Clase 3: Inferencia Estadística

Justo Andrés Manrique Urbina

5 de septiembre de 2019

1. Suficiencia estadística

Suficiencia estadística significa que $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n|T=t}$ sea independiente de θ. Sin embargo, probar que una estadística es suficiente es difícil por lo que existen otras formas de identificar que determinada estadística es suficiente. Esto es el criterio de factorización de Neyman. Este criterio es:

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(X_1,X_2,\ldots,X_n) = h({}_1,{}_2,\ldots,{}_n) * l(T(X_1,T(X_2,\ldots,T(X_n),\theta))).$$

1.1. Ejemplo

Sea $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$ y que $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ una muestra aleatoria de X. Se tiene entonces que:

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \frac{1}{x_1!\ldots x_n!}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}e^{-n\lambda}, x_i \in \mathbb{N}.$$

El primer término de la igualdad de la derecha es $h(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ y

$$l(T(X_1,T(X_2,\ldots,T(X_n),\theta))) = \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}e^{-n\lambda}.$$

. Por lo tanto, $T = \sum_{i=1}^{j} x_i$ es una estadística suficiente para λ.

Propiedad: Si T_1 es una estadística suficiente para θ y T_1 es función de $T_2 \rightarrow T_2$ es una estadística suficiente.

1.2. Ejemplo

Sea $X \sim U(0,\theta), \theta > 0$. Se tiene que:

$$f_X(X) = \frac{1}{\theta}, 0 < x < \theta; 0 \text{ caso contrario.}$$

Si $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ es una muestra aleatoria de X y se tiene que la función conjunta de las n variables X es

$$(\frac{1}{\theta})^n.$$

Observación:

$$0 < X_i < \theta, i = 1, \ldots, n.$$

Definamos $X_{(1)} = min(X_{1,\ldots,X_n})$ y $X_{(n)} = max(X_1, X_2, \ldots, X_n))$. Entonces se tiene que:

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{1}{\theta_n}, 0 < X_{(1)} \text{ y } X_{(n)} < \theta \tag{1}$$

Por otra parte, de definen las funciones indicadoras $1(x_{(1)})$ y $1(X_{(n)})$. Por lo tanto, reemplazando en (1) se tiene que:

$$f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1(X_{(1)})1(X_{(n)})\frac{1}{\theta^n}, X_i \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $T = maximo(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una estadística suficiente de θ.

Observación: El siguiente ejemplo es un razonamiento errado. Sea la función conjunta la siguiente:

$$\frac{1}{\sigma^n}.$$

$$\frac{1}{\bar{X}}\frac{\bar{X}}{\sigma^n}, 0 < X_i < \sigma.$$

Dado el dominio de la ecuación anterior depende del parámetro, entonces no es una estadística suficiente.

1.3. Más ejemplos

Sea $X \sim N(0, \sigma^2), \sigma^2 > 0$. Entonces se tiene que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aletaoria de X. Por lo tanto la función conjunta es:

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}})^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sigma^2}}, X_i \in \mathbb{R}.$$

Se puede aplicar la factorización de neyman en dicha función, y se observa que es una estadística suficiente.

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ es una estadística suficiente para } \theta.$$

Eso se debe a que la expresión $\sum_{i=1}^n x_i^2$ se encuentra en la función $l(\ldots)$.

1.4. Un ejemplo más

Sea $X \sim N(\mu; \sigma_o^2), \mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma_o^2 \in \mathbb{R}$ conocido. Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aletaoria de X. La función conjunta es:

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \frac{1}{\sigma_o^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_o^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}, X_i \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\mu + \mu^2).$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n X_i + n\mu^2.$$

Reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene en la función conjunta:

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \sigma_o^{-n} e^{\phi \sum_i^n X_i^2} e^{-\phi 2\mu \sum_i^n X_i} e^{\phi n \mu^2}, \phi = -\frac{1}{2\sigma_o^2}.$$

Se tiene entonces que $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \sigma_o^{-n} e^{\phi \sum_i^n X_i^2}$ es la regla de correspondencia y el resto es la función $l(\ldots)$. Por lo tanto, $\sum_{j=1}^n X_j$ es una estadística suficiente de μ. Asimismo, la estadística $\sum_{j=1}^n = X_j^2$ es suficiente porque es función de la anterior.

2. Familia Exponencial

Definamos lo siguiente:

$$f(X) = h(X)c(\Theta)e^{\sum_{i=1}^d w_i(\Theta)t_i(x)}.$$

dónde $\tilde{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k, d \leq k$.

2.1. Ejemplo

Definamos $X \sim exp(\theta)$. Entonces:

$$f(X) = \theta e^{-\theta X}, x > 0, \theta > 0.$$

Entonces se tiene que $k = 1, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^+$. También se tiene que $h(x) = 1, x > 0$, $c(\theta) = \theta, \theta > 0$, $d = 1$,$w_1(\theta) = \theta, \theta > 0$,$t_1(\theta) = -x, x > 0$.

Theorem 1. *Sea $X \sim FE$, entonces*

$$\sum_{i=1}^n t_1(x_i), \ldots, \sum_{i=1}^n t_d(X_i).$$

es una estadística suficiente para $\tilde{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$.

2.2. Ejemplo

Sea $X \sim N(\mu;\sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

De $(x-\mu)^2 = x^2 - 2\mu x + \mu^2$. Entonces se tiene que:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} X^2 + \frac{1}{2\sigma^2} 2\mu x - \frac{1}{2\sigma^2}\mu^2.$$

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e \frac{-\mu^2}{2\sigma^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2} X - \frac{1}{2\sigma^2} X^2}, X \in \mathbb{R}.$$

dónde

$$w_1(\mu,\sigma^2) = \frac{\mu}{\sigma^2}, t_1(X) = X.$$

$$w_2(\mu,\sigma^2), t_2(X) = X^2.$$

$$h(X) = 1.$$

2.3. Ejercicio

Sea $X \sim N(5,\sigma^2), \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$. Validar si:

- Sea $T_1 = \sum_{j=1}^{n} (X_j - 5)^2$ una estadística suficiente para θ. Sea $T_2 = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 - 10X_j)$.

Solución: Verificar que T_1 es una función de T_2

$$T_1 = \sum_{1}^{n} (X_j - 5)^2 = \sum_{i}^{n} (X_j - 10X_j + 25).$$

$$= \sum_{1}^{n} (X_j^2 - 10X_j) + 25n.$$

$$T_1 = T_2 + 25n.$$

$$T_1 = g(T_2).$$

- Sea $T_2 = \sum_{1}^{n} (X_j - 10X_j)$ una estadística suficiente para θ y $T_{1=\sum_1^n (X_{j-10})^2}$. Demostrar que T_1 también es suficiente.

Solución: Se puede verificar que T_2 es función de T_1.

- Si T_1 es una estadística suficiente para θ y T_2 es una estadística tal que $T_2 = g(T_1)$, tal que $g(.)$ tenga inversa. Demuestre que T_2 también es suficiente.

Solución:

$$T_2 = g(T_1) \to g^{-1}(T_2) = T_1.$$

$$\to T_1 = g^{-1}(T_2.$$

$$T_1 \text{es una función de } T_2 \to T_2 \text{ también es suficiente.}$$

Definition 1. *Sea $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una estadística*

$$\{T = t\} = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{R} : T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = t\}.$$

$\{T = t\}$ es una familia de todos los valores muestreados $\tilde{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tales que la estadística T los resume en el valor t.

Dadas dos estadísticas T_1 y T_2 diremos que T_1 resume tanto como T_2 si

$$\forall t \in \mathbb{R}_T : \{T_2 = t\} \subset \{T_1 = t_1\} \text{ para algún } t_1 \in T_1.$$

Ejemplo: Un parámetro T_1 resume tanto o más que T_2 si:

$$T_1 = |X_1 + X_2| = 0.$$

$$T_2 = X_1 + X_2 = 0.$$

$$\{X_1 + X_2 = 0\} \subset \{|X_1 + X_2| = 0\}.$$