Clase 12: Inferencia Estadística

Justo Andrés Manrique Urbina

7 de noviembre de 2019

1. Intervalos de Confianza Usuales

Para la media μ con varianza σ^2 conocida y, bajo el supuesto de que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se tiene que:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Paso 1: Considerando Z como variable base.
Paso 2: Sean a y b tal que:

$$F_z(b) = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{y} F_z(a) = \frac{\alpha}{2}.$$

En este caso se cumple que $a = -b$ y se denota b por $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Asimismo, se tiene que:

$$F_z(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Paso 3:

$$a \leq Z \leq b \iff l_2 \leq \mu \leq l_2.$$

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Entonces se tiene que:

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Es un intervalo de confianza del $1 - \alpha$ para estimar a μ. **Nota:** Si X no tiene distribución normal, pero el tamaño de muestra es suficientemente grande, se puede asumir que tiene distribución normal. Así, el intervalo de confianza mostrado anteriormente es válido.

2. T de student

Bajo el primer supuesto, asumamos que:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$$

Paso 1: Consideramos a T como variable base.
Paso 2: Hallamos a y b tal que:

$$F_T(b) = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{y} F_T(a) = \frac{\alpha}{2}.$$

Aquí también tenemos que $a = -b$ y b se denota por $T_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ o simplemente $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$; es decir:

$$F_T(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Paso 3: $a \leq T \leq b \iff l_1 \leq \mu \leq l_2$.

$$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

3. Teorema de Slutsky

Por el teorema de Slutsky se tiene que:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \to_D Z \sim N(0,1).$$

Así $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$ es una variable base. Y, mediante el método de la variable base resulta que:

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

4. Diferencia de medias

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu_1, \sigma_2^2)$ y sea $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ una muestra aleatoria de $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Ambas muestras son independientes y $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Sea

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 2)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

En dónde S_1^2 y S_2^2 son las varianzas muestrales. Demostrar que:

$$\frac{(n_1 + n_2 - 2)S_p^2}{\sigma^2} \sim X^2(n_1 + n_2 - 2).$$

Sea:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}}}}.$$

Sea: -

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}}}}.$$

Demostrar que $T \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

Proof 1. *Usamos como variable base a* T*, para deducir un I.C., del* $(100 - \alpha)\,\%$*, para estimar a* $\mu_1 - \mu_2$