Clase 5: Inferencia Estadística

Justo Andrés Manrique Urbina

19 de septiembre de 2019

1. Ejemplo

$$X \sim U(0;\theta).$$

Definamos $f_{\tilde{X}} = \frac{1}{\theta^n}, X_{(n)} \leq \theta; 0, X_{(n)} > 0$

$$\frac{f_{\tilde{X}}(X)}{f_{\tilde{X}}}(Y) = 1; Y_{(n)} \leq \theta, X_{(n)} \leq \theta \text{ o } 0; Y_{(n)} \leq \theta, X_{(n)} > \theta.$$

$$X_{(n)} = Y_{(n)} \rightarrow \frac{f_{\tilde{X}}(X)}{f_{\tilde{X}}(Y)} = 1, X_{(n)} \leq \theta.$$

Sea $X_{(n)} < Y_{(n)}$:

$$\rightarrow Y_{(n)} \leq \theta \rightarrow X_{(n)} \leq \theta \rightarrow \frac{f_{\tilde{X}}(X)}{f_{\tilde{X}}(Y) = 1, Y_{(n)}} \leq \theta.$$

Por lo tanto, no se puede afirmar que $X_{(n)}$ sea minimal.

2. Ejemplo

$$X \sim P(\lambda), \lambda > 0.$$

$$f_{\tilde{X}}(\tilde{X}) = \frac{1}{x_1!x_2!\ldots x_n!}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} X_i} e^{-n\lambda}.$$

$$\frac{f_{\tilde{X}}(\tilde{X})}{f_{\tilde{X}}(\tilde{Y})} = \frac{y_1!y_2!\ldots y_n!}{x_1!x_2!\ldots x_n!}\lambda^{\sum x_i - \sum y_i}.$$

Definition 1. ***Completitud:*** *La familia de distribuciones $\{f(x;\theta), \theta \in \Theta\}$ es completa si*

$$X \sim f(x;\theta), \theta \in \Theta.$$

$$E(U(X)) = 0 \rightarrow U(X) = 0, \ c.s..$$

$$P(U(X) = 0) = 1.$$

3. Ejemplo

La familia de distribuciones binomial es completa:

$$f(x,\theta) = \binom{N}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n.$$

Si $X \sim f(x,\theta)$:

$$E(U(X)) = \sum_{x=0}^{n} U(X)\binom{N}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}.$$

Luego, $E(U(X)) = 0, \forall\theta \in (0;1)$

$$U(0)(1-\theta)^{n-1} + U(1)n\theta(1-\theta)^{n-1} + \ldots + I(n)\theta^n.$$

Este es un polinomio en θ de grado $\leq n$. Sin embargo existirían infinitas raíces si $\theta \in (0,1)$, por lo que necesariamente $U(X) = 0$.

Definition 2. ***Completitud:*** *Una estadística T es completa si su familia de distribuciones es completa.*

Theorem 1. *En la familia exponencial, si Θ es un conjunto abierto, entonces las estadísticas suficientes son completas.*

4. Ejemplo

$$X \sim \exp(\theta), \theta > 0; \Theta \in \mathbb{R}.$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_j \text{ es suficiente y} \Theta = \mathbb{R}^+ \text{ es un conjunto abierto.}$$

Por lo tanto T es completa.