Definición: Dadas las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0.$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

Fijado $\eta y \alpha$. Si $\forall \theta \in \Theta_1$, la regla de decisión óptima para el contraste

$$H_0 = \theta = \theta_0.$$

$$H_{1:\theta=\theta_2}.$$

es la misma, entonces esta regla se llama la regla de decisión uniformemente más poderosa.

1. Ejemplo

$$X \sim N(\mu, 10).$$

en dónde $n = 20$ y $\alpha = 0{,}05$. Deduzca, si existe, la regla UMP para el contraste:

$$H_0 : \mu = 5.$$

$$H_1 : \mu > 5.$$

Solución: Tenemos que:

$$\Theta_{1=\{\mu:\mu>5\}}.$$

$$H_0 : \mu = 5.$$

$$H_1 : \mu \in \Theta_1.$$

Sea $\mu_1 > 5(\mu \in \Theta_1)$ y consideramos el contraste:

$$H_0 : \mu = 5.$$

$$H_1 : \mu = \mu_1.$$

Mediante Neyman-Pearson hallamos la regla de decisión óptima para estas hipótesis (es decir, la que minimiza β o maximiza la potencia $1 - \beta$). Se vió en un ejemplo anterior que:

$$l(\mu) = 20(-\ln(\sqrt{2\pi} - \ln(\sqrt{10}))) - \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{20} (X_j - \mu)^2.$$

Se rechaza H_0 si:

$$\frac{L(\mu_1)}{L(5)} > 5.$$

$$20(-\ln(\sqrt{2\pi}-\ln(\sqrt{10})))-\frac{1}{10}\sum_{1}^{20}(X_j-\mu_1)^2-20(-\ln(\sqrt{2\pi})-\ln(\sqrt{10}))+\frac{1}{10}\sum (X_j-5)^2 > c.$$

$$(\mu_1 - 5)\sum_1^{20}(X_j - 5)^2 > c.$$

$$\sum_1^{20} X_j > c.$$

Pues no depende de μ_1

$$\bar{X} > c.$$

Dónde c es tal que:

$$\text{P (Rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera)} = 0{,}05.$$

$$P(\bar{X} > c, \mu = 5) = 0{,}05.$$

Por otra parte, tenemos que:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

$$Z \sim N(0,1).$$

$$Z \sim \frac{\sqrt{20}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{10}} \sim N(0,1).$$

En dónde:

$$F_z(\frac{\sqrt{20}(c-5)}{\sqrt{10}}) = 0{,}95.$$

$$\frac{\sqrt{20}(c-5)}{\sqrt{10}} = 1{,}645.$$

$$c = 6{,}1632.$$

Se rechaza H_0 si $\bar{X} > 6{,}1632$. Esta es la regla de decisión óptima (minimiza β o maximiza π). Como esta regla de decisión es la misma para cualquier valor de μ_1 (no depende de μ_2) entonces esta es la regla de decisión uniformemente más poderosa.

2. Ejercicio

En el ejemplo anterior determinar β (para el contraste original). **Solución:**

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0 \text{ siendo falsa}).$$

$$\beta = P(\bar{X} \leq 6{,}1632, \mu > 5).$$

$$\beta = \beta(\mu) = P(\bar{X} \leq 6{,}1632), \mu > 5.$$

$$= F_{\bar{X}}(6{,}1632), \mu > 5.$$

En relación al ejemplo anterior, tenemos que:

$$\beta = \beta(\mu) = F_z(\frac{\sqrt{20}(6{,}1632 - \mu)}{\sqrt{10}}), \mu > 5.$$

Note lo siguiente:

- Si μ sube, entonces $\beta(\mu)$ baja.
- $\beta(\infty) = \lim_{\mu\to\infty} \beta(\mu) = \lim_{\mu\to\infty} F_z(\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}})(6{,}163 - \mu) = 0$
- $\beta(5^+) = \lim_{\mu\to 5^+} \beta(\mu) = F_z(\frac{\sqrt{20}(6{,}1632-5)}{\sqrt{10}}) = F_z(1{,}645) = 0{,}95.$

Sea $\mu_1 < 5$ y considerando el contraste auxiliar:

$$H_0 : \mu = 5.$$

$$H_1 : \mu = \mu_1.$$

A este contraste se le aplica el Lema de Neyman-Pearson.

Se rechaza H_0 si:

$$\frac{L(\mu_1)}{L(5)} > c.$$

$$l(\mu_1) - l(5) > c.$$

$$\sum_{1}^{20} X_j < c.$$

Se rechaza H_0 si $\bar{X} < c$ dónde c es tal que:

$$P(\text{Rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera}) = 0{,}05.$$

$$P(\bar{x} < c, \mu = 5) = 0{,}05.$$

$$F_{\bar{X}}(c) = 0{,}05, \mu = 5.$$

Pero como:

$$Z = \frac{\sqrt{20}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{10}} \sim N(0,1).$$

Resulta que:

$$F_z(\frac{\sqrt{20}(c-5)}{\sqrt{10}}) = 0{,}05.$$

$$\frac{\sqrt{20}(c-5)}{\sqrt{10}} = 1{,}645.$$

$$c = 3{,}8368.$$

Se rechaza H_0 si $\bar{X} < 3{,}8368$

Esta regla es la regla óptima (minimiza β) para el contraste auxiliar, que no depende de μ_1, viene a ser la regla de decisión uniformemente más poderosa para el contraste de hipótesis regional.

3. Ejercicio

En el ejemplo anterior graficar β. Sea β tal que:

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0 \text{ siendo falsa.}).$$

$$= P(\bar{X} > 3{,}8368, \mu < 5).$$

$$\beta = \beta(\mu) = P(\bar{X} > 3{,}8368), \mu = 5.$$

$$= 1 - F_{\bar{X}}(3{,}8368), \mu = 5.$$

$$H_0 : \mu = 5.$$

$$H_1 = \mu < 5.$$

Estandarizando:

$$\beta = \beta(\mu) = 1 - F_z(\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}(3{,}8368 - \mu)).$$

Observar que:

- Si μ sube, entonces $\beta(\mu)$ sube.
- $\beta(-\infty) = \lim_{\mu\to\infty} \beta(\mu) = 1 - F_z(\infty) = 0$
- $\beta(5^-) = \lim_{\mu\to 5^-} \beta(\mu) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

4. Ejemplo 3

$$X \sim N(\mu, 10), n = 20, \alpha = 0{,}05.$$

$$H_0 : \mu = 5.$$

$$H_1 : \mu \neq 5.$$

Sea $\mu \neq 5$ y consideramos el contraste de hipótesis auxiliar.