1. Test de la Razón de Verosimilitud

Sea:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0.$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

$$\Theta = \Theta_0 \dot{\cup} \Theta_1.$$

Sea $\hat{\theta}$ el estimador de máxima verosimilitud sobre Θ y $\hat{\theta_0}$ el estimador de máxima verosimilitud sobre Θ_0. Se tiene entonces que:

$$R(\dot{}) = \frac{L(\hat{\theta_0})}{L(\hat{\theta})}.$$

Según este test, se rechaza H_0 si $R(\dot{}) < c$ dónde c es tal que:

$$P(\text{Rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera}) = \alpha.$$

2. Ejemplo 1

Sea $X \sim N(\mu; 10)$, teniendo las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \mu = 5.$$

$$H_1 : \mu \neq 5.$$

Dado que:

$$\theta = \mu.$$

$$\Theta_0 = \{5\}.$$

$$\Theta_1 = R - \{5\}.$$

$$\Theta = R.$$

Asimismo, fue visto que $\hat{\mu} = \bar{X}$ y que $\hat{\mu_0} = 5$ (pues Θ_0 tiene un solo elemento). Se tiene que:

$$\frac{L(5)}{L(\bar{X})}.$$

Se rechaza de acuerdo al test. En caso apliquemos el logaritmo, se tiene que:

$$\ln(L(5)) - \ln(L(\bar{X})) < c.$$

$$l(5) - l(\bar{X}) << .$$

Además, se ha visto que:

$$l(\mu) = 20(-\ln(\sqrt{2\pi}) - \ln(\sqrt{10})) - \frac{1}{10}\sum_{1}^{20}(X_j - \mu)^2.$$

Entonces, se rechaza H_0 si:

$$20(-\ln(\sqrt{2\pi})-\ln(\sqrt{10}))-\frac{1}{10}\sum_{1}^{20}(X_j-5)^2-20(-\ln(\sqrt{2\pi})-\ln(\sqrt{10}))+\frac{1}{10}\sum_{1}^{20}(X_j-\bar{X})^2<c.$$

$$-\sum_{1}^{20}(X_j-5)^2+\sum_{1}^{20}(X_j-\bar{X})^2<c.$$

$$-\sum X_j^2-10\sum X_j-20(5^2)+\sum X_j-20\bar{X}^2<c.$$

$$20(10)\bar{X}-20\bar{X}^2<c.$$

$$10\bar{X}-\bar{X}^2<c.$$

$$\bar{X}^2-10\bar{X}>c.$$

$$(\bar{X}-5)^2-5^2>c.$$

$$(\bar{X}-5)^2>c.$$

$$|X-5|>c.$$

Se tiene entonces que $\bar{X}-5>c$ o $\bar{x}-5<-c$. Por lo tanto se tiene que $\bar{X}>c_1$ $\bar{X}<c_2$ y se rechaza la hipótesis acordemente. Dónde c_1 y c_2 son tales que:

$$P(\text{Rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera})=0{,}05.$$

$$P(\bar{x}>c_1\text{o}\bar{x}<c_2,\mu=5)=0{,}05.$$

$$P(\bar{x}>c_1 o\bar{x}<c_2)=0{,}05,\mu=5.$$

$$P(\bar{x}>c_2)+P(\bar{x}<c_2)=0{,}05,\mu=5.$$

$$1-F_{\bar{x}}(c_1)+F_{\bar{x}}(c_2)=0{,}05,\mu=5.$$

$$F_{\bar{x}}(c_2)-F_{\bar{x}}(c_1)=0{,}95,\mu=5.$$

Podemos considerar que $F_{\bar{X}}(c_2)=0{,}975$ y $F_{\bar{x}}(c_1)=0{,}025,\mu=5$.
Además, recordemos que $X\sim N(\mu,10)$ y asimismo:

$$Z=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1).$$

$$n=20,\mu=5,\sigma=\sqrt{10}.$$

Esto da que:

$$F_z(\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}(c_2-5))=0{,}975\rightarrow\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}(c_2-5)=1{,}96.$$

$$F_z(\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}(c_1-5))=0{,}025\rightarrow\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}(c_1-5)=1{,}96.$$

Por lo tanto:

$$c_2=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}}(1{,}96)+5=6{,}3859.$$

$$c_1=-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}}(1{,}96)+5=3{,}6141.$$

Es decir, se rechaza H_0 si $\bar{X}>6{,}3859$ o $\bar{X}<3{,}6141$.

3. Ejemplo 2

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), n = 20, \alpha = 0{,}05.$$
$$H_0 : \mu = 5.$$
$$H_1 = \mu \neq 5.$$

$$\theta = (\mu, \sigma^2).$$
$$\Theta_0 = \{5\} x R^+, (\mu = 5 \text{y} \sigma \in R^+).$$
$$\Theta_1 = (R - \{5\}) x R^+, (\mu \neq 5 \text{y} \sigma^2 \in R^+).$$

En este escenario, se tiene que:

$$l(\mu, \sigma^2) = 20(-\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\ln(\sigma^2)) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^{20}(X_j - \mu)^2$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0 \to \sum_1^{20} 2(X_j - \mu) = 0 \to \mu = \bar{x}.$$
$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0 \to \sigma^2 = \frac{\sum_1^{20}(x_j - \mu)^2}{20}.$$

Luego:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \text{y} \hat{\sigma^2} = \frac{\sum (x_j - \bar{x})^2}{20}.$$
$$\hat{\mu_0} = 5 \text{y} \hat{\sigma_0^2} = \frac{\sum (x_j - 5)^2}{20}.$$

$$R(\cdot) = \frac{L(\hat{\mu_0}, \hat{\sigma_0^2})}{L(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2})}.$$
$$l(\hat{\mu_0, \hat{\sigma_0^2}}) - l(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2}) < c.$$
$$-10(\ln(\sum (x_j - 5)^2) - \ln(20)) + 10(\ln(\sum (x_j - \bar{x})^2) - \ln(20)) < c.$$
$$-10\ln(\sum (x_j - 5)^2) + 10\ln(\sum (x_j - \bar{x})^2) < c.$$

Tengamos presente que $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ y que:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$$

en dónde $S^2 = \frac{\sum (x_j - \bar{x})^2}{20-1}$

$$-\ln(\sum (x_j - 5)^2) + \ln(\sum (x_{j\bar{x}})^2) < c.$$

$$\ln\left(\frac{\sum (x_j - \bar{x})^2}{\sum (x_j - 5)^2}\right) < c.$$

$$\frac{\sum (x_j - \bar{x})^2}{\sum (x_j - 5)^2} < c.$$

$$\frac{\sum (x_j - 5)^2}{19S^2} > c.$$

$$\frac{\sum x_j^2 - \sum x_j + 20(5^2)}{19S^2}.$$

$$\frac{19S^2 - 20\bar{x}^2 - 10(20\bar{x}) + 20(5^2)}{19S^2} > c.$$

$$\frac{19S^2 + 20(\bar{x}^2 - 10\bar{x} + 5^2)}{S^2} > c.$$

$$\frac{19S^2 + 20(\bar{x} - 5)^2}{S^2} > c.$$

$$19 + \frac{20(\bar{x} - 5)^2}{S^2} > c.$$

$$\frac{20(\bar{x} - 5)^2}{S^2} > c.$$

$$T^2 > c.$$

$$|T| > c.$$

dónde $t = \frac{\sqrt{20}(\bar{x}-5)}{S} \sim t(20-1)$ si y sólo si $\mu = 5$. Dónde c es tal que:

$$P(\text{Rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera}) = 0{,}05.$$

$$P(|T| > c) = 0{,}05, \mu = 5.$$

$$P(|T| \leq c) = 0{,}95, \mu = 5.$$

$$P(-c \leq T \leq c) = 0{,}95, \mu = 5.$$

$$F_T(c) - F_T(-c) = 0{,}95, \mu = 5.$$

$$F_T(c) - (1 - F_T(c)) = 0{,}95, \mu = 5.$$

$$2F_T(c) = 1{,}95.$$

$$F_T(c) = 0{,}975, \mu = 5.$$

$$c = t_{0{,}975;19}.$$

Se rechaza H_0 si $|T| > t_{0{,}975;19}$.

4. Ejemplo 3

Se tiene que $X \sim N(\mu, \sigma^2), n = 20, \alpha = 0{,}05$ y las hipótesis son:

$$H_0 : \sigma^2 = 9.$$

$$H_1 : \sigma^2 \leq 9.$$

Los parámetros son $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\Theta_0 = Rx\{9\}$ y $\Theta_1 : IRx(IR^+ - \{9\})$.

Recordemos que los estimadores de máxima verosimilitud son:

$$\mu = \bar{x}.$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_j - \mu)^2}{20}.$$

Resulta entonces que:

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma^2} = \frac{\sum (x_j - \bar{x})^2}{20}.$$

$$\hat{\mu}_0 = \bar{x}, \hat{\sigma^2}_0 = 9.$$

Se rechaza H_0 si:

$$l(\hat{\mu_0}, \hat{\sigma_0^2}) - l(\hat{\mu} - \hat{\sigma^2}) < c.$$

$$20(-\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\ln(\hat{\sigma_0^2})) - \frac{1}{2\hat{\sigma_0^2}} \sum (x_j - \hat{\mu_0})^2 - 20(-\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\ln(\hat{\sigma^2})) + \frac{1}{2\hat{\sigma^2}} \sum (x_j - \hat{\mu})^2 < c.$$

$$-10\ln(9) - \frac{1}{2(9)} \sum (x_j - \bar{x})^2 + 10\ln(\sigma^2) + \frac{1}{\frac{2\sum(\sum x_j - \bar{x})^2}{20}} \sum (x_j - \bar{x})^2 < c.$$

$$-\frac{1}{2(9)} \sum (x_j - \bar{x})^2 + 10\ln(\frac{\sum x_j - \bar{x}^2}{20}) < c.$$

$$\frac{-19}{18} S^2 + 10\ln(S^2) < c.$$

$$180\ln(S^2) - 19S^2 < c.$$

$$g(S^2) < c.$$

Se rechaza H_0 si:

$$S^2 < c_1 \text{o} S^2 > c_2.$$

dónde c_1 y c_2 son tales que:

$$P(\text{rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera}) = 0{,}05.$$

$$P(S^2 < c_1 \text{o} S^2 > c_2, \sigma^2 = 9) = 0{,}05.$$

$$P(S^2 < c_1 \text{o} S^2 > c_2) = 0{,}05, \sigma^2 = 9.$$

$$P(S^2 < c_1) + P(S^2 > c_2) = 0{,}05, \sigma^2 = 9.$$

Por ejemplo:

$$P(S^2 < c_1) = 0{,}025 \text{y} P(S^2 > c_2) = 0{,}025; \sigma^2 = 9.$$

$$P(S^2 < c_1) = 0{,}025 \text{y} P(S^2 \leq c_2) = 0{,}975, \sigma^2 = 9.$$

$$P(\frac{9}{19}W < c_1) = 0{,}025 \text{y} P(\frac{9}{19}W \leq c_2) = 0{,}975, \sigma^2 = 9.$$

$$P(W < \frac{19}{9}c_1) = 0{,}025 \text{y} P(W \leq \frac{19}{9}c_2) = 0{,}975, \sigma^2 = 9.$$

Tener presente que

$$\frac{19S^2}{9} \sim X^2(19).$$

Luego:

$$\frac{19}{9}c_1 \sim X^2_{0{,}025;19} \text{y} \frac{19}{9}c_2 = X^2_{0{,}975;19}.$$

5. Propiedad

Si n es suficientemente grande:

$$-2\ln(R(\cdot)) \ {}_{aprox} X^2(r).$$

Si H_0 es verdadera.

Luego, se rechaza H_0 si $R(\cdot) < c$

$$-2\ln(R(\cdot)) > c.$$

Dónde c es tal que:

$$p(-2\ln(R(\cdot))) = \alpha, H_0 \text{verdadera}.$$

$$c = X^2_{1-\alpha,r}.$$

Es decir, se rechaza H_0 si $-2\ln(R(\cdot)) < X^2_{1-\alpha,r}$, en dónde:

$$r = \dim(\Theta) - \dim(\Theta_0).$$

6. Ejemplo

El ingreso de cierto sector de familias es $X \sim G(\theta_1, \theta_2)$. Mediante un contraste de hipótesis analizar si $X \sim \exp(\theta_2)$. Considerar $n = 100$ y $\alpha = 0{,}05$

$$\theta = (\theta_1, \theta = 2).$$

$$H_0 : \theta_1 = 1.$$

$$H_1 : \theta_1 \neq 1.$$

$$\Theta_0 = \{1\} x R^+ \mathrm{y} \Theta_1 = (R^+ - \{1\}) x R^+.$$

Esto quiere decir:

$$\theta_1 = 1; \theta_2 > 0 \mathrm{y} \theta_1 \neq 1, \theta_2 > 0.$$

Para procesar la muestra se obtuvieron:

$$\hat{\theta_1} = 5{,}8908.$$

$$\hat{\theta_2} = 1{,}1253.$$

$$\ln(L(\hat{\theta_1, \hat{\theta_2}})) = -212{,}8558.$$

Además, se tiene que:

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_1}}{\Gamma(\theta_1)} x^{\theta_1 - 1} e^{-\theta_2 x}, x > 0.$$

Bajo $\Theta_0 = \{1\}, \Theta_1 = 1$

$$f(x) = \theta_2 e^{-\theta_1 x}, x > 0.$$

$$\ln(f(x)) = \ln(\theta_2) - \theta_2 x$$

$$l(\theta_2) = 100 \ln(\theta_2) - \theta_2 \sum X_j.$$

$$= 100 \ln(\theta_2) - 100 \theta \bar{x}.$$

$$l^{'}(\theta_2) = \frac{100}{\theta_2} - 100 \bar{X}.$$

$$\hat{x_{20}} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

$$l(\hat{\theta_{20}}) = 100 \ln(\frac{1}{\bar{x}}) - 100 \frac{1}{\bar{x}} \bar{x}.$$

$$= -100 \ln(\bar{X}) - 100.$$

Se rechaza H_0 si:

$$-2 \ln(R(\cdot)) > X^2_{1-\alpha, r}.$$