

Lista de ejercicios 1 - Fundamentos de Probabilidad

3 de abril de 2019

Justo Andrés Manrique Urbina - 20091107

1. Pregunta 5.a.

Demuestre que $A_1 \in \sigma(C)$, $A_2 \in \sigma(C)$, ...

Demostración:

Supongamos $A_i \in C$, $i = 1, 2, \dots$

Recordemos que, por definición 1.2. del texto de la clase, $C \subset \sigma(C)$

Por lo tanto, $A_i \in C \subset \sigma(C)$, $i = 1, 2, \dots$

Finalmente, $A_i \in \sigma(C)$, $i = 1, 2, \dots$

2. Pregunta 5.b.

Demuestre que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$.

Demostración:

Supongamos que $A_i \in \sigma(C)$, $i = 1, 2, \dots$,

Por definición de σ -álgebra (definición 1.1 del texto de la clase), toda σ -álgebra es cerrada respecto a reuniones infinitas enumerables.

Dada la suposición y la definición de σ -álgebra, se concluye que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$.

3. Pregunta 16.a.

Demuestre que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ -álgebra en Ω_1 .

Demostración:

Supongamos que $\sigma(C)$ es una σ -álgebra en Ω_2 . Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

- $\Omega_2 \in \sigma(C)$

- $\forall A \in \sigma(C) : A^c \in \sigma(C)$
- $\forall A_1, A_2, \dots \in \sigma(C) : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$

Para demostrar que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ -álgebra en Ω_1 , verificaremos si dicha imagen inversa cumple los 3 axiomas de la definición de σ -álgebra en Ω_1 .

Respecto al primer axioma, recordemos que $\Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2)$ y que $\Omega_2 \in \sigma(C)$. Por lo tanto, por definición, $\Omega_1 \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el primer axioma.

Respecto al segundo axioma, recordemos que $(A)^c \in \sigma(C)$, y si $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\sigma(C))$, entonces, por propiedad, $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el segundo axioma.

Respecto al tercer axioma, recordemos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(C)$ y que si $f^{-1}(A_j) \in f^{-1}(\sigma(C))$, $j = 1, 2, \dots$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \in f^{-1}(\sigma(C))$. Se cumple el tercer axioma.

Dado que se cumplen los tres axiomas en Ω_1 se concluye que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ -álgebra en Ω_1 .

4. Pregunta 16.b.

Demuestre que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

Demostración:

Supongamos $\sigma(C)$ es una σ -álgebra de Ω_2 generada en C . Por lo demostrado en la pregunta anterior, $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ -álgebra en Ω_1 .

Por definición, la σ -álgebra generada en C es la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a C .

Por lo tanto, dado que $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ -álgebra en Ω_1 generada en $f^{-1}(C)$, entonces dicha σ -álgebra es la intersección de todas las σ -álgebras de Ω_1 que contienen a $f^{-1}(C)$.

Dado lo indicado anteriormente, se concluye que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

5. Pregunta 16.c.

Demuestre que $\sigma(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.

Demostración:

Supongamos $\sigma(C)$ es una σ -álgebra de Ω_2 generada en C . Por lo demostrado en las preguntas anteriores, $f^{-1}(\sigma(C))$ es una σ -álgebra en Ω_1 y $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$.