Modelos Lineales 1

Justo Andrés Mauricio Urbina - 20091107

① Pregunta 1:

Demuestra que la varianza del estimador de β por mínimos cuadrados generalizados es:

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T V^{-1} X)^{-1}$$

Resolución:

① $Var(\hat{\beta}) = Var[(X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} y] \Big|_{y=(Xb+e)}$

② $Var[(X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} (Xb+e)]$

③ $Var[(X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} e]$

④ $[(X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} [Var(e)] V^{-1T} X (X^T V^{-1} X)^{-1}$

⑤ $\sigma^2 (X^T \cancel{V^{-1}} X)^{-1} X^T \cancel{V^{-1}} X (X^T V^{-1} X)^{-1}$

⑥ $\sigma^2 (X^T V^{-1} X)^{-1}$ #

Pregunta 5.b)

Las hipótesis del informe son:

- hipótesis nula:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu$ | donde $\mu_i = i = 1 \ldots 5$.

- hipótesis alternativa:

$H_1: \mu_i \neq \mu_j$ para algún $i \neq j = (1,2,3,4,5)$

Pregunta 6

6.a) Las hipótesis estadísticas son:

H_0 = efecto de presión $= 0$

H_0 = efecto de temperatura $= 0$

H_0 = efecto de presión x temperatura $= 0$

H_1 = efecto de presión $\neq 0$

H_1 = efecto de temperatura $\neq 0$

H_1 = efecto de presión x temperatura $\neq 0$

Pregunta 2

a) Deducir una fórmula general para el estimador de β por mínimos cuadrados ponderados

$$\hat{\beta} = (X^t V^{-1} X)^{-1} X^t V^{-1} Y$$

· sin el intercepto, X es un vector $n \times 1$ y $V^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & w_n \end{bmatrix}$,

por lo que:

$$= (X^t V^{-1} X)^{-1} = \left(\sum_i x_i^2 w_i\right)^{-1} = \frac{1}{\sum_i x_i^2 w_i} \Bigg|_{w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

asumiendo: $X^{-1} V^{-1} Y = \sum x_i w_i y_i$, por lo tanto

$$\hat{\beta} = (X^t V^{-1} X)^{-1} X^t V^{-1} Y = \left(\sum_i x_i^2 w_i\right)^{-1} * \sum_i x_i w_i y_i$$

b) como $w_i = 1/\sigma_i^2$

$$Var(\hat{\beta}|X) = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^4 / \sigma_i^2}{(\sum x_i^2 / \sigma_i^2)^2} = \frac{1}{\sum x_i^2 / \sigma_i^2}$$