Clase 4: Inferencia Estadística

Justo Andrés Manrique Urbina

12 de septiembre de 2019

1. Parte 1

Sea $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y que:

$$\forall t : \{x : T_2(x) = t\} \in \{x : T_1(x) = t_1\}, \exists t_1.$$

Una definición equivalente es:

$$T_2(x) = T_2(y) \to T_1(x) = T_1(y).$$

Otra definición equivalente es:

$$T_1 = h(T_2).$$

1.1. 1 implica 2

$$T_2(x) = T_2(y).$$

Sea $t = T_2(x) = T_2(y)$

$$\to x \in \{z : T_2(z) = t\} \in \{z : T_1(z) = t_1\}, \exists t_1.$$

$$\to y \in \{z : T_2(z) = t\} \in \{z : T_1(z) = t_1\}, \exists t_1$$

1.2. 3 implica 2

$$T_2(x) = T_2(y).$$

$$\to h(T_2(x)) = h(T_2(y)).$$

$$\to T_1(x) = T_2(y).$$

1.3. 2 implica 3

$$t \in \mathbb{R}_{T_2}.$$
$$\to \exists x_0 tq T_2(x_0) = t.$$
$$h(t) = T_1(x_0).$$

Notemos que si existe $y_9 \neq x_0$ tal que $T_2(x_0) = t$, entonces se tiene que:

$$T_1(X_0) = T_2(y_0).$$
$$h(t) = T_1(X_0) = T_2(y_0).$$

2. Estadística suficiente y mínima

Definition 1. *T es una estadística suficiente y mínima si resume tanto o más que cualquier otra estadística suficiente.*

Observación: Si T es suficiente y mínima y T_2 es suficiente, entonces se cumple que:

- $$\forall t : \{x : T_2(x) = T\} \in \{x : T(X) = T_x\}, \exists t_1.$$
- $$T_2(x) = T_2(y) \to T(x) = T(y).$$
- $$\exists h : T(x) = h((T_{(x)}))$$

Theorem 1. *T es una estadística suficiente y mínima si y solo si se cumple que:*

$$\frac{f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(z)}{f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(y)}.$$

esto es independiente de θ.

3. Ejemplo

Sea
$$X \sim \text{doble exponencial}(\theta).$$
y su función de densidad está dada por:
$$f_{(x)} = \frac{1}{2}\theta e^{-\theta|x|}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

La función conjunta de $f_c(x)$ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ está dada por:

$$(\frac{1}{2})^n \theta^n e^{-\theta \sum_{j=1}^{n} |X_j|}.$$

Para hallar si la estadística es suficiente y mínima entonces utilizamos el cociente:

$$\frac{f_c(x)}{f_c(y)} = e^{-\theta(\sum |x_j| - \sum |y_j|)}.$$

Si ambos son iguales, entonces es independiente de θ.

4. Ejemplo

Sea

$$X \sim N(0; \sigma^2); \theta = \sigma^2 > 0.$$

Entonces la función conjunta es:

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum X_j^2}.$$

Si se utiliza el teorema, entonces se tiene:

$$\frac{f_c(x)}{f_c(y)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum X_j^2 - \sum Y_j^2)}.$$

Si ambos son iguales, entonces es independiente de σ^2.