# Lista de ejercicios 1 - Fundamentos de Probabilidad

6 de abril de 2019

Justo Andrés Manrique Urbina - 20091107

## 1. Pregunta 5.a.

Demuestre que $A_1 \in \sigma(C), A_2 \in \sigma(C), ...$
**Demostración:**
Supongamos $A_i \in C, i = 1, 2, ...$
Recordemos que, por definición 1.2. del texto de la clase, $C \subset \sigma(C)$
Por lo tanto, $A_i \in C \subset \sigma(C), i = 1, 2, ...$
Finalmente, $A_i \in \sigma(C), i = 1, 2, ...$

## 2. Pregunta 5.b.

Demuestre que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$.
**Demostración:**
Supongamos que $A_i \in \sigma(C), i = 1, 2, ...,$
Por definición de $\sigma$-álgebra (definición 1.1 del texto de la clase), toda $\sigma$-álgebra es cerrada respecto a reuniones infinitas enumerables.
Dada la suposición y la definición de $\sigma$-álgebra, se concluye que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$.

## 3. Pregunta 16.a.

Demuestre que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una $\sigma$-álgebra en $\Omega_1$.
**Demostración:**
Supongamos que $\sigma(C)$ es una $\sigma$-álgebra en $\Omega_2$. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

- $\Omega_2 \in \sigma(C)$

- $\forall A \in \sigma(C) : A^c \in \sigma(C)$
- $\forall A_1, A_2, ... \in \sigma(C) : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$

Para demostrar que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una $\sigma$-álgebra en $\Omega_1$, verificaremos si dicha imagen inversa cumple los 3 axiomas de la definición de $\sigma$-álgebra en $\Omega_1$.

Respecto al primer axioma, recordemos que $\Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2)$ y que $\Omega_2 \in \sigma(C)$. Por lo tanto, por definición, $\Omega_1 \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el primer axioma.

Respecto al segundo axioma, recordemos lo siguiente:

- Si $A \in C$, entonces, por definición de $\sigma$-álgebra, $A \in \sigma(C)$ y $A^c \in \sigma(C)$.
- Por definición, $f^{-1}(C) = \{f^{-1}(A) : A \in C \subset \sigma(C)\}$. Entonces, $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\sigma(C))$.
- La primera condición también debe sostenerse en $\Omega_1$ y esto se cumple por propiedad. $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el segundo axioma.

Respecto al tercer axioma, recordemos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$, entonces $f^{-1}(A_j) \in f^{-1}(A), j = 1, 2, ...$, por lo tanto $\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el tercer axioma.

Dado que se cumplen los tres axiomas en $\Omega_1$ se concluye que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una $\sigma$-álgebra en $\Omega_1$.

## 4. Pregunta 16.b.

Demuestre que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

**Demostración:**

Debido a ello, se obtiene que $f(w) \in A \in C$

Por definición, $C \subset \sigma(C)$

Por lo tanto, $f(w) \in A \in C \subset \sigma(C)$

Aplicando imagen inversa, se obtiene que: $w \in f^{-1}(A) \in f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$

Finalmente, se observa que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

## 5. Pregunta 16.c.

Demuestre que $\sigma(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

**Demostración:**

Supongamos existe $f^{-1}(C)$ en $\Omega_1$. Por definición de $\sigma$-álgebra generada, $f^{-1}(C) \subset \sigma(f^{-1}(C))$.

Por lo demostrado en las preguntas anteriores, $f^{-1}(\sigma(C))$ es una $\sigma$-álgebra en $\Omega_1$ y $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

Dado que, por definición, $\sigma(f^{-1}(C))$ es la $\sigma$-álgebra generada es la más pequeña que contiene a $f^{-1}(C)$, entonces concluimos que $\sigma(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.