Matemática Discreta para Cursos de Computação

Jackson Gomes \ jgomes@ceulp.edu.br

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Lista de Códigos-fontes

Prefácio

Este é um texto de apoio à disciplina Matemática Discreta para os cursos de computação do Centro Universitário Luterano de Palmas. Sempre que possível serão apresentadas referências a conceitos da computação e como eles se relacionam com os conceitos matemáticos apresentados. A principal referência do conteúdo utilizado aqui é (MENEZES, 2010).

Convenções

Os trechos de código apresentados no livro seguem o seguinte padrão:

- **comandos**: devem ser executados no prompt; começam com o símbolo `$`
- **códigos-fontes**: trechos de códigos-fontes de arquivos

A seguir, um exemplo de comando:

```
$ mkdir hello-world
```

O exemplo indica que o comando `mkdir`, com a opção `hello-world`, deve ser executado no prompt para criar uma pasta com o nome `hello-world`.

A seguir, um exemplo de código-fonte:

```
class Pessoa:
    pass
```

O exemplo apresenta o código-fonte da classe `Pessoa`. Em algumas situações, trechos de código podem ser omitidos ou serem apresentados de forma incompleta, usando os símbolos ... e `#`, como no exemplo a seguir:

```
class Pessoa:
    def __init__(self, nome):
        self.nome = nome

    def salvar(self):
        # executa validação dos dados
```

```
        ...
        # salva
        return ModelManager.save(self)
```

Conhecimentos necessários e desejáveis

Este texto aborda conceitos matemáticos com aplicações em computação. Portanto, conhecimentos básicos dos cursos de computação são necessários, como noções de lógica, algoritmos e programação e estruturas de dados. Além disso, são desejáveis conhecimentos de bancos de dados e orientação a objetos e também podem ser recursos úteis:

- Git (GIT COMMUNITY, [s.d.])
- Visual Studio Code (MICROSOFT, [s.d.])
- TypeScript (MICROSOFT, [s.d.])
- Node.js (NODE.JS FOUNDATION, [s.d.])
- npm (NPM, INC., [s.d.])

Capítulo 1

Introdução

1.1 Matemática Discreta

Conforme (MENEZES, 2010) as Diretrizes Curriculares do MEC para os cursos de computação e informática definem que:

> A matemática, para a área de computação, deve ser vista como uma ferramenta a ser usada na definição formal de conceitos computacionais (linguagens, autômatos, métodos etc.). Os modelos formais permitem definir suas propriedades e dimensionar suas instâncias, dadas suas condições de contorno.

Além disso, afirmam:

> Considerando que a maioria dos conceitos computacionais pertencem ao domínio discreto, a **matemática discreta** (ou também chamada álgebra abstrata) é fortemente empregada.

Desta forma, a **Matemática Discreta** preocupa-se com o emprego de técnicas e abordagens da matemática para o entendimento de problemas a serem resolvidos com computação. Mas o que significa ser **discreto**? A matemática, por si, trata também do domínio **contínuo**. Assim, estes domínios são opostos: contínuo e discreto. Para entender isso melhor, observe a Figura 1.1:

Figura 1.1 representa a função $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 5$ em dois gráficos, sendo que o da direita destaca pontos selecionados, que representam 6 amostras (0, 1, 2, 3, 4 e 5).

Aumentando-se o número de amostras em dois instantes, para 10, 100 e 1000 teríamos, como mostra a Figura 1.2:

O que se pode perceber pela Figura 1.2 é que quanto mais se aumenta o número de amostras, mais se aproxima de uma curva perfeita. Entretanto, há um certo limite de percepção da perfeição dessa curva, por assim dizer. Por exemplo, embora a quantidade de amostras do gráfico da esquerda seja menor, a diferença para o gráfico da direita, visualmente falando, é pouco perceptível.

Considere outro exemplo: um computador possui uma capacidade de armazenamento virtualmente infinita. “Virtualmente” porque embora se aceite um limite, ele não é conhecido, já que a quan-

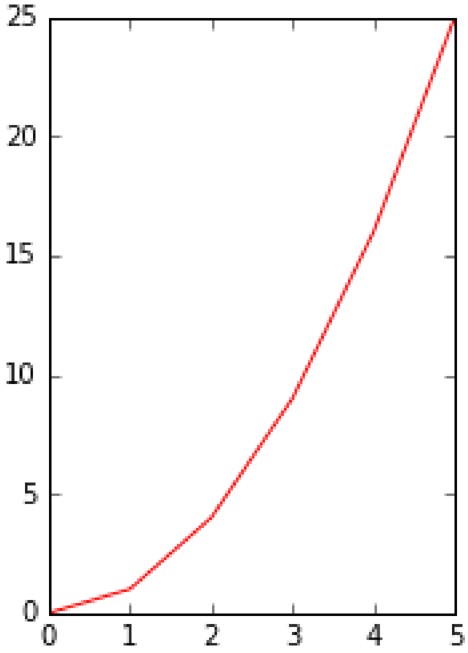

Figura 1.1: Gráfico da $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 5$

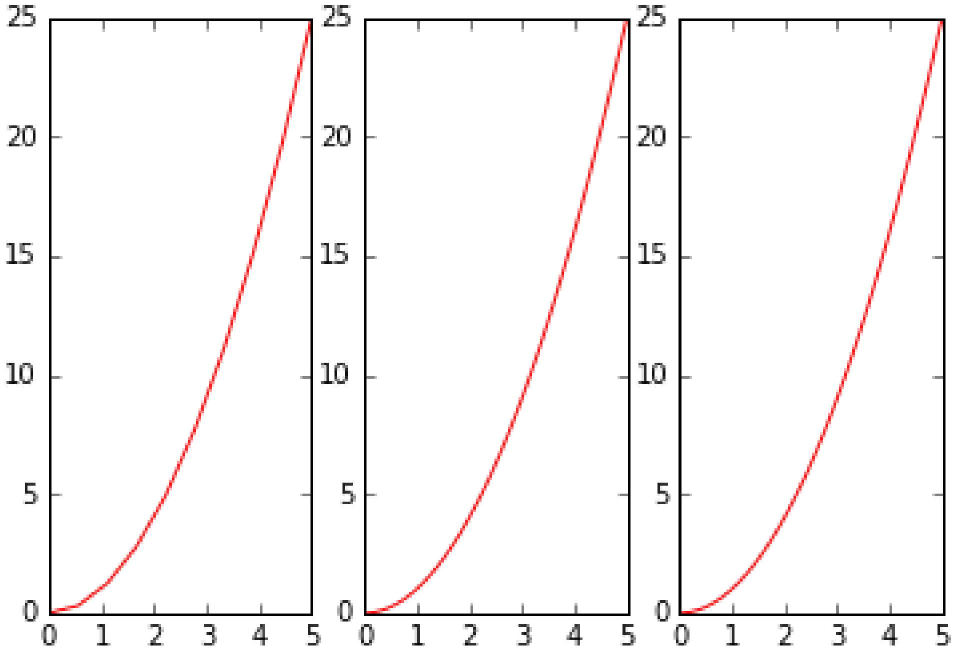

Figura 1.2: Gráfico da $y = x^2$ com mais amostras

tidade de unidades de armazemamento pode ser bastante grande, mas é **contável**. Assim, no contexto da computação, embora algo possa ser considerado finito ou infinito, ele é *contável* ou *discreto* no sentido de que pode ser enumerado ou sequenciado, de forma que não existe um elemento entre quaisquer dois elementos consecutivos da enumeração.

No exemplo do computador, embora a quantidade de unidades de armazenamento não seja conhecida, ela é contável e enumerável e não se pode afirmar que exista, por um exemplo, um disco rídigo desconhecido entre os array de discos composto por D1 e D2. Outro exemplo: na matemática, o conjunto dos números naturais é contável (ou enumerável), equanto o conjunto dos números reais não é contável.

Assim, a matemática discreta possui como ênfase os estudos matemáticos baseados em conjuntos contáveis, sejam eles finitos ou infinitos. De forma oposta, a *matemática do continuum* possui ênfase nos conjuntos não contáveis. Um exemplo disso são o cálculo diferencial e integral.

1.2 Teoria dos Conjuntos

Os **conjuntos** são a base da forma de representação de enumerações de elementos em matemática discreta. Por definição um conjunto é:

> uma estrutura que agrupa objetos e constitui uma base para construir estruturas mais complexas.

Segue uma definição mais formal:

> Um *conjunto* é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados *elementos* do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada.

O fato de não haver uma *ordem associada* não significa que os elementos não possam estar ordenados, num dado contexto, conforme algum critério. Apenas indica que, no geral, isso não é obrigatório.

Há duas formas (notações) de representar conjuntos: notação por extensão e notação por compreensão.

Notação por extensão é quando todos os elementos do conjunto estão enumerados, representados entre chaves e separados por vírgula. Exemplo:

Vogais $= \{a, e, i, o, u\}$.

Entende-se que se um conjunto pode ser representado por extensão, então ele é *finito*. Caso contrário, é *infinito*.

Notação por compreensão representa conjuntos usando propriedades. Os exemplos a seguir usam uma pequena diferença de notação, mas representam a mesma coisa:

- Pares $= \{n \mid n$ é um número par$\}$
- Pares $= \{n : n$ é um número par$\}$

Este conjunto é interpretado como: o conjunto de todos os elementos n tal que n é um número par. A forma geral de representar um conjunto por propriedades é:

$X = \{x : p(x)\}$

Isso quer dizer que x é um elemento de X se a propriedade $p(x)$ for verdadeira.

A notação por propriedades é uma boa forma de representar conjuntos *infinitos*.

Há ainda uma outra forma aceitável de representar conjuntos usando uma representação semelhante à de por extensão. Exemplos:

- Digitos $= \{0, 1, 2, ..., 9\}$
- Pares $= \{0, 2, 4, 6, ...\}$

Embora haja elementos ausentes, substituídos por reticências (...) é completamente aceitável e entendível o que se quer informar com a descrição do conjunto.

O número de elementos de um conjunto A é representado por $|A|$ (isso também é chamado "cardinalidade"). Portanto, se $A = \{1, 2, 3\}$, $|A| = 3$ e $|\emptyset| = 0$.

A seguir, revemos conceitos de algumas relações entre e com conjuntos ou elementos.

1.2.1 Pertinência

Se um elemento a pertence ao conjunto A isso é representado como: $a \in A$. Caso contrário, se a não pertence a A, então representa-se como: $a \notin A$.

Exemplos: Pertence, não pertence

Quanto ao conjunto Vogais $= \{a, e, i, o, u\}$:
a) $a \in$ Vogais
b) $h \notin$ Vogais

Quanto ao conjunto $B = \{x : x$ é brasileiro$\}$:
a) Pele $\in B$
b) Bill Gates $\notin B$

1.2.2 Conjuntos importantes

O **conjunto vazio** é um conjunto sem elementos, representado como $\{\}$ ou $\emptyset$. Exemplos:

- o conjunto de todos os brasileiros com mais de 300 anos;
- o conjunto dos números que são, simultaneamente, ímpares e pares.

O **conjunto unitário** é um conjunto constituído por um único elemento. Exemplos:

- o conjunto constituído pelo jogador de futebol Pelé;
- o conjunto de todos os números que são, simultaneamente, pares e primos, ou seja: $P = \{2\}$;
- um conjunto unitário cujo elemento é irrelevante: $1 = \{*\}$.

O **conjunto universo**, normalmente denotado por U, contém todos os conjuntos considerados em um dado contexto.

Outros conjuntos importantes:

- N: o conjunto dos números naturais (inteiros positivos e o zero)
- Z: o conjunto dos números inteiros (inteiros negativos, positivos e o zero)
- Q: o conjunto dos números racionais (os que podem ser representados na forma de fração)
- I: o conjunto dos números irracionais
- R: o conjunto dos números reais

1.2.3 Alfabetos, palavras e linguagens

Em computação, e mais especificamente em linguagens de programação, um conceito importante é o que define o conjunto de elementos ou termos-chave da linguagem.

Um **alfabeto** um conjunto finito cujos elementos são denominados *símbolos* ou *caracteres*.

Uma **palavra** (cadeia de caracteres ou sentença) sobre um alfabeto é uma sequência finita de símbolos justapostos.

Uma **linguagem** **[formal]** é um conjunto de palavras sobre um alfabeto.

Exemplos: alfabeto, palavra

a) Os conjuntos $\emptyset$ e $\{a, b, c\}$ são alfabetos
b) O conjunto N não é um alfabeto
c) ϵ é uma palavra vazia
d) Σ é geralmente usada para representar um alfabeto
e) Σ^* é o conjunto de todas as palavras possíveis sobre o alfabeto Σ
f) ϵ é uma palavra do alfabeto $\emptyset$
g) $\{a, b\}^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, ...\}$

1.2.4 Continência, subconjunto e igualdade de conjuntos

A *continência* permite introduzir os conceitos de *subconjunto* e *igualdade de conjunto*.

Se todos os elementos de um conjunto A também são elementos de um conjunto B, então A está *contido* em B, o que é representado por: $A \subseteq B$. Isso também é lido como A é *subconjunto* de B.

Se $A \subseteq B$, mas há $b \in B$ tal que $b \notin A$, então pode-se dizer que A está *contido propriamente* em B, ou que A é *subconjunto próprio* de B. Isso é denotado por: $A \subset B$.

A negação de *subconjunto* e *subconjunto próprio* é, respectivamente:

- $A \nsubseteq B$ e
- $A \not\subset B$

Exemplos: continência, subconjunto
a) $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$ b) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$, e $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

A *igualdade de conjuntos* é um conceito baseado em pertinência: se os elementos de A também são elementos de B e vice-versa, então $A = B$. Formalmente, uma condição para $A = B$ é que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Exemplo
$\{1, 2, 3\} = \{3, 3, 3, 2, 2, 1\}$

É importante notar que pertinência ($\in$) é usada entre elementos e conjuntos, enquanto continência ($\subset$ e $\subseteq$) é usada entre conjuntos.

Por definição, um conjunto qualquer é subconjunto de si mesmo, e $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

Exemplo
Seja $A = \{1, 2\}$ então os subconjuntos de A são: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1, 2\}$.

1.3 Conjuntos, Tuplas e Listas

Uma **Tupla** (ou ênupla) é uma sequência ordenada de n elementos (ou componentes). As principais diferenças para **conjunto** são:

- uma ênupla pode conter um elemento mais de uma vez; e
- os elementos são, obrigatoriamente, ordenados, ou seja, cada elemento está em uma posição diferente.

A notação utilizada é $X = (c_1, c_2, ..., c_n)$ onde:

- X é uma ênupla com n componentes
- c_1 é o primeiro componente da ênupla
- c_n é o último componente da ênupla
- c_i é o i-ésimo componente da ênupla

Exemplos:

- $X = (1, 1, 2, 3)$
- $X = (1_1, 1_2, 2_3, 3_4)$
- $Y = (3_1, 2_2, 1_3)$

As mesmas relações de pertinência entre conjuntos e elementos podem ser aplicadas entre ênuplas e seus componentes.

Uma **Lista** é uma estrutura de dados que implementa o conceito matemático de **Tupla**, então podemos afirmar para Vogais = (a, e, i, o, u):

- Vogais é uma lista com 5 elementos
- a é a primeira vogal
- u é a última vogal

1.4 Exercícios

Questão 1. Para cada conjunto abaixo: a) descreva de forma alternativa (usando outra forma de notação); e b) diga se é finito ou infinito.

a) todos os números inteiros maiores que 10
b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
c) todos os países do mundo (Terra)
d) a linguagem de programação Python

Questão 2. Para $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{\{1\}, 1\}$, marque as afirmações corretas:

a) $A \subset B$
b) $A \subseteq B$
c) $A \in B$
d) $A = B$
e) $A \subset C$
f) $A \subseteq C$
g) $A \in C$
h) $A = C$
i) $1 \in A$
j) $1 \in C$
k) $\{1\} \in A$
l) $\{1\} \in C$
m) $\emptyset \notin C$
n) $\emptyset \subset C$

Questão 3. Sejam $a = \{x \mid 2x = 6\}$ e $b = 3$. É correto afirmar que $a = b$? Por que?

Questão 4. Quais todos os subconjuntos dos seguintes conjuntos?

a) $A = \{a, b, c\}$
b) $B = \{a, \{b, c\}, D\}$, dado que $D = \{1, 2\}$

Questão 5. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, inclusive nele próprio? Justifique.

Questão 6. Todo conjunto possui um subconjunto próprio? Justifique.

Questão 7. Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 3, 7, 8\}$, $D = \{3, 4\}$, $E = \{1, 3\}$, $F = \{1\}$ e X um conjunto desconhecido. Para cada item abaixo, determine quais dos conjuntos A, B, C, D, E ou F podem ser iguais a X:

a) $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$
b) $X \not\subseteq B$ e $X \subseteq C$
c) $X \not\subseteq A$ e $X \not\subseteq C$
d) $X \subseteq B$ e $X \not\subseteq C$

Questão 8. Sejam A um subconjunto de B e B um subconjunto de C. Suponha que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$, $f \notin C$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

a) $a \in C$
b) $b \in A$
c) $c \notin A$
d) $d \in B$
e) $e \notin A$
f) $f \notin A$

Questão 9. Bancos de dados relacionais costumam representar conjuntos de dados organizados em tabelas, colunas e registros. É possível considerar alguma semelhança entre o conceito de tabela e o conceito de conjunto? Há recursos de consulta (em linguagem SQL, por exemplo) que permitam identificar, ainda que parcialmente, relações entre tabelas e registros (ou valores) como as expressadas nesse capítulo entre elementos e conjuntos? Explique.

Questão 10. Escolha uma linguagem de programação e demonstre seus recursos para lidar com conjuntos e listas. Utilizando código-fonte (e a sintaxe da linguagem de programação) demonstre e explique as diferenças conceituais e demonstre recursos da linguagem que permitam identificar as relações de pertinência, continência, subconjunto e igualdade.

Capítulo 2

Noções de lógica e técnicas de demonstração

Depois de ver sobre a **Teoria dos conjuntos** fica mais evidente a necessidade de estabelecer uma linguagem lógico-matemática para demonstrações e provas. Este capítulo apresenta uma revisão dos conceitos de lógica e traz técnicas de demonstração úteis nos capítulos seguintes sobre provas.

2.1 Tautologia e contradição

Seja w uma fórmula. Então:

a) w é chamada de **tautologia** se w for **verdadeira** (considerando todas as combinações possíveis de valores de sentenças variáveis – entradas). Por exemplo: a fórmula $p \vee \neg p$ é uma tautologia;
b) w é chamada **contradição** se w for **falsa**. Por exemplo: a fórmula $p \wedge \neg p$ é uma contradição.

A tabela-verdade da Tabela 2.1 resume os valores de entrada possíveis para p e $\neg p$ demonstrando tautologia e contradição das fórmulas de exemplo.

Tabela 2.1: Tabela-verdade demonstrando tautologia e contradição

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

2.2 Implicação e equivalência

A **relação de implicação** é definida como: sejam p e q duas fórmulas. Então p *implica* q se e somente se $p \rightarrow q$ é uma tautologia. Isso é denotado por:

$$p \Rightarrow q \tag{2.1}$$

Para exemplificar, considere a tabela-verdade a seguir.

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

Vale a implicação chamada **adição**, definida por $p \Rightarrow p \vee q$. Para validar essa afirmação, verificamos que $p \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia aplicando o condicional (quarta coluna da tabela-verdade).

Vale a implicação chamada **simplificação**, definida por $p \wedge q \Rightarrow q$. Para validar essa afirmação, verificamos que $(p \wedge q) \rightarrow p$ é uma tautologia (sexta coluna da tabela-verdade).

A **relação de equivalência** é definida como: sejam p e q duas fórmulas. Então p *é equivalente a* q se e somente se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. Isso é denotado por:

$$p \Leftrightarrow q \tag{2.2}$$

Considere a relação de equivalência da fórmula:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Para verificar a validade da equivalência, basta construir a tabela-verdade para demonstrar que $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee q)$ (chamada de S) é uma tautologia, ou seja:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	S
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Também é interessante observar que a fórmula ilustra que a *distributividade* do conectivo **ou** sobre o conectivo **e** é verdadeira sempre, ou seja, é uma tautologia. O mesmo valeria para a distributividade do conectivo **e** sobre o conectivo **ou**? Verifique.

Para verificar a equivalência da fórmula:

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

basta demonstrar que $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (chamada de S) é uma tautologia. Isso é conseguido utilizando a tabela-verdade:

Tabela 2.4: Tabela-verdade: bicondição x condição

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	S
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Essa forma em particular demonstra formalmente por que a bicondição pode ser expressa por duas condições: “ida” e “volta”.

Para verificar a equivalência da fórmula:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

basta demonstrar que $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ (chamada de S) é uma tautologia. Isso é conseguido utilizando a tabela-verdade:

Tabela 2.5: Tabela-verdade: contraposição

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	S
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Essa relação de equivalência é conhecida como **contraposição**.

Para verificar a equivalência da fórmula:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$$

basta demonstrar que $p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$ (chamada de S) é uma tautologia. Isso é conseguido utilizando a tabela-verdade:

Tabela 2.6: Tabela-verdade: redução ao absurdo

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \rightarrow F$	S
V	V	F	V	F	V	V

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \to F$	S
V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Essa relação de equivalência é conhecida como **redução ao absurdo**.

2.3 Quantificadores

Seja A um conjunto. Uma proposição $p(x)$ sobre A:

a) descreve alguma propriedade de um elemento $x \in A$; e
b) tem valor lógico dependendo do elemento $x \in A$.

Então:

a) o **conjunto verdade** $p(x) = \{x \in A \mid p(x) \text{ é verdadeira}\}$
b) o **conjunto falsidade** $p(x) = \{x \in A \mid p(x) \text{ é falsa}\}$

Ainda:

a) se $p(x)$ é verdadeira para qualquer $x \in A$ então é uma tautologia, ou seja, o conjunto verdade é A;
b) se $p(x)$ é falsa para qualquer $x \in A$ então é uma contradição, ou seja, o conjunto falsidade é A.

Exemplos: conjuntos verdade e falsidade, tautologia e contradição

Suponha o conjunto universo N, então:
a) para $p(n) = n > 1$:
- conjunto verdade: $\{2, 3, 4, ...\}$
- conjunto falsidade: $\{0, 1\}$
- náo é tautologia e nem contradição. Por exemplo, é verdadeira para $n = 2$, mas falsa para $n = 0$

b) para $p(n) = n! < 10$:
- conjunto verdade: $\{0, 1, 2, 3\}$
- conjunto falsidade: $\{n \in N \mid n > 3\}$
- não é tautologia e nem contradição. Por exemplo, é verdadeira para $n = 0$, mas falsa para $n = 4$

c) para $p(n) = n + 1 > n$:
- conjunto verdade: N
- conjunto falsidade: $\emptyset$
- é uma tautologia

Exemplos: conjuntos verdade e falsidade, tautologia e contradição

d) para $p(n) = 2n$ é ímpar
- conjunto verdade: $\emptyset$
- conjunto falsidade: N
- é uma contradição

Os **quantificadores** são utilizados na lógica para, com relação a uma determinada proposição $p(x)$, quantificar os valores de x que devem ser considerados.

O **quantificador universal**, simbolizado por $\forall$, quando associado a uma proposição $p(x)$, é denotado como qualquer uma das três opções a seguir:

$$(\forall x \in A)(p(x)) \qquad (\forall x \in A)p(x) \qquad \forall x \in A, p(x) \tag{2.3}$$

ou, quando é claro sobre qual conjunto de valores a proposição está definida, pode-se usar:

$$(\forall x)(p(x)) \qquad (\forall x)p(x) \qquad \forall x, p(x) \tag{2.4}$$

A leitura da fórmula $(\forall x \in A)p(x)$ é: "qualquer x, $p(x)$" ou "para todo x, $p(x)$"

O **quantificador existencial**, simbolizado por $\exists$, quando associado a uma proposição $p(x)$, é denotado como qualquer uma das opções a seguir:

$$(\exists x \in A)(p(x)) \qquad (\exists x \in A)p(x) \qquad \exists x \in A, p(x) \tag{2.5}$$

ou, quando é claro sobre qual conjunto de valores a proposição está definida, pode-se usar:

$$(\exists x)(p(x)) \qquad (\exists x)p(x) \qquad \exists x, p(x) \tag{2.6}$$

A leitura da fórmula $(\exists x \in A)p(x)$ é: "existe pelo menos um x tal que $p(x)$" ou "existe x tal que $p(x)$".

O valor-verdade de cada proposição quantificada é:

a) $(\forall x \in A)p(x)$ é **verdadeira**, se $p(x)$ for **verdadeira** para **todos os elementos de** A; e
b) $(\exists x \in A)p(x)$ é **verdadeira**, se $p(x)$ for **verdadeira** para **pelo menos um elemento de** A.

Portanto:

a) **quantificador universal**: a proposição $(\forall x \in A)p(x)$ é:
   - **verdadeira** se o conjunto verdade for igual ao conjunto A
   - **falsa**, caso contrário
b) **quantificador existencial**: a proposição $(\exists x \in A)p(x)$ é:
   - **verdadeira**, se o conjunto verdade for não vazio (ou diferente de $\emptyset$)

- **falsa**, caso contrário (ou igual a $\emptyset$)

A noção de uma proposição $p(x)$ sobre um conjunto pode ser generalizada para descrever alguma propriedade de elementos $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n$, sendo denotada da seguinte forma:

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.7}$$

Por exemplo, para o conjunto universo N valem:

- $(\forall n)(\exists m)(n < m)$ é **verdadeira**: dado **qualquer** valor n, **existe pelo menos um** m que satisfaz a desigualdade. Por exemplo: tomando $m = n + 1$ é verdadeiro que $n < n + 1$
- $(\exists m)(\forall n)(n < m)$ é **falsa**: **existe** um número natural maior que **qualquer** outro, o que não é verdade.

A **negação da proposição quantificada**:

$$(\forall x \in A)p(x)$$

é definida como:

$$(\exists x \in A)\neg p(x) \tag{2.8}$$

o que significa que existe pelo menos um x tal que não é fato que ou não é verdade que $p(x)$.

Logo:

$$\neg((\forall x \in A)p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A)\neg p(x)$$

e, também:

$$\neg((\exists x \in A)p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in A)\neg p(x)$$

2.4 Técnicas de demonstração

Um **teorema** é uma proposição que prova-se uma tautologia, do tipo:

$$p \rightarrow q \tag{2.9}$$

ou seja, uma implicação:

$$p \Rightarrow q$$

onde:

- p é chamada de **hipótese** (ou **premissa**) e é, por suposição, **verdadeira**
- q é chamada de **tese** (ou **conclusão**)

Para exemplificar considere o teorema:

> 0 é o único elemento neutro da adição em N

Ele poderia ser reescrito como a seguir, para evidenciar hipótese e tese:

> se 0 é elemento neutro da adição em N, então 0 é o único elemento neutro da adição em N

Desta forma, por causa de $p \Rightarrow q$, a hipótese p é suposta verdadeira e, consequentemente, ela não deve ser demonstrada.

Para um determinado teorema $p \rightarrow q$ destacam-se as seguintes técnicas de prova (demonstração) de que, de fato, $p \Rightarrow q$:

- prova direta
- prova por contraposição
- prova por redução ao absurdo
- prova por indução

Para qualquer técnica de demonstração deve-se dar atenção especial aos quantificadores. Para provar a proposição:

$$(\forall x \in A)p(x)$$

é necessário provar $p(x)$ para todo $x \in A$. Assim, mostrar um determinado elemento $a \in A$ não é uma prova, mas um exemplo, o que não constitui uma prova válida para todos os elementos de A. Já no caso de:

$$(\exists x \in A)p(x)$$

para provar que existe pelo menos um $a \in A$ tal que $p(x)$ é **verdadeira** basta mostrar um exemplo.

2.4.1 Prova direta

Uma prova é direta quando pressupõe verdadeira a hipótese e, a partir dela, prova ser verdadeira a conclusão.

Considere o teorema:

> a soma de dois números pares é um número par

que, reescrito na forma de $p \rightarrow q$, torna-se:

> se n e m são dois números pares quaisquer, então $n + m$ é um número par

Suponha que n e m são números pares. Deve-se mostrar que $n+m$ é par.

Pela definição de **par**:

> qualquer número par n pode ser definido como $n = 2r$, para algum natural r.

podemos afirmar que existem $r, s \in N$ tais que:

$$n = 2r \qquad \text{e} \qquad m = 2s$$

Então, aplicando essas definições em $n+m$:

$$n + m = 2r + 2s = 2(r + s)$$

A expressão $r + s$ é um número que, multiplicado por 2 é um número par. Logo, $n + m$ é um número par e prova-se verdadeira a conclusão.

A estrutura da prova direta é[1]:

1. expresse a afirmação a ser provada na forma $(\forall x \in A)p(x) \rightarrow q(x)$ (pode ser feito mentalmente)
2. comece a prova supondo que x é um elemento específico de A, mas escolhido arbitrariamente para o qual a hipótese $p(x)$ é verdadeira (normalmente abreviado para o formato: suponha $x \in Aep(x)$)
3. mostre que a consluão é verdadeira usando definições, resultados anteriores e as regras de inferência lógica

[1]Notas de aula da disciplina Matemática Discreta, do Departamento de Ciência da Computação da UFMG, ministrada pelo prof. Antonio Alfredo Ferreira Loureiro. On-line: http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_3MetodosDeProva.pdf

Capítulo 3

Álgebra de Conjuntos

Uma **Álgebra** é constituída de operações definidas sobre uma soleção de objetos. Neste contexto, *álgebra de conjuntos* corresponderia às operações definidas sobre todos os conjuntos.

As operações da álgebra de conjuntos podem ser:

- Não reversíveis
  - União
  - Intersecção
  - Diferença
- Reversíveis
  - Complemento
  - Conjunto das partes
  - Produto cartesiano
  - União disjunta

3.1 Operações não reversíveis

3.1.1 União

Sejam A e B dois conjuntos. A união entre eles, $A \cup B$, é definida como:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \tag{3.1}$$

Considerando a lógica, o conjunto A pode ser definido como $x \in A$ e o conjunto B pode ser definido como $x \in B$. Ou seja, a propriedade de pertiência é utilizada para indicar uma proposição lógica.

A união corresponde à operação lógica *disjunção* (símbolo $\vee$).

Exemplo: união entre conjuntos

Considere os conjuntos:

Exemplo: união entre conjuntos

a) Digitos = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) Vogais = $\{a, e, i, o, u\}$
c) Pares = $\{0, 2, 4, 6, ...\}$

Então:
a) Digitos $\cup$ Vogais = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, e, i, o, u\}$
b) Digitos $\cup$ Pares = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, ...\}$

Suponha os conjuntos:
a) $A = \{x \in N \mid x > 2\}$
b) $B = \{x \in N \mid x^2 = x\}$

Então:
$A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, ...\}$

É importante observar que o resultado da união é um conjunto sem repetições de elementos.

Vejamos as propriedades da união:

- **Elemento neutro**: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
- **Idempotência**: $A \cup A = A$
- **Comutativa**: $A \cup B = B \cup A$
- **Associativa**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3.1.2 Intersecção

Sejam dois conjuntos A e B. A intersercção entre eles, $A \cap B$ é definida como:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \tag{3.2}$$

A união corresponde à operação lógica *conjunção* (símbolo $\wedge$).

Exemplo: intersecção

Considere os conjuntos:
a) Digitos = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) Vogais = $\{a, e, i, o, u\}$
c) Pares = $\{0, 2, 4, 6, ...\}$

Então:
a) Digitos $\cap$ Vogais = $\emptyset$
b) Digitos $\cap$ Pares = $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Também podemos utilizar **Diagrama de Venn** para demonstrar a Intersecção, como ilustra a Figura 3.1.

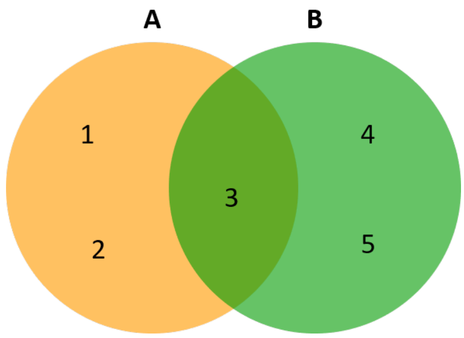

Figura 3.1: Diagrama de Venn demonstrando a intersecção entre conjuntos A e B

A Figura 3.1 considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ e mostra o resultado de $A \cap B$. A área mais ao centro, colorida como uma mistura das cores dos conjuntos, corresponde à intersecção (não é necesssário utilizar cores, entretanto).

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Se $A \cap B = \emptyset$, então A e B são chamados *conjuntos disjuntos*, *conjuntos independentes*, ou *conjuntos mutuamente exclusivos*.

Propriedades da intersecção:

- **Elemento neutro**: $A \cap U = U \cap A = A$
- **Idempotência**: $A \cap A = A$
- **Comutativa**: $A \cap B = B \cap A$
- **Associativa**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3.2 Propriedades envolvendo união e intersecção

As propriedades a seguir envolvem as operações de união e intersecção:

- **Distributividade da intersecção sobre a união**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Distributividade da união sobre a intersecção**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Absorção**: $A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$.

3.3 Operações reversíveis

Entende-se por **operação reversível** uma operação a partir de cujo resultado pode-se recuperar os operandos originais.

3.3.1 Complemento

Considere o conjunto universo U. O complemento de um conjunto $A \subseteq U$, denotado por $\sim A$ é definido como:

$$\sim A = \{x \in U \mid x \notin A\} \tag{3.3}$$

Exemplos: complemento

1. Considere o conjunto universo definido por Digitos $= \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Seja $A = \{0, 1, 2\}$. Então, $\sim A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2. Suponha conjunto universo $\mathbb{N}$. Seja $A = \{0, 1, 2\}$. Então $\sim A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\}$.

3. Para qualquer conjunto universo U, valem:
a) $\sim \emptyset = U$
b) $\sim U = \emptyset$

4. Suponha que U é o conjunto universo. Então, para qualquer conjunto $A \subseteq U$, valem:
a) $A \cup \sim A = U$
b) $A \cap \sim A = \emptyset$

No último exemplo, observe que:

- a união de um conjunto com seu complemento sempre resulta no conjunto universo ($p \vee \sim p =$ Verdadeiro); e
- a intersecção de um conjunto com seu complemento sempre resulta no conjunto vazio ($p \wedge \sim p =$ Falso).

Também vale a noção de *duplo complemento* (ou *dupla negação*):

$$\sim\sim A = A \tag{3.4}$$

A propriedade denominada **DeMorgan** vale-se do complemento, envolvendo as operações de união e interseção (Tabela 3.4).

Tabela 3.4: DeMorgan na álgebra de conjuntos e na Lógica

DeMorgan na Álgebra de conjuntos	Propriedade DeMorgan na Lógica
$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

3.3.2 Diferença

Sejam os conjuntos A e B. A diferença dos conjuntos A e B, denotada por $A - B$ é definida como:

$$A - B = A \cap \sim B \tag{3.5}$$

ou

$$A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\} \tag{3.6}$$

Exemplos: diferença

1. Suponha os conjuntos: Digitos $= \{0, 1, 2, ..., 9\}$, Vogais $= \{a, e, i, o, u\}$ e Pares $= \{0, 2, 4, 6, ...\}$. Utilizando a diferença, temos:
a) Digitos $-$ Vogais $=$ Digitos
b) Digitos $-$ Pares $= \{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, valem:
a) $\emptyset - \emptyset = \emptyset$
b) $U - \emptyset = U$
c) $U - A = \sim A$
d) $U - U = \emptyset$

3.3.3 Conjunto das partes

Para qualquer conjunto A sabe-se que:

- $A \subseteq A$
- $\emptyset \subseteq A$
- Para qualquer elemento $a \in A$, é visível que $\{a\} \subseteq A$

A operação unária chamada *conjunto das partes*, ao ser aplicada ao conjunto A, resulta no conjunto de todos os subconjuntos de A. Suponha um conjunto A. O conjunto das partes de A (ou conjunto potência), denotado por $\mathrm{P}(A)$ ou 2^A, é definido por:

$$\mathrm{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\} \tag{3.7}$$

Exemplos: conjunto das partes

Sejam os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$ e $D = \{a, \emptyset, \{a, b\}\}$, então:
1. $\mathrm{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
2. $\mathrm{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$
3. $\mathrm{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
4. $\mathrm{P}(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
5. $\mathrm{P}(D) = \{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}, \{\{a, b\}\}, \{a, \emptyset\}, \{a, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}, \{a, \emptyset, \{a, b\}\}\}$

3.3.4 Produto Cartesiano

A operação **produto cartesiano** é uma operação binária que, quando aplicada a dois conjuntos A e B, resulta em um conjunto constituído de sequências de duas componentes (tuplas), sendo que a primeira componente de cada sequência é um elemento de A, e a segunda componente, um elemento de B.

Uma sequência de n componentes, denominada *n-upla ordenada* (lê-se: ênupla ordenada), consiste de n objetos (não necessariamente distintos) em uma ordem fixa. Por exemplo, uma 2-upla (tupla) ordenada é denominada *par ordenado*. Um par ordenado no qual a primeira componente é x e a segunda é y é definido como $\langle x, y\rangle$ ou (x, y).

Uma n-upla ordenada é definida como:

$$\langle x_1, x_2, x_3, ..., x_n\rangle \tag{3.8}$$

Uma n-upla ordenada não deve ser confundida com um conjunto, pois a ordem das componentes é importante. Assim:

$$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle \tag{3.9}$$

O **produto cartesiano** dos conjuntos A e B, denotado por $A \times B$ é definido por:

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \land b \in B\} \tag{3.10}$$

O produto cartesiano de um conjunto com ele mesmo é definido por $A \times A = A^2$

Exemplos: produto cartesiano

Sejam os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$. Então:
1. $A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle\}$
2. $B \times C = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$
3. $A^2 = \{\langle a, a\rangle\}$

3.3.5 União disjunta

Diferentemente da *união*, que desconsidera repetições de elementos no conjunto resultante, a *união disjunta* permite que os elementos do conjunto resultante sejam duplicados, uma vez que seja identificada a sua fonte. A *união disjunta* dos conjuntos A e B, denotada por $A + B$ ou $A \dot\cup B$ é definida como:

$$A + B = \{\langle a, A\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle b, B\rangle \mid b \in B\} \tag{3.11}$$

ou

$$A + B = \{a_A \mid a \in A\} \cup \{b_B \mid b \in B\} \tag{3.12}$$

Exemplo: união disjunta

Suponha os conjuntos Silva $= \{$João, Maria, José$\}$ e Souza $= \{$Pedro, Ana, José$\}$. Então:
1. Silva + Souza =
$\{\langle \text{João}, \text{Silva}\rangle, \langle \text{Maria}, \text{Silva}\rangle, \langle \text{José}, \text{Silva}\rangle, \langle \text{Pedro}, \text{Souza}\rangle, \langle \text{Ana}, \text{Souza}\rangle, \langle \text{José}, \text{Souza}\rangle\}$

ou

2. Silva + Souza $= \{\text{João}_{\text{Silva}}, \text{Maria}_{\text{Silva}}, \text{José}_{\text{Silva}}, \text{Pedro}_{\text{Souza}}, \text{Ana}_{\text{Souza}}, \text{José}_{\text{Souza}}\}$

3.4 Relações entre a Lógica e as operações sobre conjuntos

É possível estabelecer uma relação entre a lógica e as operações da álgebra de conjuntos, como mostra a Tabela 3.9.

Tabela 3.9: Conectivos lógicos x operações sobre conjuntos

Propriedade	Lógica	Teoria dos conjuntos
idempotência	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cap A = A$
	$p \vee p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$
comutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$A \cap B = B \cap A$
	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$A \cup B = B \cup A$
associativa	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
distributiva	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
negação ou	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	$\sim\sim A = A$
complemento	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$A \cap \sim A = \emptyset$
	$p \vee \neg p \Leftrightarrow V$	$A \cup \sim A = U$
DeMorgan	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$
elemento	$p \wedge V \Leftrightarrow p$	$A \cap U = A$
neutro	$p \vee F \Leftrightarrow p$	$A \cup \emptyset = A$

Propriedade	Lógica	Teoria dos conjuntos
elemento	$p \wedge F \Leftrightarrow F$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
absorvente	$p \vee V \Leftrightarrow V$	$A \cup U = U$
absorção	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$A \cap (A \cup B) = A$
	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$A \cup (A \cap B) = A$

Ainda, as relações lógicas e as relações sobre conjuntos são análogas:

- **implicação/contigência**: na lógica: $p \Rightarrow q$, na teoria dos conjuntos: $A \subseteq B$
- **equivalência/igualdade**: na lógica: $p \Leftrightarrow q$, na teoria dos conjuntos: $A = B$

Como já visto, $p(x)$ é uma proposição que descreve uma propriedade de um elemento $x \in A$. Assim, a continência e a igualdade de dois conjuntos $A = \{x \mid p(x)\}$ e $B = \{x \mid q(x)\}$ pode ser vista assim:

- **contingência**: $A \subseteq B$ se e somente se $(\forall x \in U)(p(x) \Rightarrow q(x))$
- **igualdade**: $A = B$ se e somente se $(\forall x \in U)(p(x) \Leftrightarrow q(x))$

Exemplos:

- $A = U$ se e somente se $(\forall x \in U)(p(x) \Leftrightarrow V)$
- $A = \emptyset$ se e somente se $(\forall x \in U)(p(x) \Leftarrow F)$

3.5 Provando propriedades

3.5.1 Prova da propriedade *elemento neutro da união*

Elemento neutro é definido como:

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \tag{3.13}$$

Assim, há duas igualdades, que podem ser analisadas considerando a validade da transitividade [da igualdade]. Assim, temos que observar alguns casos:

(A) Para provar $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$:

O primeiro caso (1): Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então devemos provar que $A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A$:

- $x \in A \cup \emptyset \Rightarrow$ (definição de união)
- $x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow$ (comutatividade da disjunção)
- $x \in \emptyset \vee x \in A \Rightarrow$ (definição de união)
- $x \in \emptyset \cup A$

Portanto, $A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A$.

O segundo caso (2): Seja $x \in \emptyset \cup A$. Então devemos provar que $\emptyset \cup A \subseteq A \cup \emptyset$:

- $x \in \emptyset \cup A \Rightarrow$ (definição de união)
- $x \in \emptyset \vee x \in A \Rightarrow$ (comutatividade da disjunção)
- $x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow$ (definição de união)
- $x \in A \cup \emptyset$

Portanto, $\emptyset \cup A = A \cup \emptyset$.

Terceiro caso (3): De (1) e (2) concluímos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$.

(B) Para provar $A \cup \emptyset = A$:

Quarto caso (4): Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então devemos provar que $A \cup \emptyset \subseteq A$:

- $x \in A \cup \emptyset \Rightarrow$ (definição de união)
- $x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow$ ($x \in \emptyset$ é sempre *false*)
- $x \in A$

Portanto, $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Quinto caso (5): Seja $x \in A$. Então devemos provar que $A \subseteq A \cup \emptyset$:

- $x \in A \Rightarrow$ ($x \in A$ é sempre *true*, portanto podemos considerar $p \Rightarrow p \vee q$)
- $x \in A \vee x \in \emptyset$ (definição de união)
- $x \in A \cup \emptyset$

Portanto, $A \subseteq A \cup \emptyset$.

Sexto caso (6): De (4) e (5) concluímos que $A \cup \emptyset = A$.

Sétimo caso (7): Por fim, de (3) e (6) e pela transitividade da igualdade, concluímos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ e provamos a propriedade do *elemento neutro* da união.

3.6 Exercícios

Exercício 1: Suponha o conjunto universo $S = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ bem como os seguintes conjuntos:

- $A = \{p, q, r, s\}$
- $B = \{r, t, v\}$
- $C = \{p, s, t, u\}$

Determine:

a) $B \cap C$

b) $A \cup C$

c) $\sim C$

d) $A \cap B \cap C$

e) $\sim (A \cup B)$

f) $(A \cup B) \cap \sim C$

Exercício 2: Considere os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$. Calcule os seguintes produtos cartesianos:

1. $(A \times B) \times C$
2. $A \times (B \times C)$
3. B^2
4. C^2

Exercício 3: Considere os conjuntos $D = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $V = \{a, e, i, o, u\}$, e $P = \{0, 2, 4, 6, ...\}$. Então, encontre:

1. $D + V$
2. $D + P$
3. $V + V$
4. $V + \emptyset$

Exercício 4: Utilizando um banco de dados relacional, crie duas tabelas: *Palavras1* e *Palavras2*, respectivamente. Utilizando linguagem SQL, crie e apresente o resultado de uma consulta que realiza o produto cartesiano entre as duas tabelas.

Exercício 5: Crie um programa que lê n arquivos de entrada. Cada arquivo contém uma palavra em cada linha. O programa deve ler os arquivos e gerar um arquivo de saída chamado *pc.txt* contendo o produto cartesiano entre as palavras dos arquivos de entrada. Cada linha do arquivo de saída deve representar um elemento do produto cartesiano (uma n-upla) cujos componentes devem estar separados por um espaço [em branco]. **Exemplo**: Para os arquivos de entrada:

palavras1.txt
jose
maria

palavras2.txt
silva
santos

palavras3.txt
moreira
aires

o arquivo resultante seria:

pc.txt
jose silva moreira

pc.txt
jose silva aires
jose santos moreira
jose santos aires
maria silva moreira
maria silva aires
maria santos moreira
maria santos aires

Exercício 6: Faça uma pesquisa sobre as provas das propriedades das operações da álgebra de conjuntos e, em formato técnico-científico, apresente cada uma. Não se esqueça de apresentar as referências.

3.7 Projeto do capítulo

Este capítulo deu continuidade à Seção 1.2 e apresentou operações e propriedades sobre conjuntos que constituem a **Álgebra de conjuntos**.

Como forma de fundamentar os conceitos apresentados este capítulo traz o **projeto do capítulo**, uma atividade prática que envolve computação e escrita de textos.

O projeto deste capítulo deve alcançar os objetivos:

1. utilizar uma linguagem de programação para criar uma estrutura de dados **Conjunto**, com as funcionalidades:
   - adicionar elemento
   - remover elemento
   - verificar pertinência
   - verificar continência
   - realizar união (com outro conjunto)
   - realizar intersecção (com outro conjunto)
   - realizar diferença (com outro conjunto)
   - realizar complemento (em relação a outro conjunto)
   - gerar o conjunto das partes
   - realizar o produto cartesiano (com outro conjunto)
   - realizar a união disjunta (com outro conjunto)
2. escrever um texto didático explicando e demonstrando a implementação e os cocneitos utilizados. Para cada funcionalidade, apresentar: o conceito (definição), a operação (como funciona), a demonstração (com exemplos). Esse texto deve usar notação matemática (o resultado é um arquivo **PDF**).

Importante: No *Objetivo 1* não pode ser utilizado recurso da linguagem que já implemente recursos de conjuntos e opreações sobre conjuntos. Utilize lista, vetor ou outra estrutura de dados semelhante.

Por fim, o conteúdo deve ser disponibilizado em um repositório do Github. Deve haver um arquivo `README.md` identificando e apresentando o trabalho, bem como descrevendo os procedimentos adotados.

Referências

GIT COMMUNITY. **Git**, [s.d.]. Disponível em: <https://git-scm.com/>. Acesso em: 22 jul. 2018

MENEZES, P. B. **Matemática discreta para computação e informática**. Traducao. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

MICROSOFT. **Visual Studio Code - Code Editing. Redefined**, [s.d.]. Disponível em: <https://code.visualstudio.com/>. Acesso em: 22 jul. 2018a

MICROSOFT. **TypeScript - JavaScript that scales**, [s.d.]. Disponível em: <https://www.typescriptlang.org/index.html>. Acesso em: 24 jul. 2018b

NODE.JS FOUNDATION. **Node.js**, [s.d.]. Disponível em: <https://nodejs.org>. Acesso em: 23 jul. 2018

NPM, INC. **npm**, [s.d.]. Disponível em: <https://www.npmjs.com/>. Acesso em: 23 jul. 2018

THE JQUERY FOUNDATION. **jQuery**, [s.d.]. Disponível em: <http://jquery.com/>. Acesso em: 22 jul. 2018

W3SCHOOLS. **JavaScript Tutorial**, [s.d.]. Disponível em: <https://www.w3schools.com/js/default.asp>. Acesso em: 22 jul. 2018a

W3SCHOOLS. **JavaScript and HTML DOM Reference**, [s.d.]. Disponível em: <https://www.w3schools.com/jsref/default.asp>. Acesso em: 22 jul. 2018b

W3SCHOOLS. **HTML5 Tutorial**, [s.d.]. Disponível em: <https://www.w3schools.com/html/default.asp>. Acesso em: 22 jul. 2018c

W3SCHOOLS. **CSS Tutorial**, [s.d.]. Disponível em: <https://www.w3schools.com/css/default.asp>. Acesso em: 22 jul. 2018d

W3SCHOOLS. **CSS Reference**, [s.d.]. Disponível em: <https://www.w3schools.com/cssref/default.asp>. Acesso em: 22 jul. 2018e

W3SCHOOLS. **HTML Element Reference**, [s.d.]. Disponível em: <https://www.w3schools.com/tags/default.asp>. Acesso em: 22 jul. 2018f