Clase 13: Inferencia Estadística

Justo Andrés Manrique Urbina

19 de noviembre de 2019

1. Ejemplo

Si $X \sim N(0, \sigma^2)$,$n = 20$. Se vió, en un ejemplo anterior, que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_j^2}{34{,}1696}; \frac{\sum_{i=1}^{n} X_j^2}{9{,}5908}.$$

es un intervalo de confianza del 9 % para estimar a σ^2. Deducir, a partir del intervalo anterior, uno para $\theta = P(X > 1)$.

1.1. Solución:

Sea:

$$X \sim N(0, \sigma^2).$$
$$\to Z = \frac{x}{\sigma} \sim N(0,1).$$
$$\to \theta = P(X > 1).$$
$$= 1 - F_x(1).$$
$$\theta = 1 - F_z(\frac{1}{\sigma}).$$

Luego:

$$l_1 \leq \sigma^2 \leq l_2.$$
$$\sqrt{l_1} \leq \sigma \leq \sqrt{l_2}.$$
$$\frac{1}{\sqrt{l_2}} \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{\sqrt{l_1}}.$$
$$F_z(\frac{1}{\sqrt{l_2}}) \leq F_z(\frac{1}{\sigma}) \leq F_z(\frac{1}{\sqrt{l_1}}).$$
$$1 - F_z(\frac{1}{\sqrt{l_1}}) \leq 1 - F_z(\frac{1}{\sigma}) \leq 1 - F_z(\frac{1}{\sqrt{l_2}}).$$

Por lo tanto, este es un intervalo de confianza del 95 % para estimar a θ.

2. Ejercicio

Sea $X \sim \exp(\theta)$. Deducir también, del intervalo 95 % de confianza, lo siguiente: $P = P(X > 2)$.

2.1. Solución:

$$\rightarrow F_x(X) = 1 - e^{(-\theta X)}, x > 0.$$
$$\rightarrow p = P(X > 2).$$
$$= 1 - F_x(2).$$
$$= 1 - 1 - e^{-2\theta}.$$
$$p = e^{-2\theta}.$$

Luego se tiene que $L_1 \leq \theta \leq l_2$

$$e^{-2l_2} \leq e^{-2\theta} \leq e^{-2l_1}.$$

Por lo tanto, ese es un intervalo de confianza.

3. Contraste estadístico de hipótesis

Se tienen dos hipótesis acerca del parámetro θ: H_0 y H_1. A la primera se le llama hipótesis nula y la segunda alternativa. A partir de los resultados de una muestra aleatoria se opta por una de las dos hipótesis.

Definition 1. ***Regla de decisión:*** *Es una regla que determina lo que debe ocurrir con la muestra para rechazar H_0.*

Definition 2. ***Región crítica:*** *Es otra forma de expresar la regla de decisión:*

$$R.C = \{X_1, X_2, \ldots, X_n) : (X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ satisface la regla de decisión.}\}.$$

Existen dos tipos de errores, al rechazar H_0:

- **Tipo 1:** Rechazar H_0 siendo verdadera.
- **Tipo 2:** Aceptar H_0 siendo falsa

Las probabilidades correspondientes se denotan por α y β, respectivamente. Es decir:

- α : P(Rechazar H_0 siendo verdadera).
- β : P(Aceptar H_0 siendo falsa).

4. Ejemplo:

En el contexto del ejemplo anterior evaluar los riesgos de de la prueba y también la potencia de esta:

4.1. Solución:

$$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera}).$$
$$= P(x > 7, \mu = 5).$$
$$\alpha = P(X > 7, \mu = 5).$$

Por otra parte, estandarizamos la variable X.

$$Z = \frac{\sqrt{20}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{10}} \sim N(0,1).$$

De ello se desprende:

$$\alpha = P(\bar{x} > 7), \mu = 5.$$
$$= 1 - F_z(\frac{\sqrt{20}(7-5)}{\sqrt{10}}).$$
$$= 1 - F_z(2{,}83).$$
$$= 1 - 0{,}9977.$$
$$\alpha = 0{,}0023.$$

Análogamente, se tiene que:

$$\beta = P(\bar{X} \leq 7, \mu = 9).$$
$$= F_{\bar{X}}(7), \mu = 9.$$
$$F_z(\frac{\sqrt{20}(7-9)}{\sqrt{10}}), \mu = 9.$$
$$= F_z(-2{,}83).$$
$$\beta = 0{,}0023.$$

Entonces, se lee que el 100 $\alpha\,\%$ de las veces que se tome la decisión de rechazar H_0 se tomará una decisión equivocada.

Por otro lado, se lee que el 100 $\beta\,\%$ de las veces que se tome la decisión de aceptar H_0, se tomará una decisión equivocada.

Observación: Una buena regla de decisión es aquella que tenga α y β pequeños. En general, fijado el tamaño de muestra, no se puede minimizar α y β al mismo tiempo. Se suele fijar el valor de α y obtener una regla de decisión que tenga un β pequeño.

5. Lema de Neyman-Pearson

Dadas las hipótesis y α y η fijaados. La regla de decisión óptima, es decir, la regla que tiene el menor valor posible de β, entre todas aquellas reglas con probabilidad de cometer el error tipo $1 = \alpha$ es de la forma siguiente: Rechazar H_0 si:

$$\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} > c.$$

dónde c es P(Rechazar H_0 siendo verdadera) $= \alpha$ y $L(\theta)$ es la función de verosimlilitud de θ, pero considerando la muestra antes de ser registrada: