ESERCITAZIONE STATISTICA
Lezione 2 - Calcolo delle probabilità

Calcolo delle probabilità & Soluzioni in R

1. Considerati i due eventi A e B, si sa che $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.4$ e $P(A|B) = 0.6$. Calcolare $P(B)$, $P(A)$, $P(B|A)$ e $P(A|\bar{B})$.

2. Considerati i due eventi A e B, si sa che $P(A) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.2$. Calcolare $P(B)$ se: *i*) A e B sono incompatibili; *ii*) A e B sono indipendenti; *iii*) $P(A|B) = 0.3$.

3. Siano B e C eventi incompatibili con $P(B) > 0$. Provare che $\forall A$ vale $P(A \cap \bar{C}|B) = P(A|B)$.

4. Un dado è truccato in modo che la probabilità di ogni faccia sia proporzionale al suo punteggio. Determinare se è maggiore la probabilità che in un lancio esca un numero primo o un numero non primo. Sapendo che è uscito un numero primo, calcolare la probabilità che sia uscito "2".

5. Nella classe di Aldo, composta in tutto da 25 studenti, il professore sceglie a caso 4 studenti per interrogarli (estrazione a blocco). Qual è la probabilità che Aldo sia interrogato? e la probabilità che né Aldo né il suo compagno di banco, Bruno, siano interrogati?

6. Due calcolatori eseguono, indipendentemente l'uno dall'altro, la medesima elaborazione. Le rispettive probabilità di errore sono α e β. Qual è la probabilità che entrambi forniscano un'elaborazione corretta (= evento A)? Qual c la probabilità che uno dei due sbagli e l'altro no (= evento B)? Qual è la probabilità che si abbia almeno un'elaborazione corretta (= evento C)?

7. In due lanci successivi di un dado regolare, qual è la probabilità che escano facce uguali? Qual è la probabilità che la seconda faccia sia minore della prima?

8. Una scatola contiene quattro carte numerate da 1 a 4. Si estraggono a caso 2 carte in blocco e si fa la somma dei loro punti. Descrivere lo spazio campionario e la funzione di probabilità associati all'esperimento. Qual è la probabilità che sia estratta la carta 1? Qual'è la probabilità che sia estratta la carta 1 oppure la carta 3?

9. Una fabbrica utilizza un lotto di pezzi di un certo tipo acquistati per metà dal fornitore A e per l'altra metà dal fornitore B. Si sa che la produzione di A è difettosa nel 5% dei casi e che, scelto a caso un pezzo difettoso da quel lotto, la probabilità che esso sia stato prodotto da A è del 20%. Si considerino gli eventi B = "un pezzo del lotto è stato prodotto da B" e D = "un pezzo del lotto è difettoso". Calcolare $P(D)$ e $P(D|B)$.

10. Una scatola contiene 8 palline bianche e 8 palline nere. Si lancia una moneta regolare e poi si estraggono in blocco dalla scatola 2 palline (se è uscita Testa) oppure 3 palline (se è uscita Croce). Qual'è la probabilità che le palline estratte siano tutte bianche? E' più probabile che tutte le palline estratte siano dello stesso colore oppure no?

11. (ILIA, 3.7) Un distributore automatico di bevande permette di scegliere tra sei tipi differenti: A, B, C, D, E ed F. Se 10 scelte si ripartiscono a caso tra le bevande, nell'ipotesi di equiprobabilità, qual è la probabilità che:

a) *A non sia scelta;*
b) *A sia scelta una volta;*
c) *A sia scelta almeno una volta;*
d) *ogni bevanda sia scelta almeno una volta;*
e) *D, E ed F siano scelte almeno una volta*;
f) *esattamente tre bevande non siano scelte.*

12. (ILIA, 3.5) Una pompa idraulica di un grosso im pianto industriale è dotata di 7 filtri dello stesso tipo la cui manutenzione deve essere fatta gli ultimi tre giorni di ogni mese. Se la manutenzione di ognuno dei 7 filtri è assegnata in modo casuale ad ognuno dei tre giorni, calcolare:
a) *la probabilità che tutte le manutenzioni capitino in un solo giorno*;
b) *la probabilità che ad ogni giorno venga assegnata almeno una manutenzione*;
c) *la probabilità che agli ultimi due giorni siano assegnate almeno due manutenzioni.*

13. Agli studenti di una classe viene sottoposto un quesito che ha 5 risposte, una sola delle quali è corretta. Se uno studente è preparato è certo che risponderà esattamente; se invece uno studente è impreparato, la scelta della risposta sarà del tutto casuale. La frazione di studenti preparati nella classe è 60%. Qual è la probabilità che lo studente Aldo risponda esattamente (= evento A)? Qual'è la probabilità che Aldo sia preparato se risponde esattamente?

14. All'esame del corso di "Programmazione" il 70% degli studenti ha scritto il programma in Fortran e i restanti in C++. Per esperienza il professore sa che se un programma è in Fortran allora è corretto nel 73% dei casi, mentre se è in C++ allora è corretto solo nel 46% dei casi. Il professore sceglie a caso uno dei programmi compilati dagli studenti. Qual è la probabilità che il programma scelto sia compilato correttamente (= evento A)? Se il programma scelto è compilato correttamente, qual è la probabilità che esso sia in Fortran?

15. Una fabbrica produce valvole di sicurezza per caldaie a gas; la produzione giornaliera è di 10000 valvole. Si sa che una valvola, se in perfette condizioni, supera sempre il collaudo finale, mentre se è difettosa supera tale collaudo nel 5% dei casi. Si supponga che l'1% delle valvole prodotte sia difettoso. In teoria, quante valvole di un lotto giornaliero supereranno il collaudo? e, tra le valvole di un lotto giornaliero che superano il collaudo, qual'è la percentuale di quelle difettose?

16. Un pezzo viene costruito assemblando due componenti (A e B). ciascuno dei quali è scelto a caso da un lotto numeroso. Il 5% dei componenti del lotto A e il 6% dei componenti del lotto B è difettoso. Il pezzo assemblato risulterà difettoso se lo è almeno uno dei suoi due componenti. Qual'è la probabilità che un pezzo sia difettoso? Se un pezzo è difettoso, qual'è la probabilità che sia difettoso il suo componente A?

17. Ci sono 5 urne. L'urna i-esima ha "i" palline difettose e "*10-i*" palline non difettose. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina. Calcolare:
a) La probabilità di A = {*la pallina estratta è difettosa*};
b) *Sapendo che la pallina estratta è difettosa, la probabilità che sia stata estratta dall'urna i-esima.*

18. (ILIA, 3.2) I pezzi prodotti da una macchina utensile sono confezionati in pacchi che contengono 12 pezzi ciascuno contraddistinti dal numero di matricola. Nella confezione comprata dal signor Fessoni sono stati inseriti, tra i dodici pezzi, 3 pezzi difettosi. Prima di acquistare la scatola il signor Fessoni decide di estrarre a caso 2 pezzi insieme e di esaminarli. Deciderà di acquistare la confezione solo se nel campione da lui estratto non vi saranno pezzi difettosi.

a) *In quanti modi diversi possono essere estratti i due pezzi*?

b) *Quale è la probabilità che venga estratto almeno un pezzo difettoso*?

c) *Supponiamo che le estrazioni avvengano sequenzialmente e senza reimmissione. Se il primo pezzo estratto non è difettoso, quale è la probabilità che anche il secondo non lo sia*?

19. (ILIA, 3.4) Il commissario tecnico della nazionale di calcio può scegliere gli 11 giocatori della squadra da schierare in una partita tra 2 portieri, 8 difensori, 6 centrocampisti e 6 attaccanti. Si supponga che una squadra debba essere composta da un portiere, 3 difensori, 4 centrocampisti, e 3 attaccanti.
a) *In quanti modi diversi può formare la squadra il commissario tecnico*?
b) *Se dei 6 attaccanti due giocano nell'Inter, qual'è la probabilità che non capitino questi attaccanti nella squadra*?

20. (ILIA 3.15) Uno studente si trova ad affrontare un test per l'ammissione ad un corso di laurea che consiste in 50 domande con risposta a scelta multipla per ciascuna delle quali sono previste 6 risposte alternative. Se lo studente conosce la risposta, risponde correttamente, se non la conosce, cerca di indovinare la risposta scegliendo casualmente una delle 6 risposte a disposizione. Supponendo che la probabilità che lo studente conosca la risposta ad una domanda sia 40/50 e che la risposta a ciascuna domanda venga data indipendentemente da quella data nelle altre, calcolare:
a) *la probabilità che lo studente risponda correttamente a una domanda e la probabilità che risponda correttamente a tutte le 50 domande*;
b) *la probabilità che lo studente conosca realmente la risposta ad una domanda dato che ha risposto correttamente a quella domanda.*

21. Si consideri un gioco di carte che consiste nello scegliere 5 carte da un mazzo di 52. Il mazzo risulta composto da 4 semi differenti (cuori, quadri, fiori, picche) e ciascun seme da 13 tipi differenti (asso, i numeri dal due al 10, fante donna e re).

a) *Calcolare la probabilità di estrarre quattro carte dello stesso tipo*
b) *Dato che avete estratto quattro carte dello stesso tipo, calcolare la probabilità che le quattro carte siano quattro assi*
c) *Calcolare la probabilità di estrarre esattamente una doppia coppia, vale a dire una coppia di un tipo e un'altra coppia di un tipo diverso dalla precedente.*

22. Un processo produttivo produce componenti che possono presentare tre tipi di difetti A, B e C. La probabilità che venga prodotto un pezzo con tutti e tre i difetti è $P(A \cap B \cap C) = 0.1$. Le probabilità di ottenere pezzi con due dei tre difetti sono $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0.2$. Le probabilità di ottenere pezzi con uno dei tre difetti sono $P(A) = P(B) = P(C) = 0.4$. Si calcolino:

    a) *la probabilità di ottenere un pezzo con almeno un difetto;*
    b) *la probabilità di ottenere un pezzo senza difetti;*
    c) *la probabilità che su 10 pezzi tre siano esenti da difetti nell'ipotesi che i pezzi siano prodotti indipendentemente l'uno dall'altro.*

23. Vengono casualmente prelevati e utilizzati due pezzi di ricambio da un magazzino nel quale sono depositati 10 pezzi di cui 5 del fornitore A e 5 del fornitore B. Dovendo successivamente prelevare a caso altri due pezzi si decide di scegliere fra queste tre alternative:

    a) *utilizzarli subito se la probabilità che la nuova coppia di pezzi sia formata da un pezzo del fornitore A e da un pezzo del fornitore B è maggiore di 0.6;*
    b) *sottoporli a collaudo se tale probabilità è non maggiore di 0.6 e non inferiore a 0.3;*
    c) *procedere ad un nuovo acquisto se la probabilità è inferiore a 0.3. Quale delle tre alternative deve essere adottata?*

24. Una ditta che produce ami da pesca possiede due macchine una delle quali produce pezzi difettosi con una probabilità di 0.01 e l'altra di 0.05. La produzione viene sottoposta ad un controllo di qualità. si sceglie a caso una delle due macchine e si controllano 150 pezzi prodotti.

    a) *Calcolare la probabilità di osservare tre pezzi difettosi.*
    b) *Calcolare probabilità che sia stata scelta la prima macchina dato che si sono osservati tre pezzi difettosi.*

25. pezzi prodotti da una macchina utensile sono confezionati in pacchi che contengono 12 pezzi ciascuno contraddistinti dal numero di matricola. Nella confezione comprata dal signor Fessoni sono stati inseriti, tra i dodici pezzi, 3 pezzi difettosi. Prima di acquistare la scatola il signor Fessoni decide di estrarre a caso 2 pezzi insieme e di esaminarli. Deciderà di acquistare la confezione solo se nel campione da lui estratto non vi saranno pezzi difettosi. a) *In quanti modi diversi possono essere estratti i due pezzi?* b) *Quale è la probabilità che venga estratto almeno un pezzo difettoso?* c) *Supponiamo che le estrazioni avvengano sequenzialmente e senza reimmissione. Se il primo pezzo estratto non è difettoso, quale è la probabilità che anche il secondo non lo sia?*

Statistica Descrittiva & Soluzioni in R

- Caricare il dataset Agrimonia (.csv),link: https://zenodo.org/record/7563265.
- Calcolo delle statistiche descrittive della variabile $PM_{2.5}$ (media, varianza, std, kurtosi)
- Distribuzione empirica e boxplot della variabile $PM_{2.5}$