## El parámetro de dispersión

La familia exponencial es escrita en la siguiente forma

$$f_Y(y;\theta,\phi) = \exp\left\{\frac{y\theta - B(\theta)}{\phi} + C(y,\phi)\right\}, \tag{1}$$

donde $B(\cdot)$ y $C(\cdot,\cdot)$ son funciones conocidas, y el rango de $Y$ no depende de $\theta$ o $\phi$. En este caso, llamamos a $\theta$ el *parámetro canónico*, y $\phi$ el *parámetro de dispersión*. Si la distribución es parameterizada en términos de la media de $Y$, $\mu$, entonces $\theta \equiv g(\mu)$ para alguna función $g$, luego $g(\mu)$ es la función de enlace canónica.

NOTA: Para una v.a. $Y$ con distribución de la forma (1),

$$\mu \equiv \mathrm{E}[Y] = B'(\theta)$$

y

$$\mathrm{Var}[Y] = B''(\theta)\phi \equiv V(\mu)\phi.$$

Aquí $V$ es llamada *función de varianza*. Así, la función de varianza es igual a $B''(\theta)$ para familias exponenciales.

## Ejemplo: Distribución Gamma

La f.d.p de una v.a. $Y$ con distribución Gamma$(\alpha, \nu)$ , $0 < \alpha, \nu, y < \infty$, puede ser escrita como

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{y^{\nu-1}\alpha^{\nu}e^{-y\alpha}}{\Gamma(\nu)} \\ &= \exp\{-y\alpha + \nu\log\alpha + (\nu-1)\log y - \log\Gamma(\nu)\} \\ &= \exp\left\{\frac{y(-\alpha/\nu) - [-\log\alpha]}{1/\nu} + (\nu-1)\log y - \log\Gamma(\nu)\right\}. \end{aligned}$$

Sea $\theta \equiv -\alpha/\nu$ y $\phi \equiv 1/\nu$,

$$f_Y(y) = \exp\left\{\frac{y\theta - [-\log(-\theta)]}{\phi} - \log(\phi)/\phi + (1/\phi - 1)\log y - \log\Gamma(1/\phi)\right\}$$

Luego, la distribucion Gamma forma parte de la familia exponencial con $B(\theta) = -\log(-\theta)$ ay parametro de dispersion $\phi \equiv 1/\nu$. Esta definicion de $\phi$ es convencional, y es usada en R. Como

$$\mu \equiv \mathrm{E}[Y] = B'(\theta) = -\frac{1}{\theta}$$

y

$$\mathrm{Var}[Y] = B''(\theta)\phi = \frac{\phi}{\theta^2} = \phi\mu^2,$$

esta definicion implica que $V(\mu) = \mu^2$.

La forma mas facil de encontrar la funcion de enlace canonica de la distribucion gamma es parametrizar en terminos de su media. Asi podemos calcular:

$$f_Y(y) = \exp\left\{\frac{y\left(-\frac{1}{\mu}\right) - \log(\mu)}{\phi} - \log(\phi)/\phi + (1/\phi - 1)\log y - \log\Gamma(1/\phi)\right\}.$$

Luego, la funcion de enlace canonica es $g(\mu) = -\frac{1}{\mu}$.

# MLG para parámetro de dispersión desconocido

En particular, “tratamos” $\phi$ como conocido y común a todas las observaciones. Luego, dejamos $\mu$ (y así $\theta$) variar entre las observaciones en la forma usual, es decir. para observaciones $Y_1, \ldots, Y_n$, asumimos que

$$g(\mu_i) = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j.$$

La diferencia entre este modelo y los MLG usuales es que, además de estimar los $\beta_j$'s, necesitamos estimar también $\phi$. Podemos obtener un estimador usando la estadística de Pearson chi-cuadrado y sus propiedades asintóticas.

## Estimación del parámetro de dispersión

En general, la estadística de Pearson se define como

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \hat{\mu}_i)^2}{V(\hat{\mu}_i)},$$

donde $\mathrm{Var}[Y_i] = V(\mu_i)\phi$.

La estadística de Pearson chi-cuadrado *estandarizada* es definida como

$$X_s^2 = \frac{X^2}{\phi}.$$

Resulta que, si el modelo es especificado correctamente,

$$X_s^2 \sim \chi^2_{n-p}$$

asintóticamente, donde $n$ es el tamaño de muestra y $p$ es el número de coeficientes de regresión (los $\beta_j$'s) en el modelo.

Como el valor esperado de una v.a. $\chi^2_{n-p}$ es $n-p$, podemos usar la aproximación $X_s^2 \approx n-p$, y así un estimador

$$\hat{\phi} = \frac{X^2}{n-p}.$$

Note que este *no* es el EMV de $\phi$ (es realmente *un estimador de momentos*).

Ejemplo: Distribución Gamma (cont.)

Para v.a.s independientes $Y_1, \ldots, Y_n$ con $Y_i \sim$Gamma$(\theta_i, \nu)$,

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_i] &= B''(\theta)\phi \\ &= \frac{\phi}{\theta^2} \\ &\equiv \mu_i^2\phi \end{aligned}$$

so $V(\mu_i) \equiv \mu_i^2$ y

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\hat{\mu}_i^2}.$$

Entonces,

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\hat{\mu}_i^2(n-p)}.$$

Como los estimadores de momentos también tienen la propiedad de invarianza (como los EMVs), podemos estimar $\nu$ por

$$\hat{\nu} = \frac{1}{\hat{\phi}}.$$