Clase 2: Técnicas multivariadas

Justo Andrés Manrique Urbina

31 de agosto de 2019

Sea un vector $v \in \mathbb{R}^n$ definido como $(v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$.

Definition 1. *La longitud de un vector se define como* $L_v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$.

Definition 2. *El coseno del ángulo entre 2 vectores u y v se define como:*

$$cos\theta = \frac{uv}{L_u L_v}.$$

uv es un producto escalar definido como $\sum u_i v_i$.

Si $u = cV$*, en dónde c es una constante, entonces el coseno se expresa como:*

$$\frac{cvv}{L_v^2}.$$

Si u es perpendicular a v entonces $cos\theta = 0$. Usando $cos\theta$, se puede hablar una medida de "similaridad.entre vectores. Esto sirve para analizar textos.

1. Descomposición espectral

Recordemos que:

$$A = \Gamma \Lambda \Gamma^T.$$

en dónde $\Gamma = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ y Λ es la diagonal que contiene a todos los autovalores. Entonces A se define como

$$A = \lambda_1 e_1 e_1^T + \ldots + \lambda_p e_p e_p^T.$$

Theorem 1. *. Desigualdad de Cauchy-Schwarz Si b y d son 2 vectores, entonces se tiene que:*

$$\left(b^T d\right)^2 \leq (b^T b)(d^T d).$$

Para $b = cd$*, en dónde c es un escalar simple.*

Proof 1. *Usar el siguiente vector* $b - xd$ *en dónde x es un real arbitrario. Si* $(b - xd) \neq 0$*, entonces su longitud es mayor a 0.*

$$0 < (b - xd)^T (bx - d).$$

$$0 < b^T b - 2x(b^T d) + x^2(d^T d).$$
$$0 < b^T b - \frac{(b^T b)^2}{d^T d} + d^T d(x - \frac{b^T d}{d^T d})^2.$$

Como x es cualquier valor entonces esta expresión se cumple para

$$x = \frac{b^T d}{d^T d}.$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$0 < b^T b - \frac{(b^T d)^2}{d^T d}.$$

Cumpliéndose la igualdad.

1.1. Extensión de la desigualdad

Para B definida positiva, se tiene que:

$$b^T d \leq (b^T B b)(d B^{-1} d).$$

Proof 2.

$$b^T d = b^T I d = b^T B^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} d = (B^{\frac{1}{2}} b)^T (B^{-\frac{1}{2}} d).$$

Para B definida positiva y d vector $\forall x \neq 0$ vector, se tiene que:

$$max_x \frac{(x^T d)^2}{x^T B x} = \lambda_1.$$

dónde λ_1 es el mayor autovalor de B y el máximo se obtiene cuando x es igual a $cB^{-1}d$.

Ejercicio: Demostrar que:

- $$\frac{(x^T d)^2}{x^T B x} \neq \lambda_1, \lambda_1 \text{ es cota superior.}$$
- Ver que en $cB^{-1}d$ se cumple la igualdad.

2. Maximización de formas cuadráticas

Sea B definida positiva con $x^T B x > 0$.
Sea $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ autovalores de B.
Sea $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ autovectores de B.

$$max_{x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T x} = \lambda_1, \lambda_1 \text{ es un mayor autovalor.}$$

Entonces se tiene que:

$$B = \Gamma \Lambda \Gamma^T.$$
$$B^{\frac{1}{2}} = \Gamma \Lambda^{\frac{1}{2}} \Gamma^T.$$
$$\frac{x^T B x}{x^T x} = \frac{x^T B^{0,5} B^{0,5} x}{x^T I x} = \frac{\sum \lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2} \leq \lambda_1, \text{en dónde } Y^T = x^T \Gamma \text{ e } I = \Gamma \Gamma^T.$$

3. Vectores y matrices aleatorios

Un vector aleatorio es un vector en dónde cada componente es una variable aleatoria. Es decir $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ en dónde cada componente $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ es una variable aleatoria.

Una matriz aleatoria, cada uno de sus componentes es una variable aleatoria. Es decir:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{np} \end{pmatrix}$$

En dónde cada entrada X_{ij} es una variable aleatoria.

3.1. Vector aleatorio

La distribución del vector X es una función de distribución conjunta. Para X_i, todas conjuntas, se tiene que:

$$f(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_p).$$

Para variables discretas, es la suma.

Valor esperado de un vector aleatorio: Sea X un vector aleatorio, entonces el valor esperado de X se denota con el vector $u = E(\bar{X}) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$

Covarianza de un vector aleatorio: Sea X una matriz aleatoria, entonces la covarianza de X es: $Cov(X) = E((X - \mu)(X - \mu)^T)$

Propiedades: Se tienen la siguientes propiedades:

$$E(cX) = cE(X).$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

$$(E(AXB) = A * E(X) * B, A \text{ y } B \text{ son matrices no aleatorias.}$$

$$cor(CX) = C \sum_X C^T.$$

3.2. Muestreo en Multivariado

Es lo mismo que muestreo univariado.