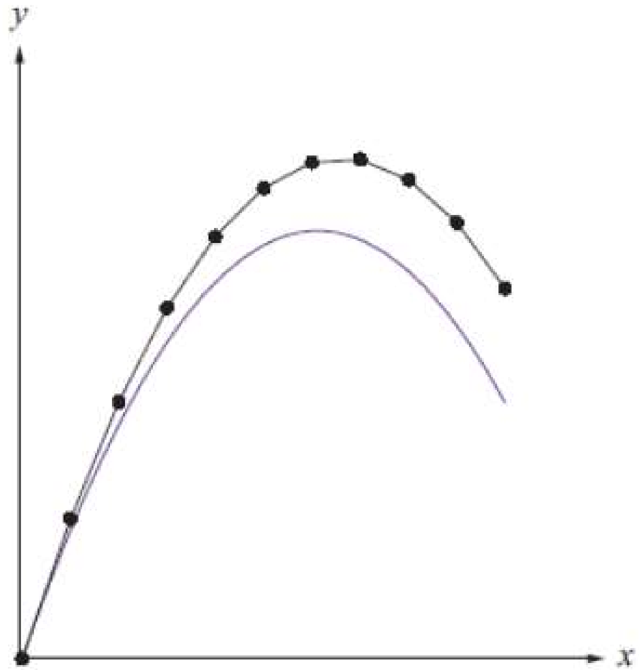
Método de Euler - Ejemplo

- Consideremos la ecuación

$$y'(t) = v_0 - gt$$

- t es el tiempo
- y es la altura de un proyectil
- v_0 es la velocidad vertical inicial
- g es la aceleración de la gravedad
- Asumiremos velocidad horizontal constante
- Utilizando el método de Euler, tenemos

$$y_{i+1} = y_i + h(v_0 - gt)$$



Mala aproximación ☹

Método de Series de Taylor

- Cualquier método para aproximar una solución a una ecuación diferencial tomando un instante de tiempo la vez asume la forma:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hF(x_i, y_i)$$

- F es una función que aproxima la derivada de y en el intervalo $[x_i, x_i + h]$
- Para el método de Euler, F es simplemente f
- Podemos buscar un mejor F usando series de Taylor

Método de Series de Taylor

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{6}h^3 y'''(x_i) + O(h^4)$$

- Si nuestra ecuación inicial es:

$$y'(x) = f(x, y)$$

- Entonces

$$y^{(n)}(x) = \ f^{(n-1)}(x, y)$$

- Luego

$$y(x_i + h) = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_i, y_i) + \frac{1}{6}h^3 f''(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_i, y_i)$$

Método de Series de Taylor

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hT_k(x_i, y_i)$$

$$T_k(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}hf'(x_i, y_i) + \frac{1}{6}h^2f''(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^{k-1}}{k!}f^{(k-1)}(x_i, y_i)$$

- Si consideramos T_1, tenemos el método de Euler

Regla de la cadena

$$T_k(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}hf'(x_i, y_i) + \frac{1}{6}h^2 f''(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^{k-1}}{k!}f^{(k-1)}(x_i, y_i)$$

- Como y es función de x, debemos ser cuidadosos con la regla de la cadena

$$f'(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}f(x, y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

- El cálculo se vuelve engorroso en la medida que k aumenta, pero es posible calcularlo

Métodos de Runge-Kutta

- Dada la complejidad en el cálculo de derivadas, el método de Series de Taylor no se utiliza mucho
- Y es aquí donde aparecen los métodos de Runge-Kutta
- Aquí generamos una aproximación de F evaluando $f(x, y)$ en m puntos y ponderándolos para aproximar la derivada de y

$$F(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{m} w_i f(u_j, v_j)$$

- Los puntos (u_j, v_j) deben ser cercanos al punto objetivo (x_i, y_i)
- Puntos y pesos w_i se eligen tal que correspondan con la Serie de Taylor T_k
- La ventaja es no tener que evaluar las derivadas de f
- m se conoce como el número de etapas del método

Runge-Kutta de 2 etapas

$$F(x_i, y_i) = w_1 f(x_i, y_i) + w_2 f(x_i + ah, y_i + ahf(x_i, y_i))$$

- Buscamos w_1, w_2 y a para corresponder a una Serie de Taylor de segundo orden
- Para esto expandimos el término $f\big(x_i + ah, y_i + ahf(x_i, y_i)\big)$

$$f\big(x_i + ah, y_i + ahf(x_i, y_i)\big) = f(x_i, y_i) + ah\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_i, y_i) + f(x_i, y_i)\frac{\partial}{\partial y} f(x_i, y_i)\right] + R$$

- Luego reemplazando en la ecuación para F tenemos

$$F(x_i, y_i) = (w_1 + w_2) f(x_i, y_i) + w_2\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_i, y_i) + f(x_i, y_i)\frac{\partial}{\partial y} f(x_i, y_i)\right] + w_2 R$$

Runge-Kutta de 2 etapas

$$F(x_i, y_i) = (w_1 + w_2) f(x_i, y_i) + w_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) \frac{\partial}{\partial y} f(x_i, y_i)\right] + w_2 R$$

- Queremos igualar términos con T_2

$$T_2(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) + \frac{h}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) \frac{\partial}{\partial y} f(x_i, y_i)\right]$$

- Luego

$$w_1 + w_2 = 1 \qquad a w_2 = \frac{1}{2}$$

- Tenemos el parámetro libre a que podemos elegir convenientemente

$$w_1 = 1 - \frac{1}{2a} \qquad w_2 = \frac{1}{2a}$$

RK2 – Euler modificado

$$w_1 = 1 - \frac{1}{2a} \qquad\qquad w_2 = \frac{1}{2a}$$

- Escogemos a de manera que el punto (u_j, v_j) se mantenga cercano a (x_i, y_i)

$$F(x_i, y_i) = w_1 f(x_i, y_i) + w_2 f(x_i + ah, y_i + ahf(x_i, y_i))$$

- Si $a = \frac{1}{2}$, obtenemos $w_1 = 0$ y $w_2 = 1$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))$$

- Conocido como el método de Euler modificado

RK2 – Euler mejorado

$$w_1 = 1 - \frac{1}{2a} \qquad\qquad w_2 = \frac{1}{2a}$$

- Escogemos a de manera que el punto (u_j, v_j) se mantenga cercano a (x_i, y_i)

$$F(x_i, y_i) = w_1 f(x_i, y_i) + w_2 f(x_i + ah, y_i + ahf(x_i, y_i))$$

- Si $a = 1$, obtenemos $w_1 = w_2$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

- Conocido como el método de Euler mejorado o método de Heun

Método RK4

- Métodos Runge-Kutta de un número mayor de etapas se derivan de igual manera, igualando términos con Series de Taylor de mayor orden
- Se suele utilizar el método de 4 etapas o RK4
- Este método suele ser adecuado para simulaciones de tiempo real y en aplicaciones tipo videojuegos
- El método RK4 es eficiente para la precisión que logra

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[K_1(x_i, y_i) + 2K_2(x_i, y_i) + 2K_3(x_i, y_i) + K_4(x_i, y_i)]$$

$$K_1(x_i, y_i) = f(x_i, y_i)$$

$$K_2(x_i, y_i) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1(x_i, y_i)\right)$$

$$K_3(x_i, y_i) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2(x_i, y_i)\right)$$

$$K_4(x_i, y_i) = f(x_i + h, y_i + hK_3(x_i, y_i))$$

Método RK4

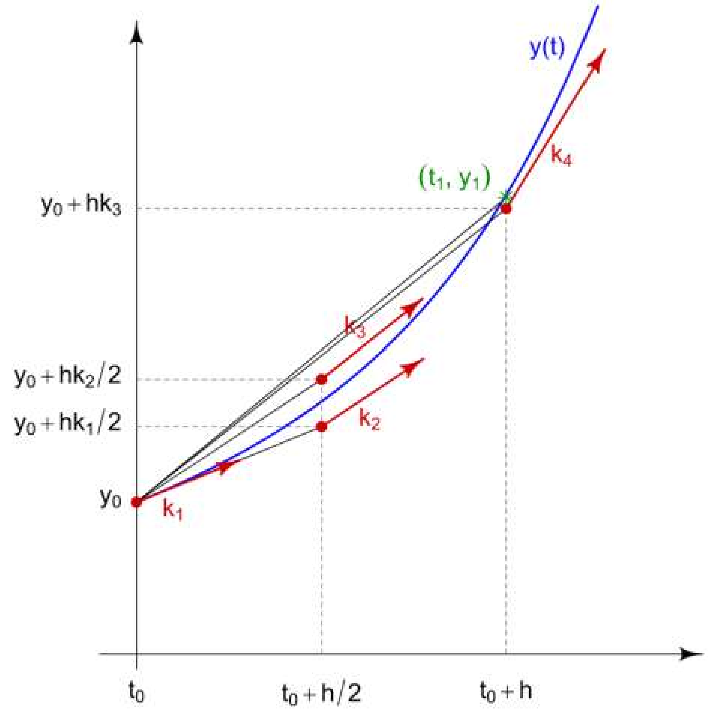
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[K_1(x_i, y_i) + 2K_2(x_i, y_i) + 2K_3(x_i, y_i) + K_4(x_i, y_i)\right]$$

$$K_1(x_i, y_i) = f(x_i, y_i)$$

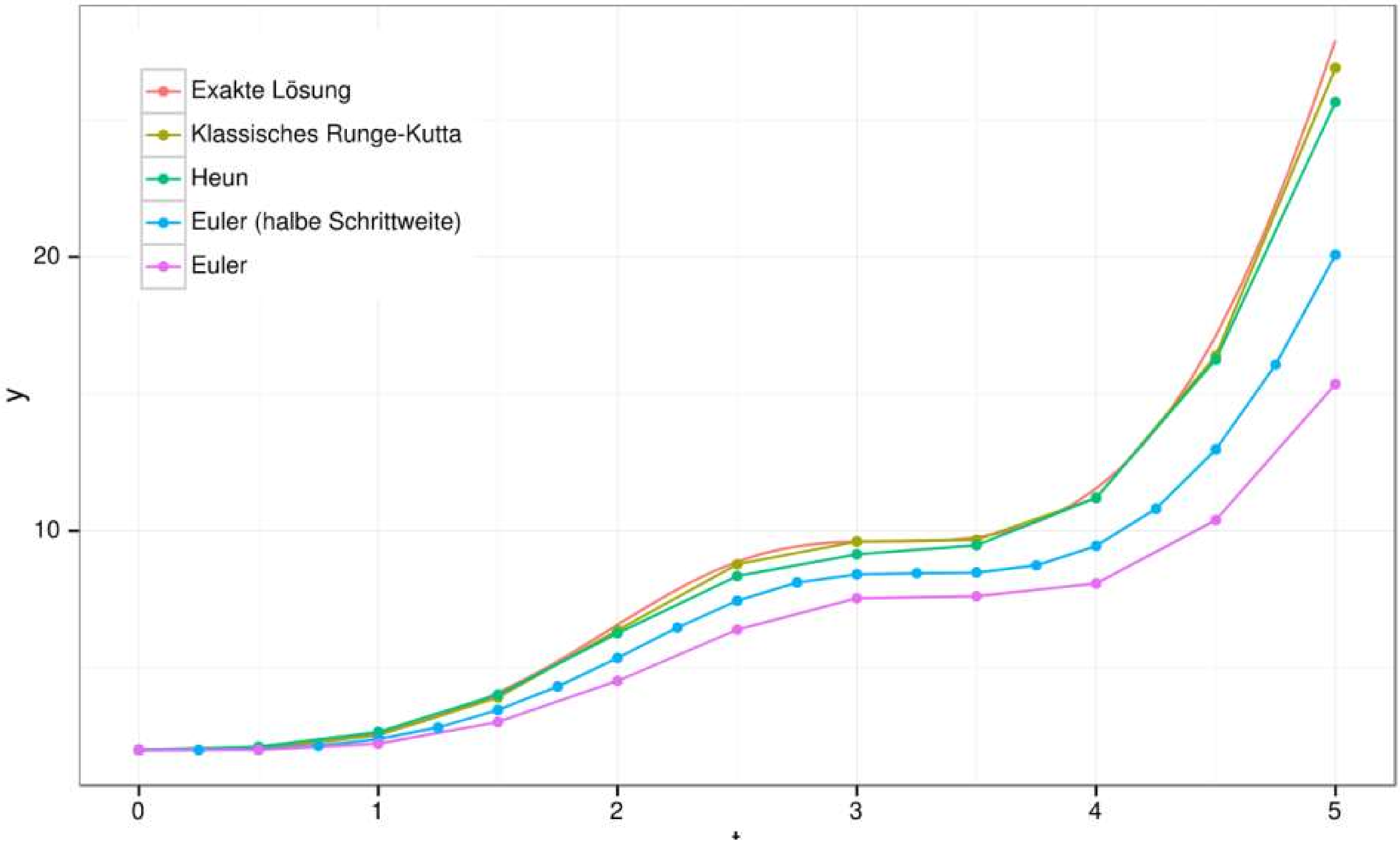
$$K_2(x_i, y_i) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1(x_i, y_i)\right)$$

$$K_3(x_i, y_i) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2(x_i, y_i)\right)$$

$$K_4(x_i, y_i) = f(x_i + h, y_i + hK_3(x_i, y_i))$$



Ejemplo $y' = \sin(t)^2 * y$



Ecuaciones diferenciales de alto orden

- Es posible convertir EDO de alto orden en sistemas de primer orden
- Luego podemos aplicar los mismos métodos numéricos ya estudiados
- Consideremos la siguiente ecuación

$$y''(x) = f(x, y, y')$$

- Equivale al siguiente sistema

$$y'(x) = z(x)$$

$$z'(x) = f(x, y, z)$$

Ecuaciones diferenciales de alto orden

$$y'(x) = z(x)$$

$$z'(x) = f(x, y, z)$$

- Utilizando condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ y $z(x_0) = z_0$, podemos resolver este sistema aplicando el método de Euler

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hz_i$$

$$z_{i+1} = z_i + hf(x_i, y_i, z_i)$$