ESCUELA DE POSGRADO MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA — PUCP

INFERENCIA ESTADÍSTICA
Lista de ejercicios 2
2019-2

Profesor: José Flores D.

Ejercicio 1

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de la variable aleatoria $X \sim g(p)$, con p (desconocido).

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar p.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Sea $\theta = P(X > 2)$. Use el intervalo deducido en la parte anterior para encontrar uno para estimar a θ.

d) En cada uno de los últimos 60 días se supervisó una línea de producción y se registró, X, el número de unidades fabricadas hasta la primera defectuosa, se obtuvo $\sum_{j=1}^{60} X_j = 34$. Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes b y c.

Ejercicio 2

Para el ingreso semanal, X (en miles de soles), de ciertos comerciantes informales, se propone el modelo probabilístico *beta*: $f_X(x) = \theta\,(1-x)^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, donde $\theta > 0$. Las inferencias se harán a partir de una muestra aleatoria de los ingresos de 36 comerciantes informales.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar θ.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para p: la proporción de ingresos semanales mayor que el sueldo mínimo mensual (850 soles).

d) Use el intervalo de confianza deducido en la parte b para obtener uno para μ : el ingreso semanal promedio de estos comerciantes.

e) Tomada la muestra, se obtuvieron los ingresos siguientes:

0,22	0,29	0,12	0,61	0,63	0,31	0,52	0,67	0,08	0,50	0,52	0,48
0,64	0,43	0,22	0,19	0,11	0,66	0,27	0,39	0,44	0,51	0,35	0,14
0,37	0,21	0,45	0,52	0,57	0,30	0,41	0,24	0,51	0,35	0,52	0,60.

Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes c y d.

Ejercicio 3

El ingreso semanal, en miles de soles, de los trabajadores de cierto sector se considera una variable aleatoria $X \sim B(\theta;\, 1)$, donde $\theta > 0$. Para hacer inferencias sobre θ se tomará una muestra aleatoria de 36 ingresos.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar θ.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para p: la proporción de ingresos semanales mayor que el sueldo mínimo mensual (850 soles).

d) Use el intervalo de confianza deducido en la parte b para obtener uno para μ : el ingreso semanal promedio de estos trabajadores.

e) Tomada la muestra, se obtuvieron $\sum_{j=1}^{60} X_j = 30{,}50$ y $\sum_{j=1}^{60} Ln(X_j) = -6{,}64$. Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes c y d.

Ejercicio 4

Para el ingreso mensual, X (en miles de soles), de los trabajadores en cierto sector, se propone el modelo probabilístico de Pareto siguiente: $f_X(x) = \frac{\theta\,(0{,}75)^{\theta}}{x^{\theta+1}}$, $x > 0{,}75$, donde $\theta > 0$. Para las inferencias se tomará una muestra aleatoria de 36 comerciantes.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar θ.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para la proporción, p, de trabajadores con salarios superiores a cuatro veces el sueldo mínimo. Observe que $p = P(X > 3{,}4)$.

d) Use el intervalo de confianza deducido en la parte b para obtener uno para μ : el ingreso semanal promedio de estos comerciantes.

e) Registrada la muestra se obtuvieron los ingresos:

0,9375, 0,8673, 0,8554, 0,9415, 0,9252, 0,8578, 0,8992, 0,9788, 1,1183, 0,9076, 0,8594, 1,1132, 0,8572, 0,9485, 0,9268, 0,9199, 0,8540, 0,9104, 0,8521, 0,8625, 0,8636, 0,9059, 0,8566, 1,2235, 1,0642, 1,0626, 0,9323, 0,8560, 0,8925, 0,9447, 0,9428, 0,9714, 0,8768, 0,8748, 0,9409, 0,8597, 0,9575, 0,9401, 0,8978, 0,9453, 0,9965, 0,8768, 0,9424, 0,9116, 0,8608, 0,8525, 1,1027, 0,8541, 0,8545, 0,9054, 0,9707, 0,9066, 0,8736, 0,8527, 0,9401, 0,8960, 0,8744, 1,0635, 0,9775, 0,8572, 0,8590, 1,0356, 0,8912, 0,8635, 0,9834, 0,9261, 0,8666, 0,9179, 0,8861, 0,8751, 1,0041, 0,8825, 0,9770, 0,9610, 1,1453, 0,8763, 0,9219, 0,9811, 0,9608, 0,9227, 0,9172, 0,9070, 0,9075, 0,8888, 0,8579, 0,9943, 0,8981, 0,9780, 0,9106, 0,9707, 0,9153, 0,9494, 1,0862, 0,8663, 0,9102, 0,9344, 0,9781, 0,8653, 0,8714, 0,9457.

Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes c y d.

Ejercicio 5
Para estimar la proporción, p, de unidades fabricadas defectuosamente, se acostumbra tomar una muestra aleatoria de una variable aleatoria, X, que solo asume dos valores, 0 y 1, donde $X = 1$ significa que la unidad está defectuosa y $X = 0$ significa que dicha unidad no está defectuosa. Asuma un tamaño de muestra $n = 100$.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar p.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para la proporción, θ, de lotes de 5 unidades que no contienen unidades defectuosas. Asuma que $\theta = (1-p)^5$.

d) Registrada la muestra, solo 5 de las 100 unidades resultaron defectuosas. Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes b y c.

Ejercicio 6
La duración X (en años) de cierto tipo de componente se considera una variable aleatoria continua positiva cuya función de densidad está dada por $f(x) = \theta e^{-x}(1-e^{-x})^{\theta-1}$; $x > 0$; donde $\theta > 0$. Para realizar inferencias se usará una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar θ.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para la proporción, θ, de componentes que duran menos de 1 año.

d) Registrada la muestra se obtuvieron las duraciones siguientes:

0,95	5,36	3,07	2,50	2,13	2,02	1,58	1,62	2,13	2,24	2,67	2,75
0,87	3,30	0,83	2,59	2,20	0,88	2,77	1,50	1,53	2,78	1,03	2,54
2,92	2,23	1,90	3,43	1,97	1,47	3,20	3,70	2,29	3,47	1,64	4,38.

Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes b y c.

Ejercicio 7
El tiempo, X, que permanecen empleados los afiliados de una AFP (medido en años) sigue el modelo probabilístico $G(2;\beta)$. Para realizar inferencias se usará una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar β.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para la proporción, θ, de afiliados que permanecen empleados más de 5 años.

d) Use el intervalo de confianza deducido en la parte b para obtener una para μ : el tiempo promedio de estos comerciantes.

e) Registrada la muestra se obtuvieron los tiempos siguientes:

6,35	4,75	18,64	9,90	4,30	5,05	12,46	14,81	10,29	5,27	11,80	10,92
13,55	11,10	2,41	4,99	5,85	4,64	8,30	8,35	10,12	12,11	2,81	5,08
3,55	3,31	4,78	7,24	6,32	0,80	1,58	8,27	4,63	3,83	4,58	3,49.

Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes c y d.

Ejercicio 8

El ingreso mensual, en miles de soles, de los empleados, en cierto sector, se considera una variable aleatoria $X \sim LogN(\mu; 1)$. Para hacer inferencias se tomará una muestra aleatoria de 30 trabajadores y se registrarán sus ingresos mensuales.

a) A partir de la distribución del estimador de máxima verosimilitud de μ defina una variable base e deduzca un intervalo del 95 % de confianza para estimar μ.

b) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para la proporción, p, de empleados que perciben más de 10 salarios mínimos mensuales.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte a para obtener uno para el ingreso mensual promedio, θ, de estos empleados.

d) Registrada la muestra se obtuvieron las duraciones siguientes:

2,09	2,98	8,97	2,98	4,41	12,41	2,28	11,13	9,15	5,23	1,84	37,16
1,13	26,00	8,01	3,20	1,94	1,85	4,13	2,94	20,42	3,09	0,40	27,15
1,64	7,68	7,88	7,21	17,18	4,08	20,96	0,32	16,59	16,56	1,35	32,49.

Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes b y c.

Ejercicio 9

Sea $X \sim U([0; \theta])$, donde $\theta > 0$, y considere un tamaño de muestra $n = 20$.

a) A partir del estimador de máxima verosimilitud de θ y su distribución, construya una variable base y un intervalo del 95 % para estimar a θ.

b) A partir del intervalo anterior deduzca uno para $\mu = E(X)$ y determine su longitud esperada.

c) Registrada la muestra se obtuvieron los valores siguientes:

3,6312	1,5673	0,6719	1,0180	1,4151	3,8448	0,9925	2,4131	1,1397	0,4065
1,4282	1,8683	3,4121	3,0051	2,0296	3,6244	2,9350	4,2947	2,4406	2,8335

Evalúe e interprete los intervalos hallados en las partes b y c.

Ejercicio 10
Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de la variable aleatoria $X \sim B(1+\theta; 1)$, donde $\theta > -1$.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar θ.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para $p = P(X > 0{,}5)$.

d) Use el intervalo de confianza deducido en la parte b para obtener una para $\mu = E(X)$.

e) Registrada la muestra se obtuvieron los valores siguientes:

0,592	0,368	0,065	0,005	0,962	0,048	0,132	0,005	0,357	0,361	0,061	0,490
0,018	0,475	0,815	0,004	0,245	0,021	0,471	0,273	0,539	0,116	0,237	0,464
0,736	0,009	0,903	0,933	0,446	0,785	0,407	0,817	0,269	0,063	0,238	0,146.

Evalúe e interprete los intervalos de confianza hallados en las partes c y d.

Ejercicio 11
La duración X (en años) de cierto tipo de componente se considera una variable aleatoria continua cuya función de densidad está dada por $f(x) = \theta x e^{-x}(1 - e^{-x} - x e^{-x})^{\theta-1}$; $x > 0$; donde $\theta > 0$. Para realizar inferencias se usará una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar θ.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para la proporción, p, de componentes que duran menos de 1 año.

Ejercicio 12
La duración X (en años) de cierto tipo de componente se considera una variable aleatoria continua positiva cuya función de densidad está dada por $f(x) = 2\theta x e^{-x^2}(1-e^{-x^2})^{\theta-1}$; $x > 0$; donde $\theta > 0$. Para realizar inferencias se usará una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar θ.

b) En la parte anterior considere la distribución asintótica asociada a la información de Fisher observada.

c) Use el intervalo de confianza deducido en la parte anterior para obtener uno para la proporción, p, de componentes que duran menos de 1 año.

Ejercicio 13

Para estimar la proporción, p, de unidades que satisfacen cierta característica, se acostumbra tomar una muestra aleatoria de una variable aleatoria, X, que solo asume dos valores, 0 y 1, donde $X = 1$ significa que la unidad muestral satisface la característica y $X = 0$ significa que dicha unidad no la satisface. De este modo, $X \sim b(1;\, p)$, es decir, $f(1) = P(X = 1) = p$ y $f(0) = P(X = 0) = 1 - p$; por lo tanto, $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$.

a) Use la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher observada, para deducir el siguiente intervalo de confianza del 95 % para estimar a p: $[\,\bar{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\,;\ \bar{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\,]$.

   Puede usar el resultado obtenido en el ejercicio 4 b de la práctica dirigida anterior: $\frac{\sqrt{n}(\bar{p}-p)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}} \overset{aprox.}{\sim} N(0;\, 1)$

b) Registrada una muestra aleatoria de 100 personas, 75 estaban de acuerdo con una nueva ordenanza municipal. Use el resultado de la parte anterior para estimar la proporción de personas que están de acuerdo con la ordenanza. ¿Se puede inferir que más de la mitad de las personas están de acuerdo, según el resultado obtenido?

Ejercicio 14

La duración de cierto componente (en años) se considera una variable aleatoria $X \sim exp(\theta)$, donde $\theta > 0$.

a) A partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud, asociada a la información de Fisher, para determinar un intervalo del 95 % de confianza para estimar a θ.

b) Repita lo anterior pero con la información de Fisher observada.

c) ¿Cuál de los dos intervalos resulta más conveniente, según el criterio de la longitud esperada?

d) A partir del intervalo obtenido en la parte anterior, determine uno para la longitud media de las unidades de este componente.

e) A partir del intervalo obtenido en la parte c, determine uno para la proporción de unidades del componente que duran más de 2 años.

f) Registrada una muestra aleatoria de 36 unidades de este componente, se obtuvieron las duraciones (en años) siguientes:

1,85	5,43	2,27	6,37	9,54	1,96	0,27	1,05	0,24	1,30	2,48	8,50
3,67	4,05	2,46	0,31	0,34	0,86	1,19	6,41	1,15	3,86	12,25	0,25
7,39	4,22	1,11	7,20	8,32	13,32	1,14	1,55	2,49	0,35	24,45	1,35

   Evalúe e interprete los intervalos hallados en las partes c d y e.

g) Use el resultado del ejercicio 5 y la muestra anterior para estimar la proporción de unidades del componente que duran más de 2 años.