Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Jacek Czekaj

Rodziny równoważne z bazodanową rodziną relacji

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dra Przemysława Koprowskiego

Katowice 2005

Spis treści

Wstęp

W niniejszej pracy zajmujemy się pewnymi rodzinami modeli, równoważnymi z bazodanową rodziną relacji. Równoważność tych rodzin opisywana jest w literaturze dość nieformalnym językiem. W rozdziale pierwszym przedstawiamy podstawowe pojęcia logiki matematycznej, w tym pojęcie konsekwencji syntaktycznej i pojęcie konsekwencji określonej na rodzinie modeli, które pozwalają precyzyjnie określić pełność oraz równoważność rodzin modeli. Nakreślamy także zalety formalnego badania teorii.

W rozdziale drugim przedstawiamy podstawowe pojęcia związane z relacyjnymi bazami danych. Opisujemy wybrane operacje, jakie można wykonywać na relacjach. Na przykładzie, prezentujemy także korzyści płynące z przechowywania informacji za pomocą relacji.

W rozdziale trzecim opisujemy zależności funkcyjne. Podajemy definicję zależności funkcyjnej oraz definicję prawdziwości zależności funkcyjnej w relacji. Twierdzenie Heath, które prezentujemy, obrazuje dużą wagę zależności funkcyjnych w teorii baz danych. Jest to mocny argument przemawiający za dogłębnym zbadaniem zależności funkcyjnych, dlatego też prezentujemy formalny system logiczny dla zależności funkcyjnych.

Twierdzenie Heath nasuwa przypuszczenie, iż w relacyjnych bazach danych mogą istnieć zależności, które nie mają charakteru zależności funkcyjnych. Właśnie takie „nie funkcyjne” zależności, zwane zależnościami wielowartościowymi opisujemy w rozdziale czwartym. Podajemy określenie zależności wielowartościowej oraz definicję prawdziwości zależności wielowartościowej w relacji. Twierdzenie Fagina, które prezentujemy, stanowi mocny argument na rzecz formalnego zbadania zależności wielowartościowych. Dlatego też przedstawiamy system logiki zależności wielowartościowych.

Ponieważ w bazach danych występują zarówno zależności funkcyjne jaki i zależności wielowartościowe, to w kolejnym, piątym rozdziale tej pracy przyjmujemy formalny system logiczny dla zależności funkcyjnych i wielowartościowych. W rozdziale tym przedstawiamy także pojęcie domknięcia podzbioru zbioru atrybutów oraz pojęcie bazy zależności.

W rozdziale szóstym prezentujemy rodzinę relacji dwukrotkowych, rodzinę waluacji oraz rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru atrybutów. Definiujemy prawdziwość zależności funkcyjnych i zależności wielowartościowych w modelach każdej z tych rodzin. Przedstawiamy główny rezultat tej pracy — zwięzły dowód równoważności wszystkich zaprezentowanych rodzin oraz pełności przyjętych systemów logicznych względem każdej z tych rodzin.

W ostatnim rozdziale tej pracy, prezentujemy przykłady praktycznych zastosowań uzyskanych rezultatów, w tym algorytm testujący wyprowadzalność wskazanych zależności z zadanego zbioru zależności.

Oznaczenia

W niniejszej pracy stosujemy następujące oznaczenia:

$\mathbb{N}$	—	zbiór liczb naturalnych, tzn. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathscr{P}(U)$	—	rodzina wszystkich podzbiorów zbioru U, tzn. $\mathscr{P}(U) = \{X : X \subseteq U\}$.
$\#X$	—	moc, tzn. ilość elementów zbioru X.
X'	—	dopełnienie zbioru X względem pewnego ustalonego uniwersum U, tzn. $X' = U \setminus X$.
$t\|_X$	—	zacieśnienie funkcji t do zbioru X.

Oznaczenia wzorów eksponowanych pojawiające się po lewej stronie obowiązują w całej pracy, zaś oznaczenia występujące po stronie prawej — jedynie w obrębie dowodu, w którym występują.

Na końcu pracy zamieszczamy ponadto skorowidz wszystkich symboli.

Rozdział 1

Logiczny wstęp

W tym rozdziale przedstawiamy podstawy logiki matematycznej — podajemy elementarne pojęcia oraz ich własności. Uzasadniamy także potrzebę i znaczenie formalnego opisu systemów logicznych.

1.1. Syntaktyka systemów logicznych

Najkrócej rzecz ujmując, syntaktyczna strona systemu logicznego określa reguły wnioskowania poprawnego składniowo (syntaktycznie).

Definicja 1.1. *Zbiorem formuł* nazywamy pewien wyróżniony, przeliczalny i niepusty zbiór $\mathscr{F}$.

W tej chwili nie jest ważne czym tak naprawdę jest pojedyncza formuła.

Definicja 1.2. *Regułą wnioskowania* nazywamy dowolny niepusty podzbiór $r \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{F}) \times \mathscr{F}$. Dla układu $\langle F, \varphi \rangle \in r$, zbiór F nazywamy *zbiorem przesłanek*, zaś formułę φ — *wnioskiem*.

Definicja 1.3. *Systemem logicznym* nad zbiorem formuł $\mathscr{F}$ nazywamy układ złożony ze zbioru $A \subseteq \mathscr{F}$, zwanego *zbiorem aksjomatów*, oraz zbioru reguł wnioskowania R, tzn. $R \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{F}) \times \mathscr{F})$.

Definicja 1.4. *Operatorem konsekwencji* (lub krócej: *konsekwencją*) nad zbiorem formuł $\mathscr{F}$ nazywamy każdą funkcję $C\colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ mającą dla dowolnych zbiorów $F, G \subseteq \mathscr{F}$ następujące własności:

(a) $F \subseteq C(F)$,

(b) $F \subseteq G \implies C(F) \subseteq C(G)$,

(c) $C(C(F)) \subseteq C(F)$,

zwane *własnościami konsekwencji*.

Zwróćmy w tym miejscu uwagę, że stosując własność (a) do zbioru $C(F)$ otrzymujemy inkluzję $C(F) \subseteq C(C(F))$. Tak więc we własności (c) jest w istocie równość, tzn. $C(C(F)) = C(F)$. (Chcieliśmy pozostać wierni tradycyjnej wypowiedzi.)

Stwierdzenie 1.5. *Niech $C^t\colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ będzie operatorem konsekwencji dla każdego $t \in \mathscr{T}$. Wówczas operator $C^{\mathscr{T}}\colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ określony wzorem*

$$C^{\mathscr{T}}(F) = \bigcap_{t \in \mathscr{T}} C^t(F)$$

dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$*, jest operatorem konsekwencji, tzn. dla dowolnych zbiorów* $F, G \subseteq \mathscr{F}$ *zachodzą następujące warunki*:

(a) $F \subseteq C^{\mathscr{T}}(F)$,

(b) $F \subseteq G \implies C^{\mathscr{T}}(F) \subseteq C^{\mathscr{T}}(G)$,

(c) $C^{\mathscr{T}}(C^{\mathscr{T}}(F)) \subseteq C^{\mathscr{T}}(F)$.

Dowód. (a) Ponieważ $F \subseteq C^t(F)$ dla każdego $t \in \mathscr{T}$, to również $F \subseteq \bigcap_{t\in\mathscr{T}} C^t(F)$, tzn. $F \subseteq C^{\mathscr{T}}(F)$.

(b) Załóżmy, że $F \subseteq G$. Wtedy $C^t(F) \subseteq C^t(G)$ dla dowolnego $t \in \mathscr{T}$. Zatem $\bigcap_{t\in\mathscr{T}} C^t(F) \subseteq \bigcap_{t\in\mathscr{T}} C^t(G)$, tzn. $C^{\mathscr{T}}(F) \subseteq C^{\mathscr{T}}(G)$.

(c) Ponieważ dla dowolnego $t \in \mathscr{T}$ zachodzi $C^{\mathscr{T}}(F) = \bigcap_{s\in\mathscr{T}} C^s(F) \subseteq C^t(F)$, to w oparciu o własności (b) i (c) operatora $C^t(\cdot)$ otrzymujemy $C^t(C^{\mathscr{T}}(F)) \subseteq C^t(C^t(F)) \subseteq C^t(F)$ dla dowolnego $t \subseteq \mathscr{T}$. Stąd $\bigcap_{t\in\mathscr{T}} C^t(C^{\mathscr{T}}(F)) \subseteq \bigcap_{t\in\mathscr{T}} C^t(F)$, czyli $C^{\mathscr{T}}(C^{\mathscr{T}}(F)) \subseteq C^{\mathscr{T}}(F)$. □

Definicja 1.6. *Operatorem konsekwencji syntaktycznej*, albo *konsekwencją syntaktyczną* w systemie logicznym $\mathscr{L} = \langle A, R\rangle$ nazywamy funkcję $C_{\mathscr{L}}\colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ określoną wzorem

$$C_{\mathscr{L}}(F) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{L}}(F),$$

dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$, gdzie

$$\begin{aligned} C^0_{\mathscr{L}}(F) &= F \cup A,\\ C^{n+1}_{\mathscr{L}}(F) &= C^n_{\mathscr{L}}(F) \cup \Big\{\varphi \in \mathscr{F} : \bigvee_{r\in R}\ \bigvee_{H\subseteq C^n_{\mathscr{L}}(F)} \langle H, \varphi\rangle \in r\Big\} \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Liczbę n występującą w oznaczeniu zbioru $C^n_{\mathscr{L}}(F)$ nazywamy *stopniem konsekwencji*.

Definicja 1.7. Mówimy, że formuła φ daje się *wyprowadzić* ze zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$, gdy $\varphi \in C_{\mathscr{L}}(F)$.

Stwierdzenie 1.8. *Operator* $C_{\mathscr{L}}(\cdot)$ *jest konsekwencją, tzn. dla dowolnych zbiorów* $F, G \subseteq \mathscr{F}$ *zachodzą następujące warunki*:

(a) $F \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$,

(b) $F \subseteq G \implies C_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C_{\mathscr{L}}(G)$,

(c) $C_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$.

Dowód. (a) Wynika uprost z definicji konsekwencji syntaktycznej $C_{\mathscr{L}}$. ($F \subseteq C^0_{\mathscr{L}}(F) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{L}}(F) = C_{\mathscr{L}}(F)$.)

(b) Załóżmy, że $F \subseteq G$. Wykażemy, indukcyjnie względem stopnia konsekwencji, że $C^n_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^n_{\mathscr{L}}(G)$ dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 0$ mamy

$$C^0_{\mathscr{L}}(F) = F \cup A \subseteq G \cup A = C^0_{\mathscr{L}}(G).$$

Załóżmy więc, że $C^n_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^n_{\mathscr{L}}(G)$ dla pewnego $n \geqslant 0$. Wtedy, jeżeli

$$\bigvee_{r\in R} \bigvee_{H\subseteq C^n_{\mathscr{L}}(F)} \langle H, \varphi\rangle \in r, \qquad \text{to również} \qquad \bigvee_{r\in R} \bigvee_{H\subseteq C^n_{\mathscr{L}}(G)} \langle H, \varphi\rangle \in r,$$

bo $C^n_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^n_{\mathscr{L}}(G)$. Stąd $C^{n+1}_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^{n+1}_{\mathscr{L}}(G)$, a więc na mocy zasady indukcji matematycznej $C^n_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^n_{\mathscr{L}}(G)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, czyli $\bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{L}}(F) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{L}}(G)$, tzn. $C_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C_{\mathscr{L}}(G)$.

(c) Pokażemy indukcyjnie względem stopnia konsekwencji, że $C^n_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$ dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 0$ jest

$$C^0_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) = C_{\mathscr{L}}(F) \cup A = C_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F),$$

gdzie druga z powyższych równości wynika z faktu, iż $A \subseteq C^0_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$. Załóżmy więc, że $C^n_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$ dla pewnego $n \geqslant 0$. Gdyby $C^{n+1}_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) = \emptyset$, to oczywiście $C^{n+1}_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$. Niech więc $C^{n+1}_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \neq \emptyset$ i weźmy dowolną formułę $\varphi \in C^{n+1}_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F))$. Wobec definicji konsekwencji syntaktycznej (def. 1.6), albo $\varphi \in C^n_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F))$, albo

$$\bigvee_{r\in R} \bigvee_{H\subseteq C^n_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F))} \langle H, \varphi\rangle \in r. \tag{$*$}$$

Jeśli $\varphi \in C^n_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F))$, to wprost z założenia indukcyjnego $\varphi \in C_{\mathscr{L}}(F)$. Jeśli zaś spełniony jest warunek ($*$), to wobec założenia indukcyjnego $H \subseteq C^n_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$, czyli $H \subseteq C^m_{\mathscr{L}}(F)$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\bigvee_{r\in R} \bigvee_{H\subseteq C^m_{\mathscr{L}}(F)} \langle H, \varphi\rangle \in r,$$

co oznacza, że $\varphi \in C^{m+1}_{\mathscr{L}}(F)$, a więc $\varphi \in C_{\mathscr{L}}(F)$. Wobec dowolności wyboru formuły φ dowodzi to inkluzji $C^{n+1}_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$. A zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej, $C^n_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$ dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$, a stąd $\bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$, tzn. $C_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(F)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$. □

1.2. Semantyka systemów logicznych

Semantyczna strona systemu logicznego nadaje znaczenie formułom. Definiuje prawdziwość formuł oraz wynikanie logiczne formuły z danego zbioru formuł.

Definicja 1.9. *Modelem* dla zbioru formuł $\mathscr{F}$ nazywamy dowolny zbiór M, przy pomocy którego można zdefiniować podzbiór $\mathcal{E}(M) \subseteq \mathscr{F}$.

Zbiór $\mathcal{E}(M)$ nazywamy *zbiorem formuł prawdziwych w modelu* M, a formuły należące do zbioru $\mathcal{E}(M)$ — *prawdziwymi* w modelu M.

Stwierdzenie 1.10. *Niech M będzie modelem dla zbioru formuł $\mathscr{F}$ i niech*

$$C^M(F) = \left\{\varphi \in \mathscr{F} : F \subseteq \mathcal{E}(M) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{E}(M)\right\}$$

dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$. Wówczas operator $C^M\colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ ma własności konsekwencji, tzn. dla dowolnych zbiorów $F, G \subseteq \mathscr{F}$ zachodzą warunki

(a) $F \subseteq C^M(F)$,

(b) $F \subseteq G \implies C^M(F) \subseteq C^M(G)$,

(c) $C^M(C^M(F)) \subseteq C^M(F)$.

Dowód. (a) Jeżeli $F = \emptyset$, to oczywiście $F \subseteq C^M(F)$. Niech więc $F \neq \emptyset$ i weźmy dowolna formułę $\varphi \in F$. Musimy pokazać, że $\varphi \in C^M(F)$, tzn. wykazać prawdziwość implikacji

$$F \subseteq \mathcal{E}(M) \implies \varphi \in \mathcal{E}(M).$$

Gdyby $F \nsubseteq \mathcal{E}(M)$, to powyższa implikacja byłaby trywialnie prawdziwa. Przypuśćmy więc, że $F \subseteq \mathcal{E}(M)$. Wtedy $\varphi \in F \subseteq \mathcal{E}(M)$, a więc implikacja jest prawdziwa. Wobec dowolności wyboru formuły φ oznacza to, że $F \subseteq C^M(F)$.

(b) Załóżmy, że $F \subseteq G$. Jeśli $C^M(F) = \emptyset$, to oczywiście $C^M(F) \subseteq C^M(G)$. Przypuśćmy więc, że $C^M(F) \neq \emptyset$ i wybierzmy dowolną formułę $\varphi \in C^M(F)$. Wtedy

$$F \subseteq \mathcal{E}(M) \implies \varphi \in \mathcal{E}(M). \tag{$*$}$$

Mamy pokazać, że $\varphi \in C^M(G)$, tzn. wykazać prawdziwość implikacji

$$G \subseteq \mathcal{E}(M) \implies \varphi \in \mathcal{E}(M).$$

Załóżmy więc, że $G \subseteq \mathcal{E}(M)$. Wtedy $F \subseteq G \subseteq \mathcal{E}(M)$ i z warunku $(*)$ otrzymujemy $\varphi \in \mathcal{E}(M)$. Wobec dowolności wyboru formuły φ oznacza to, że $C^M(F) \subseteq C^M(G)$.

(c) Gdyby zachodziła równość $C^M(C^M(F)) = \emptyset$, to oczywiście $C^M(C^M(F)) \subseteq C^M(F)$. Niech więc $C^M(C^M(F)) \neq \emptyset$ i weźmy dowolną formułę $\varphi \in C^M(C^M(F))$. Wtedy

$$C^M(F) \subseteq \mathcal{E}(M) \implies \varphi \in \mathcal{E}(M). \tag{$**$}$$

Mamy pokazać, że $\varphi \in C^M(F)$, tzn.

$$F \subseteq \mathcal{E}(M) \implies \varphi \in \mathcal{E}(M).$$

Załóżmy więc, że $F \subseteq \mathcal{E}(M)$. Pokażemy, że $C^M(F) \subseteq \mathcal{E}(M)$. Istotnie, jeśli $C^M(F) = \emptyset$, to inkluzja ta jest oczywista. Niech więc $C^M(F) \neq \emptyset$ i wybierzmy dowolną formułę $\psi \in C^M(F)$. Wtedy, zgodnie z definicją zbioru $C^M(F)$

$$F \subseteq \mathcal{E}(M) \implies \psi \in \mathcal{E}(M).$$

Ale założyliśmy, że $F \subseteq \mathcal{E}(M)$, więc spełniony jest poprzednik powyższej implikacji. Musi więc być $\psi \in \mathcal{E}(M)$. A ponieważ formuła ψ była wybrana dowolnie, to $C^M(F) \subseteq \mathcal{E}(M)$. Teraz z warunku $(**)$ wynika, że $\varphi \in \mathcal{E}(M)$, co wobec dowolności wyboru formuły φ oznacza, iż $C^M(C^M(F)) \subseteq C^M(F)$. □

Definicja 1.11. *Operatorem konsekwencji w niepustej rodzinie modeli* $\mathscr{M}$ nazywamy funkcję $C^{\mathscr{M}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ określoną wzorem

$$C^{\mathscr{M}}(F) = \bigcap_{M \in \mathscr{M}} C^M(F) = \Big\{\varphi \in \mathscr{F} : \bigwedge_{M \in \mathscr{M}} \varphi \in C^M(F)\Big\}$$

dla dowolnego $F \subseteq \mathscr{F}$.

Definicja 1.12. Mówimy, że formuła $\varphi \in \mathscr{F}$ jest *konsekwencją logiczną* zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$, albo że *wynika logicznie* ze zbioru F, w rodzinie modeli $\mathscr{M}$, gdy $\varphi \in C^{\mathscr{M}}(F)$.

Wniosek 1.13. *Operator* $C^{\mathscr{M}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.10 i stwierdzenia 1.5. □

1.3. Pojęcie pełności. Równoważność rodzin modeli

W praktyce, semantyka poprzedza zwykle syntaktykę, tzn. formalny system logiczny tworzony jest do konkretnej, zastanej sytuacji. Oczywiście system ten byłby bezużyteczny, gdyby nie przystawał do realiów semantycznych, tzn. powinien on być tak dobrany, aby dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$, formuła $\varphi \in \mathscr{F}$ dawała się wyprowadzić ze zbioru $\mathscr{F}$, wtedy i tylko wtedy, gdy wynika ona logicznie ze zbioru $\mathscr{F}$.

Definicja 1.14. Mówimy o *pełności konsekwencji syntaktycznej* $C_{\mathscr{L}}$ względem konsekwencji $C^{\mathscr{M}}$ określonej na rodzinie modeli $\mathscr{M}$, albo o *pełności systemu logicznego* $\mathscr{L}$ względem rodziny $\mathscr{M}$, gdy dla dowolnego zbioru formuł $F \subseteq \mathscr{F}$ zachodzi równość

$$C_{\mathscr{L}}(F) = C^{\mathscr{M}}(F).$$

Przeważnie, bezpośrednia weryfikacja czy formuła $\varphi \in \mathscr{F}$ jest konsekwencją logiczną zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ bywa trudna, czy wręcz niemożliwa. Pełność umożliwia weryfikację poprzez sprawdzenie wyprowadzalności formuły. Poza tym mając pełny system logiczny, możemy poszukiwać innych rodzin modeli, w których konsekwencja syntaktyczna jest również pełna względem konsekwencji określonej na tej rodzinie.

Definicja 1.15. Rodziny modeli $\mathscr{M}$ i $\mathscr{N}$ nazywamy *równoważnymi*, gdy dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ zachodzi równość

$$C^{\mathscr{M}}(F) = C^{\mathscr{N}}(F).$$

Kilka następnych pojęć pozwoli nam sformułować proste kryterium gwarantujące inkluzję $C_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$.

Definicja 1.16. *Tautologiami w modelu* M nazywamy formuły należące do zbioru $C^{M}(\emptyset)$.

Tautologiami w rodzinie modeli $\mathscr{M}$ nazywamy formuły należące do zbioru $C^{\mathscr{M}}(\emptyset)$.

Zauważmy, że

$$C^{M}(\emptyset) = \Big\{\varphi \in \mathscr{F} : \emptyset \subseteq \mathcal{E}(M) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{E}(M)\Big\} = \Big\{\varphi \in \mathscr{F} : \varphi \in \mathcal{E}(M)\Big\} = \mathcal{E}(M)$$

oraz

$$C^{\mathscr{M}}(\emptyset) = \bigcap_{M \in \mathscr{M}} C^{M}(\emptyset) = \bigcap_{M \in \mathscr{M}} \mathcal{E}(M),$$

a więc tautologie w modelu M, to formuły prawdziwe w modelu M, zaś tautologie w rodzinie $\mathscr{M}$, to formuły prawdziwe we wszystkich modelach rodziny $\mathscr{M}$.

Definicja 1.17. Mówimy, że reguła $r \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{F}) \times \mathscr{F}$ jest *niezawodna w modelu* M, gdy

$$\bigwedge_{\langle F, \varphi \rangle \in r} \varphi \in C^{M}(F).$$

Mówimy, że reguła $r \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{F}) \times \mathscr{F}$ jest *niezawodna w rodzinie modeli* $\mathscr{M}$, gdy

$$\bigwedge_{M \in \mathscr{M}} \bigwedge_{\langle F, \varphi \rangle \in r} \varphi \in C^{M}(F),$$

tzn., gdy

$$\bigwedge_{\langle F,\varphi\rangle\in r} \varphi \in C^{\mathscr{M}}(F).$$

Lemat 1.18. *Aksjomaty zbioru A są tautologiami w rodzinie modeli $\mathscr{M}$, tzn. $A \subseteq C^{\mathscr{M}}(\emptyset)$, a wszystkie reguły zbioru R są niezawodne w rodzinie $\mathscr{M}$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ zachodzi inkluzja*

$$C_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^{\mathscr{M}}(F).$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Jeśli $C_{\mathscr{L}}(F) = \emptyset$, to teza lematu jest oczywista. Przypuśćmy więc, że $C_{\mathscr{L}}(F) \neq \emptyset$ i weźmy dowolną formułę $\varphi \in C_{\mathscr{L}}(F)$. Wtedy $\varphi \in C^n_{\mathscr{L}}(F)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wykażemy indukcyjnie względem stopnia konsekwencji, że $\varphi \in C^{\mathscr{M}}(F)$.

Załóżmy najpierw, że $n = 0$. Wtedy $\varphi \in C^0_{\mathscr{L}}(F) = F \cup A$. Wobec wniosku 1.13 zachodzi inkluzja $F \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$. Ponadto, wobec założenia, $A \subseteq C^{\mathscr{M}}(\emptyset)$, a ponieważ $\emptyset \subseteq F$, to wobec wniosku 1.13 mamy $A \subseteq C^{\mathscr{M}}(\emptyset) \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$. Zatem $F \cup A \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$, co oznacza, że $\varphi \in C^{\mathscr{M}}(F)$.

Załóżmy teraz, że dla pewnego $n \geqslant 0$ i każdej formuły $\psi \in C^n_{\mathscr{L}}(F)$ zachodzi $\psi \in C^{\mathscr{M}}(F)$ i przypuśćmy, że $\varphi \in C^{n+1}_{\mathscr{L}}(F)$. Gdyby $\varphi \in C^n_{\mathscr{L}}(F)$, to wprost z założenia indukcyjnego mielibyśmy $\varphi \in C^{\mathscr{M}}(F)$. Niech więc $\varphi \in C^{n+1}_{\mathscr{L}}(F) \setminus C^n_{\mathscr{L}}(F)$. Wtedy

$$\bigvee_{r\in R} \bigvee_{H\subseteq C^n_{\mathscr{L}}(F)} \langle H, \varphi\rangle \in r.$$

Ale na mocy założenia lematu reguła r jest niezawodna w rodzinie $\mathscr{M}$, więc zgodnie z definicją 1.17

$$\varphi \in C^{\mathscr{M}}(H). \tag{$*$}$$

Ponieważ $H \subseteq C^n_{\mathscr{L}}(F)$, to wobec założenia indukcyjnego dla dowolnej formuły $\psi \in H$ jest $\psi \in C^{\mathscr{M}}(F)$, czyli $H \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$. Stąd wobec wniosku 1.13 otrzymujemy inkluzję $C^{\mathscr{M}}(H) \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$, która w połączeniu z warunkiem ($*$) daje $\varphi \in C^{\mathscr{M}}(F)$. Wobec dowolności wyboru formuły φ oznacza to, że $C_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$.

($\Leftarrow$) Skoro $C_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$ dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$, to w szczególności $A = C^0_{\mathscr{L}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathscr{L}}(\emptyset) \subseteq C^{\mathscr{M}}(\emptyset)$, a więc aksjomaty zbioru A są tautologiami w rodzinie $\mathscr{M}$.

Weźmy dowolną regułę $r \in R$ i dowolny układ $\langle F, \varphi\rangle \in r$. Ponieważ $F \subseteq C^0_{\mathscr{L}}(F)$, to wobec definicji konsekwencji syntaktycznej (def. 1.6) mamy

$$\varphi \in C^1_{\mathscr{L}}(F) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{L}}(F) = C_{\mathscr{L}}(F).$$

Wobec założenia wnosimy więc, że $\varphi \in C^{\mathscr{M}}(F)$, co oznacza niezawodność reguły r w rodzinie $\mathscr{M}$. □

Lemat nasuwa metodę poszukiwania pełnego systemu logicznego. Mianowicie, wychodząc od pustego zbioru aksjomatów oraz pustego zbioru reguł wnioskowania, poszerzamy je o dodatkowe tautologie w danej rodzinie modeli $\mathscr{M}$ oraz dodatkowe reguły niezawodne w rodzinie $\mathscr{M}$, tak długo, jak długo dla pewnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ zachodzi inkluzja $C_{\mathscr{L}}(F) \subsetneq C^{\mathscr{M}}(F)$.

Dla ułatwienia późniejszych poszukiwań rodzin równoważnych, ważne jest, aby przyjmowane aksjomaty i reguły wnioskowania były możliwie jak „najsłabsze”. Jednak z drugiej strony „słabe” reguły wnioskowania mogą okazać się nieprzyjemne w użyciu, a tym samym mogą utrudnić dowód pełności. Można jednak posługiwać się także innymi regułami. Oczywiście nie mogą one być wybrane dowolnie.

Definicja 1.19. Mówimy, że reguła $r \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{F}) \times \mathscr{F}$ jest *wyprowadzalna* względem konsekwencji syntaktycznej $C_{\mathscr{L}}$, gdy

$$\bigwedge_{\langle F,\varphi\rangle \in r} \varphi \in C_{\mathscr{L}}(F).$$

Powyższy warunek gwarantuje, że wnioskowanie przy pomocy reguł wyprowadzalnych nie powiększa zbioru $C_{\mathscr{L}}(F)$.

Wniosek 1.20. *Jeżeli wszystkie aksjomaty zbioru A są tautologiami w rodzinie modeli $\mathscr{M}$ i wszystkie reguły zbioru R są niezawodne w rodzinie $\mathscr{M}$, a reguła $r \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{F}) \times \mathscr{F}$ jest wyprowadzalna, to jest ona również niezawodna w rodzinie $\mathscr{M}$.*

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle F, \varphi\rangle \in r$. Ponieważ reguła r jest wyprowadzalna, to zgodnie z definicją 1.19, $\varphi \in C_{\mathscr{L}}(F)$, ale wobec lematu 1.18 zachodzi inkluzja $C_{\mathscr{L}}(F) \subseteq C^{\mathscr{M}}(F)$, więc $\varphi \in C^{\mathscr{M}}(F)$, co oznacza niezawodność reguły r. □

Na zakończenie tego rozdziału prezentujemy lemat, który pozwoli nam uprościć zapis wielu dalszych wnioskowań.

Lemat 1.21. *Jeżeli $\langle H, \varphi\rangle \in r$ dla pewnego zbioru $H \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$, a reguła r jest wyprowadzalna, lub też jest jedną z reguł zbioru R, to $\varphi \in C_{\mathscr{L}}(F)$.*

Dowód. Załóżmy, że $\langle H, \varphi\rangle \in r$ i $H \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$. Przypuśćmy najpierw, że r jest regułą wyprowadzalną. Wobec definicji 1.19 mamy więc $\varphi \in C_{\mathscr{L}}(H)$. Na mocy punktów (b) i (c) stwierdzenia 1.8, z inkluzji $H \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$ otrzymujemy inkluzję $C_{\mathscr{L}}(H) \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$. A zatem $\varphi \in C_{\mathscr{L}}(F)$.

Przypuśćmy teraz, że $r \in R$. Skoro $H \subseteq C_{\mathscr{L}}(F)$, to $H \subseteq C^n_{\mathscr{L}}(F)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, gdyż zbiory $C^n_{\mathscr{L}}(F)$ tworzą ciąg wstępujący. A ponieważ $\langle H, \varphi\rangle \in r$, to wobec definicji 1.6 konsekwencji syntaktycznej otrzymujemy $\varphi \in C^{n+1}_{\mathscr{L}}(F)$. Zatem $\varphi \in \bigcup_{n=0}^{\infty} C^{n+1}_{\mathscr{L}}(F) = C_{\mathscr{L}}(F)$. □

Rozdział 2

Relacyjne bazy danych

Pod koniec lat sześćdziesiątych, Edgar Frank Codd dał początek badaniom związanym z przechowywaniem informacji przy pomocy relacji. Okazało się, że taka forma reprezentacji danych niesie z sobą wiele udogodnień, jak na przykład łatwą eliminację nadmiarowości danych, czy też szybki dostęp do informacji.

2.1. Podstawowe pojęcia relacyjnych baz danych

Definicja 2.1. *Zbiorem atrybutów* nazywamy pewien wyróżniony niepusty i skończony zbiór U.

Literę U wybraliśmy z premedytacją — U jak uniwersum.

Definicja 2.2. Dla dowolnego atrybutu $u \in U$, niech $\mathcal{D}(u)$ oznacza pewien ustalony zbiór związany z atrybutem u. Zbiór ten nazywamy *dziedziną atrybutu u*. Wymagamy przy tym, aby $\#\mathcal{D}(u) \geqslant 2$ dla każdego atrybutu $u \in U$.

Definicja 2.3. *Krotką* (ang. *tuple*) nazywamy dowolne odwzorowanie

$$t\colon U \to \bigcup_{u \in U} \mathcal{D}(u) \qquad \text{takie, że} \qquad \bigwedge_{u \in U} t(u) \in \mathcal{D}(u).$$

Zbiór wszystkich krotek oznaczamy przez $\mathscr{T}$.

Definicja 2.4. *Relacją* nad zbiorem atrybutów U nazywamy dowolny skończony podzbiór $R \subseteq \mathscr{T}$. Zbiór wszystkich relacji oznaczamy przez $\mathscr{R}$.

Definicja 2.5. *Bazą danych* nazywamy dowolny niepusty i skończony zbiór relacji.

Zauważmy, że funkcję określoną na zbiorze skończonym możemy utożsamiać z ciągiem jej wartości. A więc relację w rozumieniu definicji 2.4 możemy utożsamić ze zbiorem ciągów, czyli właśnie z tym, co klasyczna teoria mnogości nazywa relacją.

W związku z powyższym, relacje możemy wygodnie reprezentować w formie tabel. (Przy czym uporządkowanie wierszy i kolumn nie jest istotnie.)

Przykład 2.6. Rozważmy relację, przedstawiającą dane o pracownikach (EMP) i kierownikach (MGR) różnych oddziałów (DEPT) pewnej firmy, reprezentowaną przez tabelę

EMP	DEPT	MGR
Hilbert	Math	Gauss
Pythagoras	Math	Gauss
Turing	Computer Science	von Neumann

Zbiorem atrybutów jest zbiór $U = \{\mathrm{EMP}, \mathrm{DEPT}, \mathrm{MGR}\}$, zaś $\mathcal{D}(\mathrm{EMP})$, $\mathcal{D}(\mathrm{DEPT})$ oraz $\mathcal{D}(\mathrm{MGR})$ są pewnymi podzbiorami zbioru ciągów skończonych o wyrazach ze zbioru $\{\text{'a'}, \ldots, \text{'z'}, \text{'A'}, \ldots, \text{'Z'}, \text{' '}\}$, tzn. są zbiorami „napisów". Ponadto wiersze tabeli reprezentują krotki należące do relacji.

Zauważmy, że gdyby np. $\#\mathcal{D}(\mathrm{EMP}) = 1$, to wszystkie wpisy w kolumnie EMP musiałyby być takie same. Ponieważ tabela mająca w danej kolumnie zawsze takie same wpisy wydaje się nieco dziwna, to naturalnym jest aby $\#\mathcal{D}(u) \geqslant 2$ dla $u \in U$.

2.2. Operacje na relacjach

Ponieważ relacje są zbiorami, to możemy na nich wykonywać np. mnogościowe operacje sumy, przekroju i różnicy. Operacje te pozwalają na dopisywanie danych, wybieranie wspólnych danych i na usuwanie danych. Jednak z teoretycznego punktu widzenia dużo ważniejszymi operacjami są operacja rzutowania i operacja złączenia naturalnego.

Definicja 2.7. *Rzutem* relacji $R \in \mathscr{R}$ na zbiór $X \subseteq U$ nazywamy relację

$$R[X] = \Big\{t|_X : t \in R\Big\}.$$

Zauważmy, że wcale nie jest prawdą, iż

$$t|_X \in R[X] \iff t \in R.$$

Rzut relacji z przykładu 2.6 na zbiór $\{\mathrm{DEPT}, \mathrm{MGR}\}$ reprezentuje tabela

DEPT	MGR
Math	Gauss
Computer Science	von Neumann

Krotka (funkcja) reprezentowana ciągiem wartości (Cauchy, Math, Gauss) nie należy do wyjściowej relacji, podczas gdy jej zacieśnienie do zbioru $\{\mathrm{DEPT}, \mathrm{MGR}\}$, reprezentowane przez ciąg wartości (Math, Gauss), należy do rzutu tej relacji na zbiór $\{\mathrm{DEPT}, \mathrm{MGR}\}$.

Prawdziwa jest natomiast następująca równoważność

$$t|_X \in R[X] \iff \bigvee_{r \in R} t|_X = r|_X.$$

Definicja 2.8. *Złączeniem naturalnym* relacji $R[X]$ i $S[Y]$ nazywamy relację

$$R[X] \bowtie S[Y] = \Big\{t|_{X \cup Y} : t|_X \in R[X] \land t|_Y \in S[Y]\Big\}.$$

W związku ze wcześniejszym spostrzeżeniem, możemy napisać

$$(\bowtie) \qquad R[X] \bowtie S[Y] = \Big\{t|_{X \cup Y} : \bigvee_{r \in R} t|_X = r|_X \land \bigvee_{s \in S} t|_Y = s|_Y\Big\}.$$

Przykład 2.9. Wróćmy do relacji z przykładu 2.6. Jej rzuty na zbiory {EMP, DEPT} i {DEPT, MGR} reprezentują tabele

EMP	DEPT
Hilbert	Math
Pythagoras	Math
Turing	Computer Science

DEPT	MGR
Math	Gauss
Computer Science	von Neumann

Ponadto złączenie naturalne tych rzutów równe jest wyjściowej relacji, co sprawia, że rzuty relacji początkowej są od niej samej w pewnym sensie lepsze. Mianowicie nazwisko kierownika dowolnego oddziału przechowywane jest dokładnie jeden raz, co ma duże znaczenie, gdyż relacje zawierają zwykle wiele krotek. Poza tym, w praktyce, często zachodzi konieczność modyfikowania pewnych danych. W przypadku powyższych rzutów, zmiana kierownika jakiegoś oddziału wymaga aktualizacji tylko jednej krotki.

Rozważmy teraz relację reprezentowaną następującą tabelą

EMP	DEPT	MGR
Hilbert	Math	Gauss
Pythagoras	Math	Gauss
Turing	Computer Science	von Neumann
Cauchy	Math	Euler

Jej rzuty na zbiory {EMP, DEPT} i {DEPT, MGR} reprezentują tabele

EMP	DEPT
Hilbert	Math
Pythagoras	Math
Turing	Computer Science
Cauchy	Math

DEPT	MGR
Math	Gauss
Computer Science	von Neumann
Math	Euler

Natomiast złączenie naturalne powyższych rzutów reprezentuje tabela

EMP	DEPT	MGR
Hilbert	Math	Gauss
Hilbert	Math	Euler
Pythagoras	Math	Gauss
Pythagoras	Math	Euler
Turing	Computer Science	von Neumann
Cauchy	Math	Gauss
Cauchy	Math	Euler

Tak więc wyjściowa relacja jest właściwym podzbiorem złączenia naturalnego swoich rzutów.

Okazuje się, że inkluzja jaką zaobserwowaliśmy w powyższym przykładzie nie jest przypadkowa.

Lemat 2.10. *Dla dowolnej relacji $R \in \mathscr{R}$, jeżeli $X \cup Y = U$, to $R \subseteq R[X] \bowtie R[Y]$.*

Dowód. Jeśli $R = \emptyset$, to oczywiście $R \subseteq R[X] \bowtie R[Y]$. Załóżmy więc, że $R \neq \emptyset$ i weźmy dowolną krotkę $t \in R$. Wtedy $t|_X \in R[X]$ i $t|_Y \in R[Y]$, a więc $t = t|_U = t|_{X \cup Y} \in R[X] \bowtie R[Y]$. □

Z praktycznego punktu widzenia, interesujące jest przy jakich założeniach, relacja jest równa złączeniu naturalnemu swoich rzutów. W kolejnych dwóch rozdziałach przedstawimy warunki gwarantujące tę równość.

Rozdział 3

Zależności funkcyjne

Przyjrzyjmy się ponownie relacji z przykładu 2.9, zawierającej dane o pracownikach (EMP) i kierownikach (MGR) różnych oddziałów (DEPT) pewnej firmy. Ponieważ jeden oddział powinien mieć jednego kierownika, to relacja ta nie może opisywać żadnej realnej sytuacji. Istnienie dokładnie jednego kierownika w każdym oddziale oznacza, że jeśli w jakiejś „dopuszczalnej" relacji dwie krotki są równe na atrybucie DEPT, to są też równe na atrybucie MGR. Innymi słowy wartość krotki na atrybucie MGR zależy od wartości krotki na atrybucie DEPT. Rzut wyjściowej relacji na zbiór $\{\mathrm{DEPT}, \mathrm{MGR}\}$ wydaje się więc przedstawiać informacje w naturalnej postaci.

3.1. Określenie zależności funkcyjnych

Definicja 3.1. *Zależnością funkcyjną* (ang. *functional dependency*) nad zbiorem atrybutów U nazywamy dowolną trójkę $X \longrightarrow Y$, gdzie $X, Y \subseteq U$.

Zbiór wszystkich zależności funkcyjnych nad zbiorem atrybutów U oznaczamy przez $\mathscr{F}$, tzn.

$$\mathscr{F} = \mathscr{P}(U) \times \{\longrightarrow\} \times \mathscr{P}(U).$$

Naturalnym wydaje się traktować zależności funkcyjne jak pary, gdyż element '$\longrightarrow$' jest w istocie pojedynczym symbolem. Jednakże w następnym rozdziale wprowadzimy zależności wielowartościowe, a w kolejnym, zależności funkcyjne i wielowartościowe będziemy traktować jako jeden zbiór formuł. Dlatego zależy nam na rozróżnieniu pomiędzy tymi zależnościami. (Nie byłoby to możliwe gdybyśmy zależności funkcyjne i wielowartościowe traktowali po prostu jak pary.)

Definicja 3.2. Mówimy, że zależność funkcyjna $X \longrightarrow Y$ jest *prawdziwa* w relacji $R \in \mathscr{R}$, gdy

$$\text{(FD)} \qquad \bigwedge_{r,s \in R} \Big(r|_X = s|_X \Longrightarrow r|_Y = s|_Y \Big).$$

Zbiór wszystkich zależności funkcyjnych prawdziwych w relacji R oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$.

Warunek (FD) przypomina określenie funkcji, co tłumaczy nazwę „zależność funkcyjna".

Przykład 3.3. Zgodnie z rozważaniami prowadzonymi na wstępie tego rozdziału, w relacji z przykładu 2.6, jak i w każdej innej „dopuszczalnej" relacji określonej na zbiorze atrybutów $U = \{\mathrm{EMP}, \mathrm{DEPT}, \mathrm{MGR}\}$, prawdziwa jest zależność funkcyjna $\{\mathrm{DEPT}\} \longrightarrow \{\mathrm{MGR}\}$.

Ponieważ dowolna relacja $R \in \mathscr{R}$ jest modelem dla zależności funkcyjnych, to na rodzinie $\mathscr{R}$ możemy zdefiniować operator konsekwencji.

Definicja 3.4. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{R}$ nazywamy funkcję $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{F}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{F}}(F) = \bigcap_{R \in \mathscr{R}} C^{R}_{\mathscr{F}}(F),$$

dla wszelkich $F \subseteq \mathscr{F}$, gdzie

$$C^{R}_{\mathscr{F}}(F) = \Big\{\varphi \in \mathscr{F} : F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)\Big\}.$$

Wniosek 3.5. *Operator* $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{F}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.13. □

Okazuje się, że warunek $X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$ pociąga równość $R = R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y']$.

Twierdzenie 3.6 (Heath). *Jeśli zależność funkcyjna* $X \longrightarrow Y$ *jest prawdziwa w relacji* $R \in \mathscr{R}$, *to*

$$R = R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y'].$$

Dowód. Ustalmy dowolną relację $R \in \mathscr{R}$ i załóżmy, że $X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$. Wobec lematu 2.10 wystarczy pokazać, że $R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y'] \subseteq R$. Weźmy więc dowolną krotkę $t \in R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y']$. Wtedy, wobec równości ($\bowtie$) z rozdziału drugiego otrzymujemy

$$\bigvee_{r \in R} t|_{X \cup Y} = r|_{X \cup Y} \quad \wedge \quad \bigvee_{s \in R} t|_{X \cup Y'} = s|_{X \cup Y'}.$$

Mamy więc $r|_X = s|_X$, skąd wobec założenia $X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$ otrzymujmy równość $r|_Y = s|_Y$. A ponieważ $t|_Y = r|_Y$, to w rezultacie $t|_Y = s|_Y$. Ponadto $t|_{X \cup Y'} = s|_{X \cup Y'}$, czyli $t|_{Y \cup (X \cup Y')} = s|_{Y \cup (X \cup Y')}$, tzn. $t = s \in R$, co dowodzi inkluzji $R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y'] \subseteq R$. □

Przykład 3.7. Zauważmy, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia Heath nie jest prawdziwe. Rozważmy relację reprezentowaną następującą tabelą

EMP	CHILD	SKILL
Hilbert	Hilda	Math
Hilbert	Hilda	Physics
Pythagoras	Peter	Math
Pythagoras	Paul	Math
Pythagoras	Peter	Philosophy
Pythagoras	Paul	Philosophy
Turing	Tom	Computer Science

a przedstawiającą informację o dzieciach (CHILD) oraz specjalnościach (SKILL) poszczególnych pracowników (EMP) pewnej firmy. Rzuty tej relacji na zbiory {EMP, CHILD} i {EMP, SKILL} reprezentują tabele

EMP	CHILD
Hilbert	Hilda
Pythagoras	Peter
Pythagoras	Paul
Turing	Tom

EMP	SKILL
Hilbert	Math
Hilbert	Physics
Pythagoras	Math
Pythagoras	Philosophy
Turing	Computer Science

Złączenie naturalne powyższych rzutów jest równe wyjściowej relacji, a przy tym żadna z zależności {EMP} $\longrightarrow$ {CHILD} i {EMP} $\longrightarrow$ {SKILL} nie jest w tej relacji prawdziwa.

Chociaż prawdziwość pewnych zależności funkcyjnych wynika wprost ze specyfiki przechowywanych danych (tak jak to miało miejsce w przypadku relacji z przykładów 2.6 i 2.9), to twierdzenie Heath przemawia wyraźnie za dogłębnym zbadaniem zależności funkcyjnych.

3.2. System logiki zależności funkcyjnych

W roku 1974, William Ward Armstrong w jednej z pierwszych prac poświęconych teorii relacyjnych baz danych, przedstawił układ aksjomatów i reguł wnioskowania dla zależności funkcyjnych, wspólnie określanych mianem „aksjomatów Armstronga". Układ, który tutaj przyjmujemy jest równoważny „aksjomatom Armstronga".

Definicja 3.8. Systemem $\mathscr{FD}$ logiki zależności funkcyjnych nazywamy układ złożony ze zbioru aksjomatów

$$f_1 = \Big\{X \longrightarrow Y \in \mathscr{F} : X \supseteq Y\Big\}$$

oraz reguł wnioskowania

$$f_2 = \Big\{\langle F, \varphi\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{F}) \times \mathscr{F} : \bigvee_{X,Y,Z \subseteq U} \Big(F = \{X \longrightarrow Y\} \wedge \varphi = X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z\Big)\Big\},$$

$$f_3 = \Big\{\langle F, \varphi\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{F}) \times \mathscr{F} : \bigvee_{X,Y,Z \subseteq U} \Big(F = \{X \longrightarrow Y, Y \longrightarrow Z\} \wedge \varphi = X \longrightarrow Z\Big)\Big\}.$$

Zapewne bardziej przyjazny jest zapis reguł w postaci „ułamka" (zwanego *schematem wnioskowania*), w którym „licznik" odpowiada zbiorowi przesłanek, zaś „mianownik" odpowiada wnioskowi. W takiej notacji reguły f_2 i f_3 wyglądają następująco:

$$f_2 : \quad \frac{X \longrightarrow Y}{X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z}\,,$$

$$f_3 : \quad \frac{X \longrightarrow Y, \;\; Y \longrightarrow Z}{X \longrightarrow Z}\,.$$

Aksjomaty zbioru f_1, ze względu na ich regularność, również możemy zapisać w postaci schematu:

$$f_1 : \quad X \longrightarrow X \setminus Y\,.$$

Definicja 3.9. *Operatorem konsekwencji syntaktycznej w systemie* $\mathscr{FD}$ nazywamy funkcję $C_{\mathscr{FD}} : \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ określoną wzorem

$$C_{\mathscr{FD}}(F) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{FD}}(F)$$

dla dowolnego $F \subseteq \mathscr{F}$, gdzie

$$C^0_{\mathscr{FD}}(F) = F \cup f_1,$$

$$C^{n+1}_{\mathscr{FD}}(F) = C^n_{\mathscr{FD}}(F) \cup \Big\{\varphi \in \mathscr{F} : \bigvee_{f \in \{f_2, f_3\}} \; \bigvee_{G \subseteq C^n_{\mathscr{FD}}(F)} \langle G, \varphi\rangle \in f\Big\} \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nadmieńmy, że wobec skończoności zbioru formuł $\mathscr{F}$, ciąg $\left(C^n_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ stabilizuje się, a więc suma $\bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$ ma skończenie wiele różnych składników.

Wniosek 3.10. *Operator $C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(\,\cdot\,)$ ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.8. □

W pierwszym rozdziale tej pracy wspomnieliśmy, że czasem przyjęte reguły wnioskowania nie są zbyt wygodne w użyciu. Wyprowadzimy teraz kilka dodatkowych reguł, które usprawnią nasze dalsze rozważania.

Stwierdzenie 3.11. *Reguła o schemacie*

$$f_4 : \quad \frac{X \longrightarrow Y}{X \longrightarrow Y \setminus Z}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle F, \varphi\rangle \in f_4$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $F = \{X \longrightarrow Y\}$ i $\varphi = X \longrightarrow Y \setminus Z$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\varphi \in C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$. Naturalnie $Y \longrightarrow Y \setminus Z \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$. Zatem $\{X \longrightarrow Y, Y \longrightarrow Y \setminus Z\} \subseteq C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$ oraz $\langle\{X \longrightarrow Y, Y \longrightarrow Y \setminus Z\}, X \longrightarrow Y \setminus Z\rangle \in f_3$, skąd wobec lematu 1.21 otrzymujemy $\varphi = X \longrightarrow Y \setminus Z \in C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$. □

Zwracamy uwagę, że zbiór $Y \setminus Z$ występujący w schemacie reguły f_4 jest dowolnym podzbiorem zbioru Y. W szczególności może to być np. zbiór $Y \cap Z$ dla dowolnego $Z \subseteq U$.

Stwierdzenie 3.12. *Reguła o schemacie*

$$f_2' : \quad \frac{X \longrightarrow Y}{X \cup Z \cup T \longrightarrow Y \cup Z}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle F, \varphi\rangle \in f_2'$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z, T \subseteq U$, że $F = \{X \longrightarrow Y\}$ i $\varphi = X \cup Z \cup T \longrightarrow Y \cup Z$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\varphi \in C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$. Ponieważ $F \subseteq C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$ i $\langle F, X \cup Z \cup T \longrightarrow Y \cup Z \cup T\rangle \in f_2$, to wobec lematu 1.21 otrzymujemy $X \cup Z \cup T \longrightarrow Y \cup Z \cup T \in C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$. Teraz $\{X \cup Z \cup T \longrightarrow Y \cup Z \cup T\} \subseteq C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$ i $\langle\{X \cup Z \cup T \longrightarrow Y \cup Z \cup T\}, X \cup Z \cup T \longrightarrow Y \cup Z\rangle \in f_4$, skąd przy pomocy lematu 1.21 dostajemy $\varphi = X \cup Z \cup T \longrightarrow Y \cup Z \in C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F)$. □

Przypomnijmy, że przez X' oznaczamy dopełnienie zbioru X. Zwracamy więc uwagę na subtelną różnicę pomiędzy zbiorem f_2', a dopełnieniem zbioru f_2, czyli zbiorem ${f_2}'$. Gdyby zbiór ${f_2}'$ kiedykolwiek był nam do czegokolwiek potrzebny, to oznaczylibyśmy go wyraźniej przez $(f_2)'$.

Stwierdzenie 3.13. *Reguła o schemacie*

$$f_5 : \quad \frac{X \longrightarrow Y, \;\; Z \longrightarrow T}{X \cup Z \longrightarrow Y \cup T}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle F, \varphi\rangle \in f_5$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z, T \subseteq U$, że $F = \{X \longrightarrow Y, Z \longrightarrow T\}$ i $\varphi = X \cup Z \longrightarrow Y \cup T$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\varphi \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Ponieważ $\{X \longrightarrow Y\} \subseteq F \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$ i $\langle\{X \longrightarrow Y\}, X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z\rangle \in f_2$, to wobec lematu 1.21 otrzymujemy $X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Podobnie $\{Z \longrightarrow T\} \subseteq F \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$ i $\langle\{Z \longrightarrow T\}, Z \cup Y \longrightarrow T \cup Y\rangle \in f_2$, skąd na mocy lematu 1.21 dostajemy $Y \cup Z \longrightarrow Y \cup T \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Teraz $\{X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z, Y \cup Z \longrightarrow Y \cup T\} \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$ i $\langle\{X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z, Y \cup Z \longrightarrow Y \cup T\}, X \cup Z \longrightarrow Y \cup T\rangle \in f_3$, co zgodnie z lematem 1.21 oznacza, że $\varphi = X \cup Z \longrightarrow Y \cup T \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. □

Ponieważ w dowodach wyprowadzalności reguł, lemat 1.21 wykorzystywany jest zawsze w takim samym kontekście, to w wyprowadzeniach kolejnych reguł nie będziemy wyraźnie zaznaczać jego użycia.

Stwierdzenie 3.14. *Reguła o schemacie*

$$f_5' : \quad \frac{X \longrightarrow Y, \ \ Z \longrightarrow T}{X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow Y \cup Z}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathscr{FD}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle F, \varphi\rangle \in f_5'$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z, T \subseteq U$, że $F = \{X \longrightarrow Y, Z \longrightarrow T\}$ i $\varphi = X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow Y \cup T$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\varphi \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Ponieważ $\{X \longrightarrow Y\} \subseteq F \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$ i $\langle\{X \longrightarrow Y\}, X \longrightarrow Y \cap Z\rangle \in f_4$, to $X \longrightarrow Y \cap Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Ponadto $Z \setminus Y \longrightarrow Z \setminus Y \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{FD}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$, a więc $\{X \longrightarrow Y \cap Z, Z \setminus Y \longrightarrow Z \setminus Y\}$ i $\langle\{X \longrightarrow Y \cap Z, Z \setminus Y \longrightarrow Z \setminus Y\}, X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow (Y \cap Z) \cup (Z \setminus Y)\rangle \in f_5$, skąd $X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Teraz $\{X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow Z, Z \longrightarrow T\} \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$ i $\langle\{X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow Z, Z \longrightarrow T\}, X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow T\rangle \in f_3$, czyli $X \cup (Z \setminus T) \longrightarrow T \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Tak więc $\{X \longrightarrow Y, X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow T\} \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$ i $\langle\{X \longrightarrow Y, X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow T\}, X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow Y \cup T\rangle \in f_5$, co oznacza, że $\varphi = X \cup (Z \setminus Y) \longrightarrow Y \cup T \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. □

Stwierdzenie 3.15. *Reguła o schemacie*

$$f_6 : \quad \frac{X \cup Y \longrightarrow Z, \ \ X \longrightarrow Y}{X \longrightarrow Z}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathscr{FD}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle F, \varphi\rangle \in f_6$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $F = \{X \cup Y \longrightarrow Z, X \longrightarrow Y\}$ i $\varphi = X \longrightarrow Z$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\varphi \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Jako, że $\{X \longrightarrow Y\} \subseteq F \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$ i $\langle\{X \longrightarrow Y\}, X \cup X \longrightarrow Y \cup X\rangle \in f_2$, to $X \longrightarrow X \cup Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Mamy więc $\{X \longrightarrow X \cup Y, X \cup Y \longrightarrow Z\} \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$ i $\langle\{X \longrightarrow X \cup Y, X \cup Y \longrightarrow Z\}, X \longrightarrow Z\rangle \in f_3$, skąd otrzymujemy $\varphi = X \longrightarrow Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. □

Zgodnie z rozważaniami prowadzonymi w rozdziale pierwszym, powinniśmy wykazać teraz pełność konsekwencji syntaktycznej $C_{\mathscr{FD}}$ względem konsekwencji $C_{\mathscr{F}}^{\mathscr{R}}$. Dowód ten przestawiamy w rozdziale szóstym, czyniąc tutaj jedynie pewne przygotowania.

Twierdzenie 3.16. *Aksjomaty zbioru f_1 są tautologiami w rodzinie $\mathscr{R}$, a reguły f_2, f_3 są niezawodne w rodzinie $\mathscr{R}$.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że aksjomaty zbioru f_1 są tautologiami w rodzinie $\mathscr{R}$, czyli że zachodzi inkluzja

$$\left\{X \longrightarrow Y \in \mathscr{F} : X \supseteq Y\right\} \subseteq \bigcap_{R \in \mathscr{R}} \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R).$$

Oczywiście zbiór f_1 jest niepusty. Weźmy więc dowolną zależność $X \longrightarrow Y \in \mathscr{F}$ taką, że $X \supseteq Y$ i ustalmy dowolną relację $R \in \mathscr{R}$. Musimy pokazać, że $X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$, tzn. że zależność $X \longrightarrow Y$ spełnia warunek (FD). Wybierzmy więc dowolne krotki r, $s \in R$ takie, że $r|_X = s|_X$. Ponieważ $Y \subseteq X$, to

$$r|_X = s|_X \iff \bigwedge_{x \in X} r(x) = s(x) \implies \bigwedge_{x \in Y} r(x) = s(x) \iff r|_Y = s|_Y,$$

co oznacza, że aksjomaty zbioru f_1 są tautologiami w rodzinie $\mathscr{R}$.

Wykażemy teraz, że reguła f_2 jest niezawodna w rodzinie $\mathscr{R}$. Weźmy więc dowolny układ $\langle F, \varphi \rangle \in f_2$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $F = \{X \longrightarrow Y\}$ i $\varphi = X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z$. Wobec definicji 3.4 mamy pokazać, że

$$\varphi \in \bigcap_{R \in \mathscr{R}} \left\{\psi \in \mathscr{F} : F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R) \Longrightarrow \psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)\right\}. \tag{$*$}$$

Ustalmy więc dowolną relację $R \in \mathscr{R}$ i przypuśćmy, że $F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$, tzn. zależność $X \longrightarrow Y$ spełnia warunek (FD). Mamy sprawdzić, że zależność φ również spełnia warunek (FD). Weźmy więc dowolne krotki $r, s \in R$ i załóżmy, że $r|_{X \cup Z} = s|_{X \cup Z}$, wtedy $r|_Z = s|_Z$ oraz $r|_X = s|_X$. Ponieważ $F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$, to wobec warunku (FD) $r|_Y = s|_Y$, a więc $r|_{Y \cup Z} = s|_{Y \cup Z}$, co oznacza niezawodność reguły f_2 w rodzinie $\mathscr{R}$.

Wykażemy teraz, że reguła f_3 jest niezawodna w rodzinie $\mathscr{R}$. Weźmy więc dowolny układ $\langle F, \varphi \rangle \in f_3$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $F = \{X \longrightarrow Y, Y \longrightarrow Z\}$ i $\varphi = X \longrightarrow Z$. Mamy pokazać, że zachodzi warunek ($*$). Ustalmy więc dowolną relację $R \in \mathscr{R}$ i przypuśćmy, że $F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$, tzn. zależności $X \longrightarrow Y$ i $Y \longrightarrow Z$ spełniają warunek (FD). Musimy sprawdzić, że zależność φ również spełnia warunek (FD). Weźmy dowolne krotki $r, s \in R$ i załóżmy, że $r|_X = s|_X$. Ponieważ $X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$, to wobec warunku (FD) jest $r|_Y = s|_Y$. Ale $Y \longrightarrow Z \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$, więc wobec warunku (FD) otrzymujemy $r|_Z = s|_Z$, co oznacza niezawodność reguły f_3 w rodzinie $\mathscr{R}$. □

Wniosek 3.17. *Reguły f_2', f_4, f_5, f_5' i f_6 są niezawodne w rodzinie $\mathscr{R}$.*

Dowód. Wynika wprost z twierdzenia 3.16 oraz wniosku 1.20. □

Rozdział 4

Zależności wielowartościowe

Przyjrzyjmy się ponownie relacji z przykładu 3.7. Udało się nam wskazać takie rzuty tej relacji, których złączenie naturalne jest równe wyjściowej relacji, a przy tym nie są one konsekwencją twierdzenia Heath (tw. 3.6). Naturalnym jest więc pytanie o warunek konieczny i wystarczający na to, aby złączenie naturalne rzutów danej relacji było równe tej relacji.

Zauważmy, że powtórzenia danych występujące w relacji z przykładu 3.7 wynikają stąd, że jeśli dwie krotki są równe na atrybucie EMP, to ich wartości na atrybucie CHILD (albo na atrybucie SKILL) możemy ze sobą zamienić, nie zmieniając samej relacji. Specyfika danych sprawia, że jeśli dany pracownik ma dziecko c_1 i jest specjalistą w dziedzinie s_1 oraz ma dziecko c_2 i jest specjalistą w dziedzinie s_2, to ma również dziecko c_2 i jest specjalistą w dziedzinie s_1 oraz ma dziecko c_1 i jest specjalistą w dziedzinie s_2. Powyższe spostrzeżenie motywuje nas do wnikliwego zbadania podobnych sytuacji.

4.1. Określenie zależności wielowartościowych

Definicja 4.1. *Zależnością wielowartościową* (ang. *multivalued dependency*) nad zbiorem atrybutów U nazywamy dowolną trójkę $X \twoheadrightarrow Y$, gdzie $X, Y \subseteq U$. Zbiór wszystkich zależności wielowartościowych nad zbiorem atrybutów U oznaczamy przez $\mathscr{M}$, tzn.

$$\mathscr{M} = \mathscr{P}(U) \times \{\twoheadrightarrow\} \times \mathscr{P}(U).$$

Definicja 4.2. Mówimy, że zależność wielowartościowa $X \twoheadrightarrow Y$ jest *prawdziwa* w relacji $R \in \mathscr{R}$, gdy

$$\text{(MVD)} \qquad \bigwedge_{r,s \in R} \Big[r|_X = s|_X \Longrightarrow \bigvee_{t \in R} \Big(t|_{X \cup Y} = r|_{X \cup Y} \wedge t|_{X \cup Y'} = s|_{X \cup Y'} \Big) \Big].$$

Zbiór wszystkich zależności wielowartościowych prawdziwych w relacji $R \in \mathscr{R}$ oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$.

Zależności wielowartościowe w relacjach odkryli niezależnie od siebie Ronald Fagin i Carlo Zaniolo. Ronald Fagin rozważał początkowo jedynie takie zależności wielowartościowe $X \twoheadrightarrow Y$ dla których $X \cap Y = \emptyset$. Jest on także twórcą nazwy „zależności wielowartościowe”.

Przykład 4.3. Zgodnie z rozważaniami prowadzonymi na wstępie tego rozdziału, w relacji z przykładu 3.7, jak i w każdej innej „dopuszczalnej” relacji określonej na zbiorze atrybutów $U = \{\mathrm{EMP}, \mathrm{CHILD}, \mathrm{SKILL}\}$, prawdziwe są zależności wielowartościowe $\{\mathrm{EMP}\} \twoheadrightarrow \{\mathrm{CHILD}\}$ i $\{\mathrm{EMP}\} \twoheadrightarrow \{\mathrm{SKILL}\}$.

Ponieważ dowolna relacja $R \in \mathscr{R}$ jest modelem dla zależności wielowartościowych, to na rodzinie $\mathscr{R}$ możemy zdefiniować operator konsekwencji.

Definicja 4.4. *Operatorem konsekwencji w rodzinie $\mathscr{R}$* (względem zbioru zależności wielowartościowych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{M}}\colon \mathscr{P}(\mathscr{M}) \to \mathscr{P}(\mathscr{M})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{M}}(M) = \bigcap_{R\in\mathscr{R}} C^{R}_{\mathscr{M}}(M),$$

dla wszelkich $M \subseteq \mathscr{M}$, gdzie

$$C^{R}_{\mathscr{M}}(M) = \Big\{\mu \in \mathscr{M} : M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R) \Longrightarrow \mu \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)\Big\}.$$

Wniosek 4.5. *Operator $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{M}}(\,\cdot\,)$ ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.13. □

Okazuje się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by złączenie naturalne rzutów danej relacji było równe tej relacji jest prawdziwość w danej relacji odpowiedniej zależności wielowartościowej.

Twierdzenie 4.6 (Fagin). *Zależność wielowartościowa $X \twoheadrightarrow Y$ jest prawdziwa w relacji $R \in \mathscr{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$R = R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y'].$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Inkluzja $R \subseteq R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y']$ jest prawdziwa na mocy lematu 2.10. Weźmy więc dowolną krotkę $t \in R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y']$. Z równości ($\bowtie$) mamy

$$\bigvee_{r\in R} t|_{X\cup Y} = r|_{X\cup Y} \quad\wedge\quad \bigvee_{s\in R} t|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'}.$$

A więc $r|_X = s|_X$, skąd wobec założenia $X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$ otrzymujemy

$$\bigvee_{u\in R}\Big(u|_{X\cup Y} = r|_{X\cup Y} \wedge u|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'}\Big).$$

Zatem $t|_{X\cup Y} = u|_{X\cup Y}$ oraz $t|_{X\cup Y'} = u|_{X\cup Y'}$, czyli $t|_{(X\cup Y)\cup(X\cup Y')} = u|_{(X\cup Y)\cup(X\cup Y')}$, tzn. $t = u \in R$, co wobec dowolności wyboru krotki t oznacza, że $R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y'] \subseteq R$.

($\Leftarrow$) Mamy wykazać, że zachodzi warunek (MVD). Weźmy więc dowolne krotki $r, s \in R$ takie, że $r|_X = s|_X$. Wybierzmy taką krotkę $u \in \mathscr{T}$, że

$$u|_{X\cup Y} = r|_{X\cup Y} \quad\wedge\quad u|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'}.$$

Z równości ($\bowtie$) wynika, że $u \in R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y']$. A ponieważ na mocy założenia $R = R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y']$, to $u \in R$. Wykazaliśmy więc, że

$$\bigvee_{u\in R}\Big(u|_{X\cup Y} = r|_{X\cup Y} \wedge u|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'}\Big),$$

co wobec dowolności wyboru krotek r i s oznacza spełnienie warunku (MVD), a więc $X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$. □

4.2. System logiki zależności wielowartościowych

Definicja 4.7. Systemem $\mathscr{MVD}$ logiki zależności wielowartościowych nazywamy układ złożony ze zbioru aksjomatów

$$m_1 = \Big\{X \twoheadrightarrow Y \in \mathscr{M} : X \supseteq Y\Big\}$$

oraz reguł wnioskowania

$$m_0 = \Big\{\langle M, \mu\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{M}) \times \mathscr{M} : \bigvee_{X,Y \subseteq U}\Big(M = \{X \twoheadrightarrow Y\} \wedge \mu = X \twoheadrightarrow Y'\Big)\Big\},$$

$$m_2 = \Big\{\langle M, \mu\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{M}) \times \mathscr{M} : \bigvee_{X,Y,Z \subseteq U}\Big(M = \{X \twoheadrightarrow Y\} \wedge \mu = X \cup Z \twoheadrightarrow Y \cup Z\Big)\Big\},$$

$$m_3 = \Big\{\langle M, \mu\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{M}) \times \mathscr{M} : \bigvee_{X,Y,Z \subseteq U}\Big(M = \{X \twoheadrightarrow Y, Y \twoheadrightarrow Z\} \wedge \mu = X \twoheadrightarrow Z \setminus Y\Big)\Big\}.$$

A oto alternatywna wersja powyższych aksjomatów i reguł wnioskowania:

$$m_0 : \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y}{X \twoheadrightarrow Y'},$$

$$m_1 : \quad X \twoheadrightarrow X \setminus Y,$$

$$m_2 : \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y}{X \cup Z \twoheadrightarrow Y \cup Z},$$

$$m_3 : \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y, Y \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Z \setminus Y}.$$

Definicja 4.8. *Operatorem konsekwencji syntaktycznej w systemie* $\mathscr{MVD}$ nazywamy funkcję $C_{\mathscr{MVD}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{M}) \to \mathscr{P}(\mathscr{M})$ określoną wzorem

$$C_{\mathscr{MVD}}(M) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{MVD}}(M),$$

dla dowolnego $M \subseteq \mathscr{M}$, gdzie

$$C^0_{\mathscr{MVD}}(M) = M \cup m_1,$$
$$C^{n+1}_{\mathscr{MVD}}(M) = C^n_{\mathscr{MVD}}(M) \cup \Big\{\mu \in \mathscr{M} : \bigvee_{m \in \{m_0, m_2, m_3\}} \ \bigvee_{N \subseteq C^n_{\mathscr{MVD}}(M)} \langle N, \mu\rangle \in m\Big\} \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wniosek 4.9. *Operator* $C_{\mathscr{MVD}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika uprost ze stwierdzenia 1.8. □

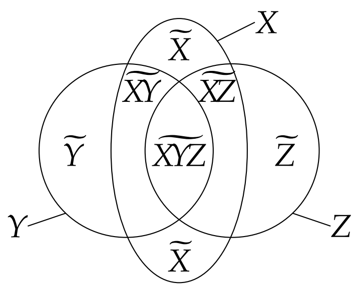
Zauważmy w tym miejscu, że regułę m_0 podaje się zwykle w nieco „przerośniętej" formie:

$$m_0' = \Big\{\langle M, \mu\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{M}) \times \mathscr{M} : \bigvee_{X,Y,Z \subseteq U}\Big(M = \{X \twoheadrightarrow Y\} \wedge \mu = X \twoheadrightarrow Z \wedge X \cup Y \cup Z = U \wedge Y \cap Z \subseteq X\Big)\Big\}.$$

Wykażemy, że jest ona wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathscr{MVD}}$.

Stwierdzenie 4.10. *Reguła o schemacie* m_0' *jest wyprowadzalna względem konsekwencji* $C_{\mathscr{MVD}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle M, \mu\rangle \in m_0'$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\mu = X \twoheadrightarrow Z$ oraz $X \cup Y \cup Z = U$ i $Y \cap Z \subseteq X$. Przyjmijmy oznaczenia jak na poniższym diagramie.



Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Ponieważ $M \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\left\langle M, X \cup \widetilde{X} \twoheadrightarrow Y \cup \widetilde{X}\right\rangle \in m_2$, to $X \twoheadrightarrow Y \cup \widetilde{X} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Zatem $\left\langle\left\{X \twoheadrightarrow Y \cup \widetilde{X}\right\}, X \twoheadrightarrow \left(Y \cup \widetilde{X}\right)'\right\rangle \in m_0$, czyli $X \twoheadrightarrow \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Teraz $\left\langle\left\{X \twoheadrightarrow \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ}\right\}, X \cup \widetilde{XYZ} \twoheadrightarrow \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ} \cup \widetilde{XYZ}\right\rangle \in m_2$, a więc $\mu = X \twoheadrightarrow \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ} \cup \widetilde{XYZ} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. □

Podobnie jak to miało miejsce w przypadku zależności funkcyjnych, wyprowadzimy teraz kilka reguł, które pomogą w naszych dalszych rozważaniach.

Stwierdzenie 4.11. *Reguła o schemacie*

$$m_4 : \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y}{X \twoheadrightarrow Y \setminus (X \setminus Z)}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathcal{MVD}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle M, \mu\rangle \in m_4$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\mu = X \twoheadrightarrow Y \setminus (X \setminus Z)$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Naturalnie $X \twoheadrightarrow X \in m_1 \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Zatem $\{X \twoheadrightarrow X, X \twoheadrightarrow Y\} \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\langle\{X \twoheadrightarrow X, X \twoheadrightarrow Y\}, X \twoheadrightarrow Y \setminus X\rangle \in m_3$, stąd $X \twoheadrightarrow Y \setminus X \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Teraz $\langle\{X \twoheadrightarrow Y \setminus X\}, X \cup (X \cap Y \cap Z) \twoheadrightarrow (Y \setminus X) \cup (X \cap Y \cap Z)\rangle \in m_2$, czyli $\mu = X \twoheadrightarrow Y \setminus (X \setminus Z) = X \twoheadrightarrow (Y \setminus X) \cup (X \cap Y \cap Z) \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. □

Zwracamy uwagę, że zbiór $Y \setminus (X \setminus Z)$ występujący w schemacie reguły m_4 jest różnicą zbiorów Y i dowolnego podzbioru zbioru X.

Stwierdzenie 4.12. *Reguła o schemacie*

$$m_2' : \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y}{X \cup Z \cup T \twoheadrightarrow Y \cup Z}\,.$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathcal{MVD}}$.

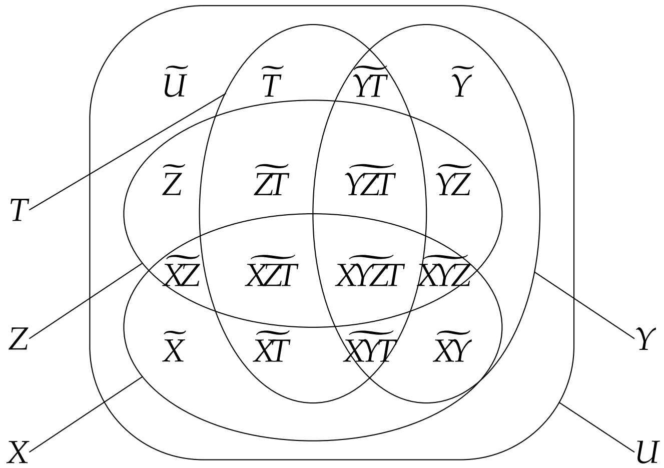
Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle M, \mu\rangle \in m_5$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z, T \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\mu = X \cup Z \cup T \twoheadrightarrow Y \cup Z$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Jako, że $M \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\langle M, X \cup Z \cup T \twoheadrightarrow Y \cup Z \cup T\rangle \in m_2$, to $X \cup Z \cup T \twoheadrightarrow Y \cup Z \cup T \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. A ponieważ $T \setminus (Y \cup Z) \subseteq X \cup Z \cup T$, to $\langle\{X \cup Z \cup T \twoheadrightarrow Y \cup Z \cup T\}, X \cup Z \cup T \twoheadrightarrow (Y \cup Z \cup T) \setminus (T \setminus (Y \cup Z))\rangle \in m_4$, czyli $\mu = X \cup Z \cup T \twoheadrightarrow Y \cup Z = X \cup Z \cup T \twoheadrightarrow (Y \cup Z \cup T) \setminus (T \setminus (Y \cup Z)) \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. □

Stwierdzenie 4.13. *Reguła o schemacie*

$$m_5: \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y, \ \ Z \twoheadrightarrow T}{X \cup Z \twoheadrightarrow Y \cup T}.$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathcal{MVD}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle M, \mu \rangle \in m_5$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z, T \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow Y, Z \twoheadrightarrow T\}$ i $\mu = X \cup Z \twoheadrightarrow Y \cup T$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Przyjmijmy oznaczenia jak na poniższym diagramie.



Ponieważ $\{X \twoheadrightarrow Y\} \subseteq M \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\left\langle \{X \twoheadrightarrow Y\}, X \twoheadrightarrow \widetilde{Y} \cup \widetilde{YZ} \cup \widetilde{YT} \cup \widetilde{YZT} \right\rangle \in m_4$, to $X \twoheadrightarrow \widetilde{Y} \cup \widetilde{YZ} \cup \widetilde{YT} \cup \widetilde{YZT} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Jako, że $\{Z \twoheadrightarrow T\} \subseteq M \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\langle \{Z \twoheadrightarrow T\}, Z \cup Z \twoheadrightarrow T \cup Z \rangle \in m_2$, to $Z \twoheadrightarrow Z \cup T \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. A więc $\langle \{Z \twoheadrightarrow Z \cup T\}, Z \twoheadrightarrow (Z \cup T)' \rangle \in m_0$, tzn. $Z \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{XY} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Ponadto $\left\langle \left\{X \twoheadrightarrow \widetilde{Y} \cup \widetilde{YZ} \cup \widetilde{YT} \cup \widetilde{YZT}\right\}, X \cup Z \twoheadrightarrow \left(\widetilde{Y} \cup \widetilde{YZ} \cup \widetilde{YT} \cup \widetilde{YZT}\right) \cup Z \right\rangle \in m_2$, czyli $X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{Y} \cup \widetilde{YT} \cup Z \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Podobnie $\left\langle \left\{Z \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{XY}\right\}, Z \cup \left(\widetilde{Y} \cup \widetilde{YT}\right) \twoheadrightarrow \left(\widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{XY}\right) \cup \left(\widetilde{Y} \cup \widetilde{YT}\right) \right\rangle \in m_2$, więc $Z \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{YT} \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{XY} \cup \widetilde{YT} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Tak więc $\left\{X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{Y} \cup \widetilde{YT} \cup Z, Z \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{YT} \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{XY} \cup \widetilde{YT}\right\}$ i $\left\langle \left\{X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{Y} \cup \widetilde{YT} \cup Z, Z \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{YT} \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{XY} \cup \widetilde{YT}\right\}, X \cup Z \twoheadrightarrow \left(\widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \cup \widetilde{XY} \cup \widetilde{YT}\right) \setminus \left(\widetilde{Y} \cup \widetilde{YT} \cup Z\right) \right\rangle \in m_3$, skąd $X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{XY} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Teraz $\left\langle \left\{X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{XY}\right\}, X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{U} \right\rangle \in m_4$, a więc $X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{U} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Zatem $\left\langle \left\{X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{U}\right\}, \left(X \cup Z\right) \cup \left(\widetilde{X} \cup \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ}\right) \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \left(\widetilde{X} \cup \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ}\right) \right\rangle \in m_2$, tzn. $X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. W końcu $\left\langle \left\{X \cup Z \twoheadrightarrow \widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ}\right\}, X \cup Z \twoheadrightarrow \left(\widetilde{U} \cup \widetilde{X} \cup \widetilde{Z} \cup \widetilde{XZ}\right)' \right\rangle \in m_0$, skąd otrzymujemy $\mu = X \cup Z \twoheadrightarrow Y \cup T \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. □

Okazuje się, że podobnie jak to miało miejsce w przypadku reguły f_5, regułę m_5 można „poprawić”.

Stwierdzenie 4.14. *Reguła o schemacie*

$$m_5': \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y, \ \ Z \twoheadrightarrow T}{X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow Y \cup T}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathcal{MVD}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle M, \mu \rangle \in m_5'$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z, T \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y, Z \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow T\}$ i $\mu = X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup T$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Przyjmijmy oznaczenia jak na diagramie z dowodu stwierdzenia 4.13.

Ponieważ $\{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y\} \subseteq M \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\langle \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y\}, X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup (Z \setminus Y)\rangle \in m_2$, to $X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup Z \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Podobnie $\{Z \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow T\} \subseteq M \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\langle \{Z \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow T\}, Z \cup Y \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow T \cup Y\rangle \in m_2$, więc $Y \cup Z \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup T \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Tak więc $\langle \{X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup Z, Z \cup Y \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow T \cup Y\}, X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (T \cup Y) \setminus (Y \cup Z)\rangle \in m_3$, czyli $X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \widetilde{T} \cup \widetilde{XT} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Zatem $\left\langle \left\{X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \widetilde{T} \cup \widetilde{XT}\right\}, \left(X \cup (Z \setminus Y)\right) \cup \left(\widetilde{ZT} \cup \widetilde{XZT}\right) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \left(\widetilde{T} \cup \widetilde{XT}\right) \cup \left(\widetilde{ZT} \cup \widetilde{XZT}\right)\right\rangle \in m_2$, skąd $X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \widetilde{T} \cup \widetilde{XT} \cup \widetilde{ZT} \cup \widetilde{XZT} \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Teraz $\left\{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y, X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \widetilde{T} \cup \widetilde{XT} \cup \widetilde{ZT} \cup \widetilde{XZT}\right\} \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\left\langle \left\{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y, X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \widetilde{T} \cup \widetilde{XT} \cup \widetilde{ZT} \cup \widetilde{XZT}\right\}, X \cup \left(X \cup (Z \setminus Y)\right) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup \left(\widetilde{T} \cup \widetilde{XT} \cup \widetilde{ZT} \cup \widetilde{XZT}\right)\right\rangle \in m_5$, a więc $\mu = X \cup (Z \setminus Y) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup T \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. □

Kolejne dwie wyprowadzane reguły, będą bardzo pomocne w naszych dalszych rozważaniach.

Stwierdzenie 4.15. *Reguła o schemacie*

$$m_7 : \quad \frac{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y, \;\; X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z}{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \setminus Z}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathcal{MVD}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle M, \mu \rangle \in m_7$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z\}$ i $\mu = X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \setminus Z$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Ponieważ $\langle M, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup Z\rangle \in m_5$, to $X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup Z \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Zatem $\langle \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cup Z\}, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cup Z)'\rangle \in m_0$, czyli $X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cup Z)' \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Stąd $\{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cup Z)'\} \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\langle \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cup Z)'\}, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z \cup (Y \cup Z)'\rangle \in m_5$, tzn. $X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \setminus Z)' \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Teraz $\langle \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \setminus Z)'\}, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \setminus Z\rangle \in m_0$, skąd $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. □

Stwierdzenie 4.16. *Reguła o schemacie*

$$m_8 : \quad \frac{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y, \;\; X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z}{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cap Z}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathcal{MVD}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle M, \mu \rangle \in m_8$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z\}$ i $\mu = X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cap Z$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy pokazać, że $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Ponieważ $\langle M, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \setminus Z\rangle \in m_7$, to $X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \setminus Z \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Podobnie otrzymujemy $X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z \setminus Y \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Zatem $\{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \setminus Z, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z \setminus Y\} \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\langle \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \setminus Z, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z \setminus Y\}, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)\rangle \in m_5$, czyli $X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y) \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Postępując analogicznie jak w dowodzie stwierdzenia 4.15, otrzymujemy $X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cup Z)' \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Tak więc $\{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cup Z)', X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)\} \subseteq C_{\mathcal{MVD}}(M)$ i $\langle \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cup Z)', X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)\}, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cup Z)' \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)\rangle \in m_5$, tzn. $X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cap Z)' \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. Teraz $\langle \{X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y \cap Z)'\}, X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \cap Z\rangle \in m_0$, skąd $\mu \in C_{\mathcal{MVD}}(M)$. □

Mając na uwadze twierdzenie o równoważności pewnych rodzin modeli, wykażemy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.17. *Aksjomaty zbioru m_1 są tautologiami w rodzinie $\mathscr{R}$, a reguły m_0, m_2 i m_3 są niezawodne w rodzinie $\mathscr{R}$.*

Dowód. Zgodnie z definicją 1.16 mamy wykazać, że

$$\left\{X \twoheadrightarrow Y \in \mathscr{M} : X \supseteq Y\right\} \subseteq \bigcap_{R \in \mathscr{R}} \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R).$$

Weźmy więc dowolną zależność $X \twoheadrightarrow Y \in \mathscr{M}$ taką, że $X \supseteq Y$ i ustalmy dowolną relację $R \in \mathscr{R}$. Musimy pokazać, że $X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$, tzn. że zależność $X \twoheadrightarrow Y$ spełnia warunek (MVD). Wybierzmy więc dowolne krotki $r, s \in R$ takie, że $r|_X = s|_X$. Mamy wskazać taką krotkę $t \in R$, że

$$t|_{X \cup Y} = r|_{X \cup Y} \quad \wedge \quad t|_{X \cup Y'} = s|_{X \cup Y'}.$$

Sprawdzimy, że $t = s$ daje zadość powyższym równościom. Oczywiście $t|_{X \cup Y'} = s|_{X \cup Y'}$, a ponadto $t|_{X \cup Y} = r|_{X \cup Y}$, gdyż $X \cup Y = X$, a $r|_X = s|_X$. Tak więc aksjomaty zbioru m_1 są rzeczywiście tautologiami w rodzinie $\mathscr{R}$.

Wykażemy teraz, że reguła m_0 jest niezawodna w rodzinie $\mathscr{R}$. Weźmy więc dowolny układ $\langle M, \mu \rangle \in m_0$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\mu = X \twoheadrightarrow Y'$. Wobec definicji 4.4 mamy pokazać, że

$$\mu \in \bigcap_{R \in \mathscr{R}} \left\{\nu \in \mathscr{M} : M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R) \Longrightarrow \nu \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)\right\}. \tag{$*$}$$

Ustalmy więc dowolną relację $R \in \mathscr{R}$ i przypuśćmy, że $M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$, tzn. zależność $X \twoheadrightarrow Y$ spełnia warunek (MVD). Mamy sprawdzić, że zależność μ również spełnia warunek (MVD). Wybierzmy więc dowolne krotki $r, s \in R$ i załóżmy, że $r|_X = s|_X$. Ponieważ $X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$, to wobec warunku (MVD) dla krotek s, r istnieje taka krotka t, że

$$t|_{X \cup Y} = s|_{X \cup Y} \quad \wedge \quad t|_{X \cup Y'} = r|_{X \cup Y'}.$$

Oznacza to jednocześnie, że zależność $X \twoheadrightarrow Y'$ spełnia warunek (MVD), a więc niezawodność reguły m_0 w rodzinie $\mathscr{R}$.

Sprawdzimy teraz, że reguła m_2 jest niezawodna w rodzinie $\mathscr{R}$. Weźmy więc dowolny układ $\langle M, \mu \rangle \in m_2$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\mu = X \cup Z \twoheadrightarrow Y \cup Z$. Mamy pokazać, że zachodzi warunek ($*$). Ustalmy więc dowolną relację $R \in \mathscr{R}$ i przypuśćmy, że $M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$, tzn. zależność $X \twoheadrightarrow Y$ spełnia warunek (MVD). Mamy sprawdzić, że zależność μ też spełnia warunek (MVD). Ustalmy więc dowolne krotki $r, s \in R$ i załóżmy, że $r|_{X \cup Z} = s|_{X \cup Z}$. Trzeba wskazać taką krotkę $t \in R$, że

$$t|_{(X \cup Z) \cup (Y \cup Z)} = r|_{(X \cup Z) \cup (Y \cup Z)} \quad \wedge \quad t|_{(X \cup Z) \cup (Y \cup Z)'} = s|_{(X \cup Z) \cup (Y \cup Z)'}.$$

Ponieważ zależność $X \twoheadrightarrow Y$ spełnia warunek (MVD) i $r|_X = s|_X$, to istnieje taka krotka $u \in R$, że

$$u|_{X \cup Y} = r|_{X \cup Y} \quad \wedge \quad u|_{X \cup Y'} = s|_{X \cup Y'}.$$

Sprawdzimy, że $t = u$ jest szukaną krotką. Ponieważ $u|_Y = r|_Y$ i $u|_{Y'} = s|_{Y'}$, to $u|_{Y \cap Z} = r|_{Y \cap Z}$ i $u|_{Y' \cap Z} = s|_{Y' \cap Z}$. Ponadto $r|_Z = s|_Z$, więc $r|_{Y' \cap Z} = s|_{Y' \cap Z}$. Zatem mamy $u|_{Y \cap Z} = r|_{Y \cap Z}$ i $u|_{Y' \cap Z} = r|_{Y' \cap Z}$, co oznacza, że $u|_Z = u|_Z$ ($= s|_Z$). W połączeniu z równością $u|_{X \cup Y} = r|_{X \cup Y}$ otrzymujemy stąd $u|_{X \cup Y \cup Z} = r|_{X \cup Y \cup Z}$, czyli pierwszą ze sprawdzanych równości. A ponieważ $u|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'}$ i $(Y \cup Z)' \subseteq Y'$, to tym bardziej $u|_{X\cup(Y\cup Z)'} = s|_{X\cup(Y\cup Z)'}$. Poza tym, przed chwilą wykazaliśmy, że $u|_Z = s|_Z$, skąd otrzymujemy $u|_{X\cup(Y\cup Z)'\cup Z} = s|_{X\cup(Y\cup Z)'\cup Z}$, czyli drugą ze sprawdzanych równości. Wykazaliśmy tym samym niezawodność reguły m_2 w rodzinie $\mathscr{R}$.

Wykażemy teraz niezawodność reguły m_3 w rodzinie $\mathscr{R}$. Weźmy więc dowolny układ $\langle M, \mu\rangle \in m_3$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $M = \{X \twoheadrightarrow Y, Y \twoheadrightarrow Z\}$ i $\mu = X \twoheadrightarrow Z \setminus Y$. Musimy pokazać, że zachodzi warunek (∗). Ustalmy więc dowolną relację $R \in \mathscr{R}$ i przypuśćmy, że $M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$, tzn. zależności $X \twoheadrightarrow Y$ i $Y \twoheadrightarrow Z$ spełniają warunek (MVD). Mamy sprawdzić, że również zależność μ spełnia warunek (MVD). Ustalmy więc dowolne krotki $r, s \in R$ i załóżmy, że $r|_X = s|_X$. Mamy wskazać taką krotkę $t \in R$, że

$$t|_{X\cup(Z\setminus Y)} = r|_{X\cup(Z\setminus Y)} \quad\wedge\quad t|_{X\cup(Z\setminus Y)'} = r|_{X\cup(Z\setminus Y)'}.$$

Ponieważ $X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$, to z warunku (MVD) dla krotek s, r wynika, że istnieje taka krotka $u \in R$, że

$$u|_{X\cup Y} = s|_{X\cup Y} \quad\wedge\quad u|_{X\cup Y'} = r|_{X\cup Y'}. \tag{$**$}$$

Podobnie, $Y \twoheadrightarrow Z \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$, więc wobec warunku (MVD) dla krotek u, s wnosimy istnienie takiej krotki $v \in R$, że

$$v|_{Y\cup Z} = u|_{Y\cup Z} \quad\wedge\quad v|_{Y\cup Z'} = s|_{Y\cup Z'}. \tag{${}^{**}_{*}$}$$

Sprawdzimy, że $t = v$ jest szukaną krotką. Wobec (${}^{**}_{*}$) mamy $v|_{Z\cap X} = u|_{Z\cap X}$ i $v|_{Z'\cap X} = s|_{Z'\cap X}$, skąd wobec (∗∗) otrzymujemy $v|_{Z\cap X} = s|_{Z\cap X}$ i $v|_{Z'\cap X} = s|_{Z'\cap X}$. Czyli $v|_X = s|_X$, a więc również $v|_X = r|_X$. Ponieważ $Z \setminus Y = Z \cap Y' \subseteq Y'$, to wobec (∗∗) otrzymujemy $u|_{Z\setminus Y} = r|_{Z\setminus Y}$. Z drugiej strony $Z \setminus Y \subseteq Z$, więc wobec (${}^{**}_{*}$) dostajemy $v|_{Z\setminus Y} = u|_{Z\setminus Y}$, skąd $v|_{Z\setminus Y} = r|_{Z\setminus Y}$. Poza tym jak pokazaliśmy przed chwilą $v|_X = r|_X$, czyli $v|_{X\cup(Z\setminus Y)} = r|_{X\cup(Z\setminus Y)}$. Jako, że $(Z \setminus Y)' = U \setminus (Z \setminus Y) = Y \cup (U \setminus Z) = Y \cup Z'$, to wobec (${}^{**}_{*}$) otrzymujemy $v|_{(Z\setminus Y)'} = s|_{(Z\setminus Y)'}$. Ponadto $v|_X = s|_X$, a więc $v|_{X\cup(Z\setminus Y)'} = s|_{X\cup(Z\setminus Y)'}$, co kończy dowód niezawodności reguły m_3 w rodzinie $\mathscr{R}$. □

Wniosek 4.18. *Reguły m_0', m_2', m_4, m_5, m_5', m_7 i m_8 są niezawodne w rodzinie $\mathscr{R}$.*

Dowód. Wynika wprost z twierdzenia 4.17 oraz wniosku 1.20. □

Rozdział 5

Zależności funkcyjne i wielowartościowe

Twierdzenie Heath (tw. 3.6) oraz twierdzenie Fagina (tw. 4.6) gwarantują że w każdej relacji $R \in \mathscr{R}$, w której prawdziwa jest zależność funkcyjna $X \longrightarrow Y$, prawdziwa jest również zależność wielowartościowa $X \twoheadrightarrow Y$. Jeśli bowiem $X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R)$, to wobec twierdzenia Heath, zachodzi równość $R = R[X \cup Y] \bowtie R[X \cup Y']$, która zgodnie z twierdzeniem Fagina oznacza, że $X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R)$. Tak więc zależności funkcyjnych i wielowartościowych nie należy badać w izolacji, lecz wspólnie — odkrycia tego, jako pierwszy dokonał Ronald Fagin.

5.1. Zależności funkcyjne i wielowartościowe w rodzinie relacji

Oznaczmy zbiór wszystkich zależności funkcyjnych i wielowartościowych przez $\mathscr{D}$, tzn. niech

$$\mathscr{D} = \mathscr{F} \cup \mathscr{M}.$$

W każdej relacji określiliśmy prawdziwość zależności funkcyjnych i prawdziwość wielowartościowych, a więc prawdziwość dowolnych zależności. Oznaczmy zbiór wszystkich zależności funkcyjnych i wielowartościowych prawdziwych w relacji $R \in \mathscr{R}$ przez $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$, tzn. niech

$$\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R) = \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R) \cup \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R).$$

(Ponieważ $\mathscr{F} \cap \mathscr{M} = \emptyset$, to również $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}(R) \cap \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(R) = \emptyset$.)

Dowolna relacja jest modelem dla zależności funkcyjnych i wielowartościowych. Na rodzinie $\mathscr{R}$ możemy więc zdefiniować operator konsekwencji.

Definicja 5.1. *Operatorem konsekwencji w rodzinie $\mathscr{R}$* (względem zbioru zależności funkcyjnych i wielowartościowych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}} : \mathscr{P}(\mathscr{D}) \to \mathscr{P}(\mathscr{D})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(D) = \bigcap_{R \in \mathscr{R}} C^{R}_{\mathscr{D}}(D),$$

dla wszelkich $D \subseteq \mathscr{D}$, gdzie

$$C^{R}_{\mathscr{D}}(D) = \Big\{\delta \in \mathscr{D} : D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R) \Longrightarrow \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)\Big\}.$$

Wniosek 5.2. *Operator $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(\,\cdot\,)$ ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.13. □

Jak zauważyliśmy na wstępie tego rozdziału, prawdziwość w relacji $R \in \mathscr{R}$ zależności funkcyjnej $X \longrightarrow Y$ wymusza prawdziwość w relacji R zależności wielowartościowej $X \twoheadrightarrow Y$. Okazuje się jednak, że prawdziwość w relacji R pewnych zależności wielowartościowych gwarantuje prawdziwość w relacji R odpowiednich zależności funkcyjnych.

5.2. System logiki zależności funkcyjnych i wielowartościowych

Pierwszy system logiki zależności funkcyjnych i wielowartościowych pełny względem rodziny $\mathscr{R}$ relacji, podał Ronald Fagin.

Definicja 5.3. Systemem $\mathscr{DEP}$ logiki zależności funkcyjnych i wielowartościowych nazywamy układ złożony ze zbioru aksjomatów $f_1 \cup m_1$ oraz reguł wnioskowania f_2, f_3, m_0, m_2, m_3 i

$$d_1 = \Big\{\langle D, \delta\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{D}) \times \mathscr{D} : \bigvee_{X,Y \subseteq U} \Big(D = \{X \longrightarrow Y\} \wedge \delta = X \twoheadrightarrow Y\Big)\Big\},$$

$$d_2 = \Big\{\langle D, \delta\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{D}) \times \mathscr{D} : \bigvee_{X,Y,Z \subseteq U} \Big(D = \{X \cup Y \longrightarrow Z, X \twoheadrightarrow Y\} \wedge \delta = X \longrightarrow Z \setminus Y\Big)\Big\}.$$

W notacji „ułamkowej" reguły d_1, d_2 prezentują się następująco:

$$d_1 : \quad \frac{X \longrightarrow Y}{X \twoheadrightarrow Y},$$

$$d_2 : \quad \frac{X \cup Y \longrightarrow Z, \quad X \twoheadrightarrow Y}{X \longrightarrow Z \setminus Y}.$$

Definicja 5.4. *Operatorem konsekwencji syntaktycznej w systemie* $\mathscr{DEP}$ nazywamy funkcję $C_{\mathscr{DEP}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{D}) \to \mathscr{P}(\mathscr{D})$ określoną wzorem

$$C_{\mathscr{DEP}}(D) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{DEP}}(D),$$

dla dowolnego $D \subseteq \mathscr{D}$, gdzie

$$C^0_{\mathscr{DEP}}(D) = D \cup \Big(f_1 \cup m_1\Big),$$

$$C^{n+1}_{\mathscr{DEP}}(D) = C^n_{\mathscr{DEP}}(D) \cup \Big\{\delta \in \mathscr{D} : \bigvee_{d \in \{f_2, f_3, m_0, m_2, m_3, d_1, d_2\}} \bigvee_{E \subseteq C^n_{\mathscr{DEP}}(D)} \langle E, \delta\rangle \in d\Big\} \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wniosek 5.5. *Operator* $C_{\mathscr{DEP}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.8. □

Zauważmy, że wprost z określenia konsekwencji syntaktycznych $C_{\mathscr{FD}}$, $C_{\mathscr{MVD}}$ oraz $C_{\mathscr{DEP}}$ wynika, iż

$$C_{\mathscr{FD}}(F) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(F) \qquad \text{i} \qquad C_{\mathscr{MVD}}(M) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(M)$$

dla dowolnych zbiorów $F \subseteq \mathscr{F}$ i $M \subseteq \mathscr{M}$. (Bo dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest $C^n_{\mathscr{FD}}(F) \subseteq C^n_{\mathscr{DEP}}(F)$ i $C^n_{\mathscr{MVD}}(M) \subseteq C^n_{\mathscr{DEP}}(M)$.) Wobec tego reguły wyprowadzalne w systemach $\mathscr{FD}$ i $\mathscr{MVD}$ są też wyprowadzalne w systemie $\mathscr{DEP}$.

Podobnie z określenia operatorów $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{F}}(\,\cdot\,)$, $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{M}}(\,\cdot\,)$ i $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(\,\cdot\,)$ wynika, że

$$C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{F}}(F) = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(F) \qquad \text{i} \qquad C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{M}}(M) = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(M)$$

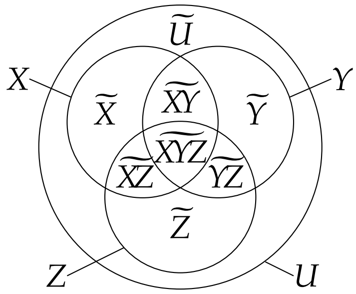
dla dowolnych zbiorów $F \subseteq \mathscr{F}$ i $M \subseteq \mathscr{M}$, co oznacza, że reguły niezawodne w systemach $\mathscr{FD}$ i $\mathscr{MVD}$ są też niezawodne w systemie $\mathscr{DEP}$.

Stwierdzenie 5.6. *Reguła o schemacie*

$$d_3 : \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y, \;\; Y' \setminus Z \longrightarrow Y}{X \longrightarrow Y}$$

jest wyprowadzalna względem konsekwencji $C_{\mathscr{DEP}}$.

Dowód. Weźmy dowolny układ $\langle D, \delta \rangle \in d_3$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $D = \{X \twoheadrightarrow Y, Y' \setminus Z \longrightarrow Y\}$ i $\delta = X \longrightarrow Y$. Zgodnie z definicją 1.19 musimy wykazać, że $\delta \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Przyjmijmy oznaczenia jak na poniższym diagramie.



Ponieważ $X \twoheadrightarrow Y \in D \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$, to przy pomocy reguły m_2 otrzymujemy $X \twoheadrightarrow X \cup Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, skąd wobec reguły m_0 dostajemy $X \twoheadrightarrow \widetilde{Z} \cup \widetilde{U} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Jako, że $\widetilde{X} \cup \widetilde{U} \longrightarrow Y = Y' \setminus Z \longrightarrow Y \in D \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$, to w związku z regułą f_2' dostajemy $\left(\widetilde{X} \cup \widetilde{U}\right) \cup \left(X \cup \widetilde{Z}\right) \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, tzn. $X \cup \widetilde{Z} \cup \widetilde{U} \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. W końcu $\left\langle \left\{X \cup \widetilde{Z} \cup \widetilde{U} \longrightarrow Y, X \twoheadrightarrow \widetilde{Z} \cup \widetilde{U}\right\}, X \longrightarrow Y \setminus \left(\widetilde{Z} \cup \widetilde{U}\right)\right\rangle \in d_2$, a zatem $\delta = X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. □

Zauważmy, że zbiór $Y' \setminus Z$ występujący w schemacie reguły d_3 to po prostu dowolny zbiór T dla którego $Y \cap T = \emptyset$.

W następnym rozdziale udowodnimy równoważność pewnych rodzin modeli oraz pełność systemu $\mathscr{DEP}$ względem każdej z tych rodzin. Pomocne będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.7. *Reguły d_1 i d_2 są niezawodne w rodzinie $\mathscr{R}$.*

Dowód. Wykażemy, że reguła d_1 jest niezawodna w rodzinie $\mathscr{R}$. Weźmy więc dowolny układ $\langle D, \delta \rangle \in d_1$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y \subseteq U$, że $D = \{X \longrightarrow Y\}$ i $\delta = X \twoheadrightarrow Y$. Wobec definicji 5.1 mamy pokazać, że

$$\delta \in \bigcap_{R \in \mathscr{R}} \left\{\sigma \in \mathscr{D} : D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R) \Longrightarrow \sigma \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)\right\}. \qquad (*)$$

Ustalmy więc dowolną relację $R \in \mathscr{R}$ i przypuśćmy, że $D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$, tzn. zależność $X \longrightarrow Y$ spełnia warunek (FD). Mamy sprawdzić, że zależność δ spełnia warunek (MVD). Weźmy więc dowolne krotki $r, s \in R$ i załóżmy, że $r|_X = s|_X$. Mamy wskazać taką krotkę $t \in R$, że

$$t|_{X \cup Y} = r|_{X \cup Y} \quad \wedge \quad t|_{X \cup Y'} = s|_{X \cup Y'}. \qquad (**)$$

Sprawdzimy, że $t = s$ daje zadość powyższemu warunkowi. Ponieważ $X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$, to z równości $r|_X = s|_X$ otrzymujemy $r|_Y = s|_Y$, a więc $r|_{X \cup Y} = s|_{X \cup Y}$, tzn. $t|_{X \cup Y} = r|_{X \cup Y}$. Równość $t|_{X \cup Y'} = s|_{X \cup Y'}$ jest oczywista, a więc reguła d_1 jest rzeczywiście niezawodna w rodzinie $\mathscr{R}$.

Wykażemy teraz, że reguła d_2 jest niezawodna w rodzinie $\mathscr{R}$. Weźmy więc dowolny układ $\langle D, \delta \rangle \in d_2$. Wtedy istnieją takie zbiory $X, Y, Z \subseteq U$, że $D = \{X \cup Y \longrightarrow Z, X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\delta = X \longrightarrow Z \setminus Y$. Wobec definicji 5.1 mamy wykazać spełnienie warunku (*). Ustalmy więc dowolną relację $R \in \mathscr{R}$ i przypuśćmy, że $D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$, tzn. zależność $X \cup Y \longrightarrow Z$ spełnia warunek (FD), a zależność $X \twoheadrightarrow Y$ spełnia warunek (MVD). Mamy sprawdzić, że zależność δ spełnia warunek (FD). Weźmy więc dowolne krotki $r, s \in R$ i załóżmy, że $r|_X = s|_X$. Ponieważ $X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$, to wobec warunku (MVD) dla krotek r, s wynika istnienie takiej krotki $t \in R$ dla której zachodzi warunek (**). Jako, że $X \cup Y \longrightarrow Z \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$, to otrzymujemy równość $r|_Z = t|_Z$, a więc tym bardziej $r|_{Z \setminus Y} = t|_{Z \setminus Y}$. Ponieważ $Z \setminus Y = Z \cap Y' \subseteq Y' \subseteq X \cup Y'$, to z warunku (**) wynika, że $t|_{Z \setminus Y} = s|_{Z \setminus Y}$. Tak więc $r|_{Z \setminus Y} = s|_{Z \setminus Y}$, co oznacza niezawodność reguły d_2 w rodzinie $\mathscr{R}$. □

Wniosek 5.8. *Reguła d_3 jest niezawodna w rodzinie $\mathscr{R}$.*

Dowód. Wynika wprost z twierdzenia 5.7 oraz wniosku 1.20. □

5.3. Domknięcie. Baza zależności

Pojęcia przedstawione w tym paragrafie odgrywają niebagatelną rolę w kolejnym rozdziale, w którym dowodzimy pełności systemów $\mathscr{FD}$, $\mathscr{MVD}$ i $\mathscr{DEP}$ względem rodziny $\mathscr{R}$ relacji oraz innych zaprezentowanych tam rodzin, a więc także równoważność tych rodzin.

Definicja 5.9. *Domknięciem* (ang. *closure*) zbioru $X \subseteq U$ względem zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$ nazywamy zbiór

$$\overline{X} = \Big\{u \in U : X \longrightarrow \{u\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)\Big\}.$$

Lemat 5.10. *Zależność $X \longrightarrow Y$ można wyprowadzić z zależności zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$, tzn. $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \subseteq \overline{X}$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Jeżeli $Y = \emptyset$, to oczywiście $Y \subseteq \overline{X}$. Niech więc $Y \neq \emptyset$, tzn. $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ i załóżmy, że $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, wtedy wobec reguły f_4 otrzymujemy $X \longrightarrow \{y_1\}, \ldots, X \longrightarrow \{y_n\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Zgodnie z definicją domknięcia oznacza to, że $y_1, \ldots, y_n \in \overline{X}$, czyli $Y \subseteq \overline{X}$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $Y \subseteq \overline{X}$. Jeśli $Y = \emptyset$, to $X \longrightarrow Y \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Załóżmy więc, że $Y \neq \emptyset$, tzn. $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, wtedy $y_1, \ldots, y_n \in \overline{X}$. Zgodnie z definicją domknięcia oznacza to, że $X \longrightarrow \{y_1\}, \ldots, X \longrightarrow \{y_n\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Stosując $n - 1$ razy regułę f_5 otrzymujemy stąd $X \longrightarrow \{y_1, \ldots, y_n\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, tzn. $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. □

Stwierdzenie 5.11. *Operator $\overline{\cdot}$ ma własności konsekwencji, tzn. dla dowolnych $X, Y \subseteq U$ zachodzą następujące warunki:*

(a) $X \subseteq \overline{X}$,

(b) $X \subseteq Y \implies \overline{X} \subseteq \overline{Y}$,

(c) $\overline{\overline{X}} \subseteq \overline{X}$.

Dowód. (a) Jeśli $X \neq \emptyset$, to oczywiście $X \subseteq \overline{X}$. Załóżmy więc, że $X \neq \emptyset$ i weźmy dowolne $x \in X$, wtedy $X \longrightarrow \{x\} \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$, co wobec definicji domknięcia oznacza, że $x \in \overline{X}$. A jako, że x było wybrane dowolnie, to $X \subseteq \overline{X}$.

(b) Załóżmy, że $X \subseteq Y$. Jeśli $\overline{X} = \emptyset$, to oczywiście $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$. Niech więc $\overline{X} \neq \emptyset$ i weźmy dowolne $x \in \overline{X}$. Wtedy wobec definicji domknięcia mamy $X \longrightarrow \{x\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Ponadto $Y \longrightarrow X \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Stosując regułę f_3 otrzymujemy $Y \longrightarrow \{x\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, czyli $x \in \overline{Y}$. Wobec dowolności wyboru x oznacza to, że $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

(c) Ponieważ $\overline{X} \subseteq \overline{X}$ i $\overline{\overline{X}} \subseteq \overline{\overline{X}}$, to wobec lematu 5.10 otrzymujemy $X \longrightarrow \overline{X} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$ i $\overline{X} \longrightarrow \overline{\overline{X}} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Stosując regułę f_3 dostajemy więc $X \longrightarrow \overline{\overline{X}} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, co zgodnie z lematem 5.10 oznacza, że $\overline{\overline{X}} \subseteq \overline{X}$. □

Definicja 5.12. *Bazą zależności* (ang. *dependency basis*) zbioru $X \subseteq U$ względem zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$ nazywamy rodzinę

$$\mathscr{X} = \Big\{ Y \subseteq U : X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D) \wedge Y \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{\emptyset \neq Z \subsetneq Y} X \twoheadrightarrow Z \notin C_{\mathscr{DEP}}(D) \Big\}.$$

Lemat 5.13. *Rodzina $\mathscr{X}$ tworzy podział zbioru atrybutów U, tzn. ma ona następujące własności:*

(a) $\emptyset \notin \mathscr{X}$,

(b) $Y, Z \in \mathscr{X} \implies Y = Z \;\vee\; Y \cap Z = \emptyset$,

(c) $\bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y = U$.

Dowód. (a) Wynika wprost z definicji bazy zależności.

(b) Weźmy dowolne $Y, Z \in \mathscr{X}$ i przypuśćmy, że $Y \neq Z$. Musimy wykazać, że $Y \cap Z = \emptyset$. Wobec definicji bazy zależności $X \twoheadrightarrow Y, X \twoheadrightarrow Z \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Zatem wobec reguły m_8, również $X \twoheadrightarrow Y \cap Z \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Ponieważ $Y \neq Z$, to $Y \cap Z \subsetneq Y$. Wobec definicji bazy zależności musi więc być $Y \cap Z = \emptyset$.

(c) Załóżmy nie wprost, że $\bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y \neq U$. Naturalnie $\bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y \subseteq U$, a więc zakładamy, że $\bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y \subsetneq U$, tzn. $\bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y = U \setminus T$ dla pewnego $T \neq \emptyset$. W szczególności $T \notin \mathscr{X}$, tzn.

$$X \twoheadrightarrow T \notin C_{\mathscr{DEP}}(D) \;\vee\; T = \emptyset \;\vee\; \bigvee_{\emptyset \neq Z \subsetneq T} X \twoheadrightarrow Z \in C_{\mathscr{DEP}}(D). \qquad (*)$$

Zauważmy, że stosując wielokrotnie regułę m_5 do wszystkich zależności $X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$ takich, że $Y \in \mathscr{X}$ otrzymamy $X \twoheadrightarrow \bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, tzn. $X \twoheadrightarrow U \setminus T \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Zatem wobec reguły m_0, również $X \twoheadrightarrow T \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Poza tym zakładaliśmy, że $T \neq \emptyset$, a więc wobec warunku $(*)$, $X \twoheadrightarrow Z \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$ dla pewnego $\emptyset \neq Z \subsetneq T$. Możemy przy tym wymagać, aby zbiór Z był minimalny, tzn.

$$\bigwedge_{\emptyset \neq V \subsetneq Z} X \twoheadrightarrow V \notin C_{\mathscr{DEP}}(D).$$

Wobec tego $Z \in \mathscr{X}$, czyli $Z \subseteq \bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y = U \setminus T$. Przeczy to warunkowi $\emptyset \neq Z \subsetneq T$, a tym samym dowodzi równości $\bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y = U$. □

Lemat 5.14. *Jeżeli $x \in \overline{X}$, to $\{x\} \in \mathscr{X}$.*

Dowód. Załóżmy, że $x \in \overline{X}$, tzn. $\{x\} \subseteq \overline{X}$, wtedy wobec definicji domknięcia mamy $X \longrightarrow \{x\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Stosując regułę d_1 otrzymujemy $X \twoheadrightarrow \{x\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, co zgodnie z definicją bazy zależności oznacza, że $\{x\} \in \mathscr{X}$. □

Wniosek 5.15. *Zależność $X \twoheadrightarrow Y$ można wyprowadzić z zależności zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$, tzn. $X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Y jest sumą pewnych elementów rodziny $\mathscr{X}$, albo $Y = \emptyset$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Ponieważ wobec lematu 5.13 elementy rodziny $\mathscr{X}$ tworzą podział zbioru U, to istnieją takie zbiory $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathscr{X}$, że $Y \cap Y_1 \neq \emptyset, \ldots, Y \cap Y_n \neq \emptyset$ i $Y \subseteq Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$. Pozostaje wykazać inkluzję przeciwną. Załóżmy nie wprost, że $Y \subsetneq Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$, wtedy $\emptyset \neq Y \cap Y_i \subsetneq Y_i$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wobec definicji bazy zależności oznacza to, że $X \twoheadrightarrow Y \cap Y_i \notin C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Ale $X \twoheadrightarrow Y$, $X \twoheadrightarrow Y_i \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, skąd wobec reguły m_8 wynika, że $X \twoheadrightarrow Y \cap Y_i \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Uzyskana sprzeczność dowodzi pożądanej równości.

($\Leftarrow$) Jeśli $Y = \emptyset$, to $X \twoheadrightarrow Y \in m_1 \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Załóżmy więc, że $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ i $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathscr{X}$. Wtedy $X \twoheadrightarrow Y_1, \ldots, X \twoheadrightarrow Y_n \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Stosując $n - 1$ razy regułę m_5 otrzymujemy stąd $X \twoheadrightarrow Y_1 \cup \cdots \cup Y_n \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, tzn. $X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. $\square$

Rozdział 6

Równoważne rodziny modeli

W tym rozdziale definiujemy pewne rodziny modeli, a następnie, za jednym zamachem, dowodzimy pełności systemu $\mathscr{DEP}$ względem każdej z zaprezentowanych rodzin, a więc jednocześnie równoważności tych rodzin. Analogicznych rezultatów dowodzimy także dla systemów $\mathscr{FD}$ i $\mathscr{MVD}$.

6.1. Rodzina relacji dwukrotkowych

Oznaczmy rodzinę wszystkich relacji dwukrotkowych przez $\mathscr{R}_2$, tzn.

$$\mathscr{R}_2 = \left\{R \in \mathscr{R} : \#R = 2\right\}.$$

Jako, że $\mathcal{D}(u) \geqslant 2$ dla każdego atrybutu $u \in U$, to w zbiorze $\mathscr{T}$ istnieje co najmniej 2^n różnych krotek, gdzie $n = \#U$, a tym samym rodzina $\mathscr{R}_2$ jest niepusta.

Ponieważ zdefiniowaliśmy prawdziwość zależności funkcyjnych i prawdziwość zależności wielowartościowych na szerszej rodzinie $\mathscr{R}$, to automatycznie prawdziwość określona jest na rodzinie $\mathscr{R}_2$. Na rodzinie $\mathscr{R}_2$ możemy więc zdefiniować operatory konsekwencji.

Definicja 6.1. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{R}_2$ (względem zbioru zależności funkcyjnych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{F}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{F}}(F) = \bigcap_{R \in \mathscr{R}_2} C^{R}_{\mathscr{F}}(F)$$

dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$.

Wniosek 6.2. *Operator* $C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{F}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika uprost ze stwierdzenia 1.13. □

Definicja 6.3. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{R}_2$ (względem zbioru zależności wielowartościowych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{M}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{M}) \to \mathscr{P}(\mathscr{M})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{M}}(M) = \bigcap_{R \in \mathscr{R}_2} C^{R}_{\mathscr{M}}(M)$$

dla dowolnego zbioru $M \subseteq \mathscr{M}$.

Wniosek 6.4. *Operator* $C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{M}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika uprost ze stwierdzenia 1.13. □

Definicja 6.5. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{R}_2$ (względem zbioru zależności funkcyjnych i wielowartościowych) nazywamy funkcję $C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}_2} \colon \mathscr{P}(\mathscr{D}) \to \mathscr{P}(\mathscr{D})$ zdefiniowaną wzorem

$$C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}_2}(D) = \bigcap_{R \in \mathscr{R}_2} C_{\mathscr{D}}^{R}(D)$$

dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$.

Wniosek 6.6. *Operator* $C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}_2}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.13. □

6.2. Rodzina waluacji

Kolejną prezentowaną rodziną jest rodzina waluacji.

Definicja 6.7. *Waluacją*, albo *wartościowaniem* nazywamy dowolną funkcję $v : U \to \{0, 1\}$. Zbiór wszystkich waluacji oznaczamy przez $\mathscr{V}$, tzn.

$$\mathscr{V} = \left\{0, 1\right\}^{U}.$$

Definicja 6.8. Mówimy, że zależność funkcyjna lub wielowartościowa δ jest *prawdziwa* względem waluacji v, gdy $v(\delta) = 1$, przy czym v oznacza tutaj rozszerzenie waluacji v zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} v(X) &= \min\left\{v(x) : x \in X\right\}, \\ v(X \longrightarrow Y) &= \max\left\{1 - v(X), v(Y)\right\}, \\ v(X \twoheadrightarrow Y) &= \max\left\{1 - v(X), v(Y), v(Y')\right\} \end{aligned}$$

dla $X, Y \subseteq U$. (Przyjmujemy, że $\min \emptyset = 1$.)

Zbiór wszystkich zależności funkcyjnych prawdziwych względem waluacji v oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}(v)$, zbiór wszystkich zależności wielowartościowych prawdziwych względem waluacji v oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(v)$, a zbiór wszystkich zależności funkcyjnych i wielowartościowych prawdziwych względem waluacji v oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v)$. (Naturalnie $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) = \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(v) \cup \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(v)$.)

A zatem dowolna waluacja v jest modelem dla zależności funkcyjnych i jest modelem dla zależności wielowartościowych. Jest też modelem dla zależności funkcyjnych i wielowartościowych traktowanych jako jedna „całość". (Jako jeden zbiór formuł.) Na rodzinie $\mathscr{V}$ możemy więc zdefiniować operatory konsekwencji.

Definicja 6.9. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{V}$ (względem zbioru zależności funkcyjnych) nazywamy funkcję $C_{\mathscr{F}}^{\mathscr{V}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ zdefiniowaną wzorem

$$C_{\mathscr{F}}^{\mathscr{V}}(F) = \bigcap_{v \in \mathscr{V}} C_{\mathscr{F}}^{v}(F)$$

dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$, gdzie

$$C_{\mathscr{F}}^{v}(F) = \left\{\varphi \in \mathscr{F} : F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(v) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(v)\right\}.$$

Wniosek 6.10. *Operator* $C_{\mathscr{F}}^{\mathscr{V}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.13. □

Definicja 6.11. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{V}$ (względem zbioru zależności wielowartościowych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{M}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{M}) \to \mathscr{P}(\mathscr{M})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{M}}(M) = \bigcap_{v \in \mathscr{V}} C^{v}_{\mathscr{M}}(M)$$

dla dowolnego zbioru $M \subseteq \mathscr{M}$, gdzie

$$C^{v}_{\mathscr{M}}(M) = \Big\{\mu \in \mathscr{M} : M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(v) \Longrightarrow \mu \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(v)\Big\}.$$

Wniosek 6.12. *Operator* $C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{M}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.13. □

Definicja 6.13. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{V}$ (względem zbioru zależności funkcyjnych i wielowartościowych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}} \colon \mathscr{P}(\mathscr{D}) \to \mathscr{P}(\mathscr{D})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D) = \bigcap_{v \in \mathscr{V}} C^{v}_{\mathscr{D}}(D)$$

dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$, gdzie

$$C^{v}_{\mathscr{D}}(D) = \Big\{\delta \in \mathscr{D} : D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) \Longrightarrow \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v)\Big\}.$$

Wniosek 6.14. *Operator* $C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(\,\cdot\,)$ *ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika wprost ze stwierdzenia 1.13. □

O sile rodziny waluacji stanowią równoważności

$$\begin{aligned} v(X \longrightarrow Y) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \big(v(X) = 1 \Longrightarrow \; v(Y) = 1\big), \\ v(X \twoheadrightarrow Y) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big[v(X) = 1 \Longrightarrow \big(v(Y) = 1 \vee v(Y') = 1\big)\Big], \end{aligned}$$

które obrazują związek waluacji ze zwykłą implikacją logiczną.

6.3. Rodzina podzbiorów zbioru atrybutów

Ostatnią już rodziną modeli, jaką prezentujemy jest rodzina $\mathscr{P}(U)$ wszystkich podzbiorów zbioru atrybutów U. Dla uproszczenia notacji, zamiast $\mathscr{P}(U)$ piszemy $\mathscr{P}$, tzn. przyjmujemy

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(U).$$

Definicja 6.15. Mówimy, że zależność funkcyjna $X \longrightarrow Y$ jest *prawdziwa* w zbiorze $P \in \mathscr{P}$, gdy

$$X \subseteq P \quad \Longrightarrow \quad Y \subseteq P.$$

Mówimy, że zależność wielowartościowa $X \twoheadrightarrow Y$ jest *prawdziwa* w zbiorze $P \in \mathscr{P}$, gdy

$$X \subseteq P \quad \Longrightarrow \quad \big(Y \subseteq P \quad \vee \quad Y' \subseteq P\big).$$

Zbiór wszystkich zależności funkcyjnych prawdziwych w zbiorze $P \in \mathscr{P}$ oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}(P)$, zbiór wszystkich zależności wielowartościowych prawdziwych w zbiorze $P \in \mathscr{P}$ oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(P)$, a zbiór wszystkich zależności funkcyjnych i wielowartościowych prawdziwych w zbiorze $P \in \mathscr{P}$ oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)$. (Oczywiście $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) = \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(P) \cup \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(P)$.)

Na rodzinie $\mathscr{P}$, standardowo określamy operatory konsekwencji.

Definicja 6.16. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{P}$ (względem zbioru zależności funkcyjnych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{F}} : \mathscr{P}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}(\mathscr{F})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{F}}(F) = \bigcap_{P \in \mathscr{P}} C^{P}_{\mathscr{F}}(F)$$

dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$, gdzie

$$C^{P}_{\mathscr{F}}(F) = \Big\{\varphi \in \mathscr{F} : F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(P) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(P)\Big\}.$$

Wniosek 6.17. *Operator $C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{F}}(\,\cdot\,)$ ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika uprost ze stwierdzenia 1.13. □

Definicja 6.18. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{P}$ (względem zbioru zależności wielowartościowych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{M}} : \mathscr{P}(\mathscr{M}) \to \mathscr{P}(\mathscr{M})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{M}}(M) = \bigcap_{P \in \mathscr{P}} C^{P}_{\mathscr{M}}(M)$$

dla dowolnego zbioru $M \subseteq \mathscr{M}$, gdzie

$$C^{P}_{\mathscr{M}}(M) = \Big\{\mu \in \mathscr{M} : M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(P) \Longrightarrow \mu \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(P)\Big\}.$$

Wniosek 6.19. *Operator $C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{M}}(\,\cdot\,)$ ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika uprost ze stwierdzenia 1.13. □

Definicja 6.20. *Operatorem konsekwencji w rodzinie* $\mathscr{P}$ (względem zbioru zależności funkcyjnych i wielowartościowych) nazywamy funkcję $C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}} : \mathscr{P}(\mathscr{D}) \to \mathscr{P}(\mathscr{D})$ zdefiniowaną wzorem

$$C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D) = \bigcap_{P \in \mathscr{P}} C^{P}_{\mathscr{D}}(D)$$

dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$, gdzie

$$C^{P}_{\mathscr{D}}(D) = \Big\{\delta \in \mathscr{D} : D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \Longrightarrow \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\Big\}.$$

Wniosek 6.21. *Operator $C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(\,\cdot\,)$ ma własności konsekwencji.*

Dowód. Wynika uprost ze stwierdzenia 1.13. □

6.4. Równoważność względem zależności funkcyjnych i wielowartościowych

Przystąpimy teraz do dowodów pełności konsekwencji syntaktycznych $C_{\mathscr{FD}}$, $C_{\mathscr{MVD}}$ oraz $C_{\mathscr{DEP}}$ względem konsekwencji określonych na rodzinach $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$. Nie będziemy jednak trudzić się dowodzeniem mnóstwa równości. Pokażemy, że dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$ zachodzą inkluzje

$$C_{\mathscr{DEP}}(D) \subseteq C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(D) \subseteq C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}(D) \subseteq C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D) \subseteq C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D), \tag{$\subseteq$}$$

a tym samym równość wszystkich występujących powyżej konsekwencji.

Pierwsza inkluzja wynika uprost z twierdzeń 3.16, 4.17, 5.7 oraz lematu 1.18. Ponieważ przekrój po szerszej rodzinie zawiera się w przekroju po węższej rodzinie, to druga inkluzja wynika natychmiast z określenia konsekwencji $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}$ i $C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}$. Pozostaje wykazać trzy ostatnie inkluzje.

Lemat 6.22. *Niech $v \in \mathscr{V}$, $R = \{r, s\} \in \mathscr{R}_2$ oraz*

$$v(u) = 1 \iff r(u) = s(u)$$

dla $u \in U$. Wówczas $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) = \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$.

Dowód. Mamy pokazać, że

$$\delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) \iff \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R).$$

Załóżmy najpierw, że $\delta = X \longrightarrow Y$. Wtedy

$$\begin{aligned} \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) &\iff \big(v(X) = 1 \Longrightarrow v(Y) = 1\big) \iff \\ &\iff \big(r|_X = s|_X \Longrightarrow r|_Y = s|_Y\big) \iff (*), \end{aligned}$$

a ponieważ warunek (FD) jest trywialnie spełniony, gdy występujące w nim krotki są sobie równe, to

$$(*) \iff \bigwedge_{p,q \in \{r,s\}} \big(p|_X = q|_X \Longrightarrow p|_Y = q|_Y\big) \iff \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R).$$

Załóżmy teraz, że $\delta = X \twoheadrightarrow Y$.

$$\begin{aligned} \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) &\iff \Big[v(X) = 1 \Longrightarrow \big(v(Y) = 1 \vee v(Y') = 1\big)\Big] \iff \\ &\iff \Big[r|_X = s|_X \Longrightarrow \big(r|_Y = s|_Y \vee r|_{Y'} = s|_{Y'}\big)\Big] \iff \\ &\iff \Big[r|_X = s|_X \Longrightarrow \big(\ r|_{X\cup Y} = s|_{X\cup Y} \vee r|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'}\ \big)\Big] \iff \\ &\iff \Big[r|_X = s|_X \Longrightarrow \big((s|_{X\cup Y} = r|_{X\cup Y} \wedge s|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'}) \vee \\ &\qquad\qquad \vee (r|_{X\cup Y} = r|_{X\cup Y} \wedge r|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'})\big)\Big] \iff \\ &\iff \Big[r|_X = s|_X \Longrightarrow \bigvee_{t \in \{r,s\}} \big(t|_{X\cup Y} = r|_{X\cup Y} \wedge t|_{X\cup Y'} = s|_{X\cup Y'}\big)\Big] \iff (*), \end{aligned}$$

a ponieważ warunek (MVD) jest trywialnie spełniony, gdy występujące w nim krotki są sobie równe, to

$$\begin{aligned} (*) &\iff \bigwedge_{p,q \in \{s,t\}} \Big[p|_X = q|_X \Longrightarrow \bigvee_{t \in \{r,s\}} \big(t|_{X\cup Y} = p|_{X\cup Y} \wedge t|_{X\cup Y'} = q|_{X\cup Y'}\big)\Big] \iff \\ &\iff \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 6.23. *Dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$ zachodzi inkluzja*

$$C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}_2}(D) \subseteq C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{V}}(D).$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}_2}(D) \nsubseteq C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{V}}(D)$, tzn.

$$\delta \in C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}_2}(D) \quad \wedge \quad \delta \notin C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{V}}(D)$$

dla pewnego $\delta \in \mathscr{D}$, czyli

$$\bigwedge_{R \in \mathscr{R}_2} \Big(D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R) \quad \Longrightarrow \quad \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R) \Big), \tag{$*$}$$

$$\bigvee_{v \in \mathscr{V}} \Big(D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) \quad \wedge \quad \delta \notin \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) \Big). \tag{$**$}$$

Zauważmy, że $v(u) = 0$ dla pewnego $u \in U$, gdyż w przeciwnym razie $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) = \mathscr{D}$, podczas, gdy wobec warunku $(**)$, $\delta \notin \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v)$. Możemy więc rozważać taką relację $R = \{r, s\} \in \mathscr{R}_2$, że

$$r(u) = s(u) \quad \Longleftrightarrow \quad v(u) = 1$$

dla $u \in U$. (Mamy pewność, że $r \neq s$, tzn. $R \in \mathscr{R}_2$.) Wobec lematu 6.22 wnosimy więc, że $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) = \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$, skąd wobec warunku $(**)$ otrzymujemy $D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) = \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R)$. Przy pomocy warunku $(*)$ wynika stąd, że $\delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(R) = \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v)$, co przeczy warunkowi $(**)$. □

Lemat 6.24. *Niech $P \in \mathscr{P}$, $v \in \mathscr{V}$ oraz*

$$u \in P \quad \Longleftrightarrow \quad v(u) = 1$$

dla $u \in U$. Wówczas $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) = \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v)$.

Dowód. Mamy pokazać, że

$$\delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v).$$

Jeśli $\delta = X \longrightarrow Y$, to

$$\begin{aligned} \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(\; X \subseteq P \quad \Longrightarrow \quad Y \subseteq P \; \Big) \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big(v(X) = 1 \Longrightarrow v(Y) = 1 \Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v). \end{aligned}$$

Jeśli zaś $\delta = X \twoheadrightarrow Y$, to

$$\begin{aligned} \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big[\; X \subseteq P \; \Longrightarrow \Big(\; Y \subseteq P \; \vee \; Y' \subseteq P \; \Big) \Big] \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big[v(X) = 1 \Longrightarrow \Big(v(Y) = 1 \vee v(Y') = 1 \Big) \Big] \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 6.25. *Dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$ zachodzi inkluzja*

$$C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{V}}(D) \subseteq C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{P}}(D).$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D) \nsubseteq C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D)$, tzn.

$$\delta \in C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D) \quad \wedge \quad \delta \notin C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D)$$

dla pewnego $\delta \in \mathscr{D}$, czyli

$$\bigwedge_{v \in \mathscr{V}} \Big(D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) \implies \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v)\Big). \tag{$*$}$$

$$\bigvee_{P \in \mathscr{P}} \Big(D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \quad \wedge \quad \delta \notin \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\Big). \tag{$**$}$$

Rozważmy takie wartościowanie $v \in \mathscr{V}$, że

$$v(u) = 1 \iff u \in P$$

dla $u \in U$. Wobec lematu 6.24 wnosimy więc, że $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) = \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v)$, skąd wobec warunku ($**$) otrzymujemy $D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) = \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v)$. Przy pomocy warunku ($*$) wynika stąd, że $\delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) = \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)$, co przeczy warunkowi ($**$). □

Zauważmy, że w twierdzeniach 6.23 i 6.25 moglibyśmy z łatwością udowodnić przeciwne inkluzje. Tyle tylko, że otrzymamy je „automatycznie”, dowodząc ostatniej inkluzji ciągu ($\subseteq$).

Lemat 6.26. *Niech $D \subseteq \mathscr{D}$, $X \subseteq U$, $P \in \mathscr{X}$, i $\overline{X} \cap P = \emptyset$. Wówczas $D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P')$.*

Dowód. Jeśli $D = \emptyset$, to oczywiście $D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P')$. Załóżmy więc, że $D \neq \emptyset$.

Weźmy najpierw dowolną zależność $\delta = A \twoheadrightarrow B \in D$. Mamy pokazać, że $\delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P')$, tzn. wykazać prawdziwość implikacji

$$A \subseteq P' \implies \Big(B \subseteq P' \quad \vee \quad B' \subseteq P'\Big).$$

Załóżmy więc, że $A \subseteq P'$ i niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą wszystkimi zbiorami rodziny $\mathscr{X}$ dla których $A \cap Y_1 \neq \emptyset, \ldots, A \cap Y_n \neq \emptyset$. Oznaczmy $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$. Oczywiście $A \subseteq Y$, więc wobec reguły m_2', z zależności $A \twoheadrightarrow B \in D \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$ otrzymujemy $Y \twoheadrightarrow B \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Ponadto $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathscr{X}$, a więc wobec definicji bazy zależności (def. 5.12) mamy $X \twoheadrightarrow Y_1, \ldots, X \twoheadrightarrow Y_n \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Stosując więc $n-1$ razy regułę m_5 otrzymujemy stąd $X \twoheadrightarrow Y_1 \cup \cdots \cup Y_n \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, tzn. $X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Teraz $\langle\{X \twoheadrightarrow Y, Y \twoheadrightarrow B\}, X \twoheadrightarrow B \setminus Y\rangle \in m_3$, a więc $X \twoheadrightarrow B \setminus Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$.

Zauważmy, że skoro $A \subseteq P'$, tzn. $A \cap P = \emptyset$, to $P \notin \{Y_1, \ldots, Y_n\}$, a więc $P \cap Y = \emptyset$, czyli $Y \subseteq P'$.

Gdyby $B \setminus Y = \emptyset$, to $B \subseteq Y$, czyli $B \subseteq P'$. Załóżmy więc, że $B \setminus Y \neq \emptyset$. Wobec wniosku 5.15 oznacza to, że $B \setminus Y$ jest sumą pewnych zbiorów rodziny $\mathscr{X}$. A ponieważ $P \in \mathscr{X}$, to albo $P \subseteq B \setminus Y$, albo $P \cap (B \setminus Y) = \emptyset$. Ale $P \cap Y = \emptyset$, więc albo $P \subseteq B \setminus Y \subseteq B$, albo $P \cap B = \emptyset$. Stąd, albo $B' \subseteq P'$, albo $B \subseteq P'$.

Weźmy teraz dowolną zależność $\delta = A \longrightarrow B \in D$. Mamy pokazać, że $\delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P')$, tzn. wykazać prawdziwość implikacji

$$A \subseteq P' \implies B \subseteq P'.$$

Załóżmy więc, że $A \subseteq P'$ i niech Y będzie określone tak jak poprzednio. Skoro $A \longrightarrow B \in D \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$, to wobec reguły f_4 mamy $A \longrightarrow B \setminus A \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Stąd wobec reguły d_1 otrzymujemy $A \twoheadrightarrow B \setminus A \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Wykorzystując wcześniejsze rozważania do zależności $A \twoheadrightarrow B \setminus A \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$ dostajemy $X \twoheadrightarrow (B \setminus A) \setminus Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, tzn. $X \twoheadrightarrow B \setminus (A \cup Y) \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Ponadto wobec reguły f_4, z zależności $A \longrightarrow B \in$

$C_{\mathscr{DEP}}(D)$ otrzymujemy zależność $A \longrightarrow B \setminus (A \cup Y) \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Teraz $\langle \{X \twoheadrightarrow B \setminus (A \cup Y), A \longrightarrow B \setminus (A \cup Y)\}, X \longrightarrow B \setminus (A \cup Y) \rangle \in d_3$, a zatem $X \longrightarrow B \setminus (A \cup Y) \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Wobec tego, na mocy lematu 5.10, $B \setminus (A \cup Y) \subseteq \overline{X}$, ale $\overline{X} \cap P = \emptyset$, więc $\overline{X} \subseteq P'$, a zatem $B \setminus (A \cup Y) \subseteq P'$. Ponadto $A \subseteq P'$ i $Y \subseteq P'$, a więc ostatecznie $B \subseteq P'$. □

Możemy teraz wykazać ostatnią z inkluzji potrzebnych do dowodu $(\subseteq)$.

Twierdzenie 6.27. *Dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$ zachodzi inkluzja*

$$C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D).$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D) \not\subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$, tzn. istnieje taka zależność $\delta \in C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D)$, że $\delta \notin C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Zachodzi więc warunek

$$\bigwedge_{Q \in \mathscr{P}} \Big(D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(Q) \implies \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(Q) \Big). \tag{$*$}$$

Załóżmy najpierw, że $\delta = X \longrightarrow Y$. Skoro $\delta \notin C_{\mathscr{DEP}}(D)$, to również $X \longrightarrow \{y\} \notin C_{\mathscr{DEP}}(D)$ dla pewnego $y \in Y$, gdyż w przeciwnym razie stosując wielokrotnie regułę f_5 otrzymalibyśmy $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. (Oczywiście nie może też być $Y = \emptyset$, bo wtedy $X \longrightarrow Y \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(\emptyset) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(D)$.) Zauważmy, że $y \notin \overline{X}$, bo gdyby $y \in \overline{X}$, to wprost z definicji domknięcia (def. 5.9) byłoby $X \longrightarrow \{y\} \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Musi więc istnieć takie $P \in \mathscr{X}$, że $y \in P$ i $\overline{X} \cap P = \emptyset$. Zatem wobec lematu 6.26 zachodzi inkluzja $D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P')$. Z warunku $(*)$ wynika więc, że $\delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P')$, tzn.

$$X \not\subseteq P' \quad \vee \quad Y \subseteq P'.$$

Ponieważ $y \in P$, to $Y \not\subseteq P'$. Zatem musi być $X \not\subseteq P'$. Tymczasem $\overline{X} \cap P = \emptyset$, a więc tym bardziej $X \cap P = \emptyset$, tzn. $X \subseteq P'$.

Załóżmy teraz, że $\delta = X \twoheadrightarrow Y$. Gdyby dla każdego zbioru $P \in \mathscr{X}$ zachodziła alternatywa $P \cap Y = \emptyset$ lub $P \subseteq Y$, to zbiór Y byłby sumą pewnych elementów rodziny $\mathscr{X}$ i na mocy wniosku 5.15 mielibyśmy $\delta = X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Wobec tego musi istnieć taki zbiór $P \in \mathscr{X}$, że $P \cap Y \neq \emptyset$ i $P \not\subseteq Y$. Zgodnie z lematem 5.14, jeśli $x \in \overline{X}$, to $\{x\} \in \mathscr{X}$, więc $\overline{X}$ jest sumą pewnych jednoelementowych zbiorów rodziny $\mathscr{X}$. Na mocy lematu 5.13 rodzina $\mathscr{X}$ tworzy podział zbioru atrybutów U, a ponadto $P \in \mathscr{X}$. A zatem $\overline{X} \cap P = \emptyset$, bo gdyby $\overline{X} \cap P \neq \emptyset$, to $P = \{x\}$ dla pewnego $x \in \overline{X}$, co wobec warunku $P \cap Y \neq \emptyset$ oznaczałoby, że $P \cap Y = \{x\} = P$, tzn. $P \subseteq Y$ podczas, gdy $P \not\subseteq Y$

A zatem spełnione są założenia lematu 6.26, tak więc $D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P')$. Wobec warunku $(*)$ wnosimy więc, że $\delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P')$, tzn.

$$X \not\subseteq P' \quad \vee \quad Y \subseteq P' \quad \vee \quad Y' \subseteq P'.$$

Ponieważ $P \cap Y \neq \emptyset$, to $Y \not\subseteq P'$. Jako, że $P \not\subseteq Y$, to $Y' \not\subseteq P'$. Zatem musi być $X \not\subseteq P'$. Ale $\overline{X} \cap P = \emptyset$, skąd $X \cap P = \emptyset$, tzn. $X \subseteq P'$. Uzyskana sprzeczność dowodzi błędności naszego wyjściowego założenia. □

Wykazaliśmy ostatnią z inkluzji ciągu $(\subseteq)$, dowodząc tym samym, że dla dowolnego zbioru $D \in \mathscr{D}$ zachodzą równości

$$C_{\mathscr{DEP}}(D) = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(D) = C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}(D) = C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D) = C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D). \tag{=}$$

Tak więc udowodniliśmy pełność konsekwencji syntaktycznej $C_{\mathscr{DEP}}$ względem każdej z konsekwencji $C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}$, $C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}$, $C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}$ i $C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}$, a jednocześnie pokazaliśmy równoważność rodzin $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$ względem zależności funkcyjnych i wielowartościowych.

Wniosek 6.28. *W systemie $\mathscr{DEP}$, aksjomaty zbioru $f_1 \cup m_1$ są tautologiami, a reguły f_2, f_3, m_0, m_2, m_3, d_1 i d_2 są niezawodne w każdej z rodzin $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$.*

Dowód. Wynika wprost z równości (=) oraz lematu 1.18. □

Wniosek 6.29. *W systemie $\mathscr{DEP}$, reguły f_2', f_4, f_5, f_5', f_6, m_0', m_2', m_4, m_5, m_5', m_7, m_8 i d_3 są niezawodne w każdej z rodzin $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$.*

Dowód. Wynika wprost z wniosków 6.28 i 1.20. □

6.5. Równoważność względem zależności funkcyjnych i względem zależności wielowartościowych

Przystąpimy teraz do uzasadnienia równości analogicznych do (=), dla systemów $\mathscr{FD}$ oraz $\mathscr{MVD}$.

Lemat 6.30. *Dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ zachodzi równość*

$$C_{\mathscr{DEP}}(F) = C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M,$$

gdzie

$$M = \left\{A \twoheadrightarrow B \in \mathscr{M} : A \longrightarrow B \in C_{\mathscr{FD}}(F) \vee A \longrightarrow B' \in C_{\mathscr{FD}}(F)\right\}.$$

Dowód. ($\subseteq$) Wykażemy najpierw, indukcyjnie względem stopnia konsekwencji, że

$$C^n_{\mathscr{DEP}}(F) \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 0$ mamy

$$\begin{aligned} C^0_{\mathscr{DEP}}(F) &= F \cup f_1 \cup m_1 = C^0_{\mathscr{FD}}(F) \cup m_1 = \\ &= C^0_{\mathscr{FD}}(F) \cup \left\{A \twoheadrightarrow B \in \mathscr{M} : A \longrightarrow B \in f_1\right\} \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M. \end{aligned}$$

Załóżmy więc, że teza indukcyjna jest spełniona dla pewnego $n \geqslant 0$ i rozważmy konsekwencję stopnia $n+1$. Weźmy dowolną zależność $\delta \in C^{n+1}_{\mathscr{DEP}}(F)$. Gdyby $\delta \in C^n_{\mathscr{DEP}}(F)$, to wprost z założenia indukcyjnego mielibyśmy $\delta \in C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$. Przypuśćmy więc, że $\delta \in C^{n+1}_{\mathscr{DEP}}(F) \setminus C^n_{\mathscr{DEP}}(F)$. Wtedy zgodnie z definicją 5.4

$$\bigvee_{d \in \{f_2, f_3, m_0, m_2, m_3, d_1, d_2\}} \; \bigvee_{E \subseteq C^n_{\mathscr{DEP}}(D)} \langle E, \delta \rangle \in d.$$

Wobec założenia indukcyjnego $C^n_{\mathscr{DEP}}(F) \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$, a więc

$$E \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M. \tag{$*$}$$

Możliwe są następujące przypadki.

Pierwszy przypadek. Jeśli $d = f_2$ lub $d = f_3$, to przy pomocy ($*$) otrzymujemy $E \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F)$. A ponieważ $\langle E, \delta \rangle \in d$, to wobec lematu 1.21 dostajemy $\delta \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, a więc $\delta \in C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$.

Przypadek drugi. Jeżeli $d = m_0$, to $E = \{X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\delta = X \twoheadrightarrow Y'$ dla pewnych X, $Y \subseteq U$. Wobec ($*$) mamy $X \twoheadrightarrow Y \in M$, a więc $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, albo $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, co jednocześnie oznacza, że $\delta = X \twoheadrightarrow Y' \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$.

Przypadek trzeci. Jeżeli $d = m_2$, to $E = \{X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\delta = X \cup Z \twoheadrightarrow Y \cup Z$ dla pewnych $X, Y, Z \subseteq U$. Wobec $(*)$ mamy $X \twoheadrightarrow Y \in M$, a więc $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, albo $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Jeśli $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, to przy pomocy reguły f_2 otrzymujemy $X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, co oznacza, że $\delta \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$. Przypuśćmy więc, że $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Wtedy przy pomocy reguły f_4 otrzymujemy $X \longrightarrow (Y \cup Z)' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, gdyż $(Y \cup Z)' \subseteq Y'$. (Por. diagram z dowodu stwierdzenia 5.6.) Stąd w oparciu o regułę f_2' dostajemy $X \cup Z \longrightarrow (Y \cup Z)' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, a więc również $\delta \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$.

Przypadek czwarty. Jeśli $d = m_3$, to $E = \{X \twoheadrightarrow Y, Y \twoheadrightarrow Z\}$ i $\delta = X \twoheadrightarrow Z \setminus Y$ dla pewnych $X, Y, Z \subseteq U$. Wobec $(*)$ mamy $X \twoheadrightarrow Y, Y \twoheadrightarrow Z \in M$, a zatem $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, albo $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$ oraz $Y \longrightarrow Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, albo $Y \longrightarrow Z' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Jeżeli $X \longrightarrow Y, Y \longrightarrow Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, to przy pomocy reguły f_3 otrzymujemy $X \longrightarrow Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, skąd w oparciu o regułę f_4 dostajemy $X \longrightarrow Z \setminus Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, a tym samym $\delta \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$.

Podobnie, gdy $X \longrightarrow Y, Y \longrightarrow Z' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, to przy pomocy reguły f_3 otrzymujemy $X \longrightarrow Z' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Mamy więc $X \longrightarrow Y, X \longrightarrow Z' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, skąd przy pomocy reguły f_5 dostajemy $X \longrightarrow Y \cup Z' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, tzn. $X \longrightarrow (Z \setminus Y)' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. A więc $\delta \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$.

Jeżeli $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, to przy pomocy reguły f_4 od razu otrzymujemy $X \longrightarrow Z \setminus Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, co oznacza, że $\delta \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$.

Przypadek piąty. Jeśli $d = d_1$, to $E = \{X \longrightarrow Y\}$ i $\delta = X \twoheadrightarrow Y$ dla pewnych X, $Y \subseteq U$. Wobec $(*)$ mamy $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, co oznacza, że $\delta \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$.

W ostatnim przypadku, gdy $d = d_2$ mamy $E = \{X \cup Y \longrightarrow Z, X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\delta = X \longrightarrow Z \setminus Y$ dla pewnych $X, Y, Z \subseteq U$. Wobec $(*)$ otrzymujemy $X \cup Y \longrightarrow Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$ oraz $X \twoheadrightarrow Y \in M$, tzn. $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, albo $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Jeśli $X \cup Y \longrightarrow Z$, $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, to przy pomocy reguły f_6 otrzymujemy $X \longrightarrow Z \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, a stąd wobec reguły f_4 dostajemy $X \longrightarrow Z \setminus Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, co oznacza, że $\delta \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$. Jeśli zaś $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, to przy pomocy reguły f_4 od razu otrzymujemy $X \longrightarrow Z \setminus Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, a więc $\delta \in M \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej wnosimy więc, że

$$C^n_{\mathscr{DEP}}(F) \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$C_{\mathscr{DEP}}(F) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{DEP}}(F) \subseteq C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M,$$

$(\supseteq)$ Wprost z określenia konsekwencji $C_{\mathscr{DEP}}$ i $C_{\mathscr{FD}}$ otrzymujemy inkluzję

$$C_{\mathscr{FD}}(F) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(F). \tag{**}$$

Ponadto, jeśli $X \twoheadrightarrow Y \in M$, to albo $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(F)$, albo $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{FD}}(F) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(F)$. W pierwszym przypadku, tj. gdy $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$ wobec reguły d_1 otrzymujemy $X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$, zaś w drugim przypadku, tj. gdy $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$ przy pomocy reguły d_1 otrzymujemy $X \twoheadrightarrow Y' \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$, skąd wobec reguły m_0 dostajemy $X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$. Zatem $M \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(F)$, co w połączeniu z $(**)$ oznacza, że $C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(F)$. □

Wniosek 6.31. *Dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ zachodzi równość*

$$C_{\mathscr{DEP}}(F) \cap \mathscr{F} = C_{\mathscr{FD}}(F).$$

Dowód. Wobec lematu 6.30 mamy

$$C_{\mathscr{DEP}}(F) = C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M$$

dla pewnego $M \subseteq \mathscr{M}$. Zatem

$$C_{\mathscr{DEP}}(F) \cap \mathscr{F} = \Big(C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M\Big) \cap \mathscr{F} = \Big(C_{\mathscr{FD}}(F) \cap \mathscr{F}\Big) \cup \Big(M \cap \mathscr{F}\Big) = \\ = C_{\mathscr{FD}}(F) \cup \emptyset = C_{\mathscr{FD}}(F). \qquad \square$$

Lemat 6.32. *Dla dowolnego zbioru $M \subseteq \mathscr{M}$ zachodzi równość*

$$C_{\mathscr{DEP}}(M) = C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1.$$

Dowód. ($\subseteq$) Wykażemy najpierw indukcyjnie względem stopnia konsekwencji, że

$$C^n_{\mathscr{DEP}}(M) \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 0$ mamy

$$C^0_{\mathscr{DEP}}(M) = M \cup \Big(f_1 \cup m_1\Big) = \Big(M \cup m_1\Big) \cup f_1 = C^0_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1 \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1.$$

Załóżmy więc, że teza indukcyjna jest spełniona dla $n \geqslant 0$ i rozważmy konsekwencję stopnia $n+1$. Weźmy dowolną zależność $\delta \in C^{n+1}_{\mathscr{DEP}}(M)$. Gdyby $\delta \in C^n_{\mathscr{DEP}}(M)$, to wprost z założenia indukcyjnego mielibyśmy $\delta \in C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$. Przypuśćmy więc, że $\delta \in C^{n+1}_{\mathscr{DEP}}(M) \setminus C^n_{\mathscr{DEP}}(M)$. Wtedy zgodnie z definicją 5.4

$$\bigvee_{d \in \{f_2, f_3, m_0, m_2, m_3, d_1, d_2\}} \; \bigvee_{E \subseteq C^n_{\mathscr{DEP}}(D)} \langle E, \delta \rangle \in d.$$

Wobec założenia indukcyjnego mamy $C^n_{\mathscr{DEP}}(M) \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$, a więc

$$E \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1. \tag{$*$}$$

Możliwe są następujące przypadki.

Przypadek pierwszy. Jeśli $d = f_2$, to $E = \{X \longrightarrow Y\}$ i $\delta = X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z$ dla pewnych $X, Y, Z \subseteq U$. Wobec ($*$) mamy $X \longrightarrow Y \in f_1$, a więc $Y \subseteq X$. Stąd $Y \cup Z \subseteq X \cup Z$, czyli $\delta = X \cup Z \longrightarrow Y \cup Z \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$.

Przypadek drugi. Jeżeli $d = f_3$, to $E = \{X \longrightarrow Y, Y \longrightarrow Z\}$ i $\delta = X \longrightarrow Z$ dla pewnych $X, Y, Z \subseteq U$. Ponownie wobec ($*$) mamy $X \longrightarrow Y, Y \longrightarrow Z \in f_1$, czyli $Y \subseteq X$ i $Z \subseteq Y$. Zatem $Z \subseteq X$, co oznacza, że $\delta = X \longrightarrow Z \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$.

Przypadek trzeci. Jeśli $d \in \{m_0, m_2, m_3\}$, to przy pomocy ($*$) otrzymujemy $E \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M)$. A ponieważ $\langle E, \delta \rangle \in d$, to wobec lematu 1.21 dostajemy $\delta \in C_{\mathscr{MVD}}(M)$, a więc $\delta \in C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$.

Przypadek czwarty. Jeżeli $d = d_1$, to $E = \{X \longrightarrow Y\}$ i $\delta = X \twoheadrightarrow Y$ dla pewnych $X, Y \subseteq U$. Wobec ($*$) mamy $X \longrightarrow Y \in f_1$, a więc $Y \subseteq X$. Zatem $\delta = X \twoheadrightarrow Y \in m_1 \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$.

W ostatnim przypadku, tj. gdy $d = d_2$ mamy $E = \{X \cup Y \longrightarrow Z, X \twoheadrightarrow Y\}$ i $\delta = X \longrightarrow Z \setminus Y$ dla pewnych $X, Y, Z \subseteq U$. Wobec ($*$) otrzymujemy $X \cup Y \longrightarrow Z \in f_1$, tzn. $Z \subseteq X \cup Y$. A więc $Z \setminus Y \subseteq (X \cup Y) \setminus Y \subseteq X$, czyli $\delta = X \longrightarrow Z \setminus Y \in f_1 \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej wnosimy więc, że

$$C^n_{\mathscr{DEP}}(M) \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$C_{\mathscr{DEP}}(M) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{DEP}}(M) \subseteq C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1,$$

($\supseteq$) Wprost z określenia konsekwencji $C_{\mathscr{DEP}}$ i $C_{\mathscr{MVD}}$ otrzymujemy inkluzję

$$C_{\mathscr{MVD}}(M) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(M).$$

Ponadto

$$f_1 \subseteq C^0_{\mathscr{DEP}}(M) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(M),$$

a więc

$$C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1 \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(M). \qquad \square$$

Wniosek 6.33. *Dla dowolnego zbioru $M \subseteq \mathscr{M}$ zachodzi równość*

$$C_{\mathscr{DEP}}(M) \cap \mathscr{M} = C_{\mathscr{MVD}}(M).$$

Dowód. Wobec lematu 6.32 mamy

$$C_{\mathscr{DEP}}(M) = C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1,$$

a więc

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{DEP}}(M) \cap \mathscr{M} &= \Big(C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup f_1\Big) \cap \mathscr{M} = \Big(C_{\mathscr{MVD}}(M) \cap \mathscr{M}\Big) \cup \Big(f_1 \cap \mathscr{M}\Big) = \\ &= C_{\mathscr{MVD}}(M) \cup \emptyset = C_{\mathscr{MVD}}(M). \end{aligned} \qquad \square$$

Lemat 6.34. *Niech $\mathscr{N}$ będzie dowolną, niepustą rodziną modeli dla systemu $\mathscr{DEP}$ i niech*

$$C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{F}}(F) = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} C^N_{\mathscr{F}}(F), \qquad C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{M}}(M) = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} C^N_{\mathscr{M}}(M), \qquad C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{D}}(D) = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} C^N_{\mathscr{D}}(D)$$

dla wszelkich zbiorów $F \subseteq \mathscr{F}$, $M \subseteq \mathscr{M}$ oraz $D \subseteq \mathscr{D}$, gdzie

$$\begin{aligned} C^N_{\mathscr{F}}(F) &= \Big\{\varphi \in \mathscr{F} : \ F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(N) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(N)\Big\}, \\ C^N_{\mathscr{M}}(M) &= \Big\{\mu \in \mathscr{M} : M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(N) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(N)\Big\}, \\ C^N_{\mathscr{D}}(D) &= \Big\{\delta \in \mathscr{D} : D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(N) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(N)\Big\}. \end{aligned}$$

(*Oczywiście $\mathcal{E}_{\mathscr{F}}(N)$ oznacza zbiór wszystkich zależności funkcyjnych prawdziwych w modelu N, $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(N)$ oznacza zbiór wszystkich zależności wielowartościowych prawdziwych w modelu N, a $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(N)$ — zbiór wszystkich zależności funkcyjnych i wielowartościowych prawdziwych w modelu N. Ponadto $\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(N) = \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(N) \cup \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(N)$.*) *Wówczas dla dowolnych zbiorów $F \subseteq \mathscr{F}$ i $M \subseteq \mathscr{M}$ zachodzą równości*

$$C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} = C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{F}}(F) \qquad \textit{oraz} \qquad C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} = C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{M}}(M).$$

Dowód. Ponieważ

$$C^N_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} = \Big\{\delta \in \mathscr{D} : F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(N) \Longrightarrow \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(N)\Big\} \cap \mathscr{F} =$$
$$= \Big\{\delta \in \mathscr{F} : F \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(N) \Longrightarrow \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{F}}(N)\Big\} = C^N_{\mathscr{F}}(F),$$

to

$$C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} = \Big(\bigcap_{N \in \mathscr{N}} C^N_{\mathscr{D}}(F)\Big) \cap \mathscr{F} = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} \Big(C^N_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F}\Big) = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} C^N_{\mathscr{F}}(F) = C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{F}}(F).$$

Podobnie

$$C^N_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} = \Big\{\delta \in \mathscr{D} : M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(N) \Longrightarrow \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(N)\Big\} \cap \mathscr{M} =$$
$$= \Big\{\delta \in \mathscr{M} : M \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(N) \Longrightarrow \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(N)\Big\} = C^N_{\mathscr{M}}(M),$$

więc

$$C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} = \Big(\bigcap_{N \in \mathscr{N}} C^N_{\mathscr{D}}(M)\Big) \cap \mathscr{M} = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} \Big(C^N_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M}\Big) = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} C^N_{\mathscr{M}}(M) = C^{\mathscr{N}}_{\mathscr{M}}(M). \qquad \square$$

Wniosek 6.35. *Dla dowolnych zbiorów $F \subseteq \mathscr{F}$ i $M \subseteq \mathscr{M}$ zachodzą równości*

$$\begin{aligned} C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} &= C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{F}}(F), & C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} &= C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{M}}(M),\\ C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} &= C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{F}}(F), & C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} &= C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{M}}(M),\\ C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} &= C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{F}}(F), & C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} &= C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{M}}(M),\\ C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} &= C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{F}}(F), & C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} &= C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{M}}(M). \end{aligned}$$

Dowód. Wynika uprost z lematu 6.34. $\square$

Twierdzenie 6.36. *Dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ zachodzą równości*

$$C_{\mathscr{F}\mathscr{D}}(F) = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{F}}(F) = C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{F}}(F) = C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{F}}(F) = C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{F}}(F),$$

zaś dla dowolnego zbioru $M \subseteq \mathscr{M}$ zachodzą równości

$$C_{\mathscr{M}\mathscr{V}\mathscr{D}}(M) = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{M}}(M) = C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{M}}(M) = C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{M}}(M) = C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{M}}(M).$$

Dowód. Ponieważ $F \subseteq \mathscr{F} \subseteq \mathscr{D}$ i $M \subseteq \mathscr{M} \subseteq \mathscr{D}$, to wobec równości (=) otrzymujemy

$$C_{\mathscr{D}\mathscr{E}\mathscr{P}}(F) = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(F) = C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}(F) = C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(F) = C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(F),$$

oraz

$$C_{\mathscr{D}\mathscr{E}\mathscr{P}}(M) = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(M) = C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}(M) = C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(M) = C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(M).$$

Zatem

$$C_{\mathscr{D}\mathscr{E}\mathscr{P}}(F) \cap \mathscr{F} = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} = C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} = C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F} = C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(F) \cap \mathscr{F},$$

oraz

$$C_{\mathscr{D}\mathscr{E}\mathscr{P}}(M) \cap \mathscr{M} = C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} = C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} = C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M} = C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(M) \cap \mathscr{M},$$

co wobec wniosków 6.31, 6.33, i 6.35 dowodzi tezy twierdzenia. $\square$

Wniosek 6.37. *W systemie $\mathscr{FD}$, aksjomaty zbioru f_1 są tautologiami, a reguły f_2 i f_3 są niezawodne w każdej z rodzin $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$.*

Dowód. Wynika uprost z twierdzenia 6.36 i lematu 1.18. □

Wniosek 6.38. *W systemie $\mathscr{FD}$, reguły f_2', f_4, f_5, f_5' i f_6, są niezawodne w każdej z rodzin $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$.*

Dowód. Wynika uprost z uniosków 6.37 i 1.20. □

Wniosek 6.39. *W systemie $\mathscr{MVD}$, aksjomaty zbioru m_1 są tautologiami, a reguły m_0, m_2 i m_3 są niezawodne w każdej z rodzin $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$.*

Dowód. Wynika uprost z twierdzenia 6.36 i lematu 1.18. □

Wniosek 6.40. *W systemie $\mathscr{MVD}$, reguły m_0', m_2', m_4, m_5, m_5', m_7 i m_8 są niezawodne w każdej z rodzin $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$.*

Dowód. Wynika uprost z uniosków 6.39 i 1.20. □

Rozdział 7

Przykłady zastosowań

7.1. Elementarne zastosowania uzyskanych rezultatów

Aby stwierdzić, czy zależność $\delta \in \mathscr{D}$ jest prawdziwa w dowolnej relacji $R \in \mathscr{R}$, w której prawdziwe są wszystkie zależności zbioru D możemy próbować ją wyprowadzić z zależności zbioru D. Jeśli jednak zależność δ nie daje się wyprowadzić, to wyznaczanie całego zbioru $C_{\mathscr{DEP}}(D)$ i sprawdzanie, że $\delta \notin C_{\mathscr{DEP}}(D)$ może być bardzo praco- i czaso- chłonne. Równie niepraktycznym podejściem jest sprawdzanie wszystkich relacji rodziny $\mathscr{R}$. W poprzednim rozdziale wykazaliśmy równoważność rodzin $\mathscr{R}$ i $\mathscr{R}_2$, możemy więc sprawdzać jedynie relacje z węższej rodziny $\mathscr{R}_2$. Zauważmy przy tym, że nie musimy nawet sprawdzać wszystkich relacji rodziny $\mathscr{R}_2$. Jeśli jakaś zależność jest prawdziwa w pewnej relacji $R = \{r, s\} \in \mathscr{R}_2$ dla której

$$r(u) = s(u) \iff u \in P,$$

to jest też prawdziwa w każdej innej relacji spełniającej analogiczny warunek. Innymi słowy, konkretne wartości krotek nie są istotne. A ponieważ $\#\mathcal{D}(u) \geqslant 2$ dla każdego atrybutu $u \in U$, to możemy używać hipotetycznych krotek r, s takich, że $r(u) = 0$ i $s(u) \in \{0, 1\}$ dla $u \in U$. Tak więc, jeśli $\#U = n$, to wystarczy sprawdzić 2^n relacji.

Przykład 7.1. Duże podobieństwo systemów $\mathscr{FD}$ i $\mathscr{MVD}$ nasuwa pytanie, czy w systemie $\mathscr{MVD}$ reguła w pełni analogiczna do f_3 jest wyprowadzalna. Podobne pytanie można zadać w przypadku reguł f_4 i f_6. Wykorzystamy uzyskane rezultaty do uzasadnienia, że reguły o schematach

$$m_3'' : \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y, \ \ Y \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Z},$$

$$m_4'' : \quad \frac{X \twoheadrightarrow Y}{X \twoheadrightarrow Y \setminus Z},$$

$$m_6'' : \quad \frac{X \cup Y \twoheadrightarrow Z, \ \ X \twoheadrightarrow Y}{X \twoheadrightarrow Z}$$

nie są wyprowadzalne.

Wobec pełności konsekwencji syntaktycznej $C_{\mathscr{MVD}}$ względem konsekwencji $C_{\mathscr{M}}^{\mathscr{R}}$ wystarczy, że wskażemy konkretne relacje w których prawdziwe są wszystkie zależności zbioru przesłanek i nie jest prawdziwa zależność-wniosek. Wobec równoważności rodzin $\mathscr{R}$ i $\mathscr{R}_2$ wiemy, że jeśli takie relacje istnieją, to istnieją też relacje dwukrotkowe o tej samej własności.

W relacji reprezentowanej tabelą

X	$Y \setminus Z$	$Y \cap Z$	$Z \setminus Y$
0	0	0	0
0	1	1	0

prawdziwe są zależności $X \twoheadrightarrow Y$ i $Y \twoheadrightarrow Z$, ale nie jest prawdziwa zależność $X \twoheadrightarrow Z$. (Bo w powyższej tabeli nie występuje wiersz z zamienionymi wpisami odpowiadającymi kolumnom $Y \cap Z$ i $Z \setminus Y$, tzn. zależność $X \twoheadrightarrow Z$ nie spełnia warunku (MVD).) Podobnie, we wskazanej relacji, prawdziwa jest zależność $X \twoheadrightarrow Y$ podczas, gdy zależność $X \twoheadrightarrow Y \setminus Z$ jest fałszywa, jak również prawdziwe są zależności $X \cup Y \twoheadrightarrow Z$ i $X \twoheadrightarrow Y$, a zależność $X \twoheadrightarrow Z$ nie jest prawdziwa.

Oznaczając przesłanki przez M, a wniosek przez μ mamy więc $\mu \notin C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{M}}(M)$, ale wobec twierdzenia 6.36 zachodzi równość $C^{\mathscr{R}_2}_{\mathscr{M}}(M) = C_{\mathscr{MVD}}(M)$, tzn. $\mu \notin C_{\mathscr{MVD}}(M)$, co zgodnie z definicją 1.19 oznacza, że reguły m_3'', m_4'' i m_6'' nie są wyprowadzalne.

Prześledzimy teraz na przykładzie, możliwości jakie daje rodzina $\mathscr{V}$.

Przykład 7.2. Niech $U = \{a, b, c, d\}$. Chcemy sprawdzić, czy zależność $\delta = \{a\} \longrightarrow \{b\}$ jest prawdziwa w dowolnej relacji $R \in \mathscr{R}$, w której prawdziwe są zależności zbioru

$$D = \Big\{\{a\} \twoheadrightarrow \{b\}, \{c\} \longrightarrow \{b\}\Big\},$$

tzn. pytamy, czy $\delta \in C^{\mathscr{R}}_{\mathscr{D}}(D)$. Wobec równoważności rodzin $\mathscr{R}$ i $\mathscr{V}$ możemy sprawdzić, czy $\delta \in C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D)$.

Załóżmy, że $\delta \notin C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D)$. Wtedy istnieje takie wartościowanie v, że

$$D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) \quad \wedge \quad \delta \notin \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v), \tag{$*$}$$

tzn.

$$v\Big(\{a\} \twoheadrightarrow \{b\}\Big) = v\Big(\{c\} \longrightarrow \{b\}\Big) = 1 \quad \wedge \quad v\Big(\{a\} \longrightarrow \{b\}\Big) = 0.$$

Zatem

$$v(a) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Big(v(b) = 1 \quad \vee \quad v\Big(\{a, c, d\}\Big) = 1\Big), \tag{$**$}$$

$$v(c) = 1 \quad \Longrightarrow \quad v(b) = 1 \tag{$\substack{**\\*}$}$$

oraz

$$v(a) = 1 \quad \wedge \quad v(b) = 0$$

Wobec $(**)$ oznacza to, że $v(\{a, c, d\}) = 1$, tzn.

$$v(a) = v(c) = v(d) = 1.$$

Na mocy $(\substack{**\\*})$ otrzymujemy więc $v(b) = 1$, podczas gdy $v(b) = 0$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje waluacja spełniająca warunek $(*)$, tzn. dla każdej waluacji $v \in \mathscr{V}$ zachodzi

$$D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v) \quad \Longrightarrow \quad \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(v),$$

co oznacza, że $\delta \in C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D)$. (Gdybyśmy nie doszli do sprzeczności, to wskazalibyśmy tym samym waluację, dla której zachodzi warunek $(*)$, a więc udowodnilibyśmy, że $\delta \notin C^{\mathscr{V}}_{\mathscr{D}}(D)$.)

Nie ulega wątpliwości, że proces przedstawiony w przykładzie 7.2 można łatwo zautomatyzować — chociażby przez „brutalne” sprawdzenie wszystkich możliwych wartościowań. (Jeśli $\#U = n$, to wszystkich możliwych wartościowań jest 2^n.) W kolejnym paragrafie przedstawiamy algorytm testujący wynikanie logiczne wskazanej formuły $\delta \in \mathscr{D}$ z zadanego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$.

7.2. Proover dla systemu $\mathscr{DEP}$

Pojęcie domknięcia zbioru $X \subseteq U$ względem zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$ oraz pojęcie bazy zależności zbioru $X \subseteq U$ względem zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$, miały duże znaczenie w dowodzie pełności systemu $\mathscr{DEP}$ względem rodzin $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{V}$ i $\mathscr{P}$. Okazuje się jednak, że domknięcie ma również spore znaczenie praktyczne. W przypadku, gdy $D = F \subseteq \mathscr{F}$, domknięcie zbioru $X \subseteq U$ można wyznaczyć bardzo łatwo i co najważniejsze bardzo szybko.

Definicja 7.3. *Quasi-domknięciem* zbioru $X \subseteq U$ względem zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ nazywamy zbiór

$$\widehat{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widehat{X}_n,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \widehat{X}_0 &= X, \\ \widehat{X}_{n+1} &= \widehat{X}_n \cup \bigcup_{\substack{A \longrightarrow B \in F \\ A \subseteq \widehat{X}_n}} B \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ponieważ zbiór $\mathscr{F}$ jest skończony, to również zbiór $F \subseteq \mathscr{F}$ jest skończony. Wobec tego ciąg $\left(\widehat{X}_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ stabilizuje się, tzn. istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $\widehat{X}_n = \widehat{X}_k$ dla wszystkich $n \geqslant k$. W najgorszym przypadku $k = \#F$, gdyż po wysumowaniu wszystkich zbiorów B dla których $A \longrightarrow B \in F$ nie można już istotnie zwiększyć zbioru $\widehat{X}_{n+1}$.

Pokażemy, że $\widehat{X} = \overline{X}$.

Stwierdzenie 7.4. *Operator* $\widehat{\cdot}$ *ma własności konsekwencji, tzn. dla dowolnych* $X, Y \subseteq U$ *zachodzą następujące warunki*:

(a) $X \subseteq \widehat{X}$,

(b) $X \subseteq Y \implies \widehat{X} \subseteq \widehat{Y}$,

(c) $\widehat{\widehat{X}} \subseteq \widehat{X}$.

Dowód. (a) Wynika wprost z określenia quasi-domknięcia. ($X = \widehat{X}_0 \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \widehat{X}_n = \widehat{X}$.)

(b) Wykażemy najpierw indukcyjnie względem n, że $\widehat{X}_n \subseteq \widehat{Y}_n$ dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 0$ mamy

$$\widehat{X}_0 = X \subseteq Y = \widehat{Y}_0.$$

Załóżmy więc, że $\widehat{X}_n \subseteq \widehat{Y}_n$ dla pewnego $n \geqslant 0$ i rozważmy zbiory $\widehat{X}_{n+1}$ i $\widehat{Y}_{n+1}$. Jeśli $A \longrightarrow B \in F$ i $A \subseteq \widehat{X}_n$, to wobec założenia indukcyjnego $A \longrightarrow B \in F$ i $A \subseteq \widehat{Y}_n$, a więc

$$\bigcup_{\substack{A \longrightarrow B \in F \\ A \subseteq \widehat{X}_n}} B \subseteq \bigcup_{\substack{A \longrightarrow B \in F \\ A \subseteq \widehat{X}_{n+1}}} B.$$

Ponadto $\widehat{X}_n \subseteq \widehat{Y}_n$, skąd otrzymujemy inkluzję $\widehat{X}_{n+1} \subseteq \widehat{Y}_{n+1}$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej wnosimy więc, że $\widehat{X}_n \subseteq \widehat{Y}_n$ dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$. A wobec tego

$$\widehat{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widehat{X}_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \widehat{Y}_n = \widehat{Y}.$$

(c) Jak zauważyliśmy ciąg $\left(\widehat{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ stabilizuje się, tzn. istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $\widehat{X}_n = \widehat{X}_k$ dla każdego $n \geqslant k$. Zgodnie z definicją quasi-domknięcia mamy więc

$$\widehat{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widehat{X}_n = \bigcup_{n=0}^{k} \widehat{X}_n \cup \widehat{X}_k \cup \widehat{X}_k \cup \cdots = \widehat{X}_k.$$

Wykażemy indukcyjnie względem n, że $\widehat{\widehat{X}}_n \subseteq \widehat{X}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $n = 0$, to wprost z definicji quasi-domknięcia mamy $\widehat{\widehat{X}}_0 = \widehat{X} \subseteq \widehat{X}$. Załóżmy więc, że $\widehat{\widehat{X}}_n \subseteq \widehat{X}$ dla pewnego $n \geqslant 0$. Wtedy

$$\widehat{\widehat{X}}_{n+1} = \widehat{\widehat{X}}_n \cup \bigcup_{\substack{A \longrightarrow B \in F \\ A \subseteq \widehat{\widehat{X}}_n}} B \subseteq \widehat{X} \cup \bigcup_{\substack{A \longrightarrow B \in F \\ A \subseteq \widehat{X}}} B = \widehat{X}_k \cup \bigcup_{\substack{A \longrightarrow B \in F \\ A \subseteq \widehat{X}_k}} B = \widehat{X}_{k+1} = \widehat{X}_k = \widehat{X}.$$

Wobec zasady indukcji matematycznej wnosimy więc, że $\widehat{\widehat{X}}_n \subseteq \widehat{X}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. A zatem

$$\widehat{\widehat{X}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widehat{\widehat{X}}_n \subseteq \widehat{X}.$$ □

Lemat 7.5. *Dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ i dowolnego $X \subseteq U$ zachodzi inkluzja*

$$\widehat{X} \subseteq \overline{X}.$$

Dowód. Pokażemy indukcyjnie względem n, że $\widehat{X}_n \subseteq \overline{X}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $n = 0$, to wobec punktu (a) stwierdzenia 5.11 i definicji quasi-domknięcia otrzymujemy $\widehat{X}_0 = X \subseteq \overline{X}$. Załóżmy więc, że $\widehat{X}_n \subseteq \overline{X}$ dla pewnego $n \geqslant 0$. Wtedy wobec lematu 5.10 otrzymujemy

$$X \longrightarrow \widehat{X}_n \in C_{\mathscr{DEP}}(F). \tag{$*$}$$

Ponadto, jeśli $A \longrightarrow B \in F \subseteq C_{\mathscr{DEP}}(F)$ i $A \subseteq \widehat{X}_n$, to wobec reguły f_2' dostajemy

$$\widehat{X}_n \longrightarrow B \in C_{\mathscr{DEP}}(F). \tag{$**$}$$

Zatem wobec reguły f_3 z $(*)$ i $(**)$ otrzymujemy $X \longrightarrow B \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$. Stosując wielokrotnie regułę f_5 do wszystkich zależności $X \longrightarrow B \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$ uzyskanych z tych zależności $A \longrightarrow B \in F$ dla których $A \subseteq \widehat{X}_n$ dostajemy

$$X \longrightarrow \bigcup_{\substack{A \longrightarrow B \in F \\ A \subseteq \widehat{X}_n}} B \in C_{\mathscr{DEP}}(F). \tag{$\overset{**}{*}$}$$

Ponownie, przy pomocy reguły f_5 z $(*)$ i $(\overset{**}{*})$ otrzymujemy

$$X \longrightarrow \widehat{X}_n \cup \bigcup_{\substack{A \longrightarrow B \in F \\ A \subseteq \widehat{X}_n}} B \in C_{\mathscr{DEP}}(F),$$

tzn. $X \longrightarrow \widehat{X}_{n+1} \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$, co wobec lematu 5.10 oznacza, że $\widehat{X}_{n+1} \subseteq \overline{X}$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej wnosimy więc, że $\widehat{X}_n \subseteq \overline{X}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wobec tego również

$$\widehat{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widehat{X}_n \subseteq \overline{X}.$$ □

Lemat 7.6. *Dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ i dowolnych $X, Y \subseteq U$, jeśli $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$, to $Y \subseteq \widehat{X}$.*

Dowód. Wykażemy najpierw indukcyjnie względem stopnia konsekwencji, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, jeśli $X \longrightarrow Y \in C^n_{\mathscr{FD}}(F)$, to $Y \subseteq \widehat{X}$. Dla $n = 0$ jest $C^0_{\mathscr{FD}}(F) = f_1 \cup F$. Jeżeli $X \longrightarrow Y \in f_1$, to $Y \subseteq X$. Ale wobec punktu (a) stwierdzenia 7.4 zachodzi inkluzja $X \subseteq \widehat{X}$, więc $Y \subseteq \widehat{X}$. Jeśli zaś $X \longrightarrow Y \in F$, to $Y \subseteq \widehat{X}_1$, bo $X \subseteq \widehat{X}_0 = X$. Ale $\widehat{X}_1 \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{X}_n = \widehat{X}$, więc również $Y \subseteq \widehat{X}$.

Załóżmy więc, że dla pewnego $n \geqslant 0$ i dowolnych $A, B \subseteq U$, jeśli $A \longrightarrow B \in C^n_{\mathscr{FD}}(F)$, to $B \subseteq \widehat{A}$. Przypuśćmy, że $X \longrightarrow Y \in C^{n+1}_{\mathscr{FD}}(F)$. Gdyby $X \longrightarrow Y \in C^n_{\mathscr{FD}}(F)$, to wprost z założenia indukcyjnego otrzymalibyśmy inkluzję $Y \subseteq \widehat{X}$. Niech więc $X \longrightarrow Y \in C^{n+1}_{\mathscr{FD}}(F) \setminus C^n_{\mathscr{FD}}(F)$. Wtedy, zgodnie z definicją 3.9

$$\bigvee_{H \subseteq C^n_{\mathscr{FD}}(F)} \langle H, X \longrightarrow Y \rangle \in f_2 \quad \vee \quad \bigvee_{H \subseteq C^n_{\mathscr{FD}}(F)} \langle H, X \longrightarrow Y \rangle \in f_3.$$

Możliwe są więc dwa przypadki.

W przypadku pierwszym, $H = \{A \longrightarrow B\}$ i $X = A \cup C$, $Y = B \cup C$ dla pewnych $A, B, C \subseteq U$. Ponieważ $A \longrightarrow B \in H \subseteq C^n_{\mathscr{FD}}(F)$, to wobec założenia indukcyjnego $B \subseteq \widehat{A}$. Ponadto, wobec punktu (b) stwierdzenia 7.4 zachodzi inkluzja $C \subseteq \widehat{C}$, a więc $B \cup C \subseteq \widehat{A} \cup \widehat{C}$. Poza tym $A \subseteq A \cup C$ i $C \subseteq A \cup C$, skąd wobec punktu (b) stwierdzenia 7.4 otrzymujemy inkluzje $\widehat{A} \subseteq \widehat{A \cup C}$ i $\widehat{C} \subseteq \widehat{A \cup C}$, z których dostajemy $\widehat{A} \cup \widehat{C} \subseteq \widehat{A \cup C}$. Mamy więc

$$Y = B \cup C \subseteq \widehat{A} \cup \widehat{C} \subseteq \widehat{A \cup C} = \widehat{X}.$$

W przypadku drugim, $H = \{X \longrightarrow Z, Z \longrightarrow Y\}$ dla pewnego $Z \subseteq U$. Jako, że $X \longrightarrow Z, Z \longrightarrow Y \in H \subseteq C^n_{\mathscr{FD}}(F)$, to z założenia indukcyjnego otrzymujemy inkluzję $Z \subseteq \widehat{X}$ i $Y \subseteq \widehat{Z}$. Wobec punktów (b) i (c) stwierdzenia 7.4 z inkluzji $Z \subseteq \widehat{X}$ otrzymujemy $\widehat{Z} \subseteq \widehat{X}$, a zatem $Y \subseteq \widehat{Z} \subseteq \widehat{X}$.

Wobec zasady indukcji matematycznej wnosimy więc, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, jeśli $X \longrightarrow Y \in C^n_{\mathscr{FD}}(F)$, to $Y \subseteq \widehat{X}$. Przypuśćmy teraz, że $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Ponieważ $C_{\mathscr{FD}}(F) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathscr{FD}}(F)$, to $X \longrightarrow Y \in C^n_{\mathscr{FD}}(F)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, co jak wykazaliśmy, oznacza że $Y \subseteq \widehat{X}$. □

Twierdzenie 7.7. *Dla dowolnego zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ i dowolnego $X \subseteq U$ zachodzi równość*

$$\widehat{X} = \overline{X}.$$

Dowód. Inkluzję $\widehat{X} \subseteq \overline{X}$ udowodniliśmy w lemacie 7.5. Pozostaje więc wykazać, że $\overline{X} \subseteq \widehat{X}$. Ponieważ $\overline{X} \subseteq \overline{X}$, to przy pomocy lematu 5.10 otrzymujemy $X \longrightarrow \overline{X} \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$. Ale wobec lematu 6.30 zachodzi równość

$$C_{\mathscr{DEP}}(F) = C_{\mathscr{FD}}(F) \cup M,$$

dla pewnego $M \in \mathscr{M}$, więc $X \longrightarrow \overline{X} \in C_{\mathscr{FD}}(F)$. Na mocy lematu 7.6 oznacza to, że $\overline{X} \subseteq \widehat{X}$. □

Jak zauważyliśmy na wstępie, quasi-domknięcie $\widehat{X}$ zbioru $X \subseteq U$ względem zbioru $F \subseteq \mathscr{F}$ można wyznaczyć bardzo szybko. Poza tym, jeśli $D = F \subseteq \mathscr{F}$, to $\widehat{X} = \overline{X}$, co wobec lematu 5.10 daje szybką metodę weryfikacji, czy $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$. Jednakże w praktyce zachodzi konieczność sprawdzenia, czy $\delta \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$, nie tylko dla $\delta \in \mathscr{F}$ i $D \subseteq \mathscr{F}$, lecz dla dowolnych $\delta \in \mathscr{D}$ i $D \subseteq \mathscr{D}$. Pokażemy, że warunek $\delta \in C_{\mathscr{DEP}}(D)$ dla $\delta \in \mathscr{D}$ i $D \subseteq \mathscr{D}$ można sprowadzić do serii warunków $\varphi \in C_{\mathscr{DEP}}(F)$ dla $\varphi \in \mathscr{F}$ i $F \subseteq \mathscr{F}$.

Lemat 7.8. *Dla dowolnego zbioru $P \in \mathscr{P}$ oraz dowolnych $X, Y \subseteq U$ zachodzi*

$$X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \iff \big(X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \ \vee\ X \longrightarrow Y' \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\big).$$

Dowód. Zgodnie z definicją 6.15 mamy

$$\begin{aligned} X \twoheadrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) &\iff \Big[\ X \subseteq P \implies \big(Y \subseteq P \quad \vee \quad Y' \subseteq P\big)\Big] \iff \\ &\iff \Big[\big(X \subseteq P \implies Y \subseteq P\big) \ \vee\ \big(X \subseteq P \implies Y' \subseteq P\big)\Big] \iff \\ &\iff \big(X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \ \vee\ X \longrightarrow Y' \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\big). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 7.9. *Dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathscr{D}$ oraz dowolnych $X, Y \subseteq U$ zachodzi równość*

$$C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \twoheadrightarrow Y\}\big) = C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y\}\big) \cap C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y'\}\big).$$

Dowód. ($\subseteq$) Oczywiście $X \longrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D \cup \{X \longrightarrow Y\})$ i $X \longrightarrow Y' \in C_{\mathscr{DEP}}(D \cup \{X \longrightarrow Y'\})$, skąd wobec reguły d_1 otrzymujemy $X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D \cup \{X \longrightarrow Y\})$ i $X \twoheadrightarrow Y' \in C_{\mathscr{DEP}}(D \cup \{X \longrightarrow Y'\})$. Stąd zaś, wobec reguły m_0, dostajemy $X \twoheadrightarrow Y \in C_{\mathscr{DEP}}(D \cup \{X \longrightarrow Y'\})$. Zatem

$$D \cup \{X \twoheadrightarrow Y\} \subseteq C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y\}\big) \quad \text{i} \quad D \cup \{X \twoheadrightarrow Y\} \subseteq C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y'\}\big),$$

skąd wobec wniosku 5.5 otrzymujemy

$$C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \twoheadrightarrow Y\}\big) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}\Big(C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y\}\big)\Big) = C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y\}\big)$$

oraz

$$C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \twoheadrightarrow Y\}\big) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}\Big(C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y'\}\big)\Big) = C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y'\}\big),$$

a więc także

$$C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \twoheadrightarrow Y\}\big) \subseteq C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y\}\big) \cap C_{\mathscr{DEP}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y'\}\big).$$

($\supseteq$) Wobec równości (=) możemy wykazać inkluzję równoważną

$$C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{P}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y\}\big) \cap C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{P}}\big(D \cup \{X \longrightarrow Y'\}\big) \subseteq C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{P}}\big(D \cup \{X \twoheadrightarrow Y\}\big).$$

Weźmy więc dowolną zależność $\delta \in C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{P}}(D \cup \{X \longrightarrow Y\}) \cap C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{P}}(D \cup \{X \longrightarrow Y'\})$. Wtedy, zgodnie z definicją 6.16 mamy

$$\bigwedge_{P \in \mathscr{P}} \Big[\big(D \subseteq \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P) \ \wedge\ X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\big) \implies \delta \in \mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\Big] \tag{$*$}$$

oraz

$$\bigwedge_{P\in\mathscr{P}}\Big[\Big(D\subseteq\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\ \ \wedge\ \ X\longrightarrow Y'\in\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\Big)\ \Longrightarrow\ \delta\in\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\Big]. \tag{$**$}$$

Mamy pokazać, że $\delta\in C^{\mathscr{P}}_{\mathscr{D}}(D\cup\{X\twoheadrightarrow Y\})$, a więc zgodnie z definicją 6.16 musimy sprawdzić, że

$$\bigwedge_{P\in\mathscr{P}}\Big[\Big(D\subseteq\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\ \ \wedge\ \ X\twoheadrightarrow Y\ \in\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\Big)\ \Longrightarrow\ \delta\in\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)\Big].$$

Ustalmy więc dowolny zbiór $P\in\mathscr{P}$ i załóżmy, że $D\subseteq\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)$ oraz $X\twoheadrightarrow Y\in\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)$. Wobec lematu 7.8 wynika stąd, że $X\longrightarrow Y\in\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)$ lub $X\longrightarrow Y'\in\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)$. W każdym z tych przypadków, wobec $(*)$ i $(**)$ otrzymujemy $\delta\in\mathcal{E}_{\mathscr{D}}(P)$. □

Twierdzenie 7.9 pozwala skonstruować algorytm testujący czy dana zależność funkcyjna lub wielowartościowa daje się wyprowadzić z zadanego zbioru zależności. Łatwo widać że, warunek $\delta\in C_{\mathscr{DEP}}(D)$ dla $\delta\in\mathscr{D}$ i $D=F\cup M$, gdzie $F\subseteq\mathscr{F}$ i $M\subseteq\mathscr{M}$ można zastąpić równoważnie warunkiem

$$\delta\in\bigcap_{i=1}^{2^m}C_{\mathscr{DEP}}(F\cup F_i), \tag{$*$}$$

gdzie $m=\#M$, zaś $F_i\in\mathscr{F}$ są wszystkimi zbiorami, dla których $X\longrightarrow Y\in F_i$, gdy $X\twoheadrightarrow Y\in M$, albo $X\twoheadrightarrow Y'\in M$. Istotnie, jeśli $M=\{X_1\twoheadrightarrow Y_1,\dots,X_m\twoheadrightarrow Y_m\}$ oraz $M_i=\{X_i\twoheadrightarrow Y_i,\dots,X_m\twoheadrightarrow Y_m\}$ dla $i=1,\dots,m$, to wobec twierdzenia 7.9 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
C_{\mathscr{DEP}}(D) &= C_{\mathscr{DEP}}(F\cup M)=C_{\mathscr{DEP}}(F\cup M_1)=\\
&= C_{\mathscr{DEP}}\Big(F\cup\{X_1\longrightarrow Y_1\}\cup M_2\Big)\cap C_{\mathscr{DEP}}\Big(F\cup\{X_1\longrightarrow Y_1'\}\cup M_2\Big)=\\
&= C_{\mathscr{DEP}}\Big(F\cup\{X_1\longrightarrow Y_1,X_2\longrightarrow Y_2\}\cup M_3\Big)\cap C_{\mathscr{DEP}}\Big(F\cup\{X_1\longrightarrow Y_1,X_2\longrightarrow Y_2'\}\cup M_3\Big)\cap\\
&\cap C_{\mathscr{DEP}}\Big(F\cup\{X_1\longrightarrow Y_1',X_2\longrightarrow Y_2\}\cup M_3\Big)\cap C_{\mathscr{DEP}}\Big(F\cup\{X_1\longrightarrow Y_1',X_2\longrightarrow Y_2'\}\cup M_3\Big)=\\
&=\cdots=\bigcap_{i=1}^{2^m}C_{\mathscr{DEP}}(F\cup F_i).
\end{aligned}$$

(Jeżeli $\#M=0$, to $F_1=\emptyset$ i warunek $(*)$ trywializuje się.)

Ponadto, wobec lematu 6.30 dla dowolnego $i=1,\dots,2^m$ zachodzi równość

$$C_{\mathscr{DEP}}(F\cup F_i)=C_{\mathscr{FD}}(F\cup F_i)\cup\Big\{A\twoheadrightarrow B\in\mathscr{M}:A\longrightarrow B\in C_{\mathscr{FD}}(F\cup F_i)\vee A\longrightarrow B'\in C_{\mathscr{FD}}(F\cup F_i)\Big\}.$$

Tak więc jeśli $\delta=X\longrightarrow Y\in\mathscr{F}$, to warunek $(*)$ jest równoważny warunkowi

$$\bigwedge_{i=1,\dots,2^m}X\longrightarrow Y\in C_{\mathscr{FD}}(F\cup F_i),$$

zaś dla $\delta=X\twoheadrightarrow Y\in\mathscr{M}$ warunek $(*)$ jest równoważny warunkowi

$$\bigwedge_{i=1,\dots,2^m}\Big(X\longrightarrow Y\in C_{\mathscr{FD}}(F\cup F_i)\ \ \vee\ \ X\longrightarrow Y'\in C_{\mathscr{FD}}(F\cup F_i)\Big).$$

Wreszcie, wobec lematu 5.10 oraz twierdzenia 7.7, warunek $X\longrightarrow Y\in C_{\mathscr{FD}}(F\cup F_i)$ jest równoważny warunkowi $Y\subseteq\widehat{X}$. (Dla każdego $i=1,\dots,2^m$, quasi-domknięcie $\widehat{X}$ zbioru X, wyznaczane jest względem zbioru $F\cup F_i$.)

Załącznikiem do niniejszej pracy jest proover dla systemu $\mathscr{DEP}$, działający w oparciu o rezultaty zebrane w tym paragrafie. (Wobec lematów 6.30 i 6.32, proover ten może być wykorzystany również w systemach $\mathscr{FD}$ i $\mathscr{MVD}$.)

Nota bibliograficzna

Fakty przedstawione w rozdziale pierwszym, znane są dobrze z kursowego wykładu z logiki matematycznej (zob. też [AB95]).

Pojęcia zaprezentowane w rozdziale drugim, również dobrze znane z kursowego wykładu ze wstępu do baz danych, w zbliżonej formie prezentowane są w pracy [FV86], z której zaczerpnięte zostały relacje z przykładów 2.6 i 2.9.

Układ aksjomatów oraz reguł wnioskowania dla zależności funkcyjnych, przyjęty w rozdziale trzecim, jest niemal identyczny z układem prezentowanym w pracach [BFH77] i [SDPF81], w których zamiast reguły f_2 występuje mocniejsza reguła f_2'. (Mocniejsza w tym sensie, że jeśli $\langle F, \varphi \rangle \in f_2$ to również $\langle F, \varphi \rangle \in f_2'$, tzn. $f_2 \subseteq f_2'$.) Definicję prawdziwości w relacji $R \in \mathscr{R}$ zależności funkcyjnej, znaną z kursowego wykładu ze wstępu do baz danych, można odnaleźć w [FV86], [HF86], [SDPF81], [BFH77] oraz [RF77]. Praca [FV86] zawiera wzmiankę o jednym z pierwszych twierdzeń teorii relacyjnych baz danych, tzn. twierdzeniu Heath (tw. 3.6), znanym również z kursowego wykładu ze wstępu do baz danych. Relacja z przykładu 3.7 zaczerpnięta została z pracy [FV86].

Układ aksjomatów i reguł wnioskowania dla zależności wielowartościowych, przyjęty w rozdziale czwartym przypomina układ prezentowany w publikacjach [BFH77] i [SDPF81], w których zamiast słabszych reguł m_0 i m_2 występują reguły m_0' i m_2'. W publikacjach tych wspomina się także o wyprowadzalności reguł m_7 i m_8 oraz o wyprowadzalności reguły będącej szczególnym przypadkiem reguły m_5. Określenie prawdziwości w relacji $R \in \mathscr{R}$ zależności wielowartościowej jest uproszczeniem definicji równoważnej, znanej z kursowego wykładu ze wstępu do baz danych. Tradycyjne określenie prawdziwości zależności wielowartościowej można odnaleźć w [FV86], [HF86], [SDPF81], [BFH77] oraz [RF77]. Wzmiankę o twierdzeniu Fagina (tw. 4.6), znanym dobrze z kursowego wykładu ze wstępu do baz danych, można odnaleźć w pracy [BFH77].

Reguły wnioskowania dla zależności funkcyjnych i wielowartościowych, przyjęte w rozdziale piątym różnią się od reguł przyjętych w pracach [BFH77] i [SDPF81], gdzie zamiast reguły d_2 występuje reguła mocniejsza od reguły d_3. Pojęcia domknięcia zbioru atrybutów oraz bazy zależności zaczerpnięte zostały z prac [BFH77], [SDPF81] i [FV86].

Rodziny $\mathscr{R}_2$ i $\mathscr{V}$, przedstawione w rozdziale szóstym, pochodzą z pracy [SDPF81] uogólniającej rezultaty przedstawione w [RF77], natomiast rodzina $\mathscr{P}$ pochodzi z pracy [HF86]. Idea dowodu lematów 6.22 i 6.24 została zaczerpnięta z [HF86, Lemma 3.3]. Podobnie, idea dowodów twierdzeń 6.23 i 6.25 została zaczerpnięta z [HF86, Theorem 3.1]. Dowód lematu 6.26 wzorowany jest na dowodzie z [SDPF81, Lemma 6], zaś idea dowodu twierdzenia 6.27 pochodzi z [SDPF81, Theorem 7].

Zależności z przykładu 7.2, przedstawionego w ostatnim rozdziale, pochodzą z pracy [SDPF81], w której posłużyły do zilustrowania równości $C_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}}(D) = C_{\mathscr{DEP}}(D)$. Idea pseudo-domknięcia zapożyczona została z algorytmu prezentowanego na kursowym wykładzie ze wstępu do baz danych.

Bibliografia

[AB95] Andrzej Biela, *Wstęp do logiki algorytmicznej*, wydanie II (skrypt Uniwersytetu Śląskiego), Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 1995.

[BFH77] Catriel Beeri, Ronald Fagin, John H. Howard, Jr., *A complete axiomatization for functional and multivalued dependencies in database relations*, Proc. 1977 ACM SIGMOD Symposium, ed. D. C. P. Smith, Toronto, pp. 47 – 61.

[DEK86] Donald Ervin Knuth, *The TEXbook*, volume A of *Computers & Typesetting*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1986.

[FV86] Ronald Fagin, Moshe Y. Vardi, *The theory of data dependencies: a survey*, Mathematics of Information Processing, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society, 1986, vol. 34, pp. 19 – 72.

[HF86] Yoshito Hanatani, Ronald Fagin, *A simple characterization of database dependency implication*, Information Processing Letters 22, 6, May 1986, 281 – 283.

[RF77] Ronald Fagin, *Functional dependencies in a relational database and propositional logic*, IBM J. Research and Development 21, 6, Nov. 1977, pp. 534 – 544.

[SDPF81] Yehoshua Sagiv, Claude Delobel, Douglas Stott Parker Jr., Ronald Fagin, *An equivalence between relational database dependencies and a fragment of propositional logic*, J. ACM 28, 3, July 1981, pp. 435 – 453.

Skorowidz symboli