

# ESERCITAZIONE STATISTICA

## Lezione 11 - Statistica (Stima di ML)

### Stima ML & Soluzioni in R

1. Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione casuale dalla popolazione con funzione di densità:

$$f_X(x; \theta) = \theta x^{-(\theta+1)}, \quad x > 1, \quad \theta > 0, \quad (1)$$

e sia  $\mathbf{x}_n$  un generico campione osservato.

- Determinare la funzione di verosimiglianza di  $\theta$  e indicarne il nucleo.
- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ ,  $T_1(\mathbf{X}_n)$ .
- Per il campione di  $n = 3$  osservazioni  $x_3 = (2, 2, 3)$ , calcolare la stima di massima verosimiglianza di  $\theta$  e verificare quale, tra i valori  $\theta_0 = 2$  e  $\theta_1 = 3$  risulta più verosimile.
- Determinare la stima di massima verosimiglianza di  $h(\theta) = \sqrt{\theta} + 1$ .

2. Sia  $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$  un campione casuale dalla popolazione con funzione di densità:

$$f_X(x; \theta) = \frac{2}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right) I_{[0, \theta]}(x), \quad \theta > 0. \quad (2)$$

- Determinare la funzione di verosimiglianza.
- Verificare che  $E_\theta(X) = \frac{\theta}{3}$ .

3. Si consideri un campione casuale di  $n$  osservazioni da una popolazione  $X$  con distribuzione di probabilità:

$$f_X(x, \theta) = \frac{1}{\theta^2} x \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad \theta > 0, \quad x > 0. \quad (3)$$

- Determinare la funzione di verosimiglianza.
- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$ .
- Determinare l'espressione dell'informazione osservata di Fisher.

4. Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione casuale proveniente da una popolazione geometrica di parametro incognito  $\theta$ , la cui funzione di massa di probabilità è:

$$f_X(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^{(x-1)}, \quad x = 1, 2, \dots; \quad \theta \in (0, 1) \quad (4)$$

- Determinare la funzione di verosimiglianza di  $\theta$  associata a un generico campione osservato.
- Determinare la stima di massima verosimiglianza di  $\theta$ .
- In un campione di  $n = 5$  osservazioni, si è rilevato che  $x = \{3, 5, 1, 2, 4\}$ . Utilizzando la stima di massima verosimiglianza di  $\theta$ , determinare la probabilità che la v.a.  $X$  assuma valori maggiori di 3.