Clase 10 - Inferencia Estadística

Justo Andrés Manrique Urbina

24 de octubre de 2019

1. Propiedad de Invarianza

Si $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ; entonces, el estimador de máxima verosimilitud de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$.

1.1. Ejemplo

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; entonces los estimadores de máxima verosimilitud son $\hat{\mu} = \bar{X}$ y $\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2}{n}$. Entonces

- Hallar $\hat{\theta}$ por máxima verosimlitud. **Solución:** $\sigma = \sqrt{\sigma^2 = g(\sigma^2)}$. Entonces por propiedad de invarianza, $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2}{n}}$.

Se tiene el coeficiente de variación igual a $\frac{\sigma}{\mu}$. Entonces, por la propiedad de invarianza, el estimador de máxima verosimilitud del coeficiente de variación es:

$$\hat{CV} = \frac{\hat{\sigma}}{\mu} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\mu}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2}}{\bar{X}}.$$

1.2. Ejemplo

Si X $P(\lambda)$, entonces hallar el estimador de máxima verosímilitud de $p = P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$$

Luego, por la propiedad de invarianza, el estimador de máxima verosímilitud de $p = e^{-\hat{\lambda}} = g(\hat{\lambda}) = e^{-\bar{X}}$.

1.3. Ejemplo

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $p = P(a \leq X \leq b)$, dónde a y b son constantes. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de p.

Recordatorio: Tenemos que:

$$Z = \frac{X-\mu}{2} \sim N(0,1).$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_x(b) - F_x(a).$$

$$F_x(X) = F_Z(\frac{X-\mu}{\sigma}).$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$p = P(a \leq X \leq b).$$

$$= F_x(b) - F_x(a).$$

$$= F_z(\frac{b-\mu}{\sigma}) - F_z(\frac{a-\mu}{\sigma}) = g(\mu, \sigma^2).$$

$$\hat{p} = F_z(\frac{b-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) - F_z(\frac{a-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) = g(\hat{\mu}, \hat{\sigma}).$$

2. Distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud

2.1. Caso uniparamétrico

Asumiendo condiciones de regularidad, se tiene que:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \to_{distribución} N(0, I^{-1}(\theta)).$$

Si n es suficientemente grande, se tiene que:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim_{aprox} N(0, I^{-1}(\theta)).$$

$$\hat{\theta} \sim_{aprox} N(\theta, \frac{1}{nI(\theta)}).$$

2.1.1. Ejemplo

Se tiene que $X \sim B(\theta, 1)$. La función de densidad es:

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, 0 < X < 1, \theta > 0.$$

$$Ln(f(x)) = Ln(\theta) + (\theta - 1)Ln(x).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{-1}{\theta^2}.$$

Luego, la información de fisher es $\frac{1}{\theta^2}$.

Por otro lado, se tiene que:

$$l(\theta) = Ln(L(\theta)).$$

$$= nLn(\theta) + (\theta - 1)\sum_{j=1}^{n} Ln(X_j).$$

$$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{j=1}^{n} Ln(X_j) = 0.$$

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} Ln(X_j)}.$$

La distribución asintótica es:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \to_D N(0, \theta^2).$$

2.1.2. Ejemplo

Supóngase que $n = 36$ y hállese, aproximadamente

$$P(\frac{\hat{\theta}}{1{,}196} \leq \theta \leq \frac{\hat{\theta}}{0{,}804}).$$

Solución: $n = 36$:

$$6(\hat{\theta}) - \theta \sim N(0, \theta^2).$$

$$(\hat{\theta}) \sim_{aprox} N(\theta, \frac{\theta^2}{36}).$$

Se obtiene la variable estándar:

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\frac{\hat{\theta}}{36}}} \sim_{aprox} N(0, 1).$$

3. Versión a partir de la Información de Fisher observada

Sea $H(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta)$. Entonces $-H(\hat{\theta})$ se le denomina la información de Fisher observada.

Entonces:

$$\sqrt{-H(\hat{\theta})}(\hat{\theta} - \theta) \to_D N(0, 1).$$

3.1. Ejemplo

Si $X \sim B(\theta, 1)$, entonces:

$$H(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta).$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(Ln(f(X_j))) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{-1}{\theta^2}) = \frac{-n}{\theta^2}.$$

Entonces, tenemos que:

$$\sqrt{\frac{n}{\hat{\theta}^2}}(\hat{\theta} - \theta) \sim_{aprox} N(0, 1).$$

$$\sqrt{n}(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\theta}}) \sim_{aprox} N(0, 1).$$

En particular:

$$P(\frac{\hat{\theta}}{1{,}196} \leq \theta \leq \frac{\hat{\theta}}{0{,}804}).$$

$$P(0{,}804\theta \leq \hat{\theta} \leq 1{,}196\theta).$$

$$F_z(\frac{6(1{,}196\theta - \theta)}{1{,}196\theta}) - F_z(\frac{6(0{,}804\theta - \theta)}{0{,}804\theta}).$$

4. Caso Multiparamétrico

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k.$$

$$I(\theta) = -E(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \theta_j} Ln(f(x, \theta))).$$

Matriz cuadrada de orden k.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

$$I(\mu, \sigma^2) == \begin{bmatrix} -E(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} Ln(f(x,\theta))) & -E(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2 \theta \mu} Ln(f(x,\theta))) \\ -E(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2 \mu} Ln(f(x,\theta))) & -E(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} Lnf(x,\theta)) \end{bmatrix}$$

Distribución asintótica a partir de la matriz de la información de Fiser

$$I(\mu, \sigma^2) == \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow_D N(0, I^{-1}(\theta)).$$