

逢 甲 大 學
自 動 控 制 工 程 學 系 碩 士 班
碩 士 論 文

應用智慧型控制演算法則於陀螺儀自動
對準之設計

Auto- Alignment Design of Gyroscopes Using
Intelligent Control Algorithm



指導教授：黃榮興

研 究 生：廖暄哲

中 華 民 國 九 十 四 年 六 月 廿 九 日

致謝

在就讀研究所的兩年之間，首先要感謝的是我的指導教授黃榮興博士，感謝老師在研究的過程中，給予正確的研究觀念與方向。並在研究遇到困難時提醒我解決的方法，同時也讓我學習到如何待人處世。並且感謝口試委員陳杏圓老師、林君明老師給我的指導與建議，使得本論文得以補強不足之處。

感謝實驗室的夥伴們李仙耀、吳麗華在生活上與學業方面給我幫助與鼓勵，並且讓我瞭解與人相處的道理。感謝你們讓研究所生涯這兩年顯得多姿多采充滿回憶。

感謝實驗室的學弟慶宏、堃豪、智翔與學長廖銘暘、龔健忠、郭明松在各方面適時的幫助，讓我在研究方面與日常生活得以更加順利。

最後感謝我的家人，爸媽在給予經濟上的支持，並在生活上給我鼓勵和關心，在此將此論文與你們分享。



中文摘要

本論文之研究目的是在發展一套利用平台運動學 (platform kinematics) 與微機電振動式陀螺儀 (MEMS Vibrational Gyroscope) 配合智慧型擴展式卡爾曼濾波器 (Intelligent extended the kalman filter) 之整合式自動對準系統。

由於傳統飛機導航與姿態量測，大多使用慣性導航 (INS) 與全球衛星定位系統 (GPS)，再配合卡爾曼濾波器 (Kalman Filter)，利用 INS 與 GPS 誤差互補特性以進行估測，求得飛機最佳的姿態；然而在動感平台姿態量測時，其平台工作空間很小，無法使用上述方法，有鑒於目前微機電振動式陀螺儀已發展得相當成熟，因此本論文中，我們使用 MEMS 振動速率陀螺儀，再由四元素法算出平台姿態；另一方面透過編碼器量得的信號經過換算得之桿長，再經由順向運動方程求得對應之平台姿態，配合智慧型擴展式卡爾曼濾波器，可估測最佳之平台姿態方位，以達成陀螺儀靜態與動態自動對準之目的，此即整合式自動對準系統。

關鍵字：平台運動學、微機電振動式陀螺儀、智慧型擴展式卡爾曼濾波器、四元素法

Abstract

The research purpose of this thesis is to develop the integration type that an arbitrage uses the platform kinematics with the MEMS vibrational gyroscope concert up the intelligent extended Kalman filter to aim at the auto-alignment system.

As we know the traditional airplane navigates with the attitude measurement using mostly inertial navigation system (INS) with the global/positioning system (GPS). Using the error complementary characteristic of the INS and GPS in the Kalman filter to estimate the best attitude of the airplane. However at the platform attitude measurement, the work space of the platform is very small, so the above-mentioned method can't be used. In view of the current the MEMS sensors, the development of the vibrational gyroscope is rather mature.

So we use quaternion method to calculate the platform attitude based on the MEMS vibrational gyroscope data; On the other hand, the length of the leg is calculated through the measured signal of the encoder, the corresponding platform attitude is found by using forward kinematics equation, and then the optimal platform attitude can be estimated with the intelligent extended Kalman filter, by this way we can achieve the goal of static and dynamic auto-alignment for the gyroscope.

Keywords: platform kinematics, MEMS Vibrational Gyroscope, Intelligent extended the kalman filter, quaternion method

目錄

致謝.....	i
中文摘要.....	ii
Abstract.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vi
表目錄.....	viii
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景及動機.....	1
1.2 研究目的及其重要性.....	3
1.3 國內外相關研究.....	4
1.3.1 微機電振動式陀螺儀發展相關文獻.....	4
1.3.2 振動式陀螺儀誤差消除相關文獻.....	4
第二章 系統簡介與理論說明.....	5
2.1 自動對準系統簡介.....	5
2.2 三桿六自由度平台簡介.....	6
2.2.1 平台系統之簡介.....	6
2.2.2 三桿六自由度平台逆向運動方程式推導.....	6
2.2.3 三桿六自由度平台順向運動方程式推導.....	8
2.3 慣性導航系統簡介.....	10
2.3.1 慣性導航基本原理.....	10
2.3.2 慣性導航系統架構.....	11
2.3.3 座標轉換.....	13
2.4 振動式陀螺儀簡介.....	16
2.4.2 振動式陀螺誤差分析.....	18
2.5 卡爾曼濾波器簡介.....	19
2.5.1 卡爾曼濾波器原理.....	19
2.5.2 擴展式卡爾曼濾波器簡介.....	24
2.6 模糊控制簡介.....	27
2.6.1 明確集合與模糊集合.....	28
2.6.2 歸屬函數與模糊集合運算.....	29
2.6.3 模糊關係推論運算.....	35
2.6.4 模糊邏輯控制器架構.....	38
第三章 智慧型控制演算法自動對準之設計.....	42
3.1 陀螺儀安裝校準.....	42
3.1.1 陀螺儀之測試.....	42
3.1.2 動感平台座標系之定義與CG點的計算.....	42

3.1.3 陀螺儀安裝與校準.....	42
3.2 陀螺儀動/靜態誤差補償	43
3.2.1 陀螺儀靜態誤差補償.....	43
3.2.2 陀螺儀動態誤差補償.....	43
3.3 智慧型擴展式卡爾曼濾波器.....	48
3.3.1 擴展式卡爾曼模式的推導與分析.....	48
3.3.2 智慧型控制器設計.....	54
3.4 順向姿態與陀螺儀量測姿態達到同步化整合.....	58
第四章 實驗結果與分析.....	60
4.1 陀螺儀靜態實驗結果與分析.....	60
4.2 陀螺儀靜態誤差補償實驗結果與分析.....	63
4.3 陀螺儀動態誤差補償實驗結果與分析.....	66
4.4 智慧型擴展式卡爾曼濾波器運算實驗結果與分析.....	69
第五章 結論與未來展望.....	70
5.1 結論.....	70
5.2 未來展望.....	71
參考文獻.....	72
附錄一.....	75



圖目錄

圖 2-1 自動對準系統架構圖	5
圖 2-2 三桿六自由度動感平台之 3D/VR 立體圖	6
圖 2-3 上下平台機構設計圖	6
圖 2-4 逆向運動之位置向量示意圖	7
圖 2-5 環架式慣性導航系統架構[5]	11
圖 2-6 環架式慣性導航系統實際圖 [5]	12
圖 2-7 固裝式慣性導航系統實際圖 [5]	13
圖 2-8 固裝式慣性導航系統架構[5]	13
圖 2-9 載體座標系統示意圖	14
圖 2-10 三層多晶矽之振動式陀螺儀圖[6]	17
圖 2-11 卡門濾波器之計算流程圖	24
圖 2-12 表示體溫的明確集合圖	28
圖 2-13 表示體溫的模糊集合圖	29
圖 2-14 三角形歸屬函數圖	30
圖 2-15 梯形歸屬函數圖	31
圖 2-16 吊鐘形歸屬函數圖	31
圖 2-17 連續三角形歸屬函數圖	32
圖 2-18 離散三角形歸屬函數圖	32
圖 2-19 模糊聯集運算圖	33
圖 2-20 模糊交集運算圖	33
圖 2-21 模糊補集運算圖	34
圖 2-22 GPM 推論示意圖	37
圖 2-23 模糊推論示意圖	38
圖 2-24 模糊控制器架構圖	39
圖 2-25 最大-最小推論法的模糊引擎推論圖	40
圖 3-1 自動陀螺儀誤差動態補償流程圖(1)	45
圖 3-2 自動陀螺儀誤差動態補償流程圖(2)	47
圖 3-3 智慧型擴展式卡爾曼濾波器之系統架構	48
圖 3-4 控制器的輸入輸出示意圖	55
圖 3-5 控制器輸入的歸屬函數圖	56
圖 3-6 控制器輸出的歸屬函數圖	56
圖 3-8 檢化單值輸入示意圖	57
圖 3-9 系統同步整合流程圖	59
圖 4-1 平台靜止不動時未經濾波的角速率	60
圖 4-2 平台靜止不動時未經濾波的角度	61
圖 4-3 平台靜止不動時經濾波的角速率	62

圖 4-4 平台靜止不動時經濾波與四元素轉換法後算得之角度	62
圖 4-5 平台做連續單軸的Pitch Sin動作未靜態補償的角速率.....	63
圖 4-6 平台做出連續單軸的Pitch Sin動作未靜態補償的角度.....	64
圖 4-7 平台做出連續單軸的Pitch Sin動作靜態補償後的角速度.....	65
圖 4-8 平台做出連續單軸的Pitch Sin動作靜態補償後的角度.....	65
圖 4-9 平台做出連續單軸的Pitch Sin動作動態補償（一）後的角速度	66
圖 4-10 平台做出連續單軸的Pitch Sin動作動態補償（一）後的角度..	67
圖 4-11 平台做出連續單軸的Pitch Sin動作動態補償（二）後的角速度	68
圖 4-12 平台做出連續單軸的Pitch Sin動作動態補償（二）後的角度..	68
圖 4-13 智慧型擴展式卡爾曼濾波器估測的最佳姿態	69
附錄圖 5V電源電路圖.....	75
附錄圖 陀螺儀實體圖.....	75
附錄圖 陀螺儀整合實體圖.....	76
附錄圖 平台系統與陀螺儀系統整合圖.....	76



表目錄

表 2-1 模糊集合運算元之性質	34
表 3-1 模糊控制規則表	57



第一章 緒論

1.1 研究背景及動機

自1900年，萊特兄弟製造出第一架滑翔機之後，為研究飛機的穩定性與操控特性，曾經做過上千次的飛行，因此付出艱苦的代價，但經不斷地改進，其性能提升很快。而且在1914年第一次世界大戰爆發之後，各交戰國都撥出大量經費發展航空工業，故飛機的性能在短短地幾年內有了長足地進步，且20年代初期各國並設置各種獎金鼓勵人們研究飛行，在這之後除了飛機本身性能的提升以外，也開始重視導航技術在航空飛行的整合。而導航的形式可分為五種類型(亦有文獻將類型二與類型五歸為同一類[4])：

1. 航標式導航(Pilotage)：經由已知之地標或標定物，可以知道自己所處之位置與行進的方向。
2. 推算式導航(Dead Reckoning)：由一已知點出發，藉由路程、速度、時間和方向之變化推算出相對於出發點之位置。
3. 天文導航(Celestial Navigation)：利用天體(如日、月、星辰)之觀測來定位。
4. 無線電導航(Radio Navigation)：採用無線電之方式以偵知相對於已知點之方位或距離進而推導出位置。全球衛星定位系統(Global Positioning System, GPS)即為一種無線電導航系統[4][10][21]。
5. 慣性導航(Inertial Navigation)[4] [10]：使用加速儀(Accelerometer)及陀螺儀(Gyroscope)等感測器分別量測載具之慣性加速度與角速度，配合輸入之起始位置、速度、姿態，並根據力學運動方程式計算出載具往後之位置、速度、姿態、航向等導航變量。慣性導航系統(Inertial Navigation System, INS)即為一種使用慣性感測器所建構之導航系統。

上述各類型之導航技術可加以組合使用[21]，以發揮出更佳之效果。尤其第4類型的GPS與第5類型的INS，二者在誤差特性上有極佳之互補性[4] [10]，例如

INS在短時間所產生之位置誤差相對而言是較小的，但誤差會隨著時間之增長而持續性的累積，換言之，GPS 所產生之位置誤差短時間比INS 來得大，但卻不會隨著時間之增長而累積。然而此種整合導航方式只能用在其運動空間較大之系統，例如實際的飛機飛行，而無法使用在訓練飛行員的飛行模擬器，或運動空間較小的機器之姿態量測計算。

而且有鑑於利用微機電系統（Micro-Electro Mechanical System MEMS）所製造之慣性導航感測器已相當成熟，並且已有相關的產品與應用在導航方面實例，因此本論文的研究動機有二：

1. 研究微機電振動式陀螺儀在慣性導航系統中，由於陀螺儀製造誤差和地球自轉誤差所組成的靜態誤差，以及當陀螺儀在實際工作所產生的電磁干擾與熱效應等動態誤差，進而發展一套類似GPS與INS整合系統的自動對準技術，用來消除陀螺儀的動靜態誤差。
2. 研究整合慣性導航與機器之運動學發展一套可應用在飛行模擬器，或運動空間較小的機器之姿態量測之方法。

1.2 研究目的及其重要性

本論文之研究目的，主要是針對上述之研究動機尋求適當之解答，並以本實驗室的三桿六自由度動感平台的姿態量測為主要的測試平台，利用固裝式的振動陀螺儀量測其動感平台之運動姿態，在利用擴展卡爾曼濾波器，配合動感平台之運動方程之運算結果，來修正陀螺儀的動靜態誤差所產生之漂移現象，以達到消除所造成量測姿態所產生之誤差。進而發展一套類似GPS與INS整合系統，並適合用於飛機模擬器與所有工作空間較小的機器上，使得所有需要利用振動陀螺儀精密量測姿態與定位之機器，可以透過本論文之研究以達到其精確定位之目的，因此本論文之研究對於飛行模擬器，或運動空間較小的機器之研發是非常重要且必要的一環。



1.3 國內外相關研究

1.3.1 微機電振動式陀螺儀發展相關文獻

第一個人造振動式陀螺儀[4][10]，是由 1950 年代英國的 Sperry Gyrocope Company 發展出來，此裝置是用電磁力來驅動和感測，在最佳的環境之下可量測出地球自轉的角速度 ($4.17 \times 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{s}$)。到了 1960 年代，General Electric 也發展出一個名為 VYRO 的陀螺儀，此裝置則是以壓電的方式來作為驅動與感測。1980 年代，許多以壓電材料為主的振動式陀螺儀紛紛被製造出來。然而在 1990 年代，由於半導體設備和技術的成熟，以微加工技術來製造的振動式陀螺儀，更成為發展的趨勢。這不但使得陀螺儀的尺寸縮小、成本降低，也擴大陀螺儀的應用範圍。

1.3.2 振動式陀螺儀誤差消除相關文獻

在振動式陀螺儀誤差消除相關文獻，大致上可分為下面四種模式

1. 針對在製造過程和輸入的驅動信號來著手改良的方法，使得振動式陀螺儀在最佳的工作點下，此時的驅動軸之信號的驅動頻率會和系統的共振頻率頻率相同，已得到最好的輸出信號[9]。
2. 針對陀螺儀本身所有可能會產生之誤差，進行深入且詳細的研究與分類，再依照各種不同類型的設計出相對應之數位濾波器來加以消除以得到其所需正確信號[8]。
3. 利用整合式導航的方式，擷取兩種或兩種以上不同之系統，利用系統之間誤差特性的不同，利用控制的方法截長補短，以達到修正陀螺儀誤差[23][24]。
4. 利用陀螺儀誤差信號配合類神經網路，透過大量多次的訓練，建立每一顆陀螺儀的類神經網路誤差模型[31]。

第二章 系統簡介與理論說明

2.1 自動對準系統簡介

本論文之研究方向是利用微機電振動式陀螺儀與平台運動學配合上智慧型擴展式卡爾曼濾波器，建立一個陀螺儀自動對準系統，藉由此對準系統，來實現陀螺儀靜態與動態誤差補償，並且估測平台的最佳姿態，其自動對準系統架構如圖 2-1 所示：

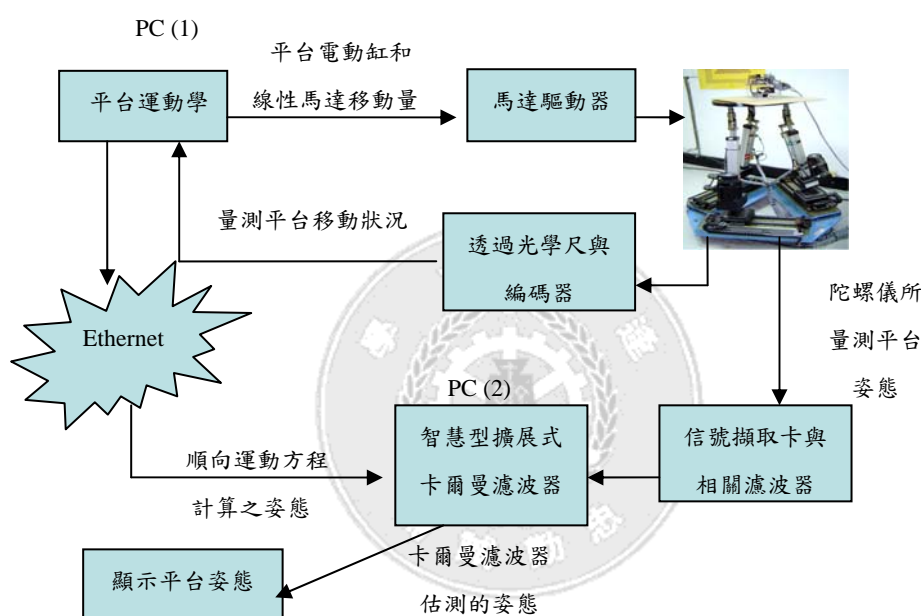


圖 2-1 自動對準系統架構圖

於此自動對準系統方塊圖中，我們使用PC(1)的逆向運動學算得平台控制訊號，透過馬達驅動器，使得三桿六自由度動感平台達到想要的平台姿態變化，再利用光學尺與編碼器量得信號，經由平台順向運動學算得平台之姿態，再透過Ethernet傳送至PC(2)；另一方面，我們利用陀螺儀與PC(2)之信號擷取卡，量得平台轉動角速率，再經由濾波器與四元素法算得平台姿態信號，最後將兩者信號配合智慧型擴展式卡爾曼濾波器，估測出最佳之平台姿態，並顯示其估測結果。

2.2 三桿六自由度平台簡介

2.2.1 平台系統之簡介

三桿六自由度動感平台是由三個線性馬達與三套電動缸加上下平台組合而成的六自由度平台，其 3D/VR 立體圖，如圖 2-2 所示。此平台系統之上下平台硬體機構設計圖如圖 2-3 所示[1]。

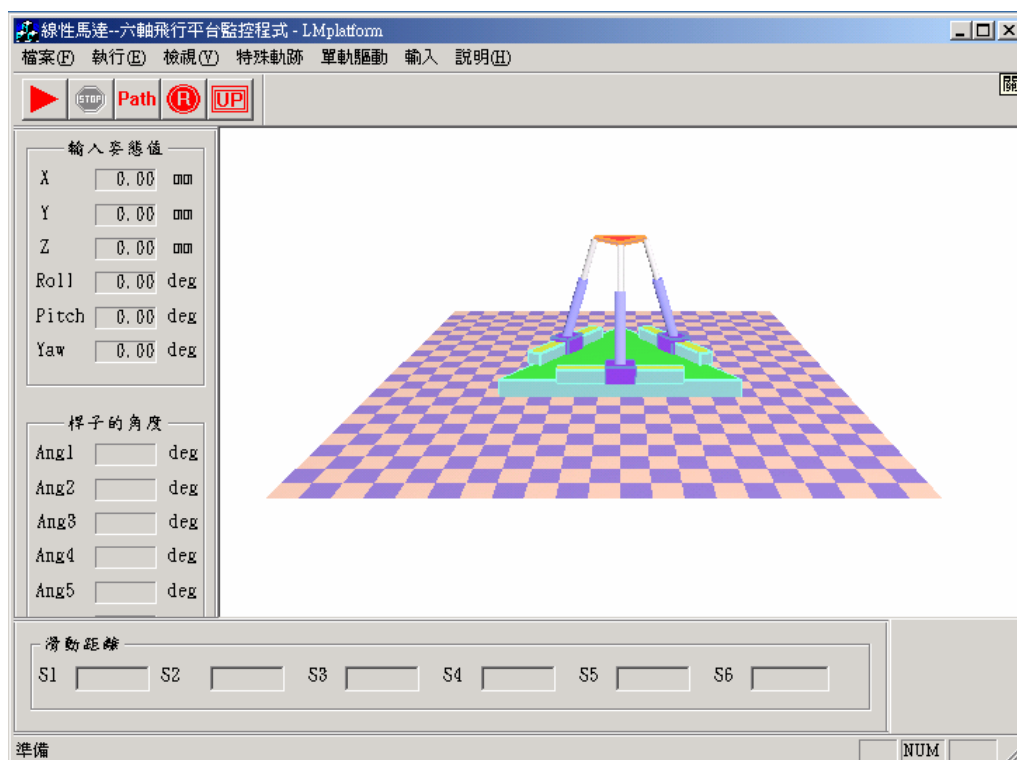


圖 2-2 三桿六自由度動感平台之 3D/VR 立體圖

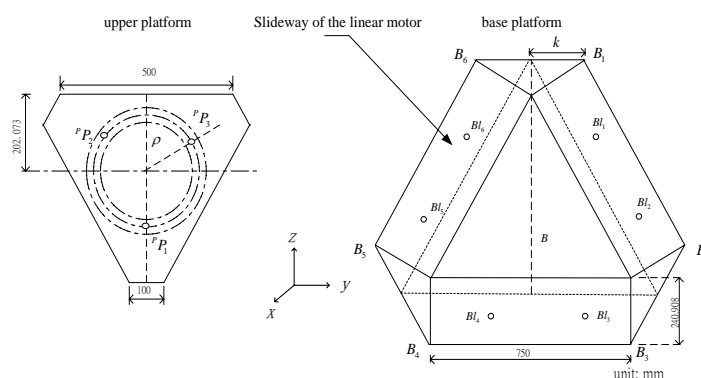


圖 2-3 上下平台機構設計圖

2.2.2 三桿六自由度平台逆向運動方程式推導

三桿六自由度平台是由三根桿件伸縮（由感應伺服馬達驅動）與桿子支點滑

動（由同步伺服線性馬達驅動）而使上平台得到姿態與位置變化之機構，我們定義兩個運動空間：Cartesian Space $[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$ 與 Joint Space $[|S_1| \ |S_2| \ |S_3| \ |B_{12}| \ |B_{22}| \ |B_{32}|]^T$ ，其中 $[x \ y \ z]^T$ 為上平台的位置； $[\phi \ \theta \ \psi]^T$ 為上平台姿態角； $[|S_1| \ |S_2| \ |S_3|]^T$ 為桿長， $[|B_{12}| \ |B_{22}| \ |B_{32}|]^T$ 為動子與其起點之距離，如圖 2-4 所示[2][3]。

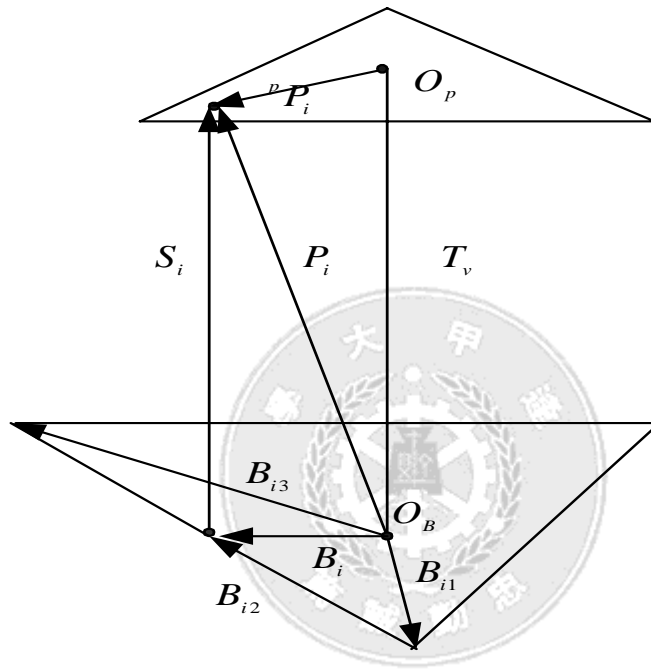


圖 2-4 逆向運動之位置向量示意圖

而所謂逆向運動學(Inverse Kinematics)也就是從 Cartesian Space 映射到 Joint Space，進而由已知上平台之姿態方位，可推算出上平台三桿端點，表示在基座座標 $\{B\}$ 之向量 P_i 為(2.1)式

$$P_i = T_v + R^p P_i, \quad i=1,2,3 \quad (2.1)$$

其中

T_v 為上平台座標原點相對於基座座標原點之平移量： $T_v = [x \ y \ z]^T$ 。

矩陣 R 為平台座標系 $\{P\}$ 轉換至基座座標系 $\{B\}$ 之姿態轉換矩陣。

${}^P P_i$ 代表上平台座標 $\{\mathbf{P}\}$ 中 P_i 點之位置向量。

因此若已知上平台之姿態方位，即可求得三桿上端點表示在基座座標 $\{\mathbf{B}\}$ 之向量。

由於桿子向量為(2.2)式：

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{B}_i, i=1,2,3 \quad (2.2)$$

$$\text{其中 } \mathbf{S}_i = [S_{ix} \ S_{iy} \ S_{iz}]^T, \mathbf{B}_i = [B_{ix} \ B_{iy} \ 0]^T$$

又因為滑軌之方程式可表示如下：

$$\frac{B_{iy} - B_{i1y}}{B_{ix} - B_{i1x}} = \frac{B_{i3y} - B_{i1y}}{B_{i3x} - B_{i1x}}, i=1,2,3 \quad (2.3)$$

其中 B_{i1} 與 B_{i3} 為滑軌起點及終點之座標。

另外之約束方程式可由桿子與滑軌相互垂直而求出如下：

$$(\mathbf{B}_{i3} - \mathbf{B}_{i1}) \cdot \mathbf{S}_i = 0, i=1,2,3 \quad (2.4)$$

由式(2.2)與式(2.4)，可得(2.5)

$$B_{ix} = \frac{B_{i2x} P_{ix} + (P_{iy} - C) \cdot B_{i2y}}{(B_{i2x} + A \cdot B_{i2y})}, i=1,2,3 \quad (2.5)$$

$$\text{其中 } A = \frac{(B_{i3y} - B_{i1y})}{B_{i3x} - B_{i1x}}, C = \frac{(B_{i3x} \times B_{i1y} - B_{i3y} \times B_{i1x})}{B_{i3x} - B_{i1x}}, \text{同時亦可解得 } B_{iy}。$$

2.2.3 三桿六自由度平台順向運動方程式推導

所謂順向運動學，簡單的說，即為對定長三根桿件之線性馬達驅動平台系統，給定桿件支點在滑軌之位置，求得上平台之姿態方位，由於順向運動方程為一複雜非線性方程，並無一完整解，所以為了即時求解，我們採 Newton-difference 疊代數值法，首先由平台機構找出受限方程，再以疊代運算求其解[2][3]。

然而在 Newton-difference 疊代運算中需要用到 Jacobian 矩陣，此矩陣為受限方程對姿態方位變數之微分矩陣，如受限方程為動子位置之逼近函數，則因其 Jacobian 矩陣之微分代數表示式不易求得，所以我們採用數值線性化牛頓差分法 (Numerical Linearization Newton-difference Method) 求 Jacobian 斜率矩陣；同時又

因動子位置為由光學尺量得，為一給定值，故亦可間接由桿長逼近法求得對應之平台姿態方位，因其僅數學模擬，照樣可由 Cartesian Space 及 Joint Space 間之轉換求得。

此法即為給定桿子長度，求得上平台之姿態與中心位置，由於此轉移函數為一非線性方程組，並不具完整解，且為了達到求解速度上的要求，我們採用重覆性地數值運算來處理非線性的問題，因此我們引進 Newton-difference 數值方法，來求解前向運動的問題，首先由平台機構找出受限方程式，再以 Newton-difference 疊代運算方式來求解，以下為順向姿態的求解步驟。

首先我們可得到機構的受限方程式如下：

$$\Phi_{i1} = (P_i - B_i)^T (P_i - B_i) - l_i^2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi_{i2} = (P_i - B_i)^T \cdot d_i = 0 \quad (2.7)$$

其中 $d_i, i=1,2,3$ 線性馬達單向量。

之後對受限方程式微分，可得：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_x \dot{X} + \Phi_q \dot{q} = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{其中 } \dot{X} = [\dot{p} \quad \dot{q}]^T = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T,$$

$$\dot{q} = [\dot{d}_1 \quad \dot{d}_2 \quad \dot{d}_3 \quad \dot{l}_1 \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3]^T$$

$$\frac{\partial \Phi_{i1}}{\partial p} \dot{p} = 2(T_v + m_i - B_i)^T \dot{p} = 2S_i^T \dot{p} \quad i=1,2,3 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial p} \dot{p} = \frac{(T_i + m_i - B_i)^T \cdot d_i}{\partial p} \dot{p} = d_i \dot{p} \quad i=1,2,3 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi_{i1}}{\partial g} \omega_p = 2(\dot{R}^p P_i)^T L_i = 2(\omega_p \times R^p P_i)^T L_i = 2(m_i \times L_i)^T \omega_p \quad i=1,2,3 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \Phi_{i2}}{\partial g} \omega_p = \frac{\partial (T_v + R^p P_k - B_k)^T d_k}{\partial g} \omega_p = (\dot{R}^p P_k)^T d_k = (m_k \times d_k)^T \omega_p \quad i=4,5,6, k=i-3 \quad (2.12)$$

由此可得到 Φ_x 矩陣：

$$\Phi_X = \begin{bmatrix} \{2(T_v + m_1 - B_1)\}^T & \{2m_1 \times (T_v + m_1 - B_1)\}^T \\ \{2(T_v + m_2 - B_2)\}^T & \{2m_2 \times (T_v + m_2 - B_2)\}^T \\ \{2(T_v + m_3 - B_3)\}^T & \{2m_3 \times (T_v + m_3 - B_3)\}^T \\ d_1^T & (m_1 \times d_1)^T \\ d_2^T & (m_2 \times d_2)^T \\ d_3^T & (m_3 \times d_3)^T \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

再將上式以泰勒級數展開，可得(2.14)式：

$$\Phi(X) + \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Delta X + \dots = 0 \quad (2.14)$$

最後將展開式的高階項忽略，可得(2.15)式：

$$\Delta X = -(\Phi_X^{-1} \Phi) \quad (2.15)$$

2.3 慣性導航系統簡介

慣性導航系統（INS，Inertial Navigation System）是具有自主導航能力，不需要任何外界輔助資訊，即可獨立提供計算載具速度、位置和姿態等所需之資訊，並且在高速運動下，亦不影響其運作性能的導航系統[4]。

慣性導航系統是根據力學原理來推導得載具的位置與姿態；一般利用加速儀（Accelerometer）量得載具在運動過程中的加速度，陀螺儀（Gyroscopes）則是量得載具旋轉之角速度，當將把量測到的信號經過運算，即可得到載具之速度、位置與姿態等導航所需之參數，本節將針對慣性導航的基本原理與計算來做簡單的介紹。

2.3.1 慣性導航基本原理

慣性導航的基本原理，是根據牛頓的慣性定律與運動定律及其反作用力定律，設計出一些裝置；如擺錘式的加速儀，當施加一力 F 於加速儀上，使其改變進而運動，再利用牛頓第二運動定律，得其相對於慣性座標之加速度值，相對應的速度與位移，則由量測之加速度經過一次積分與兩次積分可得到；至於角度變化部分，則根據Euler's 定律，角動量的變化率等於力矩，設計一個感測器，如陀螺儀來偵測角速度，積分即得到相對應的角度[5]。

2.3.2 慣性導航系統架構

在慣性導航系統中，加速儀與陀螺儀為系統中最重要的兩個元件，因此若以兩個最重要元件的安裝方式來區分慣性導航架構，那麼其系統可分為下面兩種形式[5]：

(A) 環架式系統(Gimballed-Type System)

(B) 固裝式系統(Strapdown System)

(A) 環架式慣性導航系統

所謂環架式慣性導航系統是由於一般導航系統的載體，並非永遠平行與地球表面，因此會影響加速儀所量測到加速度的精確度，所以將慣性元件固定於一個穩定平台(stable platform)上，即為環架式系統，利用環架結構與陀螺儀所組成的控制迴路來隔絕載體運動所造成的影響，圖2-5所示環架式系統的架構。當載體有運動時，平台上的陀螺儀可量測出載體之角速度，此一角速度可經由控制迴路來驅動平台的控制器，使得載體進行轉動時平台可維持穩定姿態。至於載體的姿態可以透過環架上的角度感測器取得。此時因平台穩定的平行於地表，故可直接對加速儀的量測量進行積分以得到速度與位置。

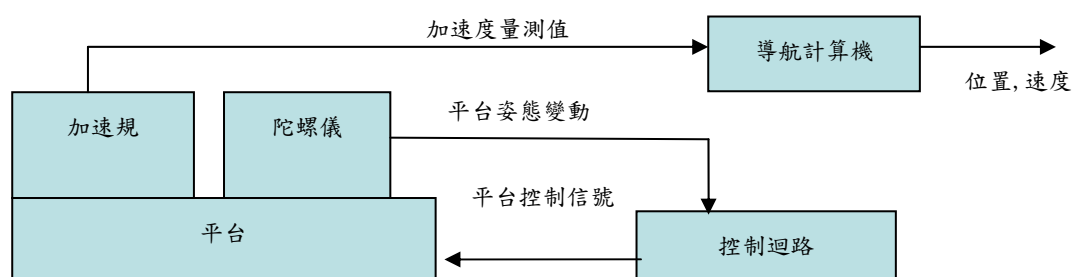


圖 2-5 環架式慣性導航系統架構[5]

環架式系統亦稱為穩定平台系統(Stabilized Platform System)，圖2-6為環架式慣性導航系統實際圖，環架式系統有著高精度、使用較簡易之陀螺儀等優點。但由於使用了機械與伺服架構使得維護上較為不便，同時架構複雜也使得體積過大，且較耗電以及價格昂貴都是環架式系統的缺點。

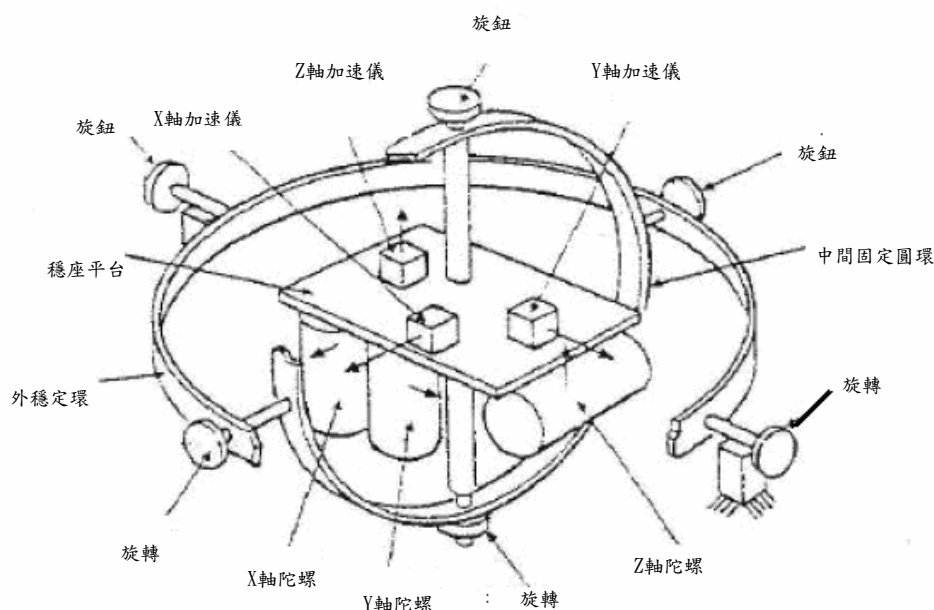


圖 2-6 環架式慣性導航系統實際圖 [5]

(B) 固裝式慣性導航系統：

所謂的固裝式慣性導航系統，是將慣性元件直接安裝於平台上，因此其結構簡單，其安裝方式如圖2-7的固裝式慣性導航系統實際圖所示；將慣性元件的感測軸相互垂直放置，構成一載體座標系統。

當載體在運動過程中，透過陀螺儀之測量值，可以求得載體座標系與導航所使用的當地水平座標系之間的關係，計算出兩座標系的轉換矩陣。之後將加速儀所量測出的加速度透過此矩陣修正，經由積分計算以得出正確的速度與位移等導航訊息，此為固裝式系統架構，如圖2-8 所示；與環架式慣性導航系統相比較，固裝式系統的結構簡單、成本低與體積小的優點，但由於慣性元件乃直接裝載於載體上，元件需要較大的精度以承受較大動態範圍之輸入。再者，轉換矩陣的計算較為繁複，因此固裝式系統亦需等級較高的計算機。

但由於近年來微機電(Micro Electro-Mechanical System, MEMS)技術的進步，因此利用微機電技術設計製造的慣性元件與傳統慣性元件相比已大幅減少體積與提高精度，再加上個人電腦技術日新月異，因此可以解決相關複雜的計算問題，有利於固裝式系統的發展，並且因為環架式慣性導航系統架構複雜體積龐

大，所以近年來採用固裝式系統是比較普及的作法，本論文的慣性導航部分也是使用固裝式的安裝方法。

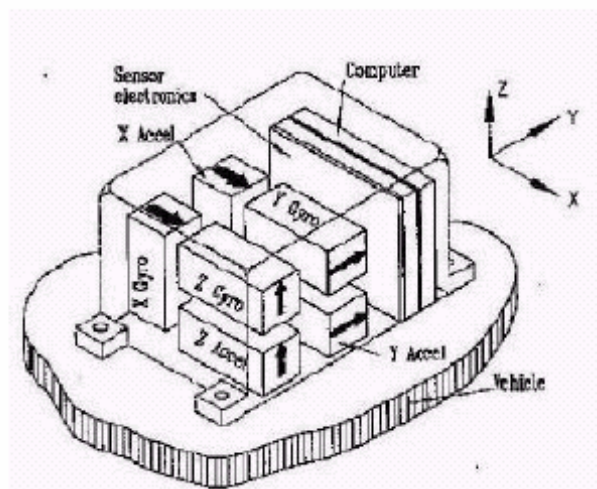


圖 2-7 固裝式慣性導航系統實際圖 [5]

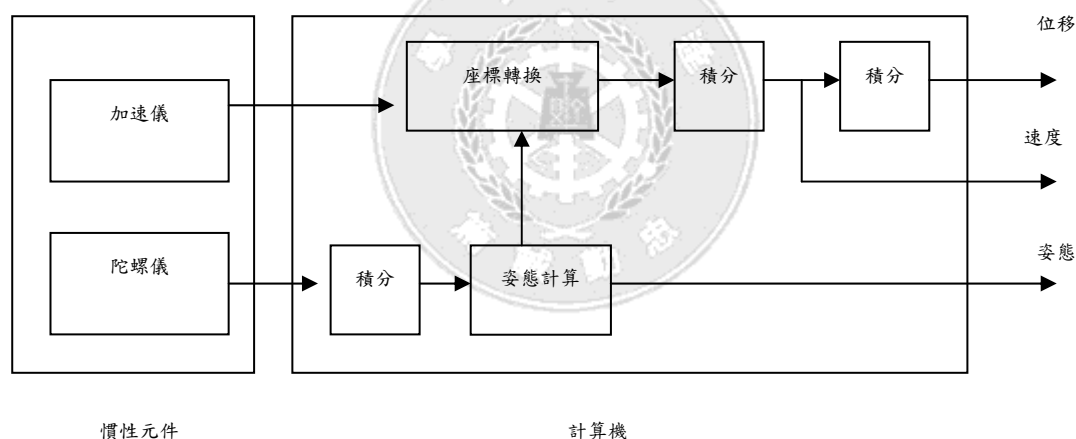


圖 2-8 固裝式慣性導航系統架構[5]

2.3.3 座標轉換

由於本論文在設計慣性導航系統時是採用固裝式系統架構，因此有必要對陀螺儀感測值進行座標轉換。常見的座標轉換包含有方向餘弦矩陣(direction cosine matrix)、尤拉角(Euler angles)、四元素法(quaternions)等等，本文所採用的是四元素法，四元素法是由尤拉角推導而來，故將此兩種方法詳細說明如下：

(A) 尤拉角轉換[4]：

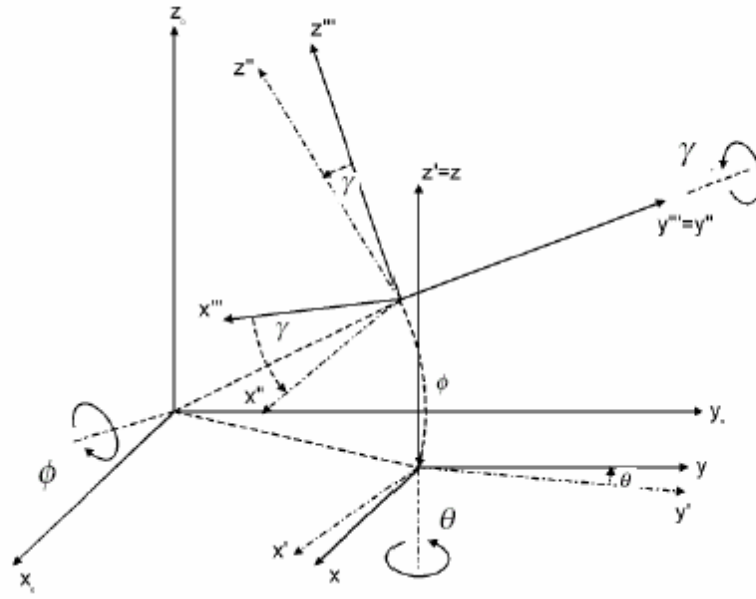


圖 2-9 載體座標系統示意圖

圖2-9 表示了載體運動時座標系統的變化情形。

假設一載體座標 xyz 在初始狀態與當地水平座標系 $x_0y_0z_0$ 重合，經過轉動，新的載體座標為 $x''y''z''$ ，三個軸轉動的角度為 ϕ, θ, γ ，因此可求出一轉換矩陣 C ，使得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

為了推導出 C ，我們依照三次轉動順序，分別求出每個轉換矩陣，再將三個轉換矩陣組合成尤拉角轉換矩陣。

首先將載體座標系，繞 x 軸旋轉 ϕ 角，得到轉動後座標 $x'y'z'$ ，則

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

接著將載體座標系 $x'y'z'$ ，繞 y' 旋轉 θ 角得到轉動後座標 $x''y''z''$ ，得到

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

最後再將載體座標系 $x''y''z''$ ，繞 z'' 旋轉 ϕ 角得到轉動後座標 $x'''y'''z'''$ ，得到

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

所以尤拉角轉換矩陣可表示為(2.20)式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} &= C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \theta \cos \phi & \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta \sin \phi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta + \cos \phi \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.20) \end{aligned}$$

由上式可發現，當 $\cos \theta$ 為 0 時，則 θ, ϕ 角無法獨立各別分開，此時為奇異 (singular) 現象發生。

(B) 四元素法[4]：

四元素轉換法是將尤拉轉換的結果，沿某一特定軸 \vec{u} 轉動 $-\alpha$ 角，使其尤拉轉換可以避開當 $\cos \theta$ 為 0 時，所產生出來的奇異點。

其定義如下：

$$e_0 = \cos \frac{\alpha}{2} \quad (2.21)$$

$$\vec{e} = \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (2.22)$$

$$e = [e_1 e_2 e_3]^T \quad (2.23)$$

又令

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + e^T e \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \quad (2.24)$$

$$\therefore e_0 + e_1 + e_2 + e_3 = 1 \quad (2.25)$$

而四元素 e_0, e_1, e_2, e_3 和尤拉轉換的C矩陣的關係如下：

$$C = 2 \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_1 e_3 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_1 e_3 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

由此就可以透過四元素轉換法避開尤拉角轉換的奇異現象，在任何時刻都可以計算出相對應的方位姿態。

2.4 振動式陀螺儀簡介

陀螺儀在慣性導航系統中，是一個基本的測量元件；它運用牛頓運動定律中慣性空間中，角慣量與其作用力矩的關係來製作；而振動式陀螺儀使用表面微結構的製造技術，可獲得感測元件與感測電路整合的優點；因此我們能夠得到低價位和小體積的高靈敏性元件，由於本論文中是使用微機電陀螺儀，因此本節將介紹微機電陀螺儀的基本原理。

目前大多數的微機電陀螺儀結構都是採用橫向振動，並以懸浮臂所支撐之質塊的垂直方向為感測方向；然而由於機電效應的耦合使得角速率的輸出產生了偏移現象。因此對於驅動與感測之振動，皆是使用差動式的驅動和偵測方式，來降低機電耦合現象。所以對振動式微陀螺儀，需要上下兩層電極板，來偵測差動式的訊號[6]。

接下來將會針對圖2-10三層多晶矽之振動式陀螺儀工作原理作概念性的介紹。

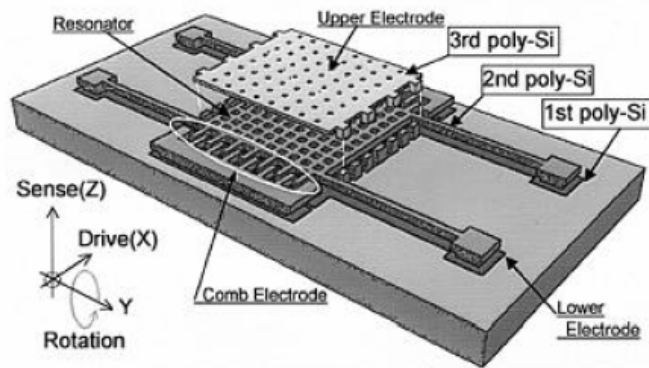


圖 2-10 三層多晶矽之振動式陀螺儀圖[6]

以圖2-10為例，其中所設計差動式的電容感測元件，必須有一個懸浮的電極板，其位置則是置於上下電極板的中間，藉此來感測上下不同的電容值，所包含的訊號。梳狀致動器的設計是目前振動式微陀螺儀必備的驅動元件，主要的功能是在提供一參考的速度，當對陀螺儀外加一Y 軸的轉速時，會由兩向量的外積產生一科氏加速度，進而在外積方向產生科氏力，而使懸浮的電極板產生上下振動的位移，如此就能夠得到上下兩電容差的訊號，而此訊號則為旋轉速度、驅動訊號與懸浮電極板的彈簧常數及阻尼係數的函數。其中為了簡化訊號的複雜性，在懸浮電極板的設計上，必須考量如何減少平板的阻尼係數。所以在懸浮平板上有很多的穿孔，藉由此設計則能簡化轉速訊號取得的複雜性。其中上述的振動式微陀螺儀，主要是由動力學中的科氏加速度來作為基本設計原理，此力需要一參考速度才能產生，下式驅動所產生的參考訊號。

$$x(t) = X_0 \sin(\omega_n t) \quad (2.27)$$

其中 X_0 為梳狀致動器的位移振幅，而 ω_x 則表示為驅動器的角速度。

在(2-27)式亦表示驅動電路的訊號，也就是梳狀致動器的輸入為一弦波電訊號，這意味著輸入的驅動電路，必須為一弦波的振盪器。事實上，在輸入的電訊號並不一定為弦波，主要是考量到訊號處理的簡易性，所以選擇以弦波作為輸入的訊號。而且對於旋轉軸之角加速度或是角位移的取得，也可得到簡易的數學模

型，這對整體的慣性導航系統之系統補償有顯著的優點。經由參考速度與外加轉速的外積，可以得到Z 軸方向的科氏加速度，

$$\ddot{z}_{coriolis} = 2\Omega_y \dot{x}(t) = 2\Omega_y \omega_x X_0 \cos(\omega_x t) \quad (2.28)$$

其中在(2.28)式中 Ω_y 表示外加Y 軸的旋轉速度；由此方程式可以知道Z軸的科氏加速度為一弦波的輸出，其振幅為驅動角速度、驅動振幅位移以及外加的角速度的乘積。若驅動角速度、驅動振幅位移為常數，則Z軸的加速度為外加的角速度的函數；因此只要經過懸浮電極板的Z軸彈簧係數設計，並在適當的條件下，假設阻尼係數忽略。即可以得到以下的力平衡方程式：

$$F_x = m \ddot{z}_{coriolis} = k_z \bullet z \quad (2.29)$$

其中m表示懸浮電極板的質量， k_z 則表示Z軸的彈簧係數。

若將(2.28)式帶入(2.29)式，則可以得到懸浮板的移動位移，如下：

$$z = 2 \frac{m\omega_x \Omega_y X_0}{k_z} \cos(\omega_x t) \quad (2.30)$$

因此只要量測其移動位移變化，就可以相對換算出其角速率的值，已達到量測角度的功能。

2.4.2 振動式陀螺誤差分析

振動式陀螺的誤差可分為靜態誤差和動態誤差兩種，其中靜態誤差的主要來源是陀螺儀本身的製造所產的誤差、地球自轉所產誤差與安裝誤差所引起，而動態誤差是由於外界的雜訊干擾和由於工作時陀螺儀本身所產生的熱干擾所引起的[8][9]。

2.5 卡爾曼濾波器簡介

卡門濾波器(Kalman Filter, KF)是利用運動方程式、系統誤差和觀測誤差與隨機特性以及初始條件等信息，再對觀測數據進行處理；從而得到系統狀態之最小誤差的一種估測演算法則。

KF的主要特點就是不需要保存過去的數據，當新的數據測得之後，根據新數據與前一刻估測值，配合系統本身的狀態轉移方程式及遞迴的求解公式就可算出系統下一刻的估測值。

因此這種方法十分適合於動態量測，如飛機、船舶、人造衛星、及飛彈等運動載體之追蹤。

KF是運用系統預估值與測量值進行最佳化的估算，若要應用卡門濾波器理論來求最佳化的估算值，則需滿足卡門濾波器的假設，假設如下[10]：

1. 系統為線性系統，且可觀測與可控制。
2. 系統隨機雜訊為常態分佈，且均值為零的白雜訊(White Noise)。
3. 量測誤差為常態分佈，且均值為零的白雜訊(White Noise)。
4. 系統隨機雜訊與量測誤差，兩者須不相關(Uncorrelated)。

2.5.1 卡爾曼濾波器原理

本節將介紹一般連續時間系統之離散化，並介紹於此狀態空間之最佳估測的方法與步驟。

I. 線性隨機系統之狀態空間（state space）模型

由於一般自然界的系統都是用連續時間（continuous-time）來加以表示，因此在使用卡爾曼濾波器之前，首先要建立相對應離散化後狀態空間模型，以此模型進行遞迴最佳估測[11][12]。

考慮一連續時間線性隨機系統如下式所示：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \tilde{v}(t) \quad (2.31)$$

其中：

t ：時間。

$x(t)$ ： n_x 維之狀態向量 (state vector of n_x dimension)。

$\dot{x}(t) : \frac{dx(t)}{dt}$ 。

$u(t)$ ： n_u 維之輸入向量 (input vector of n_u dimension)。

$\tilde{v}(t)$ ：系統雜訊或輸入雜訊。

$A(t)$ ：已知矩陣， $n_x \times n_x$ 維。

$B(t)$ ：已知矩陣， $n_x \times n_u$ 維。

而系統輸出 (output) 是一個 n_z 維之輸出向量：

$$z(t) = C(t)x(t) + \tilde{w}(t) \quad (2.32)$$

其中：

$Z(t)$ ： n_z 維之輸出向量 (output vector of n_z dimension)。

$C(t)$ ：已知矩陣， $n_z \times n_x$ 維。

$\tilde{w}(t)$ ：量測雜訊或輸出雜訊。

在隨機系統中，系統雜訊一般都假設為零均值 (zero-mean) 且是白色隨機程序 (white stochastic process)。這表示在任意時間下，前後之間的雜訊訊號在統計特性上是無關的。其自相關性 (autocorrelation) 如下式所示：

$$E\left[\tilde{v}(t)\tilde{v}(\tau)\right] = V(t)\delta(t-\tau) \quad (2.33)$$

其中：

$E[\cdot]$ ：數學期望值運算子 (expectation operator)

$\delta[\cdot]$ ：Dirac delta function

此白色雜訊 (white noise) 使系統狀態滿足一階馬可夫程序 (1st order Markov process)，也就是 t_k 時間之狀態，以及小於 t_k 時間之過去所有狀態的條件機率密度函數 (conditioned probability density function, cdf) 皆只相依於 t_{k+1} 時間之狀態，

如下式所示：

$$p\left[x(t_k) | x_{[-\infty, t_{k-1}]}, u_{[t_{k-1}, t_k]}\right] = p\left[x(t_k) | x(t_{k-1}), u_{[t_{k-1}, t_k]}\right] \quad (2.34)$$

考慮上述連續系統在一組離散時 (t_0, t_1, t_2, \dots) 取樣，(3.1)式可改寫為

$$X(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + G(t_{k+1}, t_k)u(t_k) + v(t_k) \quad (2.35)$$

其中：

$\Phi(t_{k+1}, t_k)$ ：系統轉換矩陣 (transition matrix)

$G(t_{k+1}, t_k)$ ：系統輸入增益矩陣 (input gain matrix)

$v(t_k)$ ：離散時間之系統雜訊

對於非時變 (time-invariant) 系統

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) \equiv \Phi(k) \quad (2.36)$$

$$G(t_{k+1}, t_k) \equiv G(k) \quad (2.37)$$

$$v(t_k) \equiv v(k) \quad (2.38)$$

基於零偏值且白色雜訊之假設， $v(k)$ 滿足下式：

$$E[v(k)] = 0 \quad (2.39)$$

$$E[v(k)v'(j)] = Q(k)\delta_{kj} \quad (2.40)$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2.41)$$

在此架構下，離散時間動態模型 (discrete-time dynamic model) 可簡化如下：

$$X(k+1) = \Phi(k)x(k) + G(k)u(k) + v(k) \quad (2.42)$$

採取的離散方法，我們可得離散時間量測模型 (discrete-time measurement model)

如下：

$$z(k) = C(k)x(k) + w(k) \quad (2.43)$$

其中：

$$w(k) \equiv w(t_k) \quad (2.44)$$

$$E[w(k)] = 0 \quad (2.45)$$

$$E[w(k)w'(j)] = R(k)\delta_{kj} \quad (2.46)$$

若取樣時間間隔相等， Φ 、 G 、 H 、 R 、 Q 都與 k 無關，則此系統是完全非時變系統（completely time-invariant）。

II. 對於線性系統的最佳估測

為求得系統之最佳估測，可代入卡爾曼濾波器進行演算，而此演算法最主要的工作包括狀態預估（state prediction）及狀態更新（state update），其相對應步驟簡述如下：

1. 給定初始條件：

設定估算狀態及誤差狀態之協變矩陣

$$\hat{x}(0|0) = m_x(0) \quad (2.47)$$

$$P_x(0|0) = P_x(0) \quad (2.48)$$

2. 狀態估測：

將初始狀態 $x(0|0)$ 、初始協方差矩陣 $P(0|0)$ 或前一步狀態更新值及相對應的協方差矩陣，代入下面的方程式，計算此刻的狀態預估值即相對應的協方差矩陣。

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k)\hat{x}(k|k) + G(k)u(k) \quad (2.49)$$

$$P_x(k+1|k) = \Phi(k)P_x(k|k)\Phi^T(k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \quad (2.50)$$

其中：

$\hat{x}(k|k)$ ：前一刻狀態更新值。

$\hat{x}(k+1|k)$ ：狀態預估值。

3. 狀態更新：

由狀態預估得到的 $\hat{x}(k+1|k)$ 及 $P_x(k+1|k)$ ，配合此刻的量測值 $Z(k+1)$ ，計算出此刻的狀態更新值 $\hat{x}(k+1|k+1)$ 及相對應的協方差 $P_x(k+1|k+1)$ ，相關的方程式如下。

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1|k+1) &= E\{x(k+1)|Z(k+1)\} \\ &= E\left\{\hat{x}(k+1|k)|Z(k), z(k+1)\right\} \\ &= \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) \left[z(k+1) - \hat{z}(k+1|k) \right]\end{aligned}\quad (2.51)$$

其中：

$K(k+1)$ 為所謂卡門濾波器增益 (Kalman filter gain)，卡門濾波器增益之計算如下：

$$K(k+1) = P_x(k+1|k) H^T(k+1) \left[H(k+1) P_x(k+1|k) H^T(k+1) + R(k+1) \right]^{-1} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}P_x(k+1|k+1) &= E\left\{ \left[x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) \right] \left[x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) \right]^T \right\} \\ &= P_x(k+1|k) - P_{xz}(k+1|k) P_z^{-1}(k+1|k) P_{xz}^T(k+1|k) \\ &= P_x(k+1|k) - P_x^{-1}(k+1|k) H^T(k+1) \cdot \\ &\quad \left[H(k+1) P_x(k+1|k) H^T(k+1) + R(k+1) \right]^{-1} H(k+1) P_x(k+1|k) \\ &= [I - K(k+1) H(k+1)] P_x(k+1|k)\end{aligned}\quad (2.53)$$

4. 重複第2步驟與第3步驟，即可得到最佳的狀態估測值。

綜合上述之處理步驟，卡門濾波器之計算流程可由圖2-11加以表示。

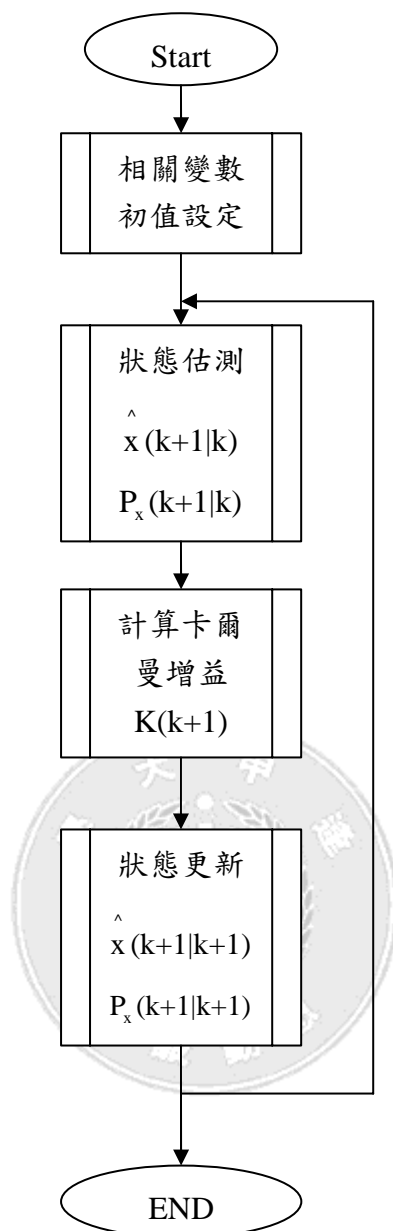


圖 2-11 卡門濾波器之計算流程圖

2.5.2 擴展式卡爾曼濾波器簡介

為使卡門濾波器適用於非線性系統，於1985 年由Stanley F. Schmidt首先利用泰勒展開式將動態方程式予以線性化，並融入卡門濾波器中加以運算，由於其演算法則係架構在卡門濾波器上，因此，一般都以擴展式卡門濾波器(Extended Kalman Filter, EKF) [11][12]。

擴展式卡門濾波器之計算步驟如下：

假設系統動態方程式如下：

$$x(k+1) = f(x(k), k) + \Gamma(k+1, k)w(k) \quad (2.54)$$

$$z(k+1) = h(x(k+1), k+1) + v(k) \quad (2.55)$$

其中 $w(k)$ 、 $v(k)$ 為一均值為零，協變矩陣為 Q ， R 之高斯分佈雜訊即

$$w(k) \sim N(0, Q), v(k) \sim N(0, R) \text{ 且 } x(0) \sim N(m_x(0), P_x(0))$$

其擴展式卡爾曼濾波器的運算步驟如下所示：

1. 起始設定：

$$x(0|0) = m_x(0) \quad (2.56)$$

$$P_x(0|0) = P_x(0) \quad (2.57)$$

2. 狀態方程式線性化處理：

$$f(x(k), k) = f\left(\hat{x}(k|k), k\right) \Phi(k+1, k) \left[x(k) - \hat{x}(k|k) \right] + \dots \quad (2.58)$$

$$\text{其中 } \Phi(k+1, k) \equiv \left. \frac{\partial f(x(k), k)}{\partial x} \right|_{\hat{x}(k|k)}$$

3. 狀態估測：

$$\hat{x}(k+1|k) = f\left(\hat{x}(k|k), k\right) \quad (2.59)$$

4. 協變矩陣估測：

$$P_x(k+1|k) = \Phi(k+1, k) P_x(k|k) \Phi^T(k+1, k) \Gamma(k+1, k) Q(k) \Gamma^T(k+1, k) \quad (2.60)$$

5. 量測方程式線性化處理：

$$h(x(k+1), k+1) = h\left(\hat{x}(k+1|k), k+1\right) + H(k+1) \left[x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) \right] + \dots \quad (2.61)$$

$$\text{其中 } H(k+1) \equiv \left. \frac{\partial h(x(k+1), k+1)}{\partial x} \right|_{\hat{x}(k+1|k)}$$

6. 卡門濾波器增益計算：

$$K(k+1) = P_x(k+1|k) H^T(k+1) [H(k+1) P_x(k+1|k) H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \quad (2.62)$$

7. 狀態方程式修正：

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) \left[z(k+1) - h(\hat{x}(k+1|k), k+1) \right] \quad (2.63)$$

8. 協變矩陣修正：

$$P_x(k+1|k+1) = [I - K(k+1) H(k+1)] P_x(k+1|k) \quad (2.64)$$



2.6 模糊控制簡介

自從1965 年加州大學柏克萊分校的L. A. Zadeh 教授提出了模糊集合(fuzzy sets) 的概念以來，模糊理論(fuzzy theory) 就開始蓬勃發展，因為模糊理論強調人類的知識大部分都可以用語言來表達，也就是可以將所有的知識領域加以模糊化，它的特色較偏重於人類的經驗及對問題特性的掌握程度，而不主張用繁雜的數學分析及數學模式來解決問題。模糊化的好處是可以提供更佳的推廣性、錯誤容忍性、及更適合應用在真實世界的非線性系統[14]。

早在1974 年英國倫敦大學Queen Mary 分校的 E. H. Mamdani 教授，就根據Zadeh 教授所提出的語言分析法(linguistic approach) 及模糊推論(fuzzy inference)，成功地將模糊控制應用在蒸汽機自動運轉上。而1980 年由丹麥Smidth 公司所開發完成水泥窯爐的模糊控制，將水泥窯爐運轉時的各種狀況及其對策，轉換成語言式的控制規則，再藉著微電腦系統的操作來達到控制的目標。尤其是在1987 年7月開始營運的日本仙台市地下鐵，由於使用了模糊控制，使得列車的自動運轉系統成功地走上實用階段，也是一個非常成功的案例。此外一些家電產品也廣泛應用此項技術。

模糊理論發展至今近四十年，相關的研究成果頗受肯定，應用的觸角已延伸各類科技領域，包括了：

- 控制工程：如智慧型控制、日本仙台市地鐵...等。
- 圖樣識別：如影像處理、語音辨識、信號處理...等。
- 家電產品：如洗衣機、電冰箱、冷氣機...等。

最近，模糊理論更與類神經網路、基因演算法等互相結合，並完成成很多新的突破。

下面幾小節將介紹模糊理論的基本觀念，其中包含模糊集合、歸屬函數、模糊集合運算、模糊關係與推論以及模糊控制系統。

2.6.1 明確集合與模糊集合

傳統的明確集合（crisp sets）是屬於二元邏輯的，即論域中的元素對某一集合的關係只有“屬於”與“不屬於”，我們令U為整個論域，A為論域中的一個明確集合，x為論域中的元素，則特徵函數 $\mu_A(x)$ 定義[15]

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \quad (2.65)$$

其中：

論域U為一明確集合。

集合A的邊界是很明確的。

如圖2-12所示，我們定義體溫高於38°C就表示發燒，但這樣分的話37.9°C就不屬於發燒的範疇，這其實是不合理的，因為37.9°C已經“有點”發燒了，所以這種有程度性的描述法，就是傳統明確集合所無法處理的。

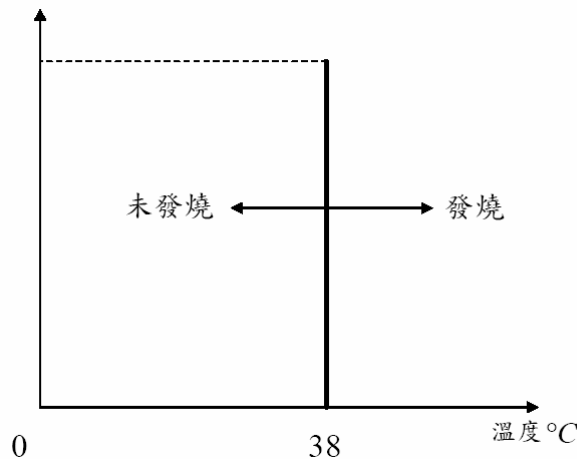


圖 2-12 表示體溫的明確集合圖

而在Zadeh 教授所提出的模糊集合裡，就沒有明確的邊界限制，集合裡的元素不再是二元邏輯分法，每一個元素都會依照其相似的程度對應到一個歸屬值，因此模糊函數是明確函數的一種推廣，我們定義論域U中A為一模糊集合為：

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\} \quad (2.66)$$

其中：

$\mu_A(\cdot)$ 為模糊集合A中的歸屬函數（membership function）。

$\mu_A(x)$ 則是元素 x 在模糊集合 A 中的歸屬程度 (membership degree)，其中 $\mu_A(x)$ 的值定義在實軸閉區間 $[0,1]$ 之間，圖 2-13 為一體溫的模糊集合，假如 38°C 的發燒程度為 1 (發燒) 的話，我們可以說 37.5°C 的發燒程度為 0.75 (快要發燒)，而 36°C 發燒程度為 0 (沒有發燒)， 40°C 時雖然在發燒這個集合程度為 0，但是可能在另一個集合“發高燒”裡的程度為 1。所以模糊集合的概念是比較人性化與口語化，也是比較具客觀性的。利用模糊集合，可以彌補明確集合描述時所產生的不合理現象。

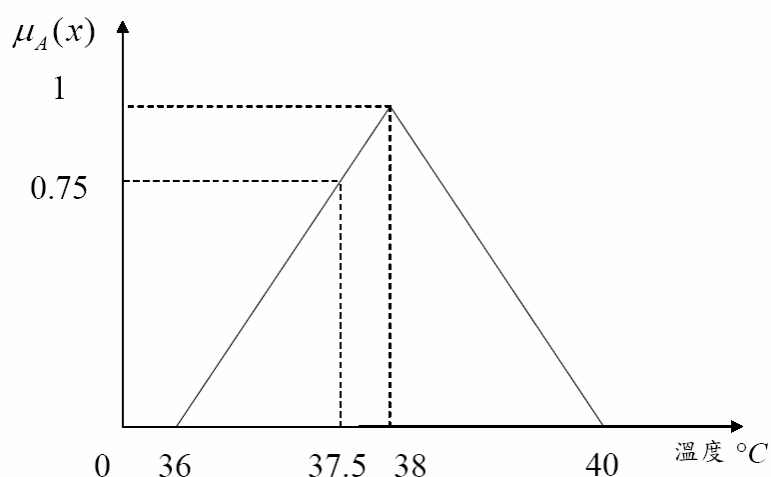


圖 2-13 表示體溫的模糊集合圖

2.6.2 歸屬函數與模糊集合運算

(A) 歸屬函數

在模糊集合裡，只要是函數值介於 $[0,1]$ 的區間內的函數，都可以成為歸屬函數，以下介紹一些常見的歸屬函數[15]：

(1) 三角形歸屬函數

其數學表示式為

$$\mu_A = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & c \leq x \end{cases} \quad (2.67)$$

其中a,b,c為實數值之參數，三角形歸屬函數如圖2-14 所示

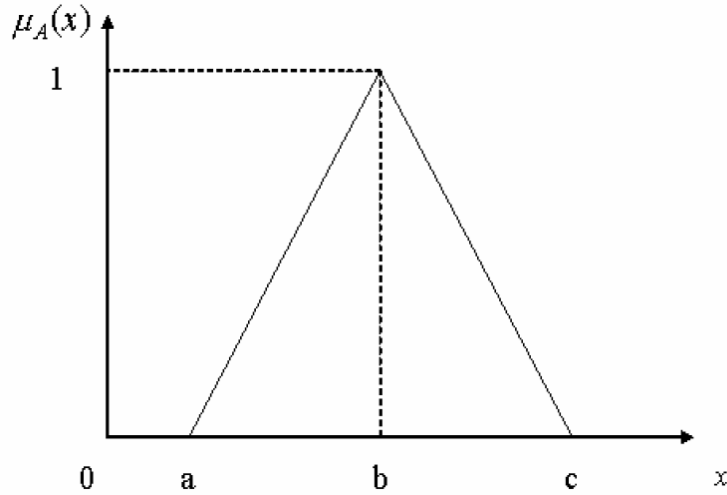


圖 2-14 三角形歸屬函數圖

(2) 梯形歸屬函數

其數學表示式為

$$\mu_A = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & d \leq x \end{cases} \quad (2.68)$$

其中a,b,c,d為實數值之參數，三角形歸屬函數如圖2-15 所示

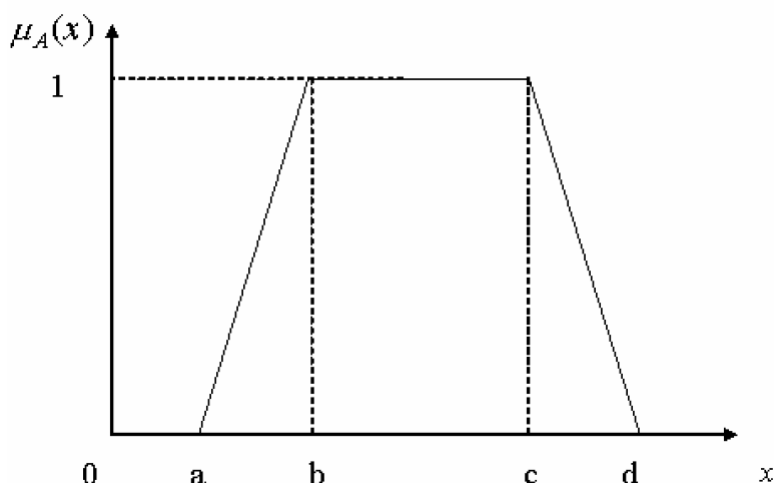


圖 2-15 梯形歸屬函數圖

(3) 吊鐘形歸屬函數

其數學表示式為

$$\mu_A = \exp\left[\frac{-(x-a)^2}{2t^2}\right] \quad (2.69)$$

其中a為吊鐘形的中間點，t為吊鐘形的寬度，吊鐘形歸屬函數如圖2-16所示。

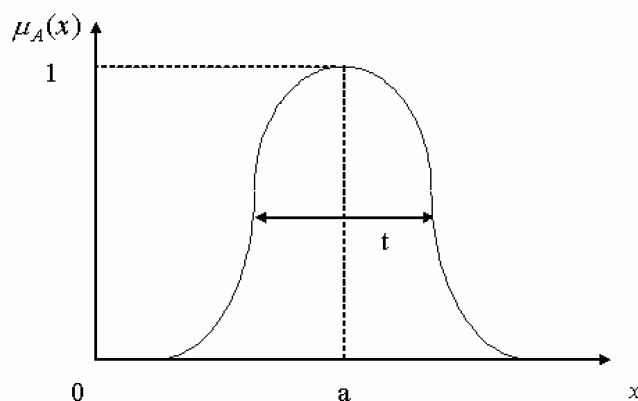


圖 2-16 吊鐘形歸屬函數圖

模糊函數又可分為連續型和離散型兩種，若以三角形歸屬函數為例的話，則如圖2-17所示，其模糊集合A可表示為：

$$A = \int_{-2}^0 \left(\frac{2+x}{2} \right) dx + \int_0^2 \left(\frac{2-x}{2} \right) dx \quad (2.70)$$

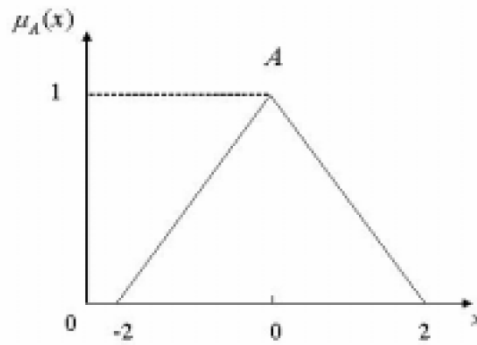


圖 2-17 連續三角形歸屬函數圖

若是離散型三角形歸屬函數的話，則如圖2-18所示，此時的模糊集合A表示為：

定義全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$A = 0.1/-2 + 0.5/-1 + 1.0/0 + 0.5/1 + 0.0/2 \quad (2.71)$$

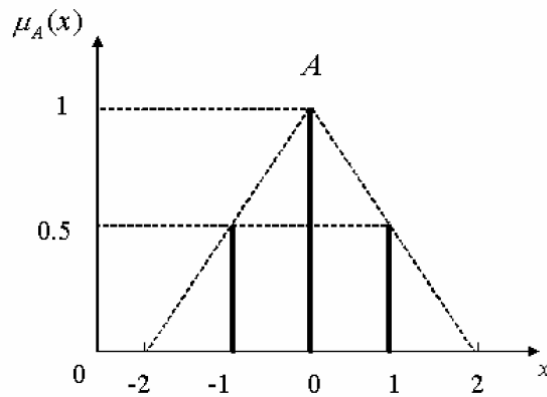


圖 2-18 離散三角形歸屬函數圖

(B) 模糊集合運算

接下來要介紹一些模糊集合的基本運算，我們定義A與B為論域U裡的兩個模糊集合，其歸屬函數分別為 μ_A 與 μ_B ，則A與B基本運算如下所示：

(1) 聯集 (union)：

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2.72)$$

其中“ \vee ”為取大運算元（max），我們可以用圖2-19來說明模糊聯集運算。

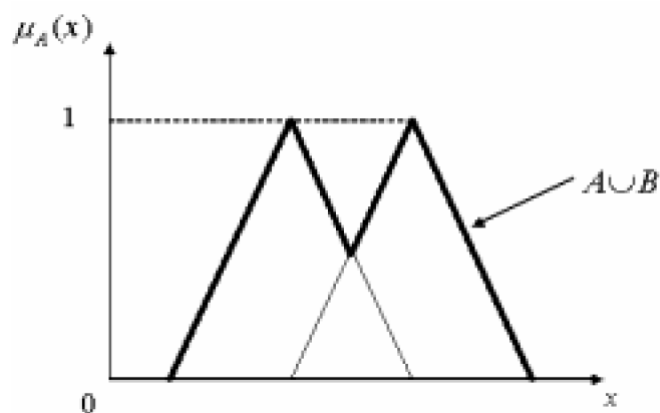


圖 2-19 模糊聯集運算圖

(2) 交集 (intersection)

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2.73)$$

其中“ \wedge ”為取小運算元（min），圖2-20說明瞭模糊交集運算。

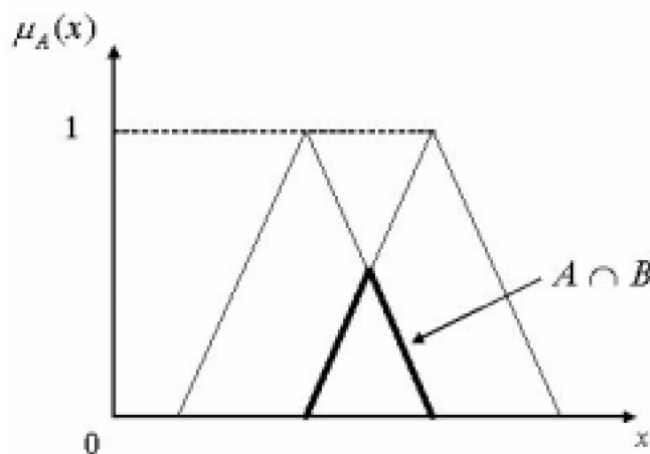


圖 2-20 模糊交集運算圖

(3) 補集 (complement)

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (2.74)$$

我們可以用圖2-21 來說明模糊補集運算。

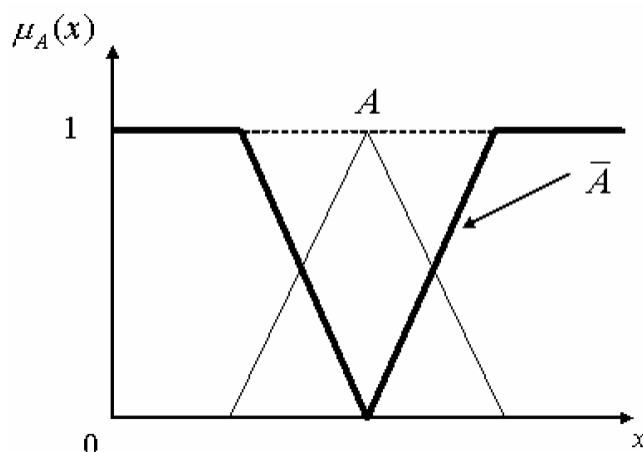


圖 2-21 模糊補集運算圖

以上三種運算是模糊集合最常用的形式，在以下所要介紹的模糊關係與推論有很多的應用。另外我們將其他同時適用於模糊集合與傳統的明確集合所常用的定理列於表2-1

表2-1 模糊集合運算元之性質

同一性 (Idempotence)	$A \cup A = A, A \cap A = A$
反身律 (Double-negation law)	$\overline{\overline{A}} = A$
相等律 (Law of identity)	$A \cup \emptyset = A, A \cap U = A$
全域律 (Law of zero)	$A \cup U = U, A \cap \emptyset = \emptyset$
分配律 (Distributivity)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
交換律 (Commutativity)	$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
結合律 (Associativity)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
吸收律 (Absorption)	$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
狄摩根定律 (De Morgan's laws)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

需要注意的是傳統集合論中的“排中律 (Law of the excluded middle)”

$$A \cup \overline{A} = U \quad (2.75)$$

與“矛盾律 (Law of contradiction)”

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (2.76)$$

在模糊集合中是不成立的。

2.6.3 模糊關係推論運算

所謂的關係 (relations) 即是描述兩個或兩個以上集合的關連性，在傳統關係中我們以“1”或“0”表示集合之間是否有關連，而在模糊關係 (fuzzy relations) 中則以[1,0]之間的實數值來表示集合之間關連的程度有多少。

我們可以將模糊規則視為一種模糊關係，並藉由各種方式的模糊推論 (fuzzy reasoning)，就可由已知的事實和規則推論出想要的結果。

(A) 模糊關係

假設 A 、 B 為定義在論域 U 與論域 V 裡的兩個模糊集合，其中元素 $x \in U$ 、 $y \in V$ ，其歸屬函數分別為 $\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(y)$ ，則兩者的模糊關係 R 的歸屬函數 $\mu_R(x,y)$ 表示如下：

$$\mu_R(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (2.77)$$

基本的模糊關係運算也包括上一節介紹的聯集、交集以及補集其運算如下：

(1) 聯集運算：

$$\mu_{U \cup V}(x,y) = \max[\mu_U(x,y), \mu_V(x,y)] \quad (2.78)$$

(2) 交集運算：

$$\mu_{U \cap V}(x,y) = \min[\mu_U(x,y), \mu_V(x,y)] \quad (2.79)$$

(3) 補及運算

$$\mu_{\bar{U}}(x,y) = 1 - \mu_U(x,y) \quad (2.80)$$

(4) 合成運算

合成 (composition) 為一個很重要的模糊關係運算元，可用在“關係與關

係 (relation-relation) ”或“集合與關係 (set-relation) ”的合成，合成的運算有許多種類，而考慮到模糊控制器的運算精簡性，最常用的就是“最大-最小合成運算” (max-min operation) 。

令 R 、 S 為定義於 $U \times V$ 、 $V \times W$ 上的兩個模糊關係，則 R 、 S 的合成關係 P 記成 $P = R \wedge S$ ，而 P 之歸屬函數可由下式表示：

$$\mu_P(x, y) = \max_{y \in V} \left\{ \min \left[\mu_R(x, y), \mu_S(y, z) \right] \right\} \quad x \in U, y \in V, z \in W \quad (2.81)$$

(B) 模糊蘊含

在模糊控制中，如何訂定模糊規則 (fuzzy rules) 是一件重要的事，模糊規則通常以下列型式表示：

$$\text{Rule : If } x \text{ is } A, \text{ then } y \text{ is } B. \quad (2.82)$$

其中 A 與 B 分別是定義在論域 U 和 V 上的模糊集合，而我們稱“ x is A ”為“前鑑部 (antecedent or premise)”，“ y is B ”為“後鑑部 (consequence or conclusion)”，舉例來說：If 溫度 is 很高, then 冷氣 is 增強，這就形成一條簡單的模糊規則。我們可以將上式視為一種模糊蘊含，表示成： $A \rightarrow B$ ，而 $A \rightarrow B$ 可以視為定義在 $U \times V$ 的一種模糊關係 $R(U, V)$ ，解讀模糊蘊含有下列幾種方法：

(1) Mamdani Implication

$$\mu_{R_M}(x, y) = \min \left[\mu_A(x), \mu_B(y) \right] \quad (2.83)$$

(2) Dienes-Kescher Implication

$$\mu_{R_{DK}}(x, y) = \max \left[1 - \mu_A(x), \mu_B(y) \right] \quad (2.84)$$

(3) Godel Implication

$$\mu_{R_G}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.85)$$

(4) Zadel Implication

$$\mu_{R_Z}(x, y) = \max \left[\min \left(\mu_A(x), \mu_B(y) \right), 1 - \mu_A(x) \right] \quad (2.86)$$

其中又以Mamdani Implication 最常使用，因為針對單一模糊規則應該看成：

Rule : If x is A , then y is B , else nothing. (2.87)

這稱為模糊規則的局部性 (locally)，其中nothing 是指其他的狀況都是不存在的，以邏輯語言來解釋就是 $A \rightarrow B$ 其實是跟 $A \square B$ 是等效的。

(C) 模糊推論

模糊推論 (fuzzy reasoning) 又稱為近似推論 (approximate reasoning)，他可以幫助我們從已知的事實及所訂定的模糊規則推論出應有的結論，進而使控制器依我們想要的結果進行控制。

模糊推論與一般二值推論方法相當類似，我們用廣義肯定前提 (Generalized Modus Ponens; GMP) 方法來進行模糊規則的推論：

前提一： x is A'

前提二： If x is A , then y is B

結 論： y is B' (2.88)

其中 A' 、 B' 與 A 、 B 都是模糊集合，我們可以將GMP 當成一個系統，圖表示GMP 推論的過程[15]

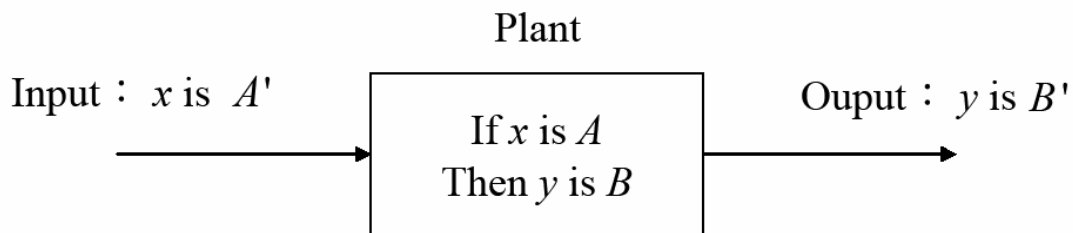


圖 2-22 GPM 推論示意圖

將上式寫成具體的計算式可得到：

$B' = A' \wedge R$ (2.89)

我們採用最被廣泛使用的最大最小合成法 (max-min composition)，因為它是計算最簡單而結果也很合理的一種合成法，那麼上式的表示法就相當於：

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \max_x \left[\min(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y)) \right] \\ &= \bigvee_x \left[\wedge(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y)) \right]\end{aligned}\quad (2.90)$$

其中 $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$ (Mamdani implication)

則上式可改寫成

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \bigvee_x \left[\wedge(\mu_{A'}(x), \mu_A(x), \mu_B(y)) \right] \\ &= \left[\bigvee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)) \right] \wedge \mu_B(y) \\ &= \alpha \wedge \mu_B(y)\end{aligned}\quad (2.91)$$

其中 α 稱為啟動強度 (firing strength)，而 $\alpha \wedge \mu_B(y)$ 即代表後鑑部執行的程度，

圖2-23 [15] 說明上述的模糊推論的過程。

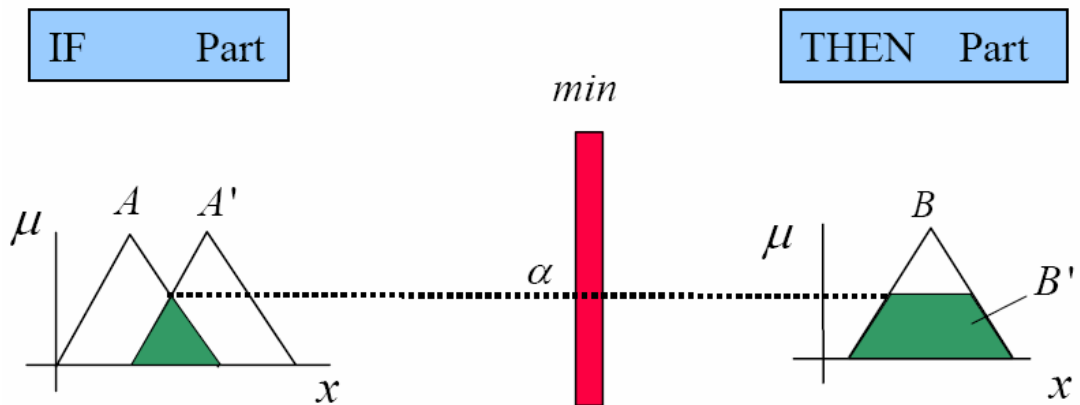


圖 2-23 模糊推論示意圖

2.6.4 模糊邏輯控制器架構

模糊邏輯控制器 (Fuzzy Logic Controller; FLC) 架構如圖2-24所示，一般模糊邏輯控制器分成四個部分，分別是模糊化介面、推論引擎、知識庫以及解模糊化介面，以下就對四個部分分別介紹[14][15]：

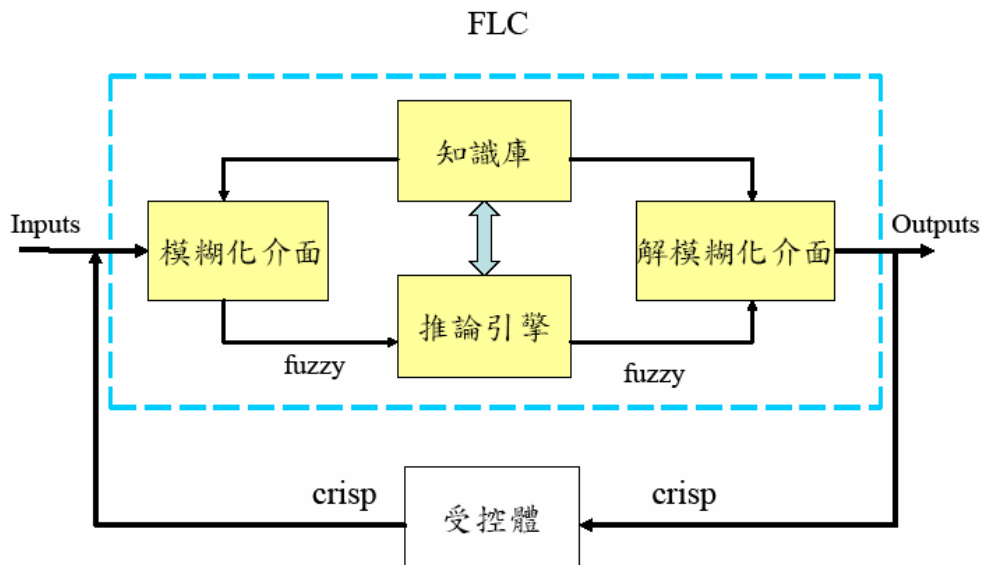


圖 2-24 模糊控制器架構圖

(1) 模糊化介面 (fuzzifier)：

模糊化介面的功能是将我們從外界輸入的明確值轉成適合的模糊變數，並選取適當的模糊函數與論域。當我們設定好輸入變數後，將輸入變數的範圍量化且映射 (mapping) 到對應的模糊集合。

(2) 知識庫 (knowledge base)：

在知識庫中包括了規則庫 (rule base) 及資料庫 (data base)，其中規則庫是由專家或依據經驗法則訂定的一組規則，多以If-Then的形式表示。模糊規則的訂定在控制器中是非常重要的，我們可以藉由經驗來修改控制規則，所以模糊控制器在受控系統無法以線性數學模式精確描述的情況下，經由適當的調整控制規則，可以得到比傳統控制更好的控制性能。而資料庫則是提供了模糊控制器內包括論域範圍、歸屬函數及語意變數等所需要的定義。

(3) 推論引擎 (inference engine)

推論引擎為模糊控制器的核心，它是利用模糊推論來模擬人類思考的決策模式，以我們訂定的模糊規則及模糊化的資訊為基礎，經過合成與推論的動作，計算出結果並送至解模糊化機構。假設我們考慮一個二輸入一輸出的系統，有 n 條模糊規則，其規則描述如下：

$$\text{If } x \text{ is } A_n \text{ and } y \text{ is } B_n, \text{ then } z \text{ is } C_n. \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.92)$$

並採用Mamdani提出的最大-最小推論法，推論過程如圖2-25所示[15]，

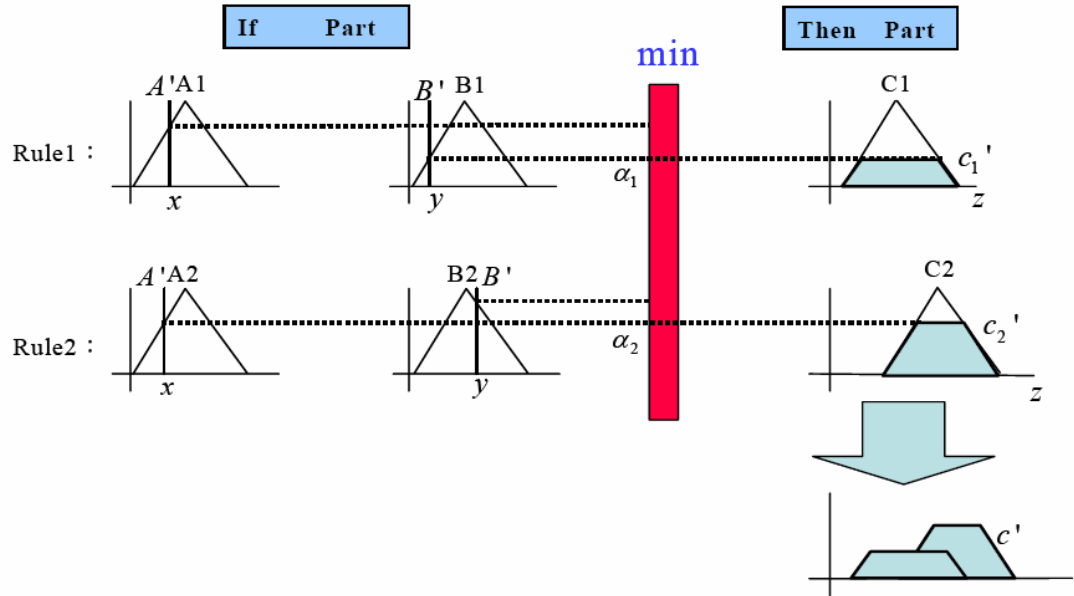


圖 2-25 最大-最小推論法的模糊引擎推論圖

其推論的步驟如下：

第一步：將每一條規則的前鑑部適合度算出：

$$\alpha_i = \min[\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)], \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.93)$$

第二步：將每一條規則的後鑑部適合度算出：

$$\mu_{C_i'}(z) = \min[\alpha_i, \mu_{C_i}(z)], \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.94)$$

第三步：結合每條規則的執行程度：

$$\mu_{C'}(z) = \max[\mu_{C_i'}(z)], \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.95)$$

第四步：解模糊化介面 (defuzzifier)：

經過模糊推論後的結果為一模糊集合，而解模糊化的功用就是將此一模糊集合轉換成一明確的數值，送至外界受控體使用，以下幾種為常見的解模糊化方法，介紹如下：

(1) 中心面積法 (Center of Area Method; COA)：

中心面積法又稱重心法，是求出輸出結果的歸屬函數面積重心值當成明確輸出。

如果論域為連續值時：

$$C^* = \frac{\int_M \mu_C(m) \cdot m \, dm}{\int_M \mu_C(m) \, dm} \quad (2.96)$$

如果論域為離散時：

$$C^* = \frac{\sum_{i=1}^j \mu_C(m_i) \cdot m_i}{\sum_{i=1}^j \mu_C(m_i)} \quad (2.97)$$

其中 C 是定義在論域 M 中的模糊集合，並將輸出論域分成 i 個離散值。

(2) 最大平均法 (Mean of Maximum Method; MOM)

將所有使得 $\mu_C(z)$ 達到最大值的 N 個點加以平衡後所得即是最後的明確輸出值。

$$C^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i \quad (2.98)$$

(3) 權重式平均法 (Weighted Average Method)

如果我們推論的結果為模糊單值，則權重式平均法是最為廣泛使用的，假設有 n 條規則其中 α_i 為第 i 條模糊規則的啟動強度， m_i 為第 i 條模糊規則推論的結果，則其表示式如下。

$$C^* = \frac{\sum_{i=1}^j \alpha_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^j \alpha_i} \quad (2.99)$$

第三章 智慧型控制演算法自動對準之設計

3.1 陀螺儀安裝校準

對於陀螺儀安裝校準這一項工作，我們可以分成下面三個部分，首先是陀螺儀的基本功能測試，第二步驟是動感平台座標系之定義與 CG 點的計算，第三步驟才是陀螺儀安裝與校準，下面我們就分別依照安裝校準之步驟順序分別加以詳細說明[13]。

3.1.1 陀螺儀之測試

我們為了要得知陀螺儀分別對應的座標和其相對應的驅動電路是否可以正常的工作，首先使用手動之方式，分別針對(X、Y、Z)三軸給予單獨的角度變化，再利用 A/D 卡和相對應 PC 上的陀螺儀程式，分別把三個陀螺儀的量測信號儲存到純文字檔中，之後把所儲存的資料利用 MATLAB 繪圖功能將其相對應之圖形輸出，最後利用繪出的圖形來分析判斷其相對應各軸的陀螺儀是否正常工作與三顆陀螺儀安裝時相對應座標系的確認。

3.1.2 動感平台座標系之定義與 CG 點的計算

在完成上述陀螺儀之測試工作之後，並且在沒有把陀螺儀安裝到動感平台之上，我們首先要定義動感平台座標與 CG 點的位置，如此才可以把陀螺儀正確地安裝於平台之上；因此為了求得動感平台座標與 CG 點的位置，以下是相對應的步驟與方法，第一步利用平台監控程式，下達控制命令使得平台做出單軸的俯仰弦波(Pitch Sin)擺動，藉由此動作確定上平台之 Y 軸座標，之後我們就可以依照此座標的定義推導出相對應的另外兩軸座標系之定義方向，進而定出上平台的完整座標系，第二步如同上述做出單軸滾轉弦波擺動，再利用正三角形求重心之方法，求出上平台 CG 點的座標位置。

3.1.3 陀螺儀安裝與校準

經過上述兩項步驟之後，我們就可以將陀螺儀的座標系原點與上平台的 CG

點重疊，並把陀螺儀安裝到上平台之上，之後再利用平台監控程式下達控制命令使得平台做出單軸俯仰弦波擺動，並且利用 A/D 卡和相對應陀螺儀的感測程式來擷取並紀錄由陀螺儀產生的三軸的角速率，最後再利用 MATLAB 繪圖功能將其相對應之圖形輸出，來觀察 P、Q、R 耦合現象，進而修正校準安裝之位置，使得 P、Q、R 耦合現象降至最低，來完成陀螺儀安裝與校準。

3.2 陀螺儀動/靜態誤差補償

由於陀螺儀是一種高靈敏度，且製造精密的感測元件，因此很容易因為本身的特性、製程的缺陷以及外界的干擾，而產生相對應的誤差，進而參雜到所量測的感測訊號之中，因此如果沒有進行相對應的誤差補償，而直接利用此量測信號計算出來的平台方位姿態都將會是不正確的資訊，有鑒於此，本小節將針對陀螺儀的動/靜態誤差特性分別進行相對應的補償。

3.2.1 陀螺儀靜態誤差補償

由於陀螺儀的靜態誤差主要是由於本身製造缺陷產生的誤差、地球自轉所產生誤差與安裝誤差所引起，而在這些靜態誤差的來源之中，大部分都是無法利用數學的方式加以建模表示，除了地球自轉所產誤差可以利用陀螺儀的安裝位置與平台所擺放的位置可以來降低地球自轉誤差外，其餘的靜態誤差部份就只能透過大量的實驗，收集其實驗資料利用 MATLAB 的分析求得相對應誤差的平均值進行修正補償[13]。

3.2.2 陀螺儀動態誤差補償

由於振動式陀螺儀本身除了會有上述的靜態誤差外，它還會因為外界的雜訊干擾和陀螺儀本身所產生的熱干擾所引起的誤差，所以在使用陀螺儀來量測角速率時，一定要加上一個能夠自動補償的機制[13]。

有鑒於此，在本論文中我們提出兩個自動陀螺儀誤差動態補償方法，其中第一個動態補償方法是利用陀螺儀量測一個週期性且具有一樣大小之正負半週的波形下所設計出一個取平均誤差值的演算法，其流程如圖 3-1 所示，步驟如下：

第一步：利用平台監控程式，送出平台驅動信號，使得平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作。

第二步：利用 A/D 卡和相對應陀螺儀程式，把由陀螺儀所量測到的類比信號轉換成數位信號，再利用陀螺儀程式把數位信號轉成分別對應三軸的角速率（P、Q、R），其對應程式如下：

$$p = (\text{Gyro_Voltage}[0] - \text{Gyro_Vref}[0] + \text{Gyro_Comp_g1}) / \text{SFg1};$$

$$q = (\text{Gyro_Voltage}[1] - \text{Gyro_Vref}[1] + \text{Gyro_Comp_g2}) / \text{SFg2};$$

$$r = (\text{Gyro_Voltage}[2] - \text{Gyro_Vref}[2] + \text{Gyro_Comp_g3}) / \text{SFg3};$$

其中

Gyro_Voltage 是代表陀螺儀因為感測到角速度所產生的電壓變化，經過 A/D 卡轉換所相對的數位信號。

Gyro_Vref 是代表上平台保持在穩定點時陀螺儀感測到的角速度所產生的輸出電壓經過 A/D 卡轉換所相對的數位信號。

Gyro_Comp_g1 到 Gyro_Comp_g3 是基本的陀螺儀誤差補償值

SFg1 到 SFg2 是每一個陀螺儀相對的比例因數。

第三步：利用陀螺儀所量測到的信號，再經由 PC 上的陀螺儀程式做轉換計算求得三軸的角速率，經過一個利用 Runge-Kutta 四階數值方法所設計出來的二階濾波器把高頻雜訊濾除。

第四步：由於平台每完成一個動作，其週期 T 為固定三秒鐘，其陀螺儀量測的點數為 300 點，因此只要判斷點數是否已完成一個週期的動作，不成立(未達 300 點)，則把每次抓到的三軸角速率累加到三個獨立的暫存器之中，成立(達 300 點)時，則把累加暫存器分別除以一个週期相對應的點數(300 點)，其運算結果則為陀螺儀在這一個週期時的誤差。

第五步：將其第四步的所計算出來的陀螺儀誤差在下一個週期補上，並且也

在同時也進行步驟一到四的工作，計算出目前的動態誤差已進行下一的週期的補償，已達到 Moving Window 的補償效果。

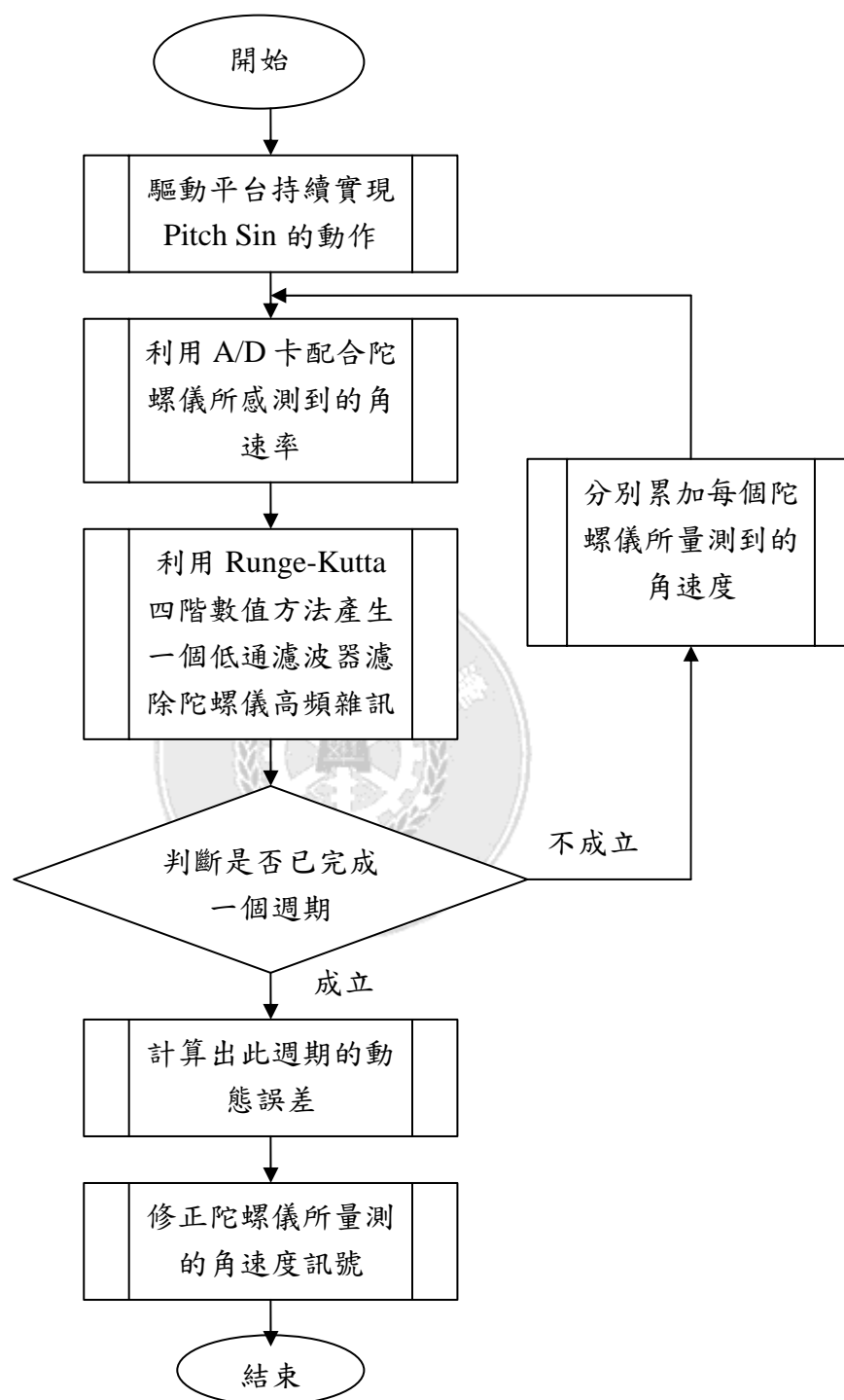


圖 3-1 自動陀螺儀誤差動態補償流程圖(1)

第二個動態補償方法是利用陀螺儀量測一個具有週期特性波形時所設計出一個取斜率誤差值的演算法則，其流程如圖 3-2 所示，步驟如下：

第一步：利用平台監控程式，送出平台驅動信號，使得平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作。

第二步：利用 A/D 卡和相對應陀螺儀程式，把由陀螺儀所量測到的類比信號轉換成數位信號，再利用陀螺儀程式把數位信號轉成分別對應三軸的角速率（P、Q、R），其對應程式如下：

$$p = (\text{Gyro_Voltage}[0] - \text{Gyro_Vref}[0] + \text{Gyro_Comp_g1}) / \text{SFg1};$$

$$q = (\text{Gyro_Voltage}[1] - \text{Gyro_Vref}[1] + \text{Gyro_Comp_g2}) / \text{SFg2};$$

$$r = (\text{Gyro_Voltage}[2] - \text{Gyro_Vref}[2] + \text{Gyro_Comp_g3}) / \text{SFg3};$$

其中

Gyro_Voltage 是代表陀螺儀因為感測到角速度所產生的電壓變化，經過 A/D 卡轉換所相對的數位信號。

Gyro_Vref 是代表上平台保持在穩定點時陀螺儀感測到的角速度所產生的輸出電壓經過 A/D 卡轉換所相對的數位信號。

Gyro_Comp_g1 到 Gyro_Comp_g3 是基本的陀螺儀誤差補償值

SFg1 到 SFg2 是每一個陀螺儀相對的比例因數。

第三步：利用陀螺儀所量測到的信號，再經由 PC 上的陀螺儀程式做轉換計算求得三軸的角速率，經過一個利用 Runge-Kutta 四階數值方法所設計出來的二階濾波器把高頻雜訊濾除。

第四步：由於平台每完成一個動作，其週期 T 為固定三秒鐘，其陀螺儀量測的點數為 300 點，因此只要判斷是到達 300 點，就可以抓到一個週期信號的起始點和終點的數值，之後在透過直線方程求出誤差斜率，

第五步：將其第四步的所計算出來的陀螺儀誤差斜率在下一個週期補上，而

也在同時也進行步驟一到四的工作，計算出目前的動態誤差已進行下一的週期的補償，已達到 Moving Window 的補償效果。

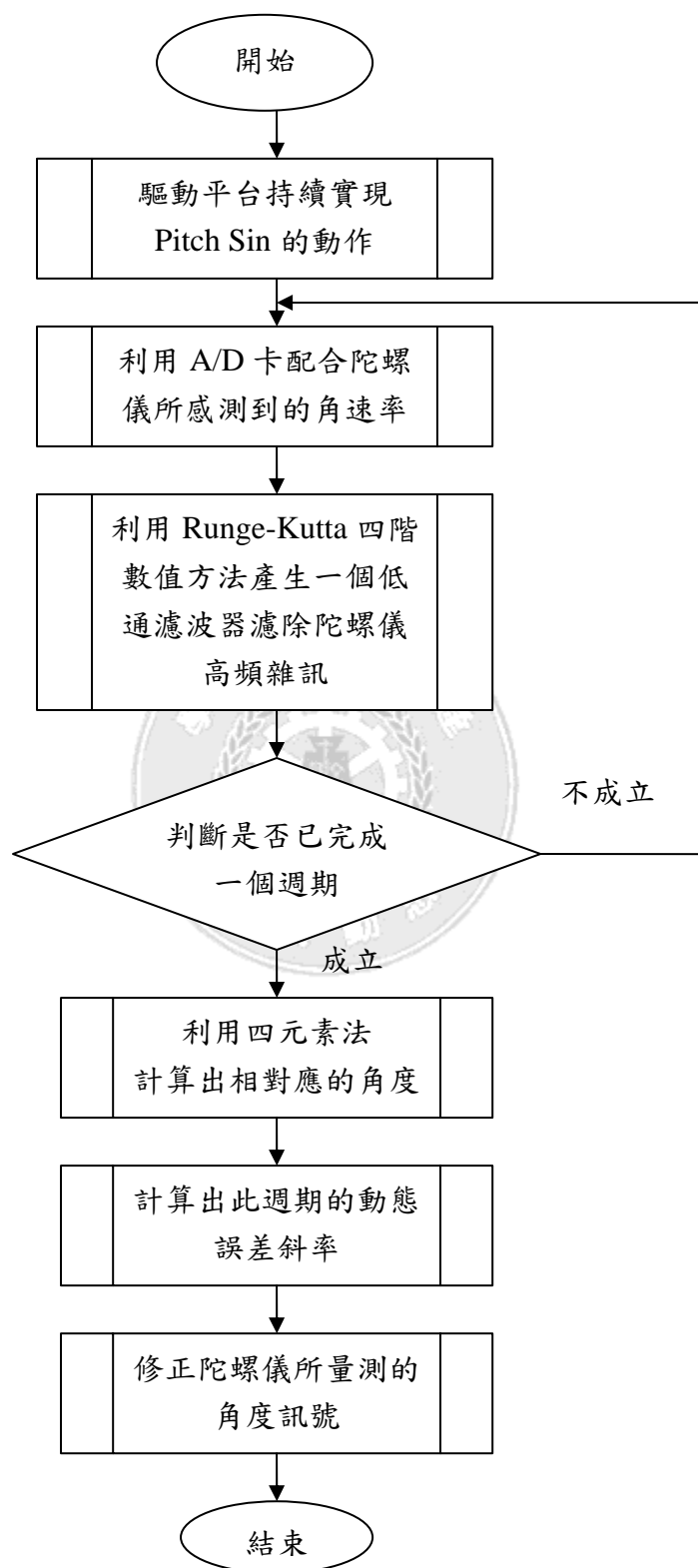


圖 3-2 自動陀螺儀誤差動態補償流程圖(2)

3.3 智慧型擴展式卡爾曼濾波器

智慧型擴展式卡爾曼濾波器之系統架構如圖3-3：

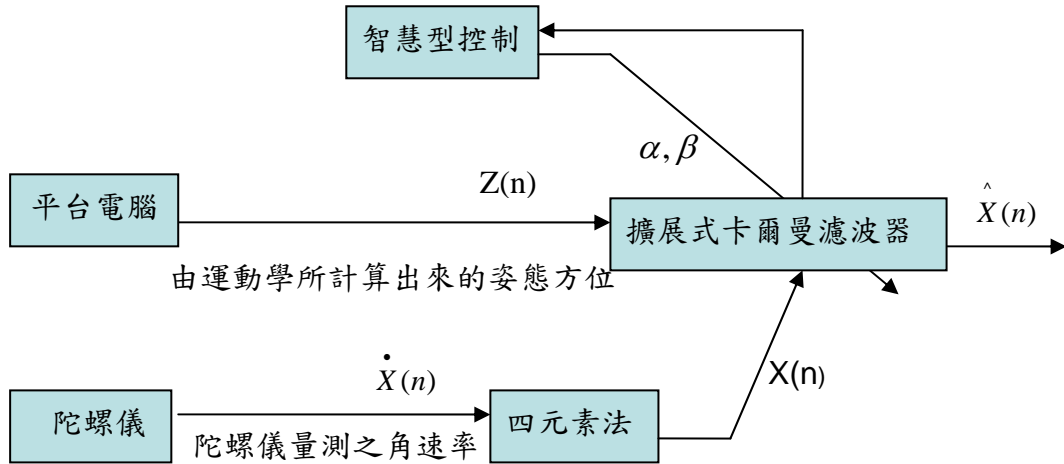


圖 3-3 智慧型擴展式卡爾曼濾波器之系統架構

智慧型擴展式卡爾曼濾波器之系統，首先利用由信號擷取卡所取得之陀螺儀信號經過四元素轉換法計算出由陀螺儀所量測之平台姿態，另一方面再加上由平台電腦所提供之平台姿態，最後再利用擴展式卡爾曼濾波器配合上智慧型控制器估測出最佳的的平台姿態，接下來下面幾個小節，將分別對於智慧型擴展式卡爾曼濾波器的每一個關鍵部份做詳細的說明與介紹，其內容包含擴展式卡爾曼相關模式的探討與設定、智慧型控制器的設計與實現與平台順向姿態與陀螺儀量測姿態達到同步化的整合。

3.3.1 擴展式卡爾曼模式的推導與分析

由於本篇論文中陀螺儀安裝的實驗平台，為本實驗室中的三桿六自由度動感平台，因此在卡爾曼濾波器中各部份的模式都和一般在討論飛行導航的論文，有著截然不同的地方，下面我們將先針對連續時間不同之處做詳細的探討，最後的到連續時間的模式之後再利用第二章的方法求得離散時間的模式。

(A) 連續時間的擴展式卡爾曼濾波器系統部分模式推導與分析

因為在本論文之中卡爾曼濾波器的兩個輸入訊號，第一為利用固裝式陀螺儀

直接量測平台角速率的變化，再透過四元素求得平台運動姿態；第二為利用平台本身的相關感測器，如光學尺、伺服馬達編碼器，間接取得平台運動資訊，再透過平台順向運動方程計算推估出平台姿態；其中陀螺儀為直接安裝在平台上量測上平台的姿態，因此相對於透過感測器配合上平台順向運動學所計算出來的平台姿態而言，陀螺儀可以感測到由於平台在接受到平台控制電腦所發出的動作命令時，無法很完美的實現動之效果，導致上平台的姿態會有偶合現象；再由於平台本身結構與結構之間有時，並無法很完美的配合，導致平台的順向運動方程所計算出來的上平台姿態和使用陀螺儀直接量測出來的姿態相比較下，陀螺儀所提供的平台姿態比較正確，因此本篇論文中使用的擴展式卡爾曼濾波器的系統部分將使用陀螺儀計算平台姿態的狀態方程式，而量測部分將使用平台的順向運動學。

再決定了擴展式卡爾曼濾波器中系統部分，將要以陀螺儀計算平台姿態的狀態方程，以下為計算平台姿態的方程式。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

其中

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \text{ 為尤拉轉換矩陣}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \text{ 為陀螺儀所感測到的角速率}$$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \text{ 為平台的姿態}$$

如果將 (4.36) 式轉換成卡爾曼濾波器中正規的表示方法如 (4.37) 式，則可以表示為 (4.38) 式的型態。

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\dot{X} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$u = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

(B) 連續的擴展式卡爾曼濾波器量測部分模式推導與分析

再決定了卡爾曼濾波器的系統部分之後，接下來就是要決定卡爾曼濾波器的量測部分，在本論文中，由於論文中的實驗平台為本實驗室的三桿六自由度平台，因此其工作空間相對於一般的定位/導航系統而言是非常小，因此無法像一

般的論文使用GPS作為卡爾曼濾波器的量測部分，所以在本論文中是使用平台本身的順向運動學作為量測部分，也因為如此本應將整個順向運動學的方程式直接轉換成卡爾曼濾波器的量測部分，但由於順向運動方程在工作時，必須配合相對應的平台上的感測訊號，因此無法從平台控制電腦獨立出來，因此在本論文之中是利用平台電腦內的順向運動方程配合平台感測訊號直接計算出平台姿態在透過乙太網路傳送至陀螺儀電腦，因此其卡爾曼濾波器量測部分的狀態方程式如

(4.44) 式

$$y=CX \quad (3.9)$$

其中

$$y=X=\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

(C) 離散的擴展式卡爾曼濾波器模式推導與分析

在確定了，連續卡爾曼濾波器系統與量測的模式之後，接下來為了能夠在電腦（PC）上利用程式實現擴展式卡爾曼濾波器，因此我們首先必須先進行相關離散模式的探討，其中有的模式必須由實驗得到，也有些必須由連續的系統和量測的狀態方程的相關資訊求得，接下來我們就依照卡爾曼的計算流程，分別討論確定的其相對應離散的模式，其相關的卡爾曼的理論在第二章已有提過，因此不在這裡多加敘述。

I. 首先離散的擴展式卡爾曼濾波器其系統與量測方程可表示成如下所示：

$$X_{k+1}=\Phi_k X_k+Hu+W_k \quad (3.12)$$

$$Z_k=CX_k+V_k \quad (3.13)$$

其中

$$\Phi_k = e^{A_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (3.14)$$

$$H = \int_0^T e^{A_k t} dt \cdot B \approx TB \quad (3.15)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$E[W_k W_k^T] = Q_k \quad (3.17)$$

$$E[V_k V_k^T] = R_k \quad (3.18)$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$R_k = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

其中：

Q_k 、 R_k 為利用大量實驗求得

II. 起始：設定估算狀態及誤差狀態之協變矩陣

$$X(0|0) = \begin{bmatrix} \phi & : \phi i \\ \theta & : \theta e t a \\ \varphi & : \varphi s i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

III. 估測：於k 時刻時預估k+1 時刻之協變矩陣

$$X_{(k+1|k)} = \Phi_k X_{(k|k)} + Bu \quad (3.23)$$

$$P_{(k+1|k)} = \Phi_k P_{(k|k)} \Phi_k^T + Q_k (I + \beta) \quad (3.24)$$

其中：

$$P_{(k+1|k)} = \begin{bmatrix} P_{(k+1|k)} & 0 & 0 \\ 0 & P_{(k+1|k)} & 0 \\ 0 & 0 & P_{(k+1|k)} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

β ：為 Q_k 的權重值，範圍-1~1，由智慧型控制器決定

IV. 修正：於 $k+1$ 時刻時，新的量測量

可以取得並據之修正狀態之估算

$$X_{(k+1|k+1)} = X_{(k+1|k)} + K_{(k+1)} [Z(k+1) - HX_{(k+1|k)}] \quad (3.27)$$

其中

$$Z = \begin{bmatrix} \text{Roll} \\ \text{Pitch} \\ \text{Yaw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z1 \\ Z2 \\ Z3 \end{bmatrix} \text{ 為順向運動方程提供的平台姿態}$$

$K_{(k+1)}$ ：卡爾曼增益

狀態誤差協變矩陣之計算如下：

$$P_{(k+1|k+1)} = (I - K_{(k+1)} H) P_{(k+1|k)} \quad (3.28)$$

其中

$$P_{(k+1|k+1)} = \begin{bmatrix} P_{(k+1|k+1)} & 0 & 0 \\ 0 & P_{(k+1|k+1)} & 0 \\ 0 & 0 & P_{(k+1|k+1)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

卡門濾波器增益之計算如下：

$$K = P_{(k+1|k)} H^T [H P_{(k+1|k)} H^T + R_k (I + \alpha)]^{-1} \quad (3.30)$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

α ：為 R_k 的權重值，範圍-1~1，由智慧型控制器決定

3.3.2 智慧型控制器設計

一般而言，模糊控制器之設計步驟如下：

1. 定義輸入及輸出變數

首先要先決定受控系統有哪些狀況是必須被觀察、量測的，然後考慮我們所要控制的輸出動作，決定輸入變數與輸出變數的個數與種類。

2. 定義模糊集合與模糊歸屬函數

考慮實際狀況將輸入與輸出變數選取適當的論域，以確定我們量測與操作的範圍，並決定要用何種模糊歸屬函數將我們的輸入與輸出變數模糊化以轉換成模糊控制器可接受的模糊量。

3. 訂定模糊規則庫與模糊推論方式

依據受控系統的特性或專家的知識與經驗決定模糊規則的形式與數量，以及模糊推論的方式。

4. 決定解模糊化的方式

最後選擇適當的解模糊化方法將經過模糊控制器內部運算所得之模糊集合轉化成一明確值送至受控體進行控制。

以下就針對智慧型擴展式卡爾曼濾波器之控制器設計步驟進行說明：

一般有關模糊控制器設計的文獻中，大多都使用誤差與誤差的變化率，其原因在於一般文獻的模糊控制器的工作目的是直接調整控制命令，使得輸出結果與參考的控制命令達到一致。

而本論文中的智慧型控制器的目標是希望藉由調整擴展式卡爾曼濾波器中系統與量測誤差的協方差 Q 、 R 之權重值 α 、 β ，使得卡爾曼濾波器的輸出的估計姿態更接近實際值，雖然在擴展式卡爾曼濾波器文獻中也有提出不是使用誤差與誤差變化率做為調整其系統與量測誤差的協方差之權重值，但由於其論文和本論文中的測試平台不進相同，因此本論文中的控制器將使用上一次誤差 $e(k-1)$ 和現在的誤差 $e(k)$ 來作為控制器的輸入；其中誤差=理想姿態-量測的實際姿態。使用上一次誤差與現在誤差作為控制器的輸入的原因是除了能擁有與一般使用誤差與誤差變化率做為輸入信號的控制器的優點，並且也有和一般用於擴展式卡爾曼濾波器的控制器一樣的功能，下圖模糊控制器的輸入輸出示意圖。

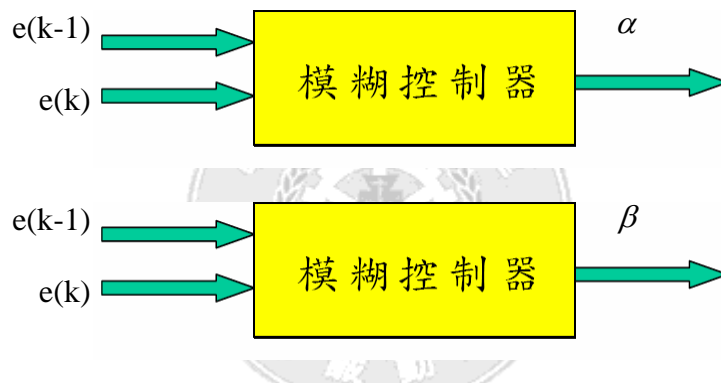


圖 3-4 控制器的輸入輸出示意圖

在語意變數（linguistic variables）的設計上，輸入變數 $e(k-1)$ 和 $e(k)$ 及輸出變數 α 、 β 分別使用三個和五個語意變數來描述：

$$e(k) = \{NS \quad ZE \quad PS\} \quad (3.33)$$

$$e(k-1) = \{NS \quad ZE \quad PS\} \quad (3.34)$$

$$\alpha / \beta = \{NB \quad NS \quad ZE \quad PS \quad PB\} \quad (3.35)$$

而針對輸入變數我們選擇其歸屬函數如圖3-5所示，輸出變數方面則使用其歸屬函數，如圖3-6所示：

$e(k)$ 和 $e(k-1)$ 的歸屬函數

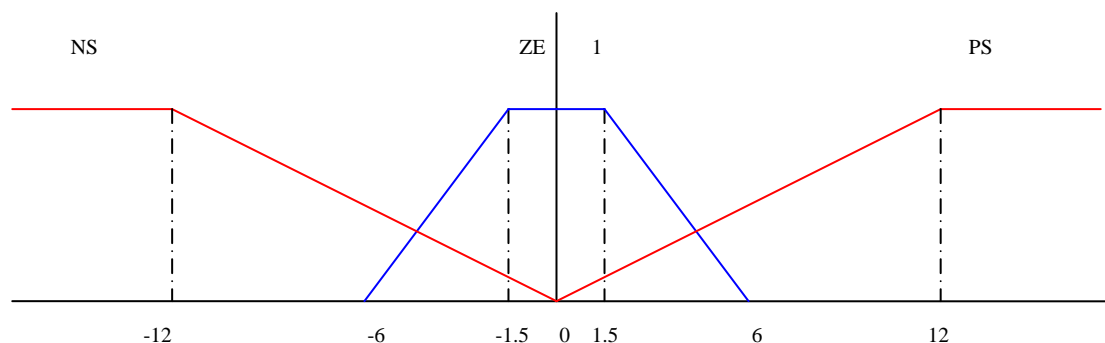


圖 3-5 控制器輸入的歸屬函數圖

Fuzzy 輸出的歸屬函數

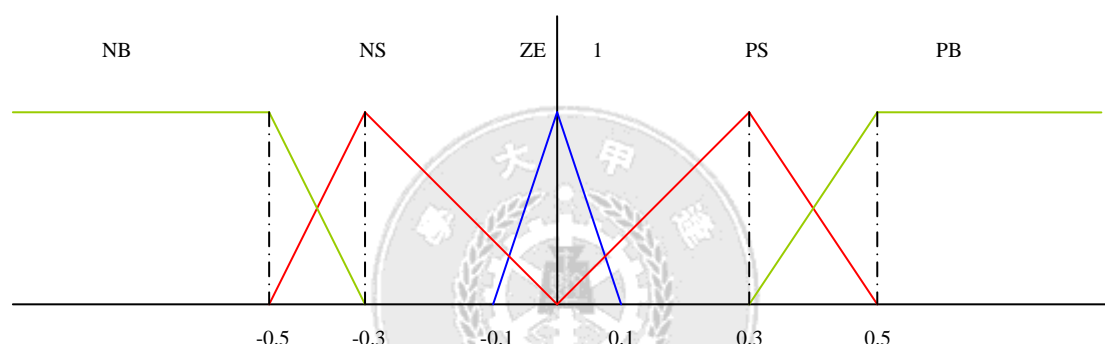


圖 3-6 控制器輸出的歸屬函數圖

在模糊規則庫的部分，我們以 $e(k-1)$ 和 $e(k)$ 為輸入變數， α 、 β 為出變數，則可用語言形式來表示模糊規則，其中 $e(k-1)$ 和 $e(k)$ 各用三個語意變數來描述狀態，所以相互間總共會產生 9 條模糊規則，其敘述如下：

- Rule1 : If $e(k)=PS$ And $e(k-1)=PS$ Then OutPut= ZE
 Rule2 : If $e(k)=PS$ And $e(k-1)=ZE$ Then OutPut= PS
 Rule3 : If $e(k)=PS$ And $e(k-1)=NS$ Then OutPut= PB
 ⋮
 Rule6 : If $e(k)=ZE$ And $e(k-1)=NS$ Then OutPut= NS
 ⋮
 Rule9 : If $e(k)=NS$ And $e(k-1)=NS$ Then OutPut= ZE

上述的模糊規則，經整理後可簡潔的用表3-1 表示。

表3-1 模糊控制規則表

$E(k)$ 本次 $E(k-1)$ 上次	PS 小正	ZE 0	NS 小負
PS 小正	ZE 差	NS 很好	PB 最差
ZE 0	PS 很差	NB 最好	PS 很差
NS 小負	PB 最差	NS 很好	ZE 差

而模糊推論部分，在考慮速度因素下，採用簡化的模糊單值推論方式

(simplified fuzzy-singleton) 做為模糊推論的方法，它是最大-最小推論法的一個特例，其推論方法簡化了後，推論方式，直接以模糊單值實數代替模糊函數，其推論方法如圖3-7所示：

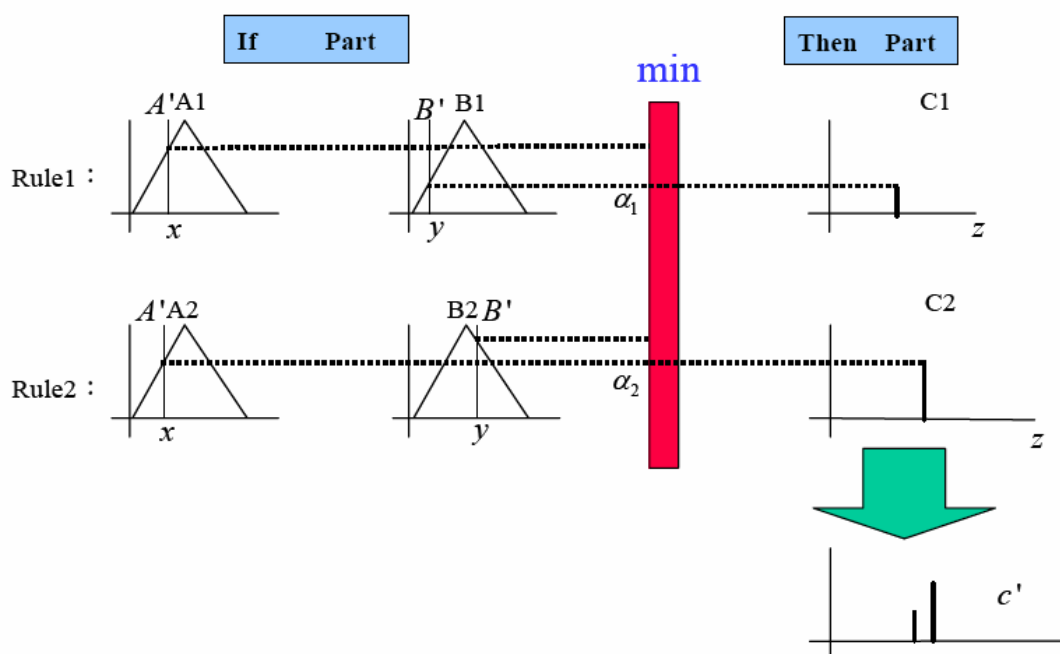


圖 3-8 檢化單值輸入示意圖

最後考慮解模糊化的部分，由於此模糊控制器要實現在PC上的Real-time系統上，考慮到執行時間下，我們採用離散式權重式平均法為解模糊化的方法，其表示式如下：

$$C^* = \frac{\sum_{i=1}^j \alpha_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^j \alpha_i} \quad (3.36)$$

3.4 順向姿態與陀螺儀量測姿態達到同步化整合

由於本論文中，順向姿態的計算是在平台控制電腦計算求得，而陀螺儀的感測信號處理運算與卡爾曼濾波器運算都在實現在陀螺儀電腦上，因此在卡爾曼運算上，必須考慮到其資料的同步化問題；有鑑於此在本論文的系統中，我們選擇利用高速的乙太網路來做為進行同步化的工作的橋樑，其同步化的流程如下圖所示：

第一步：啟動陀螺儀電腦程式並完成相關初始化動作，如 A/D 卡的初始設定、

店數初始設定與網路初始設定等等。

第二步：啟動陀螺儀電腦的網路聆聽功能，並進入無窮迴圈等待平台電腦連線。

第三步：啟動平台電腦，並利用平台監控程式初始化平台，使平台移動到工作點。

第四步：等到平台到達工作點之後，選擇平台工作項目，並驅動平台執行工作，

當平台監控程式正式進入送出平台控制信號的同時，利用乙太網路連線

方式觸發陀螺儀電腦開始同步工作，已達到同步化工作。

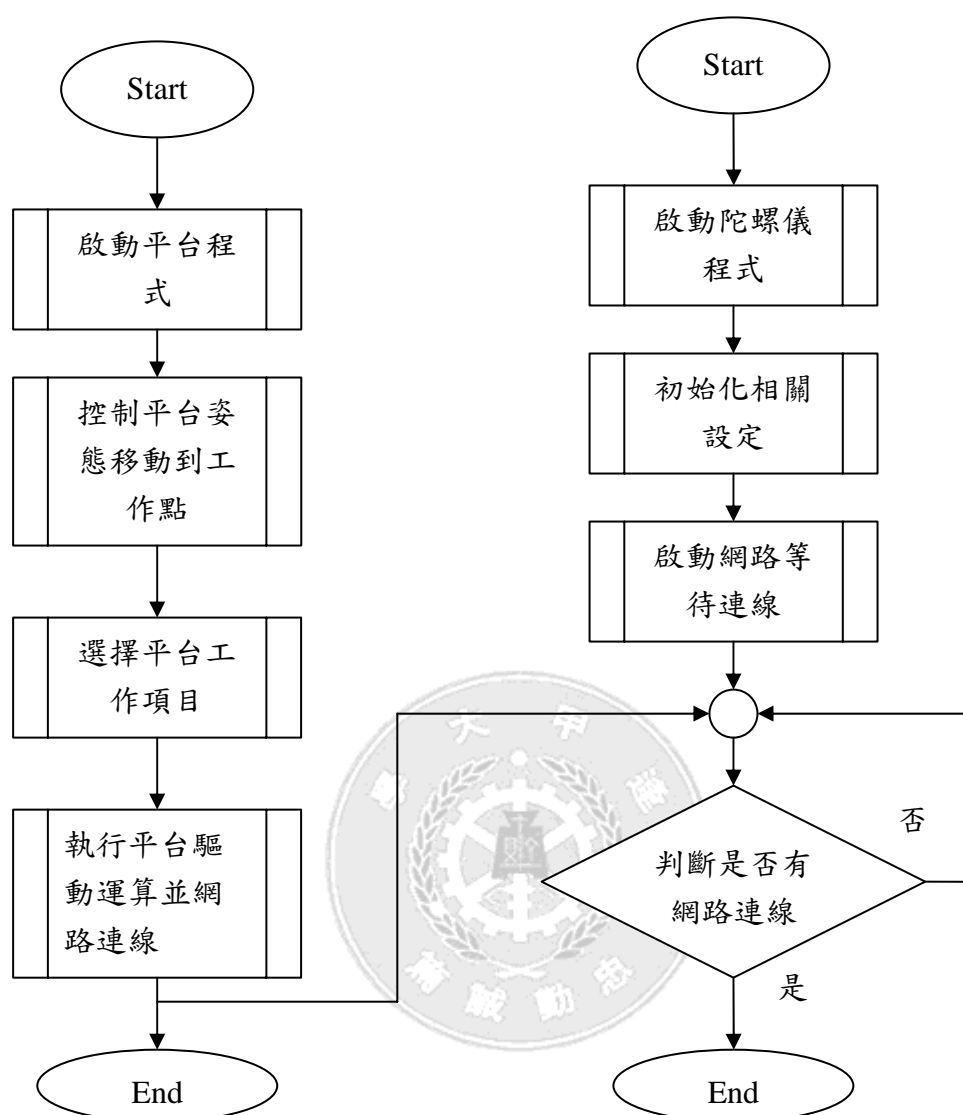


圖 3-9 系統同步整合流程圖

第四章 實驗結果與分析

4.1 陀螺儀靜態實驗結果與分析

如圖 4-1 和圖 4-2 所示，當陀螺儀已正確安裝於三桿六自由度動感平台上之後，利用平台驅動程式送出控制命令使得平台到達工作點且靜止不動，所量得之三軸角速率值（P、Q、R），由圖 5-1 我們可以分析發現其三個振動式陀螺儀，在上平台水平不動時，會因為外界高頻雜訊的干擾與一般性陀螺儀誤差之影響使得量測到的角速率並非和理論值相同均為零，也因為如此，所以當把其三軸角速率直接利用四元素轉換法計算出來之三軸角度也就一定不會是靜止不動了。其中圖中之水平座標為取樣點數，取樣間隔時間為 0.01sec，圖 4-1 中，其垂直座標之單位為 rad/sec ，而圖 4-2 中，其垂直座標之單位為 deg 。

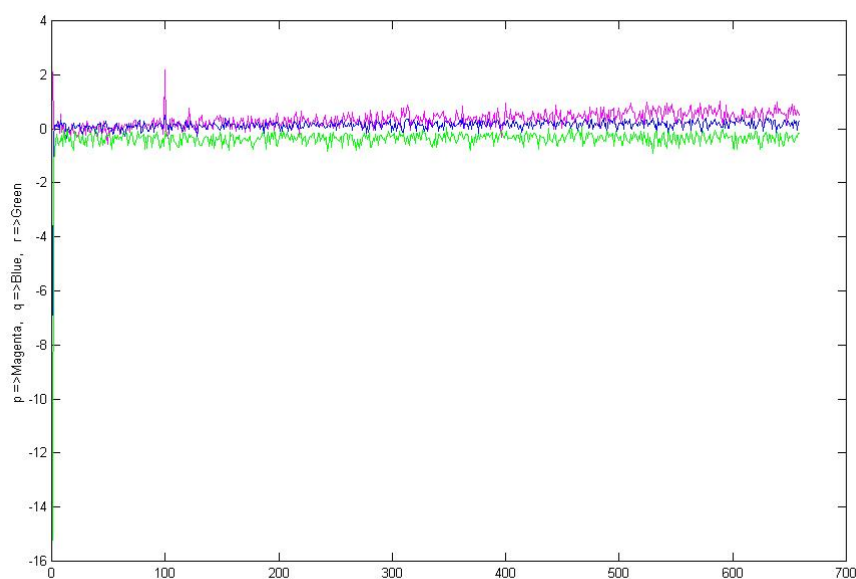


圖 4-1 平台靜止不動時未經濾波的角速率

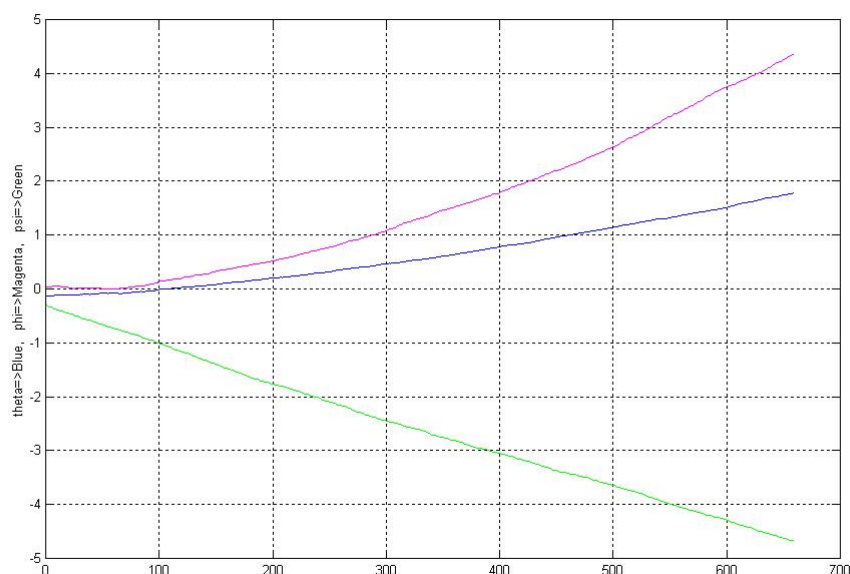


圖 4-2 平台靜止不動時未經濾波的角度

因此為了降低其外界高頻雜訊與陀螺儀本身誤差之影響，所以在本論文中，我們在每一次把陀螺儀所量測到的角速率送到四元素法計算出相對應的角度之前，都必先經過一個由 Runge-Kutta 四階的數值積分所設計出來的二階濾波器把高頻雜訊濾除，其結果如圖 4-3 和圖 4-4 所示，其中圖中之水平座標為取樣點數，取樣間隔時間為 0.01sec，圖 4-3 中，其垂直座標之單位為 rad/sec ，而圖 4-4 中，其垂直座標之單位為 deg ，由圖形可以證明我們的分析和解決方法相當正確。

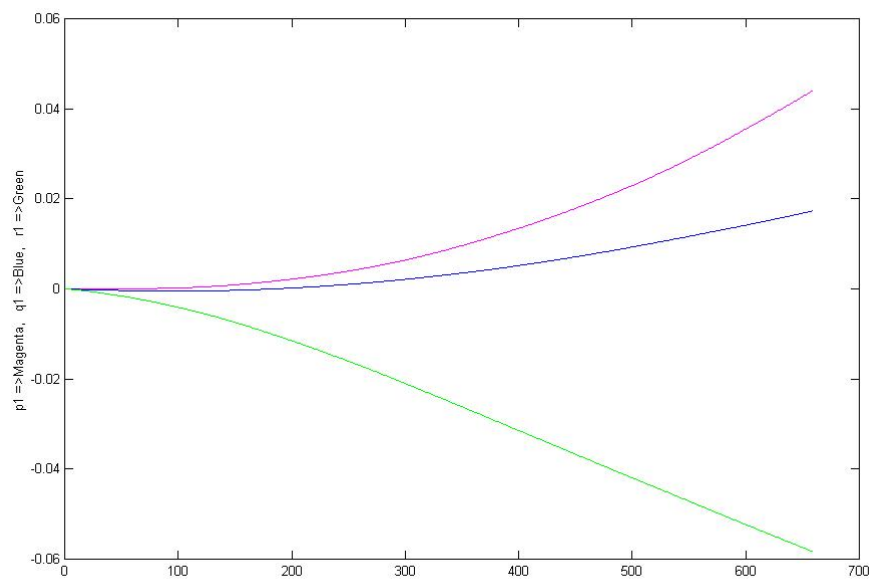


圖 4-3 平台靜止不動時經濾波的角速率

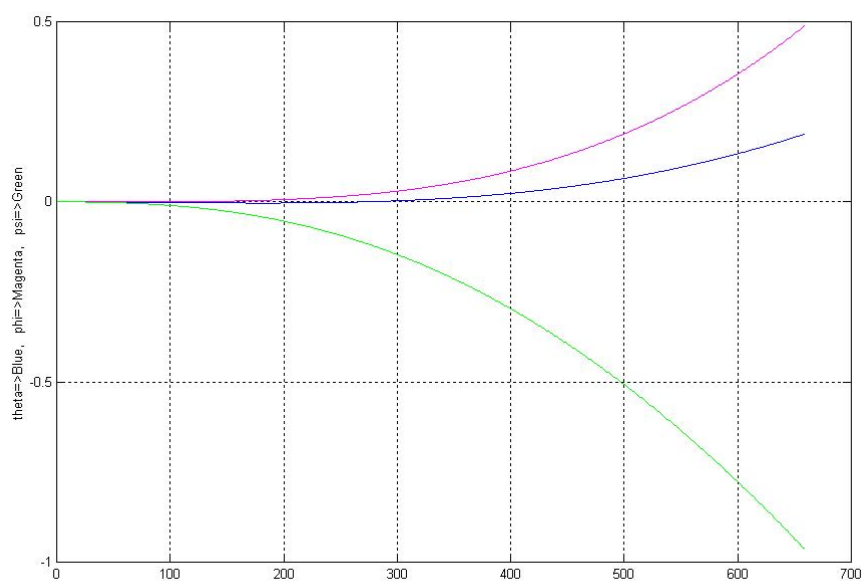


圖 4-4 平台靜止不動時經濾波與四元素轉換法後算得之角度

4.2 陀螺儀靜態誤差補償實驗結果與分析

如圖 4-5 和圖 4-6 所示，當陀螺儀已正確安裝於三桿六自由度動感平台上之後，且利用平台驅動程式送出控制命令使得平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作，所量得之三軸角速率值（P、Q、R），由圖形我們可以分析發現三個振動式陀螺儀，當安裝在上平台時，會因為陀螺儀本身動/靜態誤差的影響，使得量測的角速度並非和理論值相同，也因為如此，所以當把其三軸角速率直接利用四元素轉換法計算出來之三軸角度也就一定不會和實際的平台姿態有很大的誤差如圖 4-6 所示。

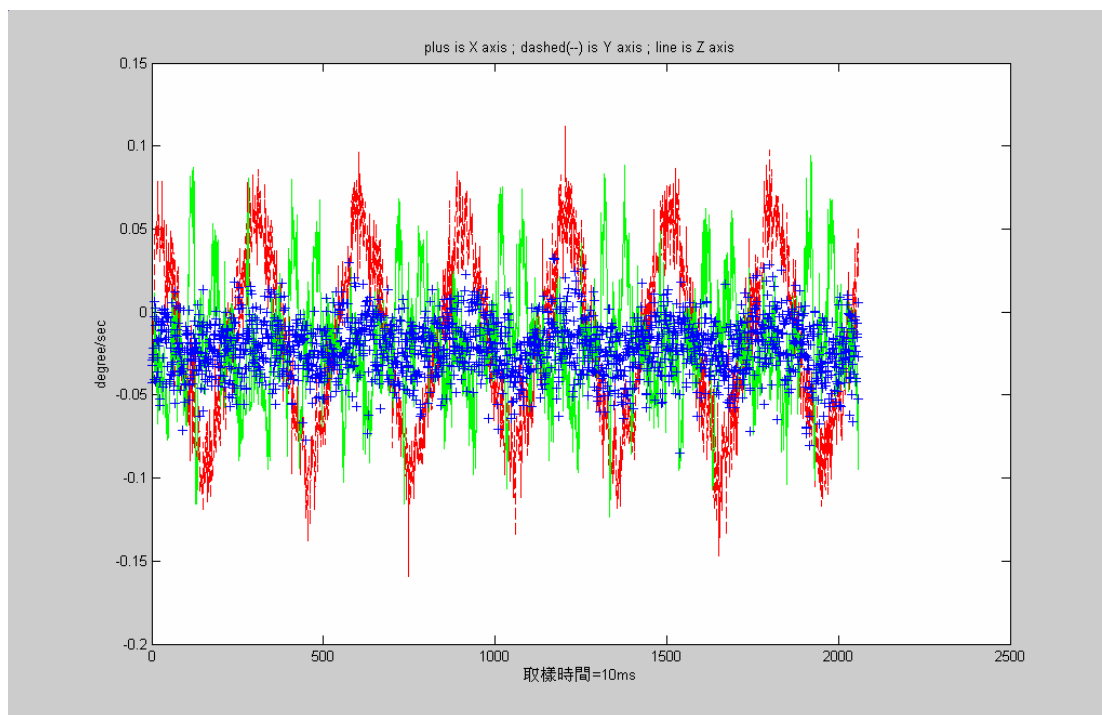


圖 4-5 平台做連續單軸的 Pitch Sin 動作未靜態補償的角速率

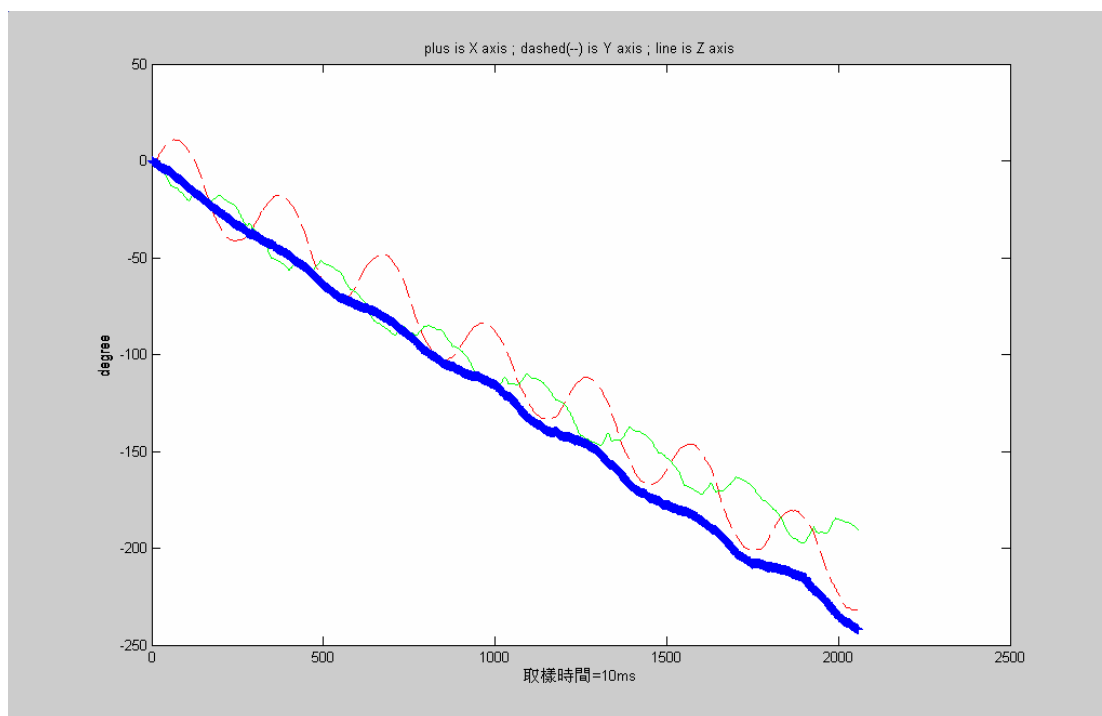


圖 4-6 平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作未靜態補償的角度

因此首先為了減低陀螺儀本身量測的靜態誤差，我們利用 3.2.1 節所說之方法，首先透過大量實驗取得相對應實驗數據，再透過 MATLAB 估算出每一顆陀螺儀平均的角速度誤差，最後在實際量測平台姿態變化時減去平均的角速度誤差，其結果如圖 4-7 與圖 4-8 所示，由圖形我們可以發現其效果非常顯著，此方法能有效改善其量測角速度的誤差，進而修正由四元素所計算出來的平台姿態。

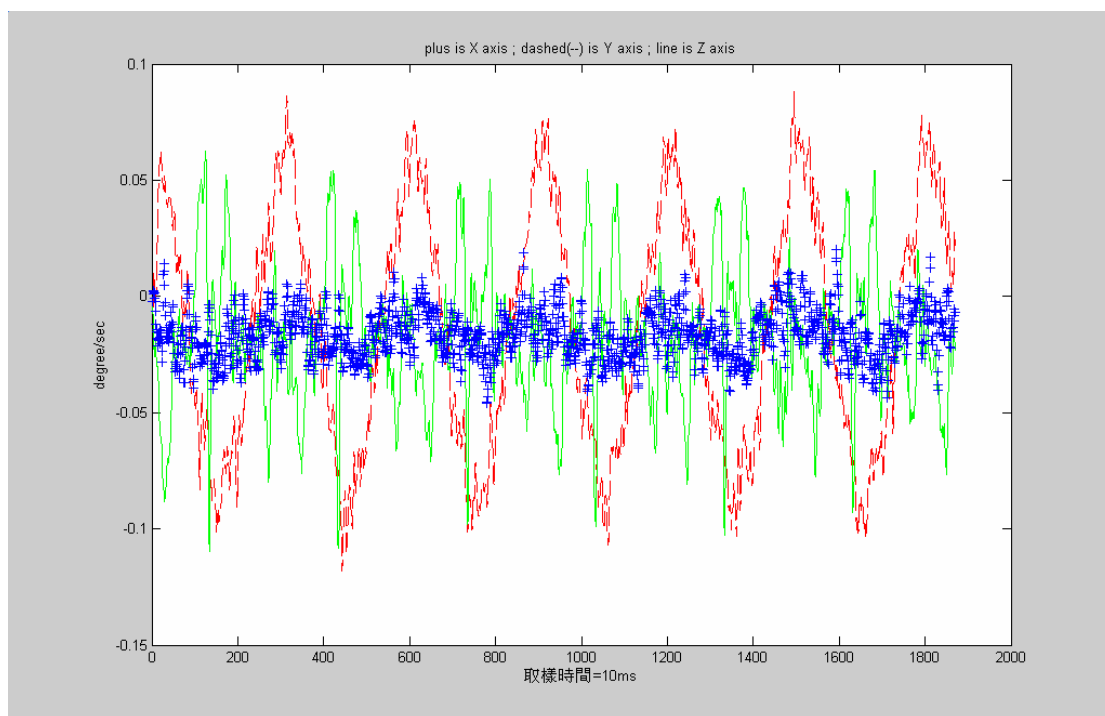


圖 4-7 平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作靜態補償後的角速度

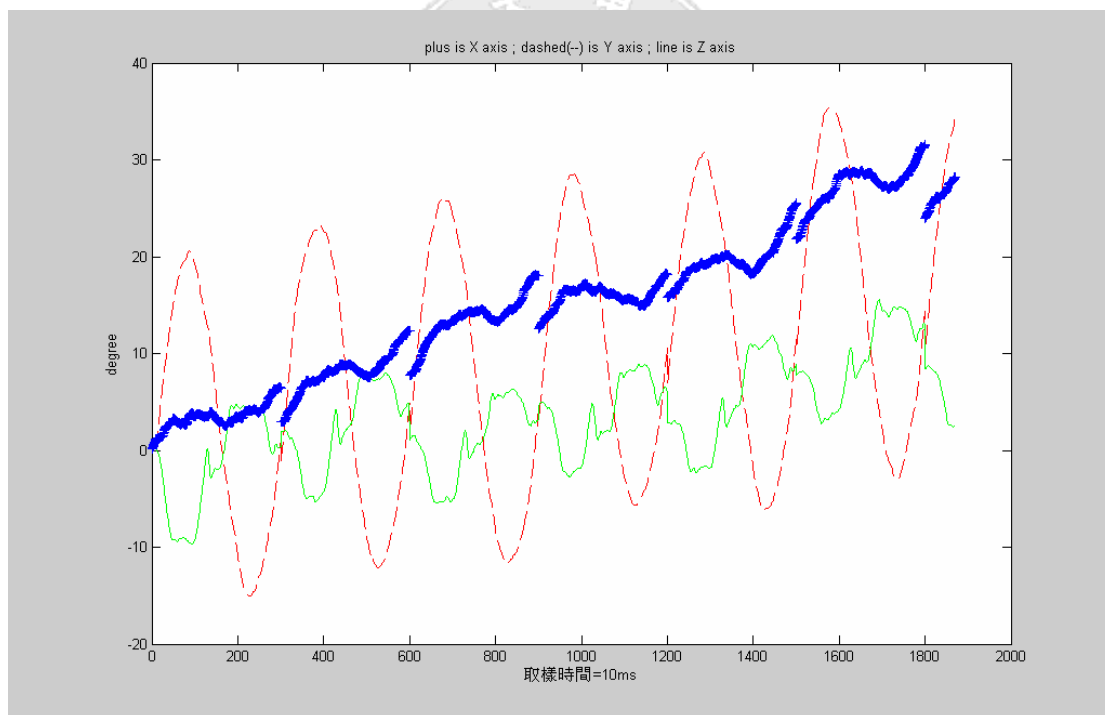


圖 4-8 平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作靜態補償後的角度

4.3 陀螺儀動態誤差補償實驗結果與分析

由圖 4-7 與圖 4-8 的結果我們可以發現雖然靜態誤差補償有明顯的補償效果，但是並不能完全有效的消除其漂移誤差；有鑑於此，為了解決其動態的誤差，我們利用 3.2.2 節的演算法則來加以補償修正其陀螺儀所量測到的角速度與四元素所計算的角度。

其中圖 4-9 與圖 4-10 為當平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作時，進行動態補償（一）的結果，由此結果我們發現其補償可以有效的改善其 Y 軸的漂移現象，但是其他兩軸的漂移現象並無明顯的改變，其原因在於其兩軸感測到的角速度並非為一個週期性且正負半週對稱的波形，因此其效果不彰。-

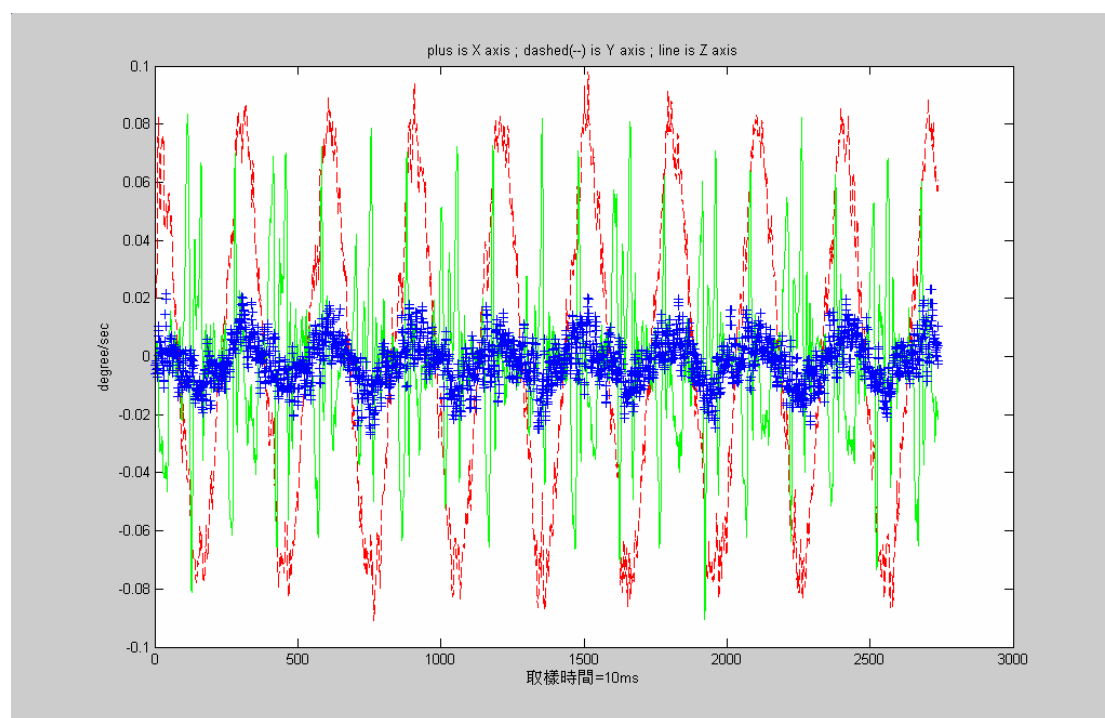


圖 4-9 平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作動態補償（一）後的角速度

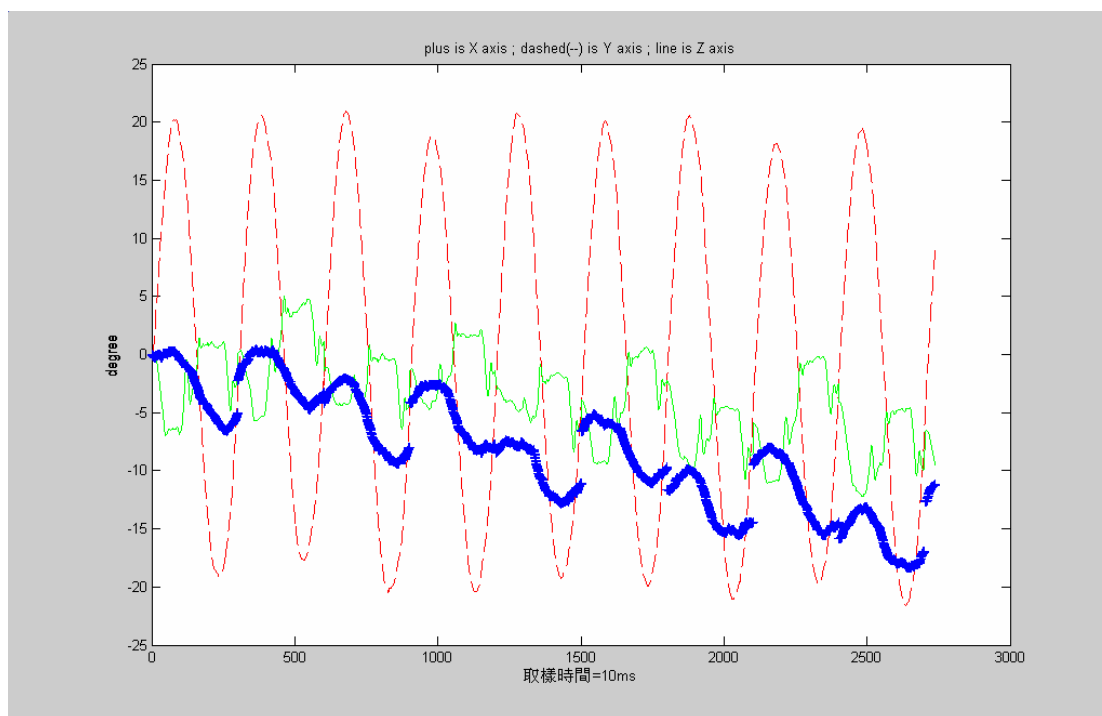


圖 4-10 平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作動態補償（一）後的角度

有鑑於此，為了解決其波形並非為一個週期性且正負半週對稱的圖形，因此要在執行完動態補償（一）之後，分別對非主要感測軸（X、Z 軸）進行動態補償（二），其結果如圖 4-11 與圖 4-12 所示，由圖形中我們發現能有效的改善其另外非主要感測軸漂移現象。

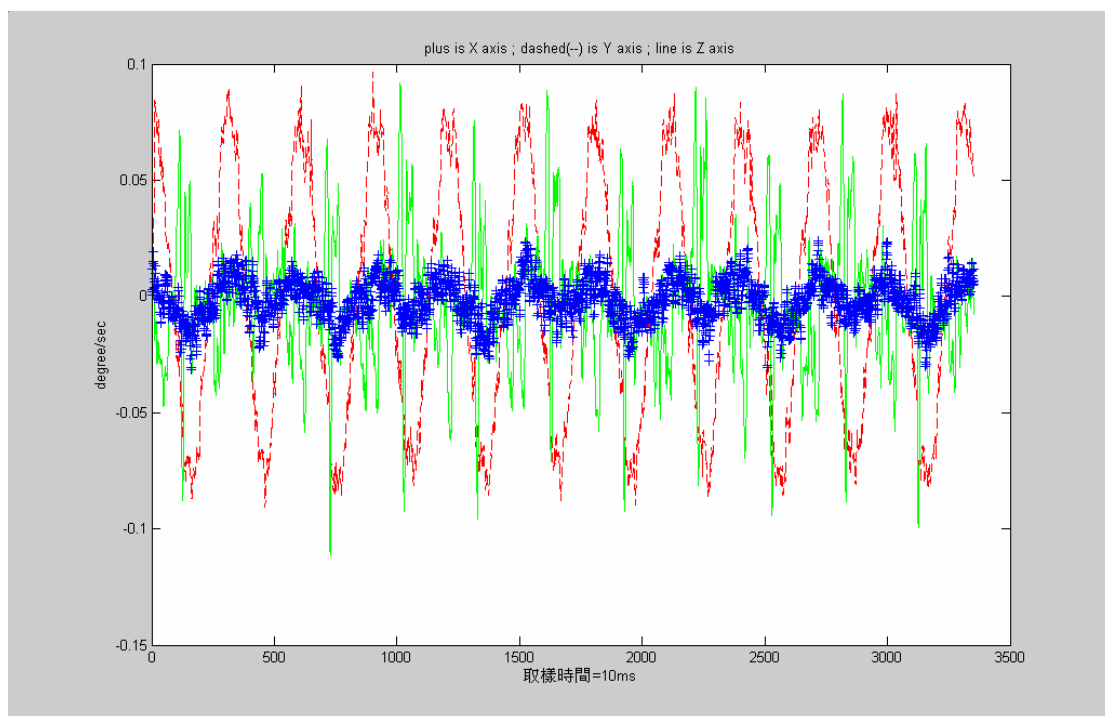


圖 4-11 平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作動態補償（二）後的角速度

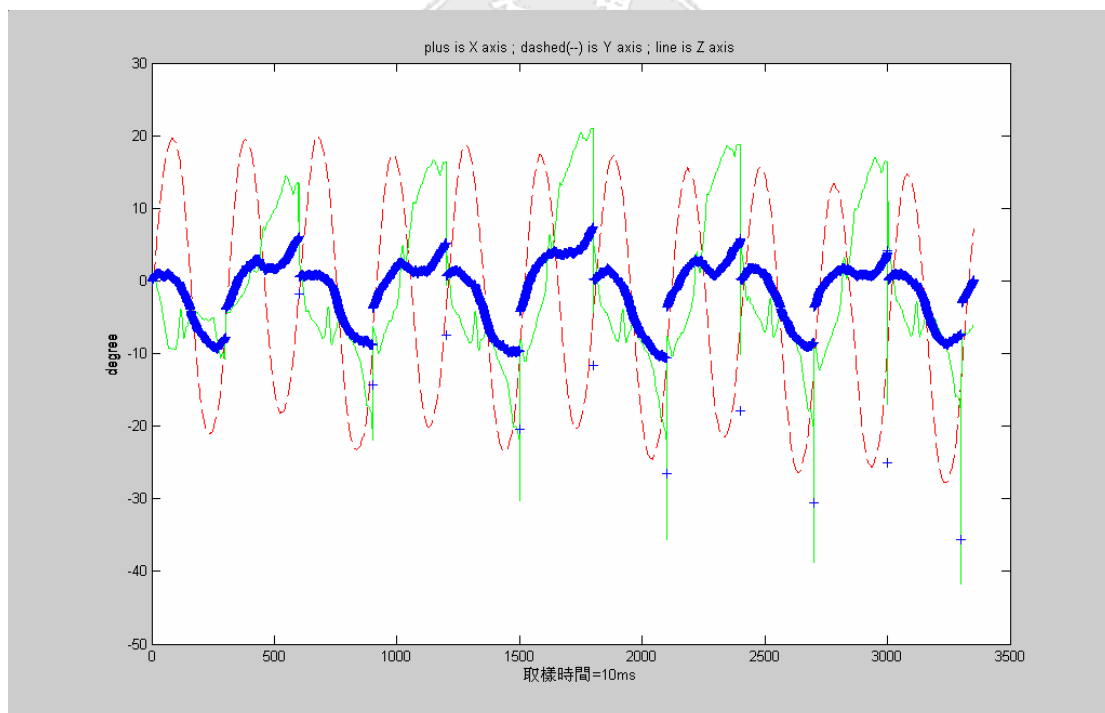


圖 4-12 平台做出連續單軸的 Pitch Sin 動作動態補償（二）後的角速度

4.4 智慧型擴展式卡爾曼濾波器運算實驗結果與分析

由於平台本身馬達的同動問題，以及機構問題，因此當陀螺儀量測平台姿態時會有耦合現象產生，但另一方面由光學尺、編碼器與順向運動方程所計算出來的平台姿態因為沒有感受到其問題，因此其估算姿態與理論值相同；導致兩個系統所到的平台姿態差異甚大，有鑑於此，為了求得平台最佳姿態，因此本論文運用智慧型擴展式卡爾曼濾波器進行最佳姿態估測，其結果如下圖所示：

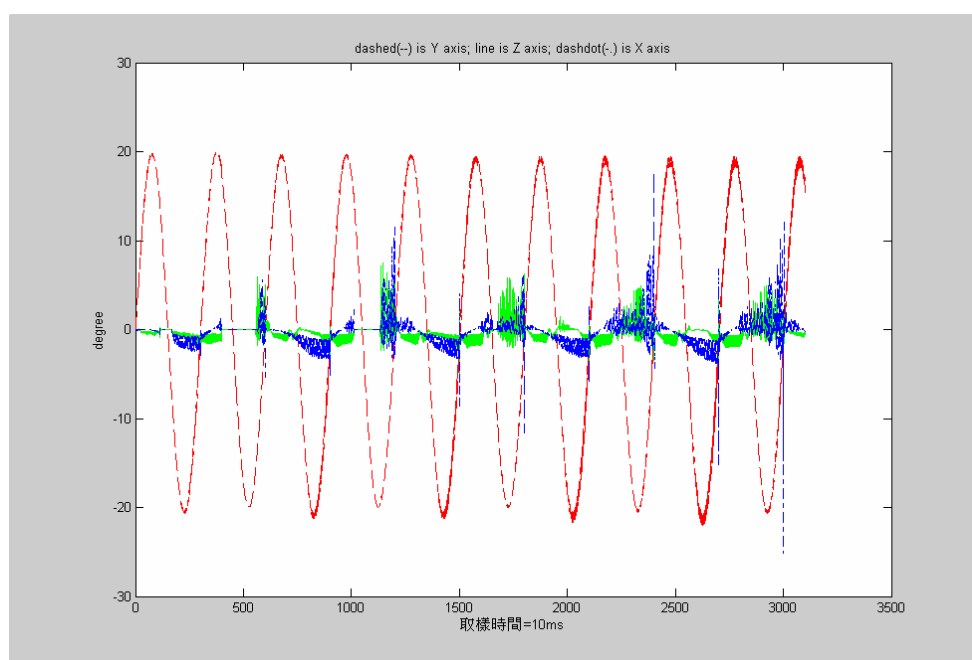


圖 4-13 智慧型擴展式卡爾曼濾波器估測的最佳姿態

由圖 4-13 我們可以發現智慧型擴展式卡爾曼濾波器能完全消除陀螺儀的誤差，並修正順向運動方程所得到非實際的平台姿態，進而得到最接近平台實際姿態值。

第五章 結論與未來展望

5.1 結論

由於慣性導航是目前應用普遍、可獨立工作，並且不因氣候、地形與外界干擾精確度最高的導航系統，其中陀螺儀更是在慣性導航之中佔有舉足輕重的角色，但是因為陀螺儀本身特性的關係，因此在安裝校準上，一直是利所有使用工程人員很頭痛的問題。

而在以往的相關文獻之中，大多利用 GPS 來加以補償修正其誤差，但是此方法只能適用於一般無工作空間限制的導航場合，但當要量測的系統其工作空間是有所受限時，則因為 GPS 的精度問題，而無法有很好的補償功效，進而無法求得相對應的最佳姿態。

有鑑於此本論文成功的利用微機電振動式陀螺儀與平台運動學配合上智慧型擴展式卡爾曼濾波器，建立一個陀螺儀自動對準系統，藉由此對準系統，來實現陀螺儀靜態與動態誤差補償，並且估測平台的最佳姿態，透過此一架構，則可以解決當在一工作空間受限下時，無法工作的問題；並且可利用此一架構所估測出來的方位姿態，進而探討被量測的機構是否有非同動情況，導致產生姿態的耦合現象。

5.2 未來展望

由於目前本系統全部都是利用 PC base 的方式下去建構完成，因此其系統較於龐大並且成本較高，在於未來的社會，凡是講求小而精巧的時代，應朝向嵌入式來發展，將其陀螺儀的處理程序，其中包括濾除雜訊、自動的動/靜態誤差補償等功能全部利用高速的硬體晶片來加以實現，並直接加裝在陀螺儀之上，造福所有需要利用陀螺儀來量測方位姿態的工程人員，並且降低其製作成本。



參考文獻

- [1]T. S. Hwang, “Optimal Mechanism Design and Dynamic Analysis of a 3-leg 6-DOF Linear Motor Based Parallel Manipulator”, Accepted to the Asian Journal of Control, Volume 6 , 2004
- [2]T. S. Hwang, M. Y. Liao, H. X. Xie , “Design and Simulation of 3-leg 6-DOF Motion Platform System”, Transaction of the Aeronautical Society of the Republic of China , Volume 35 , 2003
- [3]C. L. Lin, T. S. Hwang, R. C. Tsai, “Adaptive Control for a Linear Motors-Based Manipulator”, Revised to the IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics Part B ,2003.
- [4]莊智清, 黃國興, “電子導航”,華科技圖書 , 2001.
- [5]黃國興, “慣性導航系統原理與應用”,全華科技圖書, 1991.
- [6]陳忠君, “振動式微陀螺儀電路系統之研究,交通大學”,電機與控制工程研究所碩士論文,2002
- [7]黃博義, “微機電陀螺儀設計研究”,中華大學機械與航太工程研究所碩士論文 ,1999
- [8]Leland R.P, “Lyapunov based adaptive control of a MEMS gyroscope”, American Control Conference,2002. Proceedings of the Volume 5 , Page(s):3765 – 3770 ,2002
- [9]Qi Lin, Stern P.E., , “Analysis of a correlation filter for thermal noise reduction in a MEMS gyroscope”, Proceedings of the 1994 IEEE South African Symposium, Page(s):125 – 127 ,1994
- [10]謝宗熹, “空用載具之模糊式 GPS/INS 整合導航系統設計”, 逢甲大學自動控制工程研究所碩士論文, 2000
- [11]E.W.Kamen and J.K.Su, “Introduction to Optimal Estimation”, Springer ,1999

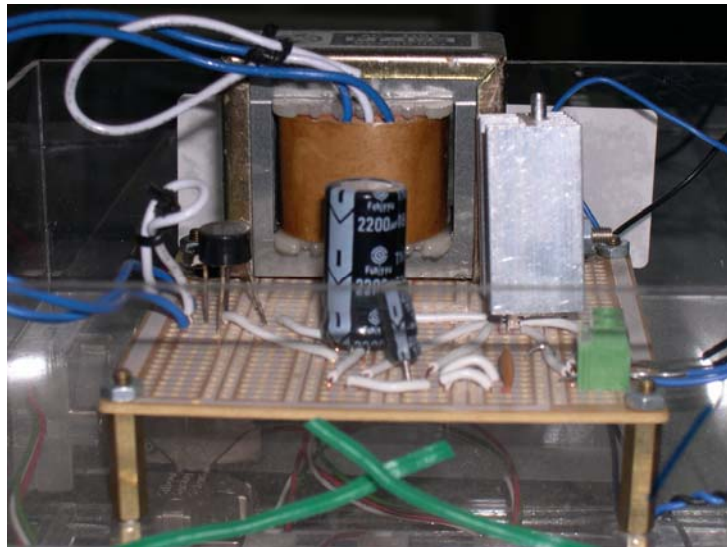
- [12]C. K. Chui and G. Chen, “Kalman Filtering”, Springer, 1991.
- [13]廖昶哲, “TTP//C 測試功能評估”, 財團法人工業技術研究院航太中心, 2001
- [14]蘇木春, 張孝德, “機器學習：類神經網路、模糊系統以及基因演算法則”, 全華科技圖書, 2001.
- [15]王進德、蕭大全, “類神經網路與模糊控制理論入門”, 全華科技圖書, 2001.
- [16]王文俊, “認識Fuzzy”, 全華科技圖書, 2000
- [17]宋真坦, 宋真堯, 姜仲鴻, 袁敏事, “飛機通訊與導航系統”, 高立出版社, 1998
- [18]安守中, “GPS全球衛星定位系統入門”, 全華科技圖書, 2002.
- [19]陳蓮春, “工業用書-電功率控制電路設計要決”, 建興出版社, 1995
- [20]蔡朝洋, “電子電路實作技術”, 全華科技圖書, 2001
- [21]楊憲東, “自動飛行控制原理與實務”, 全華科技圖書, 2000
- [22]李宜達, “控制系統設計與模擬”, 全華科技圖書, 2003
- [23]Weiss J.D, “Analysis of upgraded GPS internal Kalman filter ,Aerospace and Electronic Systems”, Magazine , Volume 2 ,Page(s):23 – 26 ,1996
- [24]Sasiadek, J.Z., Khe, J., “Sensor fusion based on fuzzy Kalman filter”, Robot Motion and Control ,Volume 11 ,Page(s):275 - 283 ,2001
- [25]San-Tong Zhang; Xue-Ye Wei, “Fuzzy adaptive Kalman filtering for DR/GPS”, Machine Learning and Cybernetics ,Volume 5 .Page(s):2-5 ,2003
- [26]Rahbari, R , Leach, B.W. , Dillon, J , de Silva, C.W. , “Adaptive tuning of a Kalman filter using the fuzzy integral for an intelligent navigation system”, Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium ,Page(s):252 – 257 ,2002
- [27]Sasiadek, J.Z. , Wang, Q. , Zeremba, M.B. , “Fuzzy adaptive Kalman filtering for INS/GPS data fusion”, Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium, Page(s):181 – 186 , 2000

- [28]Xiufeng He, Yongqi Chen, Iz, H.B., “A reduced-order model for integrated GPS/INS”, Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE , Volume: 13 , Page(s):40 – 45 ,1998
- [29]Jian Wang, Baigen Cai , “A low-cost integrated GPS/INS navigation system for the land vehicle”, Intelligent Robots and Systems ,1999
- [30]Tiano, A, Zirilli, A, Pizzocchero, F. ,IFSA , “Application of interval and fuzzy techniques to integrated navigation systems”, World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Volume 1, Page(s):13 – 18 ,2001
- [31]Chen Xiyuan, “Modeling random gyro drift by time series neural networks and by traditional methodNeural” ,International Conference on Volume 1, Page(s) 810-813, 2003



附錄一

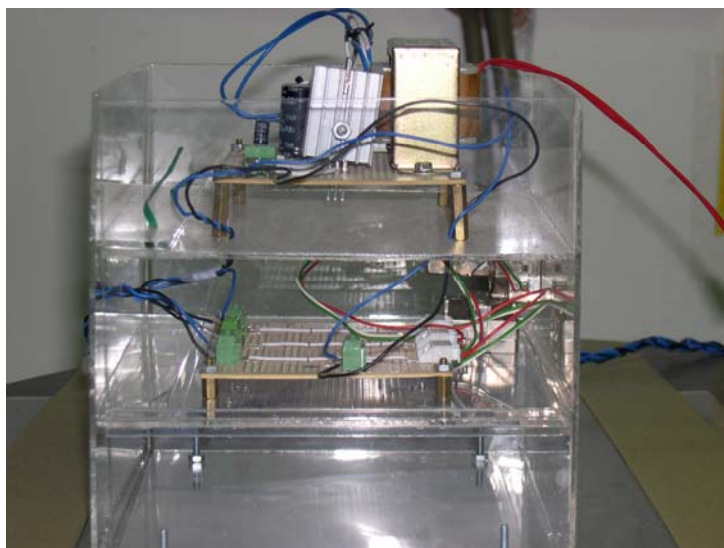
電路與相關機構實體圖



附錄圖 5V 電源電路圖



附錄圖 陀螺儀實體圖



附錄圖 陀螺儀整合實體圖



附錄圖 平台系統與陀螺儀系統整合圖