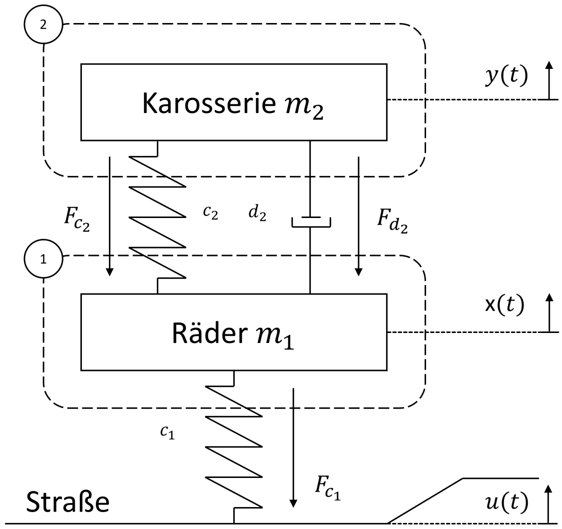
Automobilfederung

Im Folgenden wird ein vereinfachtes Modell einer Automobilfederung abgeleitet. Dabei dient das In Abbildung 1b dargestellte Ersatzschaltbild.

(a) Radaufhängung



(b) Ersatzschaltbild

Abbildung 1: Automobilfederung

Es stellen $y(t)$ und $x(t)$ die Höhen von Karosserie und Rädern über dem Nullniveau der Straße in Metern dar. Letztere wirkt als Eingangsgröße mittels $u(t)$ auf das Gesamtsystem. Die Federkräfte werden mit den dazugehörigen Federkonstanten c_1 und c_2 als F_{c_1} und F_{c_2} bezeichnet. Neben Federkraft F_{c_2} wirkt Dämpferkraft F_{d_2} mit der Dämpferkonstante d_2 zwischen Karosserie und den Rädern. Diese stellen dabei das in Abbildung 1a in rot visualisierte Feder-Dämpfer System dar. Das Abrollen der Reifen auf der Straße wird mittels Federkraft F_{c_1} modelliert. Die Massen von Karosserie und Rädern werden mit m_2 und m_1 berücksichtigt.

Differentialgleichungssystem Zunächst werden die Kräftebilanzen für Bilanzräume (1) und (2) aufgestellt. Diese ergeben sich zu Gleichung 1

$$F_{T_2} = -F_{c_2} - F_{d_2} \tag{1a}$$

$$F_{T_1} = F_{c_2} + F_{d_2} - F_{c_1} \tag{1b}$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung 2 ergibt sich das beschreibenden Differentialgleichungssystem 7

$$
\begin{aligned}
F_T &= m \cdot a && \text{(2a)}\\
F_d &= d \cdot v && \text{(2b)}\\
F_c &= c \cdot x && \text{(2c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_2 \ddot{y} &= -d_2 \cdot (\dot{y} - \dot{x}) - c_2 \cdot (y - x) && \text{(3a)}\\
m_1 \ddot{x} &= d_2 \cdot (\dot{y} - \dot{x}) + c_2 \cdot (y - x) - c_1 (x - u) && \text{(3b)}
\end{aligned}
$$

Zustandsraumdarstellung Um das gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (Gleichung 7) in System erster Ordnung in Matrizendarstellung 4 mit Dynamikmatrix A, Störmatirx B, Zustandsvektor z und Eingangsvektor u zu überführen, wird zunächst ein Zustandsvektor eingeführt.

$$\dot{z} = A \cdot z + B \cdot u \tag{4}$$

Dieser setzt sich mit $z_1 = y$, $z_2 = \dot{y}$, $z_3 = x$ und $z_4 = \dot{x}$ wie folgt zusammen.

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Abgeleitet ergibt sich für die zeitliche Änderung des Zustandsvektors Gleichung 6

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \frac{d_2}{m_2} \cdot (z_4 - z_2) + \frac{c_2}{m_2} \cdot (z_3 - z_1) \\ z_4 \\ \frac{d_2}{m_1} \cdot (z_2 - z_4) + \frac{c_2}{m_1} \cdot (z_1 - z_3) + \frac{c_1}{m_1} \cdot (u - z_3) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Nach Überführung der rechten Seite in die Form, welche in Gleichung 2 die Zustandsraumdarstellung beschreibt ergeben sich die Matrizen A und B zu:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_2}{m_2} & -\frac{d_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{d_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_2}{m_1} & \frac{d_2}{m_1} & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{d_2}{m_1} \end{bmatrix} && \text{(7a)}\\
B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c_1}{m_1} \end{bmatrix} && \text{(7b)}
\end{aligned}
$$