ESCUELA DE POSGRADO — MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA — PUCP

INFERENCIA ESTADÍSTICA
Lista de ejercicios 1
2019-2

Profesor: José Flores D.
Fecha de entrega: 19 de setiembre.

Ejercicio 1

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de la variable aleatoria $X \sim g(p)$, con p (desconocido).

a) Demuestre que $\hat{p} = 1/\bar{X}$ es un estimador consistente y suficente de p.

b) Sea $\theta = P(X > 2)$. Averigüe si $\hat{\theta} = (\frac{\bar{X}-1}{\bar{X}})^2$ es un estimador consistente.

Ejercicio 2

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de la variable aleatoria $X \sim B(\theta;\, 1)$, donde θ (desconocido).

a) Estudie la consistencia fuerte de $\hat{\theta} = \bar{X}/(1-\bar{X})$.

b) Sea $\beta = P(X > 1/2)$. Estudie la consistencia fuerte de $1 - \frac{1}{2^{\hat{\beta}}}$.

c) Si $Y = -Ln(X)$, demuestre que $Y \sim exp(\theta)$

d) Si $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Ln(X_j)$, demuestre que $T \sim G(n;\, \theta)$ y determine $E(T^{-1})$.

e) Si T es como en la parte anterior, demuestre que T es un estimador suficiente de θ.

f) Determine un estimador suficiente e insesgado de θ. Use los resultados de las dos últimas partes.

Ejercicio 3

Sea $X \sim G(\alpha;\, \beta)$ y considere $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{M_2 - \bar{X}^2}$.

a) Halle el valor casi seguro de $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{X}$.

b) Halle el valor casi seguro de $\lim\limits_{n\to\infty} M_2$, donde $M_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^k$: el k-ésimo momento muestral, $k \in \mathbb{N}^+$.

c) ¿Es $\hat{\beta}$ un estimador consistente?

d) Si $\alpha = \alpha_0$ (conocido) y $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_j$, demuestre que $T \sim G(n\alpha_0;\, \theta)$ y determine $E(T^{-1})$.

e) Si $\alpha = \alpha_0$ (conocido) y T es como en la parte anterior, demuestre que T es un estimador suficiente de θ.

f) $\alpha = \alpha_0$ (conocido), determine un estimador suficiente e insesgado de θ. Use los resultados de las dos últimas partes.

Ejercicio 4
En un estudio de riesgo en los préstamos personales, una entidad financiera asume que el tiempo, en meses, hasta que un cliente deje de pagar su crédito es una variable aleatoria $X \sim W(2;\, \theta)$. Como estimador de θ, que será obtenido a partir de una muestra aleatoria de tamaño n de X, se considera a $\hat{\theta} = (4 - \pi + n\pi)/(4n\,\overline{X}^{\,2})$.

a) Determine si este estimador es consistente.

b) Sea p la proporción de clientes que dejan de pagar su crédito después de 12 meses de otorgado. Si como estimador de p se considera a $\hat{p} = e^{-144\,\hat{\theta}}$, ¿es este estimador consistente?

c) Determine una estadística suficiente.

d) Determine un estimador que sea suficiente e insesgado.

Ejercicio 5 (La información de Fisher)
Sea X una variable aleatoria con modelo probabilístico $f_{X}(x;\, \theta)$, con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. La Información de Fisher está definida por

$$I(\theta) = -\,E\left(\frac{\partial^2 Ln(f_{X}(X;\, \theta))}{\partial \theta^2}\right).$$

Para cada muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de X, sea

$$H(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 Ln(f_{X}(X_j;\, \theta))}{\partial \theta^2}.$$

Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} -H(\theta) = I(\theta)$, c.s.

Ejercicio 6
Si $X \sim N(\mu;\, 1)$. Determine una estadística suficiente para μ. Use el Teorema de Factorización. Luego determine una función de esta estadística que sea consistente.

Ejercicio 7
Si $X \sim N(0;\, \sigma^2)$. Determine, justificando debidamente, una estadística suficiente para σ^2. Use el Teorema de Factorización. Luego determine un estimador que sea función de esta estadística y que resulte consistente e insesgado.

Ejercicio 8
Si $X \sim LogN(\mu;\, 1)$. Determine, justificando debidamente, una estadística suficiente para μ. De ser posible, determine una función de esta estadística que sea consistente.

Ejercicio 9
Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la variable aleatoria X, con distribución $\exp(\beta)$, con $\beta > 0$ (desconocido). Estudie la consistencia de $\hat{\beta}_1 = \dfrac{1}{\bar{X}}$, $\hat{\beta}_2 = \dfrac{n+1}{n\bar{X}}$ y $\hat{\beta}_3 = \sqrt{\dfrac{2}{M_2}}$, donde $M_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2$.

Ejercicio 10
Para el ingreso mensual, X (en miles de soles), de los trabajadores en cierto sector, se propone el modelo probabilístico de Pareto siguiente:

$$f_X(x) = \frac{\theta\,(0,75)^{\theta}}{x^{\theta+1}}\ ,\ x > 0,75,$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro por estimar a partir de una muestra aleatoria de tamaño n de X.

a) Determine una estadística suficiente para θ. Use el Teorema de Factorización.

b) Determine $\frac{\partial}{\partial\theta}(E(\sum\limits_{j=1}^{n} X_j\ |T = 5)$, donde T es la estadística hallada en a y $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de X.

Ejercicio 11
En el ejercicio 10, determine el límite casi seguro de $\overline{Ln(X)}$.

Ejercicio 12
Si $X \sim LogN(0;\, \sigma^2)$.

a) Determine una estadística suficiente para σ^2. Use el Teorema de Factorización.

b) Obtenga una función de la estadística anterior que sea un estimador consistente.

c) Determine $\frac{\partial}{\partial\sigma^2}(E(\sum\limits_{j=1}^{n} X_j\ |T = 5)$, donde T es la estadística hallada en a y $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de X.

Ejercicio 13
Si $X \sim G(\alpha;\, 2)$.

a) Determine una estadística suficiente para α. Use el Teorema de Factorización.

b) Obtenga, de ser posible, una función de la estadística anterior que sea un estimador consistente.

c) Determine $\frac{\partial}{\partial\alpha}(E(\sum\limits_{j=1}^{n} X_j\ |T = 5)$, donde T es la estadística hallada en a y $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de X.

Ejercicio 14
Si $X \sim G(2;\, \beta)$.

a) Determine una estadística suficiente para β. Use el Teorema de Factorización.

b) Obtenga una función de la estadística anterior que sea un estimador consistente.

c) Determine $\frac{\partial}{\partial\beta}(E(\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2\ |T = 5)$, donde T es la estadística hallada en a y $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de X.

Ejercicio 15
Si $X \sim W(\alpha;\, 2)$.

a) Determine una estadística suficiente para α. Use el Teorema de Factorización.

b) Determine $\frac{\partial}{\partial\alpha}(E(\sum_{j=1}^{n} X_j \mid T=5)$, donde T es la estadística hallada en a y $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de X.

Ejercicio 16

Si $X \sim W(2;\, \beta)$.

a) Determine una estadística suficiente para β. Use el Teorema de Factorización.

b) Obtenga una función de la estadística anterior que sea un estimador consistente.

c) Determine $\frac{\partial}{\partial\beta}(E(\sum_{j=1}^{n} X_j \mid T=5)$, donde T es la estadística hallada en a y $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de X.

Ejercicio 17

Sean $X \sim b(1;\, p)$ y $T = \sum_{j=1}^{n} X_j$, con $X_1,\, \ldots\,,\, X_n$ una muestra aleatoria de X.

a) Use la función generadora de momentos para demostrar que $T \sim b(n;\, p)$. Luego determine $f_{_T}(t),\ t = 0,\, 1,\, \ldots$

b) Determine $f_{X_1,\,\ldots\,,\,X_n\,|T\,=\,t}$ el modelo condicional de $X_1,\, \ldots\,,\, X_n$ dado $T = t$. Concluya, a partir de este, que T es una estadística suficiente. Proceda como en un ejemplo de clase.

c) Demuestre que T es una estadística suficiente, a partir del Teorema de Factorización.

Ejercicio 18

Sean $X \sim g(p)$ y $T = \sum_{j=1}^{n} X_j$, con $X_1,\, \ldots\,,\, X_n$ una muestra aleatoria de X.

a) Use la función generadora de momentos para demostrar que $T \sim Ps(n;\, p)$. Luego determine $f_{_T}(t),\ t = 0,\, 1,\, \ldots$

b) Determine $f_{X_1,\,\ldots\,,\,X_n\,|T\,=\,t}$ el modelo condicional de $X_1,\, \ldots\,,\, X_n$ dado $T = t$. Concluya, a partir de este, que T es una estadística suficiente. Proceda como en un ejemplo de clase.

c) Demuestre que T es una estadística suficiente, a partir del Teorema de Factorización.

Ejercicio 19

Sean $X \sim b(m;\, p)$, m es conocido, y $T = \sum_{j=1}^{n} X_j$, con $X_1,\, \ldots\,,\, X_n$ una muestra aleatoria de X.

a) Use la función generadora de momentos para demostrar que $T \sim b(mn;\, p)$. Luego determine $f_{_T}(t),\ t = 0,\, 1,\, \ldots$

b) Determine $f_{X_1,\,\ldots\,,\,X_n\,|T\,=\,t}$ el modelo condicional de $X_1,\, \ldots\,,\, X_n$ dado $T = t$. Concluya, a partir de este, que T es una estadística suficiente. Proceda como en un ejemplo de clase.

c) Demuestre que T es una estadística suficiente, a partir del Teorema de Factorización.

Ejercicio 20

Sean $X \sim Ps(r;\, p)$, r es conocido, y $T = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$, con $X_1,\, \dots\,,\, X_n$ una muestra aleatoria de X.

a) Use la función generadora de momentos para demostrar que $T \sim Ps(rn;\, p)$. Luego determine $f_{_T}(t),\ t = 0,\, 1,\, \dots$

b) Determine $f_{_{X_1,\, \dots\,,\, X_n\,|T\,=\,t}}$ el modelo condicional de $X_1,\, \dots\,,\, X_n$ dado $T = t$. Concluya, a partir de este, que T es una estadística suficiente. Proceda como en un ejemplo de clase.

c) Demuestre que T es una estadística suficiente, a partir del Teorema de Factorización.

Ejercicio 21 (LFGN para muestras que no son idénticamente distribuidas)

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ una secuencia de variables aleatorias independientes con varianzas finitas, tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2}$ es finita y $\lim\limits_{n\to\infty} E(\bar{X}_n) = \mu$; entonces, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu$, c.s.

El modelo de regresión lineal simple sin intercepto, suponga además que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}{n} = \mu_X$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}{n} = \mu_{X^2}$; demuestre que $\hat{\beta}$ es consistente.

Sugerencia en la definición de $\hat{\beta}$ divida por n, tanto al numerador como al denominador; luego analice separadamente los límites del numerador (aquí use la parte a) y denominador (este último ha sido dado en las hipótesis).

Ejercicio 22 (Consistencia en la regresión lineal simple)

Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, sean $\epsilon_1, \dots\,, \epsilon_n$, variables aleatorias independientes con media cero y varianza σ^2, y $x_1,\, \dots\,,\, x_n$, constantes conocidas, α y β, parámetros para estimar, e

$$Y_j = \alpha + \beta x_j + \epsilon_j\,, \ \text{ con } \ j = 1,\, \dots\,,\, n.$$

Como estimadores de los parámetros se proponen los siguientes:

$$\hat{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} a_j Y_j \ \text{ y } \ \hat{\beta} = \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\,, \text{ con } a_j = \frac{1}{n} - b_j\,\bar{X} \ \text{ y } \ b_j = \frac{x_j - \bar{X}}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}\,,\ j = 1,\, \dots\,,\, n.$$

Como estimador de $E(Y_x) = \alpha + \beta x$ se propone a $\hat{E}(Y_x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$.

a) Determine $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j,\ \ \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^2,\ \ \sum\limits_{j=1}^{n} b_j x_j,\ \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j,\ \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2$ y $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j$.

b) Determine $E(Y_j)$ y $V(Y_j),\ j = 1,\, \dots\,,\, n$.

c) Demuestre que $\hat{\beta}$ es insesgado y determine su varianza. Emplee los resultados de la parte anterior.

d) Demuestre que $\hat{\alpha}$ es insesgado y determine su varianza. Emplee los resultados de la partes anteriores.

e) Determine la covarianza entre $\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$.

Recuerde que $Cov\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i U_i \,,\; b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j W_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \, Cov(U_i \,, W_j) \,.$

f) Demuestre que $\hat{E}(Y_x)$ es insesgado y determine su varianza. Emplee los resultados de la partes anteriores.

g) Exprese $\hat{E}(Y_x)$ como combinación lineal de las Y_j y, a partir de esta expresión, determine su esperanza y su varianza.

h) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} = \mu_X$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{Y} = \alpha + \beta\mu_X$, *c.s.*

Use la Ley Fuerte de los Grandes Números para variables que solamente son independientes. Use la Ley Fuerte de los Grandes Números para variables que solamente son independientes. Vea el ejercicio 21. También recuerde que la serie p, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, es finita si, y sólo si, $p > 1$.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} = \mu_X$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{n} = \mu_{X^2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^2}$ es finita, demuestre que son consistentes i$_1$) $\hat{\beta}$, i$_2$) $\hat{\alpha}$, i$_3$) $\hat{E}(Y_x)$.

Observe que $\hat{\beta} = \dfrac{\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j Y_j}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{n} - \bar{X}^2}$.

Distribución de ejercicios para presentar

JAVIER SANTIAGO, MARAVI ZEGARRA	3
LUIS CARLOS, ALIAGA FLORES	1, 18
FERNANDO ANTONIO, MORENO VALLES	5, 6
JUSTO ANDRÉS, MANRIQUE URBINA	7, 17
JULIO RAÚL, ROMERO CHAUCAYANQUI	21
JESÚS STEFANO, TORRES ROMERO	22
LILIAN KATHERINE, ATOCHE MURRIETA	4
EDGAR JONEL, DE LA CRUZ BUSTAMANTE	8, 9
RODOLFO MOISES, MERCADO GONZALES	10, 11
ANDIE BRYAN, DONGO ROMAN	2
ALEX EDWARD, TRISTAN GOMEZ	12, 19
JULIO CESAR, BUENDIA NARVAEZ	13, 20
JADHY ANDERSON, ROSALES LOPEZ	14
LEONARDO GERMAN, SOTELO CARHUACHIN	15
CARLOS GUSTAVO, SANCHEZ MEJIA	16

J.F. San Miguel, setiembre de 2019.