Modellierung 2D Wärmeleitung

Die Allgemeine Bilanzgleichung für ein infinitesimales Bilanzelement wie in Abbildung 1

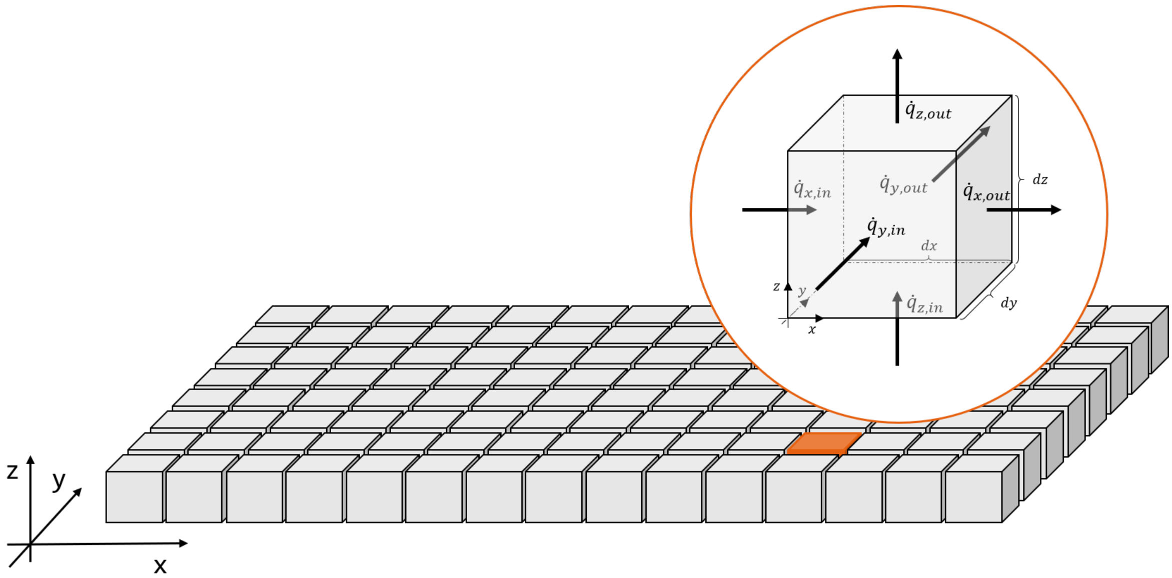

Abbildung 1: Allgemeines Bilanzelement innerhalb einer 2D diskretisierten Platte

dargestellt, ergibt sich zu Gleichung 1

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=\{x,y,z\}} d\dot{Q}_{i,in} - \sum_{i=\{x,y,z\}} d\dot{Q}_{i,out} + \sum_{s} d\dot{Q}_{s} \tag{1}$$

Da im vorliegenden Use Case lediglich in x und y Dimension die Wärmeleitung simuliert werden soll, kann auf eine Diskretisierung in z Richtung verzichtet werden. Die Allgemeine Bilanzgleichung ergibt sich folglich zu:

$$\frac{dU}{dt} = d\dot{Q}_{x,in} - d\dot{Q}_{x,out} + d\dot{Q}_{y,in} - d\dot{Q}_{y,out} + \sum_{s} d\dot{Q}_{s} \tag{2}$$

Dabei gilt:

$$d\dot{Q}_{x,in} = dA_y \cdot \dot{q}_{x,in} = dy \cdot dz \cdot \dot{q}_{x,in} \tag{3}$$

$$d\dot{Q}_{x,out} = dA_y \cdot \dot{q}_{x,out} = dy \cdot dz \cdot \dot{q}_{x,out} \tag{4}$$

$$d\dot{Q}_{y,in} = dA_x \cdot \dot{q}_{y,in} = dx \cdot dz \cdot \dot{q}_{y,in} \tag{5}$$

$$d\dot{Q}_{y,out} = dA_x \cdot \dot{q}_{y,out} = dx \cdot dz \cdot \dot{q}_{y,out} \tag{6}$$

Flächenspezifische Wärmeströme werden mittels fourierscher Wärmeleitung allgemein nach Gleichung 7

$$\dot{q}_x = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} = -\lambda \cdot \frac{T(x) - T(x-dx)}{dx} \tag{7}$$

Folglich ergeben sich für die in x und y Richtung ein und austretenden Wärmeströme Gleichung 8 bis 11

$$\dot{q}_{x,in} = -\lambda \cdot \frac{T_{x,y} - T_{x-1,y}}{dx} \tag{8}$$

$$\dot{q}_{x,out} = -\lambda \cdot \frac{T_{x+1,y} - T_{x,y}}{dx} \tag{9}$$

$$\dot{q}_{y,in} = -\lambda \cdot \frac{T_{x,y} - T_{x,y-1}}{dy} \tag{10}$$

$$\dot{q}_{x,out} = -\lambda \cdot \frac{T_{x,y+1} - T_{x,y}}{dy} \tag{11}$$

Im Folgenden werden die Quellterme verwendet, um den entsprechenden Bilanzelementen zeitaufgelöste Wärmestrome zuzuführen: Sie folgen in ihrer volumenspezifischen Darstellung Gleichung 12

$$d\dot{Q}_s = dV \cdot \dot{q}_s = dxdy \underbrace{dz}_{= \text{h}} \tag{12}$$

Da lediglich ein Quellstrom pro Bilanzelement benötigt wird, kann in Gleichung 2 das Summenzeichen um die Quellterme vernachlässigt werden. Die Linke Seite von Gleichung 2 kann mit Gleichung 13

$$dU = dm \cdot cp \cdot dT \tag{13}$$

zu folgendem Ausdruck umgewandelt werden:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{c_p \cdot dm \cdot dT}{dt} = c_p \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dT}{dt} \tag{14}$$

Damit ergibt sich die zu implementierende Gleichung zu:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz} \cdot d\dot{Q}_{x,in} - d\dot{Q}_{x,out} + d\dot{Q}_{y,in} - d\dot{Q}_{y,out} + d\dot{Q}_s} \tag{15}$$

Implementierung Bei der Implementierung der right-hand-side bietet es sich an wie folgt vor zu gehen.

- Initialisierung der Matrizen $d\dot{Q}_s, d\dot{Q}_{x,in}, d\dot{Q}_{x,out}, d\dot{Q}_{y,in}, d\dot{Q}_{y,out}$
- Berechnung der Quellterme $d\dot{Q}_s$
- Setzten der Randbedingungen
- Berechnung der Ströme in x und y Richtung $d\dot{Q}_{x,in}, d\dot{Q}_{x,out}, d\dot{Q}_{y,in}, d\dot{Q}_{y,out}$
- Berechnung der left-hand-side $\frac{dT}{dt}$