Clase 2: Inferencia Estadística

Justo Andrés Manrique Urbina

29 de agosto de 2019

1. Ejemplo

Sea $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de $X \sim exp(\beta)$. Como estimador de β, consideraremos lo siguiente:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Validaremos si $\hat{\beta}$ es un estimador consistente. Recordemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{X} = E(X) \text{ c.s.}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\beta} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\bar{X}}) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \bar{X}} = \frac{1}{\frac{1}{\beta}} = \beta \text{ c.s.}$$

Debido a ello, podemos concluir que $\hat{\beta}$ es un estimador consistente.

2. Ejemplo

En base al ejemplo anterior, consideremos lo siguiente:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2n}{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}.$$

Validaremos si $\hat{\beta}_1$ es consistente.

$$\hat{B}_1 = \frac{2}{\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}{n}}.$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2}{\bar{X}^2}.$$

Luego, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \hat{\beta}_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\bar{X}^2}$. Esto es:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\lim_{n\to\infty} \bar{X}^2}.$$

$$= \frac{2}{E(X^2)}, \text{ c.s.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\beta}_1 = \frac{2}{\frac{2}{\beta^2}} = \beta^2, \text{ c.s.}$$

Por lo tanto, $\hat{\beta}_1$ no es un estimador consistente de β. Cabe resaltar que $\hat{\beta}_2 = \sqrt{\hat{\beta}_1}$ entonces $\hat{\beta}_2$ sí es un estimador consistente, pues

$$\text{lím}\, n \to \infty \hat{\beta}_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\hat{\beta}_1}.$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \hat{\beta}_1}.$$

$$= \sqrt{\beta^2}\ , \text{ c.s.}$$

$$= \beta.$$

Tarea: Hallar expresiones simplificadas de $E(\hat{\beta})$ y $V(\hat{\beta})$. **Sugerencia:** Recordemos que:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} X_j}.$$

El denominador, que ahora lo definiremos como T, tiene distribución $T \sim G(n, \beta)$. Por lo tanto se tiene que:

$$\hat{\beta} = nT^{-1}.$$

Dado que el valor esperado de T, $E(T^t)$ es igual a:

$$E(T^t) = \frac{\Gamma(n+t)}{\beta^t \Gamma(n)}, n + t > 0.$$

Dado el contexto de muestra aleatoria, se tiene que:

$$E(T^t) = \frac{\Gamma(n-1)}{\beta^{-1}\Gamma(n)}.$$

$$= \beta \frac{(n-2)!}{(n-1)!}.$$

$$E(T^t) = \frac{\beta}{n-1} \tag{1}$$

De ello, se obtiene que:

$$E(\hat{\beta}) = E(nT^{-1}).$$

$$E(\hat{\beta}) = nE(T^{-1}).$$

$$E(\hat{\beta}) = \frac{n}{n-1}\beta.$$

Por otro lado, la varianza del estimador, $V(\hat{\beta})$ es:

$$V(\hat{\beta}) = V(nT^{-1}).$$
$$= n^2 V(T^{-1}).$$

Recordemos que $V(T^{-1})$ es igual a $E(T^{-2}) - E^2(T^{-1})$. Solo falta calcular $E(T^{-2})$, el cual es:

$$E(T^{-2}) = \frac{\Gamma(n-1)}{\beta^{-2}\Gamma(n)}, n > 2.$$
$$= \frac{(n-3)!}{\beta^{-2}(n-1)!}.$$
$$E(T^{-2}) = \frac{\beta^2}{(n-1)(n-2)} \tag{2}$$

La varianza por tanto es:

$$V(\hat{\beta}) = n^2[\frac{\beta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\beta^2}{(n-1)^2}].$$
$$= \frac{n^2\beta^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

3. Ejercicio

Sea $\hat{\beta}_3 = \frac{n-1}{n\bar{X}}$. Verificar que $\hat{\beta}_3$ es insesgado y consistente.

4. Ejemplo

Sea $\bar{p}$ el estimador usual de p; es decir, $\bar{p} = \bar{X}$, dónde $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ son una muestra aleatoria de $X \sim B(p)$. Deducir una expresión simplificada para $V(\bar{p})$.

$$V(\hat{p}) = V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Esto se debe a que $X \sim B(p)$.

Definition 1. *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de X, dónde $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$; entonces:*

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \to Z \sim N(0,1).$$

Asi, para un n suficientemente grande, se tiene entonces:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1), \mathit{aproximadamente}.$$

Observación: Se tiene que:

$$|\bar{X} - \mu| : \text{error de estimación.}$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} : \text{error estándar de estimación de } \bar{X}.$$

Luego, $P(|\bar{X} - \mu|) < c\sigma_{\bar{X}}$ es una cantidad de interés. Se tiene entonces que:

$$P(|\bar{X} - \mu| < c\sigma_{\bar{X}}).$$

$$P(|\bar{X} - \mu| < c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

$$P(\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - \mu|}{\sigma} < c).$$

$$P(|Z_n| < c).$$

$$P(-c < Z_n < c).$$

$$P(-c < Z > c), \text{dónde } Z \sim N(0,1).$$

$$F_z(c) - F_z(-c).$$

$$2F_z(c) - 1.$$

Theorem 1. *(Teorema de Slutsky): Se tiene lo siguiente:*

$$X_n \to X, \textit{converge en distribución.}$$

$$plimY_n \to c, \textit{converge en probabilidad.}$$

Entonces: $X_nY_n \to cX$, *con convergencia en distribución. Entonces se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X, c.s. \to plimX_n = X, \textit{converge en distribución.}$$

Propiedad: Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de X, dónde $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$ y $\hat{\sigma}$ es un estimador consistente de σ; entonces

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}} \to Z \sim N(0,1), \text{converge en probabilidad.}$$

Proof 1. *Sea:*

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}} \to Z \sim N(0,1), \textit{converge en probabilidad.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma} = \sigma, c.s.$$

Se tiene entonces que:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\hat{\sigma}} = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}.$$

Aplicando el teorema anterior, y dado que $\hat{\sigma}$ es consistente. Se tiene entonces que:

$$Y_n Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\hat{\sigma}}.$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\hat{\sigma}} \to Z, \textit{converge en distribución.}$$

Observación: Con el resultado anterior se puede evaluar $P(|\bar{X}-\mu| < \hat{\sigma}_{\bar{X}})$ dónde $\hat{\sigma}_{\hat{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$. El término final se le conoce como *estimación del error estándar de estimación.*

5. Propiedad de Suficiencia

Definition 2. *Una estadística $T = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una estadística suficiente para θ, si:*

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n|T=t}, \textit{no depende de } \theta, \forall t \textit{ valor posible de } T.$$

5.1. Ejemplo:

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de $X \sim P(\lambda)$. Sea

$$T = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Veamos si T es una estadística suficiente para λ.

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n|T=t}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{P(X_1 = x_1 \cap \ldots \cap X_n = x_n \cap T = t)}{P(T=t)}.$$

5.1.1. Caso 1

Si $\sum_{j=1}^{n} x_j \neq t$, se tiene entonces que

$$\frac{P(\emptyset)}{P(T=t)} = 0.$$

5.1.2. Caso 2

Si $\sum_{j=1}^{n} x_j = t$, entonces se tiene que:

$$\frac{P(X_1 = x_1 \cap \ldots \cap X_n = x_n)}{T = t}.$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} P(X_j = x_j)}{P(T = t)}.$$

Dado que $X \sim P(\lambda)$:

$$\frac{\prod_{j=!}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_j}}{x_j!}}{\frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^t}{t!}}.$$

Simplificando, se tiene que:

$$\frac{\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{j=1}^{n} x_j}}{\prod_{j=1}^{n} x_j!}}{\frac{e^{-n\lambda}n^t\lambda^t}{t!}}.$$

$$\frac{t!}{n^t \prod_{j=1}^{n} x_j!}.$$

Por lo tanto, esta estadística es suficiente y ya no depende del parámetro λ.

5.1.3. Ejercicio

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de $X \sim P(\lambda)$ y $\bar{X}$ es un estimado insesgado de λ. Es decir, $E(\bar{X}) = E(X) = \lambda$. ¿Es $\bar{X}$ un estimador suficiente para λ?

Resolución: Sí, pues:

$$\bar{X} = \frac{T}{n}, T \text{ es suficiente de } \lambda.$$

Theorem 2. *Factorización de Neyman. Una estadística $T = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es suficiente para el parámetro θ si y solo si existen funciones h, independientes de θ, y l tales que:*

$$\forall (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}_{X_1, X_2, \ldots, X_n}, \forall \theta \in \Theta.$$

$$f(_1,_2, \ldots,_n) = h(X_1, X_2, \ldots, X_n) l(g(X_1, X_2, \ldots, X_n), \theta).$$

Proof 2. *En el desarrollo del caso anterior (caso discreto), se tenía lo siguiente:*

Caso 1: *$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es tal que $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \neq t$:*

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n | T=t}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0.$$

no depende de θ.

Caso 2: *$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es tal que $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = t$, se tiene lo siguiente:*

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n|T=t}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(X_j = x_j)}{P(T = t)}.$$

$$\frac{f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\sum \cdots \sum f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)}.$$

5.2. Ejemplo

$\bar{X} = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ es una estadística suficiente para λ, pues

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{1}{x_1! * \ldots * x_n!}\lambda^{\frac{n(x_1+\ldots+x_n)}{n}}e^{-n\lambda}., x_i \in \mathbb{N}$$

Se observa aquí en el primer factor el $h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y en el segundo $l(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}, \lambda)$.

5.3. Propiedad

Si T_1 es una estadística suficiente para θ y T_2 es una estadística tal que T_1 es una función de T_2, entonces T_2 también es suficiente.

Proof 3. *Se tiene:*

$$T_1 = g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

$$f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)l(g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n); \theta).$$

Pero como T_1 es una función de T_2, digamos $T_1 = g(T_2)$, entonces:

$$g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g(T_2).$$

Pero T_2 también es una estadística, entonces:

$$T_2 = g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

$$g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g(g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)).$$

De ello entonces se obtiene que

$$f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)l(g(g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n); \theta)).$$

Entonces $g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una estadística suficiente.