Egzamin maturalny Formuła 2023

MATEMATYKA Poziom rozszerzony

Zadanie 1. (0-2) Aleks posiada beczkę w której znajduje się 200 litrów soku. W ciągu każdej godziny z beczki tej wyparowuje $\frac{1}{20}$ jej całej zawartości. **Napisz wzór funkcji $i(t)$, która opisuje ilość soku pozostałego w beczce w zależności od czasu t, a następnie wyznacz po ilu godzinach w beczce zostanie mniej niż 75% zawartości soku**.

Zadanie 2. (0-3) Antek i Basia grywają razem w szachy. Basia w dzieciństwie uczęszczała na kółko szachowe, więc prawdopodobieństwo wygrania przez nią partii jest dwukrotnie większe niż prawdopodobieństwo wygrania przez Antka. **Wiedząc, że każdą grę ktoś wygrywa, oblicz prawdopodobieństwo tego, że Antek wygra dokładnie dwa razy w przeciągu pięciu gier**.

Zadanie 3. (0-3) Wyznacz wszystkie takie styczne do wykresu funkcji f zadanej wzorem $f(x) = \frac{3x^2+14x+3}{x^2+3x+1}$, które są prostopadłe do prostej $x = 9$.

Zadanie 4. (0-3) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ oraz każdej liczby rzeczywistej $y < 1$ prawdziwa jest nierówność $x^2y^2 - 5xy + x + y + 3 > 0$.

Zadanie 5. (0-3) Poprzez DC i AB oznaczmy sieczne okręgu, które przecinają się w punkcie P (zob. rysunek poniżej). **Niech dane będą następujące wartości:** $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BP}| = 8$, $\measuredangle \mathrm{ABC} = 90^\circ$ **oraz** $|\mathrm{BC}| = 6$. **Oblicz pole czworokąta** ABCD.

Zadanie 6. (0-3) Rozwiąż następujące równanie trygonometryczne:

$$\sin^2(2x) + 4\cos(2x) = 4$$

Zapisz wszystkie obliczenia.

Zadanie 7. (0-4) Niech dany będzie taki ostrosłup prawidłowy sześciokątny, że jego pole powierzchni bocznej jest dwukrotnie większe od jego pola podstawy. **Wyznacz wartość** $\tan^2(\alpha)$ **kąta α zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.**

Zadanie 8. (0-4) Niech dany będzie czworokąt ABCD o następujących długościach boków: $|\mathrm{AD}| = 3$, $|\mathrm{CD}| = 3\sqrt{3}$, $|\mathrm{BC}| = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$. Czworokąt ten dodatkowo można wpisać w okrąg. **Oblicz długość boku $|\mathrm{AB}|$ i przedstaw tę długość w postaci liczby naturalnej, wiedząc, że kąt pomiędzy bokami $|\mathrm{AD}|$ i $|\mathrm{DC}|$ wynosi** 30°.

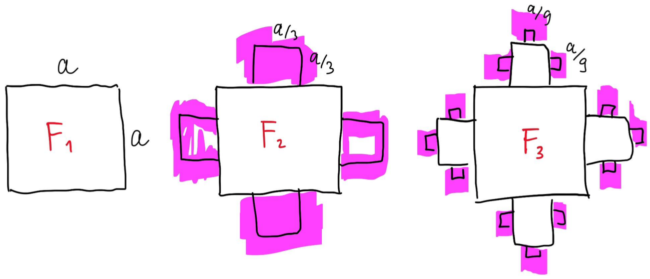
Zadanie 9. (0-4) Rozwiąż poniższą nierówność:

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} \leq 1 + \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$$

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ dla każdej liczby rzeczywistej a.

Zadanie 10. (0-4) Budujemy nieskończony ciąg figur $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Figura F_1 jest kwadratem o boku długości a. Kolejne figury F_n są budowane z następującą regułą:

- Podczas budowy figury F_n doklejamy kolejne kwadraty jedynie do kwadratów, które zostały dodane w kroku $(n-1)$.
- Dzielimy boki F_{n-1} na trzy równe części.
- Do środkowej części każego z podzielonych boków doklejamy mniejszy kwadrat o boku długości $\frac{a_{n-1}}{3}$



1. **Wykaż, że pole figury F_n wyraża się wzorem**:

$$P_n = a^2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3^n}\right)$$

2. **Oblicz pole figury F_∞ dla wartości $a = 3$.**

Zadanie 11. (0-5) **Proszę wyznaczyć wszystkie wartości parametru rzeczywistego m, dla których równanie:**

$$(m+2)x^2 + 3mx + m - 2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > 1$.

$\Big($Odpowiedź: $m \in \left(-\infty, \frac{11-3\sqrt{21}}{17}\right) \cup \left(\frac{11+3\sqrt{21}}{17}, \infty\right)\Big)$

Zadanie 12. (0-6) Treść zadania. MW
Funkcja f jest określona wzorem

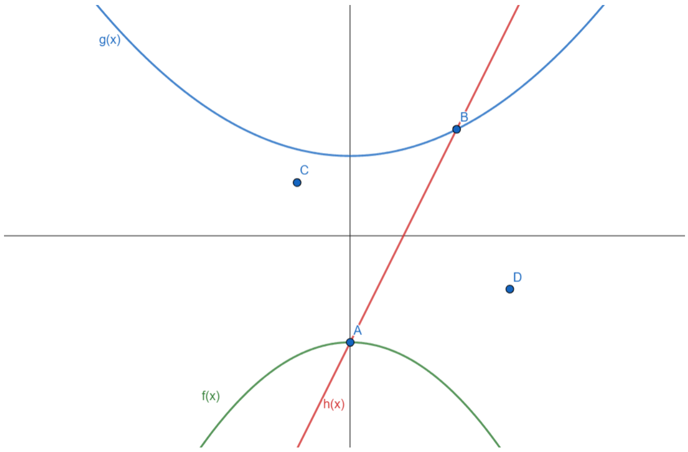
$$f(x) = \sin\frac{29\pi}{6}x^{\binom{4}{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{7\pi}{6}x^3 - \frac{\log_9 16}{\frac{1}{2}\log_3 2}x^{2!} + \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)x$$

dla każdej liczby dodatniej x.
Pokaż, że daną funkcję da się przedstawić w postaci $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 4x$. **Wyznacz największą wartość funkcji f dla $x \in (0,1)$.** $\Big($Odpowiedź: $f(x) = \frac{95}{96}\Big)$

Zadanie 13. (0-6) W kartezjańskim układzie współrzędnych kreślimy dwie parabole:

- $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2$
- $g(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}$

Prosta h przecina obie parabole w punktach A oraz B (rysunek poniżej). Wiemy, że tangens kąta nachylenia prostej h wynosi 2, i że odcięta punktu A równa się 0. Punkty C i D są równo odległe od punktów A i B oraz ich odległość od prostej h wynosi $\sqrt{5}$.



1. Wyznacz współrzędne punktów C i D. (odp. $C = (-1, 1), D = (3, -1)$)
2. Wyznacz promień okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. (odp. $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$)