

# ESERCITAZIONE STATISTICA

## Lezione 10 - Statistica (Regressione lineare semplice)

### Regressione lineare semplice & Soluzioni in R

1. E' stata stimata una retta ai minimi quadrati da un insieme di punti. Se la somma totale dei quadrati è  $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 181.2$  e la somma dei quadrati dei residui è  $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 33.9$ :
  - (a) calcolare il coefficiente di determinazione  $R^2$ ;
  - (b) calcolare la correlazione tra le due variabili;
  - (c) come varia il coefficiente di determinazione se si dimezzano i valori della variabile indipendente?

2. Per molti prodotti chimici la quantità che si dissolve in un dato volume di acqua dipende dalla temperatura. La seguente tabella riassume i risultati della stima di un modello lineare  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$  dove il numero di grammi di un determinato prodotto chimico dissolti in un litro di acqua ( $y$ ) è spiegato in termini della temperatura in °C ( $x$ ).

$\beta$	Stima	std	T	$Pr(>  t )$
Costante	1.4381	0.62459	2.30	0.083
Temperatura	0.30714	0.02063	14.9	0.000

- (a) Se ci sono  $n = 6$  osservazioni quanti gradi di libertà ha la statistica T di student?
- (b) Trovare un intervallo di confidenza a livello di fiducia 95% per  $\beta_1$ ;
- (c) Trovare un intervallo di confidenza a livello di fiducia 95% per  $\beta_0$ ;
- (d) Qualcuno afferma che se la temperatura dell'acqua fosse incrementata di 1 C, allora la media del numero di grammi dissolti aumenterebbe di esattamente 0.40. Utilizzare i risultati a disposizione per effettuare un test per determinare se questa affermazione possa essere confutata.
- (e) Se la settima osservazione è tale che  $x = \bar{x}$  e  $y = \bar{y}$  come cambiano le stime dei parametri della retta di regressione?

3. L'articolo "Resistenza al ritiro dei chiodi filettati" (D. Rammer, S. Winistorfer, and D. Bender, Journal of Structural Engineering 2001:442–449) descrive un esperimento per studiare la relazione tra il diametro di un chiodo ( $x$ ) e la sua resistenza al ritiro ( $y$ ) N/mm. Sono stati ottenuti i seguenti risultati per 10 chiodi di differenti diametri (in mm).

$x$	2.52	2.87	3.05	3.43	3.68	3.76	3.76	4.50	4.50	5.26
$y$	54.74	59.01	72.92	50.85	54.99	60.56	69.08	77.03	69.97	90.70

- Calcolare la retta dei minimi quadrati per prevedere la resistenza dal diametro.
- Calcolare la stima della deviazione standard degli errori  $s$ .
- Calcolare l'intervallo di confidenza a livello di fiducia del 95% per il coefficiente angolare della retta.
- Trovare l'intervallo di confidenza a livello di fiducia del 95% per la media della resistenza quando il diametro del chiodo è di 4 mm.
- Si può concludere che la media della resistenza al ritiro per chiodi del diametro di 4mm è maggiore di 60 N/mm? Impostare una verifica d'ipotesi e riportare il  $p$ -value.
- Trovare l'intervallo di previsione per la resistenza al ritiro di un particolare chiodo con un diametro di 4 mm.

4. È stato svolto uno studio sulla relazione esistente tra la vita utile di un cuscinetto a sfere ( $Y$ ) e la sua relazione con la viscosità dell'olio lubrificante ( $X$ ). Dall'analisi dei dati di un campione di 8 cuscinetti si sono ottenuti i seguenti risultati:  $\sum x = 185.1$ ,  $\sum y = 1284$ ,  $\sum x_i^2 = 5914$ ,  $\sum y_i^2 = 222008$ ,  $\sum x_i y_i = 25300$ .
- (a) Stimare i parametri del modello di regressione lineare  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ .
- (b) Noto  $SSE = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 4016.5$ , costruire un intervallo di confidenza per  $\beta_0$  e verificare l'ipotesi  $H_0 : \beta_1 = 0$  contro l'alternativa  $H_1 : \beta_1 \neq 0$  (con  $\alpha = 0.05$ ).
- (c) Valutare la bontà del modello stimato, utilizzando il coefficiente di determinazione  $R^2$ .

5. Si vuole studiare il carico di rottura di un certo materiale metallico. A tal fine sono state eseguite  $n = 8$  prove a diverse temperature. Indicando con  $y$  il carico di rottura (in  $\text{kg/mm}^2$ ) e con  $x$  la temperatura (in C), si sono ottenuti i seguenti risultati

y	100	90	88	82	81	81	80	71
x	-30	-20	-10	0	10	20	30	60

Ipotizzando un modello di regressione lineare del tipo  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ :

- (a) stimare, con il metodo dei minimi quadrati, i coefficienti  $\beta_0, \beta_1$ ;
- (b) verificare se il parametro  $\beta_1$  è significativamente diverso da zero con  $\alpha = 0.05$ ;
- (c) stimare il carico di rottura del materiale metallico ad una temperatura di 40 C;
- (d) valutare la bontà del modello stimato calcolando il coefficiente di determinazione  $R^2$ .