Lista de ejercicios 1 - Fundamentos de Probabilidad

5 de abril de 2019

Justo Andrés Manrique Urbina - 20091107

1. Pregunta 5.a.

Demuestre que $A_1 \in \sigma(C), A_2 \in \sigma(C), ...$
Demostración:
Supongamos $A_i \in C, i = 1, 2, ...$
Recordemos que, por definición 1.2. del texto de la clase, $C \subset \sigma(C)$
Por lo tanto, $A_i \in C \subset \sigma(C), i = 1, 2, ...$
Finalmente, $A_i \in \sigma(C), i = 1, 2, ...$

2. Pregunta 5.b.

Demuestre que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$.
Demostración:
Supongamos que $A_i \in \sigma(C), i = 1, 2, ...,$
Por definición de σ-álgebra (definición 1.1 del texto de la clase), toda σ-álgebra es cerrada respecto a reuniones infinitas enumerables.
Dada la suposición y la definición de σ-álgebra, se concluye que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$.

3. Pregunta 16.a.

Demuestre que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ-álgebra en Ω_1.
Demostración:
Supongamos que $\sigma(C)$ es una σ-álgebra en Ω_2. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

- $\Omega_2 \in \sigma(C)$

- $\forall A \in \sigma(C) : A^c \in \sigma(C)$
- $\forall A_1, A_2, ... \in \sigma(C) : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$

Para demostrar que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ-álgebra en Ω_1, verificaremos si dicha imagen inversa cumple los 3 axiomas de la definición de σ-álgebra en Ω_1.

Respecto al primer axioma, recordemos que $\Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2)$ y que $\Omega_2 \in \sigma(C)$. Por lo tanto, por definición, $\Omega_1 \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el primer axioma.

Respecto al segundo axioma, recordemos lo siguiente:

- Por definición de σ-álgebra, $A^c \in \sigma(C)$.

, y si $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\sigma(C))$, entonces, por propiedad, $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el segundo axioma.

Respecto al tercer axioma, recordemos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$ y que si $f^{-1}(A_j) \in f^{-1}(A), j = 1, 2, ...$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el tercer axioma.

Dado que se cumplen los tres axiomas en Ω_1 se concluye que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ-álgebra en Ω_1.

4. Pregunta 16.b.

Demuestre que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

Demostración:

Supongamos $\sigma(C)$ es una σ-álgebra de Ω_2 generada en C. Por lo demostrado en la pregunta anterior, $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ-álgebra en Ω_1.

Por definición, la σ-álgebra generada en C es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a C.

Por lo tanto, dado que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ-álgebra generada en Ω_1, esta debería ser generada por $f^{-1}(C)$. Por la definición anterior, dicha σ-álgebra entonces es la intersección de todas las σ-álgebras de Ω_1 que contienen a $f^{-1}(C)$.

Dado lo indicado anteriormente, se concluye que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

5. Pregunta 16.c.

Demuestre que $\sigma(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

Demostración:

Supongamos existe $f^{-1}(C)$ en Ω_1. Por definición de σ-álgebra generada, $f^{-1}(C) \subset \sigma(f^{-1}(C))$.

Por lo demostrado en las preguntas anteriores, $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ-álgebra en Ω_1 y $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

Dado que, por definición, $\sigma(f^{-1}(C))$ es la σ-álgebra generada es la más pequeña que contiene a $f^{-1}(C)$, entonces concluimos que $\sigma(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.