Zadanie 1 (0-2)
Aleks posiada beczkę w której znajduje się 200 litrów soku. W ciągu każdej godziny z beczki tej wyparowuje $\frac{1}{20}$ jej całej zawartości. Napisz wzór funkcji $i(t)$, która opisuje ilość soku pozostałego w beczce w zależności od czasu t, a następnie wyznacz po ilu godzinach w beczce zostanie mniej niż 75% zawartości soku.

Zadanie 2 (0-3)
Antek i Basia grywają razem w szachy. Basia w dzieciństwie uczęszczała na kółko szachowe, więc prawdopodobieństwo wygrania przez nią partii jest dwukrotnie większe niż prawdopodobieństwo wygrania przez Antka. Wiedząc, że każdą grę ktoś wygrywa, oblicz prawdopodobieństwo tego, że Antek wygra dokładnie dwa razy w przeciągu pięciu gier.

Zadanie 3 (0-3)
Wyznacz wszystkie takie styczne do wykresu funkcji f zadanej wzorem

$$f(x) = \frac{3x^2 + 14x + 3}{x^2 + 3x + 1}$$

które są prostopadłe do prostej $x = 9$.

Zadanie 4 (0-3)
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ oraz każdej liczby rzeczywistej $y < 1$ prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2 - 5xy + x + y + 3 > 0$$

Zadanie 5 (0-3)
Poprzez DC i AB oznaczmy sieczne okręgu, które przecinają się w punkcie P (zob. rysunek poniżej). Niech dane będą następujące wartości: $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BP}| = 8$, $\measuredangle \mathrm{ABC} = 90^\circ$ oraz $|\mathrm{BC}| = 6$. Oblicz pole czworokąta ABCD.

Zadanie 6 (0-3)
Rozwiąż następujące równanie trygonometryczne:

$$\sin^2(2x) + 4\cos(2x) = 4$$

Zapisz wszystkie obliczenia.

Zadanie 7 (0-4)
Niech dany będzie taki ostrosłup prawidłowy sześciokątny, że jego pole po-

wierzchni bocznej jest dwukrotnie większe od jego pola podstawy. Wyznacz wartość $\tan^2(\alpha)$ kąta α zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

Zadanie 8 (0-4)

Zadanie 9 (0-4)
Rozwiąż poniższą nierówność:

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} \leq 1 + \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$$

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ *dla każdej liczby rzeczywistej* a.

Zadanie 10 (0-4)

Zadanie 11 (0-5)
Proszę wyznaczyć wszystkie wartości parametru rzeczywistego m, dla których równanie:

$$(m+2)x^2 + 3mx + m - 2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > 1$.

Zadanie 12 (0-6)
Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \sin\frac{29\pi}{6}x^{\binom{4}{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{7\pi}{6}x^3 - \frac{\log_9 16}{\frac{1}{2}\log_3 2}x^{2!} + \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)x$$

dla każdej liczby dodatniej x. Pokaż, że daną funkcję da się przedstawić w postaci $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 4x$. Wyznacz największą wartość funkcji f dla $x \in (0, 1)$.

Zadanie 13 (0-6)