Lista de ejercicios
2

Justo Andrés Manrique Urbina
20091107

ejercicio 16:

a) Determine un conjunto que describa el espacio muestral asociado Ω.
obs: el precio de B siempre es diferente al de A.

Resolución:

· el conjunto es el siguiente:

Ω: { {1;2};{1;3};{1;4};{2;1};{2;3};{2;4};{3;1};{3;2};{3;4};
{4;1};{4;2};{4;3}}

* obs: cada conjunto se define como {A, B}.

b) Considere el espacio muestral anterior y la variable aleatoria X definida como el gasto total al comprar una unidad de cada bien. Determine el rango y el modelo probabilístico de X. Considere la probabilidad clásica definida en los eventos de Ω.

Resolución:

· rango de la v.a. X:

$$X(w) \left\{ w_1 + w_2, \ \{w_1 \ w_2\} \in \Omega \right.$$

el rango de la variable es [3; 7]

modelo probabilístico:

$P(3) : \#3 / \#\Omega : 2/12 : 1/6$

$P(4) : \#4 / \#\Omega : 2/12 : 1/6$

$P(5) : \#5 / \#\Omega : 4/12 : 1/3$

$P(6) : \#6 / \#\Omega : 2/12 : 1/6$

$P(7) : \#7 / \#\Omega : 2/12 : 1/6$

ejercicio 5

a) Demuestre que $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) \leq P(A_n) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$.

obs: $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

a.1) Primero demostraremos que $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) \leq P(A_n)$

- Dado que $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n$, entonces podemos escribir A_n como lo siguiente:

  $A_n : \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uplus (A_n \cap (\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)^c)$

- Luego, la probabilidad de A_n se puede escribir como:

  $P(A_n) : P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) + P(A_n \cap (\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)^c)$

- La expresión $P(A_n \cap (\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)^c)$ es siempre mayor o igual a 0, por lo tanto se concluye que $P(A_n) \geq P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$ //

a.2) De forma análoga, demostraremos que $P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geq P(A_n)$

- Dado que $A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, entonces podemos escribir $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ como lo siguiente:

  $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k : A_n \uplus (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \cap A_n^c)$

- Luego, la probabilidad de $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ se puede escribir como:

  $P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) : P(A_n) + P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \cap A_n^c)$

- La expresión $P(A_n^c)$ es siempre mayor o igual a 0, por lo tanto se concluye que $P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geq P(A_n)$ //

Dado a.1) y a.2), podemos concluir que $P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geq P(A_n) \geq P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$ //

b) Si $\lim\sup A_n = \lim\inf A_n$, demuestre que $P(\lim A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

- La única forma de que $\lim\sup A_n$ $(P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k))$ sea igual a $\lim\inf A_n$ $(P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k))$ es que $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$
- Entonces, como $P(\lim\sup A_n)$ es $\lim_{n\to\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$ y $P(\lim\inf A_n)$ es $\lim_{n\to\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$ estos se escriben como $\lim_{n\to\infty} A_n$.
- Dado que $P(\lim\sup A_n) P(\lim\inf A_n) = P(\lim A_n)$*, $P(\lim A_n)$ es $\lim_{n\to\infty} A_n$ //

* Dado que $\lim\sup A_n = \lim\inf A_n = \lim A_n$, entonces sus probabilidades son iguales.