

ESERCITAZIONE STATISTICA

Lezione 11 - Statistica (Stima di ML)

Stima ML & Soluzioni in R

1. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale dalla popolazione con funzione di densità:

$$f_X(x; \theta) = \theta x^{-(\theta+1)}, \quad x > 1, \quad \theta > 0, \quad (1)$$

e sia \mathbf{x}_n un generico campione osservato.

- Determinare la funzione di verosimiglianza di θ e indicarne il nucleo.
- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ , $T_1(\mathbf{X}_n)$.
- Per il campione di $n = 3$ osservazioni $\mathbf{x}_3 = (2, 2, 3)$, calcolare la stima di massima verosimiglianza di θ e verificare quale, tra i valori $\theta_0 = 2$ e $\theta_1 = 3$ risulta più verosimile.
- Determinare la stima di massima verosimiglianza di $h(\theta) = \sqrt{\theta} + 1$.

2. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione casuale dalla popolazione con funzione di densità:

$$f_X(x; \theta) = \frac{2}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right) I_{[0, \theta]}(x), \quad \theta > 0. \quad (2)$$

- Determinare la funzione di verosimiglianza.
- Verificare che $E_\theta(X) = \frac{\theta}{3}$.

3. Si consideri un campione casuale di n osservazioni da una popolazione X con distribuzione di probabilità:

$$f_X(x, \theta) = \frac{1}{\theta^2} x \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad \theta > 0, \quad x > 0. \quad (3)$$

- Determinare la funzione di verosimiglianza.
- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ .
- Determinare l'espressione dell'informazione osservata di Fisher.

4. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale proveniente da una popolazione geometrica di parametro incognito θ , la cui funzione di massa di probabilità è:

$$f_X(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^{(x-1)}, \quad x = 1, 2, \dots; \quad \theta \in (0, 1) \quad (4)$$

- Determinare la funzione di verosimiglianza di θ associata a un generico campione osservato.
- Determinare la stima di massima verosimiglianza di θ .
- In un campione di $n = 5$ osservazioni, si è rilevato che $\mathbf{x}_5 = \{3, 5, 1, 2, 4\}$. Utilizzando la stima di massima verosimiglianza di θ , determinare la probabilità che la v.a. X assuma valori maggiori di 3.