XB-001

جبرِ خطی

ویراستِ دوم

محمد خرمی

XB-001 (2008/04/01)

جبر ِ خطی

ویراست ِ دوم

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

فهرست

O

مقدمه

دفاعیه

این کتاب برا یِ فیزیک‌پیشه‌ها یا آن‌ها یی که قرار است فیزیک‌پیشه شوند (یعنی دانش‌جوها یِ فیزیک) نوشته شده، هر چند از نظر ِ من اشکال ی ندارد که آدم‌ها یِ دیگر ی (از جمله ریاضی‌پیشه‌ها) هم آن را بخوانند. مبنا یِ نوشتن ِ این کتاب این‌ها است.

a برا یِ آموختن ِ فیزیک، و برا یِ به‌کاربردن ِ فیزیک، ریاضیات لازم است. به نظر می‌رسد این فکر، دستِ‌کم از زمان ِ نیوتُن به بعد برا یِ بعض ی‌ها جا افتاده است.

b بعض ی‌ها (از جمله من) تصور می‌کنند برا یِ آموختن ِ هر چیز ِ درسی یی خوب است (یا لازم است) پیش‌نیازها یِ آن چیز را دانست.

c خیل ی از مفهوم‌ها یِ جبر ِ خطی، پیش‌نیاز ِ زیاد ی لازم ندارند. بر عکس، در بسیار ی از بخش‌ها یِ ریاضیات (از جمله حساب‌ان و معادلات ِ دیفرانسیل و هر چیز ِ دیگر ی که این‌ها در آن به کار می‌روند) از جبر ِ خطی استفاده می‌شود.

d قسمت ِ مهم ی از مسئله‌ها یی در ریاضیات و فیزیک که بلد ایم حل ِشان کنیم، مسئله‌ها یِ خطی اند. اساس ِ کار با این مسئله‌ها جبر ِ خطی است.

البته این طرزِفکر ِ فروکاست‌گرایانه برا یِ خیل یِ‌ها مطلوب نیست. (در این‌جا منظور از فروکاست‌گرایی این است که آموختن ِ هر چیز بر اساس ِ پیش‌نیاز ِ آن باشد، و مثلاً سر ِ کلاس ِ کوانتم‌مکانیک مجبور نشوند جبر ِ خطی بخوانند.)

e پیش‌نیاز ِ این کتاب، تئوری یِ مجموعه‌ها (از جمله رابطه و تابع) و البته منطق ِ ریاضی است. جز این، خوب است خواننده مقدمات ی از تئوری یِ میدان‌ها را بداند. البته میدان‌ها یی که در فیزیک به کار می‌آیند، نوعاً میدان‌ها یِ عددی اند (از جمله میدان ِ عددها یِ حقیقی و میدان ِ عددها یِ مختلط) نَه میدان‌ها یِ جبری. در این کتاب هم میدان‌ها یِ به‌کاررفته میدان‌ها یِ عددی اند، هر چند از این پس این قید صریحاً ذکر نشده.

f این کتاب تمرین ندارد. برا یِ این نبود ِ تمرین می‌شود استدلال‌ها یِ زیاد ی آورد (یا تراشید). خود ِ این استدلال‌آوردن (تراشیدن) را می‌شود نوع ی تمرین (البته نَه در جبر ِ خطی) تلقی کرد.

g این کتاب تقریباً مثال هم ندارد. به همین خاطر در یک ی از معدودجاها یی که مثال آورده شده، اسم ِ یک بخش شده "چند مثال". توضیح ِ این را هم می‌شود در مورد ِ قبل جست‌وجو کرد.

h هر نوع ادعا یِ قابلِ‌اثبات ی که در این کتاب آمده، در قالب ِ قضیه بیان شده. به همین علت تعداد ِ قضیه‌ها یِ کتاب بیش از تعداد ِ صفحه‌ها یِ آن است. این به معنی یِ آن نیست که همه یِ این قضیه‌ها مهم اند، یا اثبات ِشان سخت است.

i سعی شده اثبات‌ها روشن و دقیق باشد. جاها یی هم (که تعداد ِشان کم نیست) به عبارت‌ها یی از نوع ِ "به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد" متوسل شده ام. این را می‌شود به حساب ِ آن گذاشت که خواسته ام اثبات ِ قضیه را به عهده یِ خواننده بگذارم تا شاید بخش ی از جا یِ خالی یِ تمرین پر شود، یا به حساب ِ انگیزه‌ها یی پیچیده‌تر. البته سعی شده در این موارد هم طرح ِ اثبات کاملاً روشن باشد.

j جز پیش‌نیازها یی که ذکر شدند، تقریباً پیش‌نیاز ِ دیگر ی برا یِ این کتاب لازم نیست. این‌جا تقریباً یعنی در دو مورد مختصراً از مفهوم‌ها یِ آنالیزی استفاده شده، در تعریف ِ تابع ِ یک نگاشت ِ خطی و در تعریف ِ نمایی و لگاریتم ِ یک نگاشت ِ

خطی. البته معنی یِ این که پیش‌نیازها یِ این کتاب مقدماتی اند این نیست که همه یِ قضیه‌ها (یا مطلب‌ها) یِ این کتاب ساده اند. بین ِ مقدماتی‌بودن و ساده‌بودن فرق هست.

k برا یِ این که خودکفایی یِ این کتاب حفظ شود، چهار مطلب در پی‌وست ِ A آمده. دومطلب ِ اول شامل ِ دو ادعا یند، که اثبات ِشان خارج از حوصله یِ خواننده (یا خود َ م) تشخیص داده شده. از این دومطلب در بدنه یِ کتاب استفاده نشده. از دوادعا یی که در این‌جا آورده شده اند اما اثبات ِشان در این کتاب نیامده هم به عنوان ِ ادعا یاد شده نَه قضیه. دومطلب ِ بعد شامل ِ قضیه‌ها یی اند که موضوع ِشان جبر ِ خطی نیست، اما در این کتاب به کار رفته اند.

l تکیه یِ این کتاب بر فضاها یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، هر چند هر جا تشخیص داده شده مطلب را می‌شود به‌ساده‌گی به فضاها یِ بی‌پایان‌بُعدی تعمیم داد، این کار شده است (یعنی آن مطلب به فضاها یِ باپایان‌بُعدی محدود نشده).

m در این کتاب شکل ی نیست. بعض ی‌ها این را به حساب ِ علاقه به لَگرانژ خواهند گذاشت، بعض ی‌ها هم به حساب ِ تنبلی. اما در این مورد ِ خاص، احتمالاً علت ِ اصلی آن است که کشیدن ِ شکل ِ یک فضا یِ خطی یِ با بُعدها یِ متعدد کم ی سخت است.

n تغییر ِ مهم ِ این ویراست اضافه‌شدن ِ فصل‌ها یِ XII تا XV است. فصل‌ها یِ XII تا XIV شامل ِ ضرب ِ درونی و مقدمات و نتایج ِ آن اند. فصل ِ XV هم به نمایی و لگاریتم ِ نگاشت‌ها یِ خطی اختصاص دارد. دست‌کاری‌ها یِ جزئی‌تر ی هم انجام شده. ضمناً بخش‌ها یِ واژه‌نامه یِ انگلیسی به فارسی و نمایه حذف شده. در واژه‌نامه یِ فارسی به انگلیسی هم تکرارها حذف شده. انگیزه این بوده که فایل ِ ftx ِ کتاب هم در دست‌رس گذاشته شده و با آن می‌شود جست‌وجو کرد. البته برا یِ این جست‌وجو ویراستار ِ فارسی‌تک هم لازم است، که آن هم در دست‌رس گذاشته شده.

از هر نوع پیش‌نهاد ی استقبال می‌شود (نَه این که هر پیش‌نهاد ی پذیرفته می‌شود).

محمد خرمی 2008/04/01

۰ نمادگذاری

همه یِ نمادها یی که در این کتاب به کار رفته استاندارد نیستند.

پایان ِ صورت ِ قضیه	★
پایان ِ اثبات	■
$a := b$ ← a بنا بر تعریف برابر است با b	$:=$
برا یِ هر	$\forall$
$x \in \mathbb{S}$ ← x عضو ِ $\mathbb{V}$ است.	$\in$
داریم	$:$
چنان که	$\vert$
مجموعه یِ عددها یِ گویا	$\mathbb{Q}$
مجموعه یِ عددها یِ حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه یِ عددها یِ مختلط	$\mathbb{C}$
مجموعه یِ عددها یِ صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموعه یِ عددها یِ طبیعی (صحیح ِ مثبت)	$\mathbb{N}$
$\mathbb{N}_n$ ← مجموعه یِ عددها یِ طبیعی یِ (صحیح ِ مثبت ِ) نابزرگ‌تر از n	$\mathbb{N}_\bullet$
← $\{a_{i,j,k} \mid (i,j); i \in \mathbb{S}_1, j \in \mathbb{S}_2\}$ مجموعه یِ همه یِ $a_{i,j,k}$ ها با k یِ ثابت و (i,j) ها یی که $i \in \mathbb{S}_1$ و $j \in \mathbb{S}_2$	$\{\bullet \mid \bullet;\bullet\}$
$\mathbb{S}_1 \backslash \mathbb{S}_2$ ← مجموعه یِ همه یِ اعضا یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_1$، که در مجموعه یِ $\mathbb{S}_2$ نیستند	$\backslash$

$\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$	← اجتماعِ مجموعه يِ $\mathbb{S}_1$ با مجموعه يِ $\mathbb{S}_2$	$\cup$
$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$	← اشتراکِ مجموعه يِ $\mathbb{S}_1$ با مجموعه يِ $\mathbb{S}_2$	$\cap$
$\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$	← حاصلِ‌ضربِ دِکَرتي يِ مجموعه يِ $\mathbb{S}_1$ در مجموعه يِ $\mathbb{S}_2$	$\times$
$\mathrm{res}(f;\mathbb{S})$	← تحديدِ f به $\mathbb{S}$	res
$\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_2$	← $\mathbb{S}_1$ زيرمجموعه يِ $\mathbb{S}_2$ است.	$\subseteq$
$\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_2$	← $\mathbb{S}_1$ زيرمجموعه يِ $\mathbb{S}_2$ است و با $\mathbb{S}_2$ برابر نيست.	$\subset$
$\mathbb{W} \sqsubseteq \mathbb{V}$	← $\mathbb{W}$ زيرفضا يِ $\mathbb{V}$ است.	$\sqsubseteq$
$\mathbb{W} \sqsubset \mathbb{V}$	← $\mathbb{W}$ زيرفضا يِ $\mathbb{V}$ است و با $\mathbb{V}$ برابر نيست.	$\sqsubset$
$\mathbb{V} \sqsupseteq \mathbb{W}$	← $\mathbb{W}$ زيرفضا يِ $\mathbb{V}$ است.	$\sqsupseteq$
$\mathbb{V} \sqsupset \mathbb{W}$	← $\mathbb{W}$ زيرفضا يِ $\mathbb{V}$ است و با $\mathbb{V}$ برابر نيست.	$\sqsupset$
$\delta_{i\,j}$	← دلتا يِ کْرُنِکِرِ i و j	$\delta_{\cdot\cdot}$
δ_i^j	← دلتا يِ کْرُنِکِرِ i و j	$\delta_{\cdot}^{\cdot}$
$\delta_B(e^i) = e_i$		$\delta_{\cdot}$
$\sum_i$	← حاصلِ‌جمع رو يِ i	$\sum$
$\sum\limits_{i=a}^{b}$	← حاصلِ‌جمع رو يِ i از $i = a$ تا $i = b$	
$\sum\limits_{i\in\mathbb{S}}$	← حاصلِ‌جمع رو يِ i برا يِ i ها يِ عضوِ $\mathbb{S}$	
$\sum_{i\in\mathbb{S}} {}_i$	← حاصلِ‌جمع رو يِ i برا يِ i ها يِ عضوِ $\mathbb{S}$	
$\prod_i$	← حاصلِ‌ضرب رو يِ i	$\prod$
$\prod\limits_{i=a}^{b}$	← حاصلِ‌ضرب رو يِ i از $i = a$ تا $i = b$	
$\prod\limits_{i\in\mathbb{S}}$	← حاصلِ‌ضرب رو يِ i برا يِ i ها يِ عضوِ $\mathbb{S}$	

$\prod_{i\in\mathbb{S}}{}_i$ ← حاصلِ‌ضرب رو یِ i برا یِ i ها یِ عضو ـِ $\mathbb{S}$	
$\oplus_i$ ← حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم رو یِ i	$\oplus_{.}$
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ ← اجتماع رو یِ n برا یِ n ها یِ عضو ـِ $\mathbb{N}$	$\bigcup_{.}$
$\bigcap_i$ ← اشتراک رو یِ i	$\bigcap_{.}$
$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$	$\circ$
پهنه یِ	span
$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}(B)$ ←	$\mathrm{span}_{.}$
مجموعه یِ ترکیب‌ها یِ خطی یِ اعضا یِ B با ضریب‌ها یِ عضو ـِ $\mathbb{K}$	
بُعد ـِ	dim
$\mathbb{V}_1\oplus\mathbb{V}_2$ ←	$\oplus$
حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_1$ با زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_2$	
$\mathbb{V}_1+\mathbb{V}_2$ ← حاصلِ‌جمع ـِ زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_1$ با زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_2$	$+$
$T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ ← نگاشت ـِ T با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{W}$	$. : . \to .$
دامنه یِ	dom
$T_{\mathbb{V}}$ ← نگاشت ـِ خطی یِ T با دامنه یِ $\mathbb{V}$	$._{.}$
برا یِ حجم ـِ ε و نگاشت ـِ خطی یِ T، $\varepsilon_T=\varepsilon\circ T^{\otimes n}$	
$\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ ← مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ خطی یِ از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{W}$	$\mathfrak{LF}$
$\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)$ ← مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ چندخطی یِ از $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ به $\mathbb{W}$	
$\mathfrak{LF}_{\mathrm{f}}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ ←	$\mathfrak{LF}_{\mathrm{f}}$
مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ خطی یِ از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{W}$، که بُعد ـِ تصویر ـِشان باپایان است	
$\mathfrak{SLF}(\mathbb{W};\mathbb{V},\mathbb{V})$ ← مجموعه یِ دوفرم‌ها یِ متقارن ـِ عضو ـِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V},\mathbb{V})$	$\mathfrak{SLF}$
$\mathfrak{ALF}(\mathbb{W};\mathbb{V},\mathbb{V})$ ← مجموعه یِ دوفرم‌ها یِ پادمتقارن ـِ عضو ـِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V},\mathbb{V})$	$\mathfrak{ALF}$
$\mathfrak{LF}_{\mathrm{p}}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ ← مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ شبهِ‌خطی یِ از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{W}$	$\mathfrak{LF}_{\mathrm{p}}$
$\mathfrak{LF}_{+}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ ← مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ خطی یِ از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{W}$	$\mathfrak{LF}_{+}$
$\mathfrak{LF}_{-}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ ← مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ پادخطی یِ از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{W}$	$\mathfrak{LF}_{-}$

$\mathscr{LF}_{+-\mathrm{p}}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2,\mathbb{V}_3)$ ← مجموعه ی نگاشت‌ها ی با دامنه ی $(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2\times\mathbb{V}_3)$ و مقدار در $\mathbb{W}$، که نسبت به $\mathbb{V}_1$ خطی، نسبت به $\mathbb{V}_2$ پادخطی، و نسبت به $\mathbb{V}_3$ شبهِ‌خطی اند	$\mathscr{LF}_{\bullet,\dots,\bullet}$
$\mathscr{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ ← مجموعه ی نگاشت‌ها ی حقیقی ی عضو ِ $\mathscr{LF}[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$	$\mathscr{RLF}$
$\mathscr{RLF}_\alpha[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ ← مجموعه ی نگاشت‌ها ی حقیقی ی عضو ِ $\mathscr{LF}_\alpha[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$	$\mathscr{RLF}_\bullet$
$\mathscr{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$ ← مجموعه ی دوشبهِ‌فرم‌ها یِ اِرمیتی رو یِ $\mathbb{V}$	$\mathscr{HLF}_{-+}$
$f(x)$ ← مقدار ِ تابع ِ f به ازا ی x	$\bullet(\bullet)$
$f(\mathbb{S})$ ← تصویر ِ مجموعه ی $\mathbb{S}$ تحت ِ تابع ِ f	
$P(T)$ ← چندجمله ای یِ P از نگاشت ِ خطی یِ T	
$f(T)$ ← تابع ِ f از نگاشت ِ خطی یِ T	
تصویر ِ	img
$\mathrm{img}_i(g)=\mathrm{img}(\tau_i g)$	$\mathrm{img}_\bullet$
هسته ی	ker
$\ker_i(g)=\ker(\tau_i g)$	$\ker_\bullet$
دامنه‌یِ‌مؤثر ِ	edom
رتبه ی	rank
پوچی یِ	null
T^{-1} ← وارون ِ نگاشت ِ T	$\bullet^{-1}$
$\mathbb{V}_1\sim\mathbb{V}_2$ ← فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_1$ با فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_2$ یک‌ریخت است.	$\sim$
$v_1\overset{\mathbb{W}}{\cong}v_2$ ← $(v_1-v_2)\in\mathbb{W}$	$\overset{\bullet}{\cong}$
$[v]$ ← رده یِ هم‌ارزی یِ v	$[\bullet]$
$\mathbb{V}_1\ominus\mathbb{V}_2$ ← خارجِ‌قسمت ِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_1$ بر فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_2$	$\ominus$
$\mathbb{V}_1/\mathbb{V}_2$ ← خارجِ‌قسمت ِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_1$ بر فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}_2$	$/$
P_1/P_2 ← خارجِ‌قسمت ِ چندجمله‌ای یِ P_1 بر چندجمله‌ای یِ P_2	
$[T_1,T_2]$ ← جابه‌جاگر ِ T_1 با T_2	$[\bullet,\bullet]$
پوچ‌توانی یِ	np

بخش ِ شبهِساده یِ	sem
بخش ِ پوچ‌توان ِ	nil
C_T ← چندجمله‌ای یِ مشخصه یِ T	$C_{\bullet}$
M_T ← چندجمله‌ای یِ کمین ِ T	$M_{\bullet}$
مغزی یِ	cor
اساس ِ	ess
شکل ِ ماتریسی یِ	mat
${A^i}_i$ ← جمع‌رویِ i ِ ${A^i}_i$	${\bullet^j}_j$
${T^a}_i$ ← عنصر ِ ماتریسی یِ a و i ِ T	${\bullet^{\bullet}}_{\bullet}$
قطری یِ	diag
$\mathbb{V}^*$ ← دوگان ِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$	$\bullet^*$
T^* ← پس‌آر ِ نگاشت ِ خطی یِ T	
پس‌آر ِ	pb
$\mathbb{S}^c$ ← مجموعه یِ همه یِ بردارها یی که اثر ِ همه یِ هم‌بردارها یِ عضو ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ بر آن‌ها صفر است	$\bullet^c$
$\mathbb{S}^\perp$ ← مجموعه یِ عمود بر $\mathbb{S}$	$\bullet^\perp$
$\mathrm{Proj}^\perp_{\mathbb{U}}(v)$ ← تصویر ِ قائم ِ v بر $\mathbb{U}$	$\mathrm{Proj}^\perp_{\bullet}(\bullet)$
محمل ِ	supp
supp_i ← مجموعه یِ عنصرها یِ i اُم ِ اعضا یِ محمل ِ	$\mathrm{supp}_{\bullet}$
$\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ ← مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ بامحملِ‌باپایان ِ از $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ به میدان ِشان	$\mathrm{PT}(\bullet,\bullet)$
رابطه یِ هم‌ارزی یِ تعریف‌شده در $\mathrm{PT}(\bullet)$، که خارجِ‌قسمت ِ $\mathrm{PT}(\bullet)$ بر آن فضا یِ حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری است.	$\doteq$
$\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ ← حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ در فضا یِ خطی یِ $\mathbb{W}$	$\otimes$
$v\otimes w$ ← حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ بردار ِ v در بردار ِ w	

$T_1 \otimes T_2$ ←
حاصل‌ِضرب ِ تانسوری ِ نگاشت ِ خطی ِ T_1 در نگاشت ِ خطی ِ T_2

X_v ← نگاشت ی با محمل ِ یک‌عضوی، که اثر َش بر v یک است — $X_\bullet$

ادغام ِ — C

$\mathrm{C}^{(a)}{}_{(b)}$ ← ادغام ِ مئلفه‌ها یِ a ُم و b ُم

رد ِ — tr

$\mathbb{V}^{\otimes n}$ ← حاصل‌ِضرب ِ تانسوری ِ n فضا یِ خطی ِ $\mathbb{V}$ — $\bullet^{\otimes\bullet}$

$v^{\otimes n}$ ← حاصل‌ِضرب ِ تانسوری ِ n بردار ِ v

$A\cdots\widehat{B}\cdots C$ ← B حذف شده است. — $\cdots\widehat{\bullet}\cdots$

نگاشت ِ جای‌گشت — Per

$\mathrm{Per}_{i\,j}$ ← نگاشت ِ جای‌گشت ِ مئلفه‌ها یِ i ُم و j ُم — $\mathrm{Per}_\bullet$

Per_σ ← نگاشت ِ جای‌گشت ِ متناظر با جای‌گشت ِ σ

$\mathrm{Per}_{\sigma,i}$ ←
نگاشت ِ جای‌گشت ِ متناظر با جای‌گشت ِ σ رو یِ مئلفه‌ها یِ دسته یِ i ُم

$\sigma_{i\,j}$ ← جای‌گشت ی که فقط جا یِ i و j را عوض می‌کند — $\sigma_\bullet$

σ_i ← جای‌گشت ی که فقط جا یِ i و $i+1$ را عوض می‌کند

متقارن‌گر — Sym

Sym_i ← متقارن‌گر رو یِ مئلفه‌ها یِ دسته یِ i ُم — $\mathrm{Sym}_\bullet$

$\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ ← بخش ِ متقارن ِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ — $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes\bullet}$

$(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)} = \mathrm{Sym}(e_1^{\otimes k_1}\otimes\cdots\otimes e_m^{\otimes k_m})$ — $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes\bullet})_\bullet$

ζ_σ ← علامت ِ جای‌گشت ِ σ — $\zeta_\bullet$

نگاشت ِ جای‌گشت ِ علامت‌دار — aPer

$\mathrm{aPer}_{i\,j}$ ← نگاشت ِ جای‌گشت ِ علامت‌دار ِ مئلفه‌ها یِ i ُم و j ُم — $\mathrm{aPer}_\bullet$

aPer_σ ← نگاشت ِ جای‌گشت ِ علامت‌دار ِ متناظر با جای‌گشت ِ σ

$\mathrm{aPer}_{\sigma,i}$ ←
نگاشت ِ جای‌گشت ِ علامت‌دار ِ متناظر با جای‌گشت ِ σ رو یِ مئلفه‌ها یِ دسته یِ i ُم

پادمتقارن‌گر — aSym

$\mathrm{aSym}_{\bullet}$	aSym_i ← پادمتقارن‌گر رو یِ مئلفه‌ها یِ دسته یِ i اُم
$\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes\bullet}$	$\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$ ← بخش ـِ پادمتقارن ـِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$
$(e_{\mathrm{A}}^{\otimes\bullet})_{\bullet}$	$(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)} = \mathrm{aSym}(e_1^{\otimes k_1}\otimes\cdots\otimes e_m^{\otimes k_m})$
$\mathcal{S}$	مجموعه یِ جای‌گشت‌ها
$\mathcal{S}_{\bullet}$	$\mathcal{S}_n$ ← مجموعه یِ جای‌گشت‌ها یِ n تایی
$\wedge$	$x\wedge y$ ← حاصلِ‌ضرب ـِ برونی یِ تانسور ـِ پادمتقارن ـِ x در تانسور ـِ پادمتقارن ـِ y
	$\mathbb{V}^{\wedge n}$ ← بخش ـِ پادمتقارن ـِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$
$\begin{bmatrix}\bullet\cdots\bullet\\ \bullet\cdots\bullet\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}i_1\cdots i_n\\ j_1\cdots j_n\end{bmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\zeta_\sigma\,\delta^{i_1}_{j_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots\delta^{i_n}_{j_{\sigma^{-1}(n)}}$
$[\bullet\cdots\bullet]$	$[i_1\cdots i_n] = \begin{bmatrix}i_1\cdots i_n\\ 1\cdots n\end{bmatrix}$
pf	پیش‌ران ـِ
$\mathrm{pf}_{\bullet}$	$\mathrm{pf}(\tau_i g)$
$\vec{\bullet}$	$\vec{S} = (S_1,\dots,S_k)$
$\mathcal{Q}_{\bullet}$	$\mathcal{Q}_\varepsilon$ ← مکمل ـِ حجمی یِ حجم ـِ ε
$\tilde{\bullet}$	$\tilde{\varepsilon}$ ← دوگان ـِ حجم ـِ ε
det	دترمینان ـِ
adj	الحاقی یِ
$\twoheadleftarrow$	$b \twoheadleftarrow a$ ← مقدار ـِ a را در b بگذار
$\tau_{\bullet}$	$[\tau_1 g(v)](w) = g(v,w)$
	$[\tau_2 g(w)](v) = g(v,w)$
sig	نشان‌گان ـِ
$\mathrm{trans}_{\bullet}$	$[\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T = (\tau_i g_{\mathbb{V}})^{-1}\,T^*\,(\tau_i g_{\mathbb{W}})$
$\bullet^{\mathrm{t}}$	T^{t} ← ترانهاده یِ T
$\bullet^{\dagger}$	$T^{\dagger}$ ← مزدوج ـِ اِرمیتی یِ T
K	$\mathrm{K}(\mathbb{V})$ ← مختلط‌شده یِ فضا یِ $\mathbb{V}$

$\mathrm{K}(T)$ ← مختلط‌شده ی نگاشت ِ T	
$\mathrm{R}(T)$ ← شکل ِ حقیقی ی نگاشت ِ T	R
$\mathrm{H}(g)$ ← اِرمیتی‌شده ی g	H
$z^\star$ ← مزدوج ِ مختلط ِ بردار ِ z	$\cdot^\star$
$\mathbb{U}^\star$ ← مزدوج ِ مختلط ِ زیرفضا ی $\mathbb{U}$	
$P^\star$ ← مزدوج ِ مختلط ِ چندجمله‌ای ی P	
برگشت	cc
$\dfrac{1}{2}\,(1+\mathrm{cc})$	Re
$\dfrac{-\mathrm{i}}{2}\,(1-\mathrm{cc})$	Im
نمایی ی	$\exp$
لگاریتم ِ	$\ln$
درجه ی	$\deg$
بزرگ‌ترین شمارنده ی مشترک ِ	$\gcd$
$\mathrm{Mon}^n_\lambda(z)=(z-\lambda)^n$	$\mathrm{Mon}^{\cdot}_{\cdot}$
$\mathrm{va}_k(x_1,\dots,x_k)=(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_1)$	$\mathrm{va}_\cdot(\cdot)$
$\mathrm{van}_k(x_1,\dots,x_k)=\mathrm{va}_2(x_1,x_2)\cdots\mathrm{va}_k(x_1,\dots,x_k)$	$\mathrm{van}_\cdot(\cdot)$

I

فضا یِ خطی

i میدان

مجموعه یِ $\mathbb{F}$ و دو عمل ـِ $+$ و $\times$ را در نظر بگیرید. به $(\mathbb{F}, +, \times)$ میدان می‌گویند، اگر این ویژه‌گی‌ها برقرار باشد.

a01 بسته‌بودن نسبت به جمع: $\forall\, a, b \in \mathbb{F} \ :\ (a + b) \in \mathbb{F}$

a02 شرکت‌پذیری نسبت به جمع: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{F} \ :\ a + (b + c) = (a + b) + c$

a03 وجود ـِ همانی یِ جمعی: $\exists\, 0 \in \mathbb{F} \mid (\forall\, a \in \mathbb{F} \ :\ a + 0 = 0 + a = a)$

a04 وجود ـِ وارون ـِ جمعی: $\forall\, a \in \mathbb{F} \ :\ [\exists\, (-a) \in \mathbb{F} \mid a + (-a) = (-a) + a = 0]$

a05 جابه‌جایی‌بودن ـِ جمع: $\forall\, a, b \in \mathbb{F} \ :\ a + b = b + a$

a06 بسته‌بودن نسبت به ضرب: $\forall\, a, b \in \mathbb{F} \ :\ (a \times b) \in \mathbb{F}$

a07 شرکت‌پذیری نسبت به ضرب: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{F} \ :\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

a08 وجود ـِ همانی یِ ضربی: $\exists\, 1 \in \mathbb{F} \mid (\forall\, a \in \mathbb{F} \ :\ a \times 1 = 1 \times a = a)$

a09 وجود ـِ وارون ـِ ضربی: $\forall\, a \in \mathbb{F} \backslash \{0\} \ :\ (\exists\, a^{-1} \in \mathbb{F} \mid a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1)$

a10 جابه‌جایی‌بودن ـِ ضرب: $\forall\, a, b \in \mathbb{F}\ :\ a \times b = b \times a$

a11 ویژه‌گی يِ پخشی: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{F}\ :\ a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

برا يِ ساده‌گی، معمولاً نماد ـِ $\times$ را نمی‌نویسند و $a \times b$ را با $a\, b$ نشان می‌دهند. از این پس جا یی که عمل‌ها يِ $+$ و $\times$ مشخص باشند، میدان ـِ را برا يِ ساده‌گی با خود ـِ مجموعه نشان می‌دهیم.

به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد

قضیه يِ 1: همانی‌ها يِ جمعی و ضربی، و وارون‌ها يِ جمعی و ضربی یک‌تا یند.

★

ویژه‌گی‌ها يِ **a01** تا **a04** یعنی $\mathbb{F}$ با جمع $(+)$ گروه است. ویژه‌گی يِ **a05** یعنی این گروه جابه‌جایی (آبِلی) است. ویژه‌گی‌ها يِ **a06** تا **a09** یعنی $\mathbb{F}\backslash\{0\}$ با ضرب $(\times)$ گروه است. البته ضرب ـِ 0 در عضوها يِ $\mathbb{F}$ هم تعریف شده است و همه يِ ویژه‌گی‌ها يِ گروه را هم دارد، جز این که 0 وارون ـِ ضربی ندارد. ویژه‌گی يِ **a10** یعنی این گروه هم جابه‌جایی (آبِلی) است. مثال‌ها يِ مشهور ـِ میدان مجموعه‌ها يِ عددها يِ گویا $(\mathbb{Q})$، عددها يِ حقیقی $(\mathbb{R})$، و عددها يِ مختلط $(\mathbb{C})$ (هر سه با جمع و ضرب ـِ معمول) اند. مجموعه يِ عددها يِ صحیح $(\mathbb{Z})$ با جمع و ضرب ـِ معمول، همه ـِی ویژه‌گی‌ها را دارد جز ویژه‌گی يِ **a09**.

ii تعریف ـِ فضا يِ خطی

مجموعه يِ $\mathbb{V}$ (مجموعه يِ بردارها)، میدان ـِ $\mathbb{F}$ (مجموعه يِ اسکالرها)، و دو عمل ـِ $+'$ و $\times'$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +', \times')$ یک فضا يِ خطی (یا فضا يِ برداری) است، اگر این ویژه‌گی‌ها برقرار باشد.

a12 بسته‌بودن نسبت به جمع: $\forall\, u, v \in \mathbb{V}\ :\ (u +' v) \in \mathbb{V}$

a13 شرکت‌پذیری نسبت به جمع: $\forall\, u, v, w \in \mathbb{V}\ :\ u +' (v +' w) = (u +' v) +' w$

a14 وجود ـِ همانی يِ جمعی: $\exists\, 0' \in \mathbb{V} \mid (\forall\, v \in \mathbb{V}\ :\ v +' 0' = 0' +' v = v)$

a15 وجود ـِ وارون ـِ جمعی: $\forall\, v \in \mathbb{V}\ :\ [\exists\, (-v) \in \mathbb{V} \mid v +' (-v) = (-v) +' v = 0']$

a16 جابه‌جایی‌بودن ِ جمع: $\forall\, u, v \in \mathbb{V} \;:\; u +' v = v +' u$

a17 بسته‌بودن نسبت به ضرب: $(\forall\, a \in \mathbb{F}), (\forall\, u \in \mathbb{V}) \;:\; (a \times' u) \in \mathbb{V}$

a18 شرکت‌پذیری نسبت به ضرب:

$$(\forall\, a, b \in \mathbb{F}), (\forall\, u \in \mathbb{V}) \;:\; (a \times b) \times' u = a \times' (b \times' u)$$

a19 خنثابودن ِ همانی یِ ضربی یِ میدان: $\forall\, u \in \mathbb{V} \;:\; 1 \times' u = u$

a20 ویژه‌گی یِ پخشی نسبت به جمع ِ اسکالرها:

$$(\forall\, a, b \in \mathbb{F}), (\forall\, u \in \mathbb{V}) \;:\; (a + b) \times' u = (a \times' u) +' (b \times' u)$$

a21 ویژه‌گی یِ پخشی نسبت به جمع ِ بردارها:

$$(\forall\, a \in \mathbb{F}), (\forall\, u, v \in \mathbb{V}) \;:\; a \times' (u +' v) = (a \times' u) +' (a \times' v)$$

به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد

قضیه یِ 2: همانی یِ جمعی و وارون ِ جمعی یک‌تا هستند.

★

این‌جا هم ویژه‌گی‌ها یِ **a12** تا **a15** یعنی $\mathbb{V}$ با جمع $(+')$ یک گروه است، و ویژه‌گی یِ **a16** یعنی این گروه جابه‌جایی (آبِلی) است. در واقع ویژه‌گی‌ها یِ $+'$ کاملاً شبیه ِ ویژه‌گی‌ها یِ $+$ است. بعد از این برا یِ ساده‌گی به جا یِ $+'$ می‌گذاریم $+$. فقط توجه دارید که دوموجود ی که با هم جمع می‌شوند، یا هردو بردار اند یا هردو اسکالر اند. جمع ِ یک بردار با یک اسکالر تعریف نشده است. باز برا یِ ساده‌گی، از این پس نماد ِ $\times'$ را هم نمی‌گذاریم و به جا یِ $a \times' u$ می‌نویسیم $a\,u$. البته توجه دارید که ما فقط ضرب ِ دو اسکالر و ضرب ِ یک اسکالر در یک بردار را تعریف کرده ایم. به علاوه، برا یِ بردارها وارون ِ ضربی تعریف نکرده ایم. باز برا یِ ساده‌گی، صفر ِ فضا یِ خطی را با همان نماد ِ ساده یِ 0 (صفر ِ میدان) نشان می‌دهیم. سرانجام، هر جا میدان و عمل‌ها یِ $+'$ و $\times'$ مشخص باشند، فضا یِ خطی را با خود ِ مجموعه یِ بردارها نشان می‌دهیم.

iii زیرفضا یِ خطی

به زیرمجموعه یِ $\mathbb{V}'$ از $\mathbb{V}$ یک زیرفضا یِ خطی (یا زیرفضا یِ برداری، یا زیرفضا) یِ $\mathbb{V}$ می‌گوییم و می‌نویسیم

$$\mathbb{V}' \sqsubseteq \mathbb{V}, \tag{1}$$

اگر خود ـِ $\mathbb{V}'$ هم یک فضا یِ خطی باشد (با همان میدان ـِ متناظر با $\mathbb{V}$ و (تحدید ـِ) همان عمل‌ها یی که برا یِ $\mathbb{V}$ تعریف شده بود). اگر $\mathbb{V}'$ زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ باشد و با خود ـِ $\mathbb{V}$ برابر نباشد، می‌نویسیم

$$\mathbb{V}' \sqsubset \mathbb{V}. \tag{2}$$

این قضیه به‌ساده‌گی ثابت می‌شود.

قضیه یِ 3: شرط ـِ لازم و کافی برا یِ این که یک زیرمجموعه یِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ زیرفضا باشد، این است که این زیرمجموعه نسبت به همان عمل‌ها یِ جمع و ضرب ـِ تعریف‌شده برا یِ $\mathbb{V}$ بسته باشد.

★

(وجود ـِ همانی یِ جمعی و وارون ـِ جمعی در این زیرمجموعه را می‌شود از بسته‌بودن ـِ ضرب ـِ اسکالرها در بردارها یِ این زیرمجموعه نشان داد.) هر فضا یِ خطی دو زیرفضا یِ بدیهی دارد، خود ـِ آن فضا و $\{0\}$.

دو فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ را در نظر بگیرید. فرض کنید میدان ـِ متناظر با این دوفضا یکی است، و تحدید ـِ عمل‌ها یِ فضا یِ خطی در هر یک از این فضاها به $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'$ هم یک‌سان است. (مثلاً ممکن است این دوفضا زیرفضاها یِ یک فضا یِ خطی باشند.) حاصلِ‌جمع ـِ دو بردار از $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'$، و حاصلِ‌ضرب ـِ یک اسکالر در یک بردار از $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'$، هم در $\mathbb{V}$ است و هم در $\mathbb{V}'$. پس

قضیه یِ 4: اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ یک‌سان باشند و تحدید ـِ عمل‌ها یِ فضا یِ خطی در هر یک از این فضاها به $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'$ هم یک‌سان باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ است.

★

iv استقلال ـِ خطی، پایه، و بُعد ـِ یک فضا یِ خطی

می‌گوییم مجموعه یِ $\{v_1,\dots,v_n\}$ خطی‌مستقل است، اگر

$$\sum_i a^i\,v_i = 0 \Rightarrow (\forall\, i\ :\ a^i = 0). \tag{3}$$

در غیر ـِ این صورت (یعنی اگر یک دسته a^i پیدا شود که دستِ‌کم یک ی از آن‌ها ناصفر باشد و $\sum_i a^i\,v_i$ صفر شود) می‌گوییم این مجموعه خطی‌وابسته است. به $\sum_i a^i\,v_i$ یک ترکیب ـِ خطی از مجموعه یِ بردارها یِ v_1 تا v_n می‌گوییم. روشن است که وابسته‌گی یِ خطی یِ یک مجموعه بردار، به معنی یِ آن است که دستِ‌کم یک ی از آن‌ها را می‌شود به شکل ـِ یک ترکیب ـِ خطی از بقیه نوشت. به‌ساده‌گی می‌شود دید

قضیه یِ 5: اگر یک مجموعه خطی‌وابسته باشد، هر مجموعه یِ دیگر ـِ شامل ـِ آن هم چنین است. بر عکس، اگر مجموعه ای خطی‌مستقل باشد، هر زیرمجموعه یِ آن هم چنین است. ضمناً هر مجموعه یِ شامل ـِ بردار ـِ صفر، حتماً خطی‌وابسته است.

★

فرض کنید مجموعه یِ $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک مجموعه یِ خطی‌مستقل است، و این مجموعه با افزودن ـِ هر بردار ـِ دیگر ی به آن خطی‌وابسته می‌شود. در این صورت برا یِ هر بردار ـِ v، ضریب‌ها یِ a و a_1 تا a_n ی هستند که دستِ‌کم یک ی از آن‌ها صفر نیست و

$$a\,v + \sum_i a^i\,e_i = 0. \tag{4}$$

در این‌جا a نمی‌تواند صفر باشد، چون اگر چنین شود مجموعه یِ $\{e_1,\dots,e_n\}$ خطی‌وابسته می‌شود. پس می‌شود v را به شکل ـِ یک ترکیب ـِ خطی از e_i ها نوشت. به علاوه، v نمی‌تواند با دو ترکیب ـِ خطی یِ متمایز ـِ e_1 تا e_n برابر باشد. در واقع اگر

$$v = \sum_i \alpha^i\,e_i = \sum_i \beta^i\,e_i, \tag{5}$$

آن‌گاه از استقلال ـِ خطی یِ $\{e_1,\dots,e_n\}$ نتیجه می‌شود

$$\forall\, i\ :\ \alpha^i = \beta^i. \tag{6}$$

پس هر بردار ی با یک ترکیب ـِ خطی از بردارها یِ e_1 تا e_n برابر است، و این ترکیب ـِ خطی یک‌تا است. بر عکس، اگر هر بردار ی را بشود بر حسب ـِ یک مجموعه بردار ـِ e_1 تا

e_n بسط داد (یعنی با یک ترکیب ـِ خطی از آن‌ها برابر گرفت) آن‌گاه هر مجموعه شامل ـِ بردارها یِ e_1 تا e_n و یک بردار ـِ دیگر (هر بردار ی) خطی‌وابسته است. اگر بسط ـِ بردارها بر حسب ـِ e_1 تا e_n یک‌تا باشد، آن‌گاه خود ـِ مجموعه یِ $\{e_1, \ldots, e_n\}$ خطی‌مستقل است. برا یِ اثبات ـِ این کافی است از یک‌تایی ـِ بسط ـِ بردار ـِ صفر برحسب ـِ e_1 تا e_n استفاده کنید. در واقع به‌ساده‌گی دیده می‌شود که بسط ـِ هر بردار ی بر حسب ـِ e_1 تا e_n یک‌تا است، اگر و تنها اگر بسط ـِ بردار ـِ صفر چنین باشد. این‌ها را می‌شود در این قضیه خلاصه کرد.

قضیه یِ 6: مجموعه یِ $\{e_1, \ldots, e_n\}$ خطی‌مستقل است و با افزودن ـِ هر بردار ی به آن خطی‌وابسته می‌شود، اگر و تنها اگر هر بردار ی را بشود بر حسب ـِ اعضا یِ آن بسط داد و بسط ـِ بردار ـِ صفر (و در نتیجه هر بردار ـِ دیگر ی) بر حسب ـِ آن یک‌تا باشد.

★

به چنین مجموعه ای یک پایه یِ فضا یِ خطی می‌گوییم. مجموعه یِ همه یِ ترکیب‌ها یِ خطی یِ اعضا یِ زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}$ از یک فضا یِ خطی را با $\mathrm{span}(\mathbb{S})$ نشان می‌دهیم و به آن پهنه یِ $\mathbb{S}$ می‌گوییم. (منظور از یک ترکیب ـِ خطی از اعضا یِ $\mathbb{S}$، یک ترکیب ـِ خطی از تعداد ـِ باپایان ی از بردارها یِ $\mathbb{S}$ است.)

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 7: پهنه یِ هر زیرمجموعه یِ یک فضا یِ خطی، یک زیرفضا یِ آن فضا است. پهنه یِ هر پایه یِ یک فضا یِ خطی، خود ـِ آن فضا است.

★

توجه کنید که ممکن است پهنه یِ یک زیرمجموعه یِ یک فضا یِ خطی خود ـِ آن فضا باشد، اما آن زیرمجموعه پایه نباشد.

پایه یِ یک فضا یِ خطی یک‌تا نیست. اما می‌شود ثابت کرد اگر یک فضا یِ خطی پایه یِ باپایان ی داشته باشد، آن‌گاه تعداد ـِ اعضا یِ همه یِ پایه‌ها یِ آن یک‌سان است. برا یِ اثبات، ابتدا این قضیه را ثابت می‌کنیم.

قضیه یِ 8: اگر یک فضا یِ خطی پایه ای با n عضو داشته باشد، هر زیرمجموعه یِ $n+1$ عضوی یِ آن فضا خطی‌وابسته است.

اثبات: قضیه را با استقرا برا یِ n ثابت می‌کنیم. حالت ـِ $n = 1$ یعنی فضا یک پایه یِ یک‌عضوی ($\{e\}$) دارد. هر بردار ی مضرب ی از آن است. دو بردارِ v_1 و v_2 را در نظر

بگیرید. داریم

$$v_1 = a_1\, e, \qquad v_2 = a_2\, e, \tag{7}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$a_2\, v_1 - a_1\, v_2 = 0. \tag{8}$$

اگر a_1 و a_2 صفر باشند، آن‌گاه v_1 و v_2 صفر اند و $\{v_1, v_2\}$ خطی‌وابسته است. اگر چنین نباشد، آن‌گاه یک ترکیب ـِ خطی یِ نابدیهی (یعنی با دستِ‌کم یک ضریب ـِ ناصفر) از v_1 و v_2 هست که صفر است. پس باز هم $\{v_1, v_2\}$ خطی‌وابسته است. به این ترتیب، قضیه برا یِ $n = 1$ درست است. فرض می‌کنیم قضیه برا یِ $n = m$ هم درست باشد و می‌کوشیم نشان دهیم برا یِ $n = m + 1$ هم درست است. یک فضا یِ خطی در نظر می‌گیریم که $\{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ یک پایه یِ آن است. مجموعه یِ $\{v_1, \dots, v_{m+2}\}$ را در نظر بگیرید. اعضا یِ این مجموعه را می‌شود بر حسب ـِ e_i ها بسط داد:

$$v_i = \sum_{j=1}^{m+1} a_i^j\, e_j. \tag{9}$$

دو حالت پیش می‌آید.
حالت ـِ اول:

$$\forall\, i\ :\ a_i^{m+1} = 0. \tag{10}$$

در این صورت،

$$\forall\, i\ :\ v_i \in \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_m\}. \tag{11}$$

اما $\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_m\}$ خود َش یک فضا ی خطی است که یک پایه یِ m عضوی دارد. پس هر زیرمجموعه یِ شامل ـِ $m + 1$ بردار ـِ آن خطی‌وابسته است. از این‌جا نتیجه می‌شود که $\{v_1, \dots, v_{m+2}\}$ هم خطی‌وابسته است.
حالت ـِ دوم:

$$\exists\, i \mid a_i^{m+1} \neq 0. \tag{12}$$

بدون ـِ کاستن از کلیت، می‌شود فرض کرد $a_{m+2}^{m+1} \neq 0$. حالا این بردارها را در نظر بگیرید.

$$v'_i := v_i - \frac{a_i^{m+1}}{a_{m+2}^{m+1}}\, v_{m+2}. \tag{13}$$

روشن است که

$$\{v'_1, \dots, v'_{m+1}\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_m\} \tag{14}$$

از این‌جا (بنا بر فرض ِ استقرا) نتیجه می‌شود $\{v'_1, \dots, v'_{m+1}\}$ خطی‌وابسته است. پس یک ترکیب ِ خطی يِ نابدیهی از v'_1 تا v'_{m+1} صفر است:

$$\sum_{i=1}^{m+1} b^i\, v_i - \left(\sum_{i=1}^{m+1} b^i\, \frac{a_i^{m+1}}{a_{m+2}^{m+1}}\right) v_{m+2} = 0. \tag{15}$$

این یک ترکیب ِ خطی يِ نابدیهی از v_1 تا v_{m+2} است (دستِ‌کم یک ی از b^i ها ناصفر است). پس در این حالت هم $\{v_1, \dots, v_{m+2}\}$ خطی‌وابسته است.

■

از این‌جا دیده می‌شود که تعداد ِ اعضا يِ یک پایه نمی‌تواند از تعداد ِ اعضای یک پایه يِ دیگر بیش‌تر باشد. پس،

قضیه يِ 9: اگر یک فضا يِ خطی پایه يِ باپایان ی داشته باشد، تعداد ِ اعضا يِ همه يِ پایه‌ها يِ آن یک‌سان است. در واقع هر مجموعه يِ خطی‌مستقل که تعداد ِ اعضا يِ آن برابر ِ تعداد ِ اعضا يِ یک پایه يِ این فضا باشد، یک پایه برا يِ آن فضا است.

★

برا يِ یک فضا يِ خطی با یک پایه يِ باپایان، به تعداد ِ اعضا يِ پایه بُعد ِ آن فضا می‌گویند. بُعد ِ $\mathbb{V}$ را با $\dim(\mathbb{V})$ نشان می‌دهند. اگر یک فضا يِ خطی پایه يِ باپایان ی نداشته باشد، می‌گویند بُعد ِ آن بی‌پایان است. تنها زیرمجموعه يِ خطی‌مستقل ِ فضا يِ خطی يِ $\{0\}$، مجموعه يِ تهی است. به همین خاطر، بُعد ِ فضا يِ خطی يِ $\{0\}$ را صفر تعریف می‌کنیم.

یک راه ِ ساختن ِ یک پایه برا يِ یک فضا يِ باپایان‌بُعدی این است. یک بردار ِ دل‌بخواه ِ ناصفر در نظر می‌گیریم. سپس پهنه يِ این بردار را از فضا يِ خطی کنار می‌گذاریم و یک بردار ِ دیگر از باقی‌مانده يِ فضا بر می‌داریم. مجموعه يِ این دوبردار خطی‌مستقل است. حالا پهنه يِ این دوبردار را از فضا کنار می‌گذاریم و از باقی‌مانده بردار ِ

سه‌وم ی بر می‌داریم. این کار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا پهنه یِ مجموعه ای که به دست آورده ایم کل ـِ فضا شود. برا یِ یک فضا یِ بی‌پایان‌بُعدی، این کار هرگز تمام نخواهد شد.

قضیه یِ 10: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت متناظر با هر زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ـِ $\mathbb{V}$، پایه ای برا یِ $\mathbb{V}$ هست که شامل ـِ آن زیرمجموعه است. هم‌چنین، اگر $\mathbb{W}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه بُعد ـِ $\mathbb{W}$ هم باپایان و نابیش‌تر از بُعد ـِ $\mathbb{V}$ است، و بُعد ـِ $\mathbb{W}$ با بُعد ـِ $\mathbb{V}$ برابر است، اگر و تنها اگر $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ باشد.

اثبات: فرض کنید $\dim(\mathbb{V}) = n$، و $\mathbb{S}$ یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ـِ $\mathbb{V}$ است. تعداد ـِ اعضا یِ $\mathbb{S}$ یا n است یا از n کوچک‌تر است. در حالت ـِ اول $\mathbb{S}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است. در حالت ـِ دوم می‌شود یک بردار به آن افزود تا مجموعه یِ جدید هم خطی‌مستقل باشد. این کار را ادامه می‌دهیم تا مجموعه ای خطی‌مستقل با n بردار به دست آید. مجموعه یِ اخیر یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است که شامل ـِ $\mathbb{S}$ است.

هیچ زیرمجموعه ای از $\mathbb{W}$ با بیش از n عضو نیست که خطی‌مستقل باشد، پس $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی، و بُعد ـَش نابزرگ‌تر از n است. $\mathbb{S}$ را یک پایه یِ $\mathbb{W}$ می‌گیریم و پایه ای برا یِ $\mathbb{V}$ می‌سازیم که شامل ـِ $\mathbb{S}$ باشد. اگر تعداد ـِ اعضا یِ $\mathbb{S}$ کم‌تر از n باشد، $\mathbb{W}$ برابر با $\mathbb{V}$ نیست. اگر تعداد ـِ اعضا یِ $\mathbb{S}$ همان n باشد، آن‌گاه $\mathbb{S}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است و در این صورت $\mathbb{W}$ همان $\mathbb{V}$ است.

■

قضیه یِ 11: فرض کنید $\mathbb{W} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ (روشن است که n باپایان است). در این صورت $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی است و بُعد ـِ آن نابیش‌تر از n است. اگر بُعد ـِ $\mathbb{W}$ برابر با m باشد، آن‌گاه یک زیرمجموعه یِ m عضوی یِ $\{e_1, \dots, e_n\}$ هست، که خطی‌مستقل است. از جمله، بُعد ـِ $\mathbb{W}$ برابر با n است، اگر و تنها اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ خطی‌مستقل باشد.

اثبات: اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ خطی‌مستقل باشد، آن‌گاه این مجموعه یک پایه یِ $\mathbb{W}$ است. در غیر ـِ این صورت دستِ‌کم یک ی از اعضا یِ این مجموعه را می‌شود بر حسب ـِ بقیه بسط داد. بدون ـِ کاستن از کلیت ـِ مسئله، می‌شود فرض کرد این بردار e_n است. در این صورت، $\mathbb{W} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. حالا به‌ساده‌گی می‌شود قضیه را با استقرا نسبت به n ثابت کرد.

■

۷ جمع ِ فضاها یِ خطی

دو فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ (هر دو با میدان ِ $\mathbb{F}$) را در نظر بگیرید. حاصلِ‌ضرب ِ دِکَرتی یِ این دوفضا عبارت است از

$$\mathbb{V}\times\mathbb{V}' := \{(v,v') \mid v\in\mathbb{V}, v'\in\mathbb{V}'\}. \tag{16}$$

ترکیب ِ خطی یِ دو عضو ِ این مجموعه را چنین تعریف می‌کنیم.

$$a_1(v_1,v_1') + a_2(v_2,v_2') := (a_1\,v_1 + a_2\,v_2, a_1\,v_1' + a_2\,v_2'). \tag{17}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 12: مجموعه یِ $\mathbb{V}\times\mathbb{V}'$ با میدان ِ $\mathbb{F}$ و ترکیب ِ بالا یک فضا یِ خطی است.

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 13: اگر بُعد ِ دو فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ (با میدان ِ یک‌سان) باپایان باشد، بُعد ِ $\mathbb{V}\times\mathbb{V}'$ هم باپایان و برابر با مجموع ِ بُعد ِ این دوفضا است.

اثبات: فرض کنید $\{e_1,\dots,e_n\}$ و $\{e_1',\dots,e_{n'}'\}$، به‌ترتیب پایه‌ها یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ باشند. به‌ساده‌گی دیده می‌شود $\{(e_1,0),\dots,(e_n,0),(0,e_1'),\dots,(0,e_{n'}')\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}\times\mathbb{V}'$ است. پس

$$\dim(\mathbb{V}\times\mathbb{V}') = \dim(\mathbb{V}) + \dim(\mathbb{V}'). \tag{18}$$

■

حاصلِ‌جمع ِ دو زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ از فضا یِ خطی یِ $\mathbb{W}$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\mathbb{V}+\mathbb{V}' := \{w\in\mathbb{W} \mid \exists\, v\in\mathbb{V}, v'\in\mathbb{V}' : w = v+v'\}. \tag{19}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 14: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ دو زیرفضا یِ $\mathbb{W}$ اند. در این صورت $\mathbb{V}+\mathbb{V}'$ هم یک زیرفضا یِ $\mathbb{W}$ است. ضمناً اگر $v\in\mathbb{V}$، $v'\in\mathbb{V}'$، و $v+v'=0$، آن‌گاه $v,v'\in(\mathbb{V}\cap\mathbb{V}')$.

★

اگر بُعد ِ $\mathbb{V}$ و بُعد ِ $\mathbb{V}'$ باپایان باشد، بُعد ِ $\dim(\mathbb{V}+\mathbb{V}')$ را هم می‌شود بر حسب ِ $\dim(\mathbb{V})$، $\dim(\mathbb{V}')$، و $\dim(\mathbb{V}\cap\mathbb{V}')$ نوشت:

قضیه یِ 15: اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ دو زیرفضا یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{W}$ باشند، آن‌گاه بُعدِ $\mathbb{V}+\mathbb{V}'$ هم باپایان است و

$$\dim(\mathbb{V}+\mathbb{V}') = \dim(\mathbb{V}) + \dim(\mathbb{V}') - \dim(\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'). \qquad (20)$$

اگر علاوه بر این $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}' = \{0\}$، آن‌گاه

$$\dim(\mathbb{V}+\mathbb{V}') = \dim(\mathbb{V}) + \dim(\mathbb{V}'). \qquad (21)$$

اثبات: چون $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'$ زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ است، بُعد ـِ آن باپایان است، قضیه یِ 10. فرض کنید $\{f_1,\dots,f_k\}$ یک پایه یِ آن است. این پایه خطی‌مستقل است (و اعضا یَش در $\mathbb{V}$ اند). پس با افزودن ـِ بردارها ی دیگر ی از $\mathbb{V}$ به این مجموعه، می‌شود پایه ای برا یِ $\mathbb{V}$ ساخت. این پایه را $\{f_1,\dots,f_k,e_1,\dots,e_n\}$ می‌گیریم. به همین ترتیب، برا یِ $\mathbb{V}'$ پایه ای می‌سازیم که شامل ـِ $\{f_1,\dots,f_k\}$ باشد. این پایه را $\{f_1,\dots,f_k,e'_1,\dots,e'_{n'}\}$ می‌گیریم. اجتماع ـِ این پایه‌ها یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ را در نظر بگیرید. روشن است که اعضا یِ $\mathbb{V}+\mathbb{V}'$ را می‌شود بر حسب ـِ اعضا یِ این مجموعه بسط داد. به علاوه، این مجموعه خطی‌مستقل است. در واقع از

$$\sum_i a^i\, e_i + \Big(\sum_j a'^j\, e'_j + \sum_l b^l\, f_l\Big) = 0, \qquad (22)$$

نتیجه می‌شود

$$\sum_i a^i\, e_i \in (\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'), \qquad (23)$$

(قضیه یِ 14) و از آن‌جا

$$\sum_i a^i\, e_i = \sum_l c^l\, f_l. \qquad (24)$$

اما $\{f_1,\dots,f_k,e_1,\dots,e_n\}$ خطی‌مستقل است، پس a^i ها صفر اند. با استدلال ـِ مشابه ی معلوم می‌شود a'^j ها هم صفر اند، و از آن‌جا نتیجه می‌شود b^l ها هم صفر اند. پس $\{f_1,\dots,f_k,e_1,\dots,e_n,e'_1,\dots,e'_{n'}\}$ خطی‌مستقل است و بنابراین یک پایه برا یِ $\mathbb{V}+\mathbb{V}'$ است. اثبات ـِ قضیه با شمردن ـِ اعضا یِ پایه‌ها کامل می‌شود.

■

اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ دو زیرفضا یِ $\mathbb{W}$ باشند و اشتراک ـِشان $\{0\}$ باشد، حاصلِ‌جمع ـِ $\mathbb{V}+\mathbb{V}'$ را با $\mathbb{V}\oplus\mathbb{V}'$ نشان می‌دهند و به آن حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ می‌گویند:

$$\mathbb{V}\oplus\mathbb{V}' := \mathbb{V}+\mathbb{V}', \qquad \mathbb{V}\cap\mathbb{V}' = \{0\}. \tag{25}$$

حاصلِ‌ضرب ـِ دِکَرتی یِ دو فضا یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$، دو زیرفضا یِ خاص دارد که شبیه ـِ فضاها یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ اند، و حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِشان $\mathbb{V}\times\mathbb{V}'$ است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود زیرمجموعه‌ها یِ $\tilde{\mathbb{V}} := \{(v,0)\mid v\in\mathbb{V}\}$ و $\tilde{\mathbb{V}}' := \{(0,v')\mid v'\in\mathbb{V}'\}$ از $\mathbb{V}\times\mathbb{V}'$ زیرفضا هستند. بین ـِ مثلاً $\tilde{\mathbb{V}}$ و $\mathbb{V}$، تناظر ـِ یک‌به‌یک ـِ روشن ی هست ($v\to(v,0)$) که ساختار ـِ خطی را حفظ می‌کند. در واقع این تناظر یک یک‌ریختی است (به معنی یی که در فصل ـِ III تعریف می‌کنیم). همین است که گاه یِ حاصلِ‌ضرب ـِ دِکَرتی یِ دو فضا یِ خطی را هم با نماد ـِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم نشان می‌دهند.

هر بردار در حاصلِ‌جمع ـِ دو زیرفضا را می‌شود به شکل ـِ مجموع ـِ دو بردار نوشت، که هر کدام عضو ـِ یک ی از این زیرفضاها هستند.

قضیه یِ 16: برا یِ دو زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$، فضا یِ $\mathbb{V}+\mathbb{V}'$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم است (یعنی $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'=\{0\}$) اگر و تنها اگر تجزیه یِ هر عضو ـِ این فضا به یک عضو ـِ $\mathbb{V}$ و یک عضو ـِ $\mathbb{V}'$ یک‌تا باشد.

اثبات: از $v+v' = u+u'$ (که در آن $u,v\in\mathbb{V}$ و $u',v'\in\mathbb{V}'$) نتیجه می‌شود $(v-u)+(v'-u')=0$، و از آن‌جا معلوم می‌شود هر یک از این دوپرانتز عضو ـِ $\mathbb{V}\cap\mathbb{V}'$ است.

■

تعمیم ـِ حاصلِ‌جمع ـِ دو زیرفضا یا حاصلِ‌ضرب ـِ دِکَرتی یِ دو فضا به حاصلِ‌جمع ـِ چند زیرفضا یا حاصلِ‌ضرب ـِ دِکَرتی یِ چند فضا ساده است. برا یِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ چند زیرفضا، از چیز ی شبیه به قضیه یِ بالا استفاده می‌کنیم:

قضیه یِ 17: فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ از آن را در نظر بگیرید. فرض کنید هر مجموعه یِ شامل ـِ n بردار ـِ ناصفر ـِ $\{v_1,\dots,v_n\}$ با $v_i\in\mathbb{V}_i$ خطی‌مستقل باشد. در این صورت هر بردار ی در حاصلِ‌جمع ـِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ را می‌شود به یک و فقط یک شکل به n بردار تجزیه کرد که هر کدام در یک ی از این زیرفضاها باشند.

★

اثبات کاملاً شبیه ـِ اثبات ـِ قضیه یِ 16 است. حالا اگر زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ فرض ـِ

قضیه يِ 17 را بر آورند، حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِشان را به شکل ـِ حاصلِ‌جمع ـِ این زیرفضاها تعریف می‌کنیم. به‌ساده‌گی می‌شود تحقیق کرد

قضیه يِ 18: جمعِ‌مستقیم ـِ زیرفضاها خاصیت ـِ شرکت‌پذیری دارد.

★

بنابراین در نوشتن ـِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم n زیرفضا پرانتز لازم نیست.

فضا يِ خطی يِ $\mathbb{V}$ و زیرفضا يِ $\mathbb{V}_1$ ـِ آن را در نظر بگیرید. می‌گوییم $\mathbb{V}_1$ در $\mathbb{V}$ جداشدنی است، اگر یک زیرفضا يِ دیگر ـِ $\mathbb{V}$ مثل ـِ $\mathbb{V}_2$ باشد که

$$\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}. \tag{26}$$

توجه کنید که زیرفضا يِ $\mathbb{V}_2$، در صورت ـِ وجود لزوماً یک‌تا نیست.

قضیه يِ 19: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا يِ خطی، و $\mathbb{V}_1$ یک زیرفضا يِ آن است. در این صورت،

a اگر $\mathbb{V}_1 = \{0\}$، آن‌گاه $\mathbb{V}_1$ جداشدنی است.

b اگر $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}$، آن‌گاه $\mathbb{V}_1$ جداشدنی است.

c اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}_1$ جداشدنی است.

اثبات: در حالت ـِ **a**، می‌گیریم $\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$؛ در حالت ـِ **b**، می‌گیریم $\mathbb{V}_2 = \{0\}$. روشن است که در هر دوحالت (26) برقرار است. در حالت ـِ **c**، از باپایان‌بودن ـِ بُعد ـِ $\mathbb{V}$ نتیجه می‌شود بُعد ـِ $\mathbb{V}_1$ هم باپایان است. فرض کنید $\dim(\mathbb{V}) = n$، و $\dim(\mathbb{V}_1) = m$. (قضیه يِ 10 می‌گوید $n \geq m$.) $\{e_1, \dots, e_m\}$ را یک پایه يِ $\mathbb{V}_1$ می‌گیریم. به این پایه آن قدر بردار می‌افزاییم تا پایه ای برا يِ $\mathbb{V}$ به دست آید. این بردارها يِ جدید را e_{m+1} تا e_n می‌نامیم. به‌ساده‌گی دیده می‌شود $\mathbb{V}_2 := \mathrm{span}\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$، رابطه يِ (26) را بر می‌آورد.

■

II

نگاشت ِ خطی، هم‌ریختی

vi تعریف ِ نگاشت ِ خطی

فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ $\mathbb{F}$ اند. نگاشت ِ $T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ را خطی می‌گویند اگر

$$[(\forall\, a,b\ \in\mathbb{F}),(\forall\, u,v\in\mathbb{V})]\ :\ T(a\,u+b\,v)=a\,T(u)+b\,T(v). \qquad (27)$$

به چنین نگاشت ی تابع ِ خطی یا تبدیل ِ خطی هم می‌گویند. عبارت ِ بالا نشان می‌دهد یک نگاشت ِ خطی، به اصطلاح ساختار ِ فضا یِ خطی را حفظ می‌کند. یعنی اگر اول دو بردار را با هم جمع کنید و سپس حاصل را به فضا یِ دوم بنگارید، یا اول دو بردار را به فضا یِ دوم بنگارید و سپس حاصل‌ها را جمع کنید، نتیجه یکی است. به همین ترتیب، اگر اول بردار ی را در یک عدد ضرب کنید بعد حاصل را به فضا یِ دوم بنگارید، یا اول آن بردار را به فضا یِ دوم بنگارید بعد حاصل را در همان عدد ضرب کنید، نتیجه یکی است. به نگاشت ی که یک ساختار را حفظ می‌کند هم‌ریختی می‌گویند. به این ترتیب، هر نگاشت ِ خطی یک هم‌ریختی از یک فضا یِ خطی است. برا یِ نگاشت ِ $T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$، به $\mathbb{V}$ دامنه یِ T می‌گویند:

$$\mathbb{V}=:\mathrm{dom}(T). \qquad (28)$$

مقدار ـِ نگاشت باید به ازا یِ همه یِ اعضا یِ دامنه معلوم باشد، بنابراین تغییر ـِ دامنه حتماً به معنی ـِ تغییر ـِ خود ـِ نگاشت هم هست. اما لزوم ی ندارد به ازا یِ هر عضو ـِ $\mathbb{W}$ عضو ی در دامنه باشد که اثر ـِ نگاشت رو یِ آن برابر با آن عضو ـِ $\mathbb{W}$ شود. به همین علت می‌شود $\mathbb{W}$ را بزرگ‌تر کرد، بی آن که نگاشت تغییر کند.

هر نگاشت ـِ خطی (از یک فضا یِ باپایان‌بُعدی) با اثر َـش رو یِ بردارها یِ یک پایه یِ فضا مشخص می‌شود. چون،

$$T(v) = T\left(\sum\nolimits_i v^i\, e_i\right),$$

$$= \sum\nolimits_i v^i\, T(e_i). \tag{29}$$

در این‌جا $\{e_1 \ldots, e_n\}$ را یک پایه یِ فضا یِ $\mathbb{V}$ گرفته ایم و

$$v = \sum\nolimits_i v^i\, e_i. \tag{30}$$

بر عکس، به‌ساده‌گی می‌شود دید اگر S_i ها n بردار در $\mathbb{W}$ باشند، با آن‌ها می‌شود یک نگاشت ـِ خطی ساخت. (لزوم ی ندارد مجموعه یِ شامل ـِ این n بردار خطی‌مستقل باشد، حتا لزوم ی ندارد این بردارها متمایز باشند.) تعریف می‌کنیم

$$S(v) := \sum\nolimits_i v^i\, S_i. \tag{31}$$

به‌ساده‌گی می‌شود تحقیق کرد S با تعریف ـِ بالا یک نگاشت ـِ خطی است. بنابراین

قضیه یِ 20: هر نگاشت ـِ خطی از یک فضا یِ n بُعدی به $\mathbb{W}$، با n بردار در $\mathbb{W}$ مشخص می‌شود و این تناظر یک‌به‌یک است.

★

vii فضا یِ نگاشت‌ها یِ خطی یِ از یک فضا یِ خطی به یک فضا یِ خطی

با نگاشت‌ها یِ خطی یِ از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{W}$ و میدان ـِ $\mathbb{F}$ (میدان ـِ متناظر با این فضاها) یک فضا یِ خطی ساخته می‌شود. این فضا را با $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ نشان می‌دهیم. برا یِ ساختن ـِ

این فضا کافی است جمع ِ دو نگاشت ِ خطی، ضرب ِ یک عدد در یک نگاشت ِ خطی، همانی یِ جمعی، و وارون ِ جمعی یِ یک نگاشت ِ خطی را تعریف کنیم. فرض کنید $a, b \in \mathbb{F}$ و $T, S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$. ترکیب ِ خطی یِ T و S با ضریب‌های a و b را از رو یِ اثر ِ آن رو یِ یک بردار ِ دل‌بخواه ِ $\mathbb{V}$ مثل ِ v تعریف می‌کنیم:

$$(a\,T + b\,S)(v) := a[T(v)] + b[S(v)]. \tag{32}$$

به‌ساده‌گی می‌شود تحقیق کرد با تعریف ِ بالا، نگاشت ِ $(a\,T + b\,S)$ خطی است. برا یِ صفر ِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ و وارون ِ جمعی یِ اعضا یِ آن هم،

$$0_{\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})}(v) := 0 \tag{33}$$

و

$$(-T)(v) := -[T(v)] \tag{34}$$

را به کار می‌بریم. از این پس $0_{\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})}$ را با همان 0 نشان می‌دهیم. به‌ساده‌گی می‌شود تحقیق کرد نگاشت‌ها یِ 0 و $(-T)$ هم خطی اند. نیز به‌ساده‌گی می‌شود تحقیق کرد مجموعه یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ با میدان ِ $\mathbb{F}$ و تعریف‌ها یِ (32) تا (34) یک فضا یِ خطی است. ضمناً معلوم می‌شود در ضرب ِ اسکالرها، نگاشت‌ها یِ خطی، و بردارها، جا یِ پرانتزها بی‌اهمیت است. به همین خاطر از این پس این پرانتزها را هم نمی‌گذاریم:

$$a\,T\,v = a(T\,v) = (a\,T)v = a[T(v)] = (a\,T)(v). \tag{35}$$

این‌ها را می‌شود در این قضیه خلاصه کرد.

قضیه یِ 21: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$. در این صورت نگاشت‌ها یِ $0_{\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})}$ و $(-T)$ با تعریف‌ها یِ (33) و (34) خطی اند. اگر علاوه بر این $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$، نگاشت ِ $(a\,T + b\,S)$ با تعریف ِ (32) هم خطی است. در ضرب ِ یک اسکالر در یک نگاشت ِ خطی در یک بردار، جا یِ پرانتزها بی‌اهمیت است. سرانجام، $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ با میدان ِ فضاها یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ و ترکیبِ‌خطی یِ (32)، یک فضا یِ خطی است.

★

viii ترکیبِ نگاشت‌ها یِ خطی

دو نگاشتِ $S \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. ترکیبِ این دونگاشت، $(T\circ S):\mathbb{U}\to\mathbb{W}$ است، که چنین تعریف می‌شود.

$$(T\circ S)(u) := T[S(u)]. \tag{36}$$

به‌ساده‌گی می‌شود دید

قضیه یِ 22: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ و $S \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$. در این صورت نگاشتِ $(T\circ S)$ با تعریفِ (36) هم خطی است.

★

ضمناً تعریفِ (36) نشان می‌دهد در این‌جا هم وجودِ پرانتزها اهمیت ندارد. به این ترتیب، به جا یِ ترکیبِ دو نگاشتِ خطی می‌شود از ضربِ این دونگاشت حرف زد. نکته یِ مهم این است که ضربِ دو نگاشت (یا عمل‌گر) جابه‌جایی نیست. اولاً، برا یِ این که $T\,S$ معنی داشته باشد باید بردِ S (مجموعه یِ همه یِ بردارها یی که از اثرِ S رو یِ اعضا یِ دامنه یِ S به دست می‌آیند) زیرمجموعه یِ دامنه یِ T باشد. لزوم ی ندارد اگر این درست باشد، بردِ T هم زیرمجموعه یِ دامنه یِ S باشد. بنابراین ممکن است $(T\,S)$ تعریف شده باشد ولی $(S\,T)$ تعریف نشده باشد. ممکن است هم $(T\,S)$ و هم $(S\,T)$ تعریف شده باشند. مثلاً اگر $\mathbb{W}$ همان $\mathbb{U}$ باشد، $(S\,T)\in\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $(T\,S)\in\mathcal{LF}(\mathbb{U};\mathbb{U})$ هردو تعریف شده اند. اما دیده می‌شود که دامنه یِ این‌دو یکی نیست، بنابراین این دونگاشت نمی‌توانند برابر باشند. اگر $\mathbb{U}$ هم با $\mathbb{V}$ برابر باشد، آن وقت $(S\,T)$ و $(T\,S)$ هر دو از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{V}$ اند. اما باز هم لازم نیست برابر باشند. به عنوانِ یک مثالِ ساده، فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ دوبُعدی است و $\{e_1,e_2\}$ یک پایه یِ آن است. هر نگاشتِ خطی از این فضا به خودَش با اثرِ آن رو یِ اعضا یِ این پایه مشخص می‌شود. فرض کنید S و T دو نگاشتِ خطی از این فضا به خودَش اند و

$$S(e_1)=e_2,\quad S(e_2)=0;\qquad T(e_1)=0,\quad T(e_2)=e_1. \tag{37}$$

از این‌جا دیده می‌شود

$$(S\,T)(e_1)=0,\quad (S\,T)(e_2)=e_2;\qquad (T\,S)(e_1)=e_1,\quad (T\,S)(e_2)=0. \tag{38}$$

روشن است که $(ST) \neq (T\,S)$. در واقع چون ترکیب ِ تابع‌ها لزوماً جابه‌جایی نیست، ضرب ِ نگاشت‌ها یِ خطی هم لزوماً جابه‌جایی نیست.

اما ترکیب ِ تابع‌ها شرکت‌پذیر است (به‌شرط ی که سه‌تابع چنان باشند که ترکیب ِشان خوش‌تعریف باشد). بنابراین ضرب ِ سه نگاشت ِ خطی هم شرکت‌پذیر است. پس می‌شود در چنین‌ضرب ی پرانتزها را بر داشت:

قضیه یِ 23: در ضرب ِ چند نگاشت ِ خطی و یک بردار، جا یِ پرانتزها بی‌اهمیت است.

★

ix تصویر و هسته یِ یک نگاشت ِ خطی

نگاشت ِ $T \in \mathbb{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. تصویر ِ این نگاشت مجموعه یِ همه یِ بردارها یِ $\mathbb{W}$ است که با اثر ِ T رو یِ یک ی از بردارها یِ $\mathbb{V}$ به دست می‌آیند:

$$\operatorname{img}(T) := \{w \in \mathbb{W} \mid [\exists\, v \in \mathbb{V} \mid w = T(v)]\}. \tag{39}$$

فرض کنید $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ یک تابع است و $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{A}$. تصویر ِ $\mathbb{D}$ تحت ِ f یک زیرمجموعه یِ $\mathbb{B}$ است که با اثر ِ f رو یِ اعضا یِ $\mathbb{D}$ به دست می‌آید. این مجموعه را با $f(\mathbb{D})$ نشان می‌دهند:

$$f(\mathbb{D}) := \{b \in \mathbb{B} \mid [\exists\, a \in \mathbb{A} \mid f(a) = b]\}. \tag{40}$$

به این ترتیب،

$$\operatorname{img}(T) = T(\mathbb{V}) = T[\operatorname{dom}(T)]. \tag{41}$$

هسته یِ نگاشت ِ خطی یِ T مجموعه یِ همه یِ بردارها یی است که اثر ِ T رو یِشان صفر می‌شود:

$$\ker(T) := \{v \in \mathbb{V} \mid T(v) = 0\}. \tag{42}$$

باز به‌ساده‌گی می‌شود ثابت کرد

قضیه یِ 24: تصویر و هسته یِ هر نگاشت ـِ خطی فضاها یی خطی اند.
اثبات: کافی است نشان دهیم ترکیب ـِ خطی یِ دو بردار از هر یک از این مجموعه‌ها، در آن مجموعه است.

■

توجه دارید که اگر $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\operatorname{img}(T)&\sqsubseteq\mathbb{W},\\ \ker(T)&\sqsubseteq\mathbb{V}.\end{aligned}\tag{43}$$

به‌ساده‌گی ثابت می‌شود
قضیه یِ 25: یک نگاشت ـِ خطی یک‌به‌یک است، اگر و تنها اگر هسته یِ آن $\{0\}$ باشد.

★

توجه دارید که 0 حتماً عضو ـِ هسته است. اما ممکن است هسته اعضا یِ دیگر ی هم داشته باشد. اگر هسته یِ یک نگاشت ـِ خطی نابدیهی باشد (یعنی جز 0 عضو ـِ دیگر ی هم داشته باشد) می‌گویند آن نگاشت تکین است. در غیر ـِ این صورت می‌گویند آن نگاشت ناتکین است.

یک نتیجه یِ قضیه یِ 25 این است.
قضیه یِ 26: فرض کنید $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، و بُعد ـِ $\mathbb{W}$ باپایان است. در این صورت، اگر بُعد ـِ $\mathbb{V}$ باپایان و بزرگ‌تر از بُعد ـِ $\mathbb{W}$ باشد، یا $\mathbb{V}$ بی‌پایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه T یک‌به‌یک نیست.
اثبات: بُعدِ $\mathbb{W}$ را n می‌گیریم. چون بُعد ـِ $\mathbb{V}$ بیش از n، یا بی‌پایان است، حتماً می‌شود یک زیرمجموعه یِ $(n+1)$ عضوی یِ خطی‌مستقل مثل ـِ $\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$ در $\mathbb{V}$ یافت. مجموعه یِ $\{Te_1,\dots,Te_{n+1}\}$ خطی‌مستقل نیست، چون زیرمجموعه یِ فضا یِ n بُعدی یِ $\mathbb{W}$ است. پس یک ترکیب ـِ خطی یِ نابدیهی از اعضا یِ آن صفر است:

$$\sum\nolimits_i a^i\,T\,e_i=0,\tag{44}$$

که در آن دستِ‌کم یک ضریب ناصفر است. اما این یعنی

$$T\left(\sum\nolimits_i a^i\,e_i\right)=0.\tag{45}$$

چون $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ خطی‌مستقل است، و دستِ‌کم یک ی از a^i ها ناصفر است، عبارت ِ درون ِ پرانتز صفر نیست. پس هسته ي T شامل ِ اعضا ي ناصفر هم هست. بنابراین T یک‌به‌یک نیست.

■

می‌گوییم $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ هسته‌جدا است، اگر هسته ي T در $\mathbb{V}$ جداشدنی باشد.

قضیه ي 27: فرض کنید نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت یک زیرفضا يِ $\mathbb{V}$ مثل ِ $\mathbb{V}_1$ هست که

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \ker(T), \tag{46}$$

و $\mathrm{res}(T; \mathbb{V}_1)$ یک‌به‌یک و تصویر َ ش $\mathrm{img}(T)$ است.

اثبات: وجود ِ $\mathbb{V}_1$ ی که (46) را بر آورد، همان تعریف ِ هسته‌جدابودن ِ T است. فرض کنید $w \in \mathrm{img}(T)$. بردار ی مثل ِ $v \in \mathbb{V}$ هست که

$$T(v) = w. \tag{47}$$

به خاطر ِ (46)، بردارها یی مثل ِ $v_1 \in \mathbb{V}_1$ و $v_2 \in \ker(T)$ هستند که

$$v = v_1 + v_2. \tag{48}$$

از این‌جا

$$T(v_1) = w. \tag{49}$$

این نشان می‌دهد تصویر ِ $\mathrm{res}(T; \mathbb{V}_1)$ شامل ِ $\mathrm{img}(T)$ است. چون تصویر ِ $\mathrm{res}(T; \mathbb{V}_1)$ زیرمجموعه ي $\mathrm{img}(T)$ هم هست، این دومجموعه با هم برابر اند. یک‌به‌یک‌بودن ِ این نگاشت هم از قضیه ي 25 و $\ker(T) \cap \mathbb{V}_1 = \{0\}$ نتیجه می‌شود.

■

به فضا ي $\mathbb{V}_1$ در قضیه ي بالا دامنه ي مؤثر ِ T می‌گوییم و آن را با $\mathrm{edom}(T)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که دامنه يِ مؤثر ِ T لزوماً به طور ِ یک‌تا از رو يِ T تعیین نمی‌شود.

قضیه يِ 28: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$. در این صورت بُعد ِ $\mathrm{img}(T)$ باپایان است، اگر و تنها اگر T هسته‌جدا و بُعد ِ $\mathrm{edom}(T)$ باپایان باشد. هر یک از این دوگزاره يِ هم‌ارز

که برقرار باشد، بُعد ِ $\mathrm{edom}(T)$ با بُعد ِ $\mathrm{img}(T)$ برابر است.

اثبات: فرض کنید بُعد ِ $\mathrm{img}(T)$ باپایان است. $\{f_1, \dots, f_k\}$ را یک پایه یِ $\mathrm{img}(T)$ می‌گیریم. مجموعه ای مثل ِ $B = \{e_1, \dots, e_k\} \subseteq \mathbb{V}$ هست که

$$T(e_i) = f_i. \tag{50}$$

B خطی‌مستقل است. برا یِ اثبات ِ این کافی است T را رو یِ $\sum_i a^i\, e_i = 0$ اثر دهید. نتیجه می‌شود $\sum_i a^i\, f_i = 0$، و چون $\{f_1, \dots, f_k\}$ خطی‌مستقل است، همه یِ ضریب‌ها باید صفر باشند. $\mathbb{V}_1$ را $\mathrm{span}(B)$ می‌گیریم. بردار ی مثل ِ $v \in \mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} T\,v &=: w, \\ &= \sum\nolimits_i w^i\, f_i, \\ &= T\left(v' := \sum\nolimits_i w^i\, e_i\right). \end{aligned} \tag{51}$$

از این‌جا،

$$v' \in \mathbb{V}_1, \qquad (v - v') \in \ker(T). \tag{52}$$

پس،

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \ker(T). \tag{53}$$

ضمناً $\mathbb{V}_1 \cap \ker(T) = \{0\}$. برا یِ اثبات ِ این کافی است یک ترکیب ِ خطی از اعضا یِ B را بگیریم و T را رو یِ آن اثر دهیم:

$$T\left(u := \sum\nolimits_i u^i\, e_i\right) = \sum\nolimits_i u^i\, f_i. \tag{54}$$

اگر $u \in \ker(T)$، طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا صفر می‌شود، و در نتیجه همه یِ u^i ها باید صفر باشند، که نتیجه می‌دهد $u = 0$. پس اگر u در اشتراک ِ $\mathbb{V}_1$ و $\ker(T)$ باشد، آن‌گاه u صفر است. به این ترتیب به (46) می‌رسیم، که می‌گوید $\mathrm{edom}(T) = \mathbb{V}_1$، و روشن است که

$$\dim[\mathrm{edom}(T)] = k = \dim[\mathrm{img}(T)]. \qquad (55)$$

برعکس، فرض کنید (46) برقرار است، و بُعد ـِ $\mathrm{edom}(T)$ باپایان است. داریم

$$\mathrm{img}(T) = \mathrm{span}[T(B)], \qquad (56)$$

که در آن B یک پایه یِ $\mathrm{edom}(T)$ است. از این‌جا معلوم می‌شود بُعد ـِ $\mathrm{img}(T)$ باپایان است (قضیه ـِ 11). پس دوباره می‌شود از اثبات ـِ قسمت ـِ اول استفاده کرد و (56) را نشان داد.

■

دیدیم $\mathrm{edom}(T)$ به طور ـِ یک‌تا از T به دست نمی‌آید. اما قضیه یِ بالا می‌گوید اگر بُعد ـِ $\mathrm{edom}(T)$ یا $\mathrm{img}(T)$ باپایان باشد، آن‌گاه بُعد ـِ $\mathrm{edom}(T)$ یک‌تا است.

اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، بین ـِ بُعد ـِ آن و بُعد ـِ تصویر و هسته یِ هر نگاشت ـِ خطی از آن به یک فضا یِ خطی رابطه یِ ساده ای برقرار است:

قضیه یِ 29: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، و بُعد ـِ $\mathbb{V}$ باپایان است. در این صورت بُعد ـِ هسته و تصویر ـِ T هم باپایان است و مجموع ـِ این دوبُعد برابر است با بُعد ـِ $\mathbb{V}$.

اثبات: $\ker(T)$ باپایان‌بُعدی، و بُعد ـِ آن نابیش‌تر از بُعد ـِ $\mathbb{V}$ است، چون $\ker(T)$ زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ است. اگر $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{img}(T) = \mathrm{span}\{T(e_1),\dots,T(e_n)\}$. پس $\mathrm{img}(T)$ هم باپایان‌بُعدی، و بُعد ـِ آن نابیش‌تر از n (یعنی بُعد ـِ $\mathbb{V}$) است. به این ترتیب، حکم ـِ قضیه از قضیه‌ها یِ 28 و 15 نتیجه می‌شود.

■

به بُعد ـِ تصویر ـِ T رتبه یِ T، و به بُعد ـِ هسته یِ T پوچی یِ T می‌گویند:

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(T) &:= \dim[\mathrm{img}(T)],\\ \mathrm{null}(T) &:= \dim[\ker(T)].\end{aligned} \qquad (57)$$

بر حسبِ این‌ها، قضیه یِ بالا به این شکل در می آید:

$$\dim[\mathrm{dom}(T)] = \mathrm{null}(T) + \mathrm{rank}(T). \qquad (58)$$

III

وارون ـِ یک نگاشت ـِ خطی، یک‌ریختی

x نگاشت ـِ خطی یِ وارون‌پذیر

هر نگاشت ی (از جمله هر نگاشت ـِ خطی یی) مثل ـِ T در یک مجموعه مثل ـِ $\mathbb{W}$ شامل ـِ $\mathrm{img}(T)$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر T یک‌به‌یک و در $\mathbb{W}$ پوشا باشد. پوشابودن در $\mathbb{W}$ یعنی $\mathrm{img}(T)$ خود ـِ $\mathbb{W}$ باشد. بنا بر قضیه یِ 25، شرط ـِ لازم و کافی برا یِ این که یک نگاشت ـِ خطی یک‌به‌یک باشد آن است که هسته یِ این نگاشت بدیهی (یعنی $\{0\}$) باشد. در این صورت بُعد ـِ تصویر ـِ نگاشت با بُعد ـِ دامنه یِ آن برابر است. برا یِ یک نگاشت ـِ خطی که تصویر ـِ آن زیرفضا یِ یک فضا یِ خطی باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{W}$ است، شرط ـِ لازم و کافی برا یِ پوشابودن ـِ نگاشت در $\mathbb{W}$ آن است که رتبه یِ نگاشت با بُعد ـِ $\mathbb{W}$ برابر باشد. از این‌جا قضیه یِ زیر نتیجه می‌شود.

قضیه یِ 30: نگاشت ـِ $T\in\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید و فرض کنید بُعد ـِ $\mathbb{V}$ یا $\mathbb{W}$ باپایان است. در این صورت این سه‌گزاره هم ارز اند.

a $\dim(\mathbb{V})=\dim(\mathbb{W})$ و $\mathrm{null}(T)=0$.

b T در $\mathbb{W}$ وارون‌پذیر است.

c $\dim(\mathbb{V})=\dim(\mathbb{W})$ و تصویر ِ هر زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $\mathbb{V}$ تحت ِ T، یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $\mathbb{W}$ است. (از جمله، تصویر ِ هر پایه یِ $\mathbb{V}$ تحت ِ T، یک پایه یِ $\mathbb{W}$ است.)

اثبات: نشان می‌دهیم گزاره یِ **a** گزاره یِ **b** را نتیجه می‌دهد، گزاره یِ **b** گزاره یِ **c** را نتیجه می‌دهد، و گزاره یِ **c** گزاره یِ **a** را نتیجه می‌دهد.

$\mathrm{null}(T)=0$ نتیجه می‌دهد T یک‌به‌یک است، این و اولین گزاره یِ **a** هم نتیجه می‌دهد T در $\mathbb{W}$ پوشا است. پس **a** نتیجه می‌دهد T در $\mathbb{W}$ وارون‌پذیر است، که همان **b** است.

فرض کنید T در $\mathbb{W}$ وارون‌پذیر است. اگر بُعد ِ $\mathbb{W}$ باپایان باشد، یک‌به‌یک‌بودن ِ T نتیجه می‌دهد بُعد ِ $\mathbb{V}$ هم باپایان است (قضیه یِ 26). اگر بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد، پوشابودن ِ T در $\mathbb{W}$ نتیجه می‌دهد بُعد ِ $\mathbb{W}$ هم باپایان است. پس در هر حالت، وارون‌پذیری یِ T در $\mathbb{W}$ نتیجه می‌دهد بُعد ِ $\mathbb{V}$ و بُعد ِ $\mathbb{W}$ باپایان است. در این حالت قضیه یِ 29 نتیجه می‌دهد این دوبُعد با هم برابر اند. فرض کنید B یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد. تصویر ِ B مجموعه ای است که پهنه اَش تصویر ِ T است. پوشابودن ِ T در $\mathbb{W}$ نتیجه می‌دهد پهنه یِ تصویر ِ B خود ِ $\mathbb{W}$ است. تعداد ِ اعضا یِ تصویر ِ B هم برابر است با بُعد ِ $\mathbb{V}$، که با بُعد ِ $\mathbb{W}$ برابر است. پس تصویر ِ B خطی‌مستقل هم هست، و در نتیجه یک پایه یِ $\mathbb{W}$ است. B' را یک مجموعه یِ خطی‌مستقل در $\mathbb{V}$ می‌گیریم. می‌خواهیم نشان دهیم تصویر ِ B' هم خطی‌مستقل است. B را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که شامل ِ B' باشد. تصویر ِ B خطی‌مستقل، و شامل ِ تصویر ِ B' است. پس تصویر ِ B' هم خطی‌مستقل است. یعنی **b** گزاره یِ **c** را نتیجه می‌دهد.

سرانجام، اگر **c** برقرار باشد، **a** به‌ساده‌گی از قضیه یِ 29 نتیجه می‌شود.

■

متناظر با نگاشت ِ یک‌به‌یک ِ T با دامنه یِ $\mathbb{V}$، یک نگاشت ِ U با دامنه یِ $T(\mathbb{V})$ هست که

$$U\circ T=1_{\mathbb{V}}, \tag{59}$$

که در آن 1 نگاشت ِ همانی یِ فضا است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه ی 31: نگاشت ِ T یک‌به‌یک است، اگر و تنها اگر یک نگاشت ِ U باشد که (59) را بر آورد. هم‌چنین، اگر T یک‌به‌یک باشد، نگاشت ِ U با دامنه ی $\mathrm{img}(T)$ و تعریف ِ (59) یک‌تا است و

$$T \circ U = 1_{\mathrm{img}(T)}. \tag{60}$$

★

متناظر با نگاشت ِ یک‌به‌یک ِ T، به نگاشت ِ U با دامنه ی $\mathrm{img}(T)$ که (59) و (60) را بر می‌آورد وارون ِ نگاشت ِ T می‌گویند و آن را با T^{-1} نمایش می‌دهند:

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1} &= 1_{\mathrm{img}(T)}, \\ T^{-1} \circ T &= 1_{\mathrm{dom}(T)}. \end{aligned} \tag{61}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه ی 32: فرض کنید نگاشت‌ها ی T و T' یک‌به‌یک اند و $\mathrm{img}(T) \subseteq \mathrm{dom}(T')$. در این صورت $(T'\,T)$ هم یک‌به‌یک است و

$$(T'\,T)^{-1} = T^{-1}\ \mathrm{res}\{T'^{-1}, T'[\mathrm{img}(T)]\}. \tag{62}$$

★

قضیه ی 33: فرض کنید نگاشت ِ خطی ِ T یک‌به‌یک است. در این صورت وارون ِ T خطی است.

اثبات: دو بردار ِ دل‌بخواه ِ w_1 و w_2 در $T(\mathbb{V})$، و دو اسکالر ِ α^1 و α^2 را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} T[\alpha^1\,T^{-1}(w_1) + \alpha^2\,T^{-1}(w_2)] &= \alpha^1\,T[T^{-1}(w_1)] + \alpha^2\,T[T^{-1}(w_2)], \\ &= \alpha^1\,w_1 + \alpha^2\,w_2. \end{aligned} \tag{63}$$

پس

$$T^{-1}(\alpha^1\,w_1 + \alpha^2\,w_2) = \alpha^1\,T^{-1}(w_1) + \alpha^2\,T^{-1}(w_2). \tag{64}$$

■

به نگاشت ـِ خطی یِ یک‌به‌یک ـِ T با دامنه یِ $\mathbb{V}$ یک یک‌ریختی از $\mathbb{V}$ هم می‌گویند. اگر این نگاشت در $\mathbb{W}$ پوشا باشد، آن‌گاه می‌گویند $\mathbb{V}$ با $\mathbb{W}$ یک‌ریخت است:

$$\mathbb{W} \sim \mathbb{V}. \tag{65}$$

یک‌ریخت‌بودن ـِ دو فضا یِ خطی یعنی این که این دوفضا از نظر ـِ ساختار ـِ خطی کاملاً یکی اند: نتیجه یِ هر عمل ـِ خطی یی در یک فضا را می‌شود با نتیجه یِ یک عمل ـِ خطی یِ متناظر در فضا یِ دیگر به دست آورد. این است که گاه ی به جا یِ این که بگویند فلان دوفضا یک‌ریخت اند، می‌گویند فلان دوفضا یکی اند. به تفاوت ـِ یک‌ریختی و هم‌ریختی توجه کنید. اگر T یک هم‌ریختی از $\mathbb{V}$ باشد، نتیجه یِ عمل‌ها یِ خطی در $T(\mathbb{V})$ را می‌شود از عمل‌ها یِ خطی در $\mathbb{V}$ به دست آورد، اما عکس ـِ این مطلب درست نیست. یعنی $\mathbb{V}$ همه یِ اطلاعات ـِ مربوط به $T(\mathbb{V})$ را در بر دارد، اما ممکن است $T(\mathbb{V})$ همه یِ اطلاعات ـِ مربوط به $\mathbb{V}$ را در بر نداشته باشد.

با استفاده از مفهوم ـِ یک‌ریختی، قضیه یِ 27 را می‌شود به این شکل بیان کرد.

قضیه یِ 34: فرض کنید T یک نگاشت ـِ خطی یِ هسته‌جدا است. در این صورت،

$$\mathrm{edom}(T) \sim \mathrm{img}(T). \tag{66}$$

★

قضیه یِ 35: یک‌ریختی یِ فضاها یک رابطه یِ هم‌ارزی است.

اثبات: هر فضا با خود َش یک‌ریخت است (نگاشت ـِ همانی را در نظر بگیرید)، اگر $\mathbb{V}$ با $\mathbb{W}$ یک‌ریخت باشد، آن‌گاه $\mathbb{W}$ هم با $\mathbb{V}$ یک‌ریخت است (وارون ـِ هر یک‌ریختی هم یک‌ریختی است) و اگر $\mathbb{U}$ با $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}$ با $\mathbb{W}$ یک‌ریخت باشد، آن‌گاه $\mathbb{U}$ با $\mathbb{W}$ یک‌ریخت است. این از این‌جا دیده می‌شود که اگر T نگاشت ی یک‌به‌یک با دامنه یِ $\mathbb{U}$ و تصویر ـِ $\mathbb{V}$، و T' نگاشت ی یک‌به‌یک با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و تصویر ـِ $\mathbb{W}$ باشد، آن‌گاه $T'T$ نگاشت ی یک‌به‌یک با دامنه یِ $\mathbb{U}$ و تصویر ـِ $\mathbb{W}$ است.

■

هم‌ریختی یِ دو فضا ویژه‌گی یِ دوم را ندارد (چون ممکن است نگاشت ـِ هم‌ریختی وارون‌پذیر نباشد) بنابراین رابطه یِ هم‌ارزی نیست.

دو مثال ِ دیگر از یک‌ریختی را هم قبلاً دیده ایم:

قضیه یِ 36: اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان باشند، آن‌گاه فضا یِ $\mathbb{V}$ با زیرفضا یِ $\tilde{\mathbb{V}}$ از $\mathbb{V}\times\mathbb{V}'$ یک‌ریخت است، که در آن

$$\tilde{\mathbb{V}} := \{(v,0)\mid v\in\mathbb{V}\}. \tag{67}$$

اثبات: کافی است نگاشت ِ $t:\mathbb{V}\to\tilde{\mathbb{V}}$ با $t(v)=(v,0)$ را در نظر بگیریم و نشان دهیم این نگاشت خطی و یک‌به‌یک، و در $\tilde{\mathbb{V}}$ پوشا است.

■

از این پس یک‌ریختی یِ بین ِ این دوفضا را به شکل ِ تساوی نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{V}} &= \mathbb{V},\\ \forall\, v\in\mathbb{V}\ :\ (v,0) &= v.\end{aligned} \tag{68}$$

هم‌چنین،

قضیه یِ 37: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند و بُعد ِ $\mathbb{V}$ برابر ِ n (باپایان) است. در این صورت،

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})\sim\overbrace{\mathbb{W}\times\cdots\times\mathbb{W}}^{n}. \tag{69}$$

اثبات: پایه یِ $\{e_1,\dots,e_n\}$ برا یِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. متناظر با این پایه، نگاشت ِ $t:\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})\to\overbrace{\mathbb{W}\times\cdots\times\mathbb{W}}^{n}$ با

$$t(T)=(T\,e_1,\dots,T\,e_n) \tag{70}$$

را تعریف می‌کنیم. به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد این نگاشت خطی و یک‌به‌یک، و تصویر َش $\overbrace{\mathbb{W}\times\cdots\times\mathbb{W}}^{n}$ است.

■

xi یک‌ریخت‌بودن ِ فضاها یِ خطی یِ هم‌بُعد ِ با یک میدان

قضیه یِ 38: همه یِ فضاها یِ خطی یِ با بُعد ِ (باپایان ِ) n با میدانِ یک‌سان، یک‌ریخت اند.

اثبات: دو فضا یِ خطی یِ n بُعدی یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ با میدان ِ $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید. $\{e_1, \dots, e_n\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$، و $\{E_1, \dots, E_n\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{W}$ بگیرید. به‌ساده‌گی می‌شود تحقیق کرد نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ با

$$\forall\, i\ :\ T\, e_i = E_i \tag{71}$$

یک‌به‌یک و در $\mathbb{W}$ پوشا است. پس

$$\mathbb{V} \sim \mathbb{W}. \tag{72}$$

■

به زبان ِ ساده‌تر می‌گویند فقط یک فضا یِ n بُعدی با میدان ِ $\mathbb{F}$ هست. برا یِ این فضا نمایش ِ ساده ای هست. مجموعه یِ ستون‌ها یِ n مئلفه‌ای با مئلفه‌ها یِ عضو ِ $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید. برا یِ این مجموعه $(\mathbb{F}^n)$ جمع ِ دو عضو و ضرب ِ یک عدد در یک عضو را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u^1 + v^1 \\ \vdots \\ u^n + v^n \end{pmatrix}, \tag{73}$$

و

$$a \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\, u^1 \\ \vdots \\ a\, u^n \end{pmatrix}. \tag{74}$$

به‌ساده‌گی تحقیق می‌شود مجموعه یِ $\mathbb{F}^n$ با این دوعمل یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی است. یک پایه یِ آن مجموعه یِ همه یِ ستون‌ها یی است که یک ی از اعضا یِشان یک و بقیه صفر است. از جمله، خود ِ $\mathbb{F}$ با جمع و ضرب ِ خود َ ش یک فضا یِ خطی یِ یک‌بُعدی با میدان ِ $\mathbb{F}$ است. از این که $\mathbb{F}^n$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی است، هم‌راه با قضیه یِ 37، این قضیه به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود.

قضیه یِ 39: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ باشد، آن‌گاه

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{F}^n) \sim \overbrace{\mathbb{V}\times\cdots\times\mathbb{V}}^{n}, \tag{75}$$

و از جمله،

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{F}) \sim \mathbb{V}. \tag{76}$$

★

این یک‌ریختی‌ها را هم به شکل ـِ تساوی نشان می‌دهیم:

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{F}^n) = \overbrace{\mathbb{V}\times\cdots\times\mathbb{V}}^{n}. \tag{77}$$

xii فضا یِ خارجِ‌قسمت

فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و یک زیرفضا یِ $\mathbb{W}$ از آن را در نظر بگیرید. در فضا یِ $\mathbb{V}$ این رابطه را تعریف می‌کنیم.

$$v_1 \overset{\mathbb{W}}{\cong} v_2 \Leftrightarrow (v_1 - v_2) \in \mathbb{W}. \tag{78}$$

ممکن است برای ساده‌گی نماد ـِ $\mathbb{W}$ را هم از نماد ـِ رابطه یِ بالا حذف کنیم. به‌ساده‌گی تحقیق می‌شود

قضیه یِ 40: رابطه یِ $\overset{\mathbb{W}}{\cong}$ یک رابطه یِ هم‌ارزی است.

★

بنابراین این رابطه $\mathbb{V}$ را به رده‌ها یِ هم‌ارزی افراز می‌کند. هر عضو ـِ $\mathbb{V}$ مثل ـِ v عضو ـِ یک ی و تنها یک ی از این رده‌ها است. رده یِ متناظر با این عضو را با $[v]$ نشان می‌دهیم:

$$[v_1] = [v_2] \Leftrightarrow (v_1 - v_2) \in \mathbb{W}. \tag{79}$$

هم‌چنین روشن است که

$$[0] = \mathbb{W}. \tag{80}$$

مجموعه یِ این رده‌ها یِ هم‌ارزی را با $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$، یا با $\mathbb{V}/\mathbb{W}$ نمایش می‌دهند. برا یِ این مجموعه (با همان ـِ میدان ـِ $\mathbb{F}$، میدان ـِ فضا یِ $\mathbb{V}$) دو عمل ـِ جمع و ضرب تعریف می‌کنیم که آن را به فضا یِ خطی تبدیل کند:

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2], \tag{81}$$

و

$$a[v_1] := [a\, v_1]. \tag{82}$$

$[v]$ خود ـِ v را به طور ـِ یک‌تا مشخص نمی‌کند. بنابراین باید نشان دهیم عمل‌ها یِ بالا خوش‌تعریف اند، یعنی طرف ـِ راست ـِ رابطه‌ها یِ بالا به این بسته‌گی ندارد که کدام عضو ـِ رده‌ها یِ هم‌ارزی را بگیریم:

قضیه یِ 41: اگر

$$[v_1] = [v_1'], \qquad [v_2] = [v_2'], \tag{83}$$

آن‌گاه

$$[a_1\, v_1 + a_2\, v_2] = [a_1\, v_1' + a_2\, v_2']. \tag{84}$$

اثبات: داریم

$$(a_1\, v_1' + a_2\, v_2') - (a_1\, v_1 + a_2\, v_2) = a_1(v_1' - v_1) + a_2(v_2' - v_2), \tag{85}$$

که نشان می‌دهد طرف ـِ چپ عضو ـِ $\mathbb{W}$ است.

■

پس فرق ی نمی‌کند کدام عضو ـِ رده یِ هم‌ارزی را بگیریم، نتیجه یِ طرف ـِ راست ـِ (81) و (82) یکی است. تحقیق ـِ ویژه‌گی‌ها یِ فضا یِ خطی با این عمل‌ها هم بسیار ساده است.

نماد ـِ $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ پیش‌نهاد می‌کند $\mathbb{V}$ را می‌شود به شکل ـِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ $\mathbb{W}$ و $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ نوشت. اما توجه کنید که $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ نیست. هر یک از اعضا یِ $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ زیرمجموعه یِ $\mathbb{V}$ اند نه عضو ـِ $\mathbb{V}$. با این وجود راه ی هست که $\mathbb{V}$ را به شکل ـِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ $\mathbb{W}$ و یک زیرفضا یِ دیگر ـِ شبیه ـِ $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ بنویسیم. به زبان ـِ دقیق، شبیه یعنی یک‌ریخت.

قضیه یِ 42: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، و $\mathbb{W}$ یک زیرفضا یِ آن است. در این صورت هر زیرفضا یِ $\mathbb{V}'$ از $\mathbb{V}$ که

$$\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{V}' \tag{86}$$

را بر آورد، با $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ یک‌ریخت است. اگر $\mathbb{W}$ در $\mathbb{V}$ جداشدنی باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}'$ ی هست که (86) را بر آورد. از جمله، اگر بُعد ـِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد، آن‌گاه حکم ـِ قبل برقرار است و

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}). \tag{87}$$

اثبات: وجود ـِ $\mathbb{V}'$ با ویژه‌گی یِ (86) نتیجه یِ تعریف ـِ جداشدنی‌بودن ـِ $\mathbb{W}$ است. می‌خواهیم نشان دهیم $\mathbb{V}'$ با فضا یِ خارجِ‌قسمت یک‌ریخت است. برا یِ این‌کار نگاشت ـِ خطی یِ زیر را تعریف می‌کنیم.

$$T : \mathbb{V}' \to (\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}), \qquad T(v') = [v']. \tag{88}$$

این نگاشت یک‌به‌یک است، چون از $T(v') = 0$ نتیجه می‌شود $[v'] = 0$، و این یعنی $v' \in \mathbb{W}$. از این‌جا نتیجه می‌شود $v' = 0$. این نگاشت در $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ پوشا هست. چون برا یِ هر v در $\mathbb{V}$ داریم

$$v = v' + w, \qquad v' \in \mathbb{V}',\ w \in \mathbb{W}, \tag{89}$$

و

$$\begin{aligned} [v] &= [v' + w], \\ &= [v'], \\ &= T(v'). \end{aligned} \tag{90}$$

پس $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ با $\mathbb{V}'$ یک‌ریخت است.

■

این قضیه ضمناً معنی یِ $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ را هم روشن‌تر می‌کند: اگر از $\mathbb{V}$ راستاهای مربوط به $\mathbb{W}$ را کنار بگذاریم، آن چه باقی می‌ماند شبیه ـِ $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ است. اما توجه کنید که بین ـِ $\mathbb{V}'$ (آن زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ که شبیه ـِ $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ است) و $\mathbb{V} \ominus \mathbb{W}$ فرق ـِ مهم ی هست: با معلوم‌بودن ـِ

$\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$، فضا یِ خارجِ‌قسمت کاملاً معین است، اما زیرفضا یی که حاصلِ‌جمع ِ مستقیم َ ش با $\mathbb{W}$ همان $\mathbb{V}$ شود یک‌تا نیست. مثلاً $\mathbb{V}$ را یک فضا یِ سه‌بُعدی با پایه یِ $\{e_1, e_2, e_3\}$ بگیرید. هم‌چنین بگیرید $\mathbb{W} = \text{span}\{e_2, e_3\}$. زیرفضا یِ $\mathbb{V}' := \text{span}\{e_1\}$ این ویژه‌گی را دارد که حاصلِ‌جمع ِ مستقیم َ ش با $\mathbb{W}$ خود ِ $\mathbb{V}$ می‌شود. اما به‌ساده‌گی دیده می‌شود مثلاً زیرفضا یِ $\mathbb{V}'' := \text{span}\{e_1 + e_2\}$ هم این ویژه‌گی را دارد.

xiii تبدیل ِ هم‌ریختی به یک‌ریختی

نگاشت ِ خطی یِ $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ را در نظر بگیرید. دیدیم فضاها یِ $\mathbb{V}$ و $\text{img}(T)$ یک‌ریخت اند، اگر این نگاشت یک‌به‌یک باشد. در حالت ِ کلی (که T لزوماً یک‌به‌یک نیست) قضیه یِ زیر را داریم

قضیه یِ 43: اگر T یک نگاشت ِ خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{V} \ominus \ker(T)$ با $\text{img}(T)$ یک‌ریخت است.

اثبات: یک راه ِ ساده یِ اثبات ِ این قضیه استفاده از $\dim(\mathbb{V}) = \text{rank}(T) + \text{null}(T)$ (قضیه یِ 29) است. از آن نتیجه می‌شود بُعد ِ $\mathbb{V} \ominus \ker(T)$ با بُعد ِ $\text{img}(T)$ برابر است. پس این دوفضا یک‌ریخت اند. اما فرض ِ قضیه یِ 29 این است که بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان است. برا یِ اثبات ِ قضیه در حالت ِ کلی، یک یک‌ریختی بین ِ $\mathbb{V} \ominus \ker(T)$ و $\text{img}(T)$ می‌سازیم. نگاشت ِ

$$\tilde{T} : \mathbb{V} \ominus \ker(T) \to \mathbb{W}, \qquad \tilde{T}([v]) := T(v) \tag{91}$$

را در نظر بگیرید. ابتدا باید نشان دهیم رابطه یِ بالا خوش‌تعریف است. برا یِ این کار باید نشان داد

$$(v - v') \in \ker(T) \Rightarrow T(v) = T(v'). \tag{92}$$

اما این نتیجه یِ مستقیم ِ خطی‌بودن ِ T و تعریف ِ هسته یِ T است. اثبات ِ خطی‌بودن ِ $\tilde{T}$ هم بسیار ساده است. ضمناً از تعریف ِ (91) به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\text{img}(\tilde{T}) = \text{img}(T). \tag{93}$$

آن‌چه می‌ماند اثبات ِ یک‌به‌یک‌بودن ِ $\tilde{T}$ است. این هم ساده است. چون اگر $\tilde{T}([v])=0$، آن‌گاه $v\in\ker(T)$، و از آن‌جا $[v]=0$. پس $\tilde{T}$ یک یک‌ریختی است، که تصویر َش $\operatorname{img}(T)$ است.

■

به این ترتیب اگر خود ِ T هم یک‌ریختی نباشد، $\tilde{T}$ یک‌ریختی است.

xiv وارون ِ راست ِ یک نگاشت ِ خطی

فرض کنید نگاشت ِ خطی ِ T با دامنه ‌ی $\mathbb{V}$ لزوماً یک‌به‌یک نباشد. در این صورت نمی‌شود برا ی آن نگاشت ِ وارون تعریف کرد. قضیه ‌ی زیر نشان می‌دهد با یک شرط ِ اضافی، نگاشت ِ خطی یی هست که اگر از راست در T ضرب شود، نگاشت ِ همانی به دست می‌آید.

قضیه ‌ی 44: فرض کنید T یک نگاشت ِ خطی است. در این صورت T هسته‌جدا است، اگر و تنها اگر یک نگاشت ِ $S\in\mathcal{LF}[\operatorname{dom}(T);\operatorname{img}(T)]$ باشد که

$$T\,S=1_{\operatorname{img}(T)}. \tag{94}$$

نگاشت ِ S یک‌به‌یک است. نگاشت ِ S یک‌تا است، اگر و تنها اگر $\ker(T)=\{0\}$. هم‌چنین، تصویر ِ S در دامنه ‌ی T جداشدنی است و

$$\operatorname{dom}(T)=\operatorname{img}(S)\oplus\ker(T). \tag{95}$$

برا ی دو نگاشت ِ S و S' با ویژه‌گی ‌ی بالا، تصویر ِ $S'-S$ زیرمجموعه ‌ی هسته ‌ی T است.

اثبات: فرض کنید T هسته‌جدا است. دیدیم به هر حال نگاشت ِ $\tilde{T}:\operatorname{dom}(T)\ominus\ker(T)\to\operatorname{img}(T)$ با ضابطه ‌ی (91) یک‌ریختی یی است که در $\operatorname{img}(T)$ پوشا است. وارون ِ این نگاشت $(\tilde{T})^{-1}:\operatorname{img}(T)\to\operatorname{dom}(T)\ominus\ker(T)$ است. اما یک زیرفضا ‌ی $\mathbb{V}'$ از $\operatorname{dom}(T)$ هست که با $\operatorname{dom}(T)\ominus\ker(T)$ یک‌ریخت است و حاصل‌ِجمع ِ مستقیم َش با $\ker(T)$ خود ِ $\operatorname{dom}(T)$ است (قضیه ‌ی 42). در واقع نگاشت ِ خطی ‌ی

$$Q:\mathbb{V}'\to\operatorname{dom}(T)\ominus\ker(T),\qquad Q(v):=[v] \tag{96}$$

یک یک‌ریختی بینِ $\mathbb{V}'$ و $\mathrm{dom}(T) \ominus \ker(T)$ است. حالا نگاشت ِ

$$S : \mathrm{img}(T) \to \mathbb{V}', \qquad S := Q^{-1}\,(\tilde{T})^{-1} \tag{97}$$

را در نظر بگیرید. به‌ساده‌گی می‌شود ثابت کرد (94) برقرار است. کافی است توجه کنید به ازا یِ هر $w \in \mathrm{img}(T)$، بردار ی مثل ِ $v \in \mathrm{dom}(T)$ هست که اثر ِ T رو یِ آن می‌شود w:

$$T(v) = w. \tag{98}$$

داریم

$$\begin{aligned} \tilde{T}([v]) &= T(v) \\ &= w \end{aligned} \tag{99}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$(\tilde{T})^{-1}(w) = [v]. \tag{100}$$

حالا توجه کنید که

$$Q^{-1}([v]) =: v', \tag{101}$$

که در آن $v' \in \mathbb{V}'$، و

$$[v'] = [v]. \tag{102}$$

اما نتیجه یِ این رابطه آن است که

$$T(v') = T(v). \tag{103}$$

پس $(T\,S)$ واقعاً نگاشت ِ همانی یِ فضا یِ $\mathrm{img}(T)$ است.

حالا فرض کنید (94) برقرار است. بردار ِ دل‌بخواه ِ $v \in \mathrm{dom}(T)$ را می‌شود چنین نوشت:

$$v = S\,T\,v + (v - S\,T\,v). \tag{104}$$

بردار ـِ اول ـِ طرف ـِ راست در $\mathrm{img}(S)$، و بردار ـِ دوم ـِ طرف ـِ راست در $\ker(T)$ است. اشتراک ـِ $\ker(T)$ با $\mathrm{img}(S)$ هم $\{0\}$ است، چون هر بردار ـِ $\mathrm{img}(S)$ را می‌شود به شکل ـِ $S\,w$ نوشت، که $w \in \mathrm{img}(T)$. اثر ـِ T بر این بردار خود ـِ w می‌شود. پس $S\,w$، اگر در $\ker(T)$ باشد صفر است. از ترکیب ـِ (104) با این گزاره، نتیجه می‌شود T هسته‌جدا است. در ضمن خود ـِ (95) هم نتیجه می‌شود، که نشان می‌دهد تصویر ـِ S در دامنه یِ T جداشدنی است.

S با ویژه‌گی یِ بالا یک‌به‌یک است. در واقع با ضرب ـِ T از چپ در $S(w_1) = S(w_2)$ نتیجه می‌شود $w_1 = w_2$. یعنی برابری یِ $S(w_1)$ و $S(w_2)$ برابری یِ w_1 و w_2 را نتیجه می‌دهد.

آیا نگاشت ـِ خطی یِ S با این ویژه‌گی یک‌تا است؟ نه. به‌ساده‌گی دیده می‌شود اگر $S' : \mathrm{img}(T) \to \mathrm{dom}(T)$ نگاشت ـِ خطی یِ دیگر ی باشد و $\mathrm{img}(S' - S) \subseteq \ker(T)$، آن‌گاه $(T\,S) = (T\,S')$. پس کافی است به نگاشت ـِ خطی یِ S یک نگاشت ـِ خطی یِ دیگر با دامنه یِ $\mathrm{img}(T)$ بیفزاییم، که تصویر ـَ ش زیرمجموعه یِ هسته یِ T باشد؛ نگاشتِ جدید ی به دست می‌آید که ترکیب ـِ T با آن هم همانی است. در واقع به‌ساده‌گی ثابت می‌شود اگر نگاشت‌ها یِ خطی یِ S و S'، هردو این ویژه‌گی را داشته باشند که ترکیب ـِ T با آن‌ها همانی باشد، آن‌گاه ـِ تصویر ـِ تفاضل ـِ این دونگاشت زیرمجموعه یِ هسته یِ T است.

■

به نگاشت ـِ خطی یِ S با ویژه‌گی یِ بالا، وارون ـِ راست ـِ T می‌گویند. نتیجه یِ قضیه یِ بالا آن است که هر نگاشت ـِ خطی یِ هسته‌جدا وارون ـِ راست دارد و برعکس.

به روش ـِ ساختن ـِ وارون ـِ راست ـِ T دقت کنید. در این روش از فضا یِ خارجِ‌قسمت استفاده کردیم. می‌شد مستقیماً $\mathbb{V}'$ را به کار برد. در واقع اگر T' را $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}')$ بگیریم:

$$T' : \mathbb{V}' \to \mathrm{img}(T), \qquad T'(v) := T(v), \tag{105}$$

به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد این نگاشت خطی و یک‌به‌یک است. برا یِ اثبات ـِ یک‌به‌یک‌بودن کافی است توجه کنید از $T'(v) = 0$ نتیجه می‌شود $v \in \ker(T)$، اما $\mathbb{V}' \cap \ker(T) = \{0\}$، پس $v = 0$. تصویر ـِ این نگاشت هم همان تصویر ـِ T است:

$$\forall\, w \in \mathrm{img}(T)\ :\ [\exists\, v \in \mathrm{dom}(T) \mid T(v) = w]. \tag{106}$$

اما چون $\mathrm{dom}(T) = \mathbb{V}' \oplus \ker(T)$، v را می‌شود به شکل ـِ $v = v' + u$ نوشت، که $v' \in \mathbb{V}'$ و $u \in \ker(T)$. از این‌جا نتیجه می‌شود $T'(v') = w$. حالا کافی است S را وارون ـِ T' بگیرید. به‌ساده‌گی معلوم می‌شود $T\,S = 1_{\mathrm{img}(T)}$. در واقع علت ـِ این که S یک‌تا نیست، این است که $\mathbb{V}'$ (و در نتیجه T') یک‌تا نیست.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 45:

a اگر نگاشت ـِ T یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه ـِ وارون ـِ راست ـِ T یک‌تا است (و همان وارون ـِ T است).

b اگر وارون ـِ راست ـِ نگاشت ـِ خطی یِ T با دامنه یِ باپایان‌بُعدی یک‌تا باشد، آن‌گاه ـِ T یک‌به‌یک است.

c اگر نگاشت‌ها یِ خطی یِ T و T'، هردو وارون ـِ راست داشته باشند، و $\mathrm{img}(T) = \mathrm{dom}(T')$، آن‌گاه $T'\,T$ هم وارون ـِ راست دارد. اگر S یک وارون ـِ راست ـِ T و S' یک وارون ـِ راست ـِ T' باشد، آن‌گاه $S\,S'$ یک وارون ـِ راست ـِ $T'\,T$ است.

★

IV

ویژه‌مقدار و ویژه‌بردار ـِ یک نگاشت ـِ خطی

xv تابع ـِ چندجمله‌ای یِ یک نگاشت ـِ خطی

یک چندجمله‌ای یِ درجه یِ n مثل ـِ P با $(n+1)$ عضو ـِ a_0 تا a_n از میدان ـِ $\mathbb{F}$ مشخص می‌شود. این چندجمله‌ای به عضو ـِ z از میدان ـِ $\mathbb{F}$ عضو ـِ

$$P(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i\, z^i \tag{107}$$

را نسبت می‌دهد. یک چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته مثل ـِ P' با اعضا یِ a_i از میدانِ $\mathbb{F}$ تعریف می‌شود که $m \le i \le n$. در این‌جا m و n عددها یِ صحیح ـِ نه لزوماً نامنفی اند. این چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته به هر عضو ـِ $z \neq 0$ از میدان ـِ $\mathbb{F}$ عضو ـِ

$$P'(z) := \sum_{i=m}^{n} a_i\, z^i \tag{108}$$

را نسبت می‌دهد.

نگاشت ـِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ است. چندجمله‌ای یِ P با رابطه یِ (107) تعریف شده است. به عبارت ـِ

$$P(T) := \sum_{i=0}^{n} a_i\, T^i \tag{109}$$

یک چند جمله‌ای یِ درجه یِ n از T می‌گویند. در این‌جا تعریف کرده ایم

$$T^0 := 1_{\mathbb{V}}. \tag{110}$$

روشن است که چون تصویر ِ T زیرمجموعه یِ دامنه یِ T است، هر توان ِ طبیعی یی از T خوش‌تعریف است. برا یِ ساده‌گی، معمولاً به جا یِ $a_0\,1_{\mathbb{V}}$ هم می‌نویسند a_0. اگر T در دامنه اَش وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه می‌شود یک چندجمله‌ای یِ تعمیم یافته از آن هم تعریف کرد. متناظر با P' در رابطه یِ (108) داریم

$$P'(T) := \sum_{i=m}^{n} a_i\,T^i. \tag{111}$$

ممکن است در رابطه یِ بالا توان‌ها یِ منفی یِ T ظاهر شود. این‌ها چنین تعریف می‌شوند.

$$T^k := (T^{-1})^{-k}, \quad k < 0. \tag{112}$$

دو نگاشت ِ T_1 و T_2 در $\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. جابه‌جاگر ِ این دونگاشت را با $[T_1, T_2]$ نشان می‌دهند و آن را چنین تعریف می‌کنند.

$$[T_1, T_2] := T_1\,T_2 - T_2\,T_1. \tag{113}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود اگر $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، آن‌گاه

$$[T, T] = 0. \tag{114}$$

به علاوه، به‌ساده‌گی ثابت می‌شود

قضیه یِ 46: اگر T_1 و T_2 در $\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ باشند و جابه‌جاگر ِ T_1 با T_2 صفر باشد، آن‌گاه جابه‌جاگر ِ هر چندجمله‌ای از T_1 با هر چند جمله‌ای از T_2 صفر است. اگر هر یک از این نگاشت‌ها در $\mathbb{V}$ وارون‌پذیر باشد، این حکم برا یِ چندجمله‌ای‌ها یِ تعمیم‌یافته از آن هم درست است.

اثبات: کافی است نشان دهیم T_1 با هر توان ِ صحیح ی از T_2، و در نتیجه با هر چندجمله‌ای از آن جابه‌جا می‌شود. این کار با یک استقرا یِ ساده رو یِ نما یِ T_2 ممکن است. بعد استقرا یِ مشابه ی را برا یِ نما یِ T_1 به کار می‌بریم. برا یِ توان‌ها یِ منفی یِ مثلاً T_1 هم، کافی است نشان دهیم وارون ِ T_1 هم با T_2 جابه‌جا می‌شود. این حکم با

ضرب‌کردن ـ $[T_1, T_2]$ از دوطرف در وارون ـ T_1 نتیجه می‌شود.

■

یک نتیجه یِ این حکم آن است که هر دوچندجمله‌ای (یا دوچندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته در صورت ـ وجود) از نگاشت ـ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ با هم جابه‌جا می‌شوند.

می‌گوییم نگاشت ـ $N \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان است، اگر عدد ـ طبیعی یی مثل ـ n باشد که

$$N^n = 0. \tag{115}$$

به کوچک‌ترین مقدار ـ n با این ویژه‌گی پوچ‌توانی یِ N می‌گوییم و آن را با $\mathrm{np}(N)$ نشان می‌دهیم. روشن است که

قضیه یِ 47: اگر N یک نگاشت ـ خطی یِ پوچ‌توان باشد و $n \geq \mathrm{np}(N)$، آن‌گاه $N^n = 0$.

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 48: فرض کنید $N_1 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $N_2 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ نگاشت‌ها یی پوچ‌توان اند که با هم جابه‌جا می‌شوند، و a_1 و a_2 اسکالرها یی دل‌بخواه اند. در این صورت $(a_1\,N_1 + a_2\,N_2)$ پوچ‌توان است و

$$\mathrm{np}(a_1\,N_1 + a_2\,N_2) \leq \mathrm{np}(N_1) + \mathrm{np}(N_1) - 1. \tag{116}$$

اثبات: بسط ـ $(a_1\,N_1 + a_2\,N_2)^{\mathrm{np}(N_1)+\mathrm{np}(N_2)-1}$ را در نظر بگیرید. در هر جمله یِ این بسط، یا نما یِ N_1 ناکوچک‌تر از $\mathrm{np}(N_1)$ است یا نما یِ N_2 ناکوچک‌تر از $\mathrm{np}(N_2)$ است. پس همه یِ جمله‌ها یِ این بسط صفر اند و در نتیجه

$$(a_1\,N_1 + a_2\,N_2)^{\mathrm{np}(N_1)+\mathrm{np}(N_2)-1} = 0. \tag{117}$$

■

قضیه یِ 49: فرض کنید $N \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، بُعد ـ $\mathbb{V}$ باپایان است، و به‌ازا یِ هر $v \in \mathbb{V}$ عدد ـ طبیعی یی مثل ـ n هست که $N^n\,v = 0$. در این صورت N پوچ‌توان است و پوچ‌توانی یِ آن نابزرگ‌تر از بُعد ـ $\mathbb{V}$ است.

اثبات: روشن است که

$$\ker(N^l) \subseteq \ker(N^{l'}), \quad l \le l'. \tag{118}$$

نشان می‌دهیم اگر $\ker(N^k) = \ker(N^{k+1})$، آن‌گاه به ازا یِ هر عدد ِ مثبت ِ n داریم $\ker(N^k) = \ker(N^{k+n})$. اثبات با استقرا رو یِ n انجام می‌شود. $n = 1$ فرض ِمان است. فرض می‌کنیم حکم برا یِ $n = m$ درست است. حالا بردار ِ $v \in \ker(N^{k+m+1})$ را در نظر بگیرید. داریم

$$N^{k+m+1}\, v = 0. \tag{119}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$N\, v \in \ker(N^{k+m}), \tag{120}$$

و با توجه به فرض ِ استقرا

$$N\, v \in \ker(N^k). \tag{121}$$

پس

$$v \in \ker(N^{k+1}), \tag{122}$$

و چون $\ker(N^k) = \ker(N^{k+1})$،

$$v \in \ker(N^k). \tag{123}$$

به این ترتیب

$$\ker(N^{k+m+1}) \subseteq \ker(N^k). \tag{124}$$

از این رابطه و رابطه یِ (118) نتیجه می‌شود

$$\ker(N^{k+m+1}) = \ker(N^k). \tag{125}$$

از رابطه یِ (118) ضمناً دیده می‌شود $\mathrm{null}(N^l)$ نسبت به l نانزولی است. با یک استقرا یِ ساده می‌شود نشان داد اگر $\ker(N^l) \subset \ker(N^{l+1})$، آن‌گاه $\mathrm{null}(N^{l+1}) \ge l + 1$. به این ترتیب، روشن است که نمی‌شود $\ker(N^l) \subset \ker(N^{l+1})$ برا یِ همه یِ l ها برقرار باشد

(چون نمی‌شود بُعد ـِ هسته‌ها از بُعد ـِ $\mathbb{V}$ بیش‌تر شود). فرض کنید کوچک‌ترین مقدار ـِ l که به ازا یِ آن $\ker(N^l) = \ker(N^{l+1})$ برقرار می‌شود k باشد. به‌ساده‌گی معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} \ker(N^l) &\subset \ker(N^{l+1}), \quad l < k, \\ \ker(N^l) &= \ker(N^{l+1}), \quad l \geq k. \end{aligned} \tag{126}$$

از این‌جا

$$\ker(N^l) \subseteq \ker(N^k), \quad \forall\, l. \tag{127}$$

حالا توجه کنید که طبق ـِ فرض ـِ قضیه، هر بردار ی از $\mathbb{V}$ در هسته یِ توان ی از N است، که طبق ـِ رابطه یِ بالا زیرمجموعه یِ هسته یِ N^k است. پس

$$\mathbb{V} = \ker(N^k), \tag{128}$$

که می‌گوید N پوچ‌توان است و پوچ‌توانی یِ آن k است. به‌علاوه، پوچی یِ N^k (که بُعد ـِ $\mathbb{V}$ است) ناکوچک‌تر از k است. پس

$$\mathrm{np}(N) \leq \dim(\mathbb{V}). \tag{129}$$

■

قضیه یِ 50: فرض کنید $N \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. داریم

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ \mathrm{null}(N^n) \leq n, \tag{130}$$

اگر و تنها اگر

$$\mathrm{null}(N) \leq 1. \tag{131}$$

اثبات: این که (130) رابطه یِ (131) را نتیجه می‌دهد بدیهی است. برا یِ اثبات ـِ عکس ـِ آن، بردار ی مثل ـِ $v \in \ker(N^{n+1})$ را در نظر بگیرید. داریم

$$N(N^n\, v) = 0, \tag{132}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$N^n\,v \in \ker(N). \tag{133}$$

اما هسته ی ِ N دستِ‌بالا یک‌بُعدی است. پس هر بردار ی در آن را می‌شود بر حسب ِ بردار ِ ثابت ی مثل ِ u بسط داد. یعنی

$$N^n\,v = \alpha\,u, \tag{134}$$

که در آن α یک اسکالر ِ دل‌بخواه است. (اگر هسته ی ِ N بدیهی باشد، $u = 0$.) حالا دو حالت در نظر می‌گیریم. ممکن است معادله ی ِ

$$N^n\,w = u, \tag{135}$$

برا ی ِ w جواب داشته باشد. در این صورت یک جواب ِ خاص ِ آن w_1 است، و از این‌جا دیده می‌شود

$$v = v' + \alpha\,w_1, \tag{136}$$

که v' عضو ِ هسته ی ِ N^n است. این یعنی هسته ی ِ N^{n+1} حاصل‌ِجمع ِ هسته ی ِ N^n و یک فضا ی ِ یک‌بُعدی است، پس بُعد َ ش دستِ‌بالا یک ی بیش از بُعد ِ هسته ی ِ N^n است. ممکن است (135) برا ی ِ w جواب نداشته باشد. در این صورت

$$N^n\,v = 0, \tag{137}$$

یعنی v عضو ِ هسته ی ِ N^n است، پس بُعد ِ هسته ی ِ N^{n+1} نابیش‌تر از بُعد ِ هسته ی ِ N^n است. پس به‌طور ِ کلی،

$$\mathrm{null}(N^{n+1}) \le \mathrm{null}(N^n) + 1. \tag{138}$$

حالا می‌شود با یک استقرا ی ِ ساده اثبات را کامل کرد.

■

یک نتیجه ی ِ ساده ی ِ قضیه‌ها ی ِ 49 و 50 این است که

قضیه ی ِ 51: فرض کنید نگاشت ِ $N \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان، و بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان است. در این صورت پوچ‌توانی ی ِ N برابر با بُعد ِ $\mathbb{V}$ است، اگر و تنها اگر پوچی ی ِ N یک باشد.

★

می‌گوییم نگاشت ِ $\Pi \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اَفکَنِش (مُصَوِر) است، اگر

$$\Pi^2 = \Pi. \tag{139}$$

قضیه یِ 52: اگر نگاشت ِ $\Pi \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ افکنش ِ باشد، آن‌گاه

a $(1-\Pi)$ هم افکنش است.

b $\Pi(1-\Pi) = (1-\Pi)\Pi = 0.$

c $\mathrm{res}[\Pi;\mathrm{img}(\Pi)]$ همانی، و $\mathrm{res}[\Pi;\ker(\Pi)]$ صفر است.

d $\mathrm{img}(\Pi) = \ker(1-\Pi).$

e $\mathrm{img}(1-\Pi) = \ker(\Pi).$

اثبات: داریم

$$\begin{aligned}(1-\Pi)^2 &= 1 - 2\Pi + \Pi^2,\\ &= 1 - 2\Pi + \Pi,\\ &= 1 - \Pi.\end{aligned} \tag{140}$$

این **a** را ثابت می‌کند. **b** تا **e** هم به‌ساده‌گی از تعریف ِ افکنش نتیجه می‌شوند.

■

قضیه یِ 53: فرض کنید Π_1 تا Π_n افکنش‌ها یی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اند، و به ازا یِ هر i، تصویر ِ Π_i فضا یِ $\mathbb{V}_i$ است. در این صورت گزاره‌ها یِ **a** و **b** هم‌ارز اند.

a مجموع ِ این افکنش‌ها نگاشت ِ همانی است (**a1**)، و حاصلِ‌ضرب ِ هر دوتا یِ متمایز ِشان صفر است (**a2**).

b $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ $\mathbb{V}_i$ ها است (**b1**)، و هسته یِ Π_i حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ $\mathbb{V}_j$ ها یِ دیگر (جز $\mathbb{V}_i$) است (**b2**).

اثبات: فرض کنید **a** بر قرار است. بردار ِ دل‌بخواه ِ $v \in \mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$v=\sum_{i=1}^{n}(\Pi_i\,v). \tag{141}$$

پس v را می‌شود به شکل ِ مجموع ِ n بردار نوشت، که بردار ِ i ُ‌م در $\mathbb{V}_i$ است. حالا فرض کنید

$$\sum_{i=1}^{n}v_i=0, \tag{142}$$

که $v_i\in\mathbb{V}_i$. از این که حاصلِ‌ضرب ِ هر دوافکنش ِ متمایز صفر است، نتیجه می‌شود

$$\Pi_j\,v_i=\delta_{i\,j}\,v_j, \tag{143}$$

که در آن $\delta_{i\,j}$ دلتا یِ کْرُنِکِر است:

$$\delta_{i\,j}:=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}. \tag{144}$$

Π_j را بر (142) اثر می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$v_j=0. \tag{145}$$

پس حاصلِ‌جمع ِ $\mathbb{V}_i$ ها مستقیم است. برا یِ نشان‌دادن ِ **b2** هم بردار ِ v را به شکل ِ (141) می‌نویسیم. دیده می‌شود $\Pi_i\,v=0$، اگر و تنها اگر v برابر با مجموع ِ $\Pi_j\,v$ ها یِ دیگر (با $j\neq i$) باشد. یعنی هسته یِ Π_i حاصلِ‌جمع ِ $\mathbb{V}_j$ ها یِ با $j\neq i$ است. از قسمت ِ قبل هم نتیجه شد این حاصلِ‌جمع مستقیم است.

بر عکس، فرض کنید **b** برقرار است. بردار ِ دل‌بخواه ِ $v\in\mathbb{V}$ را به شکل ِ

$$v=\sum_{i=1}^{n}v_i \tag{146}$$

می‌نویسیم، که در آن به ازا یِ هر i، بردار ِ v_i در $\mathbb{V}_i$ است. Π_j را بر دوطرف ِ این رابطه اثر می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\Pi_j\,v=v_j. \tag{147}$$

پس مجموع ِ این افکنش‌ها نگاشت ِ همانی است. از **b2**، رابطه یِ (143) نتیجه می‌شود، و از ترکیب ِ (143) با (147) هم معلوم می‌شود حاصلِ‌ضرب ِ هر دوتا یِ متمایز ِ این افکنش‌ها صفر است.

■

قضیه‌ها یِ 52 و 53، ضمناً معنی یِ افکنش را هم روشن می‌کنند: قضیه یِ 53 را برا یِ افکنش‌ها یِ Π و $1-\Pi$ به کار می‌بریم. نتیجه می‌شود افکنش هر بردار را رو یِ یک زیرفضا یِ معین می‌افکند (تصویر می‌کند). یعنی متناظر با هر افکنش دو زیرفضا هست که حاصلِ‌جمعِ‌مستقیم ِشان خود ِ فضا است، و افکنش مئلفه یِ بردار در یک ی از این زیرفضاها را صفر می‌کند.

قضیه یِ 54: اگر Π_1 تا Π_n افکنش‌ها یی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ باشند و حاصلِ‌ضرب ِ هر دوتا یِ متمایز ِشان (مستقل از ترتیب ِ این حاصلِ‌ضرب) صفر باشد، آن‌گاه مجموع ِ این افکنش‌ها هم یک افکنش است.

اثبات: کافی است این مجموع را در خود َش ضرب کنیم و از تعریف ِ افکنش و صفربودن ِ حاصلِ‌ضرب ِ افکنش‌ها یِ متمایز استفاده کنیم. نتیجه می‌شود مجذور ِ این مجموع، با خود ِ این مجموع برابر است.

■

با استفاده از قضیه هایِ 52 و 53، به این شکل ِ کلی‌تر ِ قضیه یِ 53 می‌رسیم:

قضیه یِ 55: فرض کنید Π_1 تا Π_n افکنش‌ها یی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اند، و این افکنش‌ها با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت $\mathbb{V}$ را می‌شود به شکل ِ حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ 2^n فضا نوشت، که هر یک تصویر ِ یک ی از افکنش‌ها یِ $\Pi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ است. در این‌جا

$$\Pi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}:=\Pi_1^{\alpha_1}(1-\Pi_1)^{1-\alpha_1}\cdots\Pi_n^{\alpha_n}(1-\Pi_n)^{1-\alpha_n}, \tag{148}$$

و هر یک از α_i ها صفر یا یک اند.

اثبات:

$$1=[\Pi_1+(1-\Pi_1)]\cdots[\Pi_n+(1-\Pi_n)]. \tag{149}$$

طرف ِ راست را بسط می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$1=\sum\nolimits_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}\Pi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}. \tag{150}$$

به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد $\Pi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ ها افکنش اند (مجذور ِشان با خود ِشان برابر است) و حاصلِ‌ضرب ِ هر دوتا یِ متمایز ِشان صفر است. از این‌جا (با استفاده از قضیه یِ 53)

حکم نتیجه می‌شود.
■

xvi ویژه‌مقدار و ویژه‌بردار

نگاشت ـِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم $\mathbb{U} \sqsubseteq \mathbb{V}$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathbb{V}$ تحت ـِ T است، اگر

$$T(\mathbb{U}) \sqsubseteq \mathbb{U}. \tag{151}$$

روشن است که خود ـِ $\mathbb{V}$ و $\{0\}$ زیرفضاها یِ ناوردا یِ T اند. می‌گوییم زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathbb{U}$ نابدیهی است، اگر این زیرفضا نَه خود ـِ $\mathbb{V}$ باشد نَه $\{0\}$، یعنی

$$\{0\} \sqsubset \mathbb{U} \sqsubset \mathbb{V}. \tag{152}$$

نگاشت ـِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید، که $\mathbb{F}$ میدان ـِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است. می‌گوییم $\lambda \in \mathbb{F}$ یک ویژه‌مقدار ـِ T است، اگر نگاشت ـِ $(T-\lambda)$ تکین باشد. اگر λ یک ویژه‌مقدار ـِ T باشد، آن‌گاه بردار ـِ ناصفر ی مثل ـِ $v \in \mathbb{V}$ خواهد بود که

$$T\,v = \lambda\,v. \tag{153}$$

به این بردار یک ویژه‌بردار ـِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ می‌گویند. توجه دارید که بردارها یِ با این ویژه‌گی اعضا یِ ناصفر ـِ $\ker(T-\lambda)$ اند. به $\ker(T-\lambda)$ ویژه‌فضا یِ T متناظر با λ می‌گویند.

از رابطه یِ (153) به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 56: اگر v یک ویژه‌بردار ـِ نگاشت ـِ خطی یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ، و $P(T)$ یک چندجمله‌ای (یا چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته در صورت ـِ وجود) از T باشد، آن‌گاه v یک ویژه‌بردار ـِ $P(T)$ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ $P(\lambda)$ است.

★

اما ممکن است w یک ویژه‌بردار ـِ $P(T)$ باشد و ویژه‌بردار ـِ T نباشد. مثلاً فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، $\{e_1, e_2\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است، و

$$T\,e_1 = e_1, \qquad T\,e_2 = -e_2. \tag{154}$$

روشن است که

$$T^2(e_1 + e_2) = (e_1 + e_2). \tag{155}$$

یعنی $(e_1 + e_2)$ یک ویژه‌بردار ِ T^2 است. اما از استقلال ِ خطی یِ $\{e_1, e_2\}$، به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود $(e_1 + e_2)$ نمی‌تواند ویژه‌بردار ِ T باشد.

فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. به هر بردار ِ ناصفر ی که اثر ِ توان ِ طبیعی یی از $(T - \lambda)$ بر آن صفر باشد، یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ می‌گویند. (λ عضو ِ میدان ِ متناظر با $\mathbb{V}$ است.) روشن است که

قضیه یِ 57: اگر λ ویژه‌مقدار ِ نگاشت ِ خطی یِ T نباشد، بردار ِ ناصفر ی نیست که اثر ِ توان ِ طبیعی یی از $(T - \lambda)$ بر آن صفر شود.

★

به مجموعه یِ همه یِ بردارها یی که اثر ِ دستِ‌کم یک توان ِ صحیح ِ مثبت از $(T - \lambda)$ بر آن‌ها صفر می‌شود، ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ می‌گویند. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 58: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. مجموعه یِ همه یِ بردارها یی که اثر ِ دستِ‌کم یک توان ِ طبیعی از $(T - \lambda)$ بر آن‌ها صفر می‌شود، یک زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است. ویژه‌فضا یِ T متناظر با λ، زیرفضا یِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ است.

★

اثبات ِ قضیه یِ زیر هم بسیار ساده است. کافی است تعریف‌ها را بنویسید.

قضیه یِ 59: اگر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $P(T)$ یک چندجمله‌ای (یا چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته در صورت ِ وجود) از T باشد، $v \in \ker[P(T)]$، و T' نگاشت ِ خطی یی باشد که با T جابه‌جا می‌شود، آن‌گاه $(T'\,v) \in \ker[P(T)]$. از جمله، اگر $P'(T)$ یک چندجمله‌ای (یا چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته در صورت ِ وجود) از T باشد، آن‌گاه $[P'(T)\,v] \in \ker[P(T)]$.

هم‌چنین، اگر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و v برداری در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ باشد، و T' نگاشت ِ خطی یی باشد که با T جابه‌جا شود، آن‌گاه $(T'\,v)$ در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ است. از جمله، اگر $P'(T)$ یک چندجمله‌ای (یا چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته در صورت ِ وجود) از T باشد، آن‌گاه $[P'(T)\,v]$ در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ است.

★

قضیه یِ 60: اگر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و P_1 و P_2 دوچندجمله‌ای باشند که نسبت به هم اول اند، آن‌گاه

$$\ker[P_1(T)] \cap \ker[P_2(T)] = \{0\}. \tag{156}$$

هم‌چنین، اشتراک ِ دو ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با دو عدد ِ متمایز $\{0\}$ است.

اثبات: بردار ِ دل‌بخواه ِ $v \in \{\ker[P_1(T)] \cap \ker[P_2(T)]\}$ را در نظر بگیرید. بزرگ‌ترین شمارنده یِ مشترک ِ دو چندجمله‌ای ِ P_1 و P_2 یک است. پس دو چندجمله‌ای یِ R_1 و R_2 هستند که

$$R_1\,P_1 + R_2\,P_2 = 1. \tag{157}$$

از این‌جا

$$R_1(T)\,P_1(T) + R_2(T)\,P_2(T) = 1. \tag{158}$$

این رابطه را از چپ در v ضرب می‌کنیم. طرف ِ چپ می‌شود صفر و طرف ِ راست می‌شود v.

برا یِ اثبات ِ قسمت ِ آخر حکم، فرض کنید λ_1 و λ_2 دو عدد ِ متمایز ِ اند و v در اشتراک ِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ_1 و λ_2 است. در این صورت عددها یی مثل ِ n_1 و n_2 هستند که

$$(T - \lambda_i)^{n_i}\,v = 0. \tag{159}$$

چندجمله‌ها یِ P_1 و P_2 با $P_i(z) := (z - \lambda_i)^{n_i}$، نسبت به هم اول اند. بقیه یِ اثبات مثل ِ اثبات ِ قسمت ِ قبل است.

■

با استفاده از قضیه یِ بالا می‌شود قضیه یِ قوی‌تر ی هم ثابت کرد.

قضیه یِ 61: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و زیرمجموعه یِ $\{v_1,\dots,v_k\}$ از $\mathbb{V}$ چنان است که

$$\forall\, i\ :\ v_i \in \ker[P_i(T)], \tag{160}$$

که در آن P_i ها چندجمله‌ای‌ها یی اند که دوبه‌دو نسبت به هم اول اند، و هیچ یک از v_i ها هم صفر نیستند. در این صورت $\{v_1,\dots,v_k\}$ خطی‌مستقل است.

هم‌چنین، اگر هر $\{w_1,\dots,w_k\}$ یک زیرمجموعه یِ $\mathbb{V}$ باشد، به ازا یِ همه یِ i ها w_i یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ_i باشد، و λ_i ها متمایز باشند، آن‌گاه $\{w_1,\dots,w_k\}$ خطی‌مستقل است.

اثبات: فرض کنید یک ترکیب ِ خطی از اعضا یِ $\{v_1,\dots,v_k\}$ صفر است:

$$\sum_{i=1}^{k} a^i\, v_i = 0. \tag{161}$$

$P_k(T)$ را از چپ در این عبارت ضرب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{k-1} a^i\, P_k(T)\, v_i = 0. \tag{162}$$

بر اساس ِ قضیه یِ 60، هیچ‌یک از v_i های باقی‌مانده در رابطه یِ بالا در هسته یِ $P_k(T)$ نیستند. پس اثر ِ $P_k(T)$ بر آن‌ها ناصفر است. به‌علاوه، اثر ِ $P_k(T)$ بر v_i بردار ی در $\ker[P_i(T)]$ است (قضیه یِ 59). پس با تعریف ِ

$$v'_i := P_k(T)\, v_i, \quad 1 \le i \le k-1 \tag{163}$$

معلوم می‌شود $\{v'_1,\dots,v'_{k-1}\}$ یک مجموعه شامل ِ $k-1$ بردار ِ ناصفر است، که هر کدام در هسته یِ یک ی از $P_i(T)$ ها یند، و یک ترکیب ِ خطی از آن صفر است. حالا می‌شود اثبات را با استقرا رو یِ k کامل کرد: اگر یک مجموعه ی $(k-1)$ عضوی از این نوع خطی‌مستقل باشد، نتیجه می‌شود یک مجموعه یِ k عضوی از این نوع هم خطی‌مستقل است. درستی یِ حکم برا یِ $k = 2$ هم (که برا یِ تکمیل ِ استقرا لازم است) نتیجه یِ ساده یِ قضیه یِ 60 است.

برا یِ اثبات ـِ قسمت ـِ دوم ـِ حکم هم کافی است توجه کنیم که اگر w_i یک ویژه‌بردار ـِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ_i باشد، آن‌گاه w_i ناصفر است و عدد ی مثل ـِ n_i هست که $w_i \in \ker[(T-\lambda_i)^{n_i}]$.

■

در بخش ـِ قبل دو نوع نگاشت ـِ خطی یِ خاص را تعریف کردیم. با چیزها یی که در این بخش دیدیم، این نتایج به‌ساده‌گی به دست می‌آید.

قضیه یِ 62:

a تنهاویژه‌مقدار ـِ یک نگاشت ـِ پوچ‌توان صفر است.

b همه یِ دامنه یِ یک نگاشت ـِ پوچ‌توان ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ آن متناظر با ویژه‌مقدار ـِ صفر است.

c هر نگاشت ـِ پوچ‌توان دستِ‌کم یک ویژه‌بردار متناظر با ویژه‌مقدار ـِ صفر دارد.

d تنهاویژه‌مقدارها یِ یک افکنش ـِ صفر و یک اند.

e هر افکنش ـِ دامنه یِ خود را به دو زیرفضا تجزیه می‌کند که حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِشان دامنه یِ آن افکنش است. یک ی از این زیرفضاها ویژه‌فضا یِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ صفر ـِ آن افکنش، و دیگر ی ویژه‌فضا یِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ یک ـِ آن است.

★

xvii تجزیه یِ ژُردَن ـِ یک نگاشت ـِ خطی

نگاشت ـِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. آیا زیرفضاها یی مثل ـِ $\mathbb{V}_i$ هستند که حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِشان $\mathbb{V}$ شود و تحدید ـِ T به هر یک از این زیرفضاها مضرب ی از نگاشت ـِ همانی باشد؟ اگر چنین باشد، می‌گویند T شبهِ‌ساده (یا قطری‌شدنی) است. اگر T شبهِ‌ساده باشد، آن‌گاه به ازا یِ هر بردار ـِ $v \in \mathbb{V}$ مجموعه ای مثل ـِ $\{v_i \mid i\}$ هست، که $v_i \in \mathbb{V}_i$، و

$$v = \sum_i v_i, \qquad (164)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$T\,v = \sum_i \lambda_i\,v_i. \qquad (165)$$

($\mathrm{res}(T;\mathbb{V}_i)$ برابر است با $1\,\lambda_i$.) در مورد ـِ فضاها یِ باپایان‌بُعدی، شبهِ‌ساده‌بودن ـِ T یعنی $\mathbb{V}$ پایه ای دارد که همه یِ اعضا یَش ویژه‌بردار ـِ T اند، و می‌گویند T در آن پایه قطری است. شکل ـِ T با این پایه بسیار ساده می‌شود. فرض کنید $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد، چنان که به ازا یِ هر i، e_i یک ویژه‌بردار ـِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_i باشد:

$$T\,e_i = \lambda_i\,e_i. \qquad (166)$$

(λ_i ها لزوماً متمایز نیستند.) هر بردار مثل ـِ v را می‌شود بر حسب ـِ این پایه بسط داد:

$$v = \sum_i v^i\,e_i. \qquad (167)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$T\,v = \sum_i \lambda_i\,v^i\,e_i. \qquad (168)$$

اما همه یِ اعضا یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده نیستند (حتا اگر بُعد ـِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد). یک مثال ـِ ساده برا یِ نگاشت‌ها یِ ناشبهِ‌ساده، نگاشت ـِ پوچ‌توان ـِ $N\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ است که

$$N\,e_1 := 0, \quad N\,e_2 := e_1. \qquad (169)$$

در این‌جا $\mathbb{V}$ یک فضا یِ دوبُعدی، و $\{e_1,e_2\}$ یک پایه یِ آن است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود پایه ای نیست که N در آن قطری باشد. در واقع تنهاویژه‌مقدار ـِ N صفر است. (برا یِ دیدن ـِ این کافی است $N^2=0$ را بر یک ویژه‌بردار ـِ N اثر دهیم.) پس اگر چنین‌پایه ای پیدا می‌شد، N صفر می‌بود، در حال ی که N صفر نیست. به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد یک نگاشت ـِ پوچ‌توان شبهِ‌ساده است، اگر و تنها اگر صفر باشد.

قضیه یِ زیر، یک شرط ـِ لازم برا یِ شبهِ‌ساده‌بودن ـِ یک نگاشت ـِ خطی است.

قضیه یِ 63: فرض کنید نگاشت ِ $S\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده است. در این صورت همه یِ ویژه‌بردارها یِ تعمیم‌یافته یِ S ویژه‌بردار ِ S اند (یا همه یِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ S ویژه‌فضا یِ S اند).

اثبات: v را یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ S متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ_i می‌گیریم. چون S شبهِ‌ساده است، بردارها یی مثل ِ v_j هستند که

$$v=\sum\nolimits_j v_j, \tag{170}$$

و

$$S\,v_j=\lambda_j\,v_j, \tag{171}$$

که در آن λ_j ها ویژه‌مقدارها یِ متمایز ِ S اند. v_j ها یِ با $i\neq j$، و (v_i-v) در ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ متمایز ِ S اند. پس بنا بر قضیه یِ 61، همه پِشان صفر اند. یعنی $v=v_i$، که می‌گوید v ویژه‌بردار ِ S متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ_i است.

■

توجه کنید که این که همه یِ ویژه‌بردارها یِ تعمیم‌یافته یِ یک نگاشت ِ خطی ویژه‌بردار باشند، برا یِ شبهِ‌ساده‌بودن ِ آن نگاشت کافی نیست، حتا در فضاها یِ باپایان‌بُعدی. یک مثال نگاشت ِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ با

$$T\,e_1:=e_2,\quad Te_2:=-e_1,\quad Te_3=e_3 \tag{172}$$

است، که $\mathbb{V}$ یک فضا یِ سه‌بُعدی با میدان ِ $\mathbb{R}$، و $\{e_1,e_2,e_3\}$ یک پایه یِ آن است. این نگاشت فقط یک ویژه‌مقدار دارد (1) و متناظر با این ویژه‌مقدار هم فقط یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته دارد، که ضمناً ویژه‌بردار ِ آن هم هست (e_3). اما این نگاشت شبهِ‌ساده نیست. اگر میدان ِ $\mathbb{V}$ را $\mathbb{C}$ می‌گرفتیم و همان تعریف ِ (172) را به کار می‌بردیم، آن وقت T شبهِ‌ساده می‌بود.

قضیه یِ 64: فرض کنید نگاشت ِ $S\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده و ناتکین است. در این صورت نگاشت ِ شبهِ‌ساده یِ $S^{-1}\,\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هست که

$$\begin{aligned} S\,S^{-1}&=1_{\mathbb{V}},\\ S^{-1}\,S&=1_{\mathbb{V}}. \end{aligned} \tag{173}$$

اثبات: کافی است ویژه‌فضاها یِ S^{-1} را همان ویژه‌فضاها یِ S، و ویژه‌مقدار ـِ S^{-1} متناظر با هر ویژه‌فضا را وارون ـِ ویژه‌مقدار ـِ S متناظر با آن ویژه‌فضا بگیریم.
■

در باقی‌مانده یِ این بخش، هدف یافتن ـِ شکل ـِ ساده ای برا یِ نگاشت‌ها یِ خطی است. در واقع می‌خواهیم یک نگاشت ـِ خطی را (در صورت ـِ امکان) بر حسب ـِ یک نگاشت ـِ پوچ‌توان و یک نگاشت ـِ شبهِ‌ساده بنویسیم.

قضیه یِ 65: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و

$$P(T) = 0, \tag{174}$$

که P یک چندجمله ای به شکل ـِ

$$P(z) = \prod_i P_i(z) \tag{175}$$

است. در این‌جا P_i ها متمایز، و چندجمله‌ها یی اند که دوبه‌دو نسبت به هم اول اند. در این صورت هر ویژه‌مقدار ـِ T یک ریشه یِ P است، $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ فضاها یِ $\mathbb{V}_i := \ker[P_i(T)]$ است، و افکنش‌ها یِ Π_i ی هستند با این ویژه‌گی‌ها.

a هر یک از این افکنش‌ها یک چندجمله‌ای از T است.

b حاصلِ‌ضرب ـِ هر دوافکنش ـِ متمایز از این مجموعه صفر است.

c مجموع ـِ این افکنش‌ها نگاشت ـِ همانی یِ $\mathbb{V}$ است.

d تصویر ـِ Π_i برابر با $\mathbb{V}_i$ است، و هسته یِ هر یک از این افکنش‌ها حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ تصویر ـِ افکنش‌ها یِ دیگر است.

هم‌چنین، اگر λ یک ریشه یِ m گانه یِ P باشد، آن‌گاه هسته یِ $(T-\lambda)^m$ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ است.

اثبات: فرض کنید v یک ویژه‌بردار ـِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ است. در این صورت $P(T)\,v = P(\lambda)\,v$، و برا یِ این که این عبارت صفر باشد، λ باید یک ریشه یِ P باشد. چندجمله‌ای‌ها یِ Q_j با

$$Q_j(z) := \prod_{i \neq j} P_i(z) \tag{176}$$

را در نظر بگیرید. بزرگ‌ترین شمارنده یِ مشترک ِ این چندجمله‌ای ها 1 است. پس چندجمله‌ای‌ها یِ R_j ی هستند که

$$\sum_j R_j\,Q_j = 1, \tag{177}$$

و در نتیجه

$$\sum_j R_j(T)\,Q_j(T) = 1, \tag{178}$$

نگاشت‌ها یِ خطی یِ Π_j با

$$\Pi_j := R_j(T)\,Q_j(T) \tag{179}$$

را در نظر بگیرید. هر یک از Π_j ها یک چندجمله‌ای از نگاشت ِ T است. پس Π_i ها، $Q_j(T)$ ها، و $R_k(T)$ ها با هم و با T یا هر چندجمله‌ای از آن جابه‌جا می‌شوند. از سو یِ دیگر اگر $i \ne j$، آن‌گاه $Q_i\,Q_j$ مضرب ی از P است. پس

$$Q_i(T)\,Q_j(T) = 0, \quad i \ne j, \tag{180}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\Pi_i\,\Pi_j = 0, \quad i \ne j. \tag{181}$$

رابطه یِ (178)، بر حسب ِ Π_i ها می‌شود

$$\sum_i \Pi_i = 1. \tag{182}$$

این رابطه را در Π_j ضرب می‌کنیم و از (181) استفاده می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$(\Pi_j)^2 = \Pi_j. \tag{183}$$

بنابراین Π_i ها یک دسته نگاشت ِ افکنش اند که با هم جابه‌جا می‌شوند، حاصلِ‌ضرب ِ هر دوتا یِ متمایز ِشان صفر است، مجموع ِشان نگاشت ِ همانی است، و هر یک از آن‌ها یک چندجمله‌ای از T است. این‌ها قسمت‌ها یِ **a** تا **c** یِ حکم اند.

اثر ِ $P_i(T)$ بر $\Pi_i\,v$ صفر است. از این‌جا نتیجه می‌شود $(\Pi_i\,v) \in \mathbb{V}_i$. بر عکس، اگر $v_i \in \mathbb{V}_i$، آن‌گاه اثر ِ همه یِ Π_j ها با $j \ne i$ بر آن صفر است. پس، از (182) نتیجه

می‌شود اثر ـِ Π_i بر v_i خود ـِ v_i است. حالا قسمت ـِ **d** از قسمت‌ها یِ **a** تا **c** و قضیه یِ 53 نتیجه می‌شود.

فرض کنید λ یک ریشه یِ m گانه یِ P است. در این صورت،

$$P(z) = (z - \lambda)^m\, P'(z), \tag{184}$$

که در آن P' یک چندجمله‌ای است که $P'(\lambda)$ ناصفر است. v را یک بردار در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ می‌گیریم. $v' := (T - \lambda)^m\, v$ هم بردار ی در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ است. پس عدد ی مثل ـِ n هست که

$$(T - \lambda)^n\, v' = 0. \tag{185}$$

از $P(T) = 0$ نتیجه می‌شود

$$P'(T)\, v' = 0. \tag{186}$$

P' و چندجمله‌ای یِ Mon_λ^n با $\mathrm{Mon}_\lambda^n(z) := (z - \lambda)^n$ نسبت به هم اول اند. پس $v' = 0$. از این‌جا دیده می‌شود ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ زیرمجموعه یِ $\ker[(T - \lambda)^m]$ است. $\ker[(T - \lambda)^m]$ هم بر اساس ـِ تعریف زیرمجموعه یِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ است. پس این دوفضا برابر اند.

■

توجه کنید که در قضیه یِ بالا، لزوم ی ندارد همه یِ ریشه‌ها یِ P در (175) ویژه‌مقدار باشند. ضمناً اگر λ یک ریشه یِ m گانه یِ P باشد، ممکن است اثر ـِ تحدید ـِ توان ی از $(T - \lambda)$ با نما یی کوچک‌تر از m، بر ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ هم صفر شود.

عکس ـِ قضیه یِ بالا را هم می‌شود به شکل ـِ زیر بیان کرد.

قضیه یِ 66: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_i$ است (که تعداد ـِشان باپایان است)، و به ازا یِ هر i نگاشت ـِ $\mathrm{res}[P_i(T);\mathbb{V}_i]$ صفر است، که هر یک از P_i ها یک چندجمله‌ای است. در این صورت،

$$\prod_i P_i(T) = 0. \tag{187}$$

اثبات: کافی است یک بردار ـِ دل‌بخواه در $\mathbb{V}$ را بر حسب ـِ بردارها یی در $\mathbb{V}_i$ ها بنویسیم و طرف ـِ چپ ـِ (187) را بر آن اثر دهیم.

■

با استفاده از قضیه یِ 65، می‌شود از رو یِ نگاشت ِ خطی یِ T با ویژه‌گی یِ (174) یک نگاشت ِ شبهِ‌ساده ساخت، به شرط ی که چندجمله‌ای یِ P در (175) به شکل ِ حاصل‌ِضرب ِ عامل‌ها یِ تک‌جمله‌ای تجزیه شود:

قضیه یِ 67: فرض کنید نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ رابطه یِ (174) را با

$$P(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{m_i} \tag{188}$$

بر می‌آورد، که در آن λ_i ها متمایز اند. در این صورت نگاشت ِ شبهِ‌ساده ای هست که

a یک چندجمله‌ای از T است (و در نتیجه با آن جابه‌جا می‌شود.)

b ویژه‌فضاها یَش همان ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T اند.

c ویژه‌مقدارها یَش را هر چیز ی می‌شود گرفت، از جمله می‌شود همان ویژه‌مقدارها یِ متناظر ِ T گرفت.

اثبات: به‌ساده‌گی دیده می‌شود نگاشت ِ $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ به شکل ِ

$$S := \sum_i \mu_i \, \Pi_i \tag{189}$$

ویژه‌گی‌ها یِ **a** تا **c** را بر می‌آورد. Π_i ها همان افکنش‌ها یی اند که در قضیه یِ 65 به کار رفتند. μ_i ها ویژه‌مقدارها یِ S اند، که می‌شود آن‌ها را با ویژه‌مقدارها یِ متناظر ِ T یکی گرفت.

■

قضیه یِ 68: فرض کنید نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ رابطه یِ (174) را با (188) بر می‌آورد. در این صورت دو نگاشت ِ S و N در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هستند که با هم جابه‌جا می‌شوند، مجموع ِشان T است، S شبهِ‌ساده، و N پوچ‌توان است. این نگاشت‌ها این ویژه‌گی‌ها را هم دارند.

a هر دو چندجمله‌ای یِ T اند.

b ویژه‌مقدارها یِ S همان ویژه‌مقدارها یِ T، و ویژه‌فضاها یِ S همان ویژه‌فضاها ی تعمیم‌یافته یِ متناظر ِ T اند.

c پوچ‌توانی یِ N برابر است با بیشینه یِ پوچ‌توانی‌ها یِ $\operatorname{res}(T-\lambda_i;\mathbb{V}_i)$، که λ_i ویژه‌مقدار ـِ T و $\mathbb{V}_i$ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با آن است.

اثبات: افکنش‌ها یِ Π_i را به همان شکل ـِ (179) در اثبات ـِ قضیه یِ 65، و S را به شکل ـِ (189) در اثبات ـِ قضیه یِ 67 می‌گیریم، اما به جا یِ μ_i می‌گذاریم λ_i (ویژه‌مقدار ـِ نگاشت ـِ T):

$$S := \sum_i \lambda_i\,\Pi_i. \tag{190}$$

تا این‌جا یک نگاشت ـِ شبهِ‌ساده داریم (S) که ویژه‌مقدارها یَش همان ویژه‌مقدارها یِ T، و ویژه‌فضاها یَش همان ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر ـِ T اند. ضمناً S یک چند جمله‌ای از T است. نگاشت ـِ خطی یِ

$$N := T - S \tag{191}$$

را در نظر بگیرید. $\operatorname{res}(N;\mathbb{V}_i)$ برابر است با $\operatorname{res}(T-\lambda_i;\mathbb{V}_i)$ (که ضمناً تصویر ـِ آن هم زیرمجموعه یِ خود ـِ $\mathbb{V}_i$ است). اما می‌دانیم $\operatorname{res}(T-\lambda_i;\mathbb{V}_i)$ پوچ‌توان است. پس $\operatorname{res}(N;\mathbb{V}_i)$ پوچ‌توان است. فرض کنید پوچ‌توانی یِ $\operatorname{res}(N;\mathbb{V}_i)$ برابر ـِ k_i باشد. بزرگ‌ترین ـِ k_i ها را k می‌نامیم. روشن است که همه یِ $\operatorname{res}(N^k;\mathbb{V}_i)$ ها صفر اند. پس نتیجه می‌شود

$$N^k = 0. \tag{192}$$

یعنی خود ـِ N پوچ‌توان است. به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد k در واقع پوچ‌توانی یِ N است. ضمناً چون S یک چندجمله‌ای از T است، N هم یک چندجمله‌ای از T است. پس S و N با هم جابه‌جا می‌شود.

■

به این تجزیه یِ یک نگاشت ـِ خطی به نگاشت‌ها یِ شبهِ‌ساده و پوچ‌توان، تجزیه یِ ژُردَن می‌گویند.

قضیه یِ 69: نگاشت ـِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $T=(S+N)$، که در آن S شبهِ‌ساده و N پوچ‌توان است، و $[S,N]=0$. در این صورت یک چندجمله‌ای مثل ـِ P به شکل ـِ (188) هست، که T رابطه یِ (174) را بر می‌آورد.

اثبات: کافی است در (188)، λ_i ها را ویژه‌مقدارها یِ S بگیریم و m_i ها را پوچ‌توانی یِ N. به‌ساده‌گی دیده می‌شود اثر ـ $P(S+N)$ بر هر یک از $\mathbb{V}_i$ ها (ویژه‌فضاها یِ S متناظر با ویژه‌مقدار ـ λ_i) صفر است، و از این‌جا (با توجه به این که $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـ $\mathbb{V}_i$ ها است) (174) نتیجه می‌شود.

■

با استفاده از این قضیه و قضیه یِ 68، می‌شود نشان داد تجزیه یِ ژُردَن ـ یک نگاشت ـ خطی، در صورت ـ وجود یک‌تا است:

قضیه یِ 70: نگاشت ـ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $T=(S'+N')=(S''+N'')$، که در آن S' و S'' شبهِ‌ساده و N' N'' پوچ‌توان اند، و $[S',N']=[S'',N'']=0$. در این صورت $S'=S''$ و $N'=N''$.

اثبات: بر اساس ـ قضیه یِ 69، چندجمله‌ای یی مثل ـ P هست که به عامل‌ها یِ درجه‌یِ‌یک تجزیه می‌شود، و $P(T)=0$. S و N را به شکل ـ قضیه یِ 68 می‌سازیم. از این که S' با N' جابه‌جا می‌شود، نتیجه می‌شود این دونگاشت با T و هر چندجمله‌ای از آن (از جمله N و S) جابه‌جا می‌شوند. پس $(N-N')$ پوچ‌توان است، و در نتیجه $(S'-S)$ هم پوچ‌توان است. چون S' با S جابه‌جا می‌شود، تصویر ـ $\mathrm{res}(S';\mathbb{V}_i)$ ($\mathbb{V}_i$ ویژه‌فضا یِ S متناظر با ویژه‌مقدار ـ λ_i است) زیرمجموعه یِ $\mathbb{V}_i$ است، قضیه یِ 59. $\mathrm{res}(S'-S;\mathbb{V}_i)$ برابر با $\mathrm{res}(S'-\lambda_i;\mathbb{V}_i)$ است. پس $\mathrm{res}(S'-\lambda_i;\mathbb{V}_i)$ پوچ‌توان است. اما این یعنی $\mathbb{V}_i$ زیرمجموعه یِ یک ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ S' است، و چون S' شبهِ‌ساده است، $\mathbb{V}_i$ باید زیرمجموعه یِ یک ویژه‌فضا یِ S' باشد، قضیه یِ 63. پس $\mathrm{res}(S'-\lambda_i;\mathbb{V}_i)$ صفر است، و از آن‌جا $\mathrm{res}(S'-S;\mathbb{V}_i)$ صفر است. چون این حکم برا یِ هر i درست است، $(S'-S)=0$. همین استدلال برا یِ S'' هم درست است. پس $S'=S''$.

■

نگاشت‌ها یِ یک‌تا یِ S و N را که به‌ترتیب شبهِ‌ساده و پوچ‌توان اند و در تجزیه یِ ژُردَن ـ T ظاهر می‌شوند، به‌ترتیب بخش ـ شبهِ‌ساده یِ T و بخش ـ پوچ‌توان ـ T می‌نامیم و آن‌ها را با این نمادها نشان می‌دهیم.

$$\mathrm{sem}(T):=S,$$

$$\mathrm{nil}(T) := N. \tag{193}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 71: فرض کنید $T_1 \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است، و $T_2\,\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ با T_1 جابه‌جا می‌شود. در این صورت T_2 با $\mathrm{sem}(T_1)$ و $\mathrm{nil}(T_1)$ جابه‌جا می‌شود.
★

xviii چندجمله‌ای یِ مشخصه یِ یک نگاشت ِ خطی

قضیه یِ 72: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان است. در این صورت ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ زیرفضا یی است که تحدید ِ $(T-\lambda)$ به آن پوچ‌توان است. به‌علاوه، پوچ‌توانی یِ تحدید ِ $(T-\lambda)$ به این زیرفضا کوچک‌تر از یا مساوی با بُعد ِ این زیرفضا است.

اثبات: روشن است که اگر تحدید ِ $(T-\lambda)$ به یک زیرفضا پوچ‌توان باشد، آن زیرفضا زیرمجموعه یِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ است. طبق ِ قضیه یِ 57، تصویر ِ تحدید ِ $(T-\lambda)$ به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ، زیرمجموعه یِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ است. به این ترتیب (با کاربرد ِ قضیه یِ 49 برا یِ تحدید ِ $(T-\lambda)$ به این ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته) معلوم می‌شود تحدید ِ $(T-\lambda)$ به این ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته پوچ‌توان است و پوچ‌توانی یِ آن هم نابزرگ‌تر از بُعد ِ این ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته است.
■

قضیه یِ 73: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و برابر با حاصلِ‌جمع ِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T است. در این صورت

$$\prod_i (T-\lambda_i)^{n_i} = 0, \tag{194}$$

که در آن λ_i ها ویژه‌مقدارها یِ T اند، و n_i بُعد ِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ_i است.

اثبات: کافی است بردار ـِ دل‌بخواه ـِ $v \in \mathbb{V}$ را به شکل ـِ مجموع ی از ویژه‌بردارها یِ تعمیم‌یافته یِ T بنویسیم و قضیه یِ 72 را به کار ببریم.

■

(194) را می‌شود به شکل ـِ

$$C_T(T) = 0 \tag{195}$$

نوشت، که C_T چندجمله‌ای یی با

$$C_T(z) := \prod\nolimits_i (z - \lambda_i)^{n_i} \tag{196}$$

است. به این چندجمله‌ای چندجمله‌ای یِ مشخصه یِ نگاشت ـِ خطی یِ T، و به معادله یِ $C_T(z) = 0$ معادله یِ مشخصه یِ نگاشت ـِ T می‌گویند. ریشه‌ها یِ معادله یِ مشخصه یِ T ویژه‌مقدارها یِ T اند و چندگانه‌گی یِ هر ریشه برابر است با بُعد ـِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با آن ریشه (ویژه‌مقدار). درجه یِ چندجمله‌ای یِ مشخصه یِ نگاشت ـِ T برابر است با بُعد ـِ دامنه یِ T.

می‌گوییم میدان ـِ $\mathbb{F}$ جبری‌بسته است؛ اگر هر چندجمله ای یِ ناثابت با ضرایب ـِ عضو ـِ $\mathbb{F}$، در $\mathbb{F}$ ریشه داشته باشد. (از این‌جا نتیجه می‌شود هر چندجمله‌ای یِ درجه یِ n درست n ریشه دارد و می‌شود آن را به حاصلِ‌ضرب ـِ چندجمله‌ای‌ها یِ درجه یِ یک تجزیه کرد:)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, z^i = a_n \prod\nolimits_k (z - z_k)^{n_k}, \tag{197}$$

که در آن $a_n \neq 0$ و

$$\sum\nolimits_k n_k = n. \tag{198}$$

z_k ها ریشه‌ها یِ چندجمله‌ای، و n_k چندگانه‌گی یِ ریشه یِ z_k است. یک میدان ـِ مهم با این ویژه‌گی میدان ـِ عددها یِ مختلط ($\mathbb{C}$) است. یک میدان ـِ مهم که این ویژه‌گی را ندارد میدان ـِ عددها یِ حقیقی ($\mathbb{R}$) است.

قضیه یِ 74: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، فضا یِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی با میدان ـِ $\mathbb{F}$، و $\mathbb{F}$ جبری‌بسته است. در این صورت T دستِ‌کم یک ویژه‌مقدار دارد.

اثبات: بُعد ـِ $\mathbb{V}$ را n می‌گیریم. بردار ـِ ناصفر ـِ $v \in \mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. مجموعه یِ

$\{v, T\,v, \dots, T^n\,v\}$ شامل ـِ $n+1$ بردار است. چون $\dim(\mathbb{V}) = n$، این مجموعه خطی‌وابسته است، قضیه یِ 8. یعنی ضریب‌ها یِ a_i ی هستند که دستِ‌کم یک ی از آن‌ها ناصفر است و

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,T^i\,v = 0. \qquad (199)$$

نمی‌شود فقط a_0 ناصفر باشد. چون از آن نتیجه می‌شود $v = 0$. پس دستِ‌کم یک ی از a_i ها با $i > 0$ ناصفر است. فرض کنید بزرگ‌ترین مقدار ـِ i که $a_i \ne 0$ برابر ـِ k باشد:

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\,T^i\right) v = 0, \quad a_k \ne 0, \quad k > 0. \qquad (200)$$

ضریب ـِ v در عبارت ـِ بالا یک چندجمله‌ای از T است. چون $\mathbb{F}$ جبری‌بسته است، این چندجمله‌ای را می‌شود به عامل‌ها یِ درجه‌یِ‌یک تجزیه کرد (توجه دارید که درجه یِ این چندجمله‌ای بیش از صفر است، پس تعداد ـِ عامل‌ها یِ درجه‌یِ‌یک ـِ آن صفر نیست):

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\,T^i = a_k \prod\nolimits_l (T - z_l)^{n_l}, \qquad (201)$$

که در آن z_l ها ریشه‌ها یِ چندجمله‌ای یِ طرف ـِ چپ اند (و البته عضو ـِ $\mathbb{F}$ اند). از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\prod\nolimits_l (T - z_l)^{n_l}\,v = 0. \qquad (202)$$

همه یِ نگاشت‌ها یِ $(T - z_l)$ نمی‌توانند ناتکین باشند. اگر چنین باشد نتیجه می‌شود $v = 0$، که خلاف ـِ فرض ـِمان است. پس دستِ‌کم یک ی از این عامل‌ها یِ درجه‌یِ‌یک تکین است.

■

قضیه یِ 75: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، فضا یِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی با میدان ـِ $\mathbb{F}$، و $\mathbb{F}$ جبری‌بسته است. در این صورت T معادله یِ (194) بر می‌آورد، که در آن λ_i ها ویژه‌مقدارهای T اند، و n_i بُعد ـِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_i است.

اثبات: ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_i را با $\mathbb{V}_i$ نشان می‌دهیم. بردار ـِ دل‌بخواه ـِ $v \in \mathbb{V}$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه یِ $\{v, T\,v, \dots, T^n\,v\}$ خطی‌وابسته است.

پس اثر ـِ یک چندجمله‌ای از T رو یِ v صفر می‌شود. این چندجمله‌ای را به عامل‌ها یِ اول تجزیه می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\left[\prod_j (T-z_j)^{s_j}\right]\left[\prod_i (T-\lambda_i)^{m_i}\right] v = 0. \tag{203}$$

در این‌جا ریشه‌ها یِ چندجمله‌ای یِ T را به دو دسته تقسیم کرده ایم: z_j ها (که ویژه‌مقدار ـِ T نیستند) و λ_i ها (که ویژه‌مقدار ـِ T اند). (ممکن است یک ی از ویژه‌مقدارها ریشه یِ آن چندجمله‌ای نباشد. در این صورت جمله یِ مربوط به آن ویژه‌مقدار، با توان ـِ صفر ظاهر می‌شود.) از این که z_j ویژه‌مقدار ـِ T نیست، نتیجه می‌شود $(T-z_j)$ ناتکین است. پس این عامل‌ها را می‌شود از معادله یِ بالا حذف کرد:

$$\left[\prod_i (T-\lambda_i)^{m_i}\right] v = 0. \tag{204}$$

از سو یِ دیگر دیدیم اگر اثر ـِ توان ی از $(T-\lambda_i)$ بر بردار ی صفر شود، آن‌گاه اثر ـِ $(T-\lambda_i)^{n_i}$ بر آن بردار صفر است، قضیه یِ 72. پس اثر ـِ $\prod_i (T-\lambda_i)^{n_i}$ بر v صفر است.

■

قضیه یِ 76: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، فضا یِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی با میدان ـِ $\mathbb{F}$، و $\mathbb{F}$ جبری‌بسته است. در این صورت $\mathbb{V}$ برابر است با حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم یافته یِ T، و T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است.

اثبات: بر اساس ـِ قضیه یِ 75، T معادله یِ (194) را بر می‌آورد. پس فرض ـِ قضیه یِ 65 برقرار است، و در نتیجه $\mathbb{V}$ برابر است با حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم یافته یِ T. قضیه یِ 68 هم می‌گوید T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است.

■

توجه کنید که ممکن است T معادله یِ (194) را بر آورد، اما $\mathbb{F}$ جبری‌بسته نباشد.

xix چندجمله‌ای یِ کمین ـِ یک نگاشت ـِ خطی

دیدیم اگر T یک نگاشت ـِ خطی از یک فضا یِ n بُعدی به خود ـِ آن فضا باشد (و آن فضا قابل ـِ تجزیه به ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T باشد) آن‌گاه T یک معادله یِ

درجه یِ n (معادله یِ مشخصه) را بر می‌آورد. چندجمله‌ای یِ مشخصه یِ T یک چندجمله‌ای از درجه یِ n است، که فقط به ویژه‌مقدارها یِ T و بُعد ـِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ آن بسته‌گی دارد. اما ممکن است چندجمله‌ای یِ ناصفر ـِ دیگر ی مثل ـِ P باشد که درجه اَش کم‌تر از بُعد ـِ دامنه یِ T باشد و $P(T) = 0$. حتا ممکن است دامنه یِ T بی‌پایان‌بُعدی باشد، اما چندجمله‌ای یِ ناصفر ی مثل ـِ P باشد که $P(T) = 0$. می‌خواهیم چنین‌چندجمله‌ای‌ها یی را مشخص کنیم.

قضیه یِ 77: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و چندجمله‌ای یِ ناصفر ی مثل ـِ P هست که $P(T) = 0$. در این صورت چندجمله‌ای یی مثل ـِ M_T با

$$M_T(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, z^i \tag{205}$$

هست که $n \neq 0$، $a_n = 1$، و هر چندجمله‌ای یی مثل ـِ P' با $P'(T) = 0$، مضرب ی از M_T است. چندجمله‌ای یی با این ویژه‌گی‌ها یک‌تا است.

اثبات: مجموعه یِ همه یِ چندجمله‌ای‌ها یِ ناصفر ی مثل ـِ P' را در نظر می‌گیریم که $P'(T) = 0$. مجموعه یِ درجه‌ها یِ این چندجمله‌ای‌ها را در نظر می‌گیریم. این مجموعه زیرمجموعه ای ناتهی از عددها یِ طبیعی است، پس عضو ـِ کمینه دارد. این عضو ـِ کمینه را n می‌نامیم. یعنی یک چندجمله‌ای از درجه یِ n هست، که اگر به جا یِ متغیر َ ش T بگذاریم صفر می‌شود. این چند جمله‌ای را به ضریب ـِ توان ـِ n ُ م ـِ متغیر َ ش تقسیم می‌کنیم و حاصل را M_T می‌نامیم. حالا فرض کنید P' یک چندجمله‌ای باشد و $P'(T) = 0$. P' را بر M_T تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده را P'' می‌نامیم. P'' چندجمله‌ای یی است با درجه یِ کوچک‌تر از n، و $P''(T) = 0$. پس P'' باید صفر باشد. نتیجه می‌شود M_T چندجمله‌ای یِ P' را می‌شمارد. به علاوه، اگر M' چندجمله‌ای یِ ناصفر ـِ دیگر ی باشد که همه یِ چندجمله‌ای‌ها یِ P' با $P'(T) = 0$ را بشمارد، آن‌گاه M' چندجمله‌ای یِ M_T را هم می‌شمارد که این نتیجه می‌دهد درجه یِ M' نابزرگ‌تر از n است. اما M_T هم چندجمله‌ای یِ M' را می‌شمارد، که این می‌گوید درجه یِ M' ناکوچک‌تر از n است. پس درجه یِ M' برابر با n است. فرض کنید ضریب ـِ z^n در $M'(z)$ برابر با b_n باشد. روشن است که $(M' - b_n\, M_T)(T) = 0$، و درجه یِ $(M' - b_n\, M_T)$ هم کوچک‌تر از n است. در این صورت $(M' - b_n\, M_T) = 0$، یا

$$\frac{1}{b_n}\, M' = M_T. \tag{206}$$

این هم یک‌تایی یِ M_T را ثابت می‌کند.

■

به M_T چندجمله‌ای یِ کمین ـ T می‌گویند. با استفاده از این قضیه و قضیه‌ها یِ بخش ـ xvii، این دوقضیه به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود.

قضیه یِ 78: فرض کنید نگاشت ـ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ چندجمله‌ای یِ کمین دارد. در این صورت λ یک ریشه یِ این چندجمله‌ای است، اگر و تنها اگر λ یک ویژه‌مقدار ـ T باشد. اگر این گزاره‌ها درست باشند، آن‌گاه تحدید ـ $(T-\lambda)$ به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ پوچ‌توان است و پوچ‌توانی یِ آن برابر است با چندگانه‌گی یِ ریشه یِ λ یِ چندجمله‌ای یِ کمین.

★

قضیه یِ 79: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت این گزاره‌ها هم‌ارز اند.

a T چندجمله‌ای یِ کمین دارد و این چندجمله‌ای قابلِ‌تجزیه به عامل‌ها یِ درجه‌یِ‌یک است.

b T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است.

c $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T است، و $\mathrm{res}(T-\lambda_i;\mathbb{V}_i)$ (که $\mathbb{V}_i$ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ_i است) به ازا یِ هر i پوچ‌توان است.

اگر این گزاره‌ها درست باشند، عامل‌ها یِ درجه‌یِ‌یک ـ $M_T(z)$ به شکل ـ $(z-\lambda_i)$ اند، و چندگانه‌گی یِ ریشه یِ λ_i ـ این چندجمله‌ای برابر است با پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(T-\lambda_i;\mathbb{V}_i)$.

★

از جمله معلوم می‌شود

قضیه یِ 80: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، فضا یِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی با میدان ـ $\mathbb{F}$، و $\mathbb{F}$ جبری‌بسته است. فرض کنید پوچ‌توانی یِ تحدید ـ $(T-\lambda_i)$ به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ $\mathbb{V}_i$ متناظر با ویژه‌مقدار ـ λ_i، برابر ـ k_i است. در این صورت T چندجمله‌ای یِ کمین دارد و (M_T)

$$M_T(z) := \prod_i (z-\lambda_i)^{k_i}. \qquad (207)$$

★

دیده می‌شود اگر $\mathbb{F}$ جبری‌بسته و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، M_T فقط به ویژه‌مقدارها یِ T و پوچ‌توانی یِ تحدید ـِ هر یک از $(T - \lambda_i)$ ها به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با λ_i بسته‌گی دارد. ضمناً دیده می‌شود درجه یِ M_T نابیش‌تر از بُعد ـِ دامنه یِ T است. اگر درجه یِ M_T با بُعد ـِ دامنه یِ T برابر باشد، آن‌گاه M_T همان C_T است. برا یِ این که چنین‌چیز ی رخ دهد، باید برا یِ هر i پوچ‌توانی یِ تحدید ـِ $(T - \lambda_i)$ به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_i، برابر ـِ بُعد ـِ این ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته باشد. یک نتیجه یِ قضیه یِ 51 این است.

قضیه یِ 81: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و فضا یِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و برابر با حاصلِ‌جمع ـِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T است. شرط ـِ لازم و کافی برا یِ این که چندجمله‌ای یِ کمین ـِ T با چندجمله‌ای یِ مشخصه یِ T یک‌سان باشد، آن است که بُعد ـِ همه یِ ویژه‌فضاها یِ T یک باشد.

★

(توجه کنید که بُعد ـِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته ممکن است بیش از یک شود). یک حالت ـِ خاص زمان ی است که همه یِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یک‌بُعدی باشند. این یعنی ریشه‌ها یِ معادله یِ مشخصه یِ نگاشت، همه ساده باشند.

دو مثال برا یِ چندجمله‌ای یِ کمین: برا یِ نگاشت ـِ پوچ‌توان ـِ N با $\mathrm{np}(N) = n$،

$$M_N(z) = z^n. \tag{208}$$

برا یِ نگاشت ـِ افکنش ـِ Π هم،

$$M_\Pi(z) = \begin{cases} z, & \Pi = 0 \\ z - 1, & \Pi = 1 \\ z\,(z-1), & \Pi \neq 0, 1 \end{cases}. \tag{209}$$

سرانجام، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 82: نگاشت ـِ خطی یِ S شبهِ‌ساده است؛ اگر و تنها اگر چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد، چندجمله‌ای یِ کمین َ ش قابلِ‌تجزیه به عامل‌ها یِ درجه‌یِ‌یک باشد، و همه یِ این عامل‌ها ساده باشند.

★

xx مغزی و اساس ـِ یک نگاشت ـِ خطی یِ هسته‌جدا

فرض کنید نگاشت ـِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت، بنا بر تعریف می‌شود $\mathbb{V}$ را حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ هسته یِ T و دامنه یِ مئثر ـِ T نوشت:

$$\mathbb{V} = \operatorname{edom}(T) \oplus \ker(T). \tag{210}$$

با استفاده از این دوفضا، یک افکنش ـِ $\Pi \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ می‌سازیم که

$$\operatorname{img}(\Pi) = \operatorname{edom}(T), \qquad \ker(\Pi) = \ker(T). \tag{211}$$

از این‌جا نگاشت‌ها یِ خطی یِ T' و T'' در $\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T' &= \Pi\, T,\\ T'' &= (1-\Pi)\, T. \end{aligned} \tag{212}$$

به نگاشت ـِ T' در رابطه یِ بالا مغزی یِ T می‌گوییم و آن را با $\operatorname{cor}(T)$ نشان می‌دهیم. روشن است که $\operatorname{cor}(T)$ لزوماً به طور ـِ یک‌تا از T به دست نمی‌آید، چون $\operatorname{edom}(T)$ لزوماً به طور ـِ یک‌تا از T به دست نمی‌آید. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 83: فرض کنید نگاشت ـِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هسته‌جدا است و Π با (211) تعریف شده است. $\operatorname{cor}(T)$ را با T'، و $[T - \operatorname{cor}(T)]$ را با T'' نشان می‌دهیم. در این صورت،

$$T' + T'' = T, \tag{213}$$

$$T\,\Pi = T, \tag{214}$$

$$\Pi\, T' = T'\, \Pi = T', \tag{215}$$

$$T''\, \Pi = T'', \tag{216}$$

$$\Pi\, T'' = 0, \tag{217}$$

$$T\,(1-\Pi) = T''\,(1-\Pi) = 0, \tag{218}$$

$$T'\,(1-\Pi) = (1-\Pi)\, T' = 0. \tag{219}$$

$$T''\, T'' = T'\, T'' = T\, T'' = 0, \tag{220}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad T^n = T'^n + T''\, T'^{n-1}, \tag{221}$$

$$Q(T) = Q(T') + T''\, \tilde{Q}(T'), \tag{222}$$

$$(1-\Pi)\, Q(T') = (1-\Pi)\, Q(0). \tag{223}$$

در (222)، Q و $\tilde{Q}$ چندجمله‌ای اند و

$$\tilde{Q}(z) := \frac{Q(z) - Q(0)}{z}. \tag{224}$$

★

$\mathrm{res}[\mathrm{cor}(T); \mathrm{edom}(T)]$ یک نگاشت ِ خطی از $\mathrm{edom}(T)$ به $\mathrm{edom}(T)$ است. به این نگاشت اساس ِ T می‌گوییم و آن را با $\mathrm{ess}(T)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که در حالت ِ کلی، چون $\mathrm{edom}(T)$ به طور ِ یک‌تا از T به دست نمی‌آید، $\mathrm{ess}(T)$ هم به طور ِ یک‌تا از T به دست نمی‌آید.

قضیه یِ 84: فرض کنید نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$ هسته‌جدا است، Q یک چندجمله‌ای با $Q(0) \neq 0$ است، و Π با (211) تعریف شده است. در این صورت،

a اگر $Q(T)\, v = 0$ (که $v \in \mathbb{V}$) و $v' = \Pi\, v$؛ آن‌گاه $Q[\mathrm{cor}(T)]\, v' = 0$.

b اگر $Q[\mathrm{cor}(T)]\, v' = 0$ (که $v' \in \mathbb{V}$)؛ آن‌گاه $v' \in \mathrm{edom}(T)$، و یک و فقط یک بردار ِ $v \in \mathbb{V}$ هست که $\Pi\, v = v'$ و $Q(T)\, v = 0$.

c هسته یِ $Q[\mathrm{cor}(T)]$ و هسته یِ $Q(T)$ یک‌ریخت اند.

اثبات: $\mathrm{cor}(T)$ را با T' نشان می‌دهیم. (222) را از راست در Π و از چپ در v ضرب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\Pi\, Q(T)\, v = Q(T')(\Pi\, v). \tag{225}$$

این **a** را می‌دهد.

(223) را در v' ضرب می‌کنیم. از ناصفربودن ِ $Q(0)$ نتیجه می‌شود اگر $Q(T')\, v' = 0$، آن‌گاه $(1-\Pi)\, v' = 0$، که یعنی $v' \in \mathrm{edom}(T)$. به دنبال ِ بردار ِ $v \in \mathbb{V}$ هستیم که $Q(T)\, v = 0$، و $\Pi\, v = v'$.

$$v = v' + v'', \qquad (1-\Pi)\, v'' = v''. \tag{226}$$

(222) را بر رابطه ی ِ بالا اثر می‌دهیم:

$$\begin{aligned} Q(T)\,v &= Q(T')\,v' + Q(T')\,v'' + T''\,\tilde{Q}(T')\,v' + T''\,\tilde{Q}(T')\,v'', \\ &= Q(T')\,(1-\Pi)\,v'' + T''\,\tilde{Q}(T')\,v' + T''\,\tilde{Q}(T')\,(1-\Pi)\,v'', \\ &= Q(0)\,(1-\Pi)\,v'' + T''\,\tilde{Q}(T')\,v', \\ &= Q(0)\,v'' + (1-\Pi)\,T''\,\tilde{Q}(T')\,v'. \end{aligned} \tag{227}$$

در این‌جا $\tilde{Q}$ چندجمله‌ای یی است که با (224) تعریف شده است. دیده می‌شود طرف ِ چپ صفر است، اگر و تنها اگر

$$v'' = -\frac{1}{Q(0)}\,(1-\Pi)\,T''\,\tilde{Q}(T')\,v'. \tag{228}$$

روشن است که $(1-\Pi)\,v'' = v''$. پس

$$v = v' - \frac{1}{Q(0)}\,(1-\Pi)\,T''\,\tilde{Q}(T')\,v', \tag{229}$$

ویژه‌گی‌ها ی ِ $\mathbf{b}$ را دارد و تنهابردار ی است که این ویژه‌گی‌ها را دارد.

برا ی ِ نشان‌دادن ِ $\mathbf{c}$، $\mathrm{res}\{\Pi; \ker[Q(T)]\}$ را در نظر بگیرید. این نگاشت خطی است، و بر اساس ِ $\mathbf{b}$ یک‌به‌یک و در $\ker[Q(T')]$ پوشا است. پس وارون‌پذیر است.

■

قضیه ی ِ 85: فرض کنید نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هسته‌جدا، $v \in \mathbb{V}$، و n یک عدد ِ طبیعی است. در این صورت،

$\mathbf{a}$ اگر $T^n\,v = 0$، آن‌گاه $[\mathrm{cor}(T)]^n\,v = 0$.

$\mathbf{b}$ $T^{n+1}\,v = 0$ و $[\mathrm{cor}(T)]^n\,v = 0$ هم‌ارز اند.

اثبات: $\mathrm{cor}(T)$ را با T' نشان می‌دهیم. Π در (211) را از چپ در (221) ضرب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\Pi\,T^n = T'^n. \tag{230}$$

این $\mathbf{a}$ را نشان می‌دهد. با استفاده از (221)، ضمناً

$$T^{n+1} = T\,T'^n. \tag{231}$$

این نشان می‌دهد اگر $T'^n\, v = 0$، آن‌گاه $T^{n+1}\, v = 0$. مانده نشان دهیم اگر $T^{n+1}\, v = 0$، آن‌گاه $T'^n\, v = 0$. فرض کنید $T^{n+1}\, v = 0$. در این صورت $(T'^n\, v) \in \ker(T)$. اما ضمناً $(T'^n\, v) \in \mathrm{edom}(T)$. پس $T'^n\, v = 0$.

■

قضیه یِ 86: فرض کنید نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت،

a λ یک ویژه‌مقدار ِ T است، اگر و تنها اگر λ یک ویژه‌مقدار ِ $\mathrm{cor}(T)$ باشد.

b ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ صفر، با ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ $\mathrm{cor}(T)$ متناظر با ویژه‌مقدار ِ صفر یک‌سان است.

c ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ $\mathrm{cor}(T)$ متناظر با $\lambda \neq 0$، یک زیرفضا یِ $\mathrm{edom}(T)$ است.

d $\mathbb{V}_\lambda$ (ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ) با $\mathbb{V}'_\lambda$ (ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ $\mathrm{cor}(T)$ متناظر با λ) یک‌ریخت است.

e $\mathrm{res}(T-\lambda;\mathbb{V}_\lambda)$ پوچ‌توان است، اگر و تنها اگر $\mathrm{res}[\mathrm{cor}(T)-\lambda;\mathbb{V}'_\lambda]$ پوچ‌توان باشد.

f اگر $\lambda \neq 0$ و $\mathrm{res}(T-\lambda;\mathbb{V}_\lambda)$ پوچ‌توان باشد، پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(T-\lambda;\mathbb{V}_\lambda)$ با پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}[\mathrm{cor}(T)-\lambda;\mathbb{V}'_\lambda]$ برابر است.

g اگر $\ker(T) \sqsubset \mathbb{V}_0$، و $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}_0 = \mathbb{V}'_0)$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}_0)$ برابر است با پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}[\mathrm{cor}(T);\mathbb{V}_0]$ به اضافه یِ یک. اگر $\ker(T) = \mathbb{V}_0$، آن‌گاه $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}_0)$ و $\mathrm{res}[\mathrm{cor}(T);\mathbb{V}_0]$ صفر اند. در این حالت پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}_0)$ برابر است با پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}[\mathrm{cor}(T);\mathbb{V}_0]$؛ و این عدد یک است.

اثبات: $\mathrm{cor}(T)$ را با T' نشان می‌دهیم. **a** برا یِ $\lambda \neq 0$، از قضیه یِ 84 و با $Q(z) = z - \lambda$ نتیجه می‌شود.

a برا یِ $\lambda = 0$، و **b**، از قضیه یِ 85 نتیجه می‌شود.

برا یِ اثبات ِ **c**، فرض کنید $(T'-\lambda)^n\, v = 0$. حالا کافی است بگیریم $Q(z) = (z-\lambda)^n$ و قضیه یِ 84 را به کار ببریم.

d برا یِ $\lambda = 0$، از **b** نتیجه می‌شود. برا یِ $\lambda \neq 0$، $\mathrm{res}(\Pi;\mathbb{V}_\lambda)$ را در نظر بگیرید. این نگاشت را $\tilde{\Pi}_\lambda$ می‌نامیم. فرض کنید $v \in \mathbb{V}_\lambda$. در این صورت عدد ی مثل ِ n هست که

$$(T-\lambda)^n\, v = 0. \tag{232}$$

از قضیه یِ 84 نتیجه می‌شود

$$(T'-\lambda)^n\, (\Pi\, v) = 0. \tag{233}$$

پس تصویر ِ $\tilde{\Pi}_\lambda$ زیرفضا یِ $\mathbb{V}'_\lambda$ است.

حالا فرض کنید $v' \in \mathbb{V}'_\lambda$. پس عدد ی مثل ِ n هست که

$$(T'-\lambda)^n\, v' = 0. \tag{234}$$

بر اساس ِ قضیه یِ 84، بردار ی مثل ِ v هست که

$$(T-\lambda)^n\, v = 0, \qquad \Pi\, v = v'. \tag{235}$$

پس $\tilde{\Pi}_\lambda$ در $\mathbb{V}_\lambda$ پوشا است.

سرانجام، فرض کنید v_1 و v_2 دو بردار در $\mathbb{V}_\lambda$ اند و

$$\tilde{\Pi}_\lambda\, v_1 = \tilde{\Pi}_\lambda\, v_2. \tag{236}$$

عددها یی مثل ِ n_1 و n_2 هستند که

$$(T-\lambda)^{n_i}\, v_i = 0. \tag{237}$$

بیشینه یِ n_1 و n_2 را n می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$(T-\lambda)^n\, v_i = 0. \tag{238}$$

حالا قضیه یِ 84 را با $Q(z) = (z-\lambda)^n$ به کار می‌بریم. نتیجه می‌شود $v_1 = v_2$. پس $\tilde{\Pi}_\lambda$ یک‌به‌یک است. به این ترتیب، $\tilde{\Pi}_\lambda$ وارون‌پذیر است.

e در حالت ِ $\lambda = 0$، به‌ساده‌گی از قضیه یِ 85 نتیجه می‌شود. برا یِ اثبات ِ **e** در حالت ِ $\lambda \neq 0$، فرض کنید $\mathrm{res}(T-\lambda; \mathbb{V}_\lambda)$ پوچ‌توان است و پوچ‌توانی یِ آن n است. می‌گیریم $v' \in \mathbb{V}'_\lambda$. نتیجه می‌شود

$$(T-\lambda)^n\, (\tilde{\Pi}_\lambda)^{-1}\, v' = 0, \tag{239}$$

و از آن‌جا،

$$(T' - \lambda)^n\, v' = 0. \tag{240}$$

پس $\mathrm{res}(T' - \lambda; \mathbb{V}'_\lambda)$ پوچ‌توان است و پوچ‌توانی یِ آن نابزرگ‌تر از n است. به همین ترتیب می‌شود نشان داد اگر $\mathrm{res}(T' - \lambda; \mathbb{V}'_\lambda)$ پوچ‌توان با پوچ‌توانی یِ n باشد، آن‌گاه $\mathrm{res}(T - \lambda; \mathbb{V}_\lambda)$ هم پوچ‌توان است و پوچ‌توانی یِ آن بزرگ‌تر از n است. این **e** در حالت ـِ $\lambda \neq 0$، و **f** را ثابت می‌کند.

حالت ـِ نابدیهی یِ **g** زمان ی است که $\ker(T) \sqsubset \mathbb{V}_0$. در این حالت پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(T; \mathbb{V}_0)$ بزرگ‌تر از یک است. این عدد را با $(n + 1)$ نشان می‌دهیم، که n یک عدد ـِ طبیعی است. این یعنی اگر $v \in \mathbb{V}_0$، آن گاه

$$T^{n+1}\, v = 0, \tag{241}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$T'^n\, v = 0. \tag{242}$$

پس پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(T'; \mathbb{V}_0)$ نابزرگ‌تر از n است. فرض کنید پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(T'; \mathbb{V}_0)$ کوچک‌تر از n باشد. در این حالت به ازا یِ هر $v \in \mathbb{V}_0$،

$$T'^{n-1}\, v = 0. \tag{243}$$

با ضرب‌کردن ـِ این رابطه در T و استفاده از (221)، نتیجه می‌شود

$$T^n\, v = 0. \tag{244}$$

این یعنی پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(T; \mathbb{V}_0)$ نابزرگ‌تر از n است، که با فرض ـِمان ناسازگار است.
■

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 87: فرض کنید نگاشت ـِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت،

a اگر Q یک چندجمله‌ای باشد و $Q(0) \neq 0$، آن‌گاه هسته یِ $Q[\mathrm{cor}(T)]$ با هسته یِ $Q[\mathrm{ess}(T)]$ برابر است.

b اگر $\lambda \neq 0$، آن‌گاه ویژه‌فضا یِ $\mathrm{cor}(T)$ متناظر با λ همان ویژه‌فضا یِ $\mathrm{ess}(T)$ متناظر با λ است.

c ویژه‌فضا یِ $\mathrm{cor}(T)$ متناظر با صفر، برابر است با حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ ویژه‌فضا یِ $\mathrm{ess}(T)$ متناظر با صفر، و $\mathrm{ker}(T)$.

★

قضیه یِ 88: فرض کنید نگاشت ـِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت این گزاره‌ها هم‌ارز اند.

a $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T است.

b $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ $\mathrm{cor}(T)$ است.

c $\mathrm{edom}(T)$ حاصلِ‌جمع ـِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ $\mathrm{ess}(T)$ است.

اثبات: $\mathrm{cor}(T)$ را با T'، و $\mathrm{ess}(T)$ را با $\tilde{T}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید **c** برقرار است. می‌گیریم $v \in \mathbb{V}$. بردارها یِ $v' \in \mathrm{edom}(T)$ و $v'' \in \mathrm{ker}(T)$ ی هستند که

$$v = v' + v''. \tag{245}$$

v' را به شکل حاصلِ‌جمع ـِ بردارها یی در ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ $\tilde{T}$ می‌نویسیم:

$$v' = v'_0 + \sum_{\lambda \neq 0} {}_{\lambda}\, v'_\lambda, \tag{246}$$

که v'_λ در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ $\tilde{T}$ با ویژه‌مقدار ـِ λ است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$v = (v'_0 + v'') + \sum_{\lambda \neq 0} {}_{\lambda}\, v'_\lambda, \tag{247}$$

تجزیه یِ موردِنظر در **b** است.

فرض کنید **b** برقرار است. هر بردار ـِ $v \in \mathbb{V}$ را می‌شود به شکل ـِ

$$v = v'_0 + \sum_{\lambda \neq 0} {}_{\lambda}\, v'_\lambda \tag{248}$$

نوشت، که v'_λ در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T' با ویژه‌مقدار ـِ λ است. به ازا یِ هر $\lambda \neq 0$، بردار ـِ v_λ را بردار ی در ویژه‌فضا یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ می‌گیریم که

$$\Pi\, v_\lambda := v'_\lambda. \tag{249}$$

Π هم افکنش ـ رابطه یِ (211) است. در این صورت،

$$v = \left[v'_0 - \sum_{\lambda\neq 0}{}_\lambda (1-\Pi)\, v_\lambda\right] + \sum_{\lambda\neq 0}{}_\lambda\, v_\lambda. \tag{250}$$

$(1-\Pi)\, v_\lambda$ در $\ker(T)$ است. v'_0 هم بر اساس ـ قضیه یِ 86 در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با صفر است. این **a** را نتیجه می‌دهد.

سرانجام، فرض کنید **a** برقرار است. $v' \in \mathrm{edom}(T)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$v' = v_0 + \sum_{\lambda\neq 0}{}_\lambda\, v_\lambda, \tag{251}$$

که v_λ در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T با ویژه‌مقدار ـ λ است. داریم

$$v' = \left[v_0 + \sum_{\lambda\neq 0}{}_\lambda (1-\Pi)\, v_\lambda\right] + \sum_{\lambda\neq 0}{}_\lambda\, \Pi\, v_\lambda \tag{252}$$

هر یک از جمله‌ها یِ بیرون ـ کروشه در طرف ـ راست، در $\mathrm{edom}(T)$ و در یک ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T' است. پس هر یک از این جمله‌ها در $\mathrm{edom}(T)$ و در یک ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ $\tilde{T}$ است. چون طرف ـ چپ هم در $\mathrm{edom}(T)$ است، پس کروشه هم در $\mathrm{edom}(T)$ است. ضمناً هر یک از جمله‌ها یِ حاصلِ‌جمع ـ درون ـ کروشه در $\ker(T)$ است، پس در ویژه‌فضا یِ T متناظر با صفر است. از این‌جا نتیجه می‌شود کروشه در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با صفر، و در نتیجه در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T' متناظر با صفر است. کروشه در $\mathrm{edom}(T)$ هم هست، پس در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ $\tilde{T}$ متناظر با صفر است. پس طرف ـ راست همان تجزیه یِ موردِنظر در **c** است.

■

قضیه یِ 89: فرض کنید نگاشت ـ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت، T چندجمله‌ای یِ کمین دارد، اگر و تنها اگر $\mathrm{cor}(T)$ چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد. در صورت ـ وجود ـ این چندجمله‌ای‌ها، بسته به وضعیت ـ $\ker(T)$ و $\mathbb{V}_0$ (ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با صفر) سه حالت پیش می‌آید:

a $\ker(T) = \{0\}$.

در این حالت $M_T(z) = M_{\mathrm{cor}(T)}(z)$ و $M_T(0) \neq 0$.

b $\mathbb{V}_0 = \ker(T) \ne \{0\}$.

در این حالت $M_T(z) = M_{\mathrm{cor}(T)}(z) = z\,Q(z)$، که Q یک چندجمله‌ای است و $Q(0) \ne 0$.

c $\mathbb{V}_0 \sqsupset \ker(T) \ne \{0\}$.

در این حالت $M_T(z) = z\,M_{\mathrm{cor}(T)}(z) = z^{n+1}\,Q(z)$، که n یک عدد ِ طبیعی و Q یک چندجمله‌ای است، و $Q(0) \ne 0$.

اثبات: $\mathrm{cor}(T)$ را با T' نشان می‌دهیم. هر یک از حالت‌ها یِ بالا را جداگانه بررسی می‌کنیم. در حالت ِ **a** داریم $T' = T$. پس روشن است که T چندجمله‌ای یِ کمین دارد اگر و تنها اگر T' چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد؛ و این چندجمله‌ای‌ها (در صورت ِ وجود) با هم برابر اند. ضمناً در این حالت صفر ویژه‌مقدار ِ T نیست، پس ریشه یِ M_T هم نیست.

Π را افکنش ی می‌گیریم که با (211) تعریف شده است. در حالت‌ها یِ **b** و **c**، فرض کنید T چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد. چون هسته یِ T ناصفر است، صفر ویژه‌مقدار ِ T است و M_T به شکل ِ

$$M_T(z) = z\,R(z) \tag{253}$$

است، که R یک چندجمله‌ای یِ دیگر است. داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \Pi\,M_T(T),\\ &= \Pi\,M_T(T'),\\ &= M_T(T'). \end{aligned} \tag{254}$$

در تساوی یِ دوم از (222)، و در تساوی یِ سه‌وم از (223) استفاده شده. این نشان می‌دهد اگر T چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد، T' هم چندجمله‌ای یِ کمین دارد، و درجه یِ $M_{T'}$ نابزرگ‌تر از درجه یِ M_T است. برعکس، فرض کنید T' چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد. داریم

$$T\,M_{T'}(T) = T\,M_{T'}(T'),$$

$$= 0, \tag{255}$$

که در آن (222) به کار رفته است. پس اگر T' چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد، T هم چندجمله‌ای یِ کمین دارد و درجه یِ M_T نابزرگ‌تر از درجه یِ $M_{T'}$ به اضافه یِ یک است.

فرض کنید T و T' چندجمله‌ای یِ کمین دارند. چیز ی که مانده شکل ـِ چندجمله‌ای‌ها یِ کمین ـِ T و T' در حالت‌ها یِ $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ است.

در حالت ـِ $\mathbf{b}$، صفر ویژه‌مقدار ـِ T است و بر اساس ـِ قضیه یِ 86، پوچ‌توانی یِ تحدید ـِ T به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با صفر، یک است. همین گزاره‌ها در مورد ـِ T' هم درست اند. پس

$$\begin{aligned} M_T(z) &= z\,Q(z), \qquad Q(0)\neq 0,\\ M_{T'}(z) &= z\,Q'(z), \qquad Q'(0)\neq 0. \end{aligned} \tag{256}$$

از (255) نتیجه می‌شود $M'(T) := T\,M_{T'}(T) = 0$، و در نتیجه M_T باید M' را بشمارد. از این‌جا نتیجه می‌شود Q باید $M_{T'}$ رابشمارد. در نتیجه Q باید Q' را بشمارد. اما درجه یِ Q' نابزرگ‌تر از درجه یِ Q است. پس Q' باید برابر باشد با Q ضرب در یک عدد ـِ ثابت. این عدد ـِ ثابت یک است، چون ضریب ـِ بزرگ‌ترین توان ـِ z در چندجمله‌ای یِ کمین یک است. این رابطه یِ موردِنظر در حالت ـِ $\mathbf{b}$ را نشان می‌دهد.

در حالت ـِ $\mathbf{c}$، صفر یک ویژه‌مقدار ـِ T و T' است و بر اساس ـِ قضیه یِ 86، یک عدد ـِ طبیعی مثل ـِ n هست که پوچ‌توانی یِ تحدید ـِ T به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با صفر برابر است با $(n+1)$، و پوچ‌توانی یِ تحدید ـِ T' به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T' متناظر با صفر برابر است با n. پس

$$\begin{aligned} M_T(z) &= z^{n+1}\,Q(z), \qquad Q(0)\neq 0,\\ M_{T'}(z) &= z^{n}\,Q'(z), \qquad Q'(0)\neq 0. \end{aligned} \tag{257}$$

از (255) نتیجه می‌شود $M'(T) := T\,M_{T'}(T) = 0$، و در نتیجه M_T باید M' را بشمارد. پس Q باید Q' را بشمارد. از (254) نتیجه می‌شود $M_T(T') = 0$، و در نتیجه $M_{T'}$ باید M_T را بشمارد. پس Q' باید Q را بشمارد. به این ترتیب Q' برابر است با Q ضرب

در یک عدد ِ ثابت. این ثابت باید یک باشد، چون ضریب ِ بزرگ‌ترین توان ِ z در چندجمله‌ای یِ کمین یک است. این رابطه یِ موردِنظر در حالت ِ (c) را نشان می‌دهد.
■

قضیه یِ 90: فرض کنید نگاشت ِ $T\in\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت، $\mathrm{cor}(T)$ چندجمله‌ای یِ کمین دارد، اگر و تنها اگر $\mathrm{ess}(T)$ چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد. در صورت ِ وجود ِ این چندجمله‌ای‌ها، بسته به وضعیت ِ $\ker(T)$ و $\mathbb{V}_0$ (ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با صفر) سه حالت پیش می‌آید:

a $\ker(T)=\{0\}$.

در این حالت $M_{\mathrm{cor}(T)}(z)=M_{\mathrm{ess}(T)}(z)$ و $M_{\mathrm{ess}(T)}(0)\ne 0$.

b $\mathbb{V}_0=\ker(T)\ne\{0\}$.

در این حالت $M_{\mathrm{cor}(T)}(z)=z\,M_{\mathrm{ess}(T)}(z)$ و $M_{\mathrm{ess}(T)}\ne 0$.

c $\mathbb{V}_0\sqsupset\ker(T)\ne\{0\}$.

در این حالت $M_{\mathrm{ess}(T)}(z)=M_{\mathrm{cor}(T)}(z)=z^n\,Q(z)$، که n یک عدد ِ طبیعی و Q یک چندجمله‌ای است، و $Q(0)\ne 0$.

اثبات: $\mathrm{cor}(T)$ را با T'، و $\mathrm{ess}(T)$ را با $\tilde{T}$ نشان می‌دهیم. اگر T' چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد، آن‌گاه به ازا یِ هر بردار ِ $v'\in\mathrm{edom}(T)$،

$$M_{T'}(T')\,v'=0, \tag{258}$$

که نتیجه می‌دهد

$$M_{T'}(\tilde{T})=0. \tag{259}$$

پس $\tilde{T}$ هم چندجمله‌ای یِ کمین دارد و درجه یِ $M_{\tilde{T}}$ نابزرگ‌تر از درجه یِ $M_{T'}$ است.

بر عکس، فرض کنید $\tilde{T}$ چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد. بردار ِ دل‌بخواه ِ $v\in\mathbb{V}$ را به شکل ِ مجموع ِ بردارها یِ $v'\in\mathrm{edom}(T)$ و $v''\in\ker(T)$ می‌نویسیم. داریم

$$\begin{aligned}T'\,M_{\tilde{T}}(T')\,v &= T'\,M_{\tilde{T}}(T')\,v'+M_{\tilde{T}}(T')\,T'\,v'',\\ &=0.\end{aligned} \tag{260}$$

پس T' هم چندجمله‌ای یِ کمین دارد و درجه یِ $M_{T'}$ نابزرگ‌تر از درجه یِ $M_{\tilde{T}}$ به اضافه یِ یک است.

حالا فرض می‌کنیم T' و $\tilde{T}$ چندجمله‌ای یِ کمین دارند. در حالت ـ **a**، $\tilde{T} = T'$ و حکم بدیهی است.

در حالت ـ **b**، طبق ـ قضیه یِ 89،

$$M_{T'}(z) = z\, Q(z), \qquad Q(0) \neq 0. \tag{261}$$

اگر $v' \in \operatorname{edom}(T)$ ناصفر باشد، آن‌گاه $T'\, v' \neq 0$. پس $\tilde{T}$ ویژه‌مقدار ـ صفر ندارد و صفر ریشه یِ چندجمله‌ای یِ کمین ـ $\tilde{T}$ نیست. یعنی $M_{\tilde{T}}(0) \neq 0$. $M_{\tilde{T}}$ باید $M_{T'}$ را بشمارد (چون $M_{T'}(\tilde{T}) = 0$) پس $M_{\tilde{T}}$ باید Q را بشمارد. درجه یِ Q نابزرگ‌تر از درجه یِ $M_{\tilde{T}}$ است. پس $M_{\tilde{T}}$ برابر است با Q ضرب در یک عدد ـ ثابت. این ثابت باید یک باشد، چون ضریب ـ بزرگ‌ترین توان ـ z در چندجمله‌ای یِ کمین یک است. این رابطه یِ موردِنظر در حالت ـ **b** را نشان می‌دهد.

در حالت ـ **c**، بردار ـ ناصفر ی مثل ـ $v' \in \operatorname{edom}(T)$ هست که اثر ـ توان ی از T' بر آن صفر می‌شود، و در نتیجه اثر ـ همان توان از $\tilde{T}$ بر آن صفر می‌شود. پس صفر ویژه‌مقدار ـ $\tilde{T}$ است. در نتیجه،

$$M_{\tilde{T}}(z) = z^n\, Q(z), \qquad Q(0) \neq 0, \tag{262}$$

که n یک عدد ـ طبیعی و برابر با چندگانه‌گی یِ ریشه یِ صفر ـ $M_{\tilde{T}}$ است. بردار ـ دل‌بخواه ـ $v \in \mathbb{V}$ را به شکل ـ مجموع ـ بردارها یِ $v' \in \operatorname{edom}(T)$ و $v'' \in \ker(T)$ می‌نویسیم. داریم

$$\begin{aligned} M_{\tilde{T}}(T')\, v &= T'^n\, Q(T')\, v' + Q(T')\, T'^n\, v'', \\ &= 0. \end{aligned} \tag{263}$$

پس $M_{T'}$ باید $M_{\tilde{T}}$ را بشمارد. $M_{\tilde{T}}$ هم باید $M_{T'}$ را بشمارد. نتیجه می‌شود $M_{T'}$ برابر است با $M_{\tilde{T}}$ ضرب در یک عدد ـ ثابت. این ثابت باید یک باشد، چون ضریب ـ بزرگ‌ترین توان ـ z در چندجمله‌ای یِ کمین یک است. این رابطه یِ موردِنظر در حالت ـ **c** را نشان می‌دهد.

■

دوقضیه یِ بالا را می‌شود به شکل ـ زیر خلاصه کرد.

قضیه یِ 91: فرض کنید نگاشت ـ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت، این گزاره‌ها هم‌ارز اند.

a T چندجمله‌ای یِ کمین دارد.

b $\mathrm{cor}(T)$ چندجمله‌ای یِ کمین دارد.

c $\mathrm{ess}(T)$ چندجمله‌ای یِ کمین دارد.

هم‌چنین، در صورت ـ وجود ـ این چندجمله‌ای‌ها 3 حالت پیش می آید:

a′ $\ker(T)=\{0\}$.

در این حالت $M_T(z)=M_{\mathrm{cor}(T)}(z)=M_{\mathrm{ess}(T)}(z)$ و $M_{\mathrm{ess}(T)}(0)\neq 0$.

b′ $\mathbb{V}_0=\ker(T)\neq\{0\}$.

در این حالت $M_T(z)=M_{\mathrm{cor}(T)}(z)=z\,M_{\mathrm{ess}(T)}(z)$ و $M_{\mathrm{ess}(T)}\neq 0$.

c′ $\mathbb{V}_0\sqsupset\ker(T)\neq\{0\}$.

در این حالت $M_T(z)=z\,M_{\mathrm{ess}(T)}(z)=z\,M_{\mathrm{cor}(T)}(z)=z^{n+1}\,Q(z)$، که n یک عدد ـ طبیعی و Q یک چندجمله‌ای است، و $Q(0)\neq 0$.

★

معنی یِ قضیه‌ها یِ بالا این است که بخش ـ مهم ی از اطلاعات ـ مربوط به یک نگاشت ـ خطی یِ هسته‌جدا در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، در مغزی یا اساس ـ آن نگاشت است.

xxi شکل ـ ژُردَن ـ یک نگاشت ـ خطی یِ پوچ‌توان

برا یِ هر نگاشت ـ شبهِ‌ساده رو یِ یک فضا یِ باپایان‌بُعدی، پایه ای هست که در آن شکل ـ این نگاشت ساده است؛ همان پایه ای که این نگاشت در آن قطری است. در این بخش می‌خواهیم برا یِ یک نگاشت ـ پوچ‌توان هم پایه ای پیدا کنیم، که شکل ـ آن را ساده کند.

قضیه یِ 92: فرض کنید نگاشت ـِ $N \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان با پوچ‌توانی یِ k، و فضا یِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای دارد، که اعضا یِ آن $e_{r,s,j}$ اند با ویژه‌گی‌های زیر

a $1 \le s \le r \le k$

b $1 \le j \le j_0$، که j_0 تابع ـِ r است. (برا یِ بعض ی r ها، ممکن است j_0 صفر باشد.)

c $e_{r,r,j} \in \ker(N^r)$

d $e_{r,s,j} = N^{r-s}\, e_{r,r,j}$

e $\mathrm{span}\{e_{r,s,j} \mid (r,s,j); s > s_0\} \oplus \ker(N^{s_0}) = \mathbb{V}$

اثبات: اثبات با استقرا روی s و به ترتیب ـِ نزولی انجام می‌شود. برا یِ $s_0 = k-1$، بردارها یِ $e_{k,k,j}$ را این طور می‌سازیم که یک پایه برا یِ $\ker(N^{k-1})$ می‌گیریم و زیرفضا یی مثل ـِ $\mathbb{W}_k$ می‌یابیم که

$$\mathbb{V} = \ker(N^{k-1}) \oplus \mathbb{W}_k. \tag{264}$$

(بر اساس ـِ قضیه یِ 42، چنین‌زیرفضا یی هست.) یک پایه برا یِ $\mathbb{W}_k$ انتخاب می‌کنیم و اعضا یِ آن را با $e_{k,k,j}$ نمایش می‌دهیم. روشن است که این بردارها ویژه‌گی‌ها یِ **a** تا **e** را دارند.

حالا فرض کنید همه یِ $e_{r,s,j}$ ها با $s > l$ را ساخته ایم، و این‌ها ویژه‌گی‌ها یِ **a** تا **e** را دارند. تعریف می‌کنیم

$$e_{r,l,j} := N\, e_{r,l+1,j}, \quad r > l. \tag{265}$$

تحقیقِ ویژه‌گی‌ها یِ **a** و **b** و **d** برا یِ این بردارها یِ جدید ساده است. برا یِ دوویژه‌گی یِ دیگر، توجه کنید که اگر

$$N^m\left(\sum_{r=l+1}^{k} \sum\nolimits_j a_{r,j}\, e_{r,l,j}\right) = 0, \quad m < l, \tag{266}$$

آن‌گاه

$$N^{m+1}\left(\sum_{r=l+1}^{k}\sum\nolimits_j a_{r,j}\, e_{r,l+1,j}\right)=0,\quad m+1\le l, \tag{267}$$

و از این‌جا

$$N^{l}\left(\sum_{r=l+1}^{k}\sum\nolimits_j a_{r,j}\, e_{r,l+1,j}\right)=0. \tag{268}$$

اما این یعنی

$$\left(\sum_{r=l+1}^{k}\sum\nolimits_j a_{r,j}\, e_{r,l+1,j}\right)\in\ker(N^{l}). \tag{269}$$

پس بنا بر ویژه‌گی ‌یِ $\mathbf{e}$ برا یِ $s_0=l$،

$$\sum_{r=l+1}^{k}\sum\nolimits_j a_{r,j}\, e_{r,l+1,j}=0. \tag{270}$$

و چون $\{e_{r,l+1,j}\mid (r,j);r>l\}$ خطی‌مستقل است، $a_{r,j}$ ها صفر اند. یعنی اگر (266) برقرار باشد، آن‌گاه $a_{r,j}$ ها صفر اند.

می‌خواهیم ثابت کنیم مجموعه ‌یِ $\{e_{r,l,j};\mid (r,j);r>l\}$ خطی‌مستقل است. یک ترکیب ـِ خطی از اعضا یِ این مجموعه را صفر می‌گذاریم:

$$\sum_{r=l+1}^{k}\sum\nolimits_j a_{r,j}\, e_{r,l,j}=0. \tag{271}$$

این یعنی رابطه ‌یِ (266) به ازا یِ $m=0$ برقرار است. پس ضریب‌ها یِ این ترکیب ـِ خطی صفر اند. برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ اشتراک ـِ $\mathrm{span}\{e_{r,l,j}|(r,j);r>l\}$ با هسته ‌یِ N^{l-1}، یک ترکیب ـِ خطی از اعضا یِ $\{e_{r,l,j}|(r,j);r>l\}$ را در نظر می‌گیریم که در این هسته باشد:

$$N^{l-1}\left(\sum_{r=l+1}^{k}\sum\nolimits_j a_{r,j}\, e_{r,l,j}\right)=0. \tag{272}$$

این یعنی رابطه ‌یِ (266) به ازا یِ $m=l-1$ برقرار است. پس این ترکیب ـِ خطی صفر است. یعنی

$$\mathrm{span}\{e_{r,l,j}\mid (r,j);r>l\}\cap\ker(N^{l-1})=\{0\}. \tag{273}$$

به‌علاوه، بر اساس ـِ ویژه‌گی‌ها یِ $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ برا یِ $s>l$، به ساده‌گی دیده می‌شود

$$e_{r,l,j} \in \ker N^l, \quad r > l. \tag{274}$$

حالا زیرفضا یِ $\mathbb{W}_l$ از $\ker(N^l)$ را چنان می‌سازیم که

$$\ker(N^l) = \ker(N^{l-1}) \oplus \mathrm{span}\{e_{r,l,j} \mid (r,j); r > l\} \oplus \mathbb{W}_l. \tag{275}$$

یک پایه برا یِ $\mathbb{W}_l$ می‌گیریم و اعضا یِ آن را با $e_{l,l,j}$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب،

$$\ker(N^l) = \ker(N^{l-1}) \oplus \mathrm{span}\{e_{r,l,j} \mid (r,j); r \geq l\}. \tag{276}$$

از تعریف ِ $e_{l,l,j}$ ها دیده می‌شود ویژه‌گی یِ **c** برقرار است. ضمناً از ترکیب ِ رابطه یِ بالا با ویژه‌گی یِ **e** برا یِ $s_0 = l$، به‌ساده‌گی دیده می‌شود ویژه‌گی یِ **e** برای $s_0 = l - 1$ هم برقرار است. سرانجام، ویژه‌گی یِ **e** برا یِ $s_0 = 0$ نشان می‌دهد مجموعه یِ بردارها یی که ساخته ایم یک پایه برا یِ $\mathbb{V}$ است.

■

شاید اثبات ِ قضیه یِ بالا پیچیده بنماید. اما در واقع مفهوم ِ این اثبات ساده است: یک زیرفضا پیدا می‌کنیم که جمع ِ مستقیم َ ش با هسته یِ N^{k-1} هسته یِ N^k (یعنی کل ِ $\mathbb{V}$) شود. پایه یِ این زیرفضا از بردارها یی تشکیل می‌شود که برا یِ صفرکردن ِشان لازم است N حتماً k بار (نَه کم‌تر) بر آن‌ها اثر کند. یک بار N را بر این زیرفضا اثر می‌دهیم. یک زیرفضا در هسته یِ N^{k-1} به دست می‌آید، که اشتراک َ ش با هسته یِ N^{k-2} بدیهی است. این زیرفضا را به هسته یِ N^{k-2} می‌افزاییم و زیرفضا یِ دیگر ی می‌یابیم که جمع ِ مستقیم َ ش با این‌دو هسته یِ N^{k-1} شود. N را در این دوزیرفضا یِ هسته یِ N^{k-1} (که جمع ِ مستقیم ِشان با هسته یِ N^{k-2} هسته یِ N^{k-1} می‌شد) ضرب می‌کنیم. زیرفضا یی از هسته یِ N^{k-2} به دست می‌آید. باز هم زیرفضا یی از هسته یِ N^{k-2} می‌یابیم که جمع ِ مستقیم َ ش با این زیرفضا و هسته یِ N^{k-3}، هسته یِ N^{k-2} شود. این کار را ادامه می‌دهیم تا هیچ بخش ی از $\mathbb{V}$ باقی نماند.

زیرفضا یِ

$$\mathbb{V}_{r,l,j} := \mathrm{span}\{e_{r,s,j} \mid s; 1 \leq s \leq l\} \tag{277}$$

را در نظر بگیرید. از قضیه ی ِ بالا دیده می‌شود

$$N(\mathbb{V}_{r,l,j}) = \mathbb{V}_{r,l-1,j}. \tag{278}$$

ضمناً داریم

$$\mathbb{V} = \oplus_{r,j}\, \mathbb{V}_{r,r,j}. \tag{279}$$

از این‌جا ساختار ِ کلی ی ِ نگاشت‌ها ی ِ پوچ‌توان رو ی ِ فضاها ی ِ باپایان‌بُعدی مشخص می‌شود:

قضیه ی ِ 93: فرض کنید نگاشت ِ $N \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان، و فضا ی ِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی ی ِ است. در این صورت فضا ی ِ $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ تعداد ی زیرفضا است، که بیشینه ی ِ بُعد ِشان پوچ‌توانی ی ِ N است. اثر ِ N رو ی ِ هر یک از این زیرفضاها در خود ِ آن زیرفضا است. به علاوه، در هر یک از این زیرفضاها پایه ای هست که اثرِ N بر بردارها ی ِ آن چنین است که هر بردار را به بردار ِ قبلی تبدیل می‌کند و بردار ِ اول را صفر می‌کند.

★

ساختار ِ فضاها و بردارها ی ِ قضیه‌ها ی ِ 92 و 93 را می‌شود با این شکل نمایش داد.

$$\begin{array}{cccc}
 & r=1 & \cdots & r=k \\
 & & & \\
s=1 & \mathbb{W}_1 & \cdots & N^{k-1}(\mathbb{W}_k) \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
s=k & & & \mathbb{W}_k
\end{array}$$

در این شکل، بُعد ِ هر یک از فضاها ی ِ ستون ِ r برابر است با $j_0(r)$. پایه ی ِ فضاها ی ِ سطر ِ s شامل ِ بردارها یی است که اثر ِ N^s بر آن‌ها صفر است، اما اثر ِ N^{s-1} بر آن‌ها صفر نیست. با اثردادن ِ N رو ی ِ هر یک از این فضاها، یک سطر بالا می‌رویم (s یک ی کم می‌شود). حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ فضاها ی ِ ستون ِ r از سطر ِ اول تا سطر ِ l ُ م، حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ $\mathbb{V}_{r,l,j}$ ها رو ی ِ j است. در واقع اگر هر ستون ِ شکل ِ بالا را به

زیرستون‌ها یَش تجزیه کنیم، آن‌گاه حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ فضاها یِ زیرستون ـِ j ُ م ـِ ستون ـِ r ُ م از سطر ـِ اول تا سطر ـِ l ُ م، همان $\mathbb{V}_{r,l,j}$ است.

xxii شکل ـِ ژُردَن ـِ یک نگاشت ـِ خطی

دیدیم بعض ی از نگاشت‌ها یِ خطی را می‌شود به نگاشت‌ها یِ شبهِ‌ساده و پوچ‌توان ی تجزیه کرد، که چندجمله‌ای‌ها یی از نگاشت ـِ خطی یِ اولیه اند. در نتیجه، اثر ـِ این دونگاشت بر ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ نگاشت ـِ اولیه در خود ـِ این ویژه‌فضاها می‌ماند. به این ترتیب، برا یِ تعیین ـِ ساختار ـِ کلی یِ یک نگاشت ـِ خطی یِ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر، کافی است ساختار ـِ تحدید ـِ این نگاشت به ویژه‌فضاها یَ تعمیم‌یافته اَش را بررسی کنیم. فرض کنید نگاشت ـِ خطی یِ T به شکل ـِ $T = S + N$ تجزیه شود، که S شبهِ‌ساده و N پوچ‌توان است. شکل ـِ تحدید ـِ S به یک ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T بسیار ساده است: همه یِ بردارها یِ آن ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته، در اثر ـِ S در ویژه‌مقدار ـِ متناظر با آن ویژه‌فضا ضرب می‌شوند. شکل ـِ N را هم در بخش ـِ پیش بررسی کردیم. از این‌جا قضیه یِ زیر نتیجه می‌شود، که به‌ساده‌گی از قضیه یِ 92 به دست می‌آید.

قضیه یِ 94: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، فضا یِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و T قابلِ‌تجزیه به یک نگاشت ـِ شبهِ‌ساده (S) و یک نگاشت ـِ پوچ‌توان (N) است، که $[N, S] = 0$. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای دارد (که اعضا یَش را با $e_{i,r,s,j}$ نشان می‌دهیم) با این ویژه‌گی‌ها.

a $e_{i,r,s,j} \in \mathbb{V}_i$، که $\mathbb{V}_i$ ویژه‌فضا یِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_i برا یِ S است.

b $1 \le s \le r \le k_i$، که k_i پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}(N;\mathbb{V}_i)$ است.

c $1 \le j \le j_0$ که j_0 تابع ـِ i و r است.

d $s > 1 \quad T e_{i,r,s,j} = \lambda_i\, e_{i,r,s,j} + e_{i,r,s-1,j},$

e $T e_{i,r,1,j} = \lambda_i\, e_{i,r,1,j}$

★

روشن است که $\mathbb{V}_i$ در واقع همان ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_i است. ضمناً به ساده‌گی دیده می‌شود اثر ـِ T بر

$$\mathbb{V}_{i,r,r,j} := \mathrm{span}\{e_{i,r,s,j} \mid s; 1 \le s \le r\} \qquad (280)$$

در خود ـِ $\mathbb{V}_{i,r,r,j}$ است. بنابراین می‌شود $\mathbb{V}$ را به زیرفضاها یی تجزیه کرد که اثر ـِ T بر این زیرفضاها در خود ـِ این زیرفضاها می‌ماند، و هر یک از این زیرفضاها ($\mathbb{V}_{i,r,r,j}$) پایه ای دارد که اثر ـِ T بر بردار ـِ s ُ م ـَ ش ($s > 1$) برابر است با بردار ـِ $(s-1)$ ُ م به اضافه یِ بردار ـِ s ُ م ضرب در ویژه‌مقدار ـِ متناظر با آن زیرفضا، و بردار ـِ اول هم ویژه‌بردار ـِ T است.

به این شکل ـِ T (بر حسب ـِ این پایه) شکل ـِ ژُردَن ـِ T می‌گویند. به این پایه هم یک پایه یِ ژُردَنی‌گر ـِ T می‌گویند.

شرط ـِ قضیه یِ بالا این بود که T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد. شرط ـِ لازم و کافی برا یِ این، آن است که دامنه یِ $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T باشد. یک شرط ـِ کافی هم آن است که میدان ـِ دامنه یِ T جبری‌بسته باشد.

xxiii ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ چند نگاشت ـِ خطی

نگاشت‌ها یِ $T_i \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و اسکالرها یِ λ_i را در نظر بگیرید. فرض کنید v بردار یِ است با این ویژه‌گی که به ازا یِ هر i اثر ـِ دستِ‌کم یک توان ـِ مثبت از $(T_i - \lambda_i)$ بر آن صفر می‌شود. به مجموعه یِ همه یِ بردارها یِ با این ویژه‌گی یک ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ مشترک ـِ $(T_1, \cdots)$ متناظر با $(\lambda_i, \cdots)$ می‌گوییم. هم‌چنین، به هر بردار ـِ ناصفر ی که در هسته یِ همه یِ $(T_i - \lambda_i)$ ها باشد یک ویژه‌بردار ـِ مشترک ـِ $(T_1, \cdots)$ متناظر با $(\lambda_i, \cdots)$ می‌گوییم. به اشتراک همه یِ $\ker(T_i - \lambda_i)$ ها ویژه‌فضا یِ مشترک ـِ $(T_1, \cdots)$ متناظر با $(\lambda_i, \cdots)$ می‌گوییم.

قضیه یِ 95: فرض کنید T_1 تا T_k در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر اند و با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت $\mathbb{V}$ را می‌شود به شکل ـِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم زیرفضاها یی نوشت، با این ویژه‌گی که متناظر با هر یک از این زیرفضاها به ازا یِ هر i، تصویر ـِ تحدید ـِ T_i به آن زیرفضا در خود ـِ آن زیرفضا است و یک λ_i هست که تحدید ـِ $(T_i - \lambda_i)$ به آن زیرفضا پوچ‌توان است.

اثبات: به ازا یِ هر i داریم

$$\mathbb{V} = \oplus_j \Pi_{i\,j}\,\mathbb{V}, \tag{281}$$

که $\Pi_{i\,j}$ افکنش ی است که تصویر ـِ آن ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T_i متناظر با $\lambda_{i\,j}$ است، و حاصلِ‌ضرب ـِ $\Pi_{i\,j}$ ها یِ با j ها یِ متمایز صفر است. تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{V}_{j_1\cdots j_k} := \left(\prod_i \Pi_{i\,j_i}\right)\,\mathbb{V}. \tag{282}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود این زیرفضاها و اسکالرها یِ $\lambda_{i\,j_i}$ ویژه‌گی‌ها یِ موردِنظر را دارند.

■

یک نتیجه یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 96: فرض کنید T_1 تا T_k در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر اند و با هم جابه‌جا می‌شوند، و a_1 تا a_k اسکالرها یی دل‌بخواه اند. در این صورت T با

$$T := \sum_{l=1}^{k} a_l\,T_l \tag{283}$$

ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است.

اثبات: زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_{j_1\cdots j_k}$ و اسکالرها یِ $\lambda_{i\,j_i}$ را به شکل ـِ قضیه یِ 95 می‌گیریم. به ازا یِ هر i تحدید ـِ $(T_i - \lambda_{i\,j_i})$ به $\mathbb{V}_{j_1\cdots j_k}$ پوچ‌توان است. تعریف می‌کنیم

$$\lambda_{j_1\cdots j_k} := \sum_{l=1}^{k} a_l\,\lambda_{l\,j_l}. \tag{284}$$

داریم

$$T - \lambda_{j_1\cdots j_k} = \sum_{l=1}^{k} a_l\,(T_l - \lambda_{l\,j_l}). \tag{285}$$

تحدید ـِ طرف ـِ راست به $\mathbb{V}_{j_1\cdots j_k}$ پوچ‌توان است (چون مجموع ـِ نگاشت‌ها یِ پوچ‌توان ی است که با هم جابه‌جا می‌شوند). پس $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_{j_1\cdots j_k}$ است که تحدید ـِ $(T - \mathbb{V}_{j_1\cdots j_k})$ به آن پوچ‌توان است.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ این دوقضیه این است.

قضیه یِ 97: فرض کنید T_1 تا T_k در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده اند و با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت $\mathbb{V}$ را می‌شود به شکل ـِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم زیرفضاها یی نوشت، با این

ویژه‌گی که متناظر با هر یک از این زیرفضاها به ازا یِ هر i، تصویر ـِ تحدید ـِ T_i به آن زیرفضا در خود ـِ آن زیرفضا است و یک λ_i هست که تحدید ـِ $(T_i - \lambda_i)$ به آن زیرفضا صفر است. به علاوه، اگر a_1 تا a_k اسکالرها یی دل‌بخواه باشند، آن‌گاه T به شکل ـِ (283) شبه‌ساده است.

اثبات: زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_{j_1\cdots j_k}$ و اسکالرها یِ $\lambda_{i\,j_i}$ را به شکل ـِ قضیه یِ 95 می‌گیریم. به ازا یِ هر i تحدید ـِ $(T_i - \lambda_{i\,j_i})$ به $\mathbb{V}_{j_1\cdots j_k}$ (با $\lambda_{j_1\cdots j_k}$ به شکل ـِ قضیه یِ 96) پوچ‌توان و در نتیجه صفر است (چون T_i شبهِ‌ساده است). به همین خاطر $\mathrm{res}[(T - \lambda_{j_1\cdots j_k}); \mathbb{V}_{j_1\cdots j_k}]$ هم صفر است. این نشان می‌دهد T شبهِ‌ساده است.

■

قضیه یِ 98: فرض کنید T_1 تا T_k در $\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر اند و با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت

$$\mathrm{sem}\left(\sum_{l=1}^{k} a_l\, T_l\right) = \sum_{l=1}^{k} a_l\ \mathrm{sem}(T_l),$$
$$\mathrm{nil}\left(\sum_{l=1}^{k} a_l\, T_l\right) = \sum_{l=1}^{k} a_l\ \mathrm{nil}(T_l). \tag{286}$$

اثبات: تعریف می‌کنیم

$$T := \sum_{l=1}^{k} a_l\, T_l. \tag{287}$$

داریم

$$T = \left[\sum_{l=1}^{k} a_l\ \mathrm{sem}(T_l)\right] + \left[\sum_{l=1}^{k} a_l\ \mathrm{nil}(T_l)\right]. \tag{288}$$

اما جمله‌ها یِ اول و دوم ـِ طرف ـِ راست با هم جابه‌جا می‌شوند و به‌ترتیب شبهِ‌ساده و پوچ‌توان اند. پس طرف ـِ راست تجزیه یِ ژُردَن ـِ T است.

■

قضیه یِ 99: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است و T_1 تا T_k در $\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبه‌ساده اند و با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای دارد که در آن همه یِ T_i ها قطری اند.

اثبات: کافی است زیرفضاها یِ حکم ـِ قضیه یِ 97 را به کار ببریم و پایه یِ موردِنظر را اجتماع ـِ پایه‌ها یِ این زیرفضاها بگیریم.

■

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 100: فرض کنید T_1 تا T_k در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اند و $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ است، چنان که به ازا یِ هر i و هر j تحدید ـ T_i به $\mathbb{V}_j$ مضرب ی از همانی است. در این صورت T_1 تا T_k با هم جابه‌جا می‌شوند.

★

سرانجام،

قضیه یِ 101: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، T_1 تا T_k در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ با هم جابه‌جا می‌شوند، T_1 شبهِ‌ساده است، و بُعد ـ هیچ‌یک از ویژه‌فضاها یِ T_1 بزرگ‌تر از یک نیست. در این صورت همه یِ T_i ها شبهِ‌ساده اند.

اثبات: فرض کنید v یک ویژه‌بردار ـ T_1 باشد. از قضیه یِ 59 نتیجه می‌شود اثر ـ همه یِ T_i ها بر این بردار متناسب با خود ـ v است. پس پایه ای که T_1 را قطری می‌کند همه یِ T_i ها را قطری می‌کند.

■

xxiv تابع ـ یک نگاشت ـ خطی

در بخش ـ xv تابع ـ چندجمله‌ای یِ نگاشت ـ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ (یا چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته در صورت ـ وارون‌پذیربودن ـ این نگاشت در $\mathbb{V}$) را تعریف کردیم. می‌خواهیم این تعریف را به رده یِ بزرگ‌تر ی از تابع‌ها گسترش دهیم. تابع ـ $f:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید، که در آن $\mathbb{F}$ میدان ـ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است. فرض کنید نگاشت ـ T شبهِ‌ساده باشد. در این صورت $f(T)$ را یک نگاشت ـ خطی رو یِ $\mathbb{V}$ تعریف می‌کنیم با این ویژه‌گی که اگر

$$T\,v=\lambda\,v, \tag{289}$$

(یعنی اگر v ویژه‌بردار ـ T با ویژه‌مقدار ـ λ باشد) آن‌گاه

$$f(T)\,v:=f(\lambda)\,v. \tag{290}$$

چون فرض کردیم T شبهِ‌ساده است، هر بردار را می‌شود (به‌طور ِ یک‌تا یی) به شکل ِ مجموع ِ بردارها یی نوشت که ویژه‌بردار ِ T اند. پس با تعیین ِ اثر ِ $f(T)$ بر ویژه‌بردارها یِ T، اثر ِ آن بر همه یِ بردارها معلوم است. توجه کنید که برا یِ این تعریف، لزوم ی نداشت f رو یِ کل ِ $\mathbb{F}$ تعریف شده باشد. در واقع کافی است دامنه یِ f زیرمجموعه ای از $\mathbb{F}$ شامل ِ ویژه‌مقدارها یِ T باشد.

حالا فرض کنید T شبهِ‌ساده نباشد، اما ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد:

$$T = S + N, \tag{291}$$

که در آن S شبهِ‌ساده و N پوچ توان است و این دو نگاشت با هم جابه‌جا می‌شوند. اگر مشتق‌گیری از تابع‌ها یِ رو یِ $\mathbb{F}$ معنی می‌داشت، و اگر می‌شد f را بسط ِ تِیلِر داد، و اگر بسط ِ تِیلِر ِ $\mathbb{F}$ با خود ِ f برابر می‌بود، یک راه ِ تعریف ِ $f(T)$ این می‌بود:

$$\begin{aligned} f(T) \;&=\; f(S+N) \\ &:= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} f^{(k)}(S), \end{aligned} \tag{292}$$

که در آن n پوچ‌توانی یِ N است، و تابع‌ها یِ نگاشت ِ شبهِ‌ساده یِ S بر اساس ِ (290) تعریف شده اند. بر این اساس، تابع ِ یک نگاشت ِ خطی یِ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر را چنین تعریف می‌کنیم.

نگاشت ِ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع ِ f از مجموعه یِ ویژه‌مقدارها یِ نگاشت ِ T به $\mathbb{F}$ (میدان ِ متناظر با فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$) تعریف شده، و تابع‌ها یِ $f^{(k)}$ هم برا یِ بعض ی از ویژه‌مقدارها یِ T و با مقدار در $\mathbb{F}$ تعریف شده اند. k یک عدد ِ طبیعی است، و اگر پوچ‌توانی یِ تحدید ِ $\mathrm{nil}(T)$ به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ بزرگ‌تر از k باشد، $f^{(k)}$ باید در λ تعریف شده باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\tilde{f}(T)\, v := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[\mathrm{nil}(T)]^k}{k!}\, f^{(k)}(\lambda)\, v. \tag{293}$$

در این‌جا $f^{(0)}$ همان f، v یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ، و n پوچ‌توانی یِ تحدید ِ $\mathrm{nil}(T)$ به ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ است.

توجه کنید که تابع ِ یک نگاشت ِ خطی را برا یِ یک خانواده تابع تعریف کردیم نه یک تابع. می‌شود $f^{(k)}$ ها را مشتق‌ها یِ صوری یِ f در نظر گرفت. اگر f واقعاً مشتق‌پذیر باشد (به تعداد ِ کافی مرتبه) آن وقت می‌شود به جا یِ نماد ِ $\tilde{f}(T)$ خود ِ $f(T)$ را به کار برد. جز این هم، از این پس هر جا ابهام ی نباشد به جا یِ نماد ِ $\tilde{f}(T)$ خود ِ $f(T)$ را به کار می‌بریم. ضمناً از آن‌جا که تجزیه یِ ژُردَن (در صورت ِ وجود) یک‌تا است، تعریف ِ (293) بی‌ابهام است.

قضیه یِ 102: فرض کنید $T_1 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است، $f(T_1)$ یک تابع ِ T_1 است، و $T_2 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ با T_1 جابه‌جا می‌شود. در این صورت T_2 با $f(T_1)$ جابه‌جا می‌شود. اگر علاوه بر این T_2 هم ژُردَن‌تجزیه‌پذیر و $g(T_2)$ یک تابع ِ T_2 باشد، آن‌گاه $f(T_1)$ با $g(T_2)$ جابه‌جا می‌شود.

اثبات: هر یک از ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T_1 یک ویژه‌فضا یِ ناوردا یِ T_2 اند، و T_2 با $\mathrm{nil}(T_1)$ جابه‌جا می‌شود. v را یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ T_1 متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}
T_2\,[f(T_1)]\,v &= T_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\mathrm{nil}(T_1)]^k}{k!}\,f^{(k)}(\lambda)\,v,\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\mathrm{nil}(T_1)]^k}{k!}\,f^{(k)}(\lambda)\,(T_2\,v),\\
&= [f(T_1)]\,T_2\,v. \qquad (294)
\end{aligned}$$

از این‌جا معلوم می‌شود $f(T_1)$ با T_2 جابه‌جا می‌شود. برا یِ اثبات ِ باقی‌مانده یِ حکم هم کافی است به جا یِ T_1، T_2، و f به‌ترتیب T_2، $f(T_1)$، و g را به کار ببریم.

■

سئال ی که می‌ماند این است که رابطه یِ تعریف ِ (293) با تعریف‌ها یِ (109) و (111) چیست. قضیه یِ زیر (که به‌ساده‌گی قابلِ‌اثبات است) به این سئال جواب می‌دهد.

قضیه یِ 103: فرض کنید نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ قابل ِ تجزیه به یک نگاشت ِ خطی یِ شبهِ‌ساده (S) و یک نگاشت ِ خطی یِ پوچ‌توان (N) است، که با هم جابه‌جا می‌شوند، f یک چندجمله‌ای رو یِ $\mathbb{F}$ (میدان ِ $\mathbb{V}$) است، و $f^{(k)}$ مشتق ِ صوری یِ k اُم ِ f است، که به این ترتیب به دست می‌آید که به جا یِ z^i در $f(z)$، عبارت ِ

$i(i-1)\cdots(i-k+1)z^{i-k}$ را بگذاریم. در این صورت تعریف‌ها یِ (109) و (293) یک‌سان اند. (در (293)، به جا یِ $\tilde{f}$ همان f را می‌گذاریم.) اگر S ناتکین باشد، آن‌گاه S و T در $\mathbb{V}$ وارون‌پذیر اند و اگر f یک چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته رو یِ $\mathbb{F}-\{0\}$ باشد، تعریف‌ها یِ (111) و (293) یک‌سان اند.

اثبات: در مورد ـِ چندجمله‌ای‌ها، اثبات به‌ساده‌گی با استفاده از قضیه یِ بسط ـِ دوجمله‌ای انجام می‌شود. اگر S ناتکین باشد، به‌ساده‌گی دیده می‌شود نگاشت ی که ویژه‌فضاها یَش همان ویژه‌فضاها یِS، و ویژه‌مقدارها یَش وارون ـِ ویژه‌بردارها یِ متناظر ـِ S اند، وارون ـِ S است. در مورد ـِ وارون ـِ T و چندجمله‌ای‌ها یِ تعمیم‌یافته هم کافی است به این توجه شود که $(1+z)^{-j}$ را می‌شود بر حسب ـِ توان‌ها یِ z بسط داد و مانده ای به دست آورد که مضرب ی از یک توان ـِ دل‌بخواه ـِ z است.

■

قضیه یِ 104: فرض کنید $T\in\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است و $f(T)$ یک تابع ـِ f است. در این صورت اگر v یک ویژه‌بردار ـِ تعمیم‌یافته یِ T با ویژه‌مقدار ـِ λ باشد، آن‌گاه v یک ویژه‌بردار ـِ تعمیم‌یافته یِ $f(T)$ با ویژه‌مقدار ـِ $f(\lambda)$ خواهد بود. اگر v یک ویژه‌بردار ـِ T با ویژه‌مقدار ـِ λ باشد، آن‌گاه v یک ویژه‌بردار ـِ $f(T)$ با ویژه‌مقدار ـِ $f(\lambda)$ خواهد بود.

اثبات: v را یک ویژه‌بردار ـِ تعمیم‌یافته یِ T با ویژه‌مقدار ـِ λ می‌گیریم. از (293) داریم

$$[f(T)-f(\lambda)]\,v=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[\mathrm{nil}(T)]^k}{k!}f^{(k)}(\lambda)\,v, \tag{295}$$

که نتیجه می‌دهد

$$[f(T)-f(\lambda)]^n\,v=0. \tag{296}$$

اگر v ویژه‌بردار ـِ T باشد، آن‌گاه اثر ـِ T و $\mathrm{sem}(T)$ بر آن یک‌سان است و اثر ـِ $\mathrm{nil}(T)$ بر آن صفر است. به این ترتیب طرف ـِ راست ـِ (295) صفر می‌شود.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 105: فرض کنید $T\in\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است و $f(T)$ یک تابع ـِ T است. در این صورت $f(T)$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است و

$$\mathrm{sem}[f(T)]=f[\mathrm{sem}(T)]. \tag{297}$$

★

V

نمایش ـِ ماتریسی

XXV بردار ـِ ستونی و ماتریس

فضا یِ خطی یِ باپایانبُعدی یِ $\mathbb{V}$ و پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ برا یِ آن را در نظر بگیرید. بردار ـِ دل‌بخواه ـِ $v \in \mathbb{V}$ را می‌شود بر حسب ـِ این پایه بسط داد. این بسط را به شکل ـِ زیر می‌نویسیم.

$$v = v^i\, e_i. \tag{298}$$

در این‌جا از قراردادِجمع ـِ اَین‌شْتَین استفاده شده: اگر شاخص ی یک و تنها یک بار به شکل ـِ بالانویس، و یک و تنها یک بار به شکل ـِ زیرنویس تکرار شود، منظور این است که رو یِ آن شاخص جمع انجام شده است:

$$A^{\cdots i \cdots}{}_{\cdots i \cdots} := \sum_i A^{\cdots i \cdots}{}_{\cdots i \cdots}\ . \tag{299}$$

رابطه یِ (298) را برا یِ خود ـِ بردارها یِ پایه هم می‌شود نوشت:

$$e_i = \delta_i^j\, e_j, \tag{300}$$

یا

$$(e_i)^j = \delta_i^j, \tag{301}$$

که در آن δ_j^i دلتا یِ کْرُنِکِر است:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \tag{302}$$

بردار ِ v را بر حسب ِ مئلفه‌ها یَش می‌شود به شکل ِ

$$\mathrm{mat}(v) := \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \tag{303}$$

نمایش داد، که در آن $n = \dim(\mathbb{V})$. گاه برا یِ ساده‌گی به جا یِ $\mathrm{mat}(v)$ هم خود ِ v را می‌گذاریم. البته توجه دارید که مئلفه‌ها یِ v به پایه یِ انتخاب‌شده بسته‌گی دارد، در نتیجه نمایش ِ ماتریسی یِ آن یعنی $\mathrm{mat}(v)$ هم به پایه بسته‌گی دارد.

حالا فرض کنید $\mathbb{W}$ هم یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، میدان ِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ یکی است، و $\{f_a \mid a\}$ یک پایه یِ $\mathbb{W}$ است. نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ با اثر َش رو یِ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ مشخص می‌شود:

$$T\, e_i =: T^a{}_i\, f_a. \tag{304}$$

به $T^a{}_i$ ها عنصرها یِ ماتریسی یِ T می‌گویند. به

$$\mathrm{mat}(T) := \begin{pmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^p{}_1 & \cdots & T^p{}_n \end{pmatrix} \tag{305}$$

هم ماتریس ِ متناظر با T، در پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ و $\{f_a \mid a\}$ می‌گویند. در این‌جا $n = \dim(\mathbb{V})$، و $p = \dim(\mathbb{W})$. روشن است که عنصرها یِ ماتریس ِ T به پایه یِ انتخاب‌شده بسته‌گی دارد. توجه کنید که شاخص‌ها یِ متناظر با $\mathbb{V}$ را با حرف‌ها یِ میانی یِ لاتین، و شاخص‌ها یِ متناظر با $\mathbb{W}$ را با حرف‌ها یِ ابتدایی یِ لاتین نشان داده ایم.

رابطه یِ (304) را این‌طور هم می‌شود نوشت.

$$T^a{}_i = (T\, e_i)^a. \tag{306}$$

یعنی ماتریس ـِ متناظر با T چنین به دست می‌آید که در ستون ـِ i مئلفه‌ها یِ $T\,e_i$ را بگذاریم.

xxvi ضرب ـِ ماتریس‌ها

قضیه یِ 106: فرض کنید $T\in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، فضاها یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی اند، و $v\in\mathbb{V}$. در این صورت بین ـِ مئلفه‌ها یِ v در پایه یِ $\{e_i\mid i\}$، مئلفه‌ها یِ (Tv) در پایه یِ $\{f_a\mid a\}$، و عنصرها یِ ماتریس ـِ T در همین پایه‌ها این رابطه برقرار است.

$$(T\,v)^a = T^a{}_i\,v^i. \tag{307}$$

اثبات: کافی است v را بر حسب ـِ بردارها یِ پایه یِ $\mathbb{V}$ بسط دهید و (304) و خطی‌بودن ـِ T را به کار ببرید.

■

رابطه یِ (307) را به شکل ـِ

$$\begin{pmatrix}(T\,v)^1\\ \vdots\\ (T\,v)^p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ T^p{}_1 & \cdots & T^p{}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^n\end{pmatrix} \tag{308}$$

هم می‌نویسند. این در واقع توجیه ـِ تعریف ـِ ضرب ـِ یک ماتریس در یک بردار (ماتریس ـِ ستونی) به شکل ـِ خاص ـِ (307) است. یعنی به این شکل که یک ماتریس ـِ $p\times n$ را می‌شود در یک بردار ـِ n مئلفه‌ای (یعنی یک ماتریس ـِ $n\times 1$) ضرب کرد و یک بردار ـِ p مئلفه‌ای (یعنی یک ماتریس ـِ $p\times 1$) به دست آورد؛ مئلفه یِ a ُم ـِ بردار ـِ حاصل به این شکل حساب می‌شود که مئلفه‌ها یِ سطر ـِ a ُمِ ماتریس را نظیر به نظیر در مئلفه‌ها یِ بردار ـِ اولیه ضرب کنیم و همه یِ حاصلِ‌ضرب‌ها را با هم جمع کنیم.

حالا فرض کنید $\mathbb{U}$ هم یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ دیگر، با همان میدان ـِ متناظر با $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ است. نگاشت ـِ $S\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ را هم می‌شود با ماتریس نشان داد. چه رابطه ای بین ـِ ماتریس‌ها یِ متناظر با نگاشت‌ها یِ خطی یِ S، T، و (TS) هست؟

قضیه یِ 107: فرض کنید $S\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ و $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، فضاها یِ $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی اند، و $\{d_\alpha\mid\alpha\}$، $\{e_i\mid i\}$، و $\{f_a\mid a\}$ پایه‌ها یِ به‌ترتیب $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، و $\mathbb{W}$ اند. در این صورت،

$$(T\,S)^a{}_\alpha = T^a{}_i\, S^i{}_\alpha. \tag{309}$$

اثبات: داریم

$$\begin{aligned}(T\,S)^a{}_\alpha &= (T\,S\,d_\alpha)^a,\\ &= T^a{}_i\,(S\,d_\alpha)^i,\\ &= T^a{}_i\,S^i{}_\alpha. \end{aligned} \tag{310}$$

■

این رابطه هم چیز ی نیست جز تعریف ِ ضرب ِ ماتریسی:

$$\begin{pmatrix}(T\,S)^1{}_1 & \cdots & (T\,S)^1{}_m\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (T\,S)^p{}_1 & \cdots & (T\,S)^p{}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ T^p{}_1 & \cdots & T^p{}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S^1{}_1 & \cdots & S^1{}_m\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ S^n{}_1 & \cdots & S^n{}_m\end{pmatrix}. \tag{311}$$

حاصلِ‌ضرب ِ ماتریسی یِ $(T\,S)$ زمان ی تعریف می‌شود که تعداد ِ ستون‌ها یِ T با تعداد ِ سطرها یِ S برابر باشد. در این صورت برا یِ به‌دست‌آوردن ِ $(T\,S)^a{}_\alpha$، عنصرها یِ سطر ِ a ِ ماتریس ِ T را نظیر به نظیر در عنصرها یِ ستون ِ α یِ ماتریس ِ S ضرب می‌کنیم، و حاصلِ‌ضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

به‌ساده‌گی می‌شود دید

قضیه یِ 108: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه ماتریس ِ متناظر با $1_{\mathbb{V}}$ در پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ عبارت است از

$$(1_{\mathbb{V}})^i{}_j = \delta^i_j. \tag{312}$$

به این، ماتریس ِ واحد (یکه) می‌گویند: ماتریس ی که همه یِ عنصرها یِ قطری یَش یک، و همه یِ عنصرها یِ ناقطری یَش صفر است.

★

نتیجه یِ مستقیم ِ قضیه‌ها یِ 107 و 108 این است که

قضیه یِ 109: فرض کنید T یک نگاشت ِ خطی و $\mathrm{dom}(T)$ باپایان‌بُعدی است، و $\{e_i \mid i\}$ و $\{f_a \mid a\}$ پایه‌ها یی برا یِ به‌ترتیب $\mathrm{dom}(T)$ و $\mathrm{img}(T)$ اند. در این صورت،

a اگر S یک وارون ـ راست ـ T باشد، آن‌گاه

$$T^a{}_i\, S^i{}_b = \delta^a_b. \tag{313}$$

b اگر T وارون‌پذیر باشد و T^{-1} وارون ـ آن باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} T^a{}_i\, (T^{-1})^i{}_b &= \delta^a_b, \\ (T^{-1})^i{}_a\, T^a{}_j &= \delta^i_j. \end{aligned} \tag{314}$$

★

xxvii تغییر ـ پایه

دیدیم مئلفه‌ها یِ بردارها و عنصرها یِ ماتریسی یِ نگاشت‌ها یِ خطی به پایه بسته‌گی دارند. می‌خواهیم رابطه یِ بین ـ این‌ها در پایه‌ها یِ مختلف را به دست آوریم. ابتدا رابطه یِ بین ـ بردارها یِ دو پایه یِ مختلف را بررسی می‌کنیم.

قضیه یِ 110: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی، و $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه یِ آن است. در این صورت زیرمجموعه یِ $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ از $\mathbb{V}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است، اگر و تنها اگر یک نگاشت ـ وارون‌پذیر ـ $\Lambda \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ باشد که

$$\forall\, i \;:\; \Lambda\, e_i = e'_i. \tag{315}$$

اثبات: فرض کنید چنین‌نگاشت ی هست. تعداد ـ اعضا یِ B' برابر با بُعد ـ $\mathbb{V}$ است. پس برا یِ این که نشان دهیم B' پایه است، کافی است نشان دهیم B' خطی‌مستقل است. فرض کنید یک ترکیب ـ خطی از اعضا یِ B' صفر است:

$$c^i\, e'_i = 0. \tag{316}$$

نتیجه می‌شود

$$\Lambda(c^i\, e_i) = 0, \tag{317}$$

و از آن‌جا معلوم می‌شود

$$c^i e_i = 0, \tag{318}$$

چون Λ وارون‌پذیر است و بنابراین هسته اَش بدیهی است. از رابطه يِ بالا نتیجه می‌شود c^i ها صفر اند. پس B' خطی‌مستقل و بنابراین پایه است.

برعکس، فرض کنید B' پایه است. نگاشت ـِ خطی يِ Λ را به شکل ـِ (315) تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم این نگاشت وارون پذیر است. فرض کنید اثر ـِ این نگاشت بر بردار ـِ $v = v^i\, e_i$ صفر است. در این صورت،

$$v^i\, e_i' = 0. \tag{319}$$

اما B' پایه و در نتیجه خطی‌مستقل است، پس همه يِ v^i ها صفر اند. بنابراین هسته يِ Λ بدیهی است و این نگاشت وارون‌پذیر است.

■

به نگاشت ـِ Λ در رابطه يِ (315)، نگاشت ـِ تغییرِپایه (از پایه يِ B به پایه يِ B') می‌گویند. یک نتیجه يِ (315) این است که

$$e_i' = \Lambda^j{}_i\, e_j, \tag{320}$$

و

$$e_i = (\Lambda^{-1})^j{}_i\, e_j', \tag{321}$$

که در آن $\Lambda^i{}_j$ ها عنصرها يِ ماتریسی يِ Λ، و $(\Lambda^{-1})^i{}_j$ ها عنصرها يِ ماتریسی يِ Λ^{-1} اند، هردو در پایه يِ B. رابطه يِ (321) از رو يِ (320) و با استفاده از (314) به دست می‌آید. اما (315) را می‌شود به این شکل هم نوشت.

$$e_i = (\Lambda^{-1})\, e_i', \tag{322}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$e_i = (\Lambda^{-1})^{j'}{}_{i'}\, e_j'. \tag{323}$$

در این‌جا $(\Lambda^{-1})^{i'}{}_{j'}$ ها عنصرها یِ ماتریسی یِ Λ^{-1} در پایه یِ B' اند. مقایسه یِ (321) و (323) نشان می‌دهد

قضیه یِ 111: عنصرها یِ ماتریسی یِ نگاشت ـ تغییرِپایه از پایه یِ B به پایه یِ B'، در این دوپایه یک‌سان اند.

★

قضیه یِ 112: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، $B=\{e_i\mid i\}$ و $B'=\{e'_i\mid i\}$ دو پایه یِ این فضا یند، و Λ نگاشت ـ تغییرِپایه از B به B' است. بین ـ مئلفه‌ها یِ بردار ـ دل‌بخواه ـ $v\in\mathbb{V}$ در پایه‌ها یِ B و B' این رابطه‌ها برقرار است.

$$v^j=\Lambda^j{}_i\,v^{i'},\qquad v^{i'}=(\Lambda^{-1})^i{}_j\,v^j, \tag{324}$$

که در آن v^i ها مئلفه‌ها یِ v در پایه یِ B، $v^{i'}$ ها مئلفه‌ها یِ v در پایه یِ B'، و $\Lambda^i{}_j$ ها مئلفه‌ها یِ Λ در پایه یِ B (یا B') اند.

اثبات: داریم

$$\begin{aligned} v &= v^{i'}\,e'_i,\\ &= v^{i'}\,\Lambda^j{}_i\,e_j. \end{aligned} \tag{325}$$

در تساوی یِ دوم از (320) استفاده شده. اما ضریب ـ e_j در عبارت ـ آخر v^j است. از این‌جا رابطه یِ اول ـ حکم ـ قضیه نتیجه می‌شود. اثبات ـ رابطه یِ دوم هم کاملاً مشابه است.

■

نتیجه یِ قضیه یِ بالا به شکل ـ ماتریسی این است که اگر از مئلفه‌ها یِ v در پایه یِ B' یک بردار ـ ستونی بسازیم، آن‌گاه این بردار برابر است با حاصلِ‌ضرب ـ وارون ـ ماتریس ـ تغییرِپایه، در بردار ـ ستونی یِ حاصل از مئلفه‌ها یِ v در پایه یِ B:

$$v'=\Lambda^{-1}\,v. \tag{326}$$

البته این شکل ـ نوشتن یک خطر دارد و آن این که ممکن است این تصور پیش آید که در باره یِ دو بردار (v و v') صحبت می‌کنیم؛ در حال ی که واقعاً یک بردار داریم و دو نمایش ـ ماتریسی از آن. می‌شد به جا یِ این نوشت

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}'(v) &= \mathrm{mat}(\Lambda^{-1})\ \mathrm{mat}(v),\\ &= \mathrm{mat}'(\Lambda^{-1})\ \mathrm{mat}(v),\end{aligned}\tag{327}$$

که mat و mat' نمایش ـِ ماتریسی در پایه‌ها یِ به‌ترتیب B و B' اند.

در انتخابِ‌پایه برا یِ نگاشت‌ها یِ خطی، اختیار ـِ بیش‌تر ی هست: می‌شود هم پایه یِ دامنه را عوض کرد و هم پایه یِ تصویر را، و این دوتغییرِپایه ارتباط ی به هم ندارند.

قضیه یِ 113: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایانبُعدی با میدان‌ها یِ یک‌سان، $B=\{e_i \mid i\}$ و $B'=\{e'_i \mid i\}$ دو پایه یِ $\mathbb{V}$، $C=\{f_a \mid a\}$ و $C'=\{f'_a \mid a\}$ دو پایه یِ $\mathbb{W}$، و Λ وM نگاشت‌ها یِ تغییرِپایه به‌ترتیب از B به B' و از C به C' اند. بین ـِ عنصرها یِ ماتریسی یِ نگاشت ـِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ در پایه‌ها یِ B و C، و عنصرها یِ ماتریسی یِ همین نگاشت در پایه‌ها یِ B' و C' این رابطه برقرار است.

$$T^{a'}{}_{\imath'} = (\mathrm{M}^{-1})^a{}_b\,T^b{}_j\,\Lambda^j{}_i,\tag{328}$$

که در آن مئلفه‌ها یِ پریم‌دار ـِ T عنصرها یِ ماتریسی یِ نگاشت ـِ T در پایه‌ها یِ B' و C'، و مئلفه‌ها یِ بدونِ‌پریم ـِ T عنصرها یِ ماتریسی یِ همین نگاشت در پایه‌ها یِ B و C اند. $\Lambda^i{}_j$ ها عنصرها یِ ماتریسی یِ Λ در پایه یِ B (یا B')، و $\mathrm{M}^a{}_b$ ها عنصرها یِ ماتریسی یِ M در پایه یِ C (یا C') اند.

اثبات: با استفاده از به‌ترتیب (306)، قضیه یِ 112، و (320) داریم

$$\begin{aligned}T^{a'}{}_{\imath'} &= (T\,e_{\imath'})^{a'},\\ &= (\mathrm{M}^{-1})^a{}_b\,(T\,e_{\imath'})^b,\\ &= (\mathrm{M}^{-1})^a{}_b\,\Lambda^j{}_i\,(T\,e_j)^b.\end{aligned}\tag{329}$$

■

حکم ـِ این قضیه را هم با قبول ـِ خطر ـِ اشتباه می‌شود به شکل ـِ بسته یِ

$$T' = \mathrm{M}^{-1}\,T\,\Lambda\tag{330}$$

نوشت. و باز شکل ی هم هست که خطر ـِ اشتباه را ندارد:

$$\mathrm{mat}'(T) = \mathrm{mat}(\mathrm{M}^{-1})\ \mathrm{mat}(T)\ \mathrm{mat}(\Lambda). \tag{331}$$

یک حالت ِ خاص ِ قضیه يِ بالا زمان ی است که تصویر ِ نگاشت زیرفضا يِ دامنه يِ آن باشد. با وجود ِ این ممکن است برا يِ دامنه و تصویر پایه‌ها يِ متفاوت ی انتخاب شود. مثلاً ممکن است پایه يِ دامنه را B بگیریم اما برا يِ بردارها يِ تصویر پایه يِ B' را بگیریم، هر چند $\mathrm{span}(B) = \mathrm{span}(B')$. در این صورت شاخص‌ها يِ بالا يِ نگاشت ِ T پریم‌دار، و شاخص‌ها يِ پایین ِ این نگاشت بدونِ‌پریم خواهند بود:

$$T^{i'}{}_j = (\Lambda^{-1})^i{}_k\, T^k{}_j. \tag{332}$$

هم‌چنین،

$$T^i{}_{j'} = T^i{}_k\, \Lambda^k{}_j. \tag{333}$$

سرانجام، این تغییرِپایه‌ها را می‌شود در مورد ِ خود ِ نگاشت ِ تغییرِپایه، و در مورد ِ نگاشت ِ همانی به کار برد. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\Lambda^i{}_j &= \Lambda^{i'}{}_{j'} = 1^i{}_{j'},\\
(\Lambda^{-1})^i{}_j &= (\Lambda^{-1})^{i'}{}_{j'} = 1^{i'}{}_j,\\
\Lambda^{i'}{}_j &= (\Lambda^{-1})^i{}_{j'} = 1^i{}_j = 1^{i'}{}_{j'},
\end{aligned} \tag{334}$$

و

$$\begin{aligned}
\Lambda^i{}_{j'} &= (\Lambda^2)^i{}_j = (\Lambda^2)^{i'}{}_{j'},\\
(\Lambda^{-1})^{i'}_j &= (\Lambda^{-2})^i{}_j = (\Lambda^{-2})^{i'}{}_{j'}.
\end{aligned} \tag{335}$$

با استفاده از این رابطه‌ها، حکم‌ها يِ قضیه‌ها يِ 112 و 113 را می‌شود به این شکل نوشت:

$$v^{i'} = (1_{\mathbb{V}})^{i'}{}_j\, v^j, \tag{336}$$

و

$$T^{a'}{}_{\imath'} = (1_{\mathbb{W}})^{a'}{}_{b}\, T^{b}{}_{j}\, (1_{\mathbb{V}})^{j}{}_{\imath'}. \qquad (337)$$

در واقع تغییرِپایه چیز ی نیست مگر واردکردن ـ عنصرها یِ ماتریسی یِ مناسب ـ نگاشت‌ها یِ همانی.

یک نکته یِ مهم در مورد ـ تغییرِپایه آن است که با این کار جمع ـ رو یِ شاخص‌ها یِ تکراری تغییر نمی‌کند. یعنی

$$A^{\cdots\imath'\cdots}{}_{\cdots\imath'\cdots} = A^{\cdots i\cdots}{}_{\cdots i\cdots}\ . \qquad (338)$$

در این رابطه فقط پایه یِ متناظر با شاخص ـ تکراری یِ i عوض شده است.

xxviii نمایش ـ ماتریسی و حاصلِ‌جمع ـ مستقیم

نگاشت ـ $T\in\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـ مستقیم ـ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_l$، و $\mathbb{W}$ حاصلِ‌جمع ـ مستقیم ـ زیرفضاها یِ $\mathbb{W}_1$ تا $\mathbb{W}_k$ است. شکل ـ ماتریسی یِ T را چنین می‌نویسیم.

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} T^{\mathbb{W}_1}{}_{\mathbb{V}_1} & \cdots & T^{\mathbb{W}_1}{}_{\mathbb{V}_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\mathbb{W}_k}{}_{\mathbb{V}_1} & \cdots & T^{\mathbb{W}_k}{}_{\mathbb{V}_l} \end{pmatrix}. \qquad (339)$$

تفاوت ـ این نمایش ـ ماتریسی با ماتریس‌ها یی که قبلاً دیدیم این است که هر یک از مئلفه‌ها یِ $\mathrm{mat}(T)$ یک نگاشت ـ خطی است نَه عدد. $T^{\mathbb{W}_i}{}_{\mathbb{V}_j}$ یک نگاشت ـ خطی از $\mathbb{V}_j$ به $\mathbb{W}_i$ است. ماتریس ـ بالا بر $v\in\mathbb{V}$ اثر می‌کند و $w\in\mathbb{W}$ را می‌دهد. شکل ـ ماتریسی یِ این اثر چنین است.

$$\begin{pmatrix} w^{\mathbb{W}_1} \\ \vdots \\ w^{\mathbb{W}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\mathbb{W}_1}{}_{\mathbb{V}_1} & \cdots & T^{\mathbb{W}_1}{}_{\mathbb{V}_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\mathbb{W}_k}{}_{\mathbb{V}_1} & \cdots & T^{\mathbb{W}_k}{}_{\mathbb{V}_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{\mathbb{V}_1} \\ \vdots \\ v^{\mathbb{V}_l} \end{pmatrix}. \qquad (340)$$

این ضرب کاملاً شبیه ـ ضرب ـ یک ماتریس ـ معمولی در یک بردار ـ معمولی است؛ جز این که مئلفه‌ها یِ ماتریس و بردار، نگاشت ـ خطی و بردار اند. ممکن است k یا l یک باشند. یک حالت ـ خاص ـ این نمایش ـ ماتریسی، حالت ی است که همه یِ $\mathbb{V}_j$ ها و

$\mathbb{W}_i$ ها یک‌بُعدی باشند. در این صورت این نمایش ـِ ماتریسی همان نمایش ـِ ماتریسی یِ معمولی است.

نگاشت ـِ هسته‌جدا یِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. یک نمایش ـِ ماتریسی این نگاشت

$$T = \begin{pmatrix} \bar{T} & 0 \end{pmatrix} \tag{341}$$

است، که در آن $\bar{T}$ برابر با $\mathrm{res}[T; \mathrm{edom}(T)]$، و 0 صفر ـِ $\mathfrak{LF}[\mathbb{W}; \ker(T)]$ است. در این حالت $\mathbb{V}$ به شکل ـِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ $\mathrm{edom}(T)$ و $\ker(T)$ نوشته شده.

برا یِ نگاشت ـِ هسته‌جدا یِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$، می‌شود فضا یِ شامل ـِ تصویر را هم به شکل ـِ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ $\mathrm{edom}(T)$ و $\ker(T)$ نوشت. به این ترتیب، یک نمایش ـِ ماتریسی یِ T به این شکل است.

$$T = \begin{pmatrix} \mathrm{ess}(T) & 0 \\ \hat{T} & 0 \end{pmatrix}. \tag{342}$$

هم‌چنین،

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 - \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{343}$$

که در آن Π افکنش ی است که با (211) تعریف می‌شود،

$$T' := \mathrm{cor}(T) = \Pi\, T = \begin{pmatrix} \mathrm{ess}(T) & 0 \\ \hat{0} & 0 \end{pmatrix}, \tag{344}$$

و

$$T'' := T - \mathrm{cor}(T) = (1 - \Pi)\, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{T} & 0 \end{pmatrix}. \tag{345}$$

xxix نمایش ـِ ماتریسی یِ یک نگاشت ـِ خطی در پایه‌ها یِ خاص: زیرفضاها یِ ناوردا، شکل ـِ قطری، و شکل ـِ ژُردَنی

همه یِ فضاها یِ خطی یی که در این بخش به کار می‌روند باپایان‌بُعدی اند. نگاشت ـِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathbb{V}$ شامل ـِ k زیرفضا یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_k$ است، که

حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِشان خود ـِ $\mathbb{V}$ است، و هر یک از زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_i$ $\mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_i$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathbb{V}$ تحتِ T است. یک پایه برا یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که n_1 عضو ـِ اول ـَ ش یک پایه برا یِ $\mathbb{V}_i$، n_2 عضو ـِ بعدی یَش یک پایه برا یِ $\mathbb{V}_2$، و ... تشکیل می‌دهند. مثلاً در حالت ـِ $k = 3$، در این پایه نمایش ـِ ماتریسی یِ نگاشت ـِ T چنین است.

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} T^{\mathbb{V}_1}{}_{\mathbb{V}_1} & T^{\mathbb{V}_1}{}_{\mathbb{V}_2} & T^{\mathbb{V}_1}{}_{\mathbb{V}_3} \\ 0^{\mathbb{V}_2}{}_{\mathbb{V}_1} & T^{\mathbb{V}_2}{}_{\mathbb{V}_2} & T^{\mathbb{V}_2}{}_{\mathbb{V}_3} \\ 0^{\mathbb{V}_3}{}_{\mathbb{V}_1} & 0^{\mathbb{V}_3}{}_{\mathbb{V}_2} & T^{\mathbb{V}_3}{}_{\mathbb{V}_3} \end{pmatrix}. \tag{346}$$

در این‌جا $T^{\mathbb{V}_i}{}_{\mathbb{V}_j}$ یک ماتریس ـِ $n_i \times n_j$ است، و $0^{\mathbb{V}_i}{}_{\mathbb{V}_j}$ یک ماتریس ـِ $n_i \times n_j$ است که همه یِ مئلفه‌ها یَش صفر اند. به ماتریس ـِ T با این شکل، یک ماتریس ـِ بلُکی‌بالامثلثی می‌گویند. (اگر ترتیب ـِ اعضا یِ پایه یِ $\mathbb{V}$ را وارون می‌کردیم، نمایش ـِ ماتریسی یِ T بلُکی‌پایین‌مثلثی می‌شد.)

فرض کنید همه یِ زیرفضاها یِ بالا یک‌بُعدی باشند، یعنی $\mathbb{V}$ پایه ای مثل ـِ $\{e_i \mid i\}$ داشته باشد که

$$T(\mathrm{span}\{e_1, \ldots e_i\}) \sqsubseteq \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_i\}, \quad \forall\, i, \tag{347}$$

یا هم‌ارز با آن

$$\forall\, i \;:\; T\, e_i \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_i\}. \tag{348}$$

نمایش ـِ ماتریسی یِ T در این پایه این ویژه‌گی را دارد که

$$T^i{}_j = 0, \quad \text{if } i > j. \tag{349}$$

به چنین‌ماتریس ی بالامثلثی می‌گویند. (اگر ترتیب ـِ اعضا یِ پایه را وارون می‌کردیم، ماتریس پایین‌مثلثی می‌شد.) مثلاً برا یِ حالت ـِ $\dim(\mathbb{V}) = 3$، شکل ـِ چنین‌ماتریس ی می‌شود

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} T^1{}_1 & T^1{}_2 & T^1{}_3 \\ 0 & T^2{}_2 & T^2{}_3 \\ 0 & 0 & T^3{}_3 \end{pmatrix}. \tag{350}$$

نگاشت ـِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید فضا یِ $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_i$ است، و همه یِ این زیرفضاها تحت ـِ T ناوردا یند. یک پایه برا یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که n_1 عضو ـِ اول ـَ ش یک پایه برا یِ $\mathbb{V}_1$، n_2 عضو ـِ بعدی یَش یک

پایه برا یِ $\mathbb{V}_2$، و . . . تشکیل می‌دهند. مثلاً در حالت ی که تعداد ِ این زیرفضاها 3 است، نمایش ِ ماتریسی یِ نگاشت ِ T در این پایه چنین است.

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} T^{\mathbb{V}_1}{}_{\mathbb{V}_1} & 0^{\mathbb{V}_1}{}_{\mathbb{V}_2} & 0^{\mathbb{V}_1}{}_{\mathbb{V}_3} \\ 0^{\mathbb{V}_2}{}_{\mathbb{V}_1} & T^{\mathbb{V}_2}{}_{\mathbb{V}_2} & 0^{\mathbb{V}_2}{}_{\mathbb{V}_3} \\ 0^{\mathbb{V}_3}{}_{\mathbb{V}_1} & 0^{\mathbb{V}_3}{}_{\mathbb{V}_2} & T^{\mathbb{V}_3}{}_{\mathbb{V}_3} \end{pmatrix}. \tag{351}$$

در این‌جا $T^{\mathbb{V}_i}{}_{\mathbb{V}_i}$ یک ماتریس ِ $n_i \times n_i$ است، و $0^{\mathbb{V}_i}{}_{\mathbb{V}_j}$ یک ماتریس ِ $n_i \times n_j$ است که همه یِ مئلفه‌ها یَش صفر اند. به ماتریس ِ T با این شکل، یک ماتریس ِ بلُکی‌قطری می‌گویند.

نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید این نگاشت در پایه یِ $B = \{e_i \mid i\}$ قطری است، یعنی

$$T\, e_i = \lambda_i\, e_i. \tag{352}$$

از این‌جا دیده می‌شود عنصرها یِ ماتریسی یِ T در این پایه به این شکل اند.

$$T^i{}_j = \lambda_j\, \delta^i_j, \tag{353}$$

یعنی عنصرها یِ ناقطری یِ این ماتریس صفر اند. این اصطلاح که نگاشت ِ T در پایه یِ B قطری است هم از همین‌جا آمده است. رابطه یِ بالا را به این شکل هم می‌نویسند.

$$\mathrm{mat}(T) = \mathrm{diag}(\lambda_i, \dots, \lambda_n), \tag{354}$$

که در آن نماد ِ $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ یعنی ماتریس ِ قطری یی که عنصر ِ i اُم ِ قطر َ ش λ_i است. (λ_i ها لزوماً متمایز نیستند.) مثلاً اگر $\dim(\mathbb{V}) = 3$، نمایش ِ ماتریسی یِ T می‌شود

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{355}$$

یا

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} T^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & T^2{}_2 & 0 \\ 0 & 0 & T^3{}_3 \end{pmatrix}. \tag{356}$$

فرض کنید نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در فصل ِ IV دیدیم در چنین‌حالت ی فضاها یِ $\mathbb{V}_{i,r,r,j}$ زیرفضاها یِ ناوردا یِ $\mathbb{V}$ تحت ِ T اند. به علاوه، اثر ِ T بر پایه یِ $\{e_{i,r,s,j} \mid s\}$ از $\mathbb{V}_{i,r,r,j}$ چنین است.

$$T\, e_{i,r,1,j} = \lambda_i\, e_{i,r,1,j}, \tag{357}$$

و

$$T\, e_{i,r,s,j} = \lambda_i\, e_{i,r,s,j} + e_{i,r,s-1,j}, \quad 1 < s \le r. \tag{358}$$

از این‌جا نمایش ـِ ماتریسی یِ T در این پایه به دست می‌آید. ماتریس ـِ T بلُکی‌قطری است، و بلُک ـِ متناظر با $\mathbb{V}_{1,r,r,j}$ به این شکل است که عنصرها یِ قطری یَش λ_i اند، عنصرها یِ یک قطر بالا یِ قطر ـِ اصلی 1 اند، و بقیه یِ عنصرها صفر اند. مثلاً برا یِ حالت ی که $\mathbb{V}$ به سه زیرفضا از نوع ـِ $\mathbb{V}_{i,r,r,j}$ تجزیه شود، یک ی سه‌بُعدی متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ، یک ی دوبُعدی متناظر با ویژه‌مقدار ـِ μ، و یک ی یک‌بُعدی متناظر با ویژه‌مقدار ـِ ν، نمایش ـِ ماتریسی یِ T می‌شود

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}. \tag{359}$$

به این نمایش ـِ ماتریسی، شکل ـِ ژُردَنی می‌گویند.

VI

دوگان ِ یک فضا یِ خطی، نگاشت ِ چندخطی

xxx دوگان ِ یک فضا یِ خطی

فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و میدان ِ آن ($\mathbb{F}$) را در نظر بگیرید. این میدان خود َش یک فضا یِ خطی یِ یک‌بُعدی با میدان ِ $\mathbb{F}$ است. مثلاً می‌شود $\{1\}$ را پایه اَش گرفت. به هر نگاشت ی که مقدار َش در یک میدان باشد، تابعی می‌گویند. از جمله به هر نگاشت ِ خطی از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{F}$، یک تابعی یِ خطی می‌گویند. آن چه تابعی یِ خطی را از نگاشت‌ها یِ خطی یِ دیگر متمایز می‌کند، فقط این است که اثر ِ هر تابعی یِ خطی رو یِ بردارها عدد است. این‌جا هم مثل ِ اثر ِ نگاشت‌ها یِ خطی رو یِ بردارها به‌طور ِ کلی، می‌شود از این تابعی‌ها یِ خطی یک فضا یِ خطی ساخت. به این فضا دوگان ِ فضا یِ خطی یِ اولیه می‌گویند. دوگان ِ $\mathbb{V}$ را با $\mathbb{V}^*$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{V}^* := \mathfrak{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{V}). \tag{360}$$

به بردارها یِ $\mathbb{V}^*$ هم‌بردار هم می‌گویند.

فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}$ از $\mathbb{V}^*$ را در نظر بگیرید. فضا یِ $\mathbb{S}^c$ را مجموعه یِ همه یِ بردارها یی در $\mathbb{V}$ تعریف می‌کنیم که اثر ِ همه یِ اعضا یِ $\mathbb{S}$ رو یِشان صفر باشد:

$$\mathbb{S}^{c} := \{v \in \mathbb{V} \mid \forall\, s \in \mathbb{S} \ : \ s(v) = 0\}. \tag{361}$$

به‌ساده‌گی می‌شود ثابت کرد

قضیه یِ 114: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است و $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}^{*}$. در این صورت،

a $\mathbb{S}^{c}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ است.

b $\mathbb{S}^{c}$ با $[\mathrm{span}(\mathbb{S})]^{c}$ برابر است.

c $\mathbb{S}^{c}$ کل ِ $\mathbb{V}$ است، اگر و تنها اگر $\mathbb{S} = \{0\}$.

★

قضیه یِ بعد می‌گوید برا یِ هر مجموعه یِ خطی‌مستقل ِ شامل ِ تعداد ِ باپایان ی هم‌بردار، همیشه می‌شود بردارها یی یافت که اثر ِ این هم‌بردارها بر آن‌ها ساده (به معنی یی که در صورت ِ قضیه می‌آید) باشد:

قضیه یِ 115: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، و $\mathbb{S} = \{s^{1}, \dots, s^{n}\}$ یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $\mathbb{V}^{*}$ باشد. در این صورت یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $B = \{v_{1}, \dots, v_{n}\}$ از $\mathbb{V}$ هست که تعداد ِ اعضا یَش با تعداد ِ اعضا یِ $\mathbb{S}$ برابر است، و این ویژه‌گی‌ها را دارد.

a $\mathbb{V} = \mathrm{span}\{v_{1}, \dots, v_{n}\} \oplus \mathbb{S}^{c}$

b $s^{i}(v_{j}) = \delta^{i}_{j}$

اثبات: از استقرا رو یِ n استفاده می‌کنیم. برا یِ $n = 1$، استقلال ِ خطی یِ $\mathbb{S}^{1} = \{s^{1}\}$ یعنی

$$s^{1} \neq 0. \tag{362}$$

پس بردار ی مثل ِ v هست که

$$s^{1}(v) \neq 0. \tag{363}$$

تعریف می‌کنیم

$$v_1 := \frac{1}{s^1(v)}\, v. \tag{364}$$

روشن است که $v_1 \ne 0$. پس $B_1 = \{v_1\}$ خطی‌مستقل است. ویژه‌گی یِ **b** از تعریف ِ v_1 دیده می‌شود. برا یِ اثبات ِ ویژه‌گی یِ **a**، بردار ِ دل‌بخواه ِ $w \in \mathbb{V}$ را درنظر بگیرید. داریم

$$w = [w - s(w)\, v_1] + s(w)\, v_1. \tag{365}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود عبارت ِ درون ِ کروشه عضو ِ $(\mathbb{S}^1)^{\mathrm{c}}$ است. پس

$$\mathbb{V} = (\mathbb{S}^1)^{\mathrm{c}} + \mathrm{span}(B_1). \tag{366}$$

ضمناً به‌ساده‌گی معلوم می‌شود اشتراک ِ $(\mathbb{S}^1)^{\mathrm{c}}$ و $\mathrm{span}(B_1)$ شامل ِ فقط بردار ِ صفر است. پس

$$\mathbb{V} = (\mathbb{S}^1)^{\mathrm{c}} \oplus \mathrm{span}(B_1). \tag{367}$$

به این ترتیب، حکم ِ قضیه برا یِ $n = 1$ درست است. فرض می‌کنیم حکم برا یِ $n = m$ درست است، و می‌کوشیم آن را برا یِ $n = m + 1$ ثابت کنیم. بنابر فرض ِ استقرا، زیرمجموعه ای مثل ِ $B_m = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m\}$ از $\mathbb{V}$ هست، با این ویژه‌گی که هر بردار ِ دل‌بخواه ِ $v \in \mathbb{V}$ را می‌شود چنین نوشت

$$v = w + \sum_{i=1}^{m} a^i\, \tilde{v}_i, \tag{368}$$

که در آن

$$s^i(\tilde{v}_j) = \delta^i{}_j, \quad 1 \le i, j \le m, \tag{369}$$

و

$$s^i(w) = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{370}$$

داریم

$$s^{m+1}(v) = s^{m+1}(w) + \sum_{i=1}^{m} a^i\, s^{m+1}(\tilde{v}_i),$$

$$= s^{m+1}(w) + \left[\sum_{j=1}^{m} s^{m+1}(\tilde{v}_j)\, s^j\right] \left(\sum_{i=1}^{n} a^i\, \tilde{v}_i\right),$$

$$= s^{m+1}(w) + \left[\sum_{j=1}^{m} s^{m+1}(\tilde{v}_j)\, s^j\right] (v), \tag{371}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\left[s^{m+1} - \sum_{j=1}^{m} s^{m+1}(\tilde{v}_j)\, s^j\right] (v) = s^{m+1}(w). \tag{372}$$

مجموعه یِ $\{s^1, \dots, s^{m+1}\}$ خطی‌مستقل است، و رابطه یِ بالا برا یِ هر v درست است. پس طرف ـِ راست ـِ رابطه یِ بالا نمی‌تواند همیشه صفر باشد. یعنی بردار ی مثل ـِ w هست که (370) را بر می آورد و

$$s^{m+1}(w) \neq 0. \tag{373}$$

حالا تعریف می‌کنیم

$$v_{m+1} := \frac{1}{s^{m+1}(w)}\, w, \tag{374}$$

و

$$v_i := \tilde{v}_i - s^{m+1}(\tilde{v}_i)\, v_{m+1}, \quad 1 \le i \le m. \tag{375}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود مجموعه یِ $\{v_1, \dots, v_{m+1}\}$ ویژه‌گی یِ $\mathbf{b}$ را دارد. استقلال ـِ خطی یِ این مجموعه هم با اثردادن ـِ s^i بر یک ترکیب ـِ خطی از اعضا یِ این مجموعه دیده می‌شود. سرانجام، با نوشتن ـِ بردار ـِ دل‌بخواه ـِ v به شکل ـِ

$$v = \sum_{i=1}^{m+1} s^i(v)\, v_i + \left[v - \sum_{i=1}^{m+1} s^i(v)\, v_i\right], \tag{376}$$

می‌شود $\mathbf{a}$ را نشان داد.

■

قضیه یِ 116: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است و برابر است با حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$. در این صورت $\mathbb{V}^*$ با حاصلِ‌ضرب ـِ دِکَرتی یِ $\mathbb{V}_1^*$ تا $\mathbb{V}_n^*$ یک ریخت است.

اثبات: هم‌بردار ـِ $s \in \mathbb{V}^*$ را در نظر بگیرید. متناظر با این هم‌بردار، هم‌بردارها یِ $s_i \in \mathbb{V}_i^*$ را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$\forall\ v_i \in \mathbb{V}_i\ :\ s_i(v_i) := s(v_i). \tag{377}$$

به ساده‌گی دیده می‌شود نگاشت ـِ

$$\begin{aligned} &t : \mathbb{V}^* \to (\mathbb{V}_1^* \times \cdots \times \mathbb{V}_n^*),\\ &t(s) := (s_1, \dots, s_n) \end{aligned} \tag{378}$$

خطی است. ضمناً دیده می‌شود

$$s(v) = s_1(\Pi_1\, v) + \cdots + s_n(\Pi_n\, v), \tag{379}$$

که در آن Π_i افکنش ی است که تصویر ـَ ش $\mathbb{V}_i$ و هسته اَش حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ $\mathbb{V}_j$ ها یِ دیگر $(j \neq i)$ است. پس نگاشت ـِ t در $(\mathbb{V}_1^* \times \cdots \times \mathbb{V}_n^*)$ وارون‌پذیر است.

■

از این پس این یک‌ریختی را به شکل ـِ تساوی نشان می‌دهیم:

$$(\mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_n)^* = \mathbb{V}_1^* \times \cdots \times \mathbb{V}_n^*. \tag{380}$$

رابطه یِ بالا را به این شکل هم می‌نویسند

$$(\mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_n)^* = \mathbb{V}_1^* \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_n^*, \tag{381}$$

که در آن منظور از $\mathbb{V}_i^*$ ها زیرفضاها یی از $\mathbb{V}^*$ اند که با $\mathbb{V}_i^*$ یک‌ریخت اند:

$$\mathbb{V}_i^* := \{s\,\Pi_i \mid s \in \mathbb{V}^*\}. \tag{382}$$

فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ این فضا است. تابعی یِ خطی یِ $e^i \in \mathbb{V}^*$ را با اثر ـَ ش بر بردارها یِ پایه یِ $\mathbb{V}$ تعریف می‌کنیم:

$$e^i(e_j) := \delta^i_j. \tag{383}$$

از این‌جا معلوم می‌شود

$$\forall\, v \in \mathbb{V} \ :\ e^i(v) = v^i. \tag{384}$$

قضیه یِ 117: فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ و پایه یِ $\{e_1, \dots, e_n\}$ از آن را در نظر بگیرید. زیرمجموعه یِ $\{e^1, \dots, e^n\}$ از $\mathbb{V}^*$ با $e^i(e_j) = \delta^i_j$، یک پایه یِ $\mathbb{V}^*$ است.

اثبات: کافی است نشان دهیم این مجموعه خطی‌مستقل است و هر هم‌بردار ی را می‌شود بر حسب ـِ اعضا یَش بسط داد. فرض کنید یک ترکیب ـِ خطی یِ اعضا یِ این مجموعه صفر است:

$$c_i\, e^i = 0. \tag{385}$$

اثرِ این ترکیب بر هر بردار ی (از جمله e_j) صفر است. از این‌جا نتیجه می‌شود $c_j = 0$ است. این برا یِ هر j درست است. پس $\{e^1, \dots, e^n\}$ خطی‌مستقل است. هم‌بردار ـِ دل‌بخواه ـِ s را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$s_i := s(e_i). \tag{386}$$

اما

$$\begin{aligned} s_j\, e^j(e_i) &= s_j\, \delta^j_i, \\ &= s_i. \end{aligned} \tag{387}$$

پس اثر ـِ s و $s_j\, e^j$ بر بردارها یِ پایه یِ $\mathbb{V}$ یکی است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$s = s_j\, e^j. \tag{388}$$

یعنی هر هم‌بردار ی را می‌شود بر حسب ـِ اعضا یِ $\{e^1, \dots, e^n\}$ بسط داد.
■

به پایه یِ $\{e^1, \dots, e^n\}$ دوگان ـِ پایه یِ $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ می‌گویند و آن را با B^* نشان می‌دهند. یک نتیجه یِ چیز ی که در بالا ثابت کردیم این است که

قضیه یِ 118: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه

$$\dim(\mathbb{V}^*) = \dim(\mathbb{V}). \tag{389}$$

★

این نتیجه را این طور هم می‌شود نوشت.

$$\mathbb{V}^* \sim \mathbb{V}. \tag{390}$$

از جمله،

$$\mathbb{F}^* \sim \mathbb{F}, \tag{391}$$

که در آن با میدان ـِ $\mathbb{F}$ مثل ـِ یک فضا ی خطی یِ یک‌بُعدی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ رفتار شده است.

با استفاده از قضیه‌ها یِ 115 و 118 به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 119: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی و $\mathbb{S}$ یک زیرمجموعه یِ $\mathbb{V}^*$ است. در این صورت،

$$\dim(\mathbb{S}^c) = \dim(\mathbb{V}) - \dim[\mathrm{span}(\mathbb{S})]. \tag{392}$$

با استفاده از پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ برا یِ فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ و پایه یِ دوگان ـِ آن برا یِ $\mathbb{V}^*$، اثر ـِ هم‌بردار ـِ s بر بردار ـِ v را می‌شود به شکل ـِ ساده یِ زیر نوشت، که در واقع حالت ـِ خاص ی از قضیه یِ 106 است.

$$s(v) = s_i\, v^i. \tag{393}$$

این یعنی هم‌بردارها را می‌شود با ماتریس‌ها یِ سطری نمایش داد، و اثر ـِ یک هم‌بردار بر یک بردار چیز ی نیست جز حاصلِ‌ضرب ـِ نمایش ـِ ماتریسی یِ آن هم‌بردار در نمایش ـِ ماتریسیِ آن بردار. با استفاده از پایه یِ دوگان می‌شود شکل ـِ ساده ای هم برا یِ عنصرها یِ ماتریسی یِ نگاشت‌ها یِ خطی به دست آورد. اثبات ـِ قضیه یِ زیر فقط به نوشتن نیاز دارد.

قضیه یِ 120: فرض کنید $T \in \mathfrak{L}\mathfrak{F}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، فضاها یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی اند، و $B = \{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ و $C = \{f_a \mid a\}$ یک پایه یِ $\mathbb{W}$ است. در این صورت،

$$T^a{}_i = f^a(T\,e_i), \qquad (394)$$

که در آن $C^* = \{f^a \mid a\}$ دوگان ـ C است.

★

با هر بردار می‌شود یک نگاشت ـ خطی برا یِ فضا یِ دوگان ساخت. (به این ترتیب که اثر ـ آن نگاشت بر یک هم‌بردار را برابر ـ اثر ـ آن هم بردار بر بردار ـ اولیه تعریف می‌کنیم.) چنین‌نگاشت ی هم‌بردارها را به عدد تبدیل می‌کند، پس یک تابعی یِ خطی است. آیا هر تابعی یِ خطی از فضا یِ دوگان را می‌شود با یک بردار ساخت؟

قضیه یِ 121: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. در این صورت یک نگاشت ـ $t \in \mathfrak{LF}[(\mathbb{V}^*)^*; \mathbb{V}]$ هست، با این ویژه‌گی که اگر $v \in \mathbb{V}$ و $s \in \mathbb{V}^*$، آن‌گاه

$$[t(v)](s) = s(v). \qquad (395)$$

اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه t در $(\mathbb{V}^*)^*$ وارون‌پذیر است.

اثبات: اثبات ـ خطی‌بودن ـ t فقط به نوشتن نیاز دارد. فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. پایه یِ $B = \{e_i \mid i\}$ برا یِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. دوگان ـ این پایه $B^* = \{e^i \mid i\}$ است. $(B^*)^* = \{\tilde{e}_i \mid i\}$ دوگان ـ B^* است. پس $(B^*)^*$ یک پایه یِ $(\mathbb{V}^*)^*$ است. داریم

$$\tilde{e}_i(e^j) = \delta_i^j. \qquad (396)$$

دیده می‌شود

$$t(e_i) = \tilde{e}_i. \qquad (397)$$

به‌ساده‌گی تحقیق می‌شود نگاشت ـ t وارون‌پذیر است.

■

معنی یِ ساختار ـ نگاشت ـ t در قضیه یِ بالا این است که مئلفه‌ها یِ $t(v)$ در پایه یِ $(B^*)^*$، همان مئلفه‌ها یِ v در پایه یِ B اند. معنی یِ ساده یِ این ساختار به زبان ـ ماتریسی آن است که حاصلِ‌ضرب ـ نمایش ـ ماتریسی یِ هم‌بردار در نمایش ـ ماتریسی یِ بردار را می‌شود به این شکل تعبیر کرد که هم‌بردار بر بردار اثر می‌کند و یک عدد نتیجه می‌شود، یا بردار بر هم‌بردار اثر می‌کند و همان عدد نتیجه می‌شود. از این پس $t(v)$ را با خود ـ v نشان می‌دهیم.

یک نتیجه یِ ساده یِ قضیه یِ بالا این است که

قضیه یِ 122: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه $(\mathbb{V}^*)^*$ با $\mathbb{V}$ یک‌ریخت است.

★

البته با دو بار استفاده از قضیه یِ 118 معلوم می‌شود بُعد ِ $(\mathbb{V}^*)^*$ با بُعد ِ $\mathbb{V}$ برابر است، و طبق ِ قضیه یِ 38، همین هم برا یِ اثبات ِ قضیه یِ 122 کافی است. برا یِ ساده‌گی، خیل ی وقت‌ها رابطه یِ یک‌ریختی یِ

$$(\mathbb{V}^*)^* \sim \mathbb{V} \qquad (398)$$

را به شکل ِ تساوی یِ

$$(\mathbb{V}^*)^* = \mathbb{V} \qquad (399)$$

می‌نویسند.

xxxi پس‌آر ِ یک نگاشت ِ خطی

نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. این نگاشت را می‌شود بر یک بردار اثر داد و یک هم‌بردار را بر حاصل اثر داد. نتیجه یک اسکالر می‌شود. این عمل را می‌شود این طور تعبیر کرد که نگاشت ِ خطی به نوع ی بر هم‌بردار اثر کرده، حاصل بر بردار اثر کرده، و آن اسکالر به دست آمده است. از این‌جا نگاشت ِ $T^* : \mathbb{W}^* \to \mathbb{V}^*$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$(T^*\, s)(v) := s(T\, v), \quad \forall\, v \in \mathbb{V},\ \forall\, s \in \mathbb{W}^*. \qquad (400)$$

دیدیم فضا یِ خطی یِ $\mathbb{W}$ (که شامل ِ مجموعه یِ مقدارها یِ T است) را می‌شود بزرگ کرد، بی آن که T تغییر کند. پس $\mathbb{W}$ (بر خلاف ِ دامنه یِ T) از رو یِ T به طور ِ یک‌تا تعیین نمی‌شود. به این معنی T^* هم از رو یِ T به طور ِ یک‌تا تعیین نمی‌شود. اگر واضح نباشد دامنه یِ T^* را چه فضا یی گرفته ایم، باید آن را صریحاً ذکر کنیم.

قضیه یِ 123: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$. در این صورت نگاشت ِ T^* با رابطه یِ (400) خطی است. به‌علاوه، نگاشت ِ $\mathrm{pb} : \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}) \to \mathcal{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{W}^*)$ با رابطه یِ

$$\mathrm{pb}(T) = T^* \tag{401}$$

خطی است. اگر بُعد ِ $\mathbb{W}$ باپایان باشد، آن‌گاه نگاشت ِ pb در $\mathcal{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{W}^*)$ وارون‌پذیر است و

$$\mathrm{rank}(T^*) = \mathrm{rank}(T). \tag{402}$$

اثبات: اثبات ِ خطی‌بودن ِ T^* و pb ساده است (فقط به نوشتن نیاز دارد). برا یِ اثبات ِ وارون‌پذیری یِ pb در $\mathcal{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{W}^*)$، $\{f_a \mid a\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{W}$، و $\{f^a \mid a\}$ را دوگان ِ $\{f_a \mid a\}$ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}(T^*\, f^a)(v) &= f^a(T\, v),\\ &= (T\, v)^a,\end{aligned} \tag{403}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$f_a\,[(T^*\, f^a)(v)] = T(v). \tag{404}$$

این رابطه نشان می‌دهد با داشتن ِ T^* می‌شود T را به دست آورد. پس pb در $\mathcal{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{W}^*)$ وارون‌پذیر است.

سرانجام، فرض کنید رتبه یِ T برابر ِ m است. $B = \{f_a \mid a\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{W}$ می‌گیریم، که پهنه یِ زیرمجموعه یِ $\{f_1,\dots,f_m\}$ از آن $\mathrm{img}(T)$ باشد. $\{f^a \mid a\}$ را هم دوگان ِ B می‌گیریم. اثر ِ T بر یک بردار ِ دل‌بخواه ِ $v\in\mathbb{V}$ را می‌شود نوشت

$$T\, v = \sum_{a=1}^{m} f_a\, T^a(v). \tag{405}$$

$\{T^1,\dots,T^m\}$ خطی مستقل است. در غیر ِ این صورت می‌شد نوشت

$$T^a = \sum_{b=1}^{m'} T^a_b\, T'^b, \tag{406}$$

که در آن $m' < m$، و

$$T\, v = \sum_{b=1}^{m'}\left(\sum_{a=1}^{m} T^a_b\, f_a\right)\, T'^b(v), \tag{407}$$

که نشان می‌دهد رتبه یِ T نابزرگ‌تر از m' است. به ازا یِ هر $s\in\mathbb{W}$،

$$\begin{aligned} T^*\,s &= \sum_{a=1}^{m} s(f_a)\,T^a, \\ &= \sum_{a=1}^{m} s_a\,T^a. \end{aligned} \tag{408}$$

s_a ها دل‌بخواه اند. پس $\mathrm{img}(T^*)$ برابر است با $\mathrm{span}\{T^1,\dots,T^m\}$؛ و چون $\{T^1,\dots,T^m\}$ خطی مستقل است،

$$\mathrm{rank}(T^*) = m. \tag{409}$$

■

بخش ی از حکم ِ این قضیه می‌گوید اگر $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی باشد،

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{W}^*) \sim \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}), \tag{410}$$

که گاه ی آن را به‌طور ِ ساده‌تر به شکل ِ

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{W}^*) = \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}) \tag{411}$$

می‌نویسند.

به نگاشت ِ T^* پس‌آر ِ نگاشت ِ T می‌گویند. پس‌آر ِ یک نگاشت ِ خطی حالت ِ خاص ِ پس‌آر ِ نگاشت‌ها یِ دل‌بخواه رو یِ مجموعه‌ها یِ دل‌بخواه است.

قضیه یِ 124: فرض کنید $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، و نگاشت ِ t در قضیه یِ 121 متناظر با فضاها یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ وارون‌پذیر است. در این صورت

$$(T^*)^* = T, \tag{412}$$

که در آن از نمادگذاری یِ $t(v) = v$ استفاده شده.

اثبات: v و s را دو عضو ِ دل‌بخواه ِ به‌ترتیب $(\mathbb{V}^*)^*$ و $\mathbb{W}^* = [(\mathbb{W}^*)^*]^*$ می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \{[(T^*)^*]\,v\}(s) &= v[(T^*)\,s], \\ &= [(T^*)\,s](v), \\ &= s(T\,v), \end{aligned}$$

$$= (T\,v)(s), \tag{413}$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

نمایش ِ ماتریسی یِ T^* بر حسب ِ نمایش ِ ماتریسی یِ T (برا یِ فضاها یِ باپایان‌بُعدی) هم بسیار ساده است. با فقط نوشتن می‌شود نشان داد

قضیه یِ 125: فرض کنید $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، و فضاها یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی اند. در این صورت بین ِ عنصرها یِ ماتریسی یِ T و T^* (با پایه یِ یک‌سان) این رابطه هست.

$$(T^*)_i{}^a = T^a{}_i. \tag{414}$$

★

اگر هم‌بردارها را با ماتریس‌ها یِ سطری نشان دهیم، آن‌گاه (414) یعنی شکل ِ ماتریسی یِ T و T^* یک‌سان است، و اثر ِ T^* رو یِ یک هم‌بردار به این شکل است که آن هم‌بردار از چپ در T^* ضرب می‌شود. اما اگر هم‌بردارها را مثل ِ بردارها یِ معمولی با ماتریس‌ها یِ ستونی نشان دهیم، آن‌گاه ماتریس ِ T^* همان ماتریس ِ T است که جا یِ سطرها و ستون‌ها یَش عوض شده. یعنی اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ n بُعدی و $\mathbb{W}$ یک فضا یِ p بُعدی باشد،

$$\mathrm{mat}(T^*) = \begin{pmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^p{}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^1{}_n & \cdots & T^p{}_n \end{pmatrix}. \tag{415}$$

روشن است که

قضیه یِ 126: پس‌آر ِ نگاشت ِ همانی نگاشت ِ همانی است:

$$(1_{\mathbb{V}})^* = 1_{\mathbb{V}^*}. \tag{416}$$

★

و

قضیه یِ 127: اگر T_1 و T_2 در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، و α_1 و α_2 دو اسکالر باشند، آن‌گاه

$$(\alpha_1\,T_1+\alpha_2\,T_2)^* = \alpha_1\,T_1^*+\alpha_2\,T_2^*. \tag{417}$$

★

قضیه یِ بعد اثر ـِ پس‌آر بر ترکیب ـِ نگاشت‌ها یِ خطی را نشان می‌دهد.

قضیه یِ 128: فرض کنید $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$(T\,S)^* = S^*\,T^*. \tag{418}$$

از جمله اگر T در $\mathbb{W}$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه T^* هم در $\mathbb{V}^*$ وارون‌پذیر است و

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*. \tag{419}$$

اثبات: $u \in \mathbb{U}$ و $s \in \mathbb{W}^*$ را بردارها یی دل‌بخواه می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}[(T\,S)^*\,s](u) &= s[(T\,S)\,u],\\ &= s[T(S\,u)],\\ &= (T^*\,s)(S\,u),\\ &= [S^*(T^*\,s)](u),\end{aligned} \tag{420}$$

که (418) را ثابت می‌کند. حالا فرض کنید T در $\mathbb{W}$ وارون‌پذیر است. در این صورت،

$$\begin{aligned}T\,T^{-1} &= 1_{\mathbb{W}},\\ T^{-1}\,T &= 1_{\mathbb{V}},\end{aligned} \tag{421}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}(T^{-1})^*\,T^* &= 1_{\mathbb{W}^*},\\ T^*\,(T^{-1})^* &= 1_{\mathbb{V}^*},\end{aligned} \tag{422}$$

و این هم باقی‌مانده یِ حکم را نتیجه می‌دهد.

■

قضیه یِ 129: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت ویژه‌مقدارها یِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و T^* یک‌سان اند.

اثبات: فرض کنید λ یک ویژه‌مقدار ـِ T^* است. پس یک هم‌بردار ـِ ناصفر s هست که

$$(T^* - \lambda)\, s = 0. \tag{423}$$

v را یک بردار ـِ دل‌بخواه در $\mathbb{V}$ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} s[(T-\lambda)\, v] &= [(T^*-\lambda)\, s](v), \\ &= 0. \end{aligned} \tag{424}$$

s صفر نیست، پس یک بردار ـِ u هست که $s(u)$ ناصفر است. از این‌جا معلوم می‌شود

$$\mathrm{img}(T-\lambda) \neq \mathbb{V}. \tag{425}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\mathrm{rank}(T-\lambda) < \dim(\mathbb{V}), \tag{426}$$

و از آن‌جا،

$$\mathrm{null}(T-\lambda) > 0, \tag{427}$$

پس $(T-\lambda)$ تکین است و در نتیجه λ یک ویژه‌مقدار ـِ T است. برا یِ نشان‌دادن ـِ این که هر ویژه‌مقدار ـِ T ویژه‌مقدار ـِ T^* است هم کافی است توجه کنیم $(T^*)^*$ همان T است و نقش ـِ T و T^* در استدلال ـِ بالا را بر عکس کنیم.

■

قضیه یِ 130: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت،

$$\forall\ (\lambda, l)\ :\ \mathrm{null}[(T-\lambda)^l] = \mathrm{null}[(T^*-\lambda)^l]. \tag{428}$$

از جمله، بُعد ـِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ با بُعد ـِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T^* متناظر با λ برابر است. هم‌چنین، اگر $N \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان باشد N^* هم پوچ‌توان است و

$$\mathrm{nil}(N) = \mathrm{nil}(N^*). \tag{429}$$

اثبات: s را هم‌بردارِ دل‌بخواه ی در $\mathbb{V}^*_{\lambda,l} := \ker[(T^* - \lambda)^l]$ و v را بردارِ دل‌بخواه ی در $\mathbb{V}$ می‌گیریم. داریم

$$s[(T-\lambda)^l\, v] = [(T^* - \lambda)^l\, s](v),$$
$$= 0. \tag{430}$$

از این‌جا معلوم می‌شود

$$\mathrm{img}[(T-\lambda)^l] \sqsubseteq (\mathbb{V}^*_{\lambda,l})^{\mathrm{c}}, \tag{431}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\mathrm{rank}[(T-\lambda)^l] \le \dim[(\mathbb{V}^*_{\lambda,l})^{\mathrm{c}}], \tag{432}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\mathrm{rank}[(T-\lambda)^l] \le \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{V}^*_{\lambda,l}), \tag{433}$$

و از آن‌جا

$$\mathrm{null}[(T-\lambda)^l] \ge \mathrm{null}[(T^* - \lambda)^l]. \tag{434}$$

با عوض‌کردنِ نقشِ T و T^* رابطه یِ (428) نتیجه می‌شود. برابری یِ بُعدها یِ ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T و T^* متناظر با λ نتیجه یِ ساده یِ (428) است. سرانجام، (429) یک حالتِ خاصِ (428) است.

■

قضیه یِ 131: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت اگر v یک ویژه‌بردارِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ و s یک ویژه‌بردارِ تعمیم‌یافته یِ T^* متناظر با μ باشد که $\mu \ne \lambda$، آن‌گاه

$$s(v) = 0. \tag{435}$$

اثبات: عددها یِ صحیحِ نامنفی یِ l و m هستند که

$$(T-\lambda)^l\, v = 0,$$

$$(T^* - \mu)^m\, s = 0. \tag{436}$$

چون λ و μ برابر نیستند، چندجمله‌ای‌ها یِ Mon^l_λ و Mon^m_μ با $\mathrm{Mon}^n_\nu(z) := (z-\nu)^n$ نسبت به هم اول اند. پس چندجمله‌ای‌ها یِ P_1 و P_2 هستند که

$$P_1\, \mathrm{Mon}^l_\lambda + P_2\, \mathrm{Mon}^m_\mu = 1. \tag{437}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} s(v) &= s\{[P_1(T)]\,(T-\lambda)^l\, v + (T-\mu)^m\, [P_2(T)]\, v\},\\ &= [(T^*-\mu)^m\, s]\{[P_2(T)]\, v\},\\ &= 0. \end{aligned} \tag{438}$$

■

قضیه یِ 94 برا یِ هر نگاشت ـِ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر در یک فضا یِ باپایان‌بُعدی پایه ای را معرفی می‌کند که در آن شکل ـِ ماتریسی یِ این نگاشت ساده است. می‌شود دید شکل ـِ ماتریسی یِ پس‌آر ـِ این نگاشت هم در دوگان ـِ آن پایه ساده است:

قضیه یِ 132: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}^*$ پایه ای دارد (که اعضا یَش را با $e^{i,r,s,j}$ نشان می‌دهیم) با این ویژه‌گی‌ها.

a $1 \le s \le r \le k_i$، که k_i پوچ‌توانی یِ $\mathrm{res}[\mathrm{nil}(T);\mathbb{V}_i]$ است، که $\mathbb{V}_i$ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ $\lambda_i = \lambda^i$ است.

b $1 \le j \le j_0$ که j_0 تابع ـِ i و r است.

c $T^*\, e^{i,r,s,j} = \lambda^i\, e^{i,r,s,j} + e^{i,r,s+1,j}, \quad s < r$

d $T^*\, e^{i,r,r,j} = \lambda^i\, e^{i,r,r,j}$

اثبات: مجموعه یِ $e_{i,r,s,j}$ ها را یک پایه یِ ژُردنی‌گر ـِ T می‌گیریم. $e^{i,r,s,j}$ ها را اعضا یِ پایه یِ دوگان ـِ این مجموعه می‌گیریم:

$$e^{i,r,s,j}(e_{i',r',s',j'}) = \delta^i_{i'}\, \delta^r_{r'}\, \delta^s_{s'}\, \delta^j_{j'}. \tag{439}$$

داریم

$$
\begin{aligned}
(T^* e^{i,r,s,j})(e_{\imath',r',s',\jmath'}) &= e^{i,r,s,j}(T\, e_{\imath',r',s',\jmath'}),\\
&= e^{i,r,s,j}(\lambda_{\imath'}\, e_{\imath',r',s',\jmath'} + e_{\imath',r',s'-1,\jmath'}),\\
&= \lambda_{\imath'}\, \delta^i_{\imath'}\, \delta^r_{r'}\, \delta^s_{s'}\, \delta^j_{\jmath'} + \delta^i_{\imath'}\, \delta^r_{r'}\, \delta^s_{s'-1}\, \delta^j_{\jmath'},\\
&= \lambda^i\, \delta^i_{\imath'}\, \delta^r_{r'}\, \delta^s_{s'}\, \delta^j_{\jmath'} + \delta^i_{\imath'}\, \delta^r_{r'}\, \delta^{s+1}_{s'}\, \delta^j_{\jmath'},\\
&= (\lambda^i\, e^{i,r,s,j} + e^{i,r,s+1,j})(e_{\imath',r',s',\jmath'}),
\end{aligned} \tag{440}
$$

که نتیجه می‌دهد

$$
T^* e^{i,r,s,j} = \lambda^i\, e^{i,r,s,j} + e^{i,r,s+1,j}, \tag{441}
$$

که همان حکم است. در این رابطه‌ها هر جا شاخص ِ یک متغیر از گستره اَش بیرون رفته، مقدار ِ متغیر صفر تعریف شده.

■

دیده می‌شود مجموعه یِ $f^{i,r,s,j}$ با

$$
f^{i,r,s,j} := e^{i,r,r-s,j} \tag{442}
$$

یک پایه یِ ژُردنی‌گر ِ T^* است. با استفاده از این پایه به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 133: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت اگر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد T^* هم چنین است. اگر $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده باشد S^* هم شبهِ‌ساده است، و اگر پایه ای S را قطری کند دوگان ِ آن پایه S^* را قطری می‌کند.

★

هم‌چنین، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 134: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در این صورت،

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sem}(T^*) &= [\mathrm{sem}(T)]^*,\\
\mathrm{nil}(N^*) &= [\mathrm{nil}(N)]^*.
\end{aligned} \tag{443}
$$

★

سرانجام،

قضیه یِ 135: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در این صورت اگر $f(T)$ یک تابع ـِ T باشد، آن‌گاه

$$f(T^*) = [f(T)]^*. \qquad (444)$$

اثبات: $B = \{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که هر یک از اعضا یِ آن ویژه‌بردار ـِ تعمیم‌یافته یِ T است، چنان که به ازا یِ هر i ویژه‌مقدار ـِ متناظر با e_i برابر ـِ $\lambda_i = \lambda^i$ است. $\{e^i \mid i\}$ را دوگان ـِ B می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}
\{[f(T^*)]\, e^j\}(e_i) &= \left\{\left[\sum\nolimits_k \frac{f^{(k)}(\lambda^j)}{k!}\,(N^*)^k\right]\, e^j\right\}(e_i),\\
&= \left\{\left[\sum\nolimits_k \frac{f^{(k)}(\lambda_i)}{k!}\,(N^*)^k\right]\, e^j\right\}(e_i),\\
&= e^j\left\{\left[\sum\nolimits_k \frac{f^{(k)}(\lambda_i)}{k!}\,N^k\right]\, e_i\right\},\\
&= e^j\{[f(T)]\, e_i\},\\
&= \{[f(T)]^*\, e^j\}(e_i), \qquad (445)
\end{aligned}$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

xxxii تغییرِپایه در فضا یِ دوگان

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، B یک پایه یِ آن، و B^* دوگان ـِ B است. پایه یِ B را به پایه یِ B' تبدیل می‌کنیم. رابطه یِ B'^* با B^* چه باشد تا B'^* دوگان ـِ B' باشد؟

قضیه یِ 136: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، B یک پایه یِ آن، و B^* دوگان ِ B است. اگر Λ نگاشت ِ تغییرِپایه یِ B به B' باشد، آن‌گاه $(\Lambda^*)^{-1}$ نگاشت ِ تغییرِپایه یِ B^* به $(B')^*$ است، که $(B')^*$ دوگان ِ B' است.

اثبات: پایه‌ها یِ $B = \{e_i \mid i\}$، $B^* = \{e^i \mid i\}$، $B' = \{e'_i \mid i\}$، و $(B')^* = \{e'^i \mid i\}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} e^i(e_j) &= \delta^i_j, \\ &= e'^i(e'_j), \\ &= e'^i(\Lambda\, e_j), \\ &= (\Lambda^*\, e'^i)(e_j). \end{aligned} \tag{446}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\Lambda^*\, e'^i = e^i, \tag{447}$$

یا

$$e'^i = (\Lambda^*)^{-1}\, e^i. \tag{448}$$

■

با توجه به قضیه یِ 128، جا یِ وارون و پس‌آر را می‌شود عوض کرد. در نتیجه، با ترکیب ِ قضیه‌ها یِ 125، 128، و 136 نتیجه می‌شود

$$e'^i = (\Lambda^{-1})^i{}_j\, e^j. \tag{449}$$

تغییر ِ مئلفه‌ها یِ هم‌بردارها در اثر ِ تغییرِپایه هم حالت ِ خاص ِ نتیجه یِ قضیه یِ 113 است:

$$s_{\imath'} = s_j\, \Lambda^j{}_i. \tag{450}$$

xxxiii نگاشت ِ چندخطی

فضاها یِ خطی یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ و $\mathbb{W}$ با میدان ِ یک‌سان را در نظر بگیرید. می‌گوییم نگاشت ِ $T:\mathbb{V}_1\times\cdots\times\mathbb{V}_n\to\mathbb{W}$ چندخطی است، اگر T نسبت به هر یک از متغیرها یَش (با ثابت‌نگه‌داشتن ِ متغیرها یِ دیگر) خطی باشد. یعنی اگر

$$T(\dots,\alpha\,v_i+\alpha'\,v_i',\dots)=\alpha\,T(\dots,v_i,\dots)+\alpha'\,T(\dots,v_i',\dots),\quad\forall\,i.\tag{451}$$

در این‌جا α و α' اسکالر اند، $v_i,v_i'\in\mathbb{V}_i$، و $\dots$ نماینده یِ بقیه یِ متغیرها است، که در دوطرف ِ رابطه یک‌سان اند. به‌ساده‌گی معلوم می‌شود

قضیه یِ 137: فضا یِ نگاشت‌ها یِ چندخطی از یک مجموعه فضا یِ خطی به یک فضا یِ خطی یِ دیگر (که میدان ِ همه $\mathbb{F}$ است) با جمع ِ معمولی یِ نگاشت‌ها و ضرب ِ معمولی یِ اسکالرها در نگاشت، یک فضا یِ خطی با همان میدان ِ $\mathbb{F}$ است.

★

فضا یِ نگاشت‌ها یِ چندخطی یِ از $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ به $\mathbb{W}$ را با $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)$ نشان می‌دهیم.

قضیه یِ 138: اگر $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$، و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان باشند، آن‌گاه

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U},\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)\sim\mathfrak{LF}[\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U});\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n].\tag{452}$$

اثبات: نگاشت ِ

$$t:\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U},\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)\to\mathfrak{LF}[\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U});\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n]\tag{453}$$

با

$$\{[t(T)](v_1,\dots,v_n)\}(u):=T(u,v_1,\dots,v_n),\quad\forall\,T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U},\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)\tag{454}$$

را در نظر بگیرید. به‌ساده‌گی دیده می‌شود این نگاشت خطی و یک‌به‌یک و در $\mathfrak{LF}[\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U});\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n]$ وارون‌پذیر است.

■

از این پس $t(T)$ در قضیه یِ بالا را با خود ِ T نشان می‌دهیم، و یک‌ریختی یِ (452) را هم به شکل ِ تساوی می‌نویسیم:

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U},\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)=\mathfrak{LF}[\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U});\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n]. \tag{455}$$

اگر $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی باشند، با پایه‌ها یِ آن‌ها می‌شود یک پایه برا یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)$ ساخت. به‌ساده‌گی (کاملاً شبیه به قضیه یِ 117) ثابت می‌شود
قضیه یِ 139: فرض کنید $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با یک میدان اند، به ازا یِ هر i مجموعه یِ $\{e_{(i),k_i}\mid k_i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}_i$ است، و $\{f_a\mid a\}$ یک پایه یِ $\mathbb{W}$ است. در این صورت $\{{e_a}^{i_1\cdots i_n}\mid(a,i_1,\dots,i_n)\}$ یک پایه یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)$ است، که در آن ${e_a}^{i_1\cdots i_n}$ عضو ی از $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)$ است که

$${e_a}^{i_1\cdots i_n}[e_{(1),k_1},\dots,e_{(n),k_n}]:=\delta^{i_1}_{k_1}\cdots\delta^{i_n}_{k_n}\,f_a. \tag{456}$$

★

یک نتیجه یِ این قضیه آن است که
قضیه یِ 140: فرض کنید $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با یک میدان، و همه یِ این فضاها باپایان‌بُعدی اند. در این صورت،

$$\dim[\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)]=\dim(\mathbb{W})\prod_i\dim(\mathbb{V}_i). \tag{457}$$

★

حالا فرض کنید $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)$، و فضاها یِ مربوط باپایان‌بُعدی اند. T را می‌شود بر حسب ِ پایه ای که در قضیه یِ 139 ذکر شد بسط داد:

$$T={T^a}_{i_1\cdots i_n}\,{e_a}^{i_1\cdots i_n}. \tag{458}$$

به ضریب‌ها یِ این بسط مئلفه‌ها یِ T می‌گویند. به‌ساده‌گی دیده می‌شود
قضیه یِ 141: فرض کنید $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ و $\mathbb{W}$ فضاهای ِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یی با میدان ِ یک‌سان اند، مجموعه یِ $\{f_a\mid a\}$ یک پایه یِ $\mathbb{W}$ است، و به ازا یِ هر i مجموعه یِ $\{e_{(i),k_i}\mid k_i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}_i$ است و $v_i\in\mathbb{V}_i$. در این صورت برا یِ هر $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_n)$،

$$T(v_1, \dots, v_n) = f_a\, T^a{}_{i_1 \cdots i_n}\, (v_1)^{i_1} \cdots (v_n)^{i_n}, \tag{459}$$

یا

$$[T(v_1, \dots, v_n)]^a = T^a{}_{i_1 \cdots i_n}\, (v_1)^{i_1} \cdots (v_n)^{i_n}, \tag{460}$$

که در حالت ِ خاص می‌شود

$$[T(e_{(1),i_1}, \dots, e_{(n),i_n})]^a = T^a{}_{i_1 \cdots i_n}, \tag{461}$$

یا

$$f^a[T(e_{(1),i_1}, \dots, e_{(n),i_n})] = T^a{}_{i_1 \cdots i_n}. \tag{462}$$

★

این در واقع نمایش ِ ماتریسی یِ یک نگاشت ِ چندخطی است، که حالت ِ خاص َش نمایش ِ ماتریسی یِ یک نگاشت ِ خطی است. هم‌چنین، به‌ساده‌گی می‌شود ثابت کرد

قضیه یِ 142: فرض کنید $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ و $\mathbb{W}$ فضاها یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یی با میدان ِ یک‌سان اند؛ هر یک از مجموعه‌ها یِ $C = \{f_a \mid a\}$ و $C' = \{f'_a \mid a\}$ یک پایه یِ $\mathbb{W}$ و M نگاشت ِ تغییرِپایه از C به C' است؛ و به ازا یِ هر i هر یک از مجموعه‌ها یِ $B_i = \{e_{(i),k_i} \mid k_i\}$ و $B'_i = \{e'_{(i),k_i} \mid k_i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}_i$ و Λ_i نگاشت ِ تغییرِپایه از B_i به B'_i است، و $v_i \in \mathbb{V}_i$. در این صورت برا یِ هر $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n)$، رابطه یِ تغییر ِ مئلفه‌ها در اثر ِ تغییرِپایه چنین است.

$$T^{a'}{}_{i'_1 \cdots i'_n} = (\mathrm{M}^{-1})^a{}_b\, T^b{}_{j_1 \cdots j_n}\, (\Lambda_1)^{j_1}{}_{i_1} \cdots (\Lambda_n)^{j_n}{}_{i_n}. \tag{463}$$

★

باز هم حالت ِ خاص ِ این قضیه همان تغییر ِ مئلفه‌ها یِ یک نگاشت ِ خطی در اثر ِ تغییرِپایه است.

سرانجام، کاملاً مشابه با قضیه یِ 121 ثابت می‌شود

قضیه یِ 143: اگر $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با یک میدان باشند، و بُعد ِ $\mathbb{W}$ باپایان باشد، آن‌گاه نگاشت ِ $t : \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n) \to \mathcal{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{W}^*, \mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n)$ با تعریف ِ

$$[t(T)](s, v_1, \dots, v_n) = s[T(v_1, \dots, v_n)], \qquad (464)$$

خطی و در $\mathfrak{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{W}^*, \mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n)$ وارون‌پذیر است. در نتیجه

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n) \sim \mathfrak{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{W}^*, \mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n). \qquad (465)$$

★

از این پس نتیجه یِ این قضیه را هم به شکل ِ

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}_1, \dots \mathbb{V}_n) = \mathfrak{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{W}^*, \mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n) \qquad (466)$$

می‌نویسیم. ضمناً $t(T)$ در این قضیه را با خود ِ T نشان می‌دهیم. در واقع حکم ِ این قضیه یک نتیجه یِ ساده یِ قضیه‌ها یِ 121 و 138 است.

VII

ضرب ـِ تانسوری

xxxiv حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ دو فضا یِ خطی

فضاها یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ با میدان ـِ $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید. فضا یِ $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ را به شکل ـِ مجموعه یِ همه یِ نگاشت‌ها یِ از $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ به $\mathbb{F}$ تعریف می‌کنیم که هر یک از آن‌ها به ازا یِ فقط تعداد ـِ باپایان ی از اعضا یِ $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ ناصفر است. توجه کنید که در تعریف گفته شده مجموعه یِ همه یِ نگاشت‌ها، نَه نگاشت‌ها یِ خطی.

برا یِ هر نگاشت ـِ $f:\mathbb{S}\to\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ یک میدان است)، محمل ـِ f را آن زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}$ تعریف می‌کنیم که اثر ـِ f بر اعضا یِ آن ناصفر است. محمل ـِ f را با $\mathrm{supp}(f)$ نشان می‌دهیم:

$$\mathrm{supp}(f) := \{x\in\mathbb{S}\mid f(x)\neq 0\}. \tag{467}$$

با این تعریف، $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ عبارت است از مجموعه یِ همه یِ نگاشت‌ها یِ از $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ به $\mathbb{F}$، که محمل ـِشان باپایان است.

ترکیب ـِ خطی رو یِ $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ را به شکل ـِ

$$(\alpha\,X+\beta\,Y)(v,w) := \alpha\,[X(v,w)]+\beta\,[Y(v,w)] \tag{468}$$

تعریف می‌کنیم. نتیجه می‌شود

قضیه یِ 144: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدانِ $\mathbb{F}$ اند. در این صورت مجموعه یِ $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ با ترکیبِ خطی یِ (468)، یک فضا یِ خطی با میدانِ $\mathbb{F}$ است.
اثبات: روشن است که ترکیبِ خطی یِ دو نگاشت از $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ به $\mathbb{F}$ نگاشت ی از همین نوع است. به علاوه، اگر X و Y دو نگاشت از $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ به $\mathbb{F}$ باشند،

$$\mathrm{supp}(\alpha\, X+\beta\, Y)\subseteq \mathrm{supp}(X)\cup\mathrm{supp}(Y), \tag{469}$$

که نتیجه می‌دهد اگر محملِ دونگاشتِ X و Y باپایان باشد، محملِ هر ترکیبِ خطی یِشان هم باپایان است. پس اگر $X,Y\in\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$، آن‌گاه $(\alpha\, X+\beta\, Y)\in\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$. اثباتِ بقیه یِ ویژه‌گی‌ها یِ فضا یِ خطی هم بسیار ساده است.
■

یک نگاشتِ دل‌بخواهِ X از $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ به $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}_1(X)&:=\{v\in\mathbb{V}\mid[\exists\, w\in\mathbb{W}\mid (v,w)\in\mathrm{supp}(X)]\},\\ \mathrm{supp}_2(X)&:=\{w\in\mathbb{W}\mid[\exists\, v\in\mathbb{V}\mid (v,w)\in\mathrm{supp}(X)]\}.\end{aligned} \tag{470}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود
قضیه یِ 145: محملِ نگاشتِ X از $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ به میدانِ $\mathbb{F}$ باپایان است، اگر و تنها اگر $\mathrm{supp}_1(X)$ و $\mathrm{supp}_2(X)$ چنین باشند.
★

نگاشتِ $X\in\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ را در نظر بگیریم. $\mathrm{supp}_1(X)$ و $\mathrm{supp}_2(X)$ باپایان اند. بنابراین پهنه یِ هر یک از این مجموعه‌ها یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است (حتا اگر خودِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی نباشند). فرض کنید $\{e_i\mid i\}$ یک پایه یِ $\mathrm{span}[\mathrm{supp}_1(X)]$، و $\{f_a\mid a\}$ یک پایه یِ $\mathrm{span}[\mathrm{supp}_2(X)]$ باشد. رابطه یِ $\doteq$ را اول بینِ یک بردارِ دل‌بخواه و صفر، و سپس بینِ دو بردارِ دل‌بخواه تعریف می‌کنیم:

$$X\doteq 0\quad \text{iff}\quad \forall\,(i,a)\ :\ \sum\nolimits_{(v,w)} v^i\, w^a\, X(v,w)=0,$$

$$X\doteq Y\quad \text{iff}\quad (X-Y)\doteq 0. \tag{471}$$

در رابطه یِ اول جمع رو یِ $\mathrm{supp}(X)$ است، چون در بقیه یِ جاها X صفر است، پس v^i ها و w^a ها یی که در محاسبه وارد می‌شوند تعریف‌شده اند.

قضیه یِ 146: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، و داریم $X \in \mathrm{PT}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. هم‌چنین، فرض کنید $\mathrm{supp}_1(X) \subseteq \mathrm{span}(B')$ و $\mathrm{supp}_1(X) \subseteq \mathrm{span}(B'')$، و $\mathrm{supp}_2(X) \subseteq \mathrm{span}(C')$ و $\mathrm{supp}_2(X) \subseteq \mathrm{span}(C'')$، که B' و B'' دو زیرمجموعه یِ باپایان ـِ خطی‌مستقل ـِ $\mathbb{V}$، و C' و C'' دو زیرمجموعه یِ باپایان ـِ خطی‌مستقل ـِ $\mathbb{W}$ اند. اگر

$$\forall\,(\imath', a')\ :\ \sum\nolimits_{(v,w)} v^{\imath'}\, w^{a'}\, X(v,w) = 0, \tag{472}$$

که در آن مئلفه‌ها یِ بردارها در پایه‌ها یِ B' و C' به کار رفته است، آن‌گاه

$$\forall\,(\imath'', a'')\ :\ \sum\nolimits_{(v,w)} v^{\imath''}\, w^{a''}\, X(v,w) = 0, \tag{473}$$

که در آن مئلفه‌ها یِ بردارها در پایه‌ها یِ B'' و C'' به کار رفته است. از جمله $X \doteq 0$ برقرار است. ضمناً نتیجه می‌شود $X \doteq 0$ به پایه یِ انتخاب‌شده بسته‌گی ندارد.

اثبات: برا یِ $\mathrm{span}(B')$ پایه ای انتخاب می‌کنیم (B''') که شامل ـِ B (یک پایه یِ $\mathrm{supp}_1(X)$) باشد:

$$B''' = \{e_1, \dots e_n\}, \quad B = \{e_1, \dots e_k\}, \quad k \le n. \tag{474}$$

برا یِ $\mathrm{span}(C')$ هم پایه ای انتخاب می‌کنیم (C''') که شامل ـِ C (یک پایه یِ $\mathrm{supp}_2(X)$) باشد. با یک تغییرِپایه یِ ساده از B' و C' به B''' و C'''، معلوم می‌شود

$$\forall\,(\imath''', a''')\ :\ \sum\nolimits_{(v,w)} v^{\imath'''}\, w^{a'''}\, X(v,w) = 0. \tag{475}$$

اما اگر $v \in \mathrm{supp}_1(X)$، آن‌گاه

$$v^{\imath'''} = \begin{cases} v^i, & i \le k \\ 0, & i > k \end{cases}. \tag{476}$$

نظیر ـِ همین هم برا یِ w و پایه‌ها یِ C و C''' برقرار است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\forall\,(i, a);:\ \sum\nolimits_{(v,w)} v^i\, w^a\, X(v,w) = 0. \tag{477}$$

بردار ـِ $e_j \in B$ را می‌شود بر حسب ـِ اعضا یِ B'' بسط داد:

$$e_j := A^i{}_j\, e''_i. \tag{478}$$

(توجه کنید که A لزوماً وارون‌پذیر نیست و رابطه يِ بالا لزوماً تغییرِپایه نیست. حتا لازم نیست تعداد ِ اعضا يِ B'' با تعداد ِ اعضا يِ B برابر باشد.) از این‌جا نتیجه می‌شود

$$v^{i''} = A^i{}_j\, v^j. \tag{479}$$

رابطه يِ مشابه ی هم می‌شود برا يِ $w^{a''}$ ها نوشت. از این‌جا (473) نتیجه می‌شود.

■

قضیه يِ 147: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا يِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند. در این صورت $\{X \in \mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W}) \mid X \doteqdot 0\}$ یک زیرفضا يِ $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ است.

اثبات: کافی است نشان دهیم اگر $X, Y \in \mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$، و $X, Y \doteqdot 0$، آن‌گاه به ازا يِ اسکالرها يِ دل‌بخواه ِ α, β داریم

$$(\alpha\, X + \beta\, Y) \doteqdot 0. \tag{480}$$

این هم با استفاده از پایه يِ $\mathrm{span}[\mathrm{supp}_i(X) \cup \mathrm{supp}_i(Y)]$ و از قضیه يِ 146 نتیجه می‌شود.

■

حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری يِ فضا يِ $\mathbb{V}$ در فضا يِ $\mathbb{W}$ را با $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ نمایش می‌دهیم و به شکل ِ خارجِ‌قسمت ِ $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ بر رابطه يِ هم‌ارزی يِ $\doteqdot$ (همان خارجِ‌قسمت ِ $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ بر $\{X \in \mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W}) \mid X \doteqdot 0\}$) تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} := \mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})/\doteqdot. \tag{481}$$

به اعضا يِ $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ تانسور می‌گویند. تانسورها رده‌ها يِ هم‌ارزی يِ اعضا يِ $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ اند. رده يِ هم‌ارزی يِ X در $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ را با $[X]$ نشان می‌دهیم، که عضو ِ $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ است:

$$[X] = [Y] \quad \text{iff} \quad X \doteqdot Y. \tag{482}$$

متناظر با هر (v, w) در $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$، می‌شود $X_{(v,w)}$ در $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ را تعریف کرد که

$$\mathrm{supp}[X_{(v,w)}] = \{(v,w)\}, \qquad X_{(v,w)}(v,w) = 1. \tag{483}$$

حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری ي ِ بردار ِ $v \in \mathbb{V}$ در بردار ِ $w \in \mathbb{W}$ را با $v \otimes w$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم.

$$v \otimes w := [X_{(v,w)}]. \tag{484}$$

قضیه ي ِ 148: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا ي ِ خطی با میدان ِ $\mathbb{F}$ اند. در این صورت حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری ي ِ تعریف‌شده در رابطه ي ِ (484)، یک نگاشت ِ دوخطی از $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ به $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ است.

اثبات: مثلاً نشان می‌دهیم این حاصلِ‌ضرب، نسبت به مئلفه ي ِ اول َ ش خطی است. بردارها ي ِ $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$، بردار ِ $w \in \mathbb{W}$، و اسکالرها ي ِ α^1 و α^2 را در نظر بگیرید. باید نشان دهیم

$$X_{(\alpha^1\, v_1 + \alpha^2\, v_2, w)} - \alpha^1\, X_{(v_1,w)} - \alpha^2\, X_{(v_2,w)} \simeq 0. \tag{485}$$

برا ي ِ این کار، ابتدا فرض کنید $B = \{e_i \mid i\}$ و $C = \{f_a \mid a\}$ زیرمجموعه‌ها یی باپایان از به‌ترتیب $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ اند، که $v_0 \in \mathrm{span}(B)$ و $w_0 \in \mathrm{span}(C)$. داریم

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{(v,w)} v^i\, w^a\, X_{(v_0,w_0)}(v,w) &= (v_0)^i\, (w_0)^a\, X_{(v_0,w_0)}(v_0,w_0),\\ &= (v_0)^i\, (w_0)^a.\end{aligned} \tag{486}$$

حالا B را پایه ای بگیرید که v_1 و v_2 را بشود بر حسب َ ش بسط داد، و C را پایه ای که w را بشود بر حسب َ ش بسط داد. از رابطه ي ِ بالا نتیجه می‌شود

$$\sum\nolimits_{(v,w)} v^i w^a \{X_{(\alpha^1\, v_1 + \alpha^2\, v_2, w)} - \alpha^1\, X_{(v_1,w)} - \alpha^2\, X_{(v_2,w)}](v,w)$$

$$\begin{aligned}&= [\alpha^1\, (v_1)^i + \alpha^2\, (v_2)^i] w^a - \alpha^1\, (v_1)^i\, w^a - \alpha^2\, (v_2)^i\, w^a,\\ &= 0,\end{aligned} \tag{487}$$

که همان رابطه ي ِ موردِنظر است. خطی‌بودن نسبت به مئلفه ي ِ دوم هم به همین شکل ثابت می‌شود.

■

از تعریف ـِ (483) و تعریف ـِ $\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$، معلوم می‌شود

قضیه یِ 149: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ اند. هر نگاشت ـِ $X\in\mathrm{PT}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ را می‌شود به شکل ـِ یک ترکیب ـِ خطی یِ (باپایان ـِ) نگاشت‌ها یی به شکل ـِ (483) (یعنی نگاشت‌ها یی با محمل ـِ تک‌عضوی) نوشت.

اثبات: به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$X(v,w)=\sum\nolimits_{(v_0,w_0)}X(v_0,w_0)\,X_{(v_0,w_0)}(v,w), \tag{488}$$

و از آن‌جا

$$X=\sum\nolimits_{(v_0,w_0)}X(v_0,w_0)X_{(v_0,w_0)}. \tag{489}$$

■

یک نتیجه یِ این قضیه آن است که

قضیه یِ 150: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ اند. هر بردار ـِ $x\in\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ را می‌شود به شکل ـِ یک ترکیب ـِ خطی یِ (باپایان ـِ) حاصلِ‌ضرب‌ها یِ تانسوری یِ $v_i\otimes w_j$ با $v_i\in\mathbb{V}$ و $w_j\in\mathbb{W}$ نوشت.

اثبات: این قضیه نتیجه یِ مستقیم ـِ تعریف ـِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$، تعریف ـِ (484)، و قضیه یِ 149 است.

■

قضیه یِ بالا در واقع ساختار ـِ فضا یِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ را روشن می‌کند: این فضا مجموعه ای از ترکیب‌ها یِ به شکل ـِ $A^{\nu\rho}(v_\nu\otimes w_\rho)$ است، با این ویژه‌گی که هر یک از جمله‌ها یِ این مجموع نسبت به مئلفه‌ها یِ اول و دوم خطی است. یعنی ضرب ـِ عدد و $\otimes$ را می‌شود با هم جابه‌جا کرد، و $\otimes$ نسبت به جمع پخشی است. ترکیب ـِ بالا صفر است اگر با انتخاب ـِ پایه ای برا یِ v_ν ها و w_ρ ها

$$A^{\nu\rho}\,(v_\nu)^i\,(w_\rho)^a=0. \tag{490}$$

از جمله، هر بردار ـِ $x\in\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ را می‌شود به شکل ـِ

$$x=e_i\otimes w^i \tag{491}$$

نوشت، که در آن مجموعه یِ $\{e_i \mid i\}$ خطی‌مستقل است (البته این مجموعه در حالت ِ کلی به خود ِ x بسته‌گی دارد). در این صورت x صفر است، اگر و تنها اگر همه یِ w^i ها صفر باشند. هم‌چنین x را می‌شود به شکل ِ

$$x = v^a \otimes f_a \tag{492}$$

نوشت، که در آن مجموعه یِ $\{f_a \mid a\}$ خطی‌مستقل است (و البته در حالت ِ کلی به خود ِ x بسته‌گی دارد) و صفربودن ِ x به معنی یِ صفربودن ِ v^a ها است. سرانجام، x را می‌شود به شکل ِ

$$x = A^{ia}\, e_i \otimes f_a \tag{493}$$

نوشت، که در آن هم مجموعه یِ $\{e_i \mid i\}$ خطی‌مستقل است و هم مجموعه یِ $\{f_a \mid a\}$. در این حالت صفربودن ِ x یعنی این که همه یِ ضریب‌ها یِ A^{ia} صفر اند. توجه کنید که مجموعه‌ها یِ خطی‌مستقل ی که از آن‌ها نام بردیم، لزوماً پایه‌ها یِ فضاها یِ $\mathbb{V}$ یا $\mathbb{W}$ نیستند.

فضا یِ $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$ را در نظر بگیرید. اعضا یِ این فضا را می‌شود به شکل ِ $x = A^\mu{}_\nu\, v_\mu \otimes s^\nu$ نوشت. از اثر ِ هم‌بردارها بر بردارها اسکالر به دست می‌آید. از این‌جا می‌شود نگاشت ی از فضا یِ $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$ به اسکالرها تعریف کرد.

قضیه یِ 151: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ِ $\mathbb{F}$ است. نگاشت ِ $\mathrm{C} : (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*) \to \mathbb{F}$ با

$$\mathrm{C}(x = A^\mu{}_\nu\, v_\mu \otimes s^\nu) = A^\mu{}_\nu\, s^\nu(v_\mu) \tag{494}$$

یک نگاشت ِ خطی است. توجه کنید که رابطه یِ بالا در واقع تعریف ِ C است.

اثبات: ابتدا باید ثابت کنیم C خوش‌تعریف است. در واقع باید نشان دهیم اگر $x = 0$، آن‌گاه $\mathrm{C}(x) = 0$. مجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $\{e_i \mid i\}$ را برا یِ بسط ِ v_μ ها و مجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $\{e'^j \mid j\}$ را برا یِ بسط ِ s^ν ها به کار می‌بریم. (این مجموعه‌ها، در حالت ِ کلی به خود ِ v_μ ها و s^ν ها بسته‌گی دارند.) نتیجه می‌شود

$$\mathrm{C}(x) = [A^\mu{}_\nu\, (s^\nu)_j\, (v_\mu)^i] e'^j(e_i). \tag{495}$$

دیده می‌شود که اگر $x = 0$، آن‌گاه کروشه یِ طرف ـ راست ـ عبارت ـ بالا صفر می‌شود و در نتیجه $\mathrm{C}(x) = 0$. پس C خوش‌تعریف است. خطی‌بودن ـ آن هم به‌ساده‌گی از تعریف دیده می‌شود.

■

به نگاشت ـ C با تعریف ـ (494)، ادغام می‌گویند.

xxxv چند قضیه در مورد ـ ضرب ـ تانسوری یِ دو فضا

قضیه یِ 152: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـ یک‌سان اند. در این صورت نگاشت ـ $\mathrm{Per} \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}; \mathbb{V} \otimes \mathbb{W})$ با

$$\mathrm{Per}(x = A^{\nu\rho}\, v_\nu \otimes w_\rho) = A^{\nu\rho}\, w_\rho \otimes v_\nu \tag{496}$$

خطی و در $\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$ وارون‌پذیر است.

اثبات: ابتدا باید ثابت کنیم Per خوش‌تعریف است، یعنی طرف ـ راست ـ عبارت ـ بالا به شکل ی که برا یِ x انتخاب می‌شود بسته‌گی ندارد. در واقع باید نشان دهیم اگر $x = 0$، آن‌گاه طرف ـ راست ـ عبارت ـ بالا صفر می‌شود. مجموعه یِ خطی‌مستقل ـ $\{e_i \mid i\}$ را برا یِ بسط ـ v_ν ها و مجموعه یِ خطی‌مستقل ـ $\{f_a \mid a\}$ را برا یِ بسط ـ w_ρ ها به کار می‌بریم. (این مجموعه‌ها، در حالت ـ کلی به خود ـ v_ν ها و w_ρ ها بسته‌گی دارند.) داریم

$$x = [A^{\nu\rho}\, (v_\nu)^i\, (w_\rho)^a] e_i \otimes f_a, \tag{497}$$

و

$$\mathrm{Per}(x) = [A^{\nu\rho}\, (v_\nu)^i\, (w_\rho)^a] f_a \otimes e_i. \tag{498}$$

صفربودن ـ x یعنی صفربودن ـ کروشه یِ طرف ـ راست ـ (497)، که از آن نتیجه می‌شود $\mathrm{Per}(x)$ هم صفر است. این خوش‌تعریف‌بودن ـ Per را ثابت می‌کند. اثبات ـ خطی‌بودن و وارون‌پذیربودن ـ Per هم فقط به نوشتن نیاز دارد.

■

به نگاشت ـ Per در رابطه یِ (496) نگاشت ـ جای‌گشت می‌گویند. نتیجه یِ قضیه یِ بالا این است که

$$(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})\sim(\mathbb{W}\otimes\mathbb{V}), \tag{499}$$

که گاه ی برا یِ ساده‌گی آن را به شکل ِ تساوی می‌نویسند

$$(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})=(\mathbb{W}\otimes\mathbb{V}). \tag{500}$$

قضیه یِ 153: فرض کنید $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، و $\mathbb{W}$ سه فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند. در این صورت نگاشت ِ $t\in\mathcal{LF}[\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V});\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U},\mathbb{V})]$ با

$$[t(T)](x=A^{\mu\nu}\,u_\mu\otimes v_\nu)=A^{\mu\nu}\,T(u_\mu,v_\nu), \tag{501}$$

خطی و در $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ وارون‌پذیر است.

اثبات: باید نشان دهیم نگاشت ِ $t(T)$ خوش‌تعریف است، یعنی طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا به نمایش ِ به‌کاررفته برا یِ x بسته‌گی ندارد. در واقع باید نشان دهیم اگر $x=0$، آن‌گاه طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا صفر می‌شود. مجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $\{d_\alpha\mid\alpha\}$ را برا یِ بسط ِ u_μ ها و مجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $\{e_i\mid i\}$ را برا یِ بسط ِ v_ν ها به کار می‌بریم. (این مجموعه‌ها، در حالت ِ کلی به خود ِ u_μ ها و v_ν ها بسته‌گی دارند.) داریم

$$A^{\mu\nu}\,T(u_\mu,v_\nu)=[A^{\mu\nu}\,(u_\mu)^\alpha\,(v_\nu)^i]T(d_\alpha,e_i). \tag{502}$$

اگر $x=0$، کروشه یِ طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا صفر است و در نتیجه کل ِ عبارت صفر می‌شود. این خوش‌تعریف‌بودن را ثابت می‌کند. خطی‌بودن ِ t از تعریف َ ش دیده می‌شود. برا یِ اثبات ِ یک‌به‌یک‌بودن ِ t، فرض کنید $t(T)=0$. در این صورت اثر ِ $t(T)$ رو یِ هر چیز، از جمله رو یِ $(u\otimes v)$ صفر می‌شود. این یعنی

$$T(u,v)=0,\quad\forall\,(u,v)\in(\mathbb{U}\times\mathbb{V}), \tag{503}$$

که یعنی خود ِ T صفر است. سرانجام، باید ثابت کنیم t در $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ پوشا است. فرض کنید $\tilde{T}\in\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$. تعریف می‌کنیم

$$T(u,v):=\tilde{T}(u\otimes v). \tag{504}$$

T با تعریف ِ بالا، به‌روشنی دوخطی است و این ویژه‌گی را دارد که

$$t(T)=\tilde{T}. \tag{505}$$

■

از این پس نتیجه ي این قضیه،

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}) \sim \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U},\mathbb{V}), \tag{506}$$

را برا يِ ساده‌گی به شکل ِ تساوی می‌نویسیم:

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}) = \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U},\mathbb{V}). \tag{507}$$

هم‌چنین $t(T)$ در این قضیه را با خود ِ T نشان می‌دهیم.

فضا يِ نگاشت‌ها يِ خطی از یک فضا به یک فضا يِ دیگر هم یک فضای خطی است، و با آن می‌شود حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری ساخت. قضیه يِ زیر ارتباط ی بین ِ فضا يِ نگاشت‌ها يِ از حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری به حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری، و حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری يِ فضا يِ نگاشت‌ها يِ خطی برقرار می‌کند.

قضیه يِ 154: فرض کنید $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، $\mathbb{W}$، و $\mathbb{X}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند. نگاشت ِ $t\in\mathfrak{LF}\{\mathfrak{LF}[(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X});(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})];\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U})\otimes\mathfrak{LF}(\mathbb{X};\mathbb{V})\}$ با

$$[t(T=A^{\alpha\beta}\,R_\alpha\otimes S_\beta)](y=B^{\mu\nu}\,u_\mu\otimes v_\nu) = A^{\alpha\beta}\,B^{\mu\nu}\,R_\alpha(u_\mu)\otimes S_\beta(v_\nu), \tag{508}$$

خطی و یک‌به‌یک است.

اثبات: باید ثابت کنیم نگاشت ِ t خوش‌تعریف است. در واقع باید نشان دهیم اگر $T=0$، یا $y=0$، آن‌گاه $[t(T)](y)=0$. برا يِ این کار پایه‌ها يِ $\{D_i\mid i\}$، $\{E_j\mid j\}$، $\{d_k\mid k\}$، و $\{e_l\mid l\}$ را برا يِ مجموعه‌ها يِ نگاشتِ‌خطی و بردار ِ واردشده در طرف ِ چپ ِ رابطه يِ بالا انتخاب می‌کنیم (این پایه‌ها، در حالت ِ کلی به خود ِ بردارها و نگاشت‌ها يِ خطی يِ واردشده بسته‌گی دارند) و (508) را چنین می‌نویسیم.

$$[t(T)](y) = [A^{\alpha\beta}\,(R_\alpha)^i\,(S_\beta)^j][B^{\mu\nu}\,(u_\mu)^k\,(v_\nu)^l]D_i(d_k)\otimes E_j(e_l). \tag{509}$$

صفرشدن ِ T یعنی کروشه يِ اول ِ طرف ِ راست ِ بالا صفر است، و صفرشدن ِ y یعنی کروشه يِ دوم ِ طرف ِ راست ِ بالا صفر است. این خوش‌تعریف‌بودن را ثابت می‌کند. خطی‌بودن ِ نگاشت ِ t نتیجه يِ مستقیم ِ تعریف است. برا يِ اثبات ِ یک‌به‌یک‌بودن، باید نشان دهیم اگر $t(T)=0$، آن‌گاه $T=0$. برا يِ این کار T را به شکل ِ

$$T = D_i \otimes S^i \qquad (510)$$

می‌گیریم، که $\{D_i \mid i\}$ خطی‌مستقل است. حالا فرض می‌کنیم $t(T) = 0$. نتیجه می‌شود به ازا ی ِ بردارها ی ِ دل‌بخواه ِ u و v،

$$D_i(u) \otimes S^i(v) = 0. \qquad (511)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم S^i ها همه صفر اند. به ازا ی ِ یک v ی ِ معین، بردارها ی ِ $S^i(v)$ را می‌شود بر حسب ِ یک مجموعه ی ِ خطی‌مستقل مثلاً $\{e'_j \mid j\}$ بسط داد (چون تعداد ِ این بردارها باپایان است). نتیجه می‌شود

$$D_i(u) \otimes S^{ij}\, e'_j = 0. \qquad (512)$$

اما چون $\{e'_j \mid j\}$ خطی‌مستقل است، نتیجه ی ِ رابطه ی ِ بالا این است که

$$S^{ij}\, D_i(u) = 0. \qquad (513)$$

این رابطه به ازا ی ِ u ی ِ دل‌بخواه برقرار است، چون S^{ij} ها به v مربوط اند نه به u. پس معلوم می‌شود

$$S^{ij}\, D_i = 0. \qquad (514)$$

اما مجموعه ی ِ نگاشت‌ها ی ِ $\{D_i \mid i\}$ خطی‌مستقل است. پس رابطه ی ِ بالا نتیجه می‌دهد همه ی ِ S^{ij} ها صفر اند، و از آن‌جا معلوم می‌شود

$$S^i(v) = 0. \qquad (515)$$

این استدلال را برا ی ِ هر v می‌شود تکرار کرد. (e'_j ها و ضریب‌ها ی ِ بسط فرق می‌کنند، اما رابطه ی ِ اخیر به دست می‌آید.) پس

$$S^i = 0, \qquad (516)$$

که از آن نتیجه می‌شود خود ِ T صفر است.

■

از این پس $t(T)$ در قضیه ی ِ بالا را با خود ِ T نمایش می‌دهیم.

یک حالت ِ خاص ِ قضیه یِ بالا زمان ی است که $\mathbb{W}$ و $\mathbb{X}$ را میدان ِ این فضاها بگیریم. نتیجه می‌شود

قضیه یِ 155: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند. نگاشت ِ $t \in \mathfrak{LF}[(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})^*; \mathbb{U}^*\otimes\mathbb{V}^*]$ با

$$[t(A_{\alpha\beta}\, r^\alpha \otimes s^\beta)](B^{\mu\nu}\, u_\mu \otimes v_\nu) = A^{\alpha\beta}\, B^{\mu\nu}\, [r_\alpha(u_\mu)][s_\beta(v_\nu)], \tag{517}$$

خطی و یک‌به‌یک است. نیز، اگر $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، $\mathbb{W}$، و $\mathbb{X}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان باشند، $R \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{U})$، و $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{X}; \mathbb{V})$، آن‌گاه

$$\mathrm{res}[(R\otimes S)^*; \mathbb{W}^*\otimes\mathbb{X}^*] = R^*\otimes S^*. \tag{518}$$

در این‌جا پس‌آر ِ $R\otimes S$، به عنوان ِ عضو ِ $\mathfrak{LF}[\mathbb{W}\otimes\mathbb{X}; \mathbb{U}\otimes\mathbb{V}]$ مورد ِ نظر است.

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 156: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند. نگاشت ِ $t \in \mathfrak{LF}[\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}); \mathbb{W}\otimes\mathbb{V}^*]$ با

$$[t(A^\rho{}_\beta\, w_\rho \otimes s^\beta)](v) = A^\rho{}_\beta\, w_\rho\, [s^\beta(v)], \tag{519}$$

خطی و یک‌به‌یک است. هم‌چنین، تصویر ِ t برابر است با مجموعه یِ همه یِ نگاشت‌ها یی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$، که تصویر ِشان باپایان‌بُعدی است. (این مجموعه یک زیرفضا یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ است).

اثبات: این که مجموعه یِ همه یِ نگاشت‌ها یی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$، که تصویر ِشان باپایان‌بُعدی است، یک زیرفضا یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ است، به‌ساده‌گی از تعریف نتیجه می‌شود.

اثبات ِ خطی‌ویک‌به‌یک‌بودن ِ t کاملاً شبیه ِ اثبات ِ حکم ِ متناظر در قضیه یِ 154 است. طرف ِ راست ِ (519) عضو ِ پهنه یِ مجموعه یِ w_ρ ها است (که تعداد ِشان باپایان است و به v بسته‌گی ندارند). پس اثر ِ t بر هر عضو ِ $\mathbb{W}\otimes\mathbb{V}^*$، نگاشت ی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ است که تصویر ِش باپایان‌بُعدی است.

بر عکس، فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$، و تصویر ِ T باپایان‌بُعدی است. پس زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ی مثل ِ $\{f_1, \dots, f_n\}$ از $\mathbb{W}$ هست، که

$$\forall\, v \in \mathbb{V}\,;\; T(v) = s^i(v)\, f_i. \tag{520}$$

روشن است که s^i ها در $\mathbb{V}^*$ اند، و

$$T = t(f_i \otimes s^i). \tag{521}$$

پس تصویر ِ t همه ی ِ نگاشت‌ها ی ِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ با تصویر ِ باپایان‌بُعدی را در بر دارد.
■

وجود ِ نگاشت ِ t یک حالت ِ خاص ِ حکم ِ قضیه ی ِ 154 با $\mathbb{U}$ و $\mathbb{X}$ برابر با میدان ِ فضاها ی ِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ است: بر اساس ِ قضیه ی ِ 39، $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{F})$ با $\mathbb{W}$ یک‌ریخت است، و در قضیه ی ِ 161 نشان می‌دهیم $\mathbb{F}\otimes\mathbb{V}$ با $\mathbb{V}$ یک‌ریخت است.

از این پس نتیجه ی ِ این قضیه،

$$(\mathbb{W}\otimes\mathbb{V}^*) \sim \mathfrak{LF}_{\rm f}(\mathbb{W};\mathbb{V}), \tag{522}$$

را به شکل ِ

$$(\mathbb{W}\otimes\mathbb{V}^*) = \mathfrak{LF}_{\rm f}(\mathbb{W};\mathbb{V}) \tag{523}$$

می‌نویسیم. $\mathfrak{LF}_{\rm f}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ فضا ی ِ نگاشت‌ها ی ِ خطی یی از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{W}$ است، که تصویر ِشان باپایان‌بُعدی است.

اثبات ِ دوقضیه ی ِ زیر هم بسیار ساده است.

قضیه ی ِ 157: فرض کنید $\mathbb{U}_i$، $\mathbb{V}_i$، و $\mathbb{W}_i$ (با $i=1,2$) فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند، و به ازا ی ِ هر i داریم $R_i\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V}_i;\mathbb{U}_i)$ و $S_i\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W}_i;\mathbb{V}_i)$. در این صورت،

$$(R_2\otimes S_2)(R_1\otimes S_1) = (R_2\,R_1)\otimes(S_2\,S_1). \tag{524}$$

از جمله، فرض کنید $\mathbb{V}_i$ و $\mathbb{W}_i$ (با $i=1,2$) فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند، و به ازا ی ِ هر i داریم $T_i\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W}_i;\mathbb{V}_i)$. در این صورت،

a اگر S_1 یک وارون ِ راست ِ T_1 و S_2 یک وارون ِ راست ِ T_2 باشد، آن‌گاه $(S_1\otimes S_2)$ یک وارون ِ راست ِ $(T_1\otimes T_2)$ است.

b اگر T_1 و T_2 وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه $(T_1 \otimes T_2)$ هم وارون‌پذیر است و وارون َ ش $(T_1^{-1} \otimes T_2^{-1})$ است.

★

قضیه یِ 158: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند. در این صورت،

a اگر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $U \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{W})$، آن‌گاه $T \otimes 1_{\mathbb{W}}$ با $1_{\mathbb{V}} \otimes U$ جابه‌جا می‌شود.

b اگر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $T_1 := (T \otimes 1_{\mathbb{W}})$، آن‌گاه،

b1 اگر $P(T)$ یک‌چندجمله‌ای (یا چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته در صورت ِ وارون‌پذیربودن ِ T در $\mathbb{V}$) باشد، آن‌گاه $P(T_1)$ با $[P(T)] \otimes 1_{\mathbb{W}}$ برابر است. T در $\mathbb{V}$ وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر T_1 در $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ وارون‌پذیر باشد. $\ker[P(T_1)]$ برابر است با $\ker[P(T)] \otimes 1_{\mathbb{W}}$.

b2 ویژه‌مقدارها یِ T و T_1 برابر اند. همه یِ ویژه‌فضاها یِ (ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ) T_1 به شکل ِ $\mathbb{V}_\lambda \otimes \mathbb{W}$ اند. $\mathbb{V}_\lambda$ ویژه‌فضا یِ (ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ) T متناظر با λ است، اگر و تنها اگر $\mathbb{V}_\lambda \otimes \mathbb{W}$ ویژه‌فضا یِ (ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ) T_1 متناظر با λ باشد.

b3 T چندجمله‌ای یِ کمین (مشخصه) دارد، اگر و تنها اگر T_1 چندجمله‌ای یِ کمین (مشخصه) داشته باشد. در صورت ِ وجود، چندجمله‌ای‌ها یِ متناظر یک‌سان اند. T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است، اگر و تنها اگر T_1 ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد. در صورت ِ وجود ِ این تجزیه، نگاشت‌ها یِ پوچ‌توان و شبهِ‌ساده یِ متناظر با T_1 برابر اند با حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ نگاشت‌ها یِ متناظر ِ T در نگاشت ِ همانی یِ $\mathbb{W}$.

b4 تابع ِ f برا یِ T قابلِ‌تعریف است (به هر یک از معنی‌ها یِ بخش ِ xxiv)، اگر و تنها اگر این تابع برا یِ T_1 قابلِ‌تعریف باشد (به همان معنی یِ $f(T)$). در صورت ِ خوش‌تعریف‌بودن ِ این تابع‌ها، $f(T_1)$ با $[f(T)] \otimes 1_{\mathbb{W}}$ برابر است.

روشن است که حکم‌ها یِ مشابه ی هم برا یِ $U \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{W})$ و $U_2 := 1_{\mathbb{V}} \otimes U$ هست.

c اگر $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $U \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{W})$، آن‌گاه،

c1 اگر v یک ویژه‌بردار ـِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ، و w یک ویژه‌بردار ـِ U متناظر با ویژه‌مقدار ـِ μ باشد، آن‌گاه $v \otimes w$ یک ویژه‌بردار ـِ $T \otimes U$ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ $\lambda\,\mu$ است.

c2 اگر T یا U پوچ‌توان باشند، آن‌گاه $T \otimes U$ پوچ‌توان است. اگر $T \otimes U$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه T یا U پوچ‌توان اند.

c3 اگر T و U شبهِ‌ساده باشند، آن‌گاه $T \otimes U$ شبهِ‌ساده است. اگر T و U افکنش باشند، آن‌گاه $T \otimes U$ افکنش است.

c4 اگر T و U ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشند، آن‌گاه $T \otimes U$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در این صورت اگر $T = R + M$ (که R شبهِ‌ساده و M پوچ‌توان است و $[R, M] = 0$) و $U = S + N$ (که S شبهِ‌ساده و N پوچ‌توان است و $[S, N] = 0$)، آن‌گاه نگاشت ـِ شبهِ‌ساده یِ تجزیه یِ ژُردَن ـِ $(T \otimes U)$ برابر است با $R \otimes S$، و نگاشت ـِ پوچ‌توان ـِ این تجزیه برابر است با $(R \otimes N) + (M \otimes S) + (M \otimes N)$.

★

xxxvi حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ چند فضا یِ خطی

تعمیم ـِ حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ دو فضا به حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ چند فضا هم بسیار ساده است: مثلاً فرض کنید $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، و $\mathbb{W}$ سه فضا یِ خطی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ باشند. $\mathrm{PT}(\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W})$ یعنی مجموعه یِ نگاشت‌ها یی از $\mathbb{U} \times \mathbb{V} \times \mathbb{W}$ به $\mathbb{F}$، که محمل ـِشان باپایان است. اگر $X \in \mathrm{PT}(\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W})$، می‌گوییم $X \doteqdot 0$ وقت ی

$$\sum\nolimits_{(u,v,w)} u^\alpha\, v^i\, w^a\, X(u, v, w) = 0, \tag{525}$$

که در آن جمع رو یِ محمل ـِ X است و مئلفه‌ها در پایه‌ها یی برا یِ $\mathrm{span}[\mathrm{supp}_1(X)]$، $\mathrm{span}[\mathrm{supp}_2(X)]$، و $\mathrm{span}[\mathrm{supp}_3(X)]$ (یا پایه‌ها یی برا یِ یک فضاها یی بزرگ‌تر) حساب شده اند. $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ را به شکل ـِ $\mathrm{PT}(\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W})/\doteqdot$، و حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ سه‌بردار را هم به شکل ـِ رده یِ هم‌ارزی یِ نگاشت‌ها یِ با محمل ـِ تک‌عضوی تعریف

می‌کنیم. به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد مانسته یِ قضیه‌ها یی که برا یِ حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ دو فضا ثابت کردیم درست اند. از جمله، اعضا یِ $\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ چیز ی نیستند مگر ترکیب‌ها یِ خطی یی به شکل ِ $A^{\mu\nu\rho}(u_\mu\otimes v_\nu\otimes w_\rho)$.

$\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ یک فضا یِ خطی با میدان ِ $\mathbb{F}$ است. می‌شود حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ $\mathbb{U}$ با آن را ساخت. چه رابطه ای بین ِ $\mathbb{U}\otimes(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})$ و $\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ هست؟

قضیه یِ 159: فرض کنید $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، و $\mathbb{W}$ سه فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند. در این صورت $\mathbb{U}\otimes(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})$ با $\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ و $(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})\otimes\mathbb{W}$ یک‌ریخت است.

اثبات: یک نگاشت در $\mathcal{LF}[\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{W};\mathbb{U}\otimes(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})]$ می‌سازیم که در $\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ وارون‌پذیر است. هر بردار ِ $z\in\mathbb{U}\otimes(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})$ را می‌شود به شکل ِ

$$z = A^{\mu\phi}\,u_\mu\otimes x_\phi \tag{526}$$

نوشت، که در آن u_μ ها عضو ِ $\mathbb{U}$ و x_ϕ ها عضو ِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ اند (و تعداد ِ جمله‌ها یِ جمع باپایان است). خود ِ x_ϕ را هم می‌شود به شکل ِ

$$x_\phi = B_\phi{}^{\nu\rho}\,v_\nu\otimes w_\rho \tag{527}$$

نوشت. نتیجه می‌شود

$$z = C^{\mu\nu\rho}\,u_\mu\otimes(v_\nu\otimes w_\rho), \tag{528}$$

که در آن

$$C^{\mu\nu\rho} := A^{\mu\phi}\,B_\phi{}^{\nu\rho}. \tag{529}$$

نگاشت ِ $t\in\mathcal{LF}[\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{W};\mathbb{U}\otimes(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})]$ را به این شکل تعریف می‌کنیم که

$$t(z) := C^{\mu\nu\rho}\,u_\mu\otimes v_\nu\otimes w_\rho. \tag{530}$$

اول باید ثابت کنیم این نگاشت خوش‌تعریف است. در واقع کافی است نشان دهیم اگر این نگاشت رو یِ ترکیب ی اثر کند که صفر است، نتیجه صفر می‌شود. z در رابطه یِ (526) صفر است، اگر و تنها اگر

$$A^{\mu\phi}\,(u_\mu)^\alpha(x_\phi)^p = 0, \tag{531}$$

که در آن یک پایه برا یِ u_μ ها و یک پایه برا یِ x_ϕ ها انتخاب شده است. نتیجه یِ رابطه یِ بالا این است که

$$[A^{\mu\phi}\,(u_\mu)^\alpha]x_\phi = 0, \tag{532}$$

چون مئلفه‌ها یِ این بردار در یک پایه صفر اند. حالا از رابطه یِ (527) استفاده می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$B_\phi{}^{\nu\rho}\,A^{\mu\phi}\,(u_\mu)^\alpha\,v_\nu \otimes w_\rho = 0, \tag{533}$$

که یعنی با انتخاب ِ یک پایه برا یِ v_ν ها و w_ρ ها،

$$B_\phi{}^{\nu\rho}\,A^{\mu\phi}\,(u_\mu)^\alpha\,(v_\nu)^i\,(w_\rho)^a = 0. \tag{534}$$

اما با توجه به تعریف ِ $C^{\mu\nu\rho}$، این یعنی

$$C^{\mu\nu\rho}\,u_\mu \otimes v_\nu \otimes w_\rho = 0. \tag{535}$$

پس t خوش‌تعریف است. اثبات ِ خطی‌بودن ِ آن هم فقط به نوشتن نیاز دارد. برا یِ اثبات ِ پوشابودن ِ t در $\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$، یک عضو در این فضا می‌گیریم و آن را به شکل ِ ترکیب ی از حاصلِ‌ضرب‌ها یِ تانسوری یِ سه‌تایی می‌نویسیم:

$$\tilde{z} = \tilde{C}^{\mu\nu\rho}\,u_\mu \otimes v_\nu \otimes w_\rho. \tag{536}$$

روشن است که

$$t[\tilde{C}^{\mu\nu\rho} u_\mu \otimes (v_\nu \otimes w_\rho)] = \tilde{z}. \tag{537}$$

برا یِ اثبات ِ یک‌به‌یک‌بودن ِ t، از شکل ِ (528) برا یِ z استفاده می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم $t(z) = 0$، و می‌خواهیم نشان دهیم $z = 0$. از $t(z) = 0$ نتیجه می‌شود

$$C^{\mu\nu\rho}\,(u_\mu)^\alpha\,(v_\nu)^i\,(w_\rho)^a = 0, \tag{538}$$

که در آن مئلفه‌ها با پایه‌ها یی برا یِ u_μ ها، v_ν ها، و w_ρ ها نوشته شده اند. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$[C^{\mu\nu\rho}\,(u_\mu)^\alpha]v_\nu \otimes w_\rho = 0. \qquad (539)$$

حالا یک پایه برا یِ $(v_\nu \otimes w_\rho)$ ها می‌گیریم. مئلفه‌ها یِ بردار ـِ طرف ـِ چپ ـِ (539) در این پایه صفر اند:

$$[C^{\mu\nu\rho}\,(u_\mu)^\alpha](v_\nu \otimes w_\rho)^p = 0. \qquad (540)$$

اما این یعنی

$$C^{\mu\nu\rho}\,u_\mu \otimes (v_\nu \otimes w_\rho) = 0. \qquad (541)$$

پس $\mathbb{U} \otimes (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})$ با $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ یک‌ریخت است. به‌طور ـِ مشابه ی هم ثابت می‌شود $(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) \otimes \mathbb{W}$ با $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ یک‌ریخت است.

■

از این پس $t(z)$ در این قضیه را با خود ـِ z نمایش می‌دهیم. هم‌چنین نتیجه یِ این قضیه،

$$\mathbb{U} \otimes (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \sim \mathbb{U} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \sim (\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) \otimes \mathbb{W}, \qquad (542)$$

را به شکل ـِ تساوی می‌نویسیم:

$$\mathbb{U} \otimes (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = \mathbb{U} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} = (\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) \otimes \mathbb{W}. \qquad (543)$$

به خاطر ـِ این قضیه، می‌شود در حاصلِ‌ضرب ـِ تانسور یِ فضاها پرانتز را بر داشت. در واقع تناظر ی که در قضیه نشان دادیم، تناظر ـِ

$$u \otimes (v \otimes w) = u \otimes v \otimes w \qquad (544)$$

است، که مانسته ای به شکل ـِ

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes v \otimes w \qquad (545)$$

هم دارد. پس در حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ بردارها هم می‌شود پرانتز را بر داشت.

حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ خود ـِ میدان ـِ $\mathbb{F}$ در فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ (با میدان ـِ $\mathbb{F}$) را در نظر بگیرید. میدان ـِ $\mathbb{F}$ یک فضا یِ خطی یِ یک‌بُعدی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ است. پس $\mathbb{F} \otimes \mathbb{V}$ معنی دارد.

قضیه یِ 160: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ِ $\mathbb{F}$ است. در این صورت برا یِ هر عضو ِ $x \in \mathbb{F} \otimes \mathbb{V}$، یک و تنها یک بردار ِ $v \in \mathbb{V}$ هست که

$$x = 1 \otimes v, \qquad (546)$$

که 1 همانی یِ ضربی یِ میدان است.

اثبات: x را می‌شود به این شکل نوشت

$$x = A^{\mu\nu}\,(\alpha_\mu \otimes v_\nu). \qquad (547)$$

از این‌جا

$$\begin{aligned} x &= (A^{\mu\nu}\,\alpha_\mu)(1 \otimes v_\nu), \\ &= 1 \otimes (A^{\mu\nu}\,\alpha_\mu\,v_\nu). \end{aligned} \qquad (548)$$

این وجود را ثابت می‌کند. برا یِ اثبات ِ یک‌تایی یِ v کافی است نشان دهیم اگر $v \neq 0$، آن‌گاه، $x \neq 0$. x را به شکل ِ (546) می‌گیریم. فرض کنید $v \neq 0$. در این صورت v را می‌شود بر حسب ِ خود َش بسط داد. 1 را هم می‌شود بر حسب ِ خود ِ 1 بسط داد. نتیجه می‌شود

$$(1)^1 v^1 = 1 \qquad (549)$$

که یعنی $1 \otimes v \neq 0$.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ این قضیه آن است که

قضیه یِ 161: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ِ $\mathbb{F}$ باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{F} \otimes \mathbb{V} \sim \mathbb{V}. \qquad (550)$$

اثبات: کافی است نگاشت ِ $t \in (\mathbb{V}; \mathbb{F} \otimes \mathbb{V})$ را به این شکل تعریف کنیم

$$t(1 \otimes v) := v. \qquad (551)$$

■

از این پس $t(1 \otimes v)$ را با خود ِ v نمایش می‌دهیم. هم‌چنین نتیجه یِ این قضیه را به شکل ِ تساوی می‌نویسیم:

$$\mathbb{F} \otimes \mathbb{V} = \mathbb{V}. \tag{552}$$

ضرب ِ تانسوری را برا یِ دو یا بیش‌تر فضا یِ خطی تعریف کردیم. اما مراحل ِ تعریف را برا یِ یک فضا هم می‌شود به کار برد. یعنی می‌شود $\mathrm{PT}(\mathbb{V})$، و سپس $\mathrm{PT}(\mathbb{V})/\doteqdot$ را حساب کرد. فضا یِ اخیر چه رابطه ای با خود ِ $\mathbb{V}$ دارد؟

قضیه یِ 162: برا یِ هر فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$،

$$[\mathrm{PT}(\mathbb{V})/\doteqdot] \sim \mathbb{V}. \tag{553}$$

اثبات: نگاشت ِ $t: \mathbb{V} \to [\mathrm{PT}(\mathbb{V})/\doteqdot]$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$t(v) := [X_v]. \tag{554}$$

با استدلال ی مشابه با استدلال ِ قضیه یِ 148، معلوم می‌شود

$$[X_{\alpha^1\,v_1+\alpha^2\,v_2}] = \alpha^1\,[X_{v_1}] + \alpha^2\,[X_{v_2}]. \tag{555}$$

این نشان می‌دهد t خطی است. مشابه با قضیه یِ 149، معلوم می‌شود به ازا یِ هر $X \in [\mathrm{PT}(\mathbb{V})/\doteqdot]$،

$$X = \sum_v X(v)\,X_v, \tag{556}$$

و از آن‌جا

$$[X] = [X_{v_X}], \tag{557}$$

که در آن

$$v_X := \sum_v v\,X(v). \tag{558}$$

این نشان می‌دهد

$$t(v_X) = [X], \tag{559}$$

یعنی t در $PT(\mathbb{V})/\doteqdot$ پوشا است. سرانجام، $[X_v] = 0$ اگر و تنها اگر

$$\sum_{v'} v'^i\, X_v(v') = 0, \tag{560}$$

که در آن مئلفه‌ها یِ v' های عضو ـِ محمل ـِ X در یک پایه برا یِ فضا یی شامل ـِ پهنه یِ این محمل نوشته شده اند. اما این یعنی

$$v^i = 0. \tag{561}$$

پس هسته یِ t هم بدیهی است. در نتیجه t یک یک‌ریختی بین ـِ $\mathbb{V}$ و $\mathrm{PT}(\mathbb{V})/\doteq$ است. ■

یک نتیجه یِ ساده یِ این قضیه آن است که

قضیه یِ 163: برا یِ هر میدان ـِ $\mathbb{F}$،

$$[\mathrm{PT}(\mathbb{F})/\doteq] \sim \mathbb{F}. \tag{562}$$

★

حکم‌ها یِ دوقضیه یِ 162 و 163 را هم برا یِ ساده‌گی به شکل ـِ تساوی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}[]
[\mathrm{PT}(\mathbb{V})/\doteq] &= \mathbb{V},\\
[\mathrm{PT}(\mathbb{F})/\doteq] &= \mathbb{F}.
\end{aligned} \tag{563}$$

این‌ها را می‌شود تعمیم ـِ حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ n فضا یِ خطی، به حالت ـِ $n=1$ (خود ـِ فضا) و $n=0$ (میدان ـِ فضاها) تلقی کرد.

در بخش ـِ xxxiv ادغام را برا یِ فضا یِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}^*$ تعریف کردیم. کاملاً مشابه با آن تعریف، ادغام‌ها یِ زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C}^{(a)}{}_{(b)} : \mathbb{V}_1\otimes\cdots\otimes\mathbb{V}_n \to \mathbb{V}_1\otimes\cdots\otimes\widehat{\mathbb{V}_a}\otimes\cdots\otimes\widehat{\mathbb{V}_b}\otimes\cdots\otimes\mathbb{V}_n,\\
&\mathrm{C}^{(2)}{}_{(4)}(A_{i\,j\,k}{}^{\mu}{}_{\nu}\, x^i\otimes v_\mu\otimes x^j\otimes s^\nu\otimes x^k) := A_{i\,j\,k}{}^{\mu}{}_{\nu}\,[s^\nu(v_\mu)]\, x^i\otimes x^j\otimes x^k.
\end{aligned} \tag{564}$$

در این‌جا $\mathbb{V}_b$ دوگان ـِ $\mathbb{V}_a$ است، و $\widehat{X}$ یعنی عامل ـِ X حذف شده است. این تعریف برا یِ حالت ی است که $b>a$. تنهاتغییر ی که برا یِ حالت ـِ $b<a$ لازم است این است که جا یِ هم‌بردار ـِ s^ν با بردار ـِ v^μ عوض شود. با ترکیب ـِ این ادغام‌ها، این نگاشت را تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}: \mathbb{V}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}_n \otimes \mathbb{V}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}_n^* \to \mathbb{F}, \\ &\mathrm{C}(A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\, v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n} \otimes s^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes s^{\nu_n}) \\ :=\ & A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\, [s^{\nu_1}(v_{\mu_1})] \cdots [s^{\nu_n}(v_{\mu_n})]. \end{aligned} \tag{565}$$

دیده می‌شود در این حالت،

$$\mathrm{C} = \mathrm{C}^{(1)}{}_{(2)} \cdots \mathrm{C}^{(n)}{}_{(2n)}. \tag{566}$$

xxxvii ضرب ِ تانسوری و فضاها یِ باپایان‌بُعدی

نتیجه یِ قضیه یِ 150 این بود که هر عضو ِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ را می‌شود مثلاً به شکل ِ $x = e_i \otimes w^i$ نوشت، که در آن $B = \{e_i \mid i\}$ خطی‌مستقل است. اما در حالت ِ کلی مجموعه یِ B به خود ِ x بسته‌گی دارد. اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه B را می‌شود یک پایه یِ آن گرفت، که دیگر به x بسته‌گی ندارد. از این‌جا به قضیه یِ زیر می‌رسیم.

قضیه یِ 164: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند و بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان است. در این صورت به ازا یِ هر پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ برا یِ B، هر بردار ِ $x \in (\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})$ به شکل ِ $x = e_i \otimes w^i$ نوشته می‌شود، که در آن w^i ها به‌طور ِ یک‌تا از رو یِ x تعیین می‌شوند. از جمله،

$$\mathbb{V}\otimes\mathbb{W} \sim \overbrace{\mathbb{W}\times\cdots\times\mathbb{W}}^{n}, \tag{567}$$

که در آن n بُعد ِ $\mathbb{V}$ است.

اثبات: تنهاتفاوت ِ این نمایش با رابطه یِ (491) آن است که B را می‌شود مستقل از x انتخاب کرد. این هم ناشی از آن است که $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. پس پایه ای مثل ِ B هست که هر بردار ی در $\mathbb{V}$ را می‌شود بر حسب ِ اعضا یِ B بسط داد. برا یِ اثبات ِ یک‌ریختی یِ (567) هم نگاشت ِ

$$t(e_i \otimes w^i) := (w^1, \ldots, w^n) \tag{568}$$

را در نظر بگیرید. به‌ساده‌گی دیده می‌شود این نگاشت خطی و در $\overbrace{\mathbb{W}\times\cdots\times\mathbb{W}}^{n}$ وارون‌پذیر است.

■

به زبان ـ ساده می‌شود گفت اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، هر عضو ـ فضا یِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ شبیه ـ یک بردار ـ فضا یِ $\mathbb{V}$ است، که مئلفه‌ها یَش عدد نیستند بل که بردارها یی در $\mathbb{W}$ اند. یک نتیجه یِ روشن ـ قضیه یِ بالا این است.

قضیه یِ 165: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ـ یک‌سان، و $B=\{e_i\mid i\}$ و $C=\{f_a\mid a\}$ پایه‌ها یی برا یِ به‌ترتیب $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ اند. در این صورت هر بردار ـ $x\in(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})$ را می‌شود به شکل ـ

$$x=x^{ia}\,e_i\otimes f_a \tag{569}$$

نوشت، که در آن x^{ia} ها به‌طور ـ یک‌تا از رو یِ x تعیین می‌شوند.

★

یک نتیجه یِ دیگر ـ قضیه یِ 164 (هم‌راه با قضیه یِ 38) این است.

قضیه یِ 166: اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ـ یک‌سان باشند، آن‌گاه

$$\dim(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})=[\dim(\mathbb{V})][\dim(\mathbb{W})], \tag{570}$$

و در نتیجه

$$(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})\sim\mathbb{F}^{\,[\dim(\mathbb{V})][\dim(\mathbb{W})]}. \tag{571}$$

★

اگر بعض ی از فضاها یِ خطی یی که با آن‌ها حاصلِ‌ضرب ـ تانسوری می‌سازیم، باپایان‌بُعدی باشند، قضیه یِ 154 و نتایج َ ش را می‌شود به شکل ـ یک‌ریختی بیان کرد:

قضیه یِ 167: فرض کنید $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، $\mathbb{W}$، و $\mathbb{X}$ چهار فضا یِ خطی با میدان ـ یک‌سان اند و بُعد ـ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{W}$ باپایان است. در این صورت نگاشت ـ خطی یِ $t\in\mathfrak{LF}[\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V});\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U})\otimes\mathfrak{LF}(\mathbb{X};\mathbb{V})]$ در قضیه یِ 154، در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ وارون‌پذیر است.

اثبات: با توجه به قضیه یِ 154، کافی است ثابت کنیم این نگاشت در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ پوشا است. فرض کنید $\{d_\alpha \mid \alpha\}$ یک پایه یِ $\mathbb{U}$، و $\{f_a \mid a\}$ یک پایه یِ $\mathbb{W}$ باشد. Z را یک نگاشت ـِ خطی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ می‌گیریم. داریم

$$Z(d_\alpha\otimes v)=f_a\otimes {Z^a}_\alpha(v), \tag{572}$$

که در آن ${Z^a}_\alpha$ ها نگاشت‌ها یِ خطی یی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{X};\mathbb{V})$ اند، که به‌طور ـِ یک‌تا از رو یِ Z تعیین می‌شوند. نگاشت‌ها یِ خطی یِ ${R_a}^\beta$ در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U})$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$${R_a}^\beta(d_\alpha):=\delta^\beta_\alpha f_a. \tag{573}$$

از این‌جا دیده می‌شود

$$t({R_a}^\beta\otimes {Z^a}_\beta)=Z. \tag{574}$$

■

نتیجه یِ این قضیه این است که اگر $\mathbb{U}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی باشند، آن‌گاه

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})\sim\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U})\otimes\mathfrak{LF}(\mathbb{X};\mathbb{V}), \tag{575}$$

که برا یِ ساده‌گی آن را به شکل ـِ تساوی می‌نویسیم.

$$\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})=\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U})\otimes\mathfrak{LF}(\mathbb{X};\mathbb{V}). \tag{576}$$

هم‌چنین،

قضیه یِ 168: فرض کنید $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، $\mathbb{W}$، و $\mathbb{X}$ چهار فضا یِ خطی با میدان ـِ یک‌سان اند و بُعد ـِ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ باپایان است. در این صورت نگاشت ـِ خطی یِ $t\in[\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V});\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U})\otimes\mathfrak{LF}(\mathbb{X};\mathbb{V})]$ در قضیه یِ 154، در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ وارون‌پذیر است.

اثبات: باز هم کافی است پوشابودن ـِ این نگاشت در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ را ثابت کنیم. فرض کنید $\{d_\alpha \mid \alpha\}$ یک پایه یِ $\mathbb{U}$، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است. Z را یک نگاشت ـِ خطی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{X};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ می‌گیریم. تعریف می‌کنیم

$$Z_{\alpha i}:=Z(d_\alpha\otimes e_i). \tag{577}$$

$Z_{\alpha i}$ ها عضوِ $\mathbb{W}\otimes\mathbb{X}$ اند. پس می‌شود آن‌ها را به شکلِ

$$Z_{\alpha i} = Z_{\alpha i}{}^{\rho\sigma}\, w_\rho \otimes x_\sigma \tag{578}$$

که در آن $\{w_\rho \mid \rho\}$ و $\{x_\sigma \mid \sigma\}$ مجموعه‌ها یی باپایان و خطی‌مستقل اند. توجه کنید که قاعدتاً برا یِ بسط ـ هر یک از $Z_{\alpha i}$ ها دو مجموعه‌ی خطی‌مستقل لازم است، که به α و i بسته‌گی دارند. اما چون تعداد ـ $Z_{\alpha i}$ ها باپایان است، می‌شود پهنه یِ همه یِ مجموعه‌ها یِ خطی‌مستقل ـ اول را با هم و پهنه یِ همه یِ مجموعه‌ها یِ خطی‌مستقل ـ دوم را هم با هم جمع کرد و دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی به دست آورد. حالا می‌شود $\{w_\rho \mid \rho\}$ و $\{x_\sigma \mid \sigma\}$ را مثلاً پایه‌ها یی برا یِ این دوفضا گرفت و همه یِ $Z_{\alpha i}$ ها را بر حسب ـ این دومجموعه بسط داد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\rho}(d_\beta) &:= \delta^\alpha_\beta\, w_\rho, \\ S^{i}{}_{\sigma}(e_j) &:= \delta^i_j\, x_\sigma. \end{aligned} \tag{579}$$

از این‌جا به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$t(Z_{\alpha i}{}^{\rho\sigma}\, R^{\alpha}{}_{\rho} \otimes S^{i}{}_{\sigma}) = Z. \tag{580}$$

■

نتیجه یِ این قضیه هم این است که اگر بُعد ـ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ باپایان باشد، رابطه یِ (575) (یا به‌شکل ـ ساده‌تر (576)) برقرار است. روشن است که اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{X}$ باپایان‌بُعدی باشند هم، کاملاً مشابه با قضیه یِ 167 می‌شود به رابطه یِ (575) یا شکل ـ ساده‌تر ـ (576) رسید. اما از باپایان‌بودن ـ بُعد ـ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{X}$، یا $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$، یا $\mathbb{W}$ و $\mathbb{X}$، چنین‌نتیجه ای به دست نمی‌آید.

سرانجام، از قضیه یِ 167 استفاده می‌کنیم و فضاها یِ متفاوت ی را میدان ـ فضاها یِ خطی یِ موردِنظر می‌گیریم. نتیجه می‌شود

قضیه یِ 169: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـ یک‌سان اند و بُعد ـ یک ی از آن‌ها باپایان است. در این صورت نگاشت ـ خطی یِ $t \in [(\mathbb{U}^* \otimes \mathbb{V}^*); (\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})^*]$ در قضیه یِ 155، در $(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})^*$ وارون‌پذیر است. یعنی

$$(\mathbb{U}^* \otimes \mathbb{V}^*) \sim (\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})^*, \tag{581}$$

یا به‌طور ـ ساده‌تر

$$(\mathbb{U}^* \otimes \mathbb{V}^*) = (\mathbb{U} \otimes \mathbb{V})^*. \tag{582}$$

★

با توجه به قضیه یِ 153، ضمناً می‌شود نوشت

$$(\mathbb{U}^* \otimes \mathbb{V}^*) \sim \mathcal{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{U}, \mathbb{V}) \tag{583}$$

(به شرط ی که $\mathbb{U}$ یا $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد). اگر $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ هر دو باپایان‌بُعدی باشند، آن‌گاه می‌شود از قضیه یِ 122 استفاده کرد و نتیجه گرفت

$$(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) \sim \mathcal{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{U}^*, \mathbb{V}^*). \tag{584}$$

به همین خاطر گاه ی رابطه یِ

$$(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) = \mathcal{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{U}^*, \mathbb{V}^*) \tag{585}$$

را به عنوان ِ تعریف ِ حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ دو فضا به کار می‌برند. البته این تعریف فقط برا یِ فضاها یِ باپایان‌بُعدی به کار می‌رود.

هم‌چنین

قضیه یِ 170: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند و بُعد ِ یک ی از آن‌ها باپایان است. در این صورت نگاشت ِ خطی یِ $t \in [\mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}); (\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*)]$ در قضیه یِ 156، در $\mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ وارون‌پذیر است، که از آن نتیجه می‌شود

$$(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*) \sim \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}), \tag{586}$$

یا به‌طور ِ ساده‌تر

$$(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*) = \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}). \tag{587}$$

★

توجه کنید که رابطه یِ (410)، با استفاده از قضیه‌ها یِ 122 و 152، به عنوان ِ یک حالت ِ خاص ِ نتیجه یِ قضیه یِ بالا به دست می‌آید: اگر $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathfrak{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{W}^*) &\sim [\mathbb{V}^*\otimes(\mathbb{W}^*)^*],\\ &\sim (\mathbb{V}^*\otimes\mathbb{W}),\\ &\sim (\mathbb{W}\otimes\mathbb{V}^*),\\ &\sim \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}).\end{aligned} \tag{588}$$

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت ادغام از $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}^*$ به میدان شکل ِ ساده ای پیدا می‌کند. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 171: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، $B=\{e_i\mid i\}$ یک پایه یِ آن، و $B'=\{e^i\mid i\}$ دوگان ِ B است. در این صورت

$$\mathrm{C}(e_i\otimes e^j)=\delta_i^j, \tag{589}$$

و در نتیجه

$$\mathrm{C}({x^i}_j\, e_i\otimes e^j)={x^i}_i. \tag{590}$$

★

xxxviii رد ِ یک نگاشت ِ خطی

نگاشت ِ خطی یِ $T\in\mathfrak{LF}_{\mathrm{f}}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. طبق ِ قضیه یِ 156، این نگاشت عضو ِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}^*$ است. از این‌جا تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{tr}(T):=\mathrm{C}(T). \tag{591}$$

(به طور ِ دقیق‌تر می‌شد نوشت

$$\mathrm{tr}(T):=\mathrm{C}[t^{-1}(T)], \tag{592}$$

که در آن t یک‌ریختی یی است که در قضیه یِ 156 تعریف شده است.) به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 172: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ِ $\mathbb{F}$ باشد، آن‌گاه نگاشت ِ $\mathrm{tr} : \mathfrak{LF}_{\mathrm{f}}(\mathbb{V};\mathbb{V}) \to \mathbb{F}$ با رابطه یِ (591) خطی است. اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه اَش باشد، آن‌گاه به ازا یِ هر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$،

$$\mathrm{tr}(T) = T^i{}_i. \tag{593}$$

★

به $\mathrm{tr}(T)$ رد ِ نگاشت ِ خطی یِ T می‌گویند.

قضیه یِ 173: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ و $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{W})$، و تصویر ِ دستِ‌کم یک ی از نگاشت‌ها یِ S و T باپایان‌بُعدی است. در این صورت تصویر ِ هردونگاشت ِ $(S\,T)$ و $(T\,S)$ باپایان‌بُعدی است، و

$$\mathrm{tr}(S\,T) = \mathrm{tr}(T\,S). \tag{594}$$

اثبات: فرض کنید تصویر ِ T باپایان‌بُعدی است. در این صورت T را می‌شود به شکل ِ

$$T = A^\nu{}_\alpha\, w_\nu \otimes s^\alpha \tag{595}$$

نوشت، که w_ν ها در $\mathbb{W}$ و s^α ها در $\mathbb{V}^*$ اند. v را بردار ِ دل‌بخواه ی در $\mathbb{V}$ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}(S\,T)(v) &= A^\nu{}_\alpha\, S\{[s^\alpha(v)]\, w_\nu\},\\ &= [A^\nu{}_\alpha\,(S\,w_\nu)\otimes s^\alpha](v).\end{aligned} \tag{596}$$

این نشان می‌دهد $S\,T$ برابر است با یک عضو ِ $\mathbb{W}\otimes\mathbb{W}^*$، و در نتیجه تصویر ِ $S\,T$ باپایان‌بُعدی است. ضمناً

$$\mathrm{tr}(S\,T) = A^\nu{}_\alpha\, s^\alpha(S\,w_\nu). \tag{597}$$

w را بردار ِ دل‌بخواه ی در $\mathbb{W}$ می‌گیریم. از (595) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}(T\,S)(w) &= A^\nu{}_\alpha\,[s^\alpha(S\,w)]\,w_\nu,\\ &= A^\nu{}_\alpha\,[(S^*\,s^\alpha)(w)]\,w_\nu,\\ &= [A^\nu{}_\alpha\, w_\nu \otimes (S^*\,s^\alpha)](w).\end{aligned} \tag{598}$$

این نشان می‌دهد $T\,S$ در $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}^*$، و در نتیجه تصویر ـَ ش باپایان‌بُعدی است. ضمناً

$$\mathrm{tr}(T\,S)=A^{\nu}{}_{\alpha}\,(S^*\,s^{\alpha})(w_{\nu}),\tag{599}$$

که از مقایسه یِ (597) با آن، (594) نتیجه می‌شود.

■

قضیه یِ 174: فرض کنید $S\in\mathfrak{LF}_{\mathrm{f}}(\mathbb{U};\mathbb{U})$ و $T\in\mathfrak{LF}_{\mathrm{f}}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت $(S\otimes T)\in\mathfrak{LF}_{\mathrm{f}}(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V};\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$، و

$$\mathrm{tr}(S\otimes T)=\mathrm{tr}(S)\;\mathrm{tr}(T).\tag{600}$$

اثبات: چون بُعد ـِ تصویر ـِ S باپایان است، S را می‌شود به شکل ـِ

$$S=A^{\mu}{}_{\alpha}\,u_{\mu}\otimes r^{\alpha}\tag{601}$$

نوشت، که u_{μ} ها در $\mathbb{U}$ و r^{α} ها در $\mathbb{U}^*$ اند. چون بُعد ـِ تصویر ـِ T باپایان است، T را می‌شود به شکل ـِ

$$T=B^{\nu}{}_{\beta}\,v_{\nu}\otimes s^{\beta}\tag{602}$$

نوشت، که v_{ν} ها در $\mathbb{V}$ و s^{β} ها در $\mathbb{V}^*$ اند.

دو بردار ـِ دل‌بخواه ـِ $u\in\mathbb{U}$ و $v\in\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}(S\otimes T)(u\otimes v)&=(S\,u)\otimes(T\,v),\\&=[A^{\mu}{}_{\alpha}\,r^{\alpha}(u)][B^{\nu}{}_{\beta}\,s^{\beta}(v)]\,u_{\mu}\otimes v_{\nu},\end{aligned}\tag{603}$$

و از آن‌جا

$$(S\otimes T)=(u_{\mu}\otimes v_{\nu})\otimes(A^{\mu}{}_{\alpha}\,B^{\nu}{}_{\beta}\,r^{\alpha}\otimes s^{\beta}).\tag{604}$$

پس $(S\otimes T)$ عضو ـِ $(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})\otimes(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})^*$، و در نتیجه تصویر ـَ ش باپایان‌بُعدی است. ضمناً

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(S\otimes T)&=(A^{\mu}{}_{\alpha}\,B^{\nu}{}_{\beta}\,r^{\alpha}\otimes s^{\beta})(u_{\mu}\otimes v_{\nu}),\\&=[A^{\mu}{}_{\alpha}\,r^{\alpha}(u_{\mu})][B^{\nu}{}_{\beta}\,s^{\beta}(v_{\nu})],\end{aligned}\tag{605}$$

که همان (600) است.

■

قضیه ي 175: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا يِ خطی يِ باپایان‌بُعدی، و نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. ویژه‌مقدارها يِ T را با λ_i، و به ازا يِ هر i بُعد ِ ویژه‌فضا يِ تعمیم‌یافته يِ T متناظر با λ_i را با n_i نشان می‌دهیم. در این صورت،

$$\operatorname{tr}(T) = \sum\nolimits_i n_i\,\lambda_i. \tag{606}$$

اثبات: کافی است T را به شکل ِ ژُردَن (قضیه يِ 94) بنویسیم و رابطه يِ (593) (قضیه يِ 172) را به کار ببریم.

■

قضیه يِ 176: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}_{\mathrm{f}}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت T هسته‌جدا است، بُعد ِ تصویر ِ $\operatorname{cor}(T)$ و بُعد ِ تصویر ِ $\operatorname{ess}(T)$ باپایان است، و

$$\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}[\operatorname{cor}(T)] = \operatorname{tr}[\operatorname{ess}(T)]. \tag{607}$$

اگر علاوه بر این T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\operatorname{tr}(T) = \sum_{\substack{i\\ \lambda_i\neq 0}} n_i\,\lambda_i, \tag{608}$$

که λ_i ها ویژه‌مقدارها يِ T اند، و به ازا يِ هر i بُعد ِ ویژه‌فضا يِ تعمیم‌یافته يِ T متناظر با λ_i برابر n_i است.

اثبات: از قضیه يِ 28 نتیجه می‌شود T هسته‌جدا، و $\operatorname{edom}(T)$ باپایان‌بُعدی است. تصویر ِ $\operatorname{cor}(T)$ و تصویر ِ $\operatorname{ess}(T)$ زیرفضا يِ $\operatorname{edom}(T)$ اند، پس بُعد ِ آن‌ها هم باپایان است.

چون تصویر ِ T باپایان‌بُعدی است، T را می‌شود به شکل ِ

$$T = v_i \otimes s^i \tag{609}$$

نوشت، که $\{v_i \mid i\}$ خطی مستقل است و به ازا يِ هر i داریم $v_i \in \operatorname{img}(T)$ و $s^i \in \mathbb{V}^*$.
هر یک از v_i ها را می‌شود به شکل ِ مجموع ِ دو بردار ِ $v_i' \in \operatorname{edom}(T)$ و $v_i'' \in \ker(T)$ نوشت:

$$\forall\, i\ :\ v_i = v_i' + v_i''. \tag{610}$$

از تعریف ِ $\operatorname{cor}(T)$ نتیجه می‌شود

$$\operatorname{cor}(T) = v_i' \otimes s^i. \tag{611}$$

هم‌چنین، از تعریف ِ $\operatorname{ess}(T)$ نتیجه می‌شود

$$\operatorname{ess}(T) = v_i' \otimes \bar{s}^i, \tag{612}$$

که به ازا یِ هر i، تابعی یِ $\bar{s}^i$ برابر با $\operatorname{res}[s^i; \operatorname{edom}(T)]$ است. از خطی‌مستقل‌بودن ِ $\{v_i \mid i\}$ نتیجه می‌شود اگر $v \in \ker(T)$، آن‌گاه به ازا یِ هر i داریم $s^i(v) = 0$. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T) &= s^i(v_i),\\ &= s^i(v_i' + v_i''),\\ &= s^i(v_i'),\\ &= \operatorname{tr}[\operatorname{cor}(T)]. \end{aligned} \tag{613}$$

هم‌چنین،

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[\operatorname{ess}(T)] &= \bar{s}^i(v_i'),\\ &= s^i(v_i'),\\ &= \operatorname{tr}[\operatorname{cor}(T)]. \end{aligned} \tag{614}$$

اگر T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد، $\operatorname{ess}(T)$ هم ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. $\operatorname{ess}(T)$ نگاشت ی از یک فضا یِ باپایان‌بُعدی به خود ِ آن فضا است. پس حکم ِ قضیه یِ 175 برا یَش برقرار است. ویژه‌مقدارها یِ ناصفر ِ T و $\operatorname{ess}(T)$ یک‌سان اند، و ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر هم یک‌ریخت اند (قضیه‌ها یِ 86 و 87). از این‌جا (608) نتیجه می‌شود.

■

xxxix نمایش ـِ ماتریسی یِ حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری

فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ یک‌سان اند و بُعد ـِ $\mathbb{U}$ باپایان است. بردار ـِ $x\in(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V})$ را می‌شود بر حسب ـِ یک پایه یِ $\mathbb{U}$ بسط داد. این پایه را $\{d_1,\dots,d_m\}$ می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$x=d_\alpha\otimes x^\alpha. \tag{615}$$

نمایش ـِ ماتریسی یِ x چنین می‌شود

$$\mathrm{mat}(x)=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^m\end{pmatrix}. \tag{616}$$

این رابطه کاملاً شبیه ـِ (303) است، جز این که مئلفه‌ها بردار اند $(x^i\in\mathbb{V})$. اگر $\mathbb{V}$ هم باپایان‌بُعدی باشد، و $\{e_1,\dots,e_n\}$ را یک پایه یِ آن بگیریم، به این شکل ـِ ماتریسی یِ دیگر ـِ x می‌رسیم.

$$\mathrm{mat}(x)=\begin{pmatrix}x^{11}\\ x^{12}\\ \vdots\\ x^{mn}\end{pmatrix}. \tag{617}$$

از جمله،

$$\mathrm{mat}(u\otimes v)=\begin{pmatrix}u^1\,v\\ \vdots\\ u^m\,v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^1\,v^1\\ u^1\,v^2\\ \vdots\\ u^m\,v^n\end{pmatrix}. \tag{618}$$

برا یِ شکل ـِ اول کافی است بُعد ـِ $\mathbb{U}$ باپایان باشد، و برا یِ شکل ـِ دوم باید بُعد ـِ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ هر دو باپایان باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 177: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، $\mathbb{U}$ باپایان‌بُعدی است، $A=\{d_\alpha\mid\alpha\}$ و $A'=\{d'_\alpha\mid\alpha\}$ دو پایه یِ $\mathbb{U}$ اند، Ξ نگاشت ـِ تغییرِپایه یِ A به A' است، و $x\in\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}$. در این صورت،

$$x^{\alpha'}=(\Xi^{-1})^\alpha{}_\beta\,x^\beta. \tag{619}$$

★

نتیجه یِ مشابه ی هم در مورد ـِ تغییرِپایه در فضا یِ $\mathbb{V}$ به دست می‌آید (به شرط ـِ آن که بُعد ـِ این فضا باپایان باشد). سرانجام، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 178: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ـِ یک‌سان اند، $A = \{d_\alpha \mid \alpha\}$ و $A' = \{d'_\alpha \mid \alpha\}$ دو پایه یِ $\mathbb{U}$ و $B = \{e_i \mid i\}$ و $B' = \{e'_i \mid i\}$ دو پایه یِ $\mathbb{V}$ اند، Ξ نگاشت ـِ تغییرِپایه یِ A به A' و Λ نگاشت ـِ تغییرِپایه یِ B به B' است، و $x \in \mathbb{U} \otimes \mathbb{V}$. در این صورت،

$$x^{\alpha' \imath'} = (\Xi^{-1})^\alpha{}_\beta \, (\Lambda^{-1})^i{}_j \, x^{\beta j}. \tag{620}$$

★

اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی باشد، $\mathbb{V}^*$ هم یک فضا یِ خطی است. اما معمولاً برا یِ نمایش ـِ ماتریسی یِ هم‌بردارها (اعضا یِ $\mathbb{V}^*$) از ماتریس‌ها یِ سطری استفاده می‌شود. فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، و بُعد ـِ $\mathbb{V}$ باپایان است. $\{e_1, \dots, e_n\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم. نمایش ـِ ماتریسی یِ $(x = e^i \otimes x_i) \in (\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{U})$ می‌شود

$$\mathrm{mat}(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}. \tag{621}$$

اگر $\mathbb{U}$ هم باپایان‌بُعدی و $\{d_1, \dots, d_m\}$ یک پایه یِ آن باشد، آن‌گاه x_i ها را هم می‌شود با ماتریس‌ها یِ ستونی نمایش داد. در نتیجه

$$\mathrm{mat}(x) = \begin{pmatrix} {x_1}^1 & \cdots & {x_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^m & \cdots & {x_n}^m \end{pmatrix}. \tag{622}$$

قضیه یِ تغییرِپایه هم به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود:

قضیه یِ 179: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ـِ یک‌سان اند، $A = \{d_\alpha \mid \alpha\}$ و $A' = \{d'_\alpha \mid \alpha\}$ دو پایه یِ $\mathbb{U}$ و $B = \{e_i \mid i\}$ و $B' = \{e'_i \mid i\}$ دو پایه یِ $\mathbb{V}$ اند، Ξ نگاشت ـِ تغییرِپایه یِ A به A' و Λ نگاشت ـِ تغییرِپایه یِ B به B' است، و $x \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{U}$. در این صورت،

$${x_{\imath'}}^{\alpha'} = (\Xi^{-1})^\alpha{}_\beta \, \Lambda^j{}_i \, {x_j}^\beta. \tag{623}$$

★

برا ي اعضا يِ $\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}^*$ هم می‌شود نمایش ِ مشابه ی یافت. اگر $\mathbb{U}$ باپایان‌بُعدی و $\{d_1,\dots,d_m\}$ یک پایه يِ آن باشد، نمایش ِ ماتریسی يِ $(y=d_a\otimes y^a)\in(\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}^*)$ می‌شود

$$\mathrm{mat}(y)=\begin{pmatrix} y^1\\ \vdots\\ y^m\end{pmatrix}. \tag{624}$$

اگر $\mathbb{V}$ هم باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه،

$$\mathrm{mat}(y)=\begin{pmatrix} {y^1}_1 & \cdots & {y^1}_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {y^m}_1 & \cdots & {y^m}_n\end{pmatrix}. \tag{625}$$

نمایش ِ ماتریسی يِ حاصلِ‌ضرب‌ها يِ تانسوری يِ نگاشت‌ها يِ خطی هم کاملاً شبیه ِ مثال‌ها يِ بالا است. فرض کنید $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، $\mathbb{W}$، و $\mathbb{X}$ فضاها یی خطی با یک میدان، و $\mathbb{U}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی باشند. $\{d_1,\dots,d_m\}$ را یک پایه يِ $\mathbb{U}$ و $\{f_1,\dots,f_p\}$ را یک پایه يِ $\mathbb{W}$ می‌گیریم. در این صورت یک پایه يِ $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U})$ مجموعه يِ $\{{E_a}^\alpha \mid (\alpha)\}$ است، که

$${E_a}^\alpha(d_\beta)=\delta^\alpha_\beta\, f_a. \tag{626}$$

هر $T\in\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{U})\otimes\mathcal{LF}(\mathbb{X};\mathbb{V})$ را می‌شود بر حسب ِ این پایه بسط داد:

$$T={E_a}^\alpha\otimes {T^a}_\alpha. \tag{627}$$

نمایش ِ ماتریسی يِ T می‌شود

$$\mathrm{mat}(T)=\begin{pmatrix} {T^1}_1 & \cdots & {T^1}_m\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {T^p}_1 & \cdots & {T^p}_m\end{pmatrix}, \tag{628}$$

که در آن ${T^a}_\alpha$ ها نگاشت‌ها یی خطی در $\mathcal{LF}(\mathbb{X};\mathbb{V})$ اند. اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{X}$ هم باپایان‌بُعدی باشند، می‌شود برا يِ آن‌ها هم پایه انتخاب کرد و ${T^a}_\alpha$ ها را هم بسط داد. فرض کنید $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$، و $\{g_1,\dots,g_q\}$ یک پایه يِ $\mathbb{X}$ باشد. در این صورت

$${T^a}_\alpha={{{T^a}_\alpha}^r}_i\,{F_r}^i, \tag{629}$$

که در آن،

$$F_r{}^i(e_j) = \delta^i{}_j\, g_r. \tag{630}$$

در این صورت نمایش ـ ماتریسی یِ T را می‌شود چنین نوشت.

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} T^1{}_1{}^1{}_1 & T^1{}_1{}^1{}_2 & \cdots & T^1{}_m{}^1{}_n \\ T^1{}_1{}^2{}_1 & T^1{}_1{}^2{}_2 & \cdots & T^1{}_m{}^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^p{}_1{}^q{}_1 & T^p{}_1{}^q{}_2 & \cdots & T^p{}_m{}^q{}_n \end{pmatrix}. \tag{631}$$

یک حالت ـ خاص زمان ی است که $T = R \otimes S$. در این صورت نمایش‌ها یِ ماتریسی یِ (628) و (631) به این شکل در می آیند.

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} R^1{}_1\, S & \cdots & R^1{}_m\, S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^p{}_1\, S & \cdots & R^p{}_m\, S \end{pmatrix}, \tag{632}$$

و

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} R^1{}_1\, S^1{}_1 & R^1{}_1\, S^1{}_2 & \cdots & R^1{}_m\, S^1{}_n \\ R^1{}_1\, S^2{}_1 & R^1{}_1\, S^2{}_2 & \cdots & R^1{}_m\, S^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^p{}_1\, S^q{}_1 & R^p{}_1\, S^q{}_2 & \cdots & R^p{}_m\, S^q{}_n \end{pmatrix}. \tag{633}$$

بر اساس ـ قضیه یِ 167، اگر $\mathbb{U}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی باشند، هر نگاشت ـ $Z \in \mathcal{LF}(\mathbb{W} \otimes \mathbb{X}; \mathbb{U} \otimes \mathbb{V})$ را می‌شود به شکل ـ

$$Z = E_a{}^\alpha \otimes Z^a{}_\alpha \tag{634}$$

نوشت. از این‌جا نمایش ـ ماتریسی یِ Z را چنین می‌نویسند.

$$\mathrm{mat}(Z) = \begin{pmatrix} Z^1{}_1 & \cdots & Z^1{}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z^p{}_1 & \cdots & Z^p{}_m \end{pmatrix}. \tag{635}$$

توجه کنید که این عملاً همان رابطه یِ (628) است. حالا نمایش ـ ماتریسی یِ (616) برا یِ $x \in (\mathbb{U} \otimes \mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} Z(x) &= [E_a{}^\alpha(d_\beta)] \otimes [Z^a{}_\alpha(x^\beta)], \\ &= f_a \otimes [Z^a{}_\alpha(x^\alpha)], \end{aligned} \tag{636}$$

یا

$$[Z(x)]^a = Z^a{}_\alpha (x^\alpha). \quad (637)$$

اما این همان ضربِ ماتریسی یِ معمولی یِ ماتریسِ Z در بردارِ x است. فقط مئلفه‌ها یِ x بردار اند و مئلفه‌ها یِ Z نگاشتِ خطی. همین نتیجه را برا یِ نمایشِ ماتریسی یِ حاصل‌ِضربِ دو نگاشتِ خطی هم می‌شود به دست آورد. نکته یِ مهم این است که چون مئلفه‌ها در این نمایش‌ها عدد نیستند، باید مراقب بود که این مئلفه‌ها جابه‌جا نمی‌شوند. البته اگر بُعدِ همه یِ فضاها باپایان باشد و از نمایشِ ماتریسی یِ گسترده استفاده کنیم که مئلفه‌ها در آن عدد اند، دیگر این مشکل وجود ندارد.

قضیه‌ها یِ تغییرِپایه یِ مشابه با بخشِ xxvii، در این‌جا هم به همان شکل تکرار می‌شوند. در واقع قضیه‌ها یِ تغییرِپایه، هر جا چیز ی داریم که می‌شود آن را بر حسبِ پایه‌ها یی بسط داد کار می‌کنند. مهم نیست ضریب‌ها یِ بسط اسکالر باشند یا بردارها یی در فضاها یِ خطی یِ گوناگون.

قضیه‌ها یِ یک‌ریختی یِ بخشِ xxxvii، به زبانِ نمایشِ ماتریسی بسیار ساده می‌شوند. معلوم می‌شود حکم‌ها یِ این قضیه‌ها فقط این است که شاخص‌ها یِ یک‌سان ی را می‌شود به شکل‌ها یِ مختلف ی گروه‌بندی کرد. مثلاً از چیزها یی مثلِ $T^a{}_i$، می‌شود هم تانسور ساخت و هم نگاشتِ خطی.

VIII

تقارن در نگاشت‌ها یِ چندخطی و تانسورها

xl نگاشت ِ جای‌گشت

بر اساس ِ قضیه یِ 155 و تعمیم ِ بدیهی یَش به حالت ِ چند فضا یِ خطی، یک یک‌ریختی یِ $t_1 \in \mathfrak{LF}[\mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^{\otimes n})^*; \mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^*)^{\otimes n}]$ هست. در این‌جا

$$\mathbb{V}^{\otimes n} := \overbrace{\mathbb{V} \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}}^{n}. \tag{638}$$

بر اساس ِ قضیه یِ 156، یک یک‌ریختی یِ $t_2 \in \mathfrak{LF}[\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n}); \mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^{\otimes n})^*]$ هست. از این‌جا معلوم می‌شود یک یک‌ریختی از $[\mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^*)^{\otimes n}]$ به $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ هست. توجه کنید که ممکن است $[\mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^*)^{\otimes n}]$ با $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ یک‌ریخت نباشد، چون یک‌ریختی‌ها یِ t_1 و t_2 لزوماً در $[\mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^{\otimes n})^*]$ و $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ پوشا نیستند. اما با ترکیب ِ $t_2\, t_1$ می‌شود اعضا یِ متمایز ِ $[\mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^*)^{\otimes n}]$ را به اعضا یِ متمایز ِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ تبدیل کرد. بنابراین هر ویژه‌گی یِ اعضا یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ مانسته ای برا یِ اعضا یِ $[\mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^*)^{\otimes n}]$ دارد. ضمناً اگر بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد، فضاها یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ و $[\mathbb{W} \otimes (\mathbb{V}^*)^{\otimes n}]$ یک‌ریخت می‌شوند (قضیه‌ها یِ 169 و 170 و تعمیم ِ بدیهی یِشان به حالت ِ چند فضا یِ خطی).

بر اساس ِ قضیه یِ 153 و تعمیم ِ بدیهی یَش به حالت ِ چند فضا یِ‌خطی، $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V},\dots,\mathbb{V})$ و $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ یک‌ریخت اند. به خاطر ِ این یک‌ریختی، هر ویژه‌گی یِ اعضا یِ $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V},\dots,\mathbb{V})$ مانسته ای برا یِ اعضا یِ $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ دارد و برعکس. در این فصل ویژه‌گی‌ها یِ تقارنی یِ اعضا یِ $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ و $\mathbb{V}^{\otimes n}$ را بررسی می‌کنیم. به $\mathbb{V}^{\otimes n}$ فضا یِ n تانسورها، و به اعضا یِ آن n تانسور می‌گویند. برا یِ نتیجه‌ها یی که به دست می‌آید، تعمیم‌ها یِ روشن ی به فضاها یی مثل ِ $\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{V}_k^{\otimes n_k})$ و $(\mathbb{V}_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{V}_k^{\otimes n_k})$ هست. یک حالت ِ خاص ِ مهم فضا یِ $[\mathbb{V}^{\otimes m}\otimes(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}]$ است، که به آن فضا یِ (m,n) تانسورها، و به اعضا یَش (m,n) تانسور می‌گویند.

تعریف ِ نگاشت ِ جای‌گشت در قضیه یِ 152 را به‌ساده‌گی می‌شود به حالت ِ چند فضا یِ خطی تعمیم داد. تعریف می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Per}_{i\,j}:\mathbb{V}^{\otimes n}\to\mathbb{V}^{\otimes n},\quad n\geq 2,\quad i\neq j\\
&\mathrm{Per}_{i\,j}(\cdots\otimes v_i\otimes\cdots\otimes v_j\otimes\cdots):=(\cdots\otimes v_j\otimes\cdots\otimes v_i\otimes\cdots).
\end{aligned}
\tag{639}
$$

هم‌چنین (متناظر با جای‌گشت ِ n تایی یِ دل‌بخواه ِ σ) نگاشت ِ خطی یِ Per_σ را تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Per}_\sigma:\mathbb{V}^{\otimes n}\to\mathbb{V}^{\otimes n},\\
&\mathrm{Per}_\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_n):=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.
\end{aligned}
\tag{640}
$$

(639) حالت ِ خاص ِ (640) است. در واقع اگر $\sigma_{i\,j}$ را یک جای‌گشت ِ n تایی تعریف کنیم که i را به j تبدیل می‌کند و برعکس $(i\neq j)$، و بقیه یِ عددها یِ 1 تا n را تغییر نمی‌دهد، آن‌گاه

$$
\mathrm{Per}_{i\,j}=\mathrm{Per}_{\sigma_{i\,j}}.
\tag{641}
$$

مجموعه یِ جای‌گشت‌ها یِ n تا یی را با $\mathcal{S}_n$ نشان می‌دهیم. در واقع هر جای‌گشت ِ n تایی یک نگاشت از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ است، که در $\mathbb{N}$ وارون‌پذیر است و فقط اعضا یِ $\mathbb{N}_n$ با

$$
\mathbb{N}_n:=\{1,\dots,n\}
\tag{642}
$$

را عوض می‌کند. به همین خاطر، می‌شود جای‌گشت ِ n تایی را نگاشت ی از $\mathbb{N}_n$ به $\mathbb{N}_n$ تعریف کرد، که در $\mathbb{N}_n$ وارون‌پذیر است.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 180: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، و σ یک جای‌گشت ِ n تایی است. نگاشت ِ رابطه یِ (640) خوش‌تعریف، و در $\mathbb{V}^{\otimes n}$ وارون‌پذیر است.

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 181: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است، و σ و τ دو جای‌گشت ِ n تایی اند. در این صورت،

$$\mathrm{Per}_{\tau\,\sigma} = \mathrm{Per}_{\tau}\,\mathrm{Per}_{\sigma}. \tag{643}$$

اثبات: تعریف می‌کنیم

$$w_i := v_{\sigma^{-1}(i)}. \tag{644}$$

در این صورت داریم

$$\mathrm{Per}_{\sigma}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, \tag{645}$$

و از آن‌جا

$$\begin{aligned}
\mathrm{Per}_{\tau}\,\mathrm{Per}_{\sigma}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= w_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\tau^{-1}(n)},\\
&= v_{\sigma^{-1}\,\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}\,\tau^{-1}(n)},\\
&= v_{(\tau\,\sigma)^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{(\tau\,\sigma)^{-1}(n)},\\
&= \mathrm{Per}_{\tau\,\sigma}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).
\end{aligned} \tag{646}$$

■

قضیه یِ 182: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. در این صورت،

a $(\mathrm{Per}_{i\,j})^2 = 1.$

b اگر $\mathbb{V}$ صفربُعدی یا یک‌بُعدی نباشد، آن‌گاه $\mathbb{V}^{\otimes n}$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ دو زیرفضا یِ نابدیهی است، یک ی ویژه‌فضا یِ $\mathrm{Per}_{i\,j}$ با ویژه‌مقدار ـِ یک، و یک ی ویژه‌فضا یِ $\mathrm{Per}_{i\,j}$ با ویژه‌مقدار ـِ منفی یِ یک.

c اگر $\mathbb{V}$ یک‌بُعدی باشد، آن‌گاه $\mathrm{Per}_{i\,j} = 1$.

اثبات: **a** نتیجه یِ مستقیم ـِ تعریف است. برا یِ اثبات ـِ **b**، کافی است برا یِ هر $x \in \mathbb{V}^{\otimes n}$ بنویسیم

$$x = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{Per}_{i\,j})x + \frac{1}{2}(1 - \mathrm{Per}_{i\,j})x. \qquad (647)$$

دوجمله یِ طرف ـِ راست، ویژه‌بردارها یِ $\mathrm{Per}_{i\,j}$ متناظر با ویژه‌مقدارها یِ به‌ترتیب یک و منفی یِ یک اند. البته جمله یِ دوم فقط وقت ی می‌تواند ناصفر باشد که $\mathbb{V}$ شامل ـِ یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ـِ دستِ‌کم‌دوعضوی باشد. برا یِ اثبات ـِ **c** هم کافی است توجه کنید اگر $\mathbb{V}$ یک‌بُعدی باشد، آن‌گاه هر $x \in \mathbb{V}^{\otimes n}$ را می‌شود به شکل ـِ

$$x = x\, e^{\otimes n} := x\, \overbrace{e \otimes \cdots \otimes e}^{n} \qquad (648)$$

نوشت.

■

برا یِ فضا ی ـِ (m, n) تانسورها دو دسته نگاشت ـِ جای‌گشت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathrm{Per}_{\sigma,1} &:= \mathrm{Per}_{\sigma,\mathbb{V}^{\otimes m}} \otimes 1_{(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}}, \\ \mathrm{Per}_{\tau,2} &:= 1_{\mathbb{V}^{\otimes m}} \otimes \mathrm{Per}_{\tau,(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}}, \end{aligned} \qquad (649)$$

که σ یک جای‌گشت ـِ m تایی، و τ یک جای‌گشت ـِ n تایی است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 183: اگر σ یک جای‌گشت ـِ m تایی و τ یک جای‌گشت ـِ n تایی باشد، آن‌گاه نگاشت‌هایِ‌جای‌گشت ـِ $\mathrm{Per}_{\sigma,1}$ و $\mathrm{Per}_{\tau,2}$ (که در فضا یِ (m, n) تانسورها تعریف شده اند) جابه‌جا می‌شوند.

★

xli نگاشت ِ متقارن، تانسور ِ متقارن

نگاشت ِ $T\in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم این نگاشت نسبت به مئلفه‌ها یِ i و j متقارن است اگر

$$T\,\mathrm{Per}_{i\,j}=T, \tag{650}$$

که یعنی

$$T(\cdots\otimes v_i\otimes\cdots\otimes v_j\otimes\cdots)=T(\cdots\otimes v_j\otimes\cdots\otimes v_i\otimes\cdots). \tag{651}$$

هم‌چنین، می‌گوییم نگاشت ِ T متقارن (یا کاملاً متقارن) است اگر

$$\forall\,\sigma\in\mathcal{S}_n\ :\ T\,\mathrm{Per}_\sigma=T, \tag{652}$$

که یعنی

$$\forall\,\sigma\in\mathcal{S}_n\ :\ T[v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)}]=T(v_1\otimes\cdots\otimes v_n). \tag{653}$$

هر جای‌گشت ِ n تایی را می‌شود به شکل ِ حاصلِ‌ضرب ی از جای‌گشت‌ها یِ σ_1 تا σ_{n-1} نوشت، که در آن σ_i جای‌گشت ی است که i را به $(i+1)$ و $(i+1)$ را به i تبدیل می‌کند و j با $j\ne i,(i+1)$ را تغییر نمی‌دهد:

$$\sigma_i:=\sigma_{i\,i+1}. \tag{654}$$

(توجه کنید که σ_i ها لزوماً با هم جابه‌جا نمی‌شوند و ممکن است در یک حاصلِ‌ضرب از این جای‌گشت‌ها، یک جای‌گشت چند بار ظاهر شود یا اصلاً ظاهر نشود.) از این‌جا به قضیه یِ زیر می‌رسیم.

قضیه یِ 184: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند. در این صورت نگاشت ِ $T\in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ متقارن است، اگر و تنها اگر این نگاشت نسبت به هر زوجِ مئلفه یِ i و $(i+1)$ متقارن باشد.

اثبات: اگر T متقارن باشد، آن‌گاه از (652) نتیجه می‌شود

$$T\,\mathrm{Per}_{i\,i+1}=T. \tag{655}$$

از طرف ی هر جای‌گشت ـ n تایی را می‌شود به شکل ـ حاصلِ‌ضرب ی از جای‌گشت‌ها یِ σ_i نوشت. در نتیجه، طبق ـ قضیه یِ 181 هر نگاشت ـ Per_σ را می‌شود به شکل ـ حاصلِ‌ضرب ی از نگاشت‌ها یِ $\mathrm{Per}_{i\,i+1}$ نوشت. بنابراین اگر T نسبت به همه یِ زوج‌ها یِ i و $(i+1)$ متقارن باشد، آن‌گاه T شرط ـ (652) را بر می آورد.

■

یک نگاشت ـ متقارن ـ خاص، نگاشت ـ Sym است:

$$\mathrm{Sym} := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathrm{Per}_\sigma. \tag{656}$$

به این نگاشت متقارن‌گر می‌گویند. با استفاده از این نگاشت، دو نوع متقارن‌گر هم در فضا یِ (m,n) تانسورها تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}_1 &:= \mathrm{Sym}_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes 1_{(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}},\\ \mathrm{Sym}_2 &:= 1_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes \mathrm{Sym}_{(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}}.\end{aligned} \tag{657}$$

از قضیه یِ 183 معلوم است که Sym_1 و Sym_2 با هم جابه‌جا می‌شوند.

قضیه یِ 185: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. در این صورت نگاشت ـ $\mathrm{Sym}\in\mathcal{LF}(\mathbb{V}^{\otimes n};\mathbb{V}^{\otimes n})$ با تعریف ـ (656)، این ویژه‌گی‌ها را دارد.

a Sym یک نگاشت ـ متقارن است.

b به ازا یِ هر جای‌گشت ـ n تایی یِ σ، Sym از هر طرف در Per_σ ضرب شود خود ـ Sym به دست می آید (و در نتیجه Sym با Per_σ جابه‌جا می‌شود).

c Sym یک افکنش است.

اثبات: داریم

$$\mathrm{Sym}\,\mathrm{Per}_\sigma = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_\tau \mathrm{Per}_\tau\,\mathrm{Per}_\sigma,$$

$$= \frac{1}{n!}\sum\nolimits_\tau \mathrm{Per}_{\tau\,\sigma},$$

$$= \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\tau\sigma} \mathrm{Per}_{\tau\,\sigma},$$

$$= \mathrm{Sym}. \tag{658}$$

در این‌جا از این استفاده شده که اگر یک جای‌گشت ِ n تایی را از یک طرف در همه ی جای‌گشت‌ها یِ n تایی ضرب کنیم، هر یک از جای‌گشت‌ها یِ n تایی یک و فقط یک بار ظاهر می‌شوند. رابطه یِ بالا $\mathbf{a}$ را ثابت می‌کند. به روش ِ کاملاًمشابه ی ثابت می‌شود

$$\mathrm{Per}_\sigma\,\mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}, \tag{659}$$

که از ترکیب ِ $\mathbf{a}$ با آن $\mathbf{b}$ نتیجه می‌شود. برا یِ اثبات ِ $\mathbf{c}$ از $\mathbf{a}$ استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{Sym}^2 = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\sigma} \mathrm{Sym}\,\mathrm{Per}_\sigma,$$

$$= \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\sigma} \mathrm{Sym},$$

$$= \mathrm{Sym}. \tag{660}$$

در تساویِ آخر از این استفاده شده که تعدادِ جای‌گشت‌های n تایی برابر است با $n!$.

■

به تصویر ِ متقارن‌گر، زیرفضا یِ متقارن ِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ می‌گویند. این زیرفضا را با $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n} := \mathrm{img}(\mathrm{Sym}) = \mathrm{Sym}(\mathbb{V}^{\otimes n}). \tag{661}$$

هم‌چنین، می‌گوییم n تانسور ِ $x \in \mathbb{V}^{\otimes n}$ متقارن است، اگر $x \in \mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$.

قضیه یِ 186: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. در این صورت هر n تانسور ِ متقارن یک ویژه‌بردار ِ مشترک ِ همه یِ نگاشت‌ها یِ جای‌گشت، با ویژه‌مقدار ِ یک است. بر عکس، هر n تانسور ی که ویژه‌بردار ِ مشترک ِ همه یِ نگاشت‌ها یِ جای‌گشت با ویژه‌مقدار ِ یک باشد، یک n تانسور ِ متقارن است.

اثبات: فرض کنید $x \in \mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$، و σ یک جای‌گشت ِ n تایی است. داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Per}_\sigma(x) &= \mathrm{Per}_\sigma \,\mathrm{Sym}(x),\\
&= \mathrm{Sym}(x),\\
&= x. \qquad (662)
\end{aligned}$$

گزاره يِ عکس هم به‌ساده‌گی از تعریف ِ (656) نتیجه می‌شود.

■

قضیه يِ 187: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی اند. در این صورت نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ متقارن است، اگر و تنها اگر

$$T\,\mathrm{Sym} = T. \qquad (663)$$

اثبات: از تعریف ِ تقارن ِ T معلوم است که اگر T متقارن باشد رابطه يِ بالا درست است. حالا فرض می‌کنیم رابطه يِ بالا درست است و می‌خواهیم نشان دهیم T متقارن است. به ازا يِ هر جای‌گشت ِ σ داریم

$$\begin{aligned}
T\,\mathrm{Per}_\sigma &= T\,\mathrm{Sym}\,\mathrm{Per}_\sigma,\\
&= T\,\mathrm{Sym},\\
&= T. \qquad (664)
\end{aligned}$$

■

قضیه يِ 188: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی اند. در این صورت هر نگاشت ِ متقارن ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$، به‌طور ِ یک‌تا با تحدید ِ این نگاشت به زیرفضا يِ n تانسورها يِ متقارن مشخص می‌شود. ضمناً از هر نگاشت ِ $T' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n})$ می‌شود یک نگاشت ِ متقارن ِ ساخت، که تحدید َش به زیرفضا يِ n تانسورها يِ متقارن T' شود.

اثبات: تحدید ِ T به n تانسورهای متقارن را با $\tilde{T}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید x یک n تانسور ِ دل‌بخواه است. داریم

$$T(x) = T\,\mathrm{Sym}(x),$$
$$= \tilde{T}[\mathrm{Sym}(x)]. \qquad (665)$$

با داشتن ـِ T' هم می‌شود $T'' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ را به شکل ـِ

$$T''(x) := T'[\mathrm{Sym}(x)] \qquad (666)$$

تعریف کرد. روشن است که تحدید ـِ T'' به زیرفضا یِ n تانسورها یِ متقارن همان T' است. ■

بخش ـِ متقارن ـِ نگاشت ـِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ را $T\,\mathrm{Sym}$ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین، بخش ـِ متقارن ـِ n تانسور ـِ x را $\mathrm{Sym}\,x$ تعریف می‌کنیم.

قضیه یِ 189:

a فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است و $x \in \mathbb{V}^{\otimes n}$. در این صورت، بخش ـِ متقارن ـِ x یک n تانسور ـِ متقارن است. هم‌چنین، اگر x ویژه‌بردار ـِ یک نگاشت ـِ جای‌گشت با ویژه‌مقدار ـِ -1 باشد، آن‌گاه بخش ـِ متقارن ـِ x صفر است.

b فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضا یی خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$. در این صورت، بخش ـِ متقارن ـِ T یک نگاشت ـِ متقارن است. هم‌چنین، اگر حاصلِ‌ضرب ـِ T (از چپ) در یک نگاشت ـِ جای‌گشت $-T$ شود، آن‌گاه بخش ـِ متقارن ـِ T صفر است.

اثبات: روشن است که $\mathrm{Sym}\,x \in \mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$. پس $\mathrm{Sym}\,x$ متقارن است. فرض کنید به ازا یِ یک جای‌گشت ـِ n تایی یِ σ،

$$\mathrm{Per}_\sigma\, x = -x. \qquad (667)$$

داریم

$$\mathrm{Sym}\,x = \mathrm{Sym}\,\mathrm{Per}_\sigma\, x,$$
$$= -\mathrm{Sym}\,x, \qquad (668)$$

که نتیجه می‌دهد $\operatorname{Sym} x = 0$. اثبات ِ $\mathbf{b}$ هم کاملاً مشابه است.

■

اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ هم باپایان‌بُعدی است، و در نتیجه می‌شود برا یَش پایه پیدا کرد. فرض کنید $\{e_1, \dots e_m\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)} := \operatorname{Sym}(e_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes e_m^{\otimes k_m}), \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n. \tag{669}$$

قضیه یِ 190: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، و $\{e_1, \dots e_m\}$ یک پایه یِ آن است. در این صورت $\mathcal{B}_{\mathrm{S}} = \{(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)} \mid (k_1, \dots, k_m)\}$ با تعریف ِ (669)، یک پایه یِ $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ است.

اثبات: از رابطه یِ (669) معلوم است که هر ترکیب ِ خطی یِ $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)}$ ها یک n تانسور ِ متقارن است. مجموعه یِ $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \mid (i_1, \dots, i_n)\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ است و هر n تانسور ِ x را می‌شود به شکل ِ

$$x = x^{i_1 \cdots i_n}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \tag{670}$$

نوشت. از این‌جا نتیجه می‌شود هر n تانسور ِ متقارن ِ $\operatorname{Sym}(x)$ را می‌شود به شکل ِ

$$\operatorname{Sym}(x) = x^{i_1 \cdots i_n} \operatorname{Sym}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) \tag{671}$$

نوشت. حالا فرض کنید در تانسور ِ $e = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$، k_1 بار شاخص ِ 1، k_2 بار شاخص ِ 2، و ... ظاهر شده باشد. یک جای‌گشت ِ n تاییِ σ هست دارد که خانه‌ها یِ متناظر با 1 ها را به k_1 خانه یِ اول، خانه‌ها یِ متناظر با 2 ها را به k_2 خانه یِ بعد، و ... می‌آورد. برا یِ این جای‌گشت ِ خاص،

$$\operatorname{Per}_\sigma(e) = e_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes e_m^{\otimes k_m}, \tag{672}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\operatorname{Sym}(e) = (e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)}. \tag{673}$$

این نشان می‌دهد

$$\operatorname{span}(\mathcal{B}_{\mathrm{S}}) = \mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}. \tag{674}$$

مانده ثابت کنیم $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}$ خطی‌مستقل است. برا یِ این کار یک ترکیب ـِ خطی از اعضا یِ آن را صفر می‌گذاریم:

$$\sum\nolimits^{\mathrm{S}}_{(k_1,\dots,k_m)} \alpha^{(k_1,\dots,k_m)}\,(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)} = 0. \qquad (675)$$

در این‌جا جمع رو یِ شاخص‌ها یِ k_i است که شرط ـِ $\sum_i k_i = n$ را بر می‌آورند. از رابطه یِ بالا نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{(k_1,\dots,k_m)} \alpha^{(k_1,\dots,k_m)} \left[\sum\nolimits_{\sigma} \mathrm{Per}_\sigma(e_1^{\otimes k_1}\otimes\cdots\otimes e_m^{\otimes k_m})\right] = 0. \qquad (676)$$

هیچ بردارِپایه ای در ضریب ـِ دو یِ متمایز ـِ α طرف ـِ راست ـِ رابطه یِ بالا ظاهر نمی‌شود، چون جای‌گشت تعداد ـِ شاخص‌ها یِ 1 و 2 و ... را عوض نمی‌کند. هر تانسور ـِ $e = e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}$ با k_1 شاخص ـِ 1، و ...، دقیقاً $(k_1!\cdots k_m!)$ بار در کروشه یِ ضریب ـِ $\alpha^{(k_1,\dots,k_m)}$ ظاهر می‌شود. پس ضریب ـِ $e = e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}$ در ترکیب ـِ خطی یِ بالا $\alpha^{(k_1,\dots,k_m)}(k_1!\cdots k_m!)/(n!)$ است. این ضریب باید صفر باشد. بنابراین،

$$\alpha^{(k_1,\dots,k_m)} = 0. \qquad (677)$$

این برا یِ هر m تاییِ $(k_1,\dots,k_m)$ درست است. پس $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}$ خطی‌مستقل است. ■

از این‌جا یک قضیه در مورد ـِ بُعد ـِ $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ نتیجه می‌شود:

قضیه یِ 191: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ m بُعدی (m باپایان) است. در این صورت $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ باپایان‌بُعدی است و

$$\dim(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}) = \binom{m+n-1}{n}. \qquad (678)$$

اثبات: چون $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، $\mathbb{V}^{\otimes n}$ هم باپایان‌بُعدی است، و $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ هم که زیرفضا یِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ است باپایان‌بُعدی می‌شود. با توجه به قضیه یِ 190، کافی است تعداد ـِ اعضا یِ $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}$ در قضیه یِ 190 را بشماریم. m تایی یِ $(k_1,\dots,k_m)$ را می‌شود با k_1 دایره، بَعد یک خط، بَعد k_2 دایره، بَعد یک خط، ...، و سرانجام k_m دایره نمایش داد. تعداد ـِ کل ـِ دایره‌ها $\sum_i k_i = n$ است. تعداد ـِ خط‌ها هم $(m-1)$ است. بین ـِ آرایش‌ها یِ دایره‌وخط، و m تایی‌ها یِ $(k_1,\dots,k_m)$ یک تناظر ـِ یک‌به‌یک هست. پس تعداد ـِ m تایی‌ها یِ

$(k_1, \dots, k_m)$ برابر است با تعداد ِ آرایش‌ها یِ n دایره و $(m-1)$ خط در کنار ِ هم. تعداد ِ این آرایش‌ها ترکیب ِ n به n از $(n+m-1)$ است، که رابطه یِ موردِنظر را ثابت می‌کند.

■

قضیه یِ 192: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ آن، و σ یک جای‌گشت ِ n تایی است. در این صورت n تانسور ِ x رابطه یِ $\mathrm{Per}_\sigma\, x = x$ را بر می‌آورد، اگر و تنها اگر

$$x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(n)}} = x^{i_1\cdots i_n}. \tag{679}$$

از جمله، n تانسور ِ x متقارن است، اگر و تنها اگر (679) به ازا یِ همه یِ جای‌گشت‌ها یِ n تایی یِ σ برقرار باشد.

اثبات: به ازا یِ هر جای‌گشت ِ σ داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}_\sigma\, x &= x^{i_1\cdots i_n}\, e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(n)}},\\ &= x^{j_{\sigma(1)}\cdots j_{\sigma(n)}}\, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n},\end{aligned} \tag{680}$$

که حکم را ثابت می‌کند.

■

به طریق ِ مشابه ی می‌شود نشان داد

قضیه یِ 193: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند؛ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ آن است؛ و σ یک جای‌گشت ِ n تایی است. در این صورت نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ رابطه یِ $T\,\mathrm{Per}_\sigma = T$ را بر می‌آورد، اگر و تنها اگر

$$T(e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(n)}}) = T(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}). \tag{681}$$

از جمله، T متقارن است، اگر و تنها اگر (681) به ازا یِ همه یِ جای‌گشت‌ها یِ n تایی یِ σ برقرار باشد.

★

هم‌چنین،

قضیه ی 194: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$. در این صورت بخش ِ متقارن ِ T صفر است، اگر و تنها اگر $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n})$ صفر باشد. اگر بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد، آن‌گاه

$$(T\,\mathrm{Sym})(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}) = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\sigma} T(e_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\sigma^{-1}(n)}}). \qquad (682)$$

★

قضیه ی 195: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا ی خطی با میدان ِ یک‌سان اند. اگر بخش ِ متقارن ِ n تانسور ِ $x \in \mathbb{V}^{\otimes n}$ صفر باشد، آن‌گاه اثر ِ هر نگاشت ِ متقارن ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ بر x صفر است. اگر بُعد ِ $\mathbb{W}$ صفر نباشد، بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد، و اثر ِ هر نگاشت ِ متقارن ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ بر x صفر باشد، آن‌گاه بخش ِ متقارن ِ x صفر است.

اثبات: برا یِ اثبات ِ بخش ِ اول، کافی است توجه کنیم اگر T متقارن باشد و بخش ِ متقارن ِ x صفر باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} T(x) &= T\,\mathrm{Sym}(x),\\ &= 0. \end{aligned} \qquad (683)$$

برا یِ اثبات ِ بخش ِ دوم هم یک بردار ِ ناصفر ِ $w \in \mathbb{W}$ می‌گیریم و نگاشت ِ $S^{i_1\cdots i_n}$ با

$$S^{i_1\cdots i_n}(x) := w\,[\mathrm{Sym}(x)]^{i_1\cdots i_n} \qquad (684)$$

را تعریف می‌کنیم. به‌ساده‌گی دیده می‌شود این نگاشت متقارن است. صفربودن ِ اثر ِ این نگاشت بر x یعنی ضریب ِ w صفر باشد، و از این‌جا بخش ِ دوم هم ثابت می‌شود.

■

قضیه ی 196: فرض کنید x یک (n,n) تانسور است. اگر σ یک جای‌گشت ِ n تایی باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{C}(\mathrm{Per}_{\sigma,1}\,x) = \mathrm{C}(\mathrm{Per}_{\sigma^{-1},2}\,x). \qquad (685)$$

هم‌چنین،

$$\mathrm{C}(\mathrm{Sym}_1\, x) = \mathrm{C}(\mathrm{Sym}_2\, x). \tag{686}$$

سرانجام، اگر $\mathrm{Sym}_1\, x = x$، آن‌گاه $\mathrm{C}(x) = \mathrm{C}(\mathrm{Sym}_2\, x)$؛ و اگر $\mathrm{Sym}_2\, x = x$، آن‌گاه $\mathrm{C}(x) = \mathrm{C}(\mathrm{Sym}_1\, x)$.

اثبات: می‌گیریم

$$x = A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\, v_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes v_{\mu_n}\otimes s^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes s^{\nu_n}. \tag{687}$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(\mathrm{Per}_{\sigma,1}\, x) &= A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\, s^{\nu_1}(v_{\mu_{\sigma^{-1}(1)}})\cdots s^{\nu_n}(v_{\mu_{\sigma^{-1}(n)}}),\\
&= A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\, s^{\nu_{\sigma(1)}}(v_{\mu_{\sigma^{-1}\,\sigma(1)}})\cdots s^{\nu_{\sigma(n)}}(v_{\mu_{\sigma^{-1}\,\sigma(n)}}),\\
&= A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\, s^{\nu_{\sigma(1)}}(v_{\mu_1})\cdots s^{\nu_{\sigma(n)}}(v_{\mu_n}),\\
&= \mathrm{C}(\mathrm{Per}_{\sigma^{-1},2}\, x).
\end{aligned} \tag{688}$$

در این‌جا از این استفاده شده که

$$B^{\alpha_1}_{\beta_1}\cdots B^{\alpha_n}_{\beta_n} = B^{\alpha_{\sigma(1)}}_{\beta_{\sigma(1)}}\cdots B^{\alpha_{\sigma(n)}}_{\beta_{\sigma(n)}}. \tag{689}$$

(686) هم از این‌جا نتیجه می‌شود که

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathrm{Per}_\sigma = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathrm{Per}_{\sigma^{-1}}. \tag{690}$$

گزاره‌ها یِ آخر ِ حکم هم نتیجه یِ (686) اند.

■

یک قضیه یِ مربوط به قضیه یِ بالا این است.

قضیه یِ 197: فرض کنید f تابع ی از A^{2n} به $\mathbb{V}$ است، که A یک مجموعه یِ باپایان‌عضو ی، $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، و σ یک جای‌گشت ِ n تایی است. در این صورت،

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in A^n} f[\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_{\sigma(1)},\dots,\mu_{\sigma(n)}]\\
&= \sum_{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in A^n} f[\mu_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\mu_{\sigma^{-1}(n)},\mu_1,\dots,\mu_n],
\end{aligned} \tag{691}$$

و

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in A^n} f[\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_{\sigma(1)},\dots,\mu_{\sigma(n)}]$$
$$=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in A^n} f[\mu_{\sigma(1)},\dots,\mu_{\sigma(n)},\mu_1,\dots,\mu_n]. \qquad (692)$$

★

برا يِ وقت ی که $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، یک پایه برا یِ $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ به دست آوردیم. به طریق ِ مشابه ی می‌شود پایه ای برا یِ فضا یِ $(\mathbb{V}^*)_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ به دست آورد. بر اساس ِ قضیه یِ 169، اگر بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد، آن‌گاه نگاشت ِ خطی یِ t در قضیه یِ 155، در $(\mathbb{V}^{\otimes n})^*$ وارون‌پذیر است. پس همه یِ اعضا یِ $(\mathbb{V}^{\otimes n})^*$ را می‌شود از رو یِ اعضا یِ $(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}$ ساخت.

قضیه یِ 198: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت تحدید ِ نگاشت ِ t در قضیه یِ 155 به $(\mathbb{V}^*)_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$، یک یک‌ریختی از $(\mathbb{V}^*)_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ به $(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^*$ است، و این دوفضا یک‌ریخت اند. فرض کنید $B=\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$، و $B^*=\{e^i \mid i\}$ دوگان ِ B است. مجموعه یِ $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}$ را مثل ِ قضیه یِ 190، و مجموعه یِ $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}^*=\{(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)} \mid (k_1,\dots,k_m)\}$ را هم مشابه با (669) (اما با اعضا یِ B^*) می‌سازیم. در این‌جا m بُعد ِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}^*$ یک پایه یِ $(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^*$ است، و

$$(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}[(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(l_1,\dots,l_m)}]=\frac{k_1!\cdots k_m!}{n!}\,\delta_{l_1}^{k_1}\cdots\delta_{l_m}^{k_m}. \qquad (693)$$

اثبات: اثبات ِ یک‌ریختی فقط به نوشتن نیاز دارد. اگر $(l_1,\dots,l_m)\ne(k_1,\dots,k_m)$، آن‌گاه طرف ِ چپ ِ رابطه یِ (693) صفر می‌شود؛ چون اگر مثلاً $k_1\ne l_1$، آن‌گاه تعداد ِ شاخص‌ها یِ 1 در هر یک از جمله‌ها یِ $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(l_1,\dots,l_m)}$، با تعداد ِ شاخص‌ها یِ 1 در هر یک از جمله‌ها یِ $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$ فرق دارد. پس اثر ِ هر یک از جمله‌ها یِ $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$ بر هر یک از جمله‌ها یِ $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(l_1,\dots,l_m)}$ صفر می‌شود.

هر جمله یِ متمایز در $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$ به تعداد ِ $(k_1!\cdots k_m!)$ بار تکرار می‌شود، پس ضریب ِ هر جمله یِ متمایز در $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$ برابر ِ $(k_1!\cdots k_m!)/(n!)$ است. تعداد ِ جمله‌ها یِ متمایز ِ $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$ برابر است با تعداد ِ کل ِ جمله‌ها $(n!)$ تقسیم بر تعداد ِ تکرار ِ هم جمله. پس تعداد ِ جمله‌ها یِ متمایز برابر است با $(n!)/(k_1!\cdots k_m!)$.

همین وضع در موردِ جمله‌ها یِ متناظر در $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(l_1,\dots,l_m)}$ هست.

پس برا یِ حالتِ $(l_1,\dots,l_m)=(k_1,\dots,k_m)$، طرفِ چپِ (693) می‌شود تعدادِ جمله‌ها یِ متمایزِ $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$، ضرب در مجذورِ ضریبِ هر جمله. (یک ی از ضریب‌ها از $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$ می‌آید و یک ی از ضریب‌ها از $(e_{\mathrm{S}}^{\otimes n})_{(l_1,\dots,l_m)}$.) این رابطه یِ (693) را ثابت می‌کند. استقلالِ خطی یِ $\mathcal{B}^*$ هم از همین رابطه نتیجه می‌شود. به‌علاوه، به‌ساده‌گی معلوم می‌شود $\mathcal{B}^*$ زیرمجموعه یِ $(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^*$ است (اثبات فقط به نوشتن نیاز دارد). پس برا یِ اثباتِ این که $\mathcal{B}^*$ یک پایه یِ $(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^*$ است، کافی است ثابت کنیم تعدادِ اعضا یِ $\mathcal{B}^*$ برابر است با بُعدِ $(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^*$. اما بُعدِ $(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n})^*$ با بُعدِ $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ برابر است، و تعدادِ اعضا یِ $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}^*$ با تعدادِ اعضا یِ $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}$، که یک پایه یِ $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ است. پس تعدادِ اعضا یِ $\mathcal{B}_{\mathrm{S}}^*$ هم با بُعدِ $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$ برابر است.

■

xlii نگاشتِ پادمتقارن، تانسورِ پادمتقارن

نگاشتِ $T\in\mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم این نگاشت نسبت به مئلفه‌ها یِ i و j (با $i\ne j$) پادمتقارن است، اگر

$$T\,\mathrm{Per}_{i\,j}=-T, \tag{694}$$

که یعنی

$$T(\cdots\otimes v_i\otimes\cdots\otimes v_j\otimes\cdots)=-T(\cdots\otimes v_j\otimes\cdots\otimes v_i\otimes\cdots). \tag{695}$$

هم‌چنین، می‌گوییم نگاشتِ T پادمتقارن (یا کاملاً پادمتقارن) است اگر

$$\forall\,\sigma\in\mathcal{S}_n\ :\ T\,\mathrm{Per}_\sigma=\zeta_\sigma\,T, \tag{696}$$

که یعنی

$$\forall\,\sigma\in\mathcal{S}_n\ :\ T[v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)}]=\zeta_\sigma\,T(v_1\otimes\cdots\otimes v_n). \tag{697}$$

ζ_σ علامت ـِ جای‌گشت ـِ n تایی ي σ است. ζ_σ برابر با 1 است، اگر σ برابر با حاصلِ‌ضرب ـِ تعداد ـِ زوج ی از σ_i ها باشد؛ و برابر با -1 است، اگر σ برابر با حاصلِ‌ضرب ـِ تعداد ـِ فرد ی از σ_i ها باشد. در حالت ـِ اول می‌گوییم σ زوج است، و در حالت ـِ دوم می‌گوییم σ فرد است. توجه کنید که شکل ـِ یک جای‌گشت بر حسب ـِ σ_i ها یک‌تا نیست، تعداد ـِ σ_i ها هم یک‌تا نیست، اما زوج‌یافردبودن ـِ تعداد ـِ σ_i ها، در همه يِ نمایش‌ها يِ جای‌گشت ـِ σ یک‌سان است. داریم

$$\forall\, \sigma, \tau \in \mathbb{S}_n \ :\ \zeta_{\tau\,\sigma} = \zeta_\tau\, \zeta_\sigma. \tag{698}$$

متناظر با نگاشت‌هایِ‌جای‌گشت ـِ Per، نگاشت‌ها يِ دیگر ی به اسم ـِ نگاشت ـِ جای‌گشت ـِ علامت‌دار تعریف می‌کنیم:

$$\forall\, \sigma, \tau \in \mathbb{S}_n \ :\ \mathrm{aPer}_\sigma := \zeta_\sigma\, \mathrm{Per}_\sigma. \tag{699}$$

هم‌چنین، می‌شود متناظر با (649) نگاشت‌ها یی رو يِ فضا يِ (m,n) تانسورها تعریف کرد:

$$\begin{aligned}\mathrm{aPer}_{\sigma,1} &:= \mathrm{aPer}_{\sigma,\mathbb{V}^{\otimes m}} \otimes 1_{(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}},\\ \mathrm{aPer}_{\tau,2} &:= 1_{\mathbb{V}^{\otimes m}} \otimes \mathrm{aPer}_{\tau,(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}},\end{aligned} \tag{700}$$

که σ یک جای‌گشت ـِ m تایی و τ یک جای‌گشت ـِ n تایی است.

از این تعریف‌ها و با استفاده از (698)، به ساده‌گی مانسته‌ها يِ قضیه‌ها يِ 181 تا 183 برا يِ نگاشت‌ها يِ aPer نتیجه می‌شود:

قضیه يِ 199: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا يِ خطی است. در این صورت،

a $\forall\, \sigma, \tau \in \mathbb{S}_n \ :\ \mathrm{aPer}_{\tau\,\sigma} = \mathrm{aPer}_\tau\, \mathrm{aPer}_\sigma.$

b $(\mathrm{aPer}_{i\,j})^2 = 1.$

c اگر $\mathbb{V}$ صفربُعدی یا یک‌بُعدی نباشد، آن‌گاه $\mathbb{V}^{\otimes n}$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ دو زیرفضا يِ نابدیهی است، یک ی ویژه‌فضا يِ $\mathrm{aPer}_{i\,j}$ با ویژه‌مقدار ـِ یک، و یک ی ویژه‌فضا يِ $\mathrm{aPer}_{i\,j}$ با ویژه‌مقدار ـِ منفی يِ یک.

d اگر $\mathbb{V}$ یک‌بُعدی باشد، آن‌گاه $\mathrm{aPer}_{i\,j} = -1$.

e اگر σ یک جای‌گشت ـِ m تایی و τ یک جای‌گشت ـِ n تایی باشد، آن‌گاه نگاشت‌ها یِ $\mathrm{aPer}_{\sigma,1}$ و $\mathrm{aPer}_{\tau,2}$ (که در فضا یِ (m,n) تانسورها تعریف شده اند) جابه‌جا می‌شوند.

★

(696) را می‌شود بر حسب ـِ aPer نوشت. می‌گوییم T پادمتقارن است، اگر

$$\forall\, \sigma \in \mathcal{S}_n \;:\; T\,\mathrm{aPer}_\sigma = T. \tag{701}$$

پادمتقارن‌بودن ـِ T نسبت به مئلفه‌ها یِ i و j را هم می‌شود بر حسب ـِ $\mathrm{aPer}_{i\,j} := \mathrm{aPer}_{\sigma_{i\,j}}$ نوشت. می‌گوییم T نسبت به مئلفه‌ها یِ i و j پادمتقارن است، اگر

$$T\,\mathrm{aPer}_{i\,j} = T. \tag{702}$$

یک نگاشت ـِ پادمتقارن ـِ خاص، نگاشت ـِ aSym است:

$$\begin{aligned}\mathrm{aSym} &:= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\zeta_\sigma\,\mathrm{Per}_\sigma,\\ &:= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathrm{aPer}_\sigma.\end{aligned} \tag{703}$$

به این نگاشت پادمتقارن‌گر می‌گویند. با استفاده از این نگاشت، دو نوع پادمتقارن‌گر هم در فضا یِ (m,n) تانسورها تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{aSym}_1 &:= \mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes 1_{(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}},\\ \mathrm{aSym}_2 &:= 1_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes \mathrm{aSym}_{(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}}.\end{aligned} \tag{704}$$

از قضیه یِ 199 معلوم است که aSym_1 و aSym_2 با هم جابه‌جا می‌شوند.

با استفاده از نگاشت‌ها یِ aPer و aSym، مانسته‌ها یِ قضیه‌ها یِ 184 تا 189 ـِ بخش ـِ قبل به‌ساده‌گی نتیجه می‌شوند. اثبات‌ها کاملاً مشابه است و کافی است به جا یِ نگاشت‌ها یِ Per و Sym، نگاشت‌ها یِ aPer و aSym بگذاریم.

قضیه یِ 200: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ـِ یک‌سان اند. در این صورت نگاشت ـِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}^{\otimes n})$ پادمتقارن است، اگر و تنها اگر این نگاشت نسبت به

هر زوجِ مئلفه یِ i و $(i+1)$ پادمتقارن باشد.

★

قضیه یِ 201: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. در این صورت نگاشت ـ $\mathrm{aSym} \in \mathcal{LF}(\mathbb{V}^{\otimes n}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ با تعریف ـ (703)، این ویژه‌گی‌ها را دارد.

a aSym یک نگاشت ـ پادمتقارن است.

b به ازا یِ هر جای‌گشت ـ n تایی یِ σ، aSym از هر طرف در aPer_σ ضرب شود خود ـ aSym به دست می آید (و در نتیجه aSym با aPer_σ و Per_σ جابه‌جا می‌شود).

c aSym یک افکنش است.

★

به تصویر ـ پادمتقارن‌گر، زیرفضا یِ پادمتقارن ـ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ می‌گویند. این زیرفضا را با $\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n} := \mathrm{img}(\mathrm{aSym}) = \mathrm{aSym}(\mathbb{V}^{\otimes n}). \tag{705}$$

هم‌چنین، می‌گوییم n تانسور ـ $x \in \mathbb{V}^{\otimes n}$ پادمتقارن است، اگر $x \in \mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$.

قضیه یِ 202: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. در این صورت هر n تانسور ـ پادمتقارن یک ویژه‌بردار ـ مشترک ـ همه یِ نگاشت‌ها یِ جای‌گشت ـ علامت‌دار، با ویژه‌مقدار ـ یک است. بر عکس، هر n تانسور ی که ویژه‌بردار ـ مشترک ـ همه یِ نگاشت‌ها یِ جای‌گشت ـ علامت‌دار با ویژه‌مقدار ـ یک باشد، یک n تانسور ـ پادمتقارن است.

★

قضیه یِ بالا را بر حسب ـ نگاشت‌ها یِ جای‌گشت هم می‌شد بیان کرد. به این شکل، x یک n تانسور ـ پادمتقارن است اگر و تنها اگر

$$\forall\, \sigma \in \mathcal{S}_n \;:\; \mathrm{Per}_\sigma\, x = \zeta_\sigma\, x. \tag{706}$$

قضیه یِ 203: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی اند. در این صورت نگاشت ـ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ پادمتقارن است، اگر و تنها اگر

$$T\,\mathrm{aSym} = T. \tag{707}$$

★

قضیه یِ 204: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی اند. در این صورت هر نگاشت ِ پادمتقارن ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$، به‌طور ِ یک‌تا با تحدید ِ این نگاشت به زیرفضا یِ n تانسورها یِ پادمتقارن مشخص می‌شود. ضمناً از نگاشت ِ $T' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n})$ می‌شود یک نگاشت ِ پادمتقارن ِ ساخت، که تحدید َش به زیرفضا یِ n تانسورها یِ پادمتقارن T' شود.

★

بخش ِ پادمتقارن ِ نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ را $\mathrm{aSym}\, T$ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین، بخش ِ پادمتقارن ِ n تانسور ِ x را $\mathrm{aSym}\, x$ تعریف می‌کنیم.

قضیه یِ 205:

a فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است و $x \in \mathbb{V}^{\otimes n}$. در این صورت، بخش ِ پادمتقارن ِ x یک n تانسور ِ پادمتقارن است. هم‌چنین، اگر x ویژه‌بردار ِ یک نگاشت ِ جای‌گشت ِ علامت‌دار با ویژه‌مقدار ِ -1 باشد، آن‌گاه بخش ِ پادمتقارن ِ x صفر است.

b فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضا یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$. در این صورت، بخش ِ پادمتقارن ِ T یک نگاشت ِ پادمتقارن است. هم‌چنین، اگر حاصلِ‌ضرب ِ T (از چپ) در یک نگاشت ِ جای‌گشت ِ علامت‌دار $-T$ شود، آن‌گاه بخش ِ پادمتقارن ِ T صفر است.

★

یک حالت ِ خاص ِ قضیه یِ بالا وقت ی است که جای‌گشت ِ موردِنظر $\sigma_{i\,j}$ باشد. در این صورت می‌شود گفت اگر T نسبت به مئلفه‌ها یِ i و j متقارن باشد، آن‌گاه بخش ِ پادمتقارن ِ T صفر است. هم‌چنین، اگر x حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ n بردار باشد که دوتا از آن‌ها یک‌سان (یا متناسب با هم) باشند، آن‌گاه بخش ِ پادمتقارن ِ x صفر است.

با استفاده از قضیه‌ها یِ 185 و 201، به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود،

قضیه یِ 206: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی باشد، متقارن‌گر و پادمتقارن‌گر ِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ با هم جابه‌جا می‌شوند. اگر علاوه بر این $n > 1$، آن‌گاه حاصلِ‌ضرب ِ متقارن‌گر و پادمتقارن‌گر صفر است.

اثبات: قسمت ـِ اول ـِ حکم، مستقیماً از قضیه یِ 185 (یا 201) نتیجه می‌شود. برا یِ اثبات ـِ قسمت ـِ دوم، می‌گیریم $i \neq j$ (در این‌جا از $n > 1$ استفاده می‌شود) و می‌نویسیم

$$
\begin{aligned}
\mathrm{aSym}\,\mathrm{Sym} &= \mathrm{aSym}\,\mathrm{Sym}\left[\frac{1}{2}(1+\mathrm{Per}_{i\,j})+\frac{1}{2}(1-\mathrm{Per}_{i\,j})\right],\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sym}\,\mathrm{aSym}(1+\mathrm{Per}_{i\,j})+\frac{1}{2}\,\mathrm{aSym}\,\mathrm{Sym}(1-\mathrm{Per}_{i\,j}),\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sym}\,(\mathrm{aSym}-\mathrm{aSym})+\frac{1}{2}\,\mathrm{aSym}\,(\mathrm{Sym}-\mathrm{Sym}),\\
&= 0. \qquad (708)
\end{aligned}
$$

■

سرانجام،

قضیه یِ 207: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی باشد، و $n > 1$، آن گاه بین ـِ متقارن‌گر و پادمتقارن‌گر ـِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ این رابطه برقرار است.

$$1 = \mathrm{Sym} + \mathrm{aSym} + (1-\mathrm{Sym})(1-\mathrm{aSym}), \qquad (709)$$

که از آن نتیجه می‌شود فضا یِ n تانسورها حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ سه زیرفضا است: $\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}$، $\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$، و $\mathbb{V}_{\mathrm{AS}}^{\otimes n}$، که

$$\mathbb{V}_{\mathrm{AS}}^{\otimes n} := \mathrm{img}[(1-\mathrm{Sym})(1-\mathrm{aSym})]. \qquad (710)$$

ضمناً $(1-\mathrm{Sym})(1-\mathrm{aSym}) \neq 0$ (یا $\mathbb{V}_{\mathrm{AS}}^{\otimes n} \neq \{0\}$)، اگر و تنها اگر $n > 2$ و $\mathbb{V}$ شامل ـِ یک زیرمجموعه یِ دستِ‌کم‌دوعضوی یِ خطی‌مستقل باشد.

اثبات: داریم

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathrm{Sym} + \mathrm{aSym} + (1-\mathrm{Sym}-\mathrm{aSym}),\\
&= \mathrm{Sym} + \mathrm{aSym} + (1-\mathrm{Sym}-\mathrm{aSym}+\mathrm{Sym}\,\mathrm{aSym}),\\
&= \mathrm{Sym} + \mathrm{aSym} + (1-\mathrm{Sym})(1-\mathrm{aSym}). \qquad (711)
\end{aligned}
$$

سه‌نگاشت ـِ طرف ـِ راست ـِ آخرین تساوی افکنش‌ها یی اند که با هم جابه‌جا می‌شوند و حاصلِ‌ضرب ـِ هر دوتا یِ متمایز ـِشان صفر است. از این‌جا بر اساس ـِ قضیه یِ 53،

تجزیه یِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ نتیجه می‌شود. برا یِ اثبات ِ قسمت ِ دوم، اول فرض کنید $n > 2$ است و زیرمجموعه یِ $\{u, v\}$ از $\mathbb{V}$ هم خطی‌مستقل است. حالا بردارها یِ

$$x_i = v^{\otimes(i-1)} \otimes u \otimes v^{\otimes(n-i)} \tag{712}$$

را در نظر بگیرید. دیده می‌شود

$$\mathrm{Per}_{j\,k}\, x_i = \begin{cases} x_i, & j \neq i \neq k \\ x_j, & j \neq i = k \\ x_k, & j = i \neq k \end{cases}. \tag{713}$$

i و j و k را سه عدد ِ مختلف می‌گیریم (چون $n > 2$، این کار ممکن است). نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \mathrm{aSym}\, x_i &= (-\mathrm{aSym}\,\mathrm{Per}_{j\,k}) x_i, \\ &= -\mathrm{aSym}(\mathrm{Per}_{j\,k}\, x_i), \\ &= -\mathrm{aSym}\, x_i, \end{aligned} \tag{714}$$

یا

$$\mathrm{aSym}\, x_i = 0. \tag{715}$$

ضمناً از تعریف ِ Sym و x_i به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\mathrm{Sym}\, x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \neq x_i. \tag{716}$$

از ترکیب ِ این دورابطه با (709)، نتیجه می‌شود

$$(1 - \mathrm{Sym})(1 - \mathrm{aSym}) x_i \neq 0. \tag{717}$$

برا یِ اثبات ِ گزاره یِ عکس در قسمت ِ دوم، توجه می‌کنیم که در حالت ِ $n = 2$،

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym} &= \frac{1}{2}(1 + \mathrm{Per}), \\ \mathrm{aSym} &= \frac{1}{2}(1 - \mathrm{Per}), \end{aligned} \tag{718}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\mathrm{Sym} + \mathrm{aSym} = 1. \tag{719}$$

هم‌چنین، از قضیه یِ 182 نتیجه می‌شود اگر $\mathbb{V}$ یک‌بُعدی باشد $\mathrm{Sym} = 1$. پس در هر دوحالت، با توجه به (709)،

$$(1 - \mathrm{Sym})(1 - \mathrm{aSym}) = 0. \tag{720}$$

■

اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$ هم باپایان‌بُعدی است، و در نتیجه می‌شود برا یَش پایه پیدا کرد. فرض کنید $\{e_1, \dots e_m\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)} := \mathrm{aSym}(e_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes e_m^{\otimes k_m}), \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n, \quad k_i = 0, 1. \tag{721}$$

به تفاوت ـِ این تعریف با (669) توجه کنید. نه‌تنها به جا یِ متقارن‌گر پادمتقارن‌گر به کار رفته، بل که k_i ها هم نمی‌توانند بیش‌تر از یک باشند. علت آن است که اثر ـِ پادمتقارن‌گر بر حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ n بردار، با دو بردار ـِ تکراری، صفر است.

قضیه یِ 208: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، و $\{e_1, \dots e_m\}$ یک پایه یِ آن است. در این صورت $\mathcal{B}_{\mathrm{A}} = \{(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)} \mid (k_1, \dots, k_m)\}$ با تعریف ـِ (721)، یک پایه یِ $\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$ است.

اثبات: از رابطه یِ (721) معلوم است که هر ترکیب ـِ خطی یِ $(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)}$ ها یک n تانسور ـِ پادمتقارن است. مجموعه یِ $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \mid (i_1, \dots, i_n)\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ است و هر n تانسور ـِ x را می‌شود به شکل ـِ

$$x = x^{i_1 \cdots i_n}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \tag{722}$$

نوشت. از این‌جا نتیجه می‌شود هر n تانسور ـِ پادمتقارن ـِ $\mathrm{aSym}(x)$ را می‌شود به شکل ـِ

$$\mathrm{aSym}(x) = x^{i_1 \cdots i_n}\, \mathrm{aSym}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) \tag{723}$$

نوشت. حالا فرض کنید در تانسور ـِ $e = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$، k_1 بار شاخص ـِ 1، k_2 بار شاخص ـِ 2، و ... ظاهر شده باشد. یک جای‌گشت ـِ n تاییِ σ هست دارد که خانه‌ها یِ

متناظر با 1 ها را به k_1 خانه یِ اول، خانه‌ها یِ متناظر با 2 ها را به k_2 خانه یِ بعد، و ... می‌آورد. برا یِ این جای‌گشت ِ خاص،

$$\mathrm{Per}_\sigma(e) = e_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes e_m^{\otimes k_m}, \tag{724}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\mathrm{aSym}(e) = \zeta_\sigma \, (e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)}. \tag{725}$$

این نشان می‌دهد

$$\mathrm{span}(\mathcal{B}_{\mathrm{A}}) = \mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}. \tag{726}$$

مانده ثابت کنیم $\mathcal{B}_{\mathrm{A}}$ خطی‌مستقل است. برا یِ این کار یک ترکیب ِ خطی از اعضا یِ آن را صفر می‌گذاریم:

$$\sum\nolimits_{(k_1,\dots,k_m)}^{\mathrm{A}} \alpha^{(k_1,\dots,k_m)} \, (e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})_{(k_1,\dots,k_m)} = 0. \tag{727}$$

در این‌جا جمع رو یِ شاخص‌ها یِ k_i است، که هر یک صفر یا یک اند و شرط ِ $\sum_i k_i = n$ را هم بر می‌آورند. از رابطه یِ بالا نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{(k_1,\dots,k_m)}^{\mathrm{A}} \alpha^{(k_1,\dots,k_m)} \left[\sum\nolimits_\sigma \zeta_\sigma \, \mathrm{Per}_\sigma(e_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes e_m^{\otimes k_m})\right] = 0. \tag{728}$$

هیچ بردارِپایه ای در ضریب ِ دو α یِ متمایز ِ طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا ظاهر نمی‌شود، چون جای‌گشت تعداد ِ شاخص‌ها یِ 1 و 2 و ... را عوض نمی‌کند. هر تانسور ِ $e = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$ با k_1 شاخص ِ 1، و ...، دقیقاً یک بار در کروشه یِ ضریب ِ $\alpha^{(k_1,\dots,k_m)}$ ظاهر می‌شود. پس ضریب ِ $e = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$ در ترکیب ِ خطی یِ بالا $\pm\alpha^{(k_1,\dots,k_m)}/(n!)$ است. (علامت ِ مثبت یا منفی همان ζ_σ است). این ضریب باید صفر باشد. بنابراین،

$$\alpha^{(k_1,\dots,k_m)} = 0. \tag{729}$$

این برا یِ هر m تاییِ $(k_1,\dots,k_m)$ درست است. پس $\mathcal{B}_{\mathrm{A}}$ خطی‌مستقل است.

■

قضیه یِ 209: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ m بُعدی (m باپایان) است. در این صورت $\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$ باپایان‌بُعدی است و

$$\dim(\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}) = \binom{m}{n}. \tag{730}$$

از جمله،

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}) &= \dim(\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes (m-n)}), \\ \dim(\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}) &= 0, \qquad n > m. \end{aligned} \tag{731}$$

اثبات: چون $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، $\mathbb{V}^{\otimes n}$ هم باپایان‌بُعدی است، و $\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$ هم که زیرفضا یِ $\mathbb{V}^{\otimes n}$ است باپایان‌بُعدی می‌شود. با توجه به قضیه یِ 208، کافی است تعداد ِ اعضا یِ $\mathcal{B}_{\mathrm{A}}$ در قضیه یِ 208 را بشماریم. m تایی یِ $(k_1, \dots, k_m)$ با n عدد ِ متمایز بین ِ یک و n مشخص می‌شود (شاخص‌ها یِ i ی که $k_i = 1$). تعداد ِ حالت‌ها یِ ممکن ِ انتخاب ِ n عدد ِ متمایز از m عدد ِ متمایز، ترکیب ِ n به n از m است، که رابطه یِ موردِنظر را ثابت می‌کند.

■

قضیه‌ها یِ 210 تا 216، مانسته‌ها یِ قضیه‌ها یِ 192 تا 198 ِ بخش ِ پیش اند:

قضیه یِ 210: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ آن، و σ یک جای‌گشت ِ n تایی است. در این صورت n تانسور ِ x رابطه یِ $\mathrm{aPer}_\sigma\, x = x$ را بر می‌آورد، اگر و تنها اگر

$$x^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(n)}} = \zeta_\sigma\, x^{i_1 \cdots i_n}. \tag{732}$$

از جمله، n تانسور ِ x پادمتقارن است، اگر و تنها اگر (732) به ازا یِ همه یِ جای‌گشت‌ها یِ n تایی یِ σ برقرار باشد.

★

قضیه یِ 211: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند؛ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ آن است؛ و σ یک جای‌گشت ِ n تایی است. در این صورت نگاشت ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ رابطه یِ $T\,\mathrm{aPer}_\sigma = T$ را بر می‌آورد، اگر و تنها اگر

$$T(e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(n)}}) = \zeta_\sigma\, T(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}). \tag{733}$$

از جمله، T پادمتقارن است، اگر و تنها اگر (733) به ازا یِ همه یِ جای‌گشت‌ها یِ n تایی یِ σ برقرار باشد.

★

قضیه یِ 212: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$. در این صورت بخش ِ پادمتقارن ِ T صفر است، اگر و تنها اگر $\mathrm{res}(T; \mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n})$ صفر باشد. اگر بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد، آن‌گاه

$$(T\,\mathrm{aSym})(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = \frac{1}{n!} \sum\nolimits_\sigma \zeta_\sigma\, T(e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(n)}}). \qquad (734)$$

★

قضیه یِ 213: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند. اگر بخش ِ پادمتقارن ِ n تانسور ِ $x \in \mathbb{V}^{\otimes n}$ صفر باشد، آن‌گاه اثر ِ هر نگاشت ِ پادمتقارن ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ بر x صفر است. اگر بُعد ِ $\mathbb{W}$ صفر نباشد، بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان باشد، و اثر ِ هر نگاشت ِ پادمتقارن ِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}^{\otimes n})$ بر x صفر باشد، آن‌گاه بخش ِ پادمتقارن ِ x صفر است.

★

قضیه یِ 214: فرض کنید x یک (n, n) تانسور است. اگر σ یک جای‌گشت ِ n تایی باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{C}(\mathrm{aPer}_{\sigma,1}\, x) = \mathrm{C}(\mathrm{aPer}_{\sigma^{-1},2}\, x). \qquad (735)$$

هم‌چنین،

$$\mathrm{C}(\mathrm{aSym}_1\, x) = \mathrm{C}(\mathrm{aSym}_2\, x). \qquad (736)$$

سرانجام، اگر $\mathrm{aSym}_1\, x = x$، آن‌گاه $\mathrm{C}(x) = \mathrm{C}(\mathrm{aSym}_2\, x)$؛ و اگر $\mathrm{aSym}_2\, x = x$، آن‌گاه $\mathrm{C}(x) = \mathrm{C}(\mathrm{aSym}_1\, x)$.

اثبات: اثبات کاملاً مشابه با اثبات ِ قضیه یِ 196 است. فقط به رابطه‌ها یِ اضافی یِ

$$\forall\, \sigma \in \mathcal{S}_n \mid \zeta_\sigma = \zeta_{\sigma^{-1}}, \qquad (737)$$

و در نتیجه

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathrm{aPer}_\sigma=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathrm{aPer}_{\sigma^{-1}}\qquad(738)$$

نیاز داریم.

■

قضیه یِ 215: فرض کنید f تابع ی از A^{2n} به $\mathbb{V}$ است، که A یک مجموعه یِ باپایان‌عضو ی، $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، و σ یک جای‌گشت ـِ n تایی است. در این صورت،

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in A^n}\zeta_\sigma\, f[\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_{\sigma(1)},\dots,\mu_{\sigma(n)}]$$
$$=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in A^n}\zeta_\sigma\, f[\mu_{\sigma(1)},\dots,\mu_{\sigma(n)},\mu_1,\dots,\mu_n].\qquad(739)$$

★

قضیه یِ 216: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت تحدید ـِ نگاشت ـِ t در قضیه یِ 155 به $(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}_{\mathrm{A}}$، یک یک‌ریختی از $(\mathbb{V}^*)^{\otimes n}_{\mathrm{A}}$ به $(\mathbb{V}^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^*$ است، و این دوفضا یک‌ریخت اند. فرض کنید $B=\{e_i\mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$، و $B^*=\{e^i\mid i\}$ دوگان ـِ B است. مجموعه یِ $\mathcal{B}_{\mathrm{A}}$ را مثل ـِ قضیه یِ 208، و مجموعه یِ $\mathcal{B}^*_{\mathrm{A}}=\{(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^{(k_1,\dots,k_m)}\mid(k_1,\dots,k_m)\}$ را هم مشابه با (721) (اما با اعضا یِ B^*) می‌سازیم. در این‌جا m بُعد ـِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت $\mathcal{B}^*_{\mathrm{A}}$ یک پایه یِ $(\mathbb{V}^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^*$ است، و

$$(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^{(k_1,\dots,k_m)}[(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})_{(l_1,\dots,l_m)}]=\frac{1}{n!}\,\delta^{k_1}_{l_1}\cdots\delta^{k_m}_{l_m}.\qquad(740)$$

اثبات: اثبات ـِ یک‌ریختی فقط به نوشتن نیاز دارد. اگر $(l_1,\dots,l_m)\ne(k_1,\dots,k_m)$، آن‌گاه طرف ـِ چپ ـِ رابطه یِ (740) صفر می‌شود؛ چون اگر مثلاً $k_1\ne l_1$، آن‌گاه تعداد ـِ شاخص‌ها یِ 1 در هر یک از جمله‌ها یِ $(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})_{(l_1,\dots,l_m)}$، با تعداد ـِ شاخص‌ها یِ 1 در هر یک از جمله‌ها یِ $(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^{(k_1,\dots,k_m)}$ فرق دارد. پس اثر ـِ هر یک از جمله‌ها یِ $(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^{(k_1,\dots,k_m)}$ بر هر یک از جمله‌ها یِ $(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})_{(l_1,\dots,l_m)}$ صفر می‌شود.

هر جمله یِ متمایز در $(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^{(k_1,\dots,k_m)}$ یک بار تکرار می‌شود، پس ضریب ـِ هر جمله یِ متمایز در $(e^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^{(k_1,\dots,k_m)}$ برابر ـِ $\pm 1/(n!)$ است. تعداد ـِ جمله‌ها یِ

متمایز ـ $(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$ برابر است با $n!$. همین وضع در مورد ـ جمله‌ها یِ متناظر در $(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})_{(l_1,\dots,l_m)}$ هست. به علاوه، ضریب ـ هر جمله یِ متمایز ـ $(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$، برابر است با ضریب ـ جمله یِ متناظر در $(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})_{(l_1,\dots,l_m)}$. (یا هر دو مثبت اند، یا هر دو منفی.) پس برا یِ حالت ـ $(l_1,\dots,l_m)=(k_1,\dots,k_m)$، طرف ـ چپ ـ (740) می‌شود تعداد ـ جمله‌ها یِ متمایز ـ $(e_{\mathrm{A}}^{\otimes n})^{(k_1,\dots,k_m)}$، ضرب در $[1/(n!)]^2$. این رابطه یِ (740) را ثابت می‌کند. بقیه یِ اثبات هم مشابه با اثبات ـ قضیه یِ 198 است.

■

xliii ضرب ـ برونی یِ تانسورها یِ پادمتقارن

عمل ـ گوه (ضرب ـ برونی) را یک نگاشت ـ دوخطی در $\mathcal{LF}(\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes(m+n)};\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes m},\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n})$ تعریف می‌کنیم، که اثر ـَش بر تانسورها یِ پادمتقارن ـ $x\in\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes m}$ و $y\in\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$ چنین است.

$$x\wedge y:=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\mathrm{aSym}(x\otimes y). \tag{741}$$

قضیه یِ 217: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. در این صورت،

$$\begin{aligned}\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n)}}(1_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes n}})&=\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n)}}(\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes 1_{\mathbb{V}^{\otimes n}}),\\&=\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n)}},\end{aligned} \tag{742}$$

و

$$\begin{aligned}(1_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes n}})\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n)}}&=(\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes 1_{\mathbb{V}^{\otimes n}})\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n)}},\\&=\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n)}}.\end{aligned} \tag{743}$$

مشابه ـ همین هم برا یِ متقارن‌گرها برقرار است.

اثبات: کافی است توجه کنیم که مثلاً $(1_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes n}})$ شامل ـ $n!$ نگاشت ـ جای‌گشت ـ علامت‌دار است (که ضریب ـ هر یک هم $1/(n!)$ است) و از قضیه یِ 201 (185 در مورد ـ متقارن‌گر) استفاده کنیم.

■

قضیه یِ 218: ضرب ـ برونی شرکت‌پذیر است.

اثبات: تانسورها یِ پادمتقارن ـ $x\in\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes m}$، $y\in\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$، و $z\in\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes p}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
x\wedge(y\wedge z)&=\frac{(m+n+p)!}{m!(n+p)!}\,\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n+p)}}[x\otimes(y\wedge z)],\\
&=\frac{(m+n+p)!}{m!(n+p)!}\,\frac{(n+p)!}{n!\,p!}\,\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n+p)}}\{x\otimes[\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(n+p)}}(y\otimes z)]\},\\
&=\frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}\,\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n+p)}}(1_{\mathbb{V}^{\otimes m}}\otimes\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(n+p)}})[x\otimes(y\otimes z)],\\
&=\frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}\,\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n+p)}}(x\otimes y\otimes z).
\end{aligned}\tag{744}$$

به همین ترتیب می‌شود نشان داد

$$(x\wedge y)\wedge z=\frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}\,\mathrm{aSym}_{\mathbb{V}^{\otimes(m+n+p)}}(x\otimes y\otimes z).\tag{745}$$

■

پس در ضرب ـ برونی می‌شود پرانتزها را بر داشت. در واقع با استفاده از قضیه یِ بالا می‌شود حاصلِ‌ضرب ـ برونی یِ چند تانسور ـ پادمتقارن را مستقیماً تعریف کرد:

$$x_1\wedge\cdots\wedge x_k:=\frac{(n_1+\cdots+n_k)!}{n_1!\cdots n_k!}\,\mathrm{aSym}(x_1\otimes\cdots\otimes x_k),\tag{746}$$

که در آن به ازا یِ هر i داریم $x_i\in\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n_i}$.

گاه برا یِ نمایش ـ فضا یِ تانسورها یِ پادمتقارن هم از نماد ـ $\wedge$ استفاده می‌کنند:

$$\mathbb{V}^{\wedge n}:=\overbrace{\mathbb{V}\wedge\cdots\wedge\mathbb{V}}^{n}:=\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}.\tag{747}$$

قضیه یِ 219: اگر x یک m تانسور ـ پادمتقارن، و y یک n تانسور ـ پادمتقارن باشد، آن‌گاه

$$y\wedge x=(-1)^{m\,n}\,x\wedge y.\tag{748}$$

اثبات: به ازا یِ جای‌گشت ـ $(m+n)$ تایی یِ σ با

$$\sigma = (\sigma_n \cdots \sigma_{m+n-1}) \cdots (\sigma_1 \cdots \sigma_m), \tag{749}$$

داریم

$$y \otimes x = \mathrm{Per}_\sigma(x \otimes y). \tag{750}$$

تعداد ِ جای‌گشت‌ها یِ دوتایی یِ سازنده یِ σ برابر است با $m\,n$. پس،

$$\mathrm{aPer}_\sigma = (-1)^{m\,n}\,\mathrm{Per}_\sigma, \tag{751}$$

و از آن‌جا

$$\mathrm{aSym}\,\mathrm{Per}_\sigma = (-1)^{m\,n}\,\mathrm{aSym}. \tag{752}$$

این هم‌راه با (750)، حکم را ثابت می‌کند.

■

در فصل ِ VII دیدیم هر n تانسور را می‌شود به شکل ِ یک مجموع ِ (باپایان ِ) حاصلِ‌ضرب‌ها یِ تانسوری یِ n بردار نوشت. با استفاده از تعریف ِ ضرب ِ برونی و تانسورها یِ پادمتقارن، معلوم می‌شود هر n تانسور ِ پادمتقارن را می‌شود به شکل ِ یک مجموع ِ (باپایان ِ) حاصلِ‌ضرب‌ها یِ برونی یِ n بردار نوشت. از جمله، برا یِ فضاها یِ باپایان‌بُعدی به این قضیه می‌رسیم.

قضیه یِ 220: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، و $B = \{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ آن است. در این صورت

a هر n تانسور ِ پادمتقارن ِ x را می‌شود به شکل ِ

$$x = \frac{1}{n!}\,x^{i_1\cdots i_n}\,e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \tag{753}$$

نوشت.

b هر ترکیب ِ خطی یِ $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ ها یک n تانسور ِ پادمتقارن است.

c $y = \frac{1}{n!}\,y^{i_1\cdots i_n}\,e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ صفر است، اگر و تنها اگر

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \zeta_\sigma\, y^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(n)}} = 0. \qquad (754)$$

اثبات: فرض کنید x یک n تانسور ـ پادمتقارن است. در این صورت،

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{aSym} x,\\ &= \operatorname{aSym}(x^{i_1\cdots i_n}\, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}),\\ &= \frac{1}{n!}\, x^{i_1\cdots i_n}\, e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}. \end{aligned} \qquad (755)$$

این **a** را نشان می‌دهد. **b** هم به‌ساده‌گی از تعریف ـ $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ ها نتیجه می‌شود. برا یِ اثبات ـ **c**، y را بر حسب ـ حاصلِ‌ضرب ـ تانسوری یِ اعضا یِ B بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{n!}\, y^{i_1\cdots i_n}\, e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n},\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \zeta_\sigma\, y^{i_1\cdots i_n}\, e_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\sigma^{-1}(n)}},\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \zeta_\sigma\, y^{j_{\sigma(1)}\cdots j_{\sigma(n)}}\, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}, \end{aligned} \qquad (756)$$

حکم با توجه به استقلال ـ خطی یِ مجموعه یِ $e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}$ ها نتیجه می‌شود.
■

توجه کنید که مجموعه یِ $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ ها خطی‌مستقل نیست (جز در حالت ـ $n=1$). در واقع $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ ی که دوتا از شاخص‌ها یِ e ها یَش یک‌سان باشند صفر است. اعضا یِ ناصفر ی هم که شاخص‌ها یِشان با یک جای‌گشت ـ n تایی به هم مربوط می‌شوند، متناسب با هم اند (با ضریب ـ ± 1). تعداد ـ کل ـ $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ هایِ ناصفر $(m!)/[(m-n)!]$ است. (m بُعد ـ $\mathbb{V}$ است.) اما هر $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ ـ ناصفر، $n!$ بار (با ضریب‌ها یِ ± 1) تکرار شده است. پس تعداد ـ $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ ها یِ ناصفر ـ ناتکراری $(m!)/[n!(m-n)!]$ است، که برابر است با بُعد ـ $\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}$. با این وجود، قضیه یِ بالا نشان می‌دهد اگر ضریب‌ها یِ بسط بر حسب ـ $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ ها پادمتقارن باشند، آن‌گاه می‌شود

با مجموعه یِ $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ ها مثل ِ یک پایه رفتار کرد؛ به این معنی که هر تانسور ِ پادمتقارن ی را می‌شود با چنین‌ضریب‌ها یی، به‌طور ِ یک‌تا بر حسب ِ $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ ها بسط داد.

در حالت ی که $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، اعضا یِ $(\mathbb{V}^{\otimes n}_{\mathrm{A}})^* = (\mathbb{V}^*)^{\otimes n}_{\mathrm{A}}$ را هم می‌شود بر حسب ِ $e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_n}$ ها بسط داد.

قضیه یِ 221: فرض کنید فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ آن است. در این صورت،

$$(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_n})(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}) = n!\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\zeta_\sigma\,\delta^{i_1}_{j_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots\delta^{i_n}_{j_{\sigma^{-1}(n)}},$$

$$= n!\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\zeta_\sigma\,\delta^{i_{\sigma^{-1}(1)}}_{j_1}\cdots\delta^{i_{\sigma^{-1}(n)}}_{j_n}. \qquad (757)$$

(در هر یک از عبارت‌ها یِ طرف ِ راست، می‌شود به جا یِ σ گذاشت σ^{-1}، یا بر عکس.)

اثبات:

$$\begin{aligned}
&(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_n})\\
&\quad\times(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}) = \mathrm{C}[(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_n})\otimes(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n})],\\
&\qquad = n!\;\mathrm{C}\{\mathrm{aSym}_1[(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_n})\otimes(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n})]\},\\
&\qquad = n!\;\mathrm{C}\{\mathrm{aSym}_2[(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_n})\otimes(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n})]\},\\
&\qquad = n!\;\mathrm{C}[(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_n})\otimes(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n})],\\
&\qquad = n!\,(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_n})(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}),\\
&\qquad = n!\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_n})[e_{j_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{j_{\sigma^{-1}(n)}}],\\
&\qquad = n!\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\zeta_\sigma\,\delta^{i_1}_{j_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots\delta^{i_n}_{j_{\sigma^{-1}(n)}}.
\end{aligned} \qquad (758)$$

اثبات ِ شکل ِ دوم ِ تساوی یِ (757) هم کاملاً مشابه است. تبدیل ِ σ به σ^{-1} هم فقط یک تغییرِمتغیر در جمع‌بندی است.

■

این نتیجه را می‌شود با نتیجه یِ قضیه یِ 216 مقایسه کرد. اعضا یِ پایه‌ها یی که در

قضیه یِ 216 به کار رفتند، اولاً تکراری نیستند، ثانیاً یک ضریب ِ $(n!)\pm$ با n تانسورها یی که در این‌جا به کار رفتند تفاوت دارند. مثلاً فرض کنید $\mathbb{V}$ سه‌بُعدی است، و 2 تانسورها یِ پادمتقارن را بررسی می‌کنیم. اعضا یِ پایه ای که در قضیه یِ 216 به کار رفت عبارت اند از

$$(e_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})_{(1,1,0)} = \frac{1}{2}\,(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1),$$

$$(e_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})_{(1,0,1)} = \frac{1}{2}\,(e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1),$$

$$(e_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})_{(0,1,1)} = \frac{1}{2}\,(e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2). \tag{759}$$

حاصلِ‌ضرب‌هایِ‌برونی یِ ناصفر ِ اعضا یِ پایه یِ $\mathbb{V}$ عبارت اند از

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 &= -e_2 \wedge e_1 = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1,\\ e_1 \wedge e_3 &= -e_3 \wedge e_1 = e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1,\\ e_2 \wedge e_3 &= -e_3 \wedge e_2 = e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2. \end{aligned} \tag{760}$$

نتیجه یِ قضیه ِ 221 را می‌شود نوشت

$$(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_n})(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}) = n!\,\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix}. \tag{761}$$

در این‌جا تعریف کرده ایم

$$\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix} := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \zeta_\sigma\, \delta^{i_1}_{j_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots \delta^{i_n}_{j_{\sigma^{-1}(n)}}. \tag{762}$$

این در واقع فقط فشرده‌نویسی یِ نتیجه یِ قضیه یِ بالا است.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 222:

$$\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \cdots j_n \\ i_1 \cdots i_n \end{bmatrix}. \tag{763}$$

هم‌چنین، اگر دو تا از i_k ها یک‌سان باشند، یا اگر دو تا از j_k ها یک‌سان باشند،

$$\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix} = 0. \tag{764}$$

اثبات: برا یِ اثبات ِ قسمت ِ اول کافی است

$$\delta^{i_1}_{j_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots \delta^{i_n}_{j_{\sigma^{-1}(n)}} = \delta^{i_{\sigma(1)}}_{j_1} \cdots \delta^{i_{\sigma(n)}}_{j_n}, \tag{765}$$

را به کار ببریم. برا یِ اثبات ِ قسمت ِ دوم هم، فرض کنید مثلاً $i_k = i_l$، و $k \neq l$. در این صورت،

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \zeta_\sigma \, \delta^{i_1}_{j_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots \delta^{i_n}_{j_{\sigma^{-1}(n)}}, \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \zeta_\sigma \, \delta^{i_{\sigma_{k\,l}(1)}}_{j_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots \delta^{i_{\sigma_{k\,l}(n)}}_{j_{\sigma^{-1}(n)}}, \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \zeta_\sigma \, \delta^{i_1}_{j_{\sigma^{-1}\,\sigma^{-1}_{k\,l}(1)}} \cdots \delta^{i_n}_{j_{\sigma^{-1}\,\sigma^{-1}_{k\,l}(n)}}, \\
&= \zeta_{\sigma_{k\,l}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \zeta_{\sigma_{k\,l}\,\sigma} \; \delta^{i_1}_{j_{\sigma^{-1}\,\sigma^{-1}_{k\,l}(1)}} \cdots \delta^{i_n}_{j_{\sigma^{-1}\,\sigma^{-1}_{k\,l}(n)}}, \\
&= -\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{766}$$

■

قضیه یِ 223: گزاره‌ها یِ

a $\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix} \neq 0$

b همه یِ i_k ها متمایز اند (b_1) و همه یِ j_k ها متمایز اند (b_2) و مجموعه یِ i_k ها همان مجموعه یِ j_k ها است (b_3)

c یک و فقط جای‌گشت ِ n تایی یِ τ هست که $\forall\, k \;:\; j_k = i_{\tau(k)}$

هم‌ارز اند. اگر گزاره‌ها یِ **a** تا **c** برقرار باشند، آن‌گاه

$$\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix} = \zeta_\tau. \tag{767}$$

اثبات: نشان می‌دهیم گزاره ی a گزاره ی b را نتیجه می‌دهد، گزاره ی b گزاره ی c را نتیجه می‌دهد، و گزاره ی c گزاره ی a را.

دیدیم اگر i_k ها یا j_k ها متمایز نباشند،

$$\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix} = 0 \tag{768}$$

اگر مجموعه ی i_k ها همان مجموعه ی j_k ها نباشد، همه ی جمله‌ها ی طرف ـ راست ـ (762) صفر اند، پس طرف ـ چپ هم صفر می‌شود. پس اگر a برقرار باشد، آن‌گاه، همه ی i_k ها متمایز اند، همه ی j_k ها متمایز اند، و مجموعه ی i_k ها همان مجموعه ی j_k ها است. یعنی درستی ی a درستی ی b را نتیجه می‌دهد.

حالا فرض کنید b برقرار است. این یعنی برا ی هر k، یک و فقط یک k' هست که

$$j_k = i_{k'}. \tag{769}$$

تعریف می‌کنیم

$$\tau(k) := k'. \tag{770}$$

که در آن τ نگاشت ی از $\mathbb{N}_n$ به $\mathbb{N}_n$ است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود این نگاشت یک‌به‌یک و در $\mathbb{N}_n$ پوشا است، پس یک جای‌گشت ـ n تایی است. روشن است که این جای‌گشت رابطه ی ذکرشده در c را بر می‌آورد. به علاوه، این جای‌گشت یک‌تا است، چون اگر τ_1 و τ_2 رابطه ی ذکرشده در c را بر آورند، آن‌گاه

$$i_{\tau_1(k)} = i_{\tau_2(k)}, \quad \forall\, k, \tag{771}$$

که می‌گوید به ازا ی هر k داریم $\tau_1(k) = \tau_2(k)$. پس c برقرار است.

سرانجام، فرض کنید c برقرار است. در این حالت روشن است که فقط جمله ی $\sigma = \tau$ در طرف ـ راست ـ (762) ناصفر است. پس طرف ـ چپ ـ (762) ناصفر است. این یعنی از گزاره ی c گزاره ی a نتیجه می‌شود. ضمناً از این‌جا (767) هم نتیجه می‌شود.

■

قضیه ی 224: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی خطی است، v_1 تا v_n بردارها یی در $\mathbb{V}$ اند، و τ نگاشت ی از $\mathbb{N}_n$ به $\mathbb{N}_n$ است. (τ لزوماً جای‌گشت نیست.) در این صورت،

$$v_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\tau(n)} = \begin{bmatrix} \tau(1) \cdots \tau(n) \\ 1 \cdots n \end{bmatrix} (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n). \tag{772}$$

هم‌چنین، اگر τ جای‌گشت باشد، آن‌گاه

$$v_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\tau(n)} = \zeta_\tau \, (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n). \tag{773}$$

اثبات: اگر τ یک‌به‌یک نباشد، آن‌گاه تعداد ـِ اعضا یِ تصویر ـِ τ کوچک‌تر از n است. در این صورت تعداد ـِ $v_{\tau(i)}$ ها یِ متمایز کوچک‌تر از n است. پس بُعد ـِ پهنه یِ مجموعه یِ $v_{\tau(i)}$ ها کوچک‌تر از n است، و در نتیجه طرف ـِ چپ ـِ (772) صفر است. در این حالت، ضمناً از قضیه یِ 222 داریم

$$\begin{bmatrix} \tau(1) \cdots \tau(n) \\ 1 \cdots n \end{bmatrix} = 0, \tag{774}$$

(چون همه یِ $\tau(i)$ ها متمایز نیستند). پس (772) برقرار است. اگر τ یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه τ جای‌گشت است. پس

$$\begin{aligned} v_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\tau(n)} &= n! \, \mathrm{aSym}(v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}), \\ &= n! \, \mathrm{aSym}[\mathrm{Per}_{\tau^{-1}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)], \\ &= n! \, \zeta_\tau \, \mathrm{aSym}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n), \\ &= \zeta_\tau \, (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n). \end{aligned} \tag{775}$$

این (773) را می‌دهد. حالا تعریف می‌کنیم

$$j_k := k, \qquad i_k := \tau(k). \tag{776}$$

روشن است که

$$j_k = i_{\tau^{-1}(k)}, \tag{777}$$

و فقط یک جای‌گشت هست که رابطه یِ بالا را بر می‌آورد. پس (بر اساس ـِ قضیه یِ 223)

$$\begin{bmatrix} \tau(1) \cdots \tau(n) \\ 1 \cdots n \end{bmatrix} = \zeta_\tau, \tag{778}$$

که نشان می‌دهد در این حالت هم (772) برقرار است.

■

با تعریف ـِ

$$[i_1 \cdots i_n] := \begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ 1 \cdots n \end{bmatrix}, \tag{779}$$

(که در آن i_k ها عضو ـِ $\mathbb{N}^n$ اند) رابطه یِ (772) را می‌شود به این شکل نوشت

$$v_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\tau(n)} = [\tau(1) \cdots \tau(n)](v_1 \wedge \cdots \wedge v_n), \tag{780}$$

که باز هم فقط فشرده‌نویسی یِ (772) است.

قضیه یِ 225: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است، و $T \in (\mathbb{V}^{\otimes n})^*$ یک نگاشت ـِ پادمتقارن است. در این صورت به ازا یِ هر n بردار ـِ v_1 تا v_n در $\mathbb{V}$،

$$T(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) = [i_1 \cdots i_n]\, T(v_1, \dots, v_n), \tag{781}$$

که در آن همه یِ i_j ها عضو ـِ $\mathbb{N}_n$ اند.

اثبات:

$$\begin{aligned} T(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) &= \frac{1}{n!}\, T(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}), \\ &= \frac{1}{n!}\, [i_1 \cdots i_n]\, T(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n), \\ &= [i_1 \cdots i_n]\, T(v_1, \dots, v_n). \end{aligned} \tag{782}$$

■

قضیه یِ 226: فرض کنید f تابع ی از $(\mathbb{N}_n)^n$ به $\mathbb{V}$ (یک فضا یِ خطی) است، و به ازا یِ هر جای‌گشت ـِ n تایی یِ σ،

$$f(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}) = \zeta_\sigma\, f(i_1, \dots, i_n). \tag{783}$$

در این صورت،

$$f(i_1,\dots,i_n)=f(1,\dots,n)\,[i_1\cdots i_n]. \tag{784}$$

اثبات: فرض کنید $i_j=i_k$، و $j\ne k$. در این صورت با استفاده از $\sigma_{j\,k}$ در (783) نتیجه می‌شود f صفر است. در این حالت طرف ِ راست ِ (784) هم صفر است، و تساوی یِ (784) برقرار است. پس فرض کنید i_j ها متمایز اند. در این صورت یک جای‌گشت ِ n تایی یِ τ هست که

$$i_j=\tau(j). \tag{785}$$

حالا (783) نتیجه می‌دهد

$$f(i_1,\dots,i_n)=\zeta_\tau\,f(1,\dots,n), \tag{786}$$

و قضیه یِ 223 نتیجه می‌دهد

$$[i_1\cdots i_n]=\zeta_\tau\,[1\cdots n]. \tag{787}$$

این دورابطه 784 را نتیجه می‌دهند.

■

یک نتیجه یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 227: فرض کنید i_1 تا i_k عضو ِ $\mathbb{N}_k$ اند، $n\ge k$، و

$$(\forall\, j\mid k<j\le n)\ :\ i_j=j. \tag{788}$$

در این صورت،

$$[i_1\cdots i_n]=[i_1\cdots i_k]. \tag{789}$$

اثبات: کافی است تعریف کنیم

$$f(i_1,\dots,i_k):=[i_1\cdots i_n]. \tag{790}$$

دیده می‌شود این تابع فرض ِ قضیه یِ 226 را بر می‌آورد و

$$f(1,\dots,k)=1. \tag{791}$$

پس

$$f(i_1,\dots,i_k)=[i_1\cdots i_k]. \tag{792}$$

■

قضیه یِ 228: فرض کنید i_1 تا i_k، و j_1 تا j_k عضو ـِ $\mathbb{N}_n$ اند. در این صورت،

$$\sum\nolimits_{(m_{k+1},\dots,m_n)}[i_1\cdots i_k\,m_{k+1}\cdots m_n]\,[j_1\cdots j_k\,m_{k+1}\cdots m_n]=(n-k)!\,\begin{bmatrix}i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k\end{bmatrix}, \tag{793}$$

که در آن جمع‌بندی رو یِ $(m_{k+1},\dots,m_n)\in(\mathbb{N}_n)^{n-k}$ است.

اثبات: طرف ـِ چپ ـِ (793) را با LH نشان می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{LH}=&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{\tau\in\mathcal{S}_n}\sum\nolimits_{(m_{k+1},\dots,m_n)}\zeta_\sigma\,\zeta_\tau\,\delta^{i_1}{}_{\sigma(1)}\cdots\delta^{i_k}{}_{\sigma(k)}\,\delta^{m_{k+1}}{}_{\sigma(k+1)}\cdots\delta^{m_n}{}_{\sigma(n)}\\
&\times\delta^{j_1}{}_{\tau(1)}\cdots\delta^{j_k}{}_{\tau(k)}\,\delta^{m_{k+1}}{}_{\tau(k+1)}\cdots\delta^{m_n}{}_{\tau(n)},\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{\eta\in\mathcal{S}_n}\sum\nolimits_{(m_{k+1},\dots,m_n)}\zeta_\eta\,\delta^{i_1}{}_{\sigma(1)}\cdots\delta^{i_k}{}_{\sigma(k)}\,\delta^{m_{k+1}}{}_{\sigma(k+1)}\cdots\delta^{m_n}{}_{\sigma(n)}\\
&\times\delta^{j_1}{}_{\sigma\,\eta(1)}\cdots\delta^{j_k}{}_{\sigma\,\eta(k)}\,\delta^{m_{k+1}}{}_{\sigma\,\eta(k+1)}\cdots\delta^{m_n}{}_{\sigma\,\eta(n)},\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{\eta\in\mathcal{S}_n}\zeta_\eta\,\delta^{i_1}{}_{\sigma(1)}\cdots\delta^{i_k}{}_{\sigma(k)}\,\delta^{j_1}{}_{\sigma\,\eta(1)}\cdots\delta^{j_k}{}_{\sigma\,\eta(k)}\\
&\times\delta^{\sigma(k+1)}{}_{\sigma\,\eta(k+1)}\cdots\delta^{\sigma(n)}{}_{\sigma\,\eta(n)},\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{\eta\in\mathcal{S}_n}\zeta_\eta\,\delta^{i_1}{}_{\sigma(1)}\cdots\delta^{i_k}{}_{\sigma(k)}\,\delta^{j_1}{}_{\sigma\,\eta(1)}\cdots\delta^{j_k}{}_{\sigma\,\eta(k)}\\
&\times\delta^{k+1}{}_{\eta(k+1)}\cdots\delta^{n}{}_{\eta(n)}.
\end{aligned}\tag{794}$$

در رسیدن به این عبارت، تغییرِمتغیر ـِ $\tau=:\sigma\,\eta$ به کار رفته است. به خاطر ـِ جمله‌ها یِ $\delta^l{}_{\eta(l)}$ در طرف ـِ راست، جمع‌بندی رو یِ η به جایش‌گشت‌ها یی منحصر می‌شود که $k+1$

تا n را عوض نمی‌کنند. پس جمع‌بندی رو یِ η به جمع‌بندی رو یِ جای‌گشت‌ها یِ k تایی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathrm{LH} &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{\eta\in\mathcal{S}_k}\zeta_\eta\,\delta^{i_1}{}_{\sigma(1)}\cdots\delta^{i_k}{}_{\sigma(k)}\,\delta^{j_1}{}_{\sigma\,\eta(1)}\cdots\delta^{j_k}{}_{\sigma\,\eta(k)},\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{\eta\in\mathcal{S}_k}\zeta_\eta\,\delta^{i_1}{}_{\sigma(1)}\cdots\delta^{i_k}{}_{\sigma(k)}\,\delta^{j_{\eta^{-1}(1)}}{}_{\sigma(1)}\cdots\delta^{j_{\eta^{-1}(k)}}{}_{\sigma(k)}.\end{aligned}\tag{795}$$

اگر i_1 تا i_k متمایز نباشند، دوطرف ِ (793) صفر اند، و تساوی برقرار است. پس فرض می‌کنیم i_1 تا i_k متمایز اند. در این صورت σ هایی هستند که

$$\forall\, l\in\mathbb{N}_k\ :\ \sigma(l)=i_l.\tag{796}$$

تعداد ِ این‌ها $(n-k)!$ است. پس،

$$\mathrm{LH}=(n-k)!\sum_{\eta\in\mathcal{S}_k}\zeta_\eta\,\delta^{j_{\eta^{-1}(1)}}{}_{i_1}\cdots\delta^{j_{\eta^{-1}(k)}}{}_{i_k},\tag{797}$$

که حکم را ثابت می‌کند.

■

از جمله،

$$\sum\nolimits_{(i_1,\dots,i_n)}[i_1\cdots i_n]\,[i_1\cdots i_n]=n!,\tag{798}$$

و

$$\sum\nolimits_{(i_2,\dots,i_n)}[j\,i_2\cdots i_n]\,[k\,i_2\cdots i_n]=(n-1)!\,\delta_{j\,k}.\tag{799}$$

IX

پیش‌ران

xliv پیش‌ران

فضاها یِ خطی یِ $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، $\mathbb{U}'$، و $\mathbb{V}'$ با میدان ِ یک‌سان را در نظر بگیرید. فرض کنید $R \in \mathfrak{LF}(\mathbb{U}';\mathbb{U})$ و $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}';\mathbb{V})$ نگاشت‌ها یی خطی و در به‌ترتیب $\mathbb{U}'$ و $\mathbb{V}'$ وارون‌پذیر اند، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$. پیش‌ران ِ $\mathrm{pf}(S;R)$ را نگاشت ی خطی از $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ به $\mathfrak{LF}(\mathbb{V}';\mathbb{U}')$ تعریف می‌کنیم که

$$[\mathrm{pf}(S;R)](T) := S\,T\,R^{-1}. \qquad (800)$$

یک حالت ِ خاص این است که $\mathbb{U}$ خود ِ $\mathbb{F}$ (میدان ِ این فضاها) باشد. در این حالت $\mathbb{U}'$ هم خود ِ $\mathbb{F}$ است و هر نگاشت ِ خطی یِ وارون‌پذیر ِ از $\mathbb{F}$ به $\mathbb{F}$، عبارت است از ضرب ِ یک اسکالر ِ ناصفر در متغیر ِ نگاشت. اما $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{F}) = \mathbb{V}$. دیده می‌شود اثر ِ $\mathrm{pf}(S;1)$ بر $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{F}) = \mathbb{V}$ با اثر ِ S بر $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{F}) = \mathbb{V}$ یک‌سان است.

یک حالت ِ خاص ِ دیگر این است که $\mathbb{V}$ (و در نتیجه $\mathbb{V}'$) خود ِ $\mathbb{F}$ باشد. داریم $\mathfrak{LF}(\mathbb{F};\mathbb{U}) = \mathbb{U}^*$، و دیده می‌شود اثر ِ $\mathrm{pf}(1;R)$ بر $\mathfrak{LF}(\mathbb{F};\mathbb{U}) = \mathbb{U}^*$ با اثر ِ $(R^{-1})^* = (R^*)^{-1}$ بر $\mathfrak{LF}(\mathbb{F};\mathbb{U}) = \mathbb{U}^*$ یک‌سان است.

حالا برا یِ تعریف ِ پیش‌ران در حالت ِ کلی آماده ایم. فضاها یِ خطی یِ $\mathbb{U}_1$ تا $\mathbb{U}_l$، $\mathbb{U}'_1$ تا $\mathbb{U}'_l$، $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_k$، و $\mathbb{V}'_1$ تا $\mathbb{V}'_k$، با میدان ِ یک‌سان ِ $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید به ازا یِ هر j، نگاشت ِ $R_j \in \mathcal{LF}(\mathbb{U}'_j;\mathbb{U}_j)$ در $\mathbb{U}'_j$ وارون‌پذیر است؛ و به ازا یِ هر i، نگاشت ِ $S_i \in \mathcal{LF}(\mathbb{V}'_i;\mathbb{V}_i)$ در $\mathbb{V}'_i$ وارون‌پذیر است. پیش‌ران ِ $\mathrm{pf}(S_1,\dots,S_k;R_1,\dots,R_l)$ را یک دسته نگاشت از فضاها یِ $\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ به $\mathcal{LF}(\mathbb{V}';\mathbb{U}')$ تعریف می‌کنیم، که

$$\begin{aligned}
&\forall\, T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U}) \;:\\
&[\mathrm{pf}(S_1,\dots,S_k;R_1,\dots,R_l)](T) := [(\tilde{S}_1)^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (\tilde{S}_k)^{\otimes n_k}]\,T\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times[(\tilde{R}_1)^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes (\tilde{R}_l)^{\otimes m_l}]. \qquad (801)
\end{aligned}$$

در این‌جا

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &:= \tilde{\mathbb{U}}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathbb{U}}_l^{\otimes m_l},\\
\mathbb{V} &:= \tilde{\mathbb{V}}_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathbb{V}}_k^{\otimes n_k}. \qquad (802)
\end{aligned}$$

ضمناً به ازا یِ هر j، فضا یِ $\tilde{\mathbb{U}}_j$ یا خود ِ $\mathbb{U}_j$ است یا $\mathbb{U}_j^*$، و به ازا یِ هر i، فضا یِ $\tilde{\mathbb{V}}_i$ یا خود ِ $\mathbb{V}_i$ است یا $\mathbb{V}_i^*$، و

$$\tilde{R}_j := \begin{cases} R_j, & \tilde{\mathbb{U}}_j = \mathbb{U}_j \\ (R_j^*)^{-1} = (R_j^{-1})^*, & \tilde{\mathbb{U}}_j = \mathbb{U}_j^* \end{cases},$$

$$\tilde{S}_i := \begin{cases} S_i, & \tilde{\mathbb{V}}_i = \mathbb{V}_i \\ (S_i^*)^{-1} = (S_i^{-1})^*, & \tilde{\mathbb{V}}_i = \mathbb{V}_i^* \end{cases}. \qquad (803)$$

هم‌چنین، اگر هر یک از این فضاها خود ِ $\mathbb{F}$ شود، نگاشت ِ خطی یِ وارون‌پذیر ِ متناظر با آن را نگاشت ِ همانی می‌گیریم.

دیده می‌شود این تعریف همه یِ حالت‌ها یِ خاص ی را که قبلاً بررسی کردیم در بر دارد. برا یِ مختصرنوشتن، از این پس نمادگذاری یِ کوتاه‌شده یِ (802) را به کار می‌بریم. هم‌چنین این نمادها را به کار می‌بریم.

$$\vec{S} := (S_1,\dots,S_k),$$

$$(\vec{S})^{-1} := (S_1^{-1}, \dots, S_k^{-1}),$$
$$\vec{S}'\,\vec{S} := (S_1'\,S_1, \dots, S_2'\,S_2). \qquad (804)$$

اثبات ِ قضیه‌ها ي این فصل، فقط به نوشتن نیاز دارد.

قضیه ي 229: فرض کنید میدان ِ فضاها ي خطی ي سازنده ي $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، $\mathbb{U}'$، و $\mathbb{V}'$ یک‌سان است؛ به ازا ي هر j، نگاشت ِ $R_j \in \mathfrak{LF}(\mathbb{U}_j'; \mathbb{U}_j)$ در $\mathbb{U}_j'$ وارون‌پذیر است؛ و به ازا ي هر i، نگاشت ِ $S_i \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}_i'; \mathbb{V}_i)$ در $\mathbb{V}_i'$ وارون‌پذیر است. در این صورت $\mathrm{pf}(\vec{S}; \vec{R})$ وارون‌پذیر است و

$$[\mathrm{pf}(\vec{S}; \vec{R})]^{-1} = \mathrm{pf}[(\vec{S})^{-1}; (\vec{R})^{-1}]. \qquad (805)$$

هم‌چنین؛ فرض کنید میدان ِ فضاها ي خطی ي سازنده ي $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، $\mathbb{U}'$، $\mathbb{V}'$، $\mathbb{U}''$، و $\mathbb{V}''$ یک‌سان است؛ به ازا ي هر j، نگاشت‌ها ي $R_j \in \mathfrak{LF}(\mathbb{U}_j'; \mathbb{U}_j)$ و $R_j' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{U}_j''; \mathbb{U}_j')$ در به‌ترتیب $\mathbb{U}_j'$ و $\mathbb{U}_j''$ وارون‌پذیر اند؛ و به ازا ي هر i، نگاشت‌ها ي $S_i \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}_i'; \mathbb{V}_i)$ و $S_i' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}_i''; \mathbb{V}_i')$ در به‌ترتیب $\mathbb{V}_i'$ و $\mathbb{V}_i''$ وارون‌پذیر اند. در این صورت،

$$\mathrm{pf}(\vec{S}'\,\vec{S}; \vec{R}'\,\vec{R}) = \mathrm{pf}(\vec{S}'; \vec{R}')\ \mathrm{pf}(\vec{S}; \vec{R}). \qquad (806)$$

ضمناً

$$\mathrm{pf}(1, \dots, 1) = 1. \qquad (807)$$

توجه دارید که نگاشت‌ها ي همانی یی که در این رابطه ظاهر شده اند، بر فضاها ي متفاوت ی اثر می‌کنند.

★

حکم ِ این قضیه را می‌شود این طور بیان کرد که pf یک هم‌ریختی ي نگاشت‌ها ي $(\vec{S}; \vec{R})$ است.

قضیه ي 230: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ دو فضا ي خطی با میدان ِ یک‌سان اند، و $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}'; \mathbb{V})$ در $\mathbb{V}'$ وارون‌پذیر است. در این صورت، به ازا ي هر جای‌گشت ِ n تایی ي σ،

$$[\mathrm{pf}(S)]\,\mathrm{Per}_{\sigma, \mathbb{V}^{\otimes n}} = \mathrm{Per}_{\sigma, \mathbb{V}'^{\otimes n}}\,[\mathrm{pf}(S)]. \qquad (808)$$

از جمله،

$$[\mathrm{pf}(S)](\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes n}) = \mathbb{V}_{\mathrm{S}}'^{\otimes n}, \tag{809}$$

و

$$[\mathrm{pf}(S)](\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes n}) = \mathbb{V}_{\mathrm{A}}'^{\otimes n}. \tag{810}$$

★

هر یک از فضاها یِ ظاهر شده در دامنه و تصویر ـِ یک نگاشت ـِ خطی، ممکن است حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ فضاها یِ دیگر ی باشند. در این صورت نگاشت ـِ خطی یِ وارون‌پذیر ـِ متناظر با این فضاها، ممکن است پیش‌ران ـِ نگاشت‌ها یِ خطی یِ وارون‌پذیر ـِ دیگر ی باشد.

قضیه یِ 231: فرض کنید S_1، S_2، و S_3، یک‌ریختی‌ها یی اند که بر فضاها یی با میدان ـِ یک‌سان اثر می‌کنند. در این صورت،

$$\mathrm{pf}[S_1, \mathrm{pf}(S_2, S_3)] = \mathrm{pf}(S_1, S_2, S_3), \tag{811}$$

و اگر هردوکاما یِ اول ـِ دوطرف، یا هردوکاما یِ دوم ـِ دوطرف را به کامانقطه تبدیل کنیم هم رابطه درست است.

★

قضیه یِ 232: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، R یک یک‌ریختی با دامنه یِ $\mathbb{U}$ و S یک یک‌ریختی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ و $u \in \mathbb{U}$. در این صورت،

$$[\mathrm{pf}(S)](T\,u) = \{[\mathrm{pf}(S;R)](T)\}\{[\mathrm{pf}(R)](u)\}. \tag{812}$$

هم‌چنین، فرض کنید $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_3$ فضاها یی خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}_2;\mathbb{V}_1)$ و $U \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}_3;\mathbb{V}_2)$، و S_1 تا S_3 یک‌ریختی‌ها یی اند که دامنه یِ S_i فضا یِ $\mathbb{V}_i$ است. در این صورت،

$$[\mathrm{pf}(S_3;S_1)](U\,T) = \{[\mathrm{pf}(S_3;S_2)](U)\}\{[\mathrm{pf}(S_2;S_1)](T)\}. \tag{813}$$

سرانجام، فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ فضاها یی خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، R یک‌ریختی یی با دامنه یِ $\mathbb{U}$، و S یک‌ریختی یی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$. در این صورت،

a هسته یِ $[\mathrm{pf}(S;R)](T)$ برابر است با تصویر ِ هسته یِ T تحت ِ R.

b تصویر ِ $[\mathrm{pf}(S;R)](T)$ برابر است با تصویر ِ تصویر ِ T تحت ِ S.

c T هسته‌جدا است، اگر و تنها اگر $[\mathrm{pf}(S;R)](T)$ هسته‌جدا باشد.

d T وارون ِ راست دارد، اگر و تنها اگر $[\mathrm{pf}(S;R)](T)$ وارون ِ راست داشته باشد. T وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر $[\mathrm{pf}(S;R)](T)$ وارون‌پذیر باشد. هر یک از وارون‌ها یِ $[\mathrm{pf}(S;R)](T)$ که وجود داشته باشد، برابر است با اثر ِ $[\mathrm{pf}(R;S)]$ بر وارون ِ متناظر ِ T.

★

نگاشت ِ خطی یِ $T : \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید S یک‌ریختی یی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت،

$$[\mathrm{pf}(S)](T) = S\,T\,S^{-1}. \qquad (814)$$

به این پیش‌ران تبدیل ِ تشابهی می‌گویند.

قضیه یِ 233: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ یک نگاشت ِ خطی، S یک یک‌ریختی با دامنه یِ $\mathbb{V}$، و T' تبدیلِ‌تشابهی‌یافته یِ T (تحت ِ S) است. در این صورت،

a اگر P یک چندجمله‌ای (یا چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته در صورت ِ وارون‌پذیربودن ِ T) باشد، آن‌گاه تبدیلِ‌تشابهی‌یافته یِ $P(T)$ برابر است با $P(T')$، و هسته یِ $P(T')$ برابر است با تصویر ِ هسته یِ $P(T)$ تحت ِ S. .

b ویژه‌مقدارها یِ T و T' یک‌سان اند و هر ویژه‌فضا یِ (ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ) T' برابر است با تصویر ِ ویژه‌فضا یِ (ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ) متناظر ِ T تحت ِ S.

c اگر یک ی از نگاشت‌ها یِ T و T' چندجمله‌ای یِ کمین داشته باشد، دیگری هم دارد و $M_T = M_{T'}$. اگر یک ی از نگاشت‌ها یِ T و T' چندجمله‌ای یِ مشخصه داشته باشد، دیگری هم دارد و $C_T = C_{T'}$. اگر یک ی از نگاشت‌ها یِ T و T' ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد، دیگری هم هست، و نگاشت‌ها یِ شبهِ‌ساده و پوچ‌توان ِ متناظر با T' برابر اند با تبدیلِ‌تشابهی‌یافته یِ نگاشت‌ها یِ شبه‌ساده و پوچ‌توان ِ متناظر با T.

d اگر $f(T)$ یک تابع ـِ نگاشت ـِ T باشد (به هر یک از معنی‌ها یِ بخش ـِ xxiv) آن‌گاه $f(T')$ قابلِ‌تعریف است (به همان معنی یِ $f(T)$) و برابر است با تبدیلِ‌تشابهی‌یافته یِ $f(T)$.

★

قضیه یِ 234: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ فضاها یی خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، S یک‌ریختی یی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است، و $x \in [\mathbb{V}^{\otimes m} \otimes (\mathbb{V}^{*})^{\otimes n}]$. در این صورت،

$$\mathrm{C}^{(a)}{}_{(b)}\{[\mathrm{pf}(S)]x\} = [\mathrm{pf}(S)][\mathrm{C}^{(a)}{}_{(b)}(x)]. \tag{815}$$

★

یک نتیجه یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 235: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ دو فضا یِ خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، S یک‌ریختی یی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است، و تصویر ـِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ باپایان‌بُعدی است. در این‌صورت تصویر ـِ تبدیلِ‌تشابه‌یافته یِ T (تحت ـِ S) هم باپایان‌بُعدی است و

$$\mathrm{tr}(S\,T\,S^{-1}) = \mathrm{tr}(T). \tag{816}$$

★

البته این را از قضیه یِ 173 هم می‌شد نتیجه گرفت.

مطالب ـِ این فصل، به بیان ـِ ساده آن اند که اگر یک دسته فضا یِ خطی یِ بدونِ‌پریم و یک دسته فضا یِ خطی یِ پریم‌دار باشند، که بین ـِشان تناظر ـِ یک‌به‌یک ی برقرار باشد، و بین ـِ هر فضا یِ بدونِ‌پریم و فضا یِ متناظر ـِ پریم‌دار یک یک‌ریختی یِ پوشا باشد، آن‌گاه می‌شود یک یک‌ریختی یِ پوشا یِ کلی بین ـِ همه یِ موجودات ـِ ساخته‌شده بر اساس ـِ فضاها یِ بدونِ‌پریم و موجودات ـِ متناظر ـِ ساخته‌شده بر اساس ـِ فضاها یِ پریم‌دار به‌دست آورد، که به آن پیش‌ران می‌گوییم. نتیجه یِ هر عمل ی در فضاها یِ پریم‌دار، برابر است با اثر ـِ این پیش‌ران بر نتیجه یِ عمل ـِ متناظر در فضاها یِ بدونِ‌پریم. ضمناً این پیش‌ران با ضرب ـِ یک‌ریختی‌ها و وارون‌کردن ـِ یک‌ریختی‌ها جابه‌جا می‌شود. به طور ـِ نمادین، $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ را نماینده یِ دو موجود ـِ کلی یِ ساخته‌شده بر اساس ـِ فضاها یِ بی‌پریم، و $\mathcal{O}$ را نماینده یِ یک عمل ـِ کلی بر اساس ـِ این فضاها می‌گیریم، و تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{T}_i' := \mathrm{pf}(\mathcal{T}_i). \tag{817}$$

در این صورت،

$$\mathrm{pf}(\mathcal{T}_1\, \mathcal{O}\, \mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_1'\, \mathcal{O}'\, \mathcal{T}_2'. \tag{818}$$

در این‌جا $\mathcal{O}'$ عمل ِ متناظر با $\mathcal{O}$ بر اساس ِ فضاها یِ پریم‌دار است.

از جمله،

قضیه یِ 236: فرض کنید فضاها یِ خطی یِ $\mathbb{U}_1$ تا $\mathbb{U}_m$ و $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_n$ میدان ِ یک‌سان دارند و باپایان‌بُعدی اند، $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}_n; \mathbb{U}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{U}_m)$، و به ازا یِ هر j نگاشت ِ خطی یِ R_j با دامنه یِ $\mathbb{U}_j$ و به ازا یِ هر i نگاشت ِ خطی یِ S_i با دامنه یِ $\mathbb{V}_i$ یک‌به‌یک است. به ازا یِ هر j مجموعه یِ A_j را یک پایه یِ $\mathbb{U}_j$ و A_j' را تصویر ِ A_j تحت ِ R_j، و به ازا یِ هر i مجموعه یِ B_i را یک پایه یِ $\mathbb{V}_i$ و B_i' را تصویر ِ B_i تحت ِ S_i می‌گیریم. در این صورت،

$$(T')^{i_1'\cdots i_n'}{}_{j_1'\cdots j_m'} = T^{i_1\cdots i_n}{}_{j_1\cdots j_m}, \tag{819}$$

که در آن مئلفه‌ها یِ طرف ِ چپ در پایه‌ها یِ پریم‌دار، و مئلفه‌ها یِ طرف ِ راست در پایه‌ها یِ بدونِ‌پریم حساب شده اند، و

$$T' := [\mathrm{pf}(\vec{S}; \vec{R})](T). \tag{820}$$

★

X

حجم، دترمینان

xlv حجم ـِ جبری یِ یک متوازی‌السطوح

فضا یِ خطی یِ n بُعدی یِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. بر اساس ـِ قضیه یِ 209،

$$\dim[(\mathbb{V}^*)^{\wedge n}] = \binom{n}{n} = 1. \tag{821}$$

از این‌جا معلوم می‌شود فضا یِ تابعی‌ها یِ n خطی یِ پادمتقارن یک‌بُعدی است. پس هر دوتابعی یِ n خطی یِ پاد متقارن، با هم متناسب اند. به هر عضو ـِ ناصفر ـِ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$، یک حجم (یا حجم ـِ جبری) رو یِ $\mathbb{V}$ می‌گوییم. متناظر با حجم ـِ ε، حجم ـِ (حجم ـِ جبری یِ) متوازی‌السطوح ی که با بردارها یِ v_1 تا v_n عضو ـِ $\mathbb{V}$ ساخته می‌شود را $\varepsilon(v_1, \dots, v_n)$ تعریف می‌کنیم. علت ـِ این که می‌گوییم حجم ـِ جبری این است که این حجم، حتا اگر فضا یِ خطی حقیقی باشد لزوماً مثبت یا صفر نیست. در واقع روشن است که اگر مثلاً جا یِ دو تا از v_i ها را با هم عوض کنیم، حجم در منفی ضرب می‌شود. به طور ـِ کلی،

$$\forall\ \sigma \in \mathbb{S}_n\ :\ \varepsilon(v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(n)}) = \zeta_\sigma\, \varepsilon(v_1, \dots, v_n). \tag{822}$$

قضیه یِ 237: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی است. در این صورت به ازا یِ هر حجم ی رو یِ $\mathbb{V}$، حجم ـِ جبری یِ متوازی‌السطوح ی که با بردارها یِ v_1 تا v_n

در $\mathbb{V}$ ساخته می‌شود صفر است، اگر و تنها اگر مجموعه ی $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ خطی‌وابسته باشد.

اثبات: حجم ـ ε را در نظر بگیرید. ابتدا فرض کنید B خطی‌وابسته است. در این صورت بُعد ـ $\mathbb{V}':=\mathrm{span}(B)$ کوچک‌تر از n است. از این‌جا نتیجه می‌شود $(\mathbb{V}')^{\wedge n}=\{0\}$، و از جمله

$$\mathrm{aSym}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)=0. \tag{823}$$

ε هم پادمتقارن است. پس طبق ـ قضیه ی 213، اثر ـ ε بر $v_1\otimes\cdots\otimes v_n$ صفر است.

حالا فرض کنید B خطی‌مستقل است. پس هر بردار ی از $\mathbb{V}$ را می‌شود بر حسب ـ اعضا ی B بسط داد. بردارها ی w_1 تا w_n در $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. این‌ها را بر حسب ـ v_i ها بسط می‌دهیم:

$$w_j=w_j^i\,v_i. \tag{824}$$

داریم

$$\varepsilon(w_1,\dots,w_n)=w_1^{i_1}\cdots w_n^{i_n}\,\varepsilon(v_{i_1},\dots,v_{i_n}),$$

$$=w_1^{i_1}\cdots w_n^{i_n}\sum\nolimits_{i_1\cdots i_n}[i_1\cdots i_n]\,\varepsilon(v_1,\dots,v_n). \tag{825}$$

نتیجه این است که اگر $\varepsilon(v_1,\dots,v_n)=0$، آن‌گاه برا ی هر n بردار ـ w_1 تا w_n در $\mathbb{V}$ داریم $\varepsilon(w_1,\dots,w_n)=0$. اما این یعنی $\varepsilon=0$، که با این فرض که ε حجم است ناسازگار است. پس اگر B خطی‌مستقل باشد، آن‌گاه

$$\varepsilon(v_1,\dots,v_n)\neq 0. \tag{826}$$

■

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی خطی ی n بُعدی است. از این که $(\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ یک بُعدی است، نتیجه می‌شود هر عضو ـ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ با یک عضو ـ $\mathbb{F}$ (میدان ـ $\mathbb{V}$) متناظر است، و این تناظر یک‌به‌یک است. در واقع اگر $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه ی $\mathbb{V}$ باشد، هر عضو ـ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ به طور ـ یک‌تا با اثر َش بر $(e_1,\dots,e_n)$ مشخص می‌شود.

قضیه ي 238: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا يِ خطی يِ n بُعدی و $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایه اَش است. n تانسور ـِ پادمتقارن ـِ $\ell \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ را با

$$\ell(e_1, \ldots, e_n) := 1 \tag{827}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت به ازا يِ هر $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$، اسکالر ی مثل ـِ α هست که

$$\varepsilon = \alpha\,\ell. \tag{828}$$

بر عکس، اگر $\varepsilon = \alpha\,\ell$، که در آن α یک اسکالر است، آن‌گاه $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$. در این حالت‌ها،

$$\alpha = \varepsilon(e_1, \ldots, e_n). \tag{829}$$

اثبات: از آن‌جا که $(\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ یک‌بُعدی است، و ℓ یک عضو ـِ ناصفر ـِ آن است (چون اثر َ ش بر n بردار ـِ معین یک است)، هر عضو ـِ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ مضرب ی از ℓ است، و برعکس. برا يِ به‌دست‌آوردن ـِ α در (828)، دوطرف ـِ این رابطه را بر $(e_1, \ldots, e_n)$ اثر می‌دهیم. (829) نتیجه می‌شود.

■

توجه کنید که حجم ـِ ℓ که در قضیه يِ بالا معرفی شد به اعضا يِ پایه يِ انتخاب‌شده بسته‌گی دارد؛ نه تنها به خود ـِ پایه، بل که به ترتیب ـِ اعضا يِ پایه هم بسته‌گی دارد.

قضیه يِ 239: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا يِ خطی يِ n بُعدی اند، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$، و $\varepsilon \in (\mathbb{W}^*)^{\wedge n}$. در این صورت

$$\varepsilon_T := \varepsilon \circ T^{\otimes n} \tag{830}$$

هم عضو ـِ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ است. به علاوه، ε_T یک حجم رو يِ $\mathbb{W}$ است، اگر و تنها اگر ε یک حجم رو يِ $\mathbb{V}$ باشد و T وارون‌پذیر باشد.

اثبات: ε_T نگاشت ی است که رو يِ n بردار ـِ $\mathbb{V}$ اثر می‌کند و یک عدد می‌دهد. اثبات ـِ پادمتقارن‌بودن ـِ آن هم فقط به نوشتن نیاز دارد. پس $\varepsilon_T \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$. برا يِ اثبات ـِ باقی‌مانده يِ حکم، یک پایه يِ $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ برا يِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم.

$$\varepsilon_T(e_1, \ldots, e_n) = \varepsilon(T\,e_1, \ldots, T\,e_n). \tag{831}$$

ε_T حجم است، اگر و تنها اگر طرف ـِ راست ـِ عبارت ـِ بالا ناصفر باشد. طرف ـِ راست ـِ عبارت ـِ بالا هم ناصفر است، اگر و تنها اگر ε حجم باشد و $T(B)$ خطی‌مستقل باشد. $T(B)$ خطی‌مستقل است، اگر و تنها اگر T وارون‌پذیر باشد.

■

xlvi مکمل ـِ حجمی

فضا یِ خطی یِ n بُعدی یِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. قضیه یِ 209 می‌گوید بُعد ـِ $\mathbb{V}^{\wedge k}$ با بُعد ـِ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ برابر است. پس این دوفضا یک‌ریخت اند. با استفاده از حجم ـِ $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$، می‌شود یک‌یکریختی بین ـِ این دوفضا ساخت. نگاشت ـِ خطی یِ $\mathcal{Q}_\varepsilon$ از $\mathbb{V}^{\wedge k}$ به $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$(\forall\, x \in \mathbb{V}^{\wedge k},\ \forall\, y \in \mathbb{V}^{\wedge(n-k)})\ :\ [\mathcal{Q}_\varepsilon(x)](y) := \frac{(n-k)!}{n!}\,\varepsilon(x \wedge y). \qquad (832)$$

توجه کنید که $\mathcal{Q}_\varepsilon$ به k هم بسته‌گی دارد (علاوه بر $\mathbb{V}$ و ε).

قضیه یِ 240: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی، و ε یک حجم رو یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت نگاشت ـِ خطی یِ $\mathcal{Q}_\varepsilon$ از $\mathbb{V}^{\wedge k}$ به $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ با تعریف ـِ (832)، در $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ وارون‌پذیر است. ضمناً اگر $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$، و $\{e^1, \dots, e^n\}$ دوگان ـِ B باشد، آن‌گاه،

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \frac{1}{(n-k)!}\,\varepsilon_{i_1 \cdots i_k\, l_1 \cdots l_{n-k}}\, e^{l_1} \wedge \cdots \wedge e^{l_{n-k}}. \qquad (833)$$

هم‌چنین، اگر ε' یک حجم ـِ دیگر رو یِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{Q}_{\varepsilon'}$ با $\mathcal{Q}_\varepsilon$ متناسب است، و ضریب ـِ تناسب ـِ $\mathcal{Q}_{\varepsilon'}$ با $\mathcal{Q}_\varepsilon$، همان ضریب ـِ تناسب ـِ ε' با ε است.

اثبات: چون بُعد ـِ دامنه یِ $\mathcal{Q}_\varepsilon$ با بُعد ـِ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ یک‌سان است، برا یِ نشان‌دادن ـِ وارون‌پذیری یِ $\mathcal{Q}_\varepsilon$ در $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ کافی است ثابت کنیم تصویر ـِ $\mathcal{Q}_\varepsilon$ خود ـِ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ است. $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$، و $\{e^1, \dots, e^n\}$ را دوگان ـِ B می‌گیریم. داریم

$$\mathrm{LH}_1 := [\mathcal{Q}_\varepsilon(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})](e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}),$$

$$\mathrm{LH}_1 = \frac{(n-k)!}{n!}\,\varepsilon(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{n-k}}),$$

$$= (n-k)!\,\varepsilon(e_{i_1},\dots,e_{i_k},e_{j_1},\dots,e_{j_{n-k}}). \tag{834}$$

ضمناً،

$$\begin{aligned}
\mathrm{LH}_2 &:= (\varepsilon_{i_1\cdots i_k\,l_1\cdots l_{n-k}}\,e^{l_1}\wedge\cdots\wedge e^{l_{n-k}})(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{n-k}}),\\
\mathrm{LH}_2 &= (n-k)!\,(\varepsilon_{i_1\cdots i_k\,l_1\cdots l_{n-k}}\,e^{l_1}\otimes\cdots\otimes e^{l_{n-k}})(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{n-k}}),\\
&= [(n-k)!]^2\,(\varepsilon_{i_1\cdots i_k\,l_1\cdots l_{n-k}}\,e^{l_1}\otimes\cdots\otimes e^{l_{n-k}})(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{n-k}}),\\
&= [(n-k)!]^2\,\varepsilon_{i_1\cdots i_k\,j_1\cdots j_{n-k}}.
\end{aligned} \tag{835}$$

از مقایسه یِ این دورابطه (833) نتیجه می‌شود.

از سو یِ دیگر،

$$\mathrm{LH}_3 := \sum\nolimits_{(i_1,\dots,i_k,l_1,\dots,l_{n-k})}[i_1\cdots i_k\,j_1\cdots j_{n-k}]\,[i_1\cdots i_k\,l_1\cdots l_{n-k}]$$

$$\times e^{l_1}\wedge\cdots\wedge e^{l_{n-k}},$$

$$\mathrm{LH}_3 = k!\sum\nolimits_{(l_1,\dots,l_{n-k})}\begin{bmatrix} j_1\cdots j_{n-k}\\ l_1\cdots l_{n-k}\end{bmatrix}\,e^{l_1}\wedge\cdots\wedge e^{l_{n-k}},$$

$$= k!\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-k}}\zeta_\sigma\,e^{j_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge e^{j_{\sigma(n-k)}},$$

$$= k!\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-k}}e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_{n-k}},$$

$$= k!\,(n-k)!\,e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_{n-k}}. \tag{836}$$

پس،

$$\mathcal{Q}_\varepsilon\left(\sum\nolimits_{(i_1,\dots,i_k)}[i_1\cdots i_k\,j_1\cdots j_{n-k}]e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\right) = k!\,\varepsilon_{1\cdots n}\,e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_{n-k}}. \tag{837}$$

این نشان می‌دهد هر عضو ـِ $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ را می‌شود با اثردادن ـِ $\mathcal{Q}_\varepsilon$ بر یک عضو ـِ $\mathbb{V}^{\wedge k}$ به دست آورد.

تناسب ـِ $\mathcal{Q}_{\varepsilon'}$ با $\mathcal{Q}_\varepsilon$ هم از (833) نتیجه می‌شود.

■

به نگاشت ـِ $\mathcal{Q}_\varepsilon$ در (832)، مکمل ـِ حجمی (یِ متناظر با حجم ـِ ε) می‌گوییم.

یک نتیجه یِ قضیه یِ بالا این است.

قضیه یِ 241: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی، ε یک حجم رو یِ $\mathbb{V}$، و $\mathcal{Q}_\varepsilon$ مکملِ‌حجمی یِ متناظر با ε است. در این صورت، اگر $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ و $\{e^1, \dots, e^n\}$ دوگان ـِ B باشد، وارون ـِ $\mathcal{Q}_\varepsilon$ چنین است.

$$(\mathcal{Q}_\varepsilon)^{-1}(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{n-k}}) = \frac{1}{k!}\, \tilde{\varepsilon}^{i_1 \cdots i_k\, j_1 \cdots j_{n-k}}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, \qquad (838)$$

که در آن $\tilde{\varepsilon}$ یک حجم رو یِ $\mathbb{V}^*$ است و

$$\tilde{\varepsilon}(e^1, \dots, e^n) = \tilde{\varepsilon}^{1 \cdots n} = \frac{1}{\varepsilon_{1 \cdots n}}. \qquad (839)$$

★

به حجم ـِ $\tilde{\varepsilon}$ در (839)، دوگان ـِ حجم ـِ ε می‌گوییم.

$\mathcal{Q}_\varepsilon$ یک نگاشت ـِ خطی از فضا یِ $\mathbb{V}^{\wedge k}$ به $(\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-k)}$ تعریف شد. اما معمولاً آن را به عنوان ـِ یک دسته نگاشت (متناظر با k ها یِ مختلف) در نظر می‌گیریم. هم‌چنین، هر جا که فقط با یک حجم سروکار داشته باشیم، می‌شود شاخص ـِ ε را از $\mathcal{Q}_\varepsilon$ حذف کرد.

سرانجام، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 242: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، و ε یک حجم رو یِ آن است. در این صورت،

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(1) = \varepsilon, \qquad (840)$$

و

$$\mathcal{Q}_\varepsilon^{-1}(\varepsilon) = 1. \qquad (841)$$

★

xlvii تعریف ِ دترمینان

قضیه یِ 243: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی، $T:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ یک نگاشت ِ خطی، و ε یک حجم است؛ و $\varepsilon_T :\in (\mathbb{V}^{\otimes n})^*$ هم مثل ِ (830) تعریف شده است. در این صورت،

$$\varepsilon_T = \alpha\,\varepsilon, \tag{842}$$

که در آن α اسکالر ی یک‌تا است که به ε بسته‌گی ندارد.

اثبات: وجود و یک‌تا یی یِ α از این‌جا نتیجه می‌شود که $(\mathbb{V}^{\wedge n})^*$ یک‌بُعدی است، و $\varepsilon \neq 0$. برا یِ اثبات ِ این که α به حجم ِ انتخاب‌شده بسته‌گی ندارد هم کافی است یک حجم ِ دیگر مثل ِ ε' در نظر بگیریم. اسکالر ی مثل ِ $\beta \neq 0$ هست که

$$\varepsilon' = \beta\,\varepsilon. \tag{843}$$

از این‌جا،

$$\varepsilon'_T = \beta\,\varepsilon_T. \tag{844}$$

پس،

$$\begin{aligned}\varepsilon'_T &= \beta\,\varepsilon_T,\\ &= \beta\,\alpha\,\varepsilon,\\ &= \alpha\,\varepsilon'.\end{aligned} \tag{845}$$

■

با استفاده از قضیه یِ بالا، دترمینان ِ نگاشت ِ خطی یِ T از فضا یِ خطی یِ n بُعدی یِ $\mathbb{V}$ به $\mathbb{V}$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\varepsilon\circ T^{\otimes n} =: \det(T)\,\varepsilon, \tag{846}$$

یا

$$\varepsilon(T\,v_1,\dots,T\,v_n) =: \det(T)\,\varepsilon(v_1,\dots,v_n). \tag{847}$$

در این‌جا $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ـِ $\mathbb{V}$، و ε یک حجم است. قضیه یِ بالا می‌گوید $\det(T)$ به انتخاب ـِ ε و $(v_1, \dots, v_n)$ بسته‌گی ندارد. البته (847) برا یِ وقت ی $\{v_1, \dots, v_n\}$ خطی‌مستقل نباشد هم درست است. اما در این حالت دوطرف ـِ رابطه صفر می‌شوند و نمی‌شود از رو یِ آن $\det(T)$ را به دست آورد.

xlviii ویژه‌گی‌ها یِ دترمینان

قضیه یِ 244: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی است، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$، و T^* پس‌آر ـِ T است. در این صورت دترمینان ـِ T با دترمینان ـِ T^* برابر است. هم‌چنین

$$\det(T) = \sum\nolimits_{(i_1, \dots, i_n)} [i_1 \cdots i_n]\, T^{i_1}{}_1 \cdots T^{i_n}{}_n,$$

$$= \sum\nolimits_{(j_1, \dots, j_n)} [j_1 \cdots j_n]\, T^1{}_{j_1} \cdots T^n{}_{j_n},$$

$$= \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{(i_1, \dots, i_n)} \sum\nolimits_{(j_1, \dots, j_n)} [i_1 \cdots i_n]\, [j_1 \cdots j_n]\, T^{i_1}{}_{j_1} \cdots T^{i_n}{}_{j_n}, \tag{848}$$

که در آن $T^i{}_j$ ها عنصرها یِ ماتریسی یِ T در یک پایه یِ $\mathbb{V}$ اند.

اثبات: فرض کنید $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است. حجم ـِ ℓ را مثل ـِ (827) تعریف می‌کنیم. در (847) بردارها یِ $v_k = e_{j_k}$ و حجم ـِ ℓ را به کار می‌بریم. نتیجه می‌شود.

$$[j_1 \cdots j_n]\ \det(T) = \sum\nolimits_{(i_1, \dots, i_n)} [i_1 \cdots i_n]\, T^{i_1}{}_{j_1} \cdots T^{i_n}{}_{j_n}. \tag{849}$$

دو طرف ـِ این رابطه را در $[j_1 \cdots j_n]$ ضرب، و حاصل را رو یِ j_k ها جمع می‌کنیم. با استفاده از

$$\sum\nolimits_{(j_1, \dots, j_n)} [j_1 \cdots j_n]\ [j_1 \cdots j_n] = n!, \tag{850}$$

نتیجه می‌شود

$$n!\ \det(T) = \sum\nolimits_{(j_1, \dots, j_n)} \sum\nolimits_{(i_1, \dots, i_n)} [j_1 \cdots j_n]\, [i_1 \cdots i_n]\, T^{i_1}{}_{j_1} \cdots T^{i_n}{}_{j_n}. \tag{851}$$

B^* (دوگان ِ B) را در نظر می‌گیریم و ℓ' را مثل ِ (827) (اما برا یِ اعضا یِ B^*) تعریف می‌کنیم. T^*، حجم ِ ℓ'، و $v_k = e^{i_k}$ را در (847) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$[i_1 \cdots i_n]\ \det(T^*) = \sum\nolimits_{(j_1,\dots,j_n)} [j_1 \cdots j_n](T^*)_{j_1}{}^{i_1} \cdots (T^*)_{j_n}{}^{i_n}, \qquad (852)$$

که با استفاده از قضیه یِ 125 می‌شود

$$[i_1 \cdots i_n]\ \det(T^*) = \sum\nolimits_{(j_1,\dots,j_n)} [j_1 \cdots j_n] T^{i_1}{}_{j_1} \cdots T^{i_n}{}_{j_n}. \qquad (853)$$

دو طرف ِ این رابطه را در $[i_1 \cdots i_n]$ ضرب، و حاصل را رو یِ i_k ها جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$n!\ \det(T^*) = \sum\nolimits_{(j_1,\dots,j_n)} \sum\nolimits_{(i_1,\dots,i_n)} [j_1 \cdots j_n]\,[i_1 \cdots i_n]\, T^{i_1}{}_{j_1} \cdots T^{i_n}{}_{j_n}. \quad (854)$$

از مقایسه یِ (851) و (854) نتیجه می‌شود

$$\det(T^*) = \det(T). \qquad (855)$$

(851) یا (854)، ضمناً شکل ِ سه‌وم ِ دترمینان ِ T در (848) را نتیجه می‌دهند. برا یِ به‌دست‌آوردن ِ شکل ِ اول، کافی است در (849) بگذاریم $j_k = k$. برا یِ به‌دست‌آوردن ِ شکل ِ دوم هم کافی است در (853) بگذاریم $i_k = k$، و از (855) استفاده کنیم.

■

می‌شد هر یک از تساوی‌ها یِ (848) را به عنوان ِ تعریف ِ دترمینان ِ T به کار برد. در این صورت باید نشان می‌دادیم طرف ِ راست به پایه یِ انتخاب‌شده بسته‌گی ندارد. برابری یِ $\det(T)$ با $\det(T^*)$، به زبان ِ شکل‌ها یِ ماتریسی این طور می‌شود که اگر جا یِ سطرها و ستون‌ها یِ یک ماتریس را عوض کنیم، دترمینان ِ آن ماتریس عوض نمی‌شود. در واقع از شکل ِ سه‌وم ِ (848) روشن است که سطرها و ستون‌ها یِ هر ماتریس به شکل ِ مشابه ی در دترمینان ِ آن ماتریس ظاهر می‌شوند.

قضیه‌ها یِ 245 تا 248 در مورد ِ نگاشت‌ها یِ خطی یی اند، که بین ِ نمایش‌ها یِ ماتریسی‌شان در پایه یِ خاص ی ارتباط ِ خاص ی هست. برا یِ اثبات ِ این قضیه‌ها، کافی است از تعریف ِ (847) استفاده کنیم و به جا یِ v_i ها اعضا یِ این پایه یِ خاص را بگذاریم.

قضیه یِ 245: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ باپایان‌بُعدی است، $T, T' \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، σ یک جای‌گشت ـِ n تایی است، و در یک پایه یِ خاص،

$$T'^{i}{}_{j} = T^{i}{}_{\sigma(j)}. \tag{856}$$

در این صورت،

$$\det(T') = \zeta_{\sigma}\ \det(T). \tag{857}$$

★

به زبان ـِ ماتریس‌ها: اگر جا یِ دو ستون ـِ یک ماتریس را با هم عوض کنید، دترمینان ـِ ماتریس در (-1) ضرب می‌شود.

■

قضیه یِ 246: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ باپایان‌بُعدی است، $T_1, T_2, T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، α^1 و α^2 اسکالر اند، و در یک پایه یِ خاص،

$$(T_1)^{i}{}_{j} = (T_2)^{i}{}_{j}, \qquad j \neq k, \tag{858}$$

و

$$T^{i}{}_{j} = \begin{cases} (T_1)^{i}{}_{j} = (T_2)^{i}{}_{j}, & j \neq k \\ \alpha^1\,(T_1)^{i}{}_{j} + \alpha^2\,(T_2)^{i}{}_{j}, & j = k \end{cases}. \tag{859}$$

در این صورت،

$$\det(T) = \alpha^1\ \det(T_1) + \alpha^2\ \det(T_2). \tag{860}$$

★

به زبان ـِ ماتریس‌ها: دترمینان ـِ هر ماتریس نسبت به هر یک از ستون‌ها یِ آن ماتریس خطی است.

قضیه یِ 247: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ باپایان‌بُعدی است، $T, T' \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و در یک پایه یِ خاص،

$$T'^{i}{}_{j} = T^{i}{}_{j} + \alpha\,\delta_{j\,k}\,T^{i}{}_{l}, \qquad k \neq l. \tag{861}$$

در این صورت،

$$\det(T') = \det(T). \tag{862}$$

★

به زبان ِ ماتریس‌ها: اگر مضرب ی از یک ی از ستون‌ها یِ یک ماتریس را به ستون ی دیگر از همان ماتریس بیفزایید، دترمینان ِ آن ماتریس عوض نمی‌شود.

قضیه یِ 248: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ باپایان‌بُعدی است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

a اگر در یک پایه، یک ترکیب ِ خطی یِ نابدیهی از ستون‌ها یِ $\mathrm{mat}(T)$ صفر باشد، آن‌گاه دترمینان ِ T صفر است.

b اگر دترمینان ِ T صفر باشد، آن‌گاه در هر پایه ای یک ترکیب ِ خطی یِ نابدیهی از ستون‌ها یِ $\mathrm{mat}(T)$ صفر است.

c اگر در یک پایه، یک ترکیب ِ خطی یِ نابدیهی از ستون‌ها یِ $\mathrm{mat}(T)$ صفر باشد، آن‌گاه در هر پایه ای یک ترکیب ِ خطی یِ نابدیهی از ستون‌ها یِ $\mathrm{mat}(T)$ صفر است.

★

با استفاده از تساوی یِ دترمینان ِ T با دترمینان ِ T^*، و ارتباط ِ عنصرها یِ ماتریسی یِ T و T^* با هم، به‌ساده‌گی دیده می‌شود که عین ِ چهارقضیه یِ بالا در مورد ِ سطرها یِ ماتریس‌ها هم برقرار است.

یک نتیجه یِ قضیه یِ 246 این است.

قضیه یِ 249: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ n بُعدی است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$\det(\alpha T) = \alpha^n \ \det(T). \tag{863}$$

★

قضیه یِ 250: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت این سه‌گزاره هم‌ارز اند.

a دترمینان ـِ T صفر است.

b T تکین است.

c $\mathbb{V}$ زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ی دارد که تصویر ـَ ش تحت ـِ T خطی‌مستقل نیست (بُعد ـِ تصویر ـَ ش کم‌تر از بُعد ـِ خود ـَ ش است).

اثبات: هم‌ارزی یِ **b** و **c** بخش ی از قضیه یِ 30 است. برا یِ اثبات ـِ هم‌ارزی یِ **a** و **b**، بُعد ـِ $\mathbb{V}$ را n، $B = \{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$، و ε را یک حجم می‌گیریم. بر اساس ـِ قضیه یِ 30؛ تکین‌بودن ـِ T با خطی‌وابسته‌بودن ـِ $T(B)$ هم‌ارز است. بر اساس ـِ قضیه یِ 237؛

$$\varepsilon(e_1, \ldots, e_n) \neq 0, \tag{864}$$

و صفر بودن ـِ $\varepsilon(T\,e_1, \ldots, T\,e_n)$ با خطی‌وابسته‌بودن ـِ $T(B)$ هم‌ارز است. حالا هم‌ارزی یِ **a** و **b** از تعریف ـِ (847) نتیجه می‌شود.

■

قضیه یِ 251: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ یک‌ریخت اند، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$، و S یک‌ریختی یی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ است. در این صورت،

$$\det(S\,T\,S^{-1}) = \det(T). \tag{865}$$

اثبات: ε را یک حجم برا یِ $\mathbb{V}$، و $B = \{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم. دترمینان ـِ T را با ε و B، و دترمینان ـِ $S\,T\,S^{-1}$ را با $[\mathrm{pf}(S)](\varepsilon)$ و $[\mathrm{pf}(S)](B)$ حساب می‌کنیم. حکم از قضیه یِ 232 نتیجه می‌شود.

■

حکم ـِ این قضیه را می‌شود چنین نوشت.

$$\det\{[\mathrm{pf}(S)](T)\} = \det(T). \tag{866}$$

قضیه یِ 252: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، و T و U دو عضو ـِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$ اند. در این صورت،

$$\det(T\,U) = \det(U\,T) = \det(T)\;\det(U). \tag{867}$$

اثبات: $\{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ خطی‌مستقل ـِ $\mathbb{V}$، و ε را یک حجم می‌گیریم. از (847) داریم

$$\begin{aligned}\det(T\,U)\,\varepsilon(e_1,\dots,e_n) &= \varepsilon(T\,U\,e_1,\dots,T\,U\,e_n),\\ &= \det(T)\,\varepsilon(U\,e_1,\dots,U\,e_n),\\ &= \det(T)\,\det(U)\,\varepsilon(e_1,\dots,e_n),\end{aligned} \tag{868}$$

که از آن حکم نتیجه می‌شود.

■

این قضیه هم به‌ساده‌گی از قضیه یِ بالا نتیجه می‌شود

قضیه یِ 253: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت،

$$\det(1_{\mathbb{V}}) = 1. \tag{869}$$

هم‌چنین اگر T در $\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، در $\mathbb{V}$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\det(T^{-1}) = [\det(T)]^{-1}. \tag{870}$$

★

قضیه یِ 254: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ـِ یک‌سان اند، $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، و $U \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{W})$. در این صورت،

a اگر بُعد ـِ $\mathbb{V}$ کوچک‌تر از بُعد ـِ $\mathbb{W}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ـِ $(T\,U)$ صفر است.

b اگر بُعد ـِ $\mathbb{V}$ با بُعد ـِ $\mathbb{W}$ برابر باشد، آن‌گاه دترمینان ـِ $(U\,T)$ با دترمینان ـِ $(T\,U)$ برابر است.

اثبات: اگر بُعد ـِ $\mathbb{V}$ کوچک‌تر از بُعد ـِ $\mathbb{W}$ باشد، آن‌گاه هسته یِ U نابدیهی است. پس هسته یِ $(T\,U)$ هم نابدیهی است. از این‌جا نتیجه می‌شود دترمینان ـِ $(T\,U)$ صفر است. این **a** را ثابت می‌کند.

برا یِ اثبات ـِ **b**، فرض کنید بُعد ـِ $\mathbb{V}$ با بُعد ـِ $\mathbb{W}$ برابر است. در این صورت یک نگاشت ـِ $S \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ هست که در $\mathbb{W}$ وارون‌پذیر است، و داریم

$$(U\,S)\in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V}),\qquad (S^{-1}\,T)\in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V}). \tag{871}$$

از این‌جا و با استفاده از قضیه یِ 252،

$$\begin{aligned}\det(U\,T) &= \det[U\,(S\,S^{-1})\,T],\\ &= \det[(U\,S^{-1})\,(S\,T)],\\ &= \det[(S\,T)\,(U\,S^{-1})],\\ &= \det[S\,(T\,U)\,S^{-1}].\end{aligned} \tag{872}$$

حالا قضیه یِ 251 نتیجه می‌دهد

$$\det(U\,T)=\det(T\,U). \tag{873}$$

■

قضیه یِ 255: فرض کنید فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}'$ و $\mathbb{V}''$ است، $\mathbb{V}'$ و $\mathbb{V}''$ زیرفضا یِ ناوردا یِ $T\in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اند، و $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}'')$ همانی است. T' را $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}')$ تعریف می‌کنیم. در این صورت،

$$\det(T)=\det(T'). \tag{874}$$

اثبات: بُعد ـِ $\mathbb{V}$ را n، و بُعد ـِ $\mathbb{V}'$ را k می‌گیریم. پایه یِ $\{e_i\mid i\}$ برا یِ $\mathbb{V}$ را چنان می‌گیریم که

$$e_i\in\begin{cases}\mathbb{V}', & i\le k\\ \mathbb{V}'', & i>k\end{cases}. \tag{875}$$

دیده می‌شود $\{e_1,\dots,e_k\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}'$ است، و

$$T^i{}_j=\begin{cases}T'^i{}_j, & i,j\le k\\ \delta^i{}_j, & j>k\\ 0, & i>k, j\le k\end{cases}. \tag{876}$$

با استفاده از قضیه یِ 244،

$$\det(T)=\sum\nolimits_{(i_1,\dots,i_n)}[i_1\cdots i_n]\,T^{i_1}{}_1\cdots T^{i_n}{}_n,$$

$$= \sum\nolimits'_{(i_1,\dots,i_k)} \sum\nolimits_{(i_{k+1},\dots,i_k)} [i_1 \cdots i_n]\, T^{i_1}{}_1 \cdots T^{i_k}{}_k\, \delta^{i_{k+1}}{}_{k+1} \cdots \delta^{i_n}{}_n,$$

$$= \sum\nolimits'_{(i_1,\dots,i_k)} [i_1 \cdots i_k]\, T'^{i_1}{}_1 \cdots T'^{i_k}{}_k,$$

$$= \det(T'). \tag{877}$$

در این‌جا نماد ِ پریم در جمع‌بندی، یعنی متغیرها یِ جمع‌بندی تا k می‌روند نَه تا n.

■

حکم ِ این قضیه به زبان ِ ماتریس‌ها این است که اگر ماتریس ِ T بلُکی‌قطری باشد، با دو بلُک ِ قطری که یک ی ماتریس ِ T' است و دیگری ماتریس ِ واحد، آن‌گاه دترمینان ِ T برابر است با دترمینان ِ T'.

قضیه یِ 256: فرض کنید فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}'$ و $\mathbb{V}''$ است، و $\mathbb{V}'$ و $\mathbb{V}''$ زیرفضا یِ ناوردا یِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اند. T' را $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}')$، و T'' را $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}'')$ تعریف می‌کنیم. در این صورت،

$$\det(T) = \det(T')\ \det(T''). \tag{878}$$

اثبات: هر بردار ِ $v \in \mathbb{V}$ را می‌شود به طور ِ یک‌تا یی به شکل ِ $v = v' + v''$ نوشت، که $v' \in \mathbb{V}'$ و $v'' \in \mathbb{V}''$. نگاشت‌ها یِ $\tilde{T}', \tilde{T}'' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \tilde{T}'\, v &:= T'\, v' + v'', \\ \tilde{T}''\, v &:= v' + T''\, v''. \end{aligned} \tag{879}$$

دیده‌می‌شود

$$T = \tilde{T}'\, \tilde{T}''. \tag{880}$$

هم‌چنین، دیده می‌شود $\mathrm{res}(\tilde{T}';\mathbb{V}')$ با T' برابر است، و $\mathrm{res}(\tilde{T}'';\mathbb{V}'')$ با T'' برابر است. $\tilde{T}'$ و $\tilde{T}''$ فرض ِ قضیه یِ 255 را بر می‌آورند. پس،

$$\begin{aligned} \det(T) &= \det(\tilde{T}'\, \tilde{T}''), \\ &= \det(\tilde{T}')\ \det(\tilde{T}''), \end{aligned}$$

$$= \det(T') \det(T''). \qquad (881)$$

■

حکم ـِ این قضیه به زبان ـِ ماتریس‌ها این است که اگر ماتریس ـِ T بلُکی‌قطری باشد، با دو بلُک ـِ قطری که یک ی ماتریس ـِ T' است و دیگری ماتریس ـِ T''، آن‌گاه دترمینان ـِ T برابر است با دترمینان ـِ T' ضرب در دترمینان ـِ T''.

قضیه یِ 257: فرض کنید فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_m$ است، $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و به ازا یِ هر l، فضا یِ $\mathbb{V}'_l := \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_l$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ T است. افکنش‌ها یِ Π_1 تا Π_m را به این شکل تعریف می‌کنیم که حاصلِ‌ضرب ـِ هر دوتا یِ متمایز ـِشان صفر است، و به ازا یِ هر i، تصویر ـِ Π_i برابر ـِ $\mathbb{V}_i$ است. به ازا یِ هر i، نگاشت ـِ $\tilde{T}_i$ را $\Pi_i\,T$، و T_i را $\mathrm{res}(\tilde{T}_i;\mathbb{V}_i)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت،

$$\det(T) = \det(T_1)\cdots\det(T_m). \qquad (882)$$

از جمله، اگر $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد و

$$\forall\, i\ :\ T\,e_i = \lambda_i\,e_i + v_{i-1}, \qquad (883)$$

که λ_i یک اسکالر است و $v_{i-1} \in \mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{i-1}\}$، آن‌گاه

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i. \qquad (884)$$

اثبات: بُعد ـِ $\mathbb{V}$ را n، و بُعد ـِ $\mathbb{V}_m$ را k می‌گیریم. $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که

$$e_i \in \begin{cases} \mathbb{V}_m, & i \le k \\ \mathbb{V}'_{m-1}, & i > k \end{cases}. \qquad (885)$$

2^k نگاشت ـِ خطی یِ $T_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$ تعریف می‌کنیم (هر یک از α_i ها صفر یا یک اند):

$$T_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\,e_i := \begin{cases} \Pi_m^{\alpha_i}\,(1-\Pi_m)^{1-\alpha_i}\,T\,e_i, & i \le k \\ T\,e_i, & i > k \end{cases}. \qquad (886)$$

با استفاده از قضیه یِ 246، دیده می‌شود

$$\det(T) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} \det(T_{\alpha_1\cdots\alpha_k}). \qquad (887)$$

فرض کنید $\alpha_j = 0$. در این صورت

$$T_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\, e_j \in \mathbb{V}'_{m-1}. \tag{888}$$

این یعنی بُعد ـِ تصویر ـِ $B' = \{e_j, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ نابزرگ‌تر از $(n-k)$ است، یا از $(n-k+1)$ (بُعد ـِ پهنه یِ B') کوچک‌تر است. در این صورت، بر اساس ـِ قضیه یِ 250 دترمینان ـِ $T_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$ صفر است. پس همه یِ جمله‌ها یِ طرف ـِ راست ـِ (887) صفر اند، جز جمله ای که همه یِ α_j ها یَش یک است. به این ترتیب،

$$\det(T) = \det(T_{1\cdots1}). \tag{889}$$

از تعریف ـِ $T_{1\cdots1}$ دیده می‌شود $\mathrm{res}(T_{1\cdots1}; \mathbb{V}'_{m-1})$ با $\mathrm{res}(T; \mathbb{V}'_{m-1})$ برابر است، و $\mathrm{res}(T_{1\cdots1}; \mathbb{V}_m)$ همان T_m است. ضمناً $\mathbb{V}'_{m-1}$ و $\mathbb{V}_m$ زیرفضاها یِ ناوردا یِ $T_{1\cdots1}$ اند. پس،

$$\begin{aligned}\det(T) &= \det(T_{1\cdots1}),\\ &= \det(T_m)\, \det(T'_{m-1}),\end{aligned} \tag{890}$$

که T'_{m-1} برابر با $\mathrm{res}(T; \mathbb{V}'_{m-1})$ است. اثبات با استقرا بر m کامل می‌شود.
■

حکم ـِ این قضیه به زبان ـِ ماتریسی این است که اگر ماتریس ـِ T بلُکی‌مثلثی باشد، آن‌گاه دترمینان ـِ T برابر است با حاصلِ‌ضرب ـِ دترمینان ـِ هر یک از بلُک‌ها یِ قطری یِ T. از جمله، اگر ماتریس ـِ T مثلثی باشد، آن‌گاه دترمینان ـِ T برابر است با حاصلِ‌ضرب ـِ عنصرها یِ قطری یِ T.

قضیه یِ 258: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ـِ یک‌سان اند، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$. در این صورت،

$$\det(T \otimes 1_{\mathbb{W}}) = \det(1_{\mathbb{W}} \otimes T) = [\det(T)]^{\dim(\mathbb{W})}. \tag{891}$$

اثبات: $\{f_1, \dots, f_n\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{W}$ می‌گیریم و تعریف می‌کنیم

$$\forall\, i \;:\; \mathbb{V}_i := \{v \otimes f_i \mid v; v \in \mathbb{V}\}. \tag{892}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ $\mathbb{V}_i$ ها است؛ به ازا یِ هر i، فضا یِ $\mathbb{V}_i$ زیرفضا یِ ناوردا یِ $T\otimes 1_{\mathbb{W}}$ است، و اگر $\mathrm{res}(T\otimes 1_{\mathbb{W}};\mathbb{V}_i)$ را با T_i نشان دهیم، آن‌گاه،

$$T_i = S_i\,T\,S_i^{-1}, \tag{893}$$

که در آن $S_i\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V}_i;\mathbb{V})$ نگاشت ی با تعریف ِ

$$\forall\, v\in\mathbb{V}\ :\ S_i\,v := v\otimes f_i \tag{894}$$

است. با استفاده از قضیه‌ها یِ 257 و 251

$$\begin{aligned}\det(T\otimes 1_{\mathbb{W}}) &= \det(T_1)\cdots\det(T_n),\\ &= [\det(T)]^n.\end{aligned} \tag{895}$$

اثبات ِ رابطه یِ مشابه برا یِ $1_{\mathbb{W}}\otimes T$ هم کاملاً مشابه است.

■

با استفاده از این قضیه می‌شود قضیه یِ کلی‌تر ی ثابت کرد:

قضیه یِ 259: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ باپایان‌بُعدی با میدان ِ یک‌سان اند، و $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $U\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{W})$. در این صورت،

$$\det(T\otimes U) = \det(U\otimes T) = [\det(T)]^{\dim(\mathbb{W})}\,[\det(U)]^{\dim(\mathbb{V})}. \tag{896}$$

اثبات: کافی است مثلاً رابطه یِ

$$T\otimes U = (T\otimes 1_{\mathbb{W}})\,(1_{\mathbb{V}}\otimes U) \tag{897}$$

را به کار ببریم. حکم به ساده‌گی نتیجه می‌شود.

■

قضیه یِ 260: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، و $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. ویژه‌مقدارها یِ T را با λ_i، و به ازا یِ هر i بُعد ِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ_i را با n_i نشان می‌دهیم. در این صورت،

$$\det(T) = \prod_i \lambda_i^{n_i}. \tag{898}$$

اثبات: کافی است T را به شکل ِ ژُردَن (قضیه یِ 94) بنویسیم و (884) (قضیه یِ 257) را به کار ببریم.

■

xlix نگاشت ِ الحاقی، نگاشت ِ وارون

قضیه یِ 261: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی، ε یک حجم رو یِ $\mathbb{V}$، و T یک نگاشت ِ خطی از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{V}$ است. در این صورت $[\mathrm{adj}(T)] \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ با تعریف ِ

$$\forall\, v \in \mathbb{V}\ :\ [\mathrm{adj}(T)](v) := \mathcal{Q}_\varepsilon^{-1}\{(T^*)^{\otimes(n-1)}[\mathcal{Q}_\varepsilon(v)]\}, \tag{899}$$

خوش‌تعریف است و به حجم ِ ε هم بسته‌گی ندارد.

اثبات: ابتدا توجه می‌کنیم که

$$(T^*)^{\otimes(n-1)}[\mathcal{Q}_\varepsilon(v)] \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge(n-1)}. \tag{900}$$

پس طرف ِ راست ِ (899) در $\mathbb{V}$ است. این نشان می‌دهد $\mathrm{adj}(T)$ خوش‌تعریف است. اگر ε' یک حجم ِ دیگر باشد، آن‌گاه اسکالر ِ ناصفر ی مثل ِ α هست که

$$\varepsilon' = \alpha\,\varepsilon, \tag{901}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\varepsilon'} &= \alpha\,\mathcal{Q}_\varepsilon,\\ \mathcal{Q}_{\varepsilon'}^{-1} &= \alpha^{-1}\,\mathcal{Q}_\varepsilon^{-1}. \end{aligned} \tag{902}$$

پس در تعریف ِ $\mathrm{adj}(T)$ با ε'، اسکالر ِ α حذف می‌شود.

■

پس $\mathrm{adj}(T)$ فقط به خود ِ T بسته‌گی دارد. به نگاشت ِ خطی یِ $\mathrm{adj}(T)$ با تعریف ِ (899)، الحاقی یِ T می‌گوییم.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 262: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ یک‌بُعدی است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$\operatorname{adj}(T) = 1. \tag{903}$$

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 263: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت،

$$\operatorname{adj}(1_{\mathbb{V}}) = 1_{\mathbb{V}}. \tag{904}$$

★

قضیه یِ 264: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، و $S, T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$\operatorname{adj}(T\,S) = \operatorname{adj}(S)\ \operatorname{adj}(T). \tag{905}$$

اثبات: بُعد ِ $\mathbb{V}$ را n می‌گیریم. از (899) داریم

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(T\,S) &= \mathcal{Q}^{-1}\,[(T\,S)^*]^{\otimes(n-1)}\,\mathcal{Q},\\
&= \mathcal{Q}^{-1}\,(S^*\,T^*)^{\otimes(n-1)}\,\mathcal{Q},\\
&= \mathcal{Q}^{-1}\,(S^*)^{\otimes(n-1)}\,(T^*)^{\otimes(n-1)}\,\mathcal{Q},\\
&= \mathcal{Q}^{-1}\,(S^*)^{\otimes(n-1)}\,\mathcal{Q}\,\mathcal{Q}^{-1}\,(T^*)^{\otimes(n-1)}\,\mathcal{Q},\\
&= \operatorname{adj}(S)\ \operatorname{adj}(T).
\end{aligned} \tag{906}$$

■

قضیه یِ 265: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان بُعدی است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$[\operatorname{adj}(T)]\,T = T\,[\operatorname{adj}(T)] = \det(T)\,1_{\mathbb{V}}. \tag{907}$$

هم‌چنین، اگر $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}[\mathrm{adj}(T)]^i{}_j &= \frac{1}{(n-1)!}\,\varepsilon_{j\,j_2\cdots j_n}\,\tilde{\varepsilon}^{i\,i_2\cdots i_n}\,T^{j_2}{}_{i_2}\cdots T^{j_n}{}_{i_n},\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\sum\nolimits_{(i_2,\dots,i_n,j_2,\dots,j_n)}[j\,j_2\cdots j_n]\,[i\,i_2\cdots i_n]\,T^{j_2}{}_{i_2}\cdots T^{j_n}{}_{i_n}.\end{aligned} \tag{908}$$

که در آن n بُعد ِ $\mathbb{V}$، و $\tilde{\varepsilon}$ دوگان ِ ε است.

اثبات: بردار ِ دل‌بخواه ِ $v\in\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}[\mathrm{adj}(T)]v &= v^j\,\mathcal{Q}^{-1}\left[(T^*)^{\otimes(n-1)}\,\frac{1}{(n-1)!}\,\varepsilon_{j\,j_2\cdots j_n}\,e^{j_2}\wedge\cdots\wedge e^{j_n}\right],\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\,\varepsilon_{j\,j_2\cdots j_n}\,T^{j_2}{}_{i_2}\cdots T^{j_n}{}_{i_n}\,v^j\,\mathcal{Q}^{-1}(e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_n}),\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\,\varepsilon_{j\,j_2\cdots j_n}\,T^{j_2}{}_{i_2}\cdots T^{j_n}{}_{i_n}\,v^j\,\tilde{\varepsilon}^{i\,i_2\cdots i_n}\,e_i.\end{aligned} \tag{909}$$

این (908) را نشان می‌دهد. با استفاده از آن داریم

$$\begin{aligned}\{[\mathrm{adj}(T)]\,T\}^i{}_j &= \{[\mathrm{adj}(T)]\}^i{}_k\,T^k{}_j,\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\,\varepsilon_{k\,j_2\cdots j_n}\,T^{j_2}{}_{i_2}\cdots T^{j_n}{}_{i_n}\;\tilde{\varepsilon}^{i\,i_2\cdots i_n}\,T^k{}_j,\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\;\det(T)\,\varepsilon_{j\,i_2\cdots i_n}\,\varepsilon^{i\,i_2\cdots i_n},\\ &= \det(T)\,\delta^i_j.\end{aligned} \tag{910}$$

به همین ترتیب،

$$\{T\,[\mathrm{adj}(T)]\}^i{}_j = \det(T)\,\delta^i_j. \tag{911}$$

■

یک نتیجه یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 266: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت اگر T وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $\mathrm{adj}(T)$ هم وارون‌پذیر است،

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)}\ \mathrm{adj}(T), \tag{912}$$

و

$$[\mathrm{adj}(T)]^{-1} = \mathrm{adj}(T^{-1}),$$

$$= \frac{1}{\det(T)}\, T. \tag{913}$$

اگر T تکین باشد و بُعد ِ $\mathbb{V}$ هم بزرگ‌تر از 1 باشد، آن‌گاه $\mathrm{adj}(T)$ هم تکین است.

اثبات: قسمت ِ اول حکم، نتیجه یِ مستقیم ِ قضیه یِ 265 است. برا یِ اثبات ِ قسمت ِ دوم، فرض کنید T تکین است و $\mathrm{adj}(T)$ وارون‌پذیر است. در این صورت از (907) نتیجه می‌شود T صفر است، و چون بُعد ِ $\mathbb{V}$ بیش از 1 است، $\mathrm{adj}(T)$ هم صفر می‌شود، که خلاف ِ فرض ِ تکین‌نبودن ِ $\mathrm{adj}(T)$ است.

■

با استفاده از (908)، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 267: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی باشد و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، آن‌گاه

$$\mathrm{adj}(T^*) = [\mathrm{adj}(T)]^*. \tag{914}$$

★

قضیه یِ 268: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و S یک‌ریختی یی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت،

$$\mathrm{adj}(S\,T\,S^{-1}) = S\,[\mathrm{adj}(T)]\,S^{-1}. \tag{915}$$

اثبات: $\mathrm{adj}(T)$ را با استفاده از رابطه یِ (908) و یک پایه یِ B برا یِ $\mathbb{V}$، و $\mathrm{adj}(S\,T\,S^{-1})$ را با استفاده از رابطه یِ (908) و پایه یِ $B' = S(B)$ حساب می‌کنیم. دیده می‌شود

$$[\mathrm{adj}(S\,T\,S^{-1})]^{i'}{}_{j'} = [\mathrm{adj}(T)]^{i}{}_{j}, \tag{916}$$

که حکم را نتیجه می‌دهد.

■

حکم ـِ این قضیه یعنی الحاقی یِ تبدیلِ‌تشابهی‌یافته یِ یک نگاشت ـِ خطی، برابر است با تبدیلِ‌تشابهی‌یافته یِ الحاقی یِ آن نگاشت ـِ خطی.

قضیه یِ 269: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه اَش است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت

$$\begin{aligned}[\mathrm{adj}(T)]^{i}{}_{j} &= \det(T'^{i}{}_{j}),\\ &= (-1)^{i+j}\,\det(T''^{i}{}_{j}).\end{aligned} \tag{917}$$

$T'^{i}{}_{j}$ ماتریس ی است که

$$(T'^{i}{}_{j})^{k}{}_{l} := \begin{cases} T^{k}{}_{l}, & k\neq j, l\neq i\\ 0, & k\neq j, l=i\\ 0, & k=j, l\neq i\\ 1, & k=j, l=i\end{cases}, \tag{918}$$

و $T''^{i}{}_{j}$ ماتریس ی است که یک سطر و ستون کم‌تر دارد و

$$(T''^{i}{}_{j})^{k}{}_{l} := (T'^{i}{}_{j})^{\alpha(k)}{}_{\beta(l)}, \tag{919}$$

که

$$\alpha(k) := \begin{cases} k, & k<j\\ k+1, & k>j\end{cases}, \tag{920}$$

و

$$\beta(l) := \begin{cases} l, & l<i\\ l+1, & l>i\end{cases}. \tag{921}$$

اثبات: با استفاده از (908) داریم

$$[\mathrm{adj}(T)]^{i}{}_{j} = \frac{1}{(n-1)!}\sum\nolimits_{(i_2,\dots,i_n,j_2,\dots,j_n)} [j\,j_2\cdots j_n]\,[i\,i_2\cdots i_n]\,T^{j_2}{}_{i_2}\cdots T^{j_n}{}_{i_n},$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum\nolimits_{(i_2,\dots,i_n,j_2,\dots,j_n)} [j\, j_2 \cdots j_n]\, [i\, i_2 \cdots i_n]$$

$$\times (T'^i{}_j)^{j_2}{}_{i_2} \cdots (T'^i{}_j)^{j_n}{}_{i_n},$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum\nolimits_{(i_2,\dots,i_n,j_2,\dots,j_n)} [j\, j_2 \cdots j_n]\, [i\, i_2 \cdots i_n]$$

$$\times (T'^i{}_j)^{j_2}{}_{i_2} \cdots (T'^i{}_j)^{j_n}{}_{i_n}\, (T'^i{}_j)^j{}_i,$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum\nolimits_{(i_2,\dots,i_n,k,j_2,\dots,j_n)} [k\, j_2 \cdots j_n]\, [i\, i_2 \cdots i_n]$$

$$\times (T'^i{}_j)^{j_2}{}_{i_2} \cdots (T'^i{}_j)^{j_n}{}_{i_n}\, (T'^i{}_j)^k{}_i,$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\, \det(T'^i{}_j) \sum\nolimits_{(i_2,\dots,i_n)} [i\, i_2 \cdots i_n]\, [i\, i_2 \cdots i_n],$$

$$= \det(T'^i{}_j). \tag{922}$$

برا یِ نشان‌دادن ِ $\det(T''^i{}_j) = \det(T'^i{}_j)$، ماتریس ِ $T'''^i{}_j$ با

$$(T'''^i{}_j)^k{}_l := (T'^i{}_j)^{\tau(k)}{}_{\sigma(l)} \tag{923}$$

را در نظر بگیرید که σ و τ دو جای‌گشت ِ n تایی اند (n بُعد ِ $\mathbb{V}$ است) با

$$\tau := \sigma_j \cdots \sigma_{n-1}, \tag{924}$$

و

$$\sigma := \sigma_i \cdots \sigma_{n-1}. \tag{925}$$

دیده می‌شود

$$\tau(k) = \begin{cases} \alpha(k), & k < n \\ j, & k = n \end{cases}, \tag{926}$$

و

$$\sigma(l) = \begin{cases} \beta(l), & l < n \\ i, & k = n \end{cases}. \tag{927}$$

پس،

$$(T'''^{i}{}_{j})^{k}{}_{l} = \begin{cases} (T''^{i}{}_{j})^{k}{}_{l}, & k < n, l < n \\ 0, & k < n, l = n \\ 0, & k = n, l < n \\ 1, & k = n, l = n \end{cases}. \tag{928}$$

از قضیه یِ 256 نتیجه می‌شود

$$\det(T''^{i}{}_{j}) = \det(T'''^{i}{}_{j}), \tag{929}$$

و از قضیه یِ 245 نتیجه می‌شود

$$\det(T'''^{i}{}_{j}) = (-1)^{i+j}\, \det(T'^{i}{}_{j}), \tag{930}$$

که باقی‌مانده یِ حکم را نشان می‌دهد.

■

این قضیه می‌گوید عنصر ِ سطر ِ i ُم و ستون ِ j ُم ِ $\mathrm{adj}(T)$، برابر است با $(-1)^{i+j}$ ضرب در دترمینان ِ ماتریس ی که با حذف ِ سطر ِ j ُم و ستون ِ i ُم ِ T به دست می‌آید. هم‌چنین، عنصر ِ سطر ِ i ُم و ستون ِ j ُم ِ $\mathrm{adj}(T)$، برابر است با دترمینان ِ ماتریس ی که به این ترتیب از ماتریس ِ T به دست می‌آید: با ماتریس ِ T شروع کنید؛ اعضا یِ ستون ِ i ُم این ماتریس را صفر کنید؛ اعضا یِ سطر ِ j ُم ماتریس ِ حاصل را صفر کنید؛ عضو ِ سطر ِ j ُم و ستون ِ i ُم ِ ماتریس ِ حاصل را 1 کنید.

از قضیه‌ها یِ 265 و 269، یک دستور برا یِ محاسبه یِ $\det(T)$ به دست می‌آید:

قضیه یِ 270: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$\det(T) = T^{i}{}_{1}\,[\mathrm{adj}(T)]^{1}{}_{i} = T^{i}{}_{2}\,[\mathrm{adj}(T)]^{2}{}_{i} = \cdots, \tag{931}$$

و

$$\det(T) = T^{1}{}_{i}\,[\mathrm{adj}(T)]^{i}{}_{1} = T^{2}{}_{i}\,[\mathrm{adj}(T)]^{i}{}_{2} = \cdots. \tag{932}$$

★

به (931) بسط ـِ دترمینان بر حسب ـِ ستون ـِ اول (یا دوم یا ...)، و به (932) بسط ـِ دترمینان بر حسب ـِ سطر ـِ اول (یا دوم یا ...) می‌گویند. با توجه به قضیه یِ 269، بسط ـِ دترمینان ـِ T بر حسب ـِ سطر ـِ i ُم چنین است:

a سطر ـِ i ُم و ستون ـِ j ُم ـِ ماتریس را حذف می‌کنیم.

b دترمینان ـِ ماتریس ـِ حاصل را حساب می‌کنیم.

c حاصل ـِ **b** را در $(-1)^{i+j}$ ضرب می‌کنیم.

d حاصل ـِ **c** را در ${T^i}_j$ ضرب می‌کنیم.

e کارها یِ **a** تا **d** را برا یِ همه یِ j ها تکرار می‌کنیم.

f حاصل ـِ **d** برا یِ همه یِ j ها را با هم جمع می‌کنیم. حاصل $\det(T)$ است.

قضیه یِ 271: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$، و $v \in \ker(T)$ ناصفر است. در این صورت

$$\text{img}[\text{adj}(T)] \sqsubseteq \text{span}(v). \tag{933}$$

اثبات: $\{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم، که

$$e_1 = v. \tag{934}$$

دیده می‌شود

$${T^i}_1 = 0. \tag{935}$$

به این ترتیب، ستون ـِ اول ـِ ماتریس ـِ ${T'^i}_j$ در قضیه یِ 269 صفر است، مگر $i = 1$. از این‌جا،

$$[\text{adj}(T)]^i{}_j = 0, \qquad i \neq 1, \tag{936}$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

یک نتیجه یِ این قضیه این است.

قضیه ی 272: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و بُعد ِ هسته یِ T دستِ‌کم 2 است. در این صورت الحاقی یِ T صفر است.

★

قضیه یِ 273: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان بُعدی است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$\det[\mathrm{adj}(T)] = [\det(T)]^{\dim(\mathbb{V})-1}. \tag{937}$$

اثبات: اگر T وارون‌پذیر باشد، رابطه یِ بالا نتیجه یِ قضیه یِ 265 است. اگر $\dim(\mathbb{V}) = 1$، رابطه یِ بالا نتیجه یِ قضیه یِ 262 است. فرض کنید T وارون‌پذیر نیست، و $\dim(\mathbb{V}) > 1$. در این حالت $\mathrm{adj}(T)$ هم وارون‌پذیر نیست، و دوطرف ِ رابطه یِ بالا برابر اند.

■

قضیه یِ 274: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان بُعدی با بُعد ِ بیش از 1 است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$\mathrm{adj}[\mathrm{adj}(T)] = [\det(T)]^{\dim(\mathbb{V})-2}\, T. \tag{938}$$

اثبات: حالت ِ $\dim(\mathbb{V}) = 2$ را می‌شود مستقیماً تحقیق کرد. در حالت ِ $\dim(\mathbb{V}) > 2$، اگر T وارون‌پذیر باشد، حکم از رابطه یِ (907) و قضیه یِ 266 نتیجه می‌شود. اگر T وارون‌پذیر نباشد، آن‌گاه بُعد ِ هسته یِ $\mathrm{adj}(T)$ دستِ‌کم $[\dim(\mathbb{V}) - 1]$ است. چون $\dim(\mathbb{V}) > 2$، پس بُعد ِ هسته یِ $\mathrm{adj}(T)$ دستِ‌کم 2 است. بنابراین $\mathrm{adj}[\mathrm{adj}(T)]$ صفر است و در این حالت هم حکم برقرار است.

■

قضیه یِ 275: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ِ یک‌سان اند، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$\begin{aligned}
\mathrm{adj}(T \otimes 1_{\mathbb{W}}) &= [\det(T)]^{\dim(\mathbb{W})-1}\,[\mathrm{adj}(T)] \otimes 1_{\mathbb{W}},\\
\mathrm{adj}(1_{\mathbb{W}} \otimes T) &= [\det(T)]^{\dim(\mathbb{W})-1}\,1_{\mathbb{W}} \otimes [\mathrm{adj}(T)].
\end{aligned} \tag{939}$$

اثبات: اگر $\mathbb{W}$ یک‌بُعدی باشد، حکم بدیهی است. در حالت ی که T وارون‌پذیر است، رابطه یِ بالا از (907) نتیجه می‌شود. اگر بُعد ـ $\mathbb{W}$ بیش از یک، و T تکین باشد، آن‌گاه بُعد ـ هسته یِ $T \otimes 1_{\mathbb{W}}$ و هسته یِ $1_{\mathbb{W}} \otimes T$، بیش از 1 است. پس بر اساس ـ قضیه یِ 272، طرف‌ها یِ چپ در رابطه‌ها یِ بالا صفر اند و تساوی‌ها برقرار اند.

■

با ترکیب ـ این قضیه و قضیه یِ 264، نتیجه می‌شود

قضیه یِ 276: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ـ یک‌سان اند، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $U \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{W})$. در این صورت،

$$\mathrm{adj}(T\otimes U) = [\det(T)]^{\dim(\mathbb{W})-1}\,[\det(U)]^{\dim(\mathbb{V})-1}\,[\mathrm{adj}(T)]\otimes[\mathrm{adj}(U)]. \qquad (940)$$

★

قضیه یِ 277: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{V}'$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ T است. در این صورت $\mathbb{V}'$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathrm{adj}(T)$ است. Π را افکنش ی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم، که هسته اَش $\mathbb{V}'$ است. T' را $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}')$، T'' را $\mathrm{res}[\Pi\,T;\mathrm{img}(\Pi)]$، و $[\mathrm{adj}(T)]'$ را $\mathrm{res}[\mathrm{adj}(T);\mathbb{V}']$ **تعریف** می‌کنیم. در این صورت،

$$[\mathrm{adj}(T)]' = \det(T'')\;\mathrm{adj}(T'). \qquad (941)$$

اثبات: بُعد ـ $\mathbb{V}$ را n و بُعد ـ $\mathbb{V}'$ را k می‌گیریم. $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که $\{e_1,\dots,e_k\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}'$ باشد. دیده می‌شود

$$T^i{}_j = 0, \qquad i>k, j\le k. \qquad (942)$$

ماتریس ـ $T'^i{}_j$ در قضیه یِ 269 را در نظر بگیرید. دیده می‌شود برا یِ $i>k, j\le k$، این ماتریس بلُکی‌بالامثلثی است (با همان بلُک‌ها یِ T). پس دترمینان ـ آن برابر است با حاصلِ‌ضرب ـ دترمینان ـ بلک‌ها یِ قطری یَش. دترمینان ـ بلُک ـ متناظر با $\mathbb{V}'$ (k سطر و k ستون ـ اول) صفر است، چون سطر ـ j ُم ـ این بلُک صفر است. از این‌جا،

$$[\mathrm{adj}(T)]^i{}_j = 0, \qquad i>k, j\le k. \qquad (943)$$

این نشان می‌دهد $\mathbb{V}'$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathrm{adj}(T)$ است. برا یِ نشان‌دادن ـِ (941)، این بار B را پایه ای می‌گیریم که علاوه بر آن که $\{e_1, \dots, e_k\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}'$ باشد، $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ هم یک پایه یِ تصویر ـِ Π باشد. در این صورت نمایش ـِ ماتریسی یِ T بلُکی‌قطری، بلُک ـِ قطری یِ اول نمایش ـِ ماتریسی یِ T'، و بلُک ـِ قطری یِ دوم نمایش ـِ ماتریسی یِ T'' است. حالا با استفاده از قضیه‌ها یِ 269 و 257، دیده می‌شود

$$[\mathrm{adj}(T)]^i{}_j = \det(T'')\,[\mathrm{adj}(T')]^i{}_j, \qquad i, j \le k, \tag{944}$$

که همان (941) است.

■

با استفاده از این قضیه و با یک استقرا یِ ساده، نتیجه می‌شود

قضیه یِ 278: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی و برابر با حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ زیرفضاها یِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_m$ است، و به ازا یِ هر i زیرفضا یِ $\mathbb{V}_i$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ است. در این صورت به ازا یِ هر i، زیرفضا یِ $\mathbb{V}_i$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathrm{adj}(T)$ است و

$$[\mathrm{adj}(T)]_i = \left[\prod_{j \ne i} \det(T_j)\right] \mathrm{adj}(T_i), \tag{945}$$

که در آن به ازا یِ هر i، T_i برابر با $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}_i)$ و $[\mathrm{adj}(T)]_i$ برابر با $\mathrm{res}[\mathrm{adj}(T),\mathbb{V}_i]$ است.

★

1 دترمینان و چندجمله‌ای یِ مشخصه یِ یک نگاشت ـِ خطی

قضیه یِ 279: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت λ یک ویژه‌مقدار ـِ T است، اگر و تنها اگر

$$\det(\lambda\,1 - T) = 0. \tag{946}$$

هم‌چنین، λ یک ویژه‌مقدار ـِ T است اگر و تنها اگر λ یک ویژه‌مقدار ـِ T^* باشد.

اثبات: λ یک ویژه‌مقدار ـِ T است، اگر و تنها اگر $(T - \lambda\,1)$ تکین باشد. $(\lambda\,1 - T)$ هم تکین است، اگر و تنها اگر (946) برقرار باشد (قضیه یِ 250). ضمناً داریم

$$\det(\lambda\, 1_{\mathbb{V}^*} - T^*) = \det(\lambda\, 1_{\mathbb{V}} - T), \tag{947}$$

که نشان می‌دهد ویژه‌مقدارها ی ِ T^* و T یک‌سان اند.

■

قضیه ی ِ 280: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی ِ خطی ی ِ باپایان‌بُعدی، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در این صورت،

$$\det(z\,1 - T) = C_T(z). \tag{948}$$

اثبات: T را به شکل ِ ژُردَن (قضیه ی ِ 94) می‌نویسیم و (884) (قضیه ی ِ 257) را به کار می‌بریم. نتیجه می‌شود

$$\det(z\,1 - T) = \prod_i (z - \lambda_i)^{n_i}, \tag{949}$$

که λ_i ها ویژه‌مقدارها ی ِ T اند، و به ازا ی ِ هر i بُعد ِ ویژه‌فضا ی ِ تعمیم‌یافته ی ِ متناظر با λ_i برابر است با n_i. طرف ِ راست ِ رابطه ی ِ بالا همان چندجمله‌ای ی ِ مشخصه ی ِ T است.

■

در بخش ِ xviii چندجمله‌ای ی ِ مشخصه ی ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را برا ی ِ حالت ی تعریف کردیم که $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد. قضیه ی ِ 280 تعمیم ی برا ی ِ تعریف ِ چندجمله‌ای ی ِ مشخصه پیش می‌نهد، که در آن لزوم ی ندارد T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر باشد (البته هم‌چنان لازم است $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد).

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی ِ خطی ی ِ باپایان‌بُعدی است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. C_T (چندجمله‌ای ی ِ مشخصه ی ِ T) را چنین تعریف می‌کنیم.

$$C_T(z) := \det(z\,1 - T). \tag{950}$$

قضیه ی ِ 280 می‌گوید در حالت ی ِ که تعریف ِ چندجمله‌ای ی ِ مشخصه به شکل ِ (196) ممکن باشد، تعریف ِ (950) با تعریف ِ (196) یک‌سان است. به همین علت، از این پس تعریف ِ کلی‌تر ِ (950) را برا ی ِ چندجمله‌ای ی ِ مشخصه به کار می‌بریم.

قضیه ی ِ 281: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی ِ باپایان‌بُعدی است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت T معادله ی ِ مشخصه ی ِ چندجمله‌ای را بر می‌آورد:

$$C_T(T) = 0. \qquad (951)$$

اثبات: $B = \{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم. از قضیه یِ 265 داریم

$$[\mathrm{adj}(z\,1 - T)]^k{}_j\,(z\,1 - T)^i{}_k = \det(z\,1 - T)\,\delta^i{}_j, \qquad (952)$$

یا

$$M^k{}_j(z)\,(z\,\delta^i{}_k - T^i{}_k) = C_T(z)\,\delta^i{}_j, \qquad (953)$$

که در آن هر یک از $M^k{}_j$ ها یک چندجمله‌ای است:

$$M^k{}_j(z) := [\mathrm{adj}(z\,1 - T)]^k{}_j. \qquad (954)$$

از (953) نتیجه می‌شود

$$M^k{}_j(T)\,(T\,\delta^i{}_k - T^i{}_k\,1) = C_T(T)\,\delta^i{}_j. \qquad (955)$$

با استفاده از این رابطه،

$$\begin{aligned} C_T(T)\,e_j &= C_T(T)\,\delta^i{}_j\,e_i, \\ &= M^k{}_j(T)\,(T\,e_k - T^i{}_k\,e_i), \\ &= 0. \end{aligned} \qquad (956)$$

این یعنی اثر ِ نگاشت ِ خطی یِ $C_T(T)$ بر هر یک از اعضا یِ B صفر است، پس خود ِ $C_T(T)$ صفر است.

■

به این قضیه، قضیه یِ کِیلی‌ـ هَمیلتِن می‌گویند. به ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 282: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ n بُعدی است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت درجه یِ چندجمله‌ای یِ مشخصه یِ T برابر با n است. ضمناً

$$C_{T^*} = C_T. \qquad (957)$$

★

قضیه ی ِ 283: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی ِ خطی ی ِ n بُعدی است و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت T پوچ‌توان است، اگر و تنها اگر $C_T(z) = z^n$.

اثبات: اگر $C_T(z) = z^n$، آن‌گاه $T^n = 0$، یعنی T پوچ‌توان است. اگر T پوچ‌توان باشد، آن‌گاه T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است، و چون تنهاویژه‌مقدار ِش صفر است، $C_T(z) = z^n$.

■

قضیه ی ِ 284: فرض کنید فضا ی ِ خطی ی ِ باپایان‌بُعدی ی ِ $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ زیرفضاها ی ِ $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_m$ است، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و به ازا ی ِ هر l، فضا ی ِ $\mathbb{V}'_l := \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_l$ یک زیرفضا ی ِ ناوردا ی ِ T است. افکنش‌ها ی ِ Π_1 تا Π_m را به این شکل تعریف می‌کنیم که حاصلِ‌ضرب ِ هر دوتا ی ِ متمایز ِشان صفر است، و به ازا ی ِ هر i، تصویر ِ Π_i برابر ِ $\mathbb{V}_i$ است. به ازا ی ِ هر i، نگاشت ِ $\tilde{T}_i$ را $\Pi_i\, T$، و T_i را $\operatorname{res}(\tilde{T}_i;\mathbb{V}_i)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت،

$$C_T = C_{T_1} \cdots C_{T_m}, \tag{958}$$

که از آن نتیجه می‌شود مجموعه ی ِ ویژه‌مقدارها ی ِ T اجتماع ِ مجموعه ی ِ ویژه‌مقدارها ی ِ T_i ها است.

از جمله، اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه ی ِ $\mathbb{V}$ باشد و

$$\forall\, i \;:\; T\, e_i = \lambda_i\, e_i + v_{i-1}, \tag{959}$$

که λ_i یک اسکالر است و $v_{i-1} \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$، آن‌گاه

$$C_T(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i), \tag{960}$$

که از آن نتیجه می‌شود ویژه‌مقدارها ی ِ T همان λ_i ها هستند.

اثبات: کافی است قضیه ی ِ 257 را برا ی ِ نگاشت ِ $(z\,1 - T)$ به کار ببریم.

■

قضیه ی ِ 285: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی ِ خطی ی ِ باپایان‌بُعدی است، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و λ یک ریشه ی ِ m گانه ی ِ C_T است. در این صورت بُعد ِ ویژه‌فضا ی ِ تعمیم‌یافته ی ِ T متناظر با λ، برابر ِ m است.

اثبات: داریم

$$C_T(z) = (z-\lambda)^m\, P(z), \tag{961}$$

که P یک چندجمله‌ای است و $P(\lambda) \neq 0$. چون $C_T(T) = 0$، از قضیه یِ 65 نتیجه می‌شود

$$\mathbb{V} = \ker[(T-\lambda)^m] \oplus \ker[P(T)], \tag{962}$$

و این که $\ker[(T-\lambda)^m]$ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ است. $\mathrm{res}\{T; \ker[(T-\lambda)^m]\}$ را T_1، و $\mathrm{res}\{T; \ker[P(T)]\}$ را T_2 می‌نامیم. از قضیه یِ 284 نتیجه می‌شود

$$C_T(z) = C_{T_1}(z)\, C_{T_2}(z). \tag{963}$$

$(T_1 - \lambda)$ پوچ‌توان است. پس

$$C_{T_1}(z) = (z-\lambda)^{m'}, \tag{964}$$

که m' بُعد ـِ $\ker[(T-\lambda)^m]$ است. $(T_2 - \lambda)$ ناتکین است، پس $C_{T_2}(\lambda) \neq 0$. از این‌جا نتیجه می‌شود λ یک ریشه یِ m' گانه یِ C_T است. پس $m' = m$، یعنی

$$\dim\{\ker[(T-\lambda)^m]\} = m. \tag{965}$$

■

سرانجام، از قضیه‌ها یِ 281 و 77 نتیجه می‌شود

قضیه یِ 286: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت T چندجمله‌ای یِ کمین دارد، و درجه یِ M_T نابزرگ‌تر از بُعد ـِ $\mathbb{V}$ است.

★

li دترمینان و رتبه یِ یک نگاشت ـِ خطی

به هر ماتریس، که با حذف ـِ تعداد ی از ستون‌ها یا سطرها یِ ماتریس ـِ T به دست آید، یک زیرماتریس ـِ T می‌گویند.

قضیه یِ 287: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند، بُعد ِ $\mathbb{V}$ برابر ِ m و بُعد ِ $\mathbb{W}$ برابر ِ n است (m و n باپایان اند)، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$. در این صورت،

a اگر T یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه نمایش ِ ماتریسی یِ T در هر پایه ای یک زیرماتریس ِ $m \times m$ دارد که دترمینان ‑َش ناصفر است.

b اگر نمایش ِ ماتریسی یِ T در یک پایه، یک زیرماتریس ِ $m \times m$ با دترمینان ِ ناصفر داشته باشد، آن‌گاه T یک‌به‌یک است.

اثبات: فرض کنید T یک‌به‌یک است. در این صورت $\mathrm{rank}(T)$ برابر ِ m است، و از قضیه یِ 123 نتیجه می‌شود $\mathrm{rank}(T^*)$ هم برابر ِ m است. پس اگر $B^* = \{f^a \mid a\}$ یک پایه یِ $\mathbb{W}^*$ باشد، بُعد ِ $\mathrm{span}[T^*(B^*)]$ برابر ِ m است. از این‌جا معلوم می‌شود یک زیرمجموعه یِ m عضوی یِ B^*_m از B^* هست، که $T^*(B^*_m)$ خطی‌مستقل است. هر یک از ستون‌ها یِ نمایش ِ ماتریسی یِ T^*، نمایش ِ ماتریسی یِ یک ی از $T^*\, f^a$ ها است. از نمایش ِ ماتریسی یِ T^*، ستون ِ a را حذف می‌کنیم، اگر و تنها اگر f^a در B^*_m نباشد. باقی‌مانده یک ماتریس ِ $m \times m$ است، که دترمینان ‑َش ناصفر است. اما این یعنی اگر از نمایش ِ ماتریسی یِ T، سطرها یِ متناظر با این ستون‌ها یِ حذف‌شده را کنار بگذاریم، یک ماتریس ِ $m \times m$ به دست می آید که دترمینان ‑َش ناصفر است.

برعکس، اگر یک نمایش ِ ماتریسی یِ T، یک زیرماتریس ِ $m \times m$ با دترمینان ِ ناصفر داشته باشد، آن‌گاه دترمینان ِ زیرماتریس ِ متناظر در نمایش ِ ماتریسی یِ T^* هم ناصفر است. این نتیجه می‌دهد m تا از ستون‌ها یِ نمایش ِ ماتریسی یِ T^*، نمایش ِ ماتریسی یِ m بردار اند که مجموعه یِشان خطی‌مستقل است. پس T^* در $\mathbb{V}^*$ پوشا است. در نتیجه $\mathrm{rank}(T)$ برابر ِ m است، که یعنی T یک‌به‌یک است.

■

قضیه یِ 288: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی با میدان ِ یک‌سان اند، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$. در این صورت،

a اگر نمایش ِ ماتریسی یِ T در یک پایه، یک زیرماتریس ِ $m \times m$ با دترمینان ِ ناصفر داشته باشد، آن‌گاه رتبه یِ T ناکوچک‌تر از m است.

b اگر رتبه یِ T برابر ِ m باشد، آن‌گاه نمایش ِ ماتریسی یِ T در هر پایه ای یک زیرماتریس ِ $m \times m$ با دترمینان ِ ناصفر دارد.

اثبات: فرض کنید نمایش ـِ ماتریسی یِ T در پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ برا یِ $\mathbb{V}$، یک زیرماتریس ـِ $m \times m$ دارد که دترمینان ـَش ناصفر است. این زیرماتریس شامل ـِ ستون‌ها یِ i_1 تا i_m ـِ نمایش ـِ ماتریسی یِ T است (که البته ممکن است بعض ی از سطرها یِ نمایش ـِ ماتریسی یِ T هم از آن حذف شده باشند). بر اساس ـِ قضیه یِ 287، $\mathrm{res}(T; \mathrm{span}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\})$ یک‌به‌یک است. پس رتبه یِ $\mathrm{res}(T; \mathrm{span}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\})$ برابر ـِ m است. از این‌جا نتیجه می‌شود رتبه یِ T ناکوچک‌تر از m است.

فرض کنید رتبه یِ T برابر ـِ m است. $B = \{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ دل‌بخواه ـِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم. بُعد ـِ $\mathrm{span}[T(B)]$ برابر ـِ m است. پس B شامل ـِ یک زیرمجموعه یِ m عضوی یِ B_m است، که $T(B_m)$ خطی‌مستقل است. از این‌جا نتیجه می‌شود $\mathrm{res}(T; B_m)$ یک‌به‌یک است. پس نمایش ـِ ماتریسی یِ $\mathrm{res}(T; B_m)$، یک زیرماتریس ـِ $m \times m$ دارد که دترمینان ـَش ناصفر است. این زیرماتریس، یک زیرماتریس ـِ نمایش ـِ ماتریسی یِ T هم هست.

■

قضیه یِ بالا را می‌شود این طور بیان کرد. رتبه یِ T برابر است با تعداد ـِ سطرها (یا ستون‌ها) یِ بزرگ‌ترین زیرماتریس ـِ مربعی یِ بادترمینانِ‌ناصفر ـِ نمایش ـِ ماتریسی یِ T.

XI

حل ـِ یک دست‌گاه ـِ معادلات ـِ خطی

lii فضا يِ جواب‌ها يِ یک دست‌گاه ـِ معادلات ـِ خطی

یک دست‌گاه ـِ معادلات ـِ خطی یعنی

$$T\,x = y, \tag{966}$$

که در آن $x \in \mathbb{U}$، $y \in \mathbb{V}$، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$. $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ فضاها یی خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، T و y داده‌ها يِ مسئله اند، و هدف به‌دست‌آوردن ـِ x است. به ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه يِ 289: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ فضاها یی خطی با میدان ـِ یک‌سان اند، $x \in \mathbb{U}$ و $y \in \mathbb{V}$، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$. در این صورت (966) برا يِ x جواب دارد، اگر و تنها اگر $y \in \mathrm{img}(T)$. اگر چنین باشد، جواب ـِ کلی يِ (966) به شکل ـِ

$$x = x_{\mathrm{p}} + x_{\mathrm{h}} \tag{967}$$

است، که در آن x_{p} یک جواب ـِ خاص ـِ (966) است، و x_{h} جواب ـِ کلی يِ معادله يِ هم‌گن (یعنی (966) با $y = 0$) است. اگر T وارون ـِ راست داشته باشد و S_{p} یک وارون ـِ راست ـِ T باشد، آن‌گاه این جواب را می‌شود به شکل ـِ

$$x = S_{\mathrm{p}}\,y + x_{\mathrm{h}} \tag{968}$$

نوشت.

★

هم‌چنین، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 290: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ فضاها یی خطی با میدان ِ یک‌سان اند، $x \in \mathbb{U}$ و $y \in \mathbb{V}$، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$. در این صورت به ازا یِ هر نگاشت ِ یک‌به‌یک ِ $S \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، (966) با

$$S\,T\,x = S\,y \tag{969}$$

هم‌ارز است.

★

قضیه یِ 290 یک راه ِ احتمالی برا یِ ساده‌کردن ِ (966) پیش می‌نهد. این راه آن است که نگاشت‌ها یِ خطی یِ یک‌به‌یک ی بیابیم که حاصل‌ِضرب ِشان از چپ در T نگاشت ی بدهد که کارکردن با آن ساده‌تر (از کارکردن با T) باشد.

به‌جا یِ (966)، معادله یِ ظاهراًپیچیده‌تر ِ

$$(T \otimes 1_{\mathbb{W}})\tilde{x} = \tilde{y} \tag{970}$$

را در نظر بگیرید. در این‌جا $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، و $\mathbb{W}$ سه فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند، $\tilde{x} \in (\mathbb{U} \otimes \mathbb{W})$ و $\tilde{y} \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})$، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$. T و $\tilde{y}$ داده یِ مسئله اند، و هدف یافتن ِ $\tilde{x}$ است. نشان می‌دهیم حل ِ معادله یِ (970) در واقع حل ِ همان معادله یِ (966) است:

قضیه یِ 291: فرض کنید $\mathbb{U}$، $\mathbb{V}$، و $\mathbb{W}$ سه فضا یِ خطی با میدان ِ یک‌سان اند، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$. در این صورت،

$$\ker(T \otimes 1_{\mathbb{W}}) = [\ker(T)] \otimes \mathbb{W}, \tag{971}$$

و

$$\operatorname{img}(T \otimes 1_{\mathbb{W}}) = [\operatorname{img}(T)] \otimes \mathbb{W}. \tag{972}$$

اثبات: بردار ِ دل‌بخواه ِ $\tilde{x} \in (\mathbb{U} \otimes \mathbb{W})$ را می‌شود به شکل ِ

$$\tilde{x} = x^{\mu} \otimes w_{\mu} \tag{973}$$

نوشت، که در آن w_μ ها عضو ـِ $\mathbb{W}$ اند، x^μ ها عضو ـِ $\mathbb{U}$ اند، و مجموعه یِ w_μ ها خطی‌مستقل است. داریم

$$(T \otimes 1_{\mathbb{W}})\tilde{x} = (T\, x^\mu) \otimes w_\mu. \tag{974}$$

طرف ـِ راست ـِ عبارت ـِ بالا صفر است، اگر و تنها اگر $(T\, x^\mu)$ به ازا یِ هر μ صفر باشد. این (971) را نشان می‌دهد. ضمناً (974) نشان می‌دهد هر عضو ـِ $\mathrm{img}(T \otimes 1_{\mathbb{W}})$ (طرف ـِ چپ ـِ (974)) در $[\mathrm{img}(T)] \otimes \mathbb{W}$ است، و هر عضو ـِ $[\mathrm{img}(T)] \otimes \mathbb{W}$ (طرف ـِ راست ـِ (974)) در $\mathrm{img}(T \otimes 1_{\mathbb{W}})$ است، که (972) را نشان می‌دهد.

■

از این‌جا معلوم می‌شود اگر حل ـِ (966) را بدانیم، آن‌گاه حل ـِ (970) را می‌دانیم. در واقع (970) جواب دارد، اگر و تنها اگر در $\tilde{y}$ به شکل ـِ

$$\tilde{y} = y^\mu \otimes w_\mu \tag{975}$$

(که مجموعه یِ w_μ ها خطی‌مستقل است) همه یِ y^μ ها در $\mathrm{img}(T)$ باشند. فرض کنید به ازا یِ هر μ، یک جواب ـِ خاص ـِ (966) با $y = y^\mu$ برابر با x_{p}^μ باشد. در این صورت، جواب ـِ کلی یِ (970)

$$\tilde{x} = x_{\mathrm{p}}^\mu \otimes w_\mu + x_{\mathrm{h}}^\nu \otimes w'_\nu \tag{976}$$

است، که هر یک از x_{h}^ν ها یک جواب ـِ (966) با $y = 0$ (معادله یِ هم‌گن) اند. اگر T وارون ـِ راست داشته باشد و S_{p} یک وارون ـِ راست ـِ T باشد، آن‌گاه عبارت ـِ بالا را به این شکل هم می‌شود نوشت.

$$\tilde{x} = (S_{\mathrm{p}} \otimes 1_{\mathbb{W}})\tilde{y} + x_{\mathrm{h}}^\nu \otimes w'_\nu. \tag{977}$$

به‌ویژه، اگر بُعد ـِ $\mathrm{img}(T)$ باپایان باشد، آن‌گاه هر $\tilde{y} \in [\mathrm{img}(T)]$ را می‌شود به شکل ـِ

$$\tilde{y} = e_i \otimes y^i \tag{978}$$

نوشت، که $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathrm{img}(T)$ است و y^i ها عضو ـِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{W}$ اند. در این صورت (977) به شکل ـِ

$$\tilde{x} = (S_{\mathrm{p}}\, e_i) \otimes y^i + x_{\mathrm{h}}^{\nu} \otimes w'_{\nu} \tag{979}$$

در می‌آید. دیده می‌شود جمله یِ اول ـِ طرف ـِ راست، کاملاً شبیه ـِ وقت ی است که $\mathbb{W}$ خود ـِ $\mathbb{F}$ (میدان ـِ $\mathrm{dom}(T)$ و $\mathrm{img}(T)$) است؛ فقط جا یِ اسکالرها یِ y^i را بردارها یِ y^i گرفته است.

اگر علاوه بر این بُعد ـِ $\mathrm{dom}(T)$ هم باپایان باشد، (979) را هم می‌شود به شکل ـِ

$$\tilde{x} = [(S_{\mathrm{p}})^a{}_i\, d_a] \otimes y^i + d'_{\alpha} \otimes x_{\mathrm{h}}^{\prime\alpha} \tag{980}$$

نوشت، که $\{d_a \mid a\}$ یک پایه یِ $\mathrm{dom}(T)$، و $\{d'_{\alpha} \mid \alpha\}$ یک پایه یِ $\ker(T)$ است. y^i ها و $x_{\mathrm{h}}^{\prime\alpha}$ ها هم اعضا یِ دل‌بخواه ـِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{W}$ اند. دیده می‌شود طرف ـِ راست کاملاً شبیه ـِ وقت ی است که $\mathbb{W}$ خود ـِ $\mathbb{F}$ است؛ فقط جا یِ اسکالرها یِ y^i و $x_{\mathrm{h}}^{\prime\alpha}$ را بردارها یِ y^i و $x_{\mathrm{h}}^{\prime\alpha}$ در $\mathbb{W}$ گرفته است.

liii حل ـِ یک دست‌گاه ـِ شامل ـِ تعداد ـِ باپایان ی معادله برا یِ تعداد ـِ باپایان ی مجهول: روش ـِ گاؤس‌ـ یُردان

(966) با $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{F}^n; \mathbb{F}^m)$، و $x \in \mathbb{F}^m$ و $y \in \mathbb{F}^n$ را در نظر بگیرید. با انتخاب ـِ پایه یِ $\{d_a \mid a\}$ برا یِ $\mathbb{F}^m$ و پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ برا یِ $\mathbb{F}^n$، (966) را می‌شود چنین نوشت.

$$T^i{}_a\, x^a = y^i. \tag{981}$$

این یک دست‌گاه ـِ n معادله برا یِ m مجهول است. y^i ها، x^a ها، و $T^i{}_a$ ها اسکالر اند، اما ضمناً بحث‌ها یِ بخش ـِ پیش نشان می‌دهد می‌شود x^a ها و y^i ها را عضو ـِ یک فضا یِ خطی یِ $\mathbb{W}$ با میدان ـِ $\mathbb{F}$ گرفت، و حل ـِ معادله تغییر ی نمی‌کند.

به دنبال ـِ نگاشت ی مثل ـِ S در $\mathfrak{LF}(\mathbb{F}^n; \mathbb{F}^n)$ هستیم، که یک‌به‌یک باشد (چون بُعد ـِ $\mathbb{F}^n$ باپایان است، این یعنی S در $\mathbb{F}^n$ وارون‌پذیر باشد) و عنصرها یِ ماتریسی یِ $S\,T$ ساده باشند. متناظر با هر پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ برا یِ $\mathbb{F}^n$، سه نوع نگاشت ـِ یک‌به‌یک در $\mathfrak{LF}(\mathbb{F}^n; \mathbb{F}^n)$

تعریف می‌کنیم:
انعکاس:

$$(S^{k\,l})^i{}_j := \delta^i_j + \delta^{i\,k}\,\delta^l_j + \delta^{i\,l}\,\delta^k_j - \delta^{i\,k}\,\delta^k_j - \delta^{i\,l}\,\delta^l_j, \qquad k \neq l. \tag{982}$$

(اگر $k = l$، آن‌گاه $S^{k\,l}$ نگاشت ِ همانی می‌شود.)
کشش:

$$[S^k(\lambda)]^i{}_j := \delta^i_j + (\lambda - 1)\delta^{i\,k}\,\delta^k_j, \qquad \lambda \neq 0. \tag{983}$$

برش:

$$[S_k{}^l(\lambda)]^i{}_j := \delta^i_j + \lambda\,\delta^i_k\,\delta^l_j, \qquad k \neq l. \tag{984}$$

(اگر $k = l$، آن‌گاه $S_k{}^l(\lambda) = S^l(\lambda + 1)$.)

در تعریف ِ کشش و برش، λ اسکالر است. به این نگاشت‌ها، نگاشت‌ها یِ مقدماتی یِ (یا ماتریس‌ها یِ مقدماتی یِ) $\mathbb{F}^n$ می‌گویند. به‌ساده‌گی دیده می‌شود
قضیه یِ 292: نگاشت‌ها یِ مقدماتی یِ $\mathbb{F}^n$ این ویژه‌گی‌ها را دارند. (در همه یِ موارد، T نگاشت ی خطی است که تصویر َ ش در $\mathbb{F}^n$ است، و نمایش‌ها یِ ماتریسی در پایه یِ $\{e_1, \dots, e_n\}$ برا یِ $\mathbb{F}^n$ حساب شده اند؛ همان پایه ای که نگاشت‌ها یِ مقدماتی در آن تعریف شده اند.)

a دترمینان ِ $S^{k\,l}$ برابر ِ (-1) است. $S^{k\,l}\,T$ نگاشت ی است که ماتریس َ ش همان ماتریس ِ T است که جا یِ سطرها یِ k و l َ ش عوض شده.

b دترمینان ِ $S^k(\lambda)$ برابر ِ λ است. $S^k(\lambda)\,T$ نگاشت ی است که ماتریس َ ش همان ماتریس ِ T است که سطر ِ k َ ش در λ ضرب شده.

c دترمینان ِ $S_k{}^l(\lambda)$ برابر ِ 1 است. $S_k{}^l(\lambda)\,T$ نگاشت ی است که ماتریس َ ش همان ماتریس ِ T است که λ برابر ِ سطر ِ l َ ش به سطر ِ k َ ش اضافه شده.

★

روش ِ گاؤس– یُردان برا یِ ساده‌کردن ِ دست‌گاه ِ (981) شامل ِ n معادله یِ خطی با m مجهول به این ترتیب است.

a $j \twoheadleftarrow 1$ و $b \twoheadleftarrow 0$.

b اگر $j > n$، پایان ِ کار. در غیر ِ این صورت،

c $b \twoheadleftarrow b+1$.

d اگر $b > m$، پایان ِ کار. در غیر ِ این صورت،

e اگر همه یِ ${T^i}_b$ ها با $j \le i \le n$ صفر بودند، به **c**. در غیر ِ این صورت،

f $a_j \twoheadleftarrow b$.

g یک i با $j \le i \le n$ بیابید که ${T^i}_b \ne 0$. $T \twoheadleftarrow S^{i\,j}\,T$ و $y \twoheadleftarrow S^{i\,j}\,y$.

h $\lambda \twoheadleftarrow ({T^j}_b)^{-1}$. $T \twoheadleftarrow S^j(\lambda)\,T$ و $y \twoheadleftarrow S^j(\lambda)\,y$.

i به ازا یِ هر i با $i \ne j$، [$\lambda \twoheadleftarrow (-{T^i}_b)$. ${S_i}^j(\lambda)\,T$ $T \twoheadleftarrow$ و $y \twoheadleftarrow {S_i}^j(\lambda)\,y$].

j $j \twoheadleftarrow j+1$.

k به **b**.

T و y در پایان ِ جانشانی‌ها یِ الگریتم ِ بالا را با به‌ترتیب $\tilde{T}$ و $\tilde{y}$ نشان می‌دهیم. در پایان ِ الگریتم ِ بالا، علاوه بر $\tilde{T}$ و $\tilde{y}$ خروجی‌ها یِ دیگر ی هم داریم: j، b، و a_1 تا a_{j-1}. (اگر در پایان ِ الگریتم $j = 1$، آن‌گاه هیچ a_i ی نداریم.) داریم

$$b + 1 \ge j, \tag{985}$$

و

$$(\forall\, i \mid 1 \le i < j)\ :\ a_i \ge i. \tag{986}$$

بر حسب ِ مقدارها یِ j و b، دو حالت پیش می آید:

حالت ِ اول: $b \le m$ و $j = n+1$. این حالت فقط زمان ی ممکن است که $n \le m$. در این حالت داریم

$$[\forall\,(i,k) \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le k \le n]\ :\ {\tilde{T}^i}_{a_k} = {\delta^i}_k. \tag{987}$$

این یعنی به ازا یِ هر k، ستون ِ a_k ِ ماتریس ِ $\tilde{T}$ فقط یک عنصر ِ ناصفر دارد، که آن هم عنصر ِ سطر ِ k و برابر با یک است. هم‌چنین،

$$[\forall\ (i,k) \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le k < a_i]\ :\ \tilde{T}^i{}_k = 0. \tag{988}$$

این یعنی به ازا یِ هر i، عنصرها یی در سطر ِ i ِ ماتریس ِ $\tilde{T}$ که شماره یِ ستون ِشان از a_i کوچک‌تر است، صفر اند.

از (987) و (988)، دیده می‌شود دست‌گاه ِ (981) به این شکل در آمده.

$$(\forall i \mid 1 \le i \le n)\ :\ x^{a_i} = \tilde{y}^i - \sum_{c=a_i+1}^{m} \tilde{T}^i{}_c\, x^c. \tag{989}$$

از (987) دیده می‌شود در طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا، هیچ یک از x^{a_l} ها ظاهر نمی‌شود. نتیجه این که با استفاده از n معادله یِ (981)، می‌شود n تا از مجهول‌ها را بر حسب ِ بقیه به دست آورد.

حالت ِ دوم: $b = m + 1$ و $j \le n$. در این حالت،

$$(\forall\ i \mid j \le i \le n)\ :\ \tilde{T}^i{}_a = 0. \tag{990}$$

نتیجه می‌شود شرط ِ وجود ِ جواب برا یِ (981) این است که

$$(\forall\ i \mid j \le i \le n)\ :\ \tilde{y}^i = 0. \tag{991}$$

اگر این شرط برقرار باشد، تعریف می‌کنیم $n' := j - 1$ و مسئله به حالت ِ قبل (با n' به جا یِ n) تبدیل می‌شود. (البته در حالت ِ قبل b کوچک‌تر از $(m + 1)$ بود، اما در این حالت هم تبدیل ِ b به $(m + 1)$ در آخرین مرحله رخ می‌دهد و پس از آن هیچ کار ی انجام نمی‌شود. پس حذف ِ مرحله یِ آخر اثر ی ندارد و b را می‌شود همان m گرفت.) معنی یِ (991) این است که از n معادله یِ (981)، فقط n' تا مستقل اند.

در الگریتم ِ بالا، نتیجه یِ هر جانشانی از نوع ِ $T \twoheadleftarrow S\,T$ یا $y \twoheadleftarrow S\,y$ را می‌شود بدون ِ ضرب‌کردن ِ ماتریس ِ S هم به دست آورد: در (g) جا یِ سطر ِ i با سطر ِ j عوض می‌شود، در (h) سطر ِ j در λ ضرب می‌شود، و در (i) λ برابر ِ سطر ِ j به سطر ِ i اضافه می‌شود.

در الگریتم ِ بالا اختیارها یی هم هست. یک ی در (g)، که ممکن است چند i با $T^i{}_b \ne 0$ باشد. در این صورت باید یک ی از این i ها را انتخاب کرد. دیگر این که در (i)،

می‌شود فقط i ها یی را به کار برد که $i > j$. در این صورت (987) برقرار نخواهد بود. به جا یَش،

$$[\forall\ (i, k) \mid 1 \le k < i \le n]\ :\ \tilde{T}^i{}_{a_k} = 0. \tag{992}$$

در این حالت در طرف ِ راست ِ (989) خود ِ x^{a_l} ها هم ظاهر می‌شوند، اما فقط با $l > i$. پس (989) را باید به طور ِ بازگشتی حل کرد: اول برا یِ $i = n$، بعد برا یِ $i = n - 1$، و ....

سرانجام، یک اختیار ِ دیگر هم هست، که در الگریتم ِ بالا دیده نمی‌شود: می‌شود جا یِ ستون ِ a و ستون ِ b یِ T را عوض کرد، و هم‌زمان x^a و x^b را هم جابه‌جا کرد. به این ترتیب، در انتخاب ِ مجهول‌ها یی که آزاد اند و مجهول‌ها یی که بر حسب ِ بقیه به دست می‌آیند هم تا حد ی آزادی هست. جابه‌جاکردن ِ هم‌زمان ِ ستون‌ها یِ a و b یِ T و سطرها یِ a و b یِ x متناظر با استفاده از طرف ِ راست ِ تساوی یِ زیر است.

$$T\,x = T\,S^{a\,b}\,S^{a\,b}\,x, \tag{993}$$

که ناشی از آن است که

$$S^{a\,b}\,S^{a\,b} = 1_{\mathbb{F}^m}. \tag{994}$$

با توجه به بحث‌ها یِ بخش ِ پیش، روش ِ گاؤس–یُردان را برا یِ حل ِ دست‌گاه ِ

$$T\,X = Y \tag{995}$$

با $X \in \mathfrak{LF}(\mathbb{F}^m; \mathbb{F}^p)$ و $Y \in \mathfrak{LF}(\mathbb{F}^n; \mathbb{F}^p)$ هم می‌شود به کار برد. تنهاتفاوت این است که در جانشانی‌ها، به جا یِ $y \twoheadleftarrow S\,y$ باید $Y \twoheadleftarrow S\,Y$ را به کار برد.

از جمله، این روش را می‌شود برا یِ به‌دست‌آوردن ِ وارون ِ راست ِ یک نگاشت ِ خطی به کار برد. با $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{F}^n; \mathbb{F}^m)$، و با فرض ِ این که تصویر ِ T کل ِ $\mathbb{F}^n$ است، معادله ای که X (وارون ِ راست ِ T) باید بر آورد

$$T\,X = 1_{\mathbb{F}^n} \tag{996}$$

است.

از این که $\operatorname{rank}(T)=n$، نتیجه می‌شود $n\le m$، و در پایان ِ الگریتم باید حالت ِ اول پیش بیاید، یعنی $j=n+1$ و $b\le m$. پس در هر ستون ِ وارون ِ راست ِ T می‌شود n تا از مئلفه‌ها را بر حسب ِ $(m-n)$ تا یِ دیگر به دست آورد. البته روشن است که معادله یِ (996) جواب دارد اگر و تنها اگر T در $\mathbb{F}^n$ پوشا باشد.

روش ِ گاؤس– یُردان را برا یِ به‌دست‌آوردن ِ وارون ِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{F}^n;\mathbb{F}^n)$ هم (اگر T وارون‌پذیر باشد) می‌شود به کار برد. کافی است توجه کنیم در این حالت وارون ِ T همان وارون ِ راست ِ T است.

سرانجام، با استفاده از روش ِ گاؤس– یُردان می‌شود دترمینان ِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را هم حساب کرد. در هر مرحله از این روش، یک نگاشت ِ مقدماتی در T ضرب می‌شود. در این صورت

$$T_k=S_k\cdots S_1\,T, \tag{997}$$

که در آن T_k حاصل ِ k بار جانشانی در T است. از رابطه یِ بالا دیده می‌شود

$$\det(T_k)=\det(S_k)\cdots\det(S_1)\ \det(T). \tag{998}$$

S_i ها وارون‌پذیر اند و دترمینان ِشان را هم از قضیه یِ 292 می‌دانیم. از این‌جا، اگر محاسبه یِ دترمینان ِ T_k ساده باشد، دترمینان ِ T هم به‌ساده‌گی به دست می‌آید. محاسبه یِ دترمینان ِ $\tilde{T}$ (خروجی یِ الگریتم) ساده است، چون $\tilde{T}$ بالامثلثی است. اما ممکن است در یک مرحله یِ جلوتر معلوم شود دترمینان ِ T_k صفر است، که نتیجه می‌دهد دترمینان ِ T صفر است. این زمان ی رخ می‌دهد که در یک ی از مرحله‌ها یِ (e)، همه یِ ${T^i}_b$ ها با $i\ge j$ صفر باشند.

liv چند مثال

دست‌گاه ِ

$$\begin{pmatrix}{T^1}_1 & \cdots & {T^1}_m\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {T^n}_1 & \cdots & {T^n}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{X^1}_1 & \cdots & {X^1}_p\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {X^m}_1 & \cdots & {X^m}_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{Y^1}_1 & \cdots & {Y^1}_p\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {Y^n}_1 & \cdots & {Y^n}_p\end{pmatrix} \tag{999}$$

را با

$$\mathrm{mat}(T|Y) := \left(\begin{array}{ccc|ccc} {T^1}_1 & \cdots & {T^1}_m & {Y^1}_1 & \cdots & {Y^1}_p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {T^n}_1 & \cdots & {T^n}_m & {Y^n}_1 & \cdots & {Y^n}_p \end{array}\right) \tag{1000}$$

نشان می‌دهیم. هر عمل ـِ مقدماتی (ضرب در نگاشت ـِ مقدماتی) یی که رو یِ T و Y انجام می‌شود را می‌شود با یک عمل بر ماتریس ـِ بالا نشان داد.

حالت ـِ $n = 0$، یعنی هیچ معادله ای نداریم. پس همه یِ مجهول‌ها آزاد اند. حالت ـِ $m = 0$ یعنی هیچ مجهول ی نداریم. در این صورت طرف ـِ چپ ـِ (999) صفر است، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر همه یِ مئلفه‌ها یِ Y صفر باشند.

معادله یِ

$$\mathrm{mat}(T|Y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \tag{1001}$$

را در نظر بگیرید. در مرحله یِ اول جا یِ سطر ـِ اول و دوم را عوض می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_1|Y_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right). \tag{1002}$$

بعد سطر ـِ دوم را از سطر ـِ اول کم می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_2|Y_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right). \tag{1003}$$

نتیجه می‌شود

$$X^1 = 1, \qquad X^2 = 3 - X^3. \tag{1004}$$

می‌شد مرحله یِ دوم را انجام نداد. در این صورت نتیجه می‌شد

$$X^2 = 3 - X^3, \qquad X^1 = 4 - X^2 - X^3 = 1. \tag{1005}$$

توجه کنید که در این حالت، اول باید X^2 را حساب کرد، چون X^1 بر حسب ـِ X^2 به دست می آید.

با همین عمل‌ها یِ مقدماتی می‌شود وارون ـِ راست ـِ T را هم حساب کرد. در این حالت،

$$\mathrm{mat}(T|Y) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{1006}$$

از این‌جا،

$$\mathrm{mat}(T_1|Y_1) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \tag{1007}$$

و

$$\mathrm{mat}(T_2|Y_2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{1008}$$

این نتیجه می‌دهد وارون ـِ راست ـِ T

$$\mathrm{mat}(X) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 - {X^3}_1 & -{X^3}_2 \\ {X^3}_1 & {X^3}_2 \end{pmatrix} \tag{1009}$$

است.

معادله ي

$$\mathrm{mat}(T|Y) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 2 \end{array}\right) \tag{1010}$$

را در نظر بگیرید. سطر ـِ اول را از سطر ـِ دوم کم می‌کنیم. $(1/2)$ برابر ـِ سطر ـِ اول را هم از سطر ـِ سه‌وم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\mathrm{mat}(T_1|Y_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right). \tag{1011}$$

حالا $(1/2)$ برابر ـِ سطر ـِ دوم را از سطر ـِ سه‌وم، و سطر ـِ دوم را از سطر ـِ اول کم می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_2|Y_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{1012}$$

دیده می‌شود معادله ي سه‌وم اتحاد است. جواب ـِ معادله می‌شود

$$X^1 = 4 - X^3 - 2X^4, \qquad X^2 = X^4. \tag{1013}$$

در این حالت، از سه‌معادله ي اولیه فقط دوتا مستقل اند.

همان (1010) را در نظر بگیرید، با یک تغییر در طرف ـِ راست ـِ معادله:

$$\mathrm{mat}(T|Y) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 3 \end{array}\right). \tag{1014}$$

با همان عمل‌ها ي مقدماتی، نتیجه می‌شود

$$\mathrm{mat}(T_2|Y_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \qquad (1015)$$

در این‌جا معادله یِ سه‌وم $0 = 1$ است. پس دست‌گاه جواب ندارد.

سرانجام، وارون ِ راست ِ T در (1010) را بررسی کنیم:

$$\mathrm{mat}(T|Y) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \qquad (1016)$$

با همان عمل‌ها یِ مقدماتی،

$$\mathrm{mat}(T_2|Y_2) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right), \qquad (1017)$$

که نشان می‌دهد این معادله جواب ندارد. علت آن است که $\mathrm{img}(T)$ همه یِ $\mathbb{F}^3$ نیست.

یک مثال ِ دیگر

$$\mathrm{mat}(T|Y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \qquad (1018)$$

است. سطر ِ اول را از سطر ِ دوم کم می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_1|Y_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right). \qquad (1019)$$

سطر ِ دوم را در (-1) ضرب می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_2|Y_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right). \qquad (1020)$$

سه‌برابر ِ سطر ِ دوم را از سطر ِ اول کم‌می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_3|Y_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right). \qquad (1021)$$

در نتیجه،

$$X^1 = 3 - X^2, \qquad X^3 = 1. \qquad (1022)$$

معادله یِ

$$\mathrm{mat}(T|Y)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\3&2&2&7\\1&0&0&1\\2&1&0&3\end{array}\right)\tag{1023}$$

را در نظر بگیرید. سه‌برابر ـ سطر ـ اول را از سطر ـ دوم، سطر ـ اول را از سطر ـ سه‌وم، و دوبرابر ـ سطر ـ اول را از سطر ـ چهارُم کم می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_1|Y_1)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&-4&-7&-11\\0&-2&-3&-5\\0&-3&-6&-9\end{array}\right).\tag{1024}$$

سطر ـ دوم را در $(-1/4)$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_2|Y_2)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&1&7/4&11/4\\0&-2&-3&-5\\0&-3&-6&-9\end{array}\right).\tag{1025}$$

دوبرابر ـ سطر ـ دوم را از سطر ـ اول کم می‌کنیم، دوبرابر ـ سطر ـ دوم را با سطر ـ سه‌وم جمع می‌کنیم، و سه‌برابر ـ سطر ـ دوم را با سطر ـ چهارُم جمع می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_3|Y_3)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&1/2\\0&1&7/4&11/4\\0&0&1/2&1/2\\0&0&-3/4&-3/4\end{array}\right).\tag{1026}$$

سطر ـ سه‌وم را در 2 ضرب می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_4|Y_4)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&1/2\\0&1&7/4&11/4\\0&0&1&1\\0&0&-3/4&-3/4\end{array}\right).\tag{1027}$$

سرانجام، $(1/2)$ برابر ـ سطر ـ سه‌وم را با سطر ـ اول جمع می‌کنیم، $(7/4)$ برابر ـ سطر ـ سه‌وم را از سطر ـ دوم کم می‌کنیم، و $(3/4)$ برابر ـ سطر ـ سه‌وم را با سطر ـ چهارُم جمع می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_5|Y_5)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right),\tag{1028}$$

که نتیجه می‌دهد

$$X^1=X^2=X^3=1.\tag{1029}$$

اگر همین عمل‌ها را با

$$\mathrm{mat}(T|Y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \tag{1030}$$

انجام می‌دادیم، به

$$\mathrm{mat}(T_5|Y_5) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right) \tag{1031}$$

می‌رسیدیم، که جواب ندارد.

نگاشت ِ خطی ِ T با

$$\mathrm{mat}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1032}$$

را در نظر بگیرید. برا ِ محاسبه ِ دترمینان ِ T، سطر ِ اول را از سطر ِ دوم کم می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1033}$$

دترمینان ِ نگاشت ِ مقدماتی ِ متناظر با این تبدیل، $(+1)$ است. سطر ِ دوم را در (-1) ضرب می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1034}$$

دترمینان ِ نگاشت ِ مقدماتی ِ متناظر با این تبدیل، (-1) است. سطر ِ دوم را از سطر ِ سه‌وم کم می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1035}$$

دترمینان ِ نگاشت ِ مقدماتی ِ متناظر با این تبدیل، $(+1)$ است. اما $\mathrm{mat}(T_3)$ یک ماتریس ِ بالامثلثی است، که یک ِ از اعضا ِ قطری یَش صفر است. پس

$$\det(T) = \det(T_3) = 0. \tag{1036}$$

نگاشت ـِ T با

$$\mathrm{mat}(T)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&1&0\\0&2&3\end{pmatrix} \tag{1037}$$

را در نظر بگیرید. برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ دترمینان ـِ T، سطر ـِ اول را از سطر ـِ دوم کم می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_1)=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&-3\\0&2&3\end{pmatrix}. \tag{1038}$$

دترمینان ـِ نگاشت ـِ مقدماتی یِ متناظر با این تبدیل $\det(S_1)=(+1)$ است. جا یِ سطر ـِ دوم و سه‌وم را عوض می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_2)=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&3\\0&0&-3\end{pmatrix}. \tag{1039}$$

دترمینان ـِ نگاشت ـِ مقدماتی یِ متناظر با این تبدیل $\det(S_2)=(-1)$ است. سطر ـِ دوم را در $(1/2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_3)=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&3/2\\0&0&-3\end{pmatrix}. \tag{1040}$$

دترمینان ـِ نگاشت ـِ مقدماتی یِ متناظر با این تبدیل $\det(S_3)=(1/2)$ است. سطر ـِ سه‌وم را در $(-1/3)$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathrm{mat}(T_4)=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&3/2\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{1041}$$

دترمینان ـِ نگاشت ـِ مقدماتی یِ متناظر با این تبدیل $\det(S_4)=(-1/3)$ است. از این‌جا،

$$\begin{aligned}\det(T)&=\det(T_4)\,[\det(S_4)\cdots\det(S_1)]^{-1},\\&=6.\end{aligned} \tag{1042}$$

البته می‌شد با همان T_2 هم دترمینان ـِ T را حساب کرد، چون T_2 بالامثلثی است. ضمناً با ادامه یِ همین عمل‌ها یِ مقدماتی می‌شود وارون ـِ T را هم حساب کرد. با شروع از

$$\mathrm{mat}(T|Y)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&2&3&0&0&1\end{array}\right), \tag{1043}$$

می‌رسیم به

$$\mathrm{mat}(\tilde{T}|\tilde{Y}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right), \tag{1044}$$

که یعنی

$$\mathrm{mat}(T^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1045}$$

دیده می‌شود وارون ِ T همان $\tilde{Y}$ است. به‌دست‌آوردن ِ T^{-1}، یعنی حل ِ (995) با $Y = 1$. روش ِ حل این است که در T و Y از چپ نگاشت‌ها یِ مقدماتی ضرب می‌کنیم، تا T به 1 تبدیل شود. این یعنی

$$\begin{aligned} \tilde{T} &:= S_k \cdots S_1\, T = 1, \\ \tilde{Y} &:= S_k \cdots S_1\, Y = S_k \cdots S_1. \end{aligned} \tag{1046}$$

که نشان می‌دهد $\tilde{Y}$ همان T^{-1} است.

XII

دوفرم

lv تصویرها و هسته‌ها یِ دوفرم

فضاها یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ با میدان ـِ $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید. به هر نگاشت ـِ دوخطی در $\mathfrak{LF}(\mathbb{F};\mathbb{V},\mathbb{W})$ یک دوفرم می‌گوییم. البته بر اساس ـِ قضیه یِ 153، مجموعه یِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{F};\mathbb{V},\mathbb{W})$ با $(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})^*$ یک‌ریخت است. به همین خاطر $\mathfrak{LF}(\mathbb{F};\mathbb{V},\mathbb{W})$ را با $(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})^*$ هم نمایش می‌دهیم.

متناظر با دوفرم ـِ g در $(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})^*$ دو نگاشت ـِ خطی یِ $\tau_1 g\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W}^*;\mathbb{V})$ و $\tau_2 g\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{W})$ تعریف می‌کنیم که

$$\begin{aligned}[(\tau_1 g)(v)](w) &:= g(v,w),\\ [(\tau_2 g)(w)](v) &:= g(v,w).\end{aligned}\tag{1047}$$

هر یک از $\tau_1 g$ و $\tau_2 g$ صفر است، اگر و تنها اگر g صفر باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 293: فرض کنید $g\in(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})^*$. در این صورت،

$$\begin{aligned}\mathrm{res}[(\tau_1 g)^*;\mathbb{W}] &= \tau_2 g,\\ \mathrm{res}[(\tau_2 g)^*;\mathbb{V}] &= \tau_1 g.\end{aligned}\tag{1048}$$

به علاوه، اگر $\mathbb{W}$ باپایان‌بعدی باشد، آن‌گاه

$$(\tau_1 g)^* = \tau_2 g, \tag{1049}$$

و اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بعدی باشد، آن‌گاه

$$(\tau_2 g)^* = \tau_1 g. \tag{1050}$$

هم‌چنین، اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ هردو باپایان‌بعدی باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} g_{\alpha i} &= (\tau_1 g)_{i\alpha}, \\ &= (\tau_2 g)_{\alpha i}. \end{aligned} \tag{1051}$$

★

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \ker_1(g) &:= \ker[(\tau_1 g)], \\ \ker_2(g) &:= \ker[(\tau_2 g)], \end{aligned} \tag{1052}$$

و

$$\begin{aligned} \mathrm{img}_1(g) &:= \mathrm{img}[(\tau_1 g)], \\ \mathrm{img}_2(g) &:= \mathrm{img}[(\tau_2 g)]. \end{aligned} \tag{1053}$$

به $\ker_1(g)$ و $\ker_2(g)$ **هسته‌ها یِ** g، و به $\mathrm{img}_1(g)$ و $\mathrm{img}_2(g)$ **تصویرها یِ** g می‌گوییم.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 294: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$. در این صورت،

$$\begin{aligned} [\mathrm{img}_1(g)]^{\mathrm{c}} &= \ker_2(g), \\ [\mathrm{img}_2(g)]^{\mathrm{c}} &= \ker_1(g). \end{aligned} \tag{1054}$$

هم‌چنین، اگر $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{res}\{g; \mathbb{U}, [(\tau_1 g)(\mathbb{U})]^{\mathrm{c}}\} = 0. \tag{1055}$$

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 295: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$. در این صورت اگر $\mathrm{img}_1(g)$ باپایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه $\mathrm{img}_2(g)$ هم باپایان‌بُعدی است، بُعد ِ این دوفضا با هم برابر است، و $\ker_2(g)$ در $\mathbb{W}$ و $\ker_1(g)$ در $\mathbb{V}$ جداشدنی اند.

اثبات: فرض کنید $\mathrm{img}_1(g)$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت، طبق ِ قضیه یِ 115 یک زیرفضا یِ $\mathbb{U}$ از $\mathbb{W}$ هست که

$$\mathbb{W} = [\mathrm{img}_1(g)]^{\mathrm{c}} \oplus \mathbb{U}, \tag{1056}$$

و

$$\dim(\mathbb{U}) = \dim[\mathrm{img}_1(g)]. \tag{1057}$$

از رابطه یِ (1056) و قضیه یِ 294 نتیجه می‌شود

$$\mathbb{W} = \ker_2(g) \oplus \mathbb{U}, \tag{1058}$$

که نشان می‌دهد

$$\mathrm{img}_2(g) \sim \mathbb{U}. \tag{1059}$$

پس

$$\dim[\mathrm{img}_1(g)] = \dim[\mathrm{img}_2(g)]. \tag{1060}$$

چون $\mathrm{img}_1(g)$ و $\mathrm{img}_2(g)$ باپایان‌بعدی اند، $\tau_1 g$ و $\tau_2 g$ هسته‌جدا هستند.

■

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 296: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$، و بین ِ $\mathrm{img}_1(g)$ و $\mathrm{img}_2(g)$ دستِ‌کم یک ی باپایان‌بُعدی است. در این صورت،

$$\mathbb{V} \ominus [\ker_1(g)] \sim \mathbb{W} \ominus [\ker_2(g)]. \tag{1061}$$

★

یک نتیجه یِ ساده یِ قضیه یِ بالا این است.

قضیه یِ 297: فرض کنید $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی و $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$، و

$$\ker_2(g) = \{0\}, \tag{1062}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \dim\{\mathbb{V} \ominus \ker_1(g)\} &= \dim(\mathbb{W}), \\ &= \dim[\mathrm{img}_1(g)], \\ &= \dim[\mathrm{img}_2(g)]. \end{aligned} \tag{1063}$$

★

می‌گوییم دوفرمِ $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$ ناتکین است، اگر هم $\tau_1 g$ و هم $\tau_2 g$ ناتکین باشند. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 298: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$، و بینِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دستِ‌کم یک ی باپایان‌بُعدی است. در این صورت g ناتکین است، اگر و تنها اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ هم‌بُعد باشند و بینِ $\tau_1 g$ و $\tau_2 g$، دستِ‌کم یک ی ناتکین باشد.

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 299: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$. در این صورت دوفرمِ $\tilde{g} \in \{[\mathbb{V} \ominus \ker_1(g)] \otimes [\mathbb{W} \ominus \ker_2(g)]\}^*$ با

$$\tilde{g}([v],[w]) := g(v,w) \tag{1064}$$

خوش‌تعریف و ناتکین است. اگر $\tau_1 g$ و $\tau_2 g$ هسته‌جدا باشند، آن‌گاه $\mathrm{res}[g; \mathrm{edom}(g_1), \mathrm{edom}(g_2)]$ ناتکین است.

★

قضیه یِ 300: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$، $\mathbb{U} \sqsubseteq \mathbb{V}$، $\mathbb{X} \sqsubseteq \mathbb{W}$، و $\mathrm{res}(g; \mathbb{U}, \mathbb{X})$ ناتکین است. در این صورت

$$\mathbb{U} \cap [(\tau_2 g)(\mathbb{X})]^{\mathrm{c}} = \{0\}. \tag{1065}$$

اگر علاوه بر این $\mathbb{X}$ باپایان‌بعدی باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus [(\tau_2 g)(\mathbb{X})]^{\mathrm{c}}. \tag{1066}$$

اثبات: بردار ـِ $u \in \{\mathbb{U} \cap [(\tau_2 g)(\mathbb{X})]^{\mathrm{c}}\}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\forall\, w \in \mathbb{X} \ :\ g(u, w) = 0, \tag{1067}$$

که نتیجه می‌دهد u در هسته یِ $\tau_1[\mathrm{res}(g; \mathbb{U}, \mathbb{X})]$ است. این (1065) را نشان می‌دهد. حالا فرض کنید. $\mathbb{X}$ باپایان‌بعدی است. $\mathrm{res}(g; \mathbb{U}, \mathbb{X})$ را با h نشان می‌دهیم. پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ را برا یِ $\mathbb{X}$ در نظر می‌گیریم. مجموعه یِ $\{(\tau_2 h)(e_i) \mid i\}$ یک مجموعه یِ خطی‌مستقل است. طبق ـِ قضیه یِ 115، یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ـِ $\{f^i \mid i\}$ از $\mathbb{U}$ هست که تعداد ـِ اعضا یَش همان تعداد ـِ اعضا یِ $\{e_i \mid i\}$ است، و

$$\forall\, (i, j) \ :\ [(\tau_2 h)(e_i)](f^j) = \delta_i^j, \tag{1068}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\forall\, (i, j) \ :\ g(f^j, e_i) = \delta_i^j. \tag{1069}$$

بردار ـِ $v \in \mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\forall\, i \ :\ g[v - g(v, e_j)\, f^j, e_i] = 0, \tag{1070}$$

که نتیجه می‌دهد

$$[v - g(v, e_j)\, f^j] \in [(\tau_2 g)(\mathbb{X})]^{\mathrm{c}}. \tag{1071}$$

این و (1065)، رابطه یِ (1066) را نتیجه می‌دهند.

■

قضیه یِ 301: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$ ناتکین، $\mathbb{U} \sqsubseteq \mathbb{V}$، $\mathbb{X} \sqsubseteq \mathbb{W}$، $\mathbb{X}$ باپایان‌بعدی، و $\mathrm{res}(g, \mathbb{U}, \mathbb{X})$ ناتکین است. در این صورت $\mathrm{res}\{g; [(\tau_2 g)(\mathbb{X})]^{\mathrm{c}}, [(\tau_1 g)(\mathbb{U})]^{\mathrm{c}}\}$ ناتکین است.

اثبات: $\mathrm{res}\{g; [(\tau_2 g)(\mathbb{X})]^{\mathrm{c}}, [(\tau_1 g)(\mathbb{U})]^{\mathrm{c}}\}$ را با h نشان می‌دهیم. داریم

$$\mathrm{res}\{g; [(\tau_2 g)(\mathbb{X})]^{\mathrm{c}}, \ker_2(h)\} = 0. \tag{1072}$$

چون $\ker_2(h) \sqsubseteq [(\tau_1 g)(\mathbb{U})]^{\mathrm{c}}$، از قضیه یِ 294 نتیجه می‌شود

$$\mathrm{res}[g; \mathbb{U}, \ker_2(h)] = 0. \tag{1073}$$

از این‌جا با استفاده از قضیه یِ 300 نتیجه می‌شود

$$\mathrm{res}[g; \mathbb{V}, \ker_2(h)] = 0. \tag{1074}$$

این یعنی $\ker_2(h)$ زیرمجموعه یِ $\ker_2(g)$ است. پس چون $\ker_2(g)$ بدیهی است، $\ker_2(h)$ هم بدیهی است. از این که $\mathrm{res}(g, \mathbb{U}, \mathbb{X})$ ناتکین و $\mathbb{X}$ باپایان‌بعدی است، نتیجه می‌شود $\mathbb{U}$ هم باپایان‌بعدی است. به این ترتیب، با استدلال ِ مشابه ی معلوم می‌شود $\ker_1(h)$ هم بدیهی است.

■

قضیه یِ 302: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$، و برا یِ $\{e_i \mid i; 1 \le i \le n\} \subseteq \mathbb{V}$ و $\{f_i \mid i; 1 \le i \le n\} \subseteq \mathbb{W}$ داریم

$$g(e_i, f_j) = g_i\, \delta_{ij}, \tag{1075}$$

که همه یِ g_i ها ناصفر اند. در این صورت $\{e_i \mid i; 1 \le i \le n\}$ و $\{f_i \mid i; 1 \le i \le n\}$ خطی‌مستقل اند، و

$$\begin{aligned} \ker_1(g) \cap \mathrm{span}\{e_i \mid i; 1 \le i \le n\} &= \{0\}, \\ \ker_2(g) \cap \mathrm{span}\{f_i \mid i; 1 \le i \le n\} &= \{0\}. \end{aligned} \tag{1076}$$

اثبات: بردار ِ $(\alpha^i\, e_i) \in [\ker_1(g) \cap \mathrm{span}\{e_i \mid i; 1 \le i \le n\}]$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\forall\, j \;:\; g(\alpha^i\, e_i, f_j) = 0. \tag{1077}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\forall\, j \;:\; \alpha^j = 0, \tag{1078}$$

که نتیجه می‌دهد $(\alpha^i\, e_i)$ صفر است. این تساوی یِ اول ِ (1076) را نتیجه می‌دهد. حالا فرض کنید

$$\alpha^i\, e_i = 0. \tag{1079}$$

این (1077)، و در نتیجه (1078) را نتیجه می‌دهد . پس $\{e_i \mid i; 1 \le i \le n\}$ خطی‌مستقل است. اثبات ِ حکم‌ها برا یِ $\{f_i \mid i; 1 \le i \le n\}$ هم مشابه است.

■

قضیه یِ 303: فرض کنید $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$،

$$\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U}', \tag{1080}$$

و

$$\mathbb{U} \sqsubseteq \ker_1(g), \tag{1081}$$

و یک زیرفضا یِ $\mathbb{W}$ مثل ِ $\mathbb{X}$ هست که $\ker_1[\mathrm{res}(g; \mathbb{U}', \mathbb{X})]$ بدیهی است. در این صورت

$$\mathbb{U} = \ker_1(g). \tag{1082}$$

اثبات: می‌گیریم $v \in [\ker_1(g)]$. بردارها یی مثل ِ $u \in \mathbb{U}$ و $u' \in \mathbb{U}'$ هستند که

$$v = u + u'. \tag{1083}$$

چون $\mathbb{U} \sqsubseteq \ker_1(g)$، نتیجه می‌شود $u' = v - u$ هم در $\ker_1(g)$ است. پس u' در $\ker_1[\mathrm{res}(g; \mathbb{U}', \mathbb{X})]$ است. این نتیجه می‌دهد

$$u' = 0, \tag{1084}$$

و از آن‌جا،

$$\ker_1(g) \subseteq \mathbb{U}, \tag{1085}$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

lvi دوفرم ِ متقارن

می‌گوییم دوفرم ِ $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})^*$ متقارن است، اگر

$$\forall\ (u, v) \in (\mathbb{V} \times \mathbb{V})\ :\ g(u, v) = g(v, u). \tag{1086}$$

مجموعه یِ دوفرم‌ها یِ متقارن ـِ عضو ـِ $\mathcal{LF}(\mathbb{F};\mathbb{V},\mathbb{V})$ را با $\mathcal{SLF}(\mathbb{F};\mathbb{V},\mathbb{V})$ نمایش می‌دهیم. از قضیه یِ 188 دیده می‌شود $\mathcal{SLF}(\mathbb{F};\mathbb{V},\mathbb{V})$ با $(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes 2})^*$ یک‌ریخت است. به همین خاطر $\mathcal{SLF}(\mathbb{F};\mathbb{V},\mathbb{V})$ را با $(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes 2})^*$ هم نمایش می‌دهیم.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 304: فرض کنید $g\in(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes 2})^*$. در این صورت

$$\tau_1 g=\tau_2 g, \tag{1087}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\ker_1(g)&=\ker_2(g),\\ \mathrm{img}_1(g)&=\mathrm{img}_2(g).\end{aligned} \tag{1088}$$

★

به $\ker_1(g)=\ker_2(g)$ هسته یِ g می‌گوییم و آن را با $\ker(g)$ نمایش می‌دهیم. به $\mathrm{img}_1(g)=\mathrm{img}_2(g)$ هم تصویر ـِ g می‌گوییم و آن را با $\mathrm{img}(g)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه یِ 305: فرض کنید $g\in(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes 2})^*$. در این صورت g صفر است، اگر و تنها اگر

$$\forall\, v\in\mathbb{V}\ :\ g(v,v)=0. \tag{1089}$$

اثبات: به ازا یِ هر دوبردار ـِ u و v در $\mathbb{V}$،

$$g(u,v)=\frac{1}{2}\,[g(u+v,u+v)-g(u,u)-g(v,v)]. \tag{1090}$$

این نتیجه می‌دهد اگر (1089) برقرار باشد g صفر است. اگر g صفر باشد هم، (1089) به‌روشنی برقرار است.

■

قضیه یِ 306: فرض کنید $g\in(\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes 2})^*$ ناتکین، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای مثل ـِ $\{e_i\mid i\}$ دارد که

$$g(e_i,e_j)=g_i\,\delta_{i\,j}, \tag{1091}$$

و همه یِ g_i ها ناصفر اند.

اثبات: پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ را با استقرا می‌سازیم. چون g ناتکین (و در نتیجه ناصفر) است، حتماً بردار یِ مثل ـ e_1 هست که

$$g(e_1, e_1) \neq 0. \tag{1092}$$

حالا فرض کنید مجموعه یِ $\{e_i \mid i; i \leq k\}$ با $k < \dim(\mathbb{V})$ را چنان ساخته ایم که (1091) را با g_i ها یِ ناصفر و $i, j \leq k$ بر می‌آورَد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_k &:= \operatorname{span}\{e_i \mid i; i \leq k\},\\ \mathbb{W}_k &:= (\tau_1 g)(\mathbb{V}_k).\end{aligned} \tag{1093}$$

روشن است که $\operatorname{res}(g; \mathbb{V}_k, \mathbb{V}_k)$ ناتکین است، و در نتیجه

$$\mathbb{V}_k \oplus \mathbb{W}_k^{\mathrm{c}} = \mathbb{V}, \tag{1094}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\dim(\mathbb{W}_k^{\mathrm{c}}) = \dim(\mathbb{V}) - k > 0. \tag{1095}$$

قضیه یِ 301 نتیجه می‌دهد $\operatorname{res}(g; \mathbb{W}_k^{\mathrm{c}}, \mathbb{W}_k^{\mathrm{c}})$ ناتکین است. پس بردار ی مثل ـ $e_{k+1} \in \mathbb{W}_k^{\mathrm{c}}$ هست که

$$g(e_{k+1}, e_{k+1}) \neq 0. \tag{1096}$$

دیده می‌شود با این بردار، $\{e_i \mid i; i \leq k+1\}$ رابطه یِ (1091) را با g_i ها یِ ناصفر و $i, j \leq (k+1)$ بر می‌آورَد.

به این ترتیب، می‌شود مجموعه ای مثل ـ $\{e_i \mid i\}$ ساخت که تعداد ـ اعضا یَش با $\dim(\mathbb{V})$ برابر است، و (1091) را با g_i ها یِ ناصفر بر می‌آورَد. قضیه یِ 302 نتیجه می‌دهد این مجموعه خطی‌مستقل، و بنابراین پایه است.

■

قضیه یِ 307: فرض کنید $g \in (\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes 2})^*$، و $\operatorname{img}(g)$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت هر $\operatorname{edom}(\tau_1 g)$ پایه ای مثل ـ $\{e_i \mid i\}$ دارد که (1091) را با g_i ها یِ ناصفر بر می‌آورَد. به علاوه، هر مجموعه یِ $\{e_i \mid i\}$ که (1091) را با g_i ها یِ ناصفر بر آورَد، تعداد ـ

اعضا یَش نا بزرگ‌تر از $\dim[\mathrm{img}(g)]$ است.

اثبات: فرض کنید $\mathbb{U}$ یک $\mathrm{edom}(\tau_1 g)$ است. از قضیه یِ 299 نتیجه می‌شود $\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})$ ناتکین است. از قضیه یِ 306 نتیجه می‌شود $\mathbb{U}$ پایه ای مثل ِ $\{e_i \mid i\}$ دارد که (1091) را با g_i ها یِ ناصفر بر می‌آورَد. حالا فرض کنید $\{e_i \mid i\}$ مجموعه ای است که (1091) را با g_i ها یِ ناصفر بر می‌آورَد. $\{e_i \mid i\}$ خطی‌مستقل است، پس تعداد ِ اعضا یِ $\{e_i \mid i\}$ با بُعد ِ $\mathrm{span}\{e_i \mid i\}$ برابر است. اشتراک ِ $\mathrm{span}\{e_i \mid i\}$ با $\ker(g)$ بدیهی است. پس بُعد ِ $\mathrm{span}\{e_i \mid i\}$ با بُعد ِ $g_1(\mathrm{span}\{e_i \mid i\})$ برابر است، که این یک ی هم از $\dim[\mathrm{img}(g)]$ نابزرگ‌تر است. از این‌جا نتیجه می‌شود تعداد ِ اعضا یِ $\{e_i \mid i\}$ از $\dim[\mathrm{img}(g)]$ نابزرگ‌تر است.

■

قضیه یِ 308: فرض کنید $g \in (\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes 2})^*$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای مثل ِ $\{e_i \mid i\}$ دارد که (1091) را بر می‌آورَد. به علاوه، به ازا یِ هر پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ از $\mathbb{V}$ که (1091) را بر آورَد، تعداد ِ i ها یِ با $g_i = 0$، برابر با $\dim[\ker(g)]$ است.

اثبات: $\mathbb{U}$ را یک $\mathrm{edom}(\tau_1 g)$ می‌گیریم. طبق ِ قضیه یِ 299، $\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})$ ناتکین است. طبق ِ قضیه یِ 306، $\mathbb{U}$ پایه ای دارد که (1091) را بر می‌آورَد. $\{e_i \mid i\}$ را اجتماع ِ این پایه و یک پایه برا یِ $\ker(g)$ می‌گیریم. دیده می‌شود این پایه (1091) را بر می‌آورَد.

حالا فرض کنید $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است که (1091) را بر می‌آورَد. بردار ِ دل‌بخواه ِ $v = v^i\, e_i$ در $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. به‌ساده‌گی دیده می‌شود $v \in \ker(g)$ اگر و تنها اگر به ازا یِ هر i که g_i ناصفر باشد v^i صفر باشد. این یعنی $\ker(g)$ پهنه یِ مجموعه یِ $\{e_i \mid i; g_i = 0\}$ است، پس تعداد ِ i ها یِ با $g_i = 0$ برابر ِ $\dim[\ker(g)]$ است.

■

فرض کنید $g \in (\mathbb{V}_{\mathrm{S}}^{\otimes 2})^*$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است که (1091) را بر می‌آورَد. در این صورت می‌گوییم g در این پایه قطری است، یا این پایه یک پایه یِ قطری‌گر برا یِ g است.

فرض کنید $g \in \mathcal{SLF}(\mathbb{R};\mathbb{V},\mathbb{V})$. می‌گوییم g مثبت ِ شبهِ‌معین است، اگر

$$\forall\, v \in \mathbb{V} \;:\; g(v,v) \geq 0. \qquad (1097)$$

می‌گوییم g مثبت ِ معین است، اگر g مثبت ِ شبهِ‌معین و ناتکین باشد.

قضیه یِ 309: فرض کنید $g \in \mathcal{SLF}(\mathbb{R}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$. در این صورت g مثبت ـِ معین است، اگر و تنها اگر

$$\forall\ (v \neq 0) \in \mathbb{V}\ :\ g(v,v) > 0. \tag{1098}$$

اثبات: روشن است که اگر (1098) برقرار باشد، g مثبت ـِ معین است. فرض کنید g مثبت ـِ معین است، و v بردار ی است که

$$g(v,v) = 0. \tag{1099}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود به ازا یِ هر اسکالر ـِ α و هر بردار ـِ u،

$$\begin{aligned} g(u,u) + 2\alpha\, g(u,v) &= g(u+\alpha\, v, u+\alpha\, v), \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{1100}$$

این نتیجه می‌دهد

$$g(u,v) = 0. \tag{1101}$$

پس $v \in \ker(g)$، و در نتیجه v صفر است. یعنی (1098) برقرار است.

■

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 310: فرض کنید $g \in \mathcal{SLF}(\mathbb{R}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت g مثبت ـِ شبهِ‌معین است، اگر و تنها اگر متناظر با هر پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ از $\mathbb{V}$ که (1091) را بر آورَد، همه یِ g_i ها در رابطه یِ (1091) نامنفی باشند؛ و g مثبت ـِ معین است، اگر و تنها اگر متناظر با هر پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ از $\mathbb{V}$ که (1091) را بر آورَد، همه یِ g_i ها در رابطه یِ (1091) مثبت باشند.

★

فرض کنید $g \in \mathcal{SLF}(\mathbb{R}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$. می‌گوییم g منفی یِ معین است، اگر $(-g)$ مثبت ـِ معین باشد؛ و می‌گوییم g منفی یِ شبهِ‌معین است، اگر $(-g)$ مثبت ـِ شبهِ‌معین باشد. روشن است که مانسته یِ قضیه‌ها یِ 309 و 310 برا یِ g یِ منفی یِ معین یا منفی یِ شبهِ‌معین هم برقرار اند.

قضیه یِ 311: فرض کنید $g\in \mathcal{SLF}(\mathbb{R};\mathbb{V},\mathbb{V})$، و

$$\mathbb{V}=\mathbb{V}_0\oplus\mathbb{V}_+\oplus\mathbb{V}_-, \tag{1102}$$

$\mathbb{V}_0\sqsubseteq \ker(g)$، $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_+,\mathbb{V}_+)$ مثبت ِ معین، $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_-,\mathbb{V}_-)$ منفی یِ معین، و $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_+,\mathbb{V}_-)$ صفر است. در این صورت $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_+\oplus\mathbb{V}_-,\mathbb{V}_+\oplus\mathbb{V}_-)$ ناتکین است و

$$\mathbb{V}_0=\ker(g). \tag{1103}$$

ضمناً $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_0\oplus\mathbb{V}_+,\mathbb{V}_0\oplus\mathbb{V}_+)$ مثبت ِ شبهِ‌معین، $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_0\oplus\mathbb{V}_-,\mathbb{V}_0\oplus\mathbb{V}_-)$ منفی یِ شبهِ‌معین، و $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_+,\mathbb{V}_0\oplus\mathbb{V}_-)$ صفر است.

اثبات: می‌گیریم $(v=v_++v_-)\in\ker[\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_+\oplus\mathbb{V}_-,\mathbb{V}_+\oplus\mathbb{V}_-)]$، که $v_+\in\mathbb{V}_+$ و $v_-\in\mathbb{V}_-$. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} g(v_+,v_+)&=g(v,v_+),\\ &=0, \end{aligned} \tag{1104}$$

و از آن‌جا v_+ صفر است. به همین ترتیب ثابت می‌شود v_- صفر است. پس هسته یِ $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_+\oplus\mathbb{V}_-,\mathbb{V}_+\oplus\mathbb{V}_-)$ بدیهی است. (1103) هم از قضیه یِ 303 نتیجه می‌شود. اثبات ِ باقی‌مانده یِ حکم هم فقط به نوشتن نیاز دارد.

■

قضیه یِ 312: فرض کنید $g\in \mathcal{SLF}(\mathbb{R};\mathbb{V},\mathbb{V})$، و

$$\begin{aligned} \mathbb{V}&=\mathbb{V}_+\oplus\mathbb{V}_-,\\ &=\mathbb{V}'_+\oplus\mathbb{V}'_-, \end{aligned} \tag{1105}$$

که $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_+,\mathbb{V}_+)$ و $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}'_+,\mathbb{V}'_+)$ مثبت ِ معین، $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_-,\mathbb{V}_-)$ و $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}'_-,\mathbb{V}'_-)$ منفی یِ شبهِ‌معین، و $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}_+,\mathbb{V}_-)$ و $\mathrm{res}(g;\mathbb{V}'_+,\mathbb{V}'_-)$ صفر است. در این صورت یک نگاشت ِ خطی یِ یک‌به‌یک از $\mathbb{V}_+$ به $\mathbb{V}'_+$، و یک نگاشت ِ خطی یِ یک‌به‌یک از $\mathbb{V}_-$ به $\mathbb{V}'_-$ هست. اگر بین ِ $\mathbb{V}_+$ و $\mathbb{V}'_+$ دستِ‌کم یک ی باپایان‌بعدی باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{V}'_+\sim\mathbb{V}_+. \tag{1106}$$

اگر بین ِ $\mathbb{V}_-$ و $\mathbb{V}'_-$ دستِ‌کم یک ی باپایان‌بعدی باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{V}'_- \sim \mathbb{V}_-. \tag{1107}$$

اثبات: به ازا یِ هر $v \in \mathbb{V}$، بردارها یِ یک‌تا یِ $v'_+ \in \mathbb{V}'_+$ و $v'_- \in \mathbb{V}'_-$ هستند که

$$v = v'_+ + v'_-. \tag{1108}$$

نگاشت ِ $P_+ \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}'_+, \mathbb{V}_+)$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$P_+(v) := v'_+. \tag{1109}$$

روشن است که این نگاشت خطی است. فرض کنید $v \in \mathbb{V}_+$، و $P_+(v)$ صفر است. از (1108) نتیجه می‌شود

$$g(v, v) \le 0, \tag{1110}$$

چون $v'_- \in \mathbb{V}'_-$. اما چون $v \in \mathbb{V}_+$، ضمناً داریم

$$g(v, v) \ge 0. \tag{1111}$$

از این و (1110) نتیجه می‌شود

$$g(v, v) = 0, \tag{1112}$$

و چون $v \in \mathbb{V}_+$، پس خود ِ v صفر است. این نشان می‌دهد P_+ یک‌به‌یک است.

نگاشت ِ $P_- \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V}'_-, \mathbb{V}_-)$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$P_-(v) := v'_-. \tag{1113}$$

اگر v'_- صفر باشد، آن‌گاه $v \in \mathbb{V}'_+$، و در نتیجه $g(v, v)$ نامنفی است. اما ضمناً $v \in \mathbb{V}_-$، و در نتیجه $g(v, v)$ نامثبت است. پس $g(v, v)$ صفر و در نتیجه v صفر است.

روشن است که یک نگاشت ِ خطی یِ یک‌به‌یک هم از $\mathbb{V}'_+$ به $\mathbb{V}_+$ هست. از این‌جا نتیجه می‌شود اگر بین ِ $\mathbb{V}_+$ و $\mathbb{V}'_+$ دستِ‌کم یک ی باپایان‌بعدی باشد، دیگر ی هم چنین است و (1106) درست است. به همین ترتیب، نتیجه می‌شود اگر بین ِ $\mathbb{V}_-$ و $\mathbb{V}'_-$ دستِ‌کم یک ی باپایان‌بعدی باشد، (1107) درست است.

■

قضیه یِ 313: فرض کنید $g \in \mathcal{SLF}(\mathbb{R}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ را می‌شود به شکل ِ

$$\mathbb{V} = \ker(g) \oplus \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_- \tag{1114}$$

نوشت، که $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_+)$ مثبت ِ معین، $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_-, \mathbb{V}_-)$ منفی یِ معین، و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_-)$ صفر است. $\dim(\mathbb{V}_+)$ و $\dim(\mathbb{V}_-)$ به انتخاب ِ $\mathbb{V}_+$ و $\mathbb{V}_-$ بسته‌گی ندارد.

اثبات: $\{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که (1091) را بر آورَد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0 &:= \mathrm{span}\{e_i \mid i, g_i = 0\}, \\ \mathbb{V}_+ &:= \mathrm{span}\{e_i \mid i, g_i > 0\}, \\ \mathbb{V}_- &:= \mathrm{span}\{e_i \mid i, g_i < 0\}. \end{aligned} \tag{1115}$$

دیده می‌شود $\mathbb{V}_0 \sqsubseteq \ker(g)$، و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_+)$ مثبت ِ معین و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_-, \mathbb{V}_-)$ منفی یِ معین و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_-)$ صفر است. طبق ِ قضیه یِ 311، هسته یِ g همان $\mathbb{V}_0$ است. فرض کنید (1114) با $\mathbb{V}'_+$ و $\mathbb{V}'_-$ هم برقرار است. از قضیه یِ 312 نتیجه می‌شود $\mathbb{V}'_+$ با $\mathbb{V}_+$ یک‌ریخت است. پس بُعد ِ این دوفضا یک‌سان است. حکم ِ مشابه ی هم در باره یِ $\mathbb{V}'_-$ و $\mathbb{V}_-$ برقرار است.

■

فرض کنید $g \in \mathcal{SLF}(\mathbb{R}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است که (1091) را بر می‌آورَد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} n_0(g) &:= \dim[\ker(g)], \\ n_+(g) &:= \dim(\mathbb{V}_+), \\ n_-(g) &:= \dim(\mathbb{V}_-), \end{aligned} \tag{1116}$$

که $\mathbb{V}_+$ و $\mathbb{V}_-$ همان زیرفضاها یی اند که در قضیه یِ 313 به کار رفتند. به $(n_0(g); n_+(g), n_-(g))$ نشان‌گان ِ g می‌گویند:

$$\mathrm{sig}(g) := (n_0(g); n_+(g), n_-(g)). \tag{1117}$$

اگر g ناتکین باشد، $n_0(g)$ صفر است و به $(n_+(g), n_-(g))$ نشان‌گان ِ g می‌گویند:

$$\mathrm{sig}(g) := (n_+(g), n_-(g)). \tag{1118}$$

یک نتیجه ي ساده ي قضیه ي 313 این است.

قضیه ي 314: فرض کنید $g \in \mathcal{SLF}(\mathbb{R}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت یک پایه ي $\{e_i \mid i\}$ برا ي $\mathbb{V}$ هست که (1091) را بر می‌آورَد، و هر یک از g_i ها برابر با 0، 1، یا -1 است. تعداد ِ i ها ي با g_i برابر با 0، 1، یا -1 هم به این پایه (که البته (1091) را بر می‌آورَد) بسته‌گی ندارد.

★

به پایه ای که ویژه‌گی‌ها ي بالا را داشته باشد، یک پایه ي یکه‌متعامد برا ي g می‌گوییم. به یک مجموعه ي خطی‌مستقل ِ $\{e_i \mid i\}$ که (1091) را با g_i ها ي برابر با 1 یا (-1) یا 0 بر آورَد هم یک مجموعه ي یکه‌متعامد (متناظر با g) می‌گوییم. اگر (1091) برقرار باشد اما g_i ها لزوماً 1 یا (-1) یا 0 نباشد، می‌گوییم این مجموعه متعامد است.

lvii دوفرم ِ پادمتقارن

می‌گوییم دوفرم ِ $g \in (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})^*$ پادمتقارن است، اگر

$$\forall\ (u, v) \in (\mathbb{V} \times \mathbb{V})\ :\ g(u, v) = -g(v, u). \tag{1119}$$

مجموعه ي دوفرم‌ها ي پادمتقارن ِ عضو ِ $\mathcal{LF}(\mathbb{F}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ را با $\mathcal{ALF}(\mathbb{F}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ نمایش می‌دهیم. از قضیه ي 204 دیده می‌شود $\mathcal{ALF}(\mathbb{F}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ با $(\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})^*$ یک‌ریخت است. به همین خاطر $\mathcal{ALF}(\mathbb{F}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ را با $(\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})^*$ هم نمایش می‌دهیم.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه ي 315: فرض کنید $g \in (\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})^*$. در این صورت

$$\tau_2 g = -\tau_1 g, \tag{1120}$$

که نتیجه می‌دهد (1088) برقرار است.

★

به $\ker_1(g)=\ker_2(g)$ هسته یِ g می‌گوییم و آن را با $\ker(g)$ نمایش می‌دهیم. به $\operatorname{img}_1(g)=\operatorname{img}_2(g)$ هم تصویرِ g می‌گوییم و آن را با $\operatorname{img}(g)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه یِ 316: فرض کنید $g\in(\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})^{*}$ ناتکین، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای مثلِ $\{e_i,f_i\mid i\}$ دارد که

$$
\begin{aligned}
g(e_i,f_j)&=\delta_{i\,j},\\
g(e_i,e_j)&=0,\\
g(f_i,f_j)&=0.
\end{aligned}
\tag{1121}
$$

اثبات: پایه یِ $\{e_i,f_i\mid i\}$ را با استقرا می‌سازیم. e_1 را یک بردارِ ناصفرِ دل‌بخواه در $\mathbb{V}$ می‌گیریم. چون g ناتکین است، بردار ی مثلِ v در $\mathbb{V}$ هست که

$$g(e_1,v)\neq 0. \tag{1122}$$

می‌گیریم

$$f_1:=\frac{1}{g(e_1,v)}\,v. \tag{1123}$$

روشن است که $\{e_1,f_1\}$ رابطه یِ (1121) را با $i,j\le 1$ بر می آوَرَد. ضمناً از قضیه یِ 302 روشن است که $\{e_1,f_1\}$ خطی‌مستقل است.

فرض کنید $\{e_i,f_i\mid i;i\le k\}$ با $(2\,k)<\dim(\mathbb{V})$، رابطه یِ (1121) را با $i,j\le k$ بر می آوَرَد. تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{V}_k:=\operatorname{span}\{e_i,f_i\mid i;i\le k\}. \tag{1124}$$

از قضیه یِ 302 روشن است که $\{e_i,f_i\mid i;i\le k\}$ خطی‌مستقل است. پس

$$\dim(\mathbb{V}_k)=2k. \tag{1125}$$

روشن است که $\operatorname{res}(g;\mathbb{V}_k,\mathbb{V}_k)$ ناتکین است. از قضیه یِ 301 نتیجه می‌شود $\operatorname{res}\{g;[\tau_1 g(\mathbb{V}_k)]^{\mathrm{c}},[\tau_1 g(\mathbb{V}_k)]^{\mathrm{c}}\}$ هم ناتکین است. e_{k+1} را بردارِ دل‌بخواه ی در $[\tau_1 g(\mathbb{V}_k)]^{\mathrm{c}}$ می‌گیریم، و f_{k+1} را بردار یِ در $[\tau_1 g(\mathbb{V}_k)]^{\mathrm{c}}$، چنان که

$$g(e_{k+1}, f_{k+1}) = 1. \tag{1126}$$

به این ترتیب، $\{e_i, f_i \mid i; i \leq k+1\}$ رابطه یِ (1121) را با $i, j \leq (k+1)$ بر می‌آورَد. این حکم را ثابت می‌کند.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 317: فرض کنید $g \in (\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})^*$ ناتکین، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\dim(\mathbb{V})$ زوج است.

★

هم‌چنین مشابه با قضیه یِ 307 ثابت می‌شود

قضیه یِ 318: فرض کنید $g \in (\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})^*$، و $\mathrm{img}(g)$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت هر $\mathrm{edom}(\tau_1 g)$ پایه ای مثل ـِ $\{e_i, f_i \mid i\}$ دارد که (1121) را بر می‌آورَد. به علاوه، هر مجموعه یِ $\{e_i, f_i \mid i\}$ که (1121) را بر آورَد، تعداد ـِ اعضا یَش نا بزرگ‌تر از $\dim[\mathrm{img}(g)]$ است.

★

مشابه با قضیه یِ 308،

قضیه یِ 319: فرض کنید $g \in (\mathbb{V}_{\mathrm{A}}^{\otimes 2})^*$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای مثل ـِ $\{e_i, f_i \mid i\} \cup \{d_k \mid k\}$ دارد که $\mathrm{span}\{d_k \mid k\}$ برابر ـِ $\ker(g)$ است و $\{e_i, f_i \mid i\}$ رابطه یِ (1121) را بر می‌آورَد. به علاوه، به ازا یِ هر پایه یِ $\{e_i, f_i \mid i\} \cup \{d_k \mid k\}$ از $\mathbb{V}$ که $\{e_i, f_i \mid i\}$ رابطه یِ (1121) را بر آورَد و $\mathrm{span}\{d_k \mid k\}$ زیرمجموعه یِ $\ker(g)$ باشد، $\mathrm{span}\{d_k \mid k\}$ برابر ـِ $\ker(g)$ است.

★

به پایه ای که ویژه‌گی‌ها یِ بالا را داشته باشد، یک پایه یِ هم‌تافته برا یِ g می‌گوییم.

lviii پیش‌ران ـِ دوفرم

فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. با استفاده از نگاشت‌ها یِ $\tau_i g$ پیش‌ران‌ها یِ pf_i تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{pf}_i := \mathrm{pf}(\tau_i g). \qquad (1127)$$

این پیش‌ران‌ها بردارها را به هم‌بردار و هم‌بردارها را به بردار تبدیل می‌کنند و البته

$$[\mathrm{pf}_i(r)][\mathrm{pf}_i(v)] = r(v). \qquad (1128)$$

اصطلاحاً می‌گویند با دوفرم ِ g می‌شود شاخص‌ها را بالاوپایین برد. مثلاً

$$\begin{aligned} [\mathrm{pf}_2\, v]_i &= g_{i\,j}\, v^j, \\ [\mathrm{pf}_2\, r]^i &= (g^{-1})^{j\,i}\, r_j, \end{aligned} \qquad (1129)$$

که گاه ی آن‌ها را به شکل ِ ساده‌تر ِ

$$\begin{aligned} v_i &= g_{i\,j}\, v^j, \\ r^i &= (g^{-1})^{j\,i}\, r_j, \end{aligned} \qquad (1130)$$

می‌نویسند.

قضیه یِ 320: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت،

$$\begin{aligned} \forall\ (r, s) \in (\mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^*)\ :\ g[(\tau_2 g)^{-1}\, r, (\tau_2 g)^{-1}\, s] &= g[(\tau_1 g)^{-1}\, r, (\tau_1 g)^{-1}\, s], \\ &= g[(\tau_1 g)^{-1}\, s, (\tau_2 g)^{-1}\, r] \end{aligned} \qquad (1131)$$

اثبات: r و s را دو عضو ِ دل‌بخواه ِ $\mathbb{V}^*$ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} g[(\tau_2 g)^{-1}\, r, (\tau_2 g)^{-1}\, s] &= s[(\tau_2 g)^{-1}\, r], \\ &= s\{[(\tau_1 g)^{-1}]^*\, r\}, \\ &= r[(\tau_1 g)^{-1}\, s], \\ &= g[(\tau_1 g)^{-1}\, r, (\tau_1 g)^{-1}\, s], \\ &= g[(\tau_1 g)^{-1}\, s, (\tau_2 g)^{-1}\, r], \end{aligned} \qquad (1132)$$

که همان حکم است.

■

نتیجه یِ این قضیه را می‌شود نوشت

$$\mathrm{pf}_2(g) = \mathrm{pf}_1(g), \tag{1133}$$

یا به شکل ـِ بازشده،

$$[\mathrm{pf}(\tau_2 g)](g) = [\mathrm{pf}(\tau_1 g)](g). \tag{1134}$$

قضیه یِ 321: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت،

$$\forall\ (i,j)\ :\ \mathrm{pf}_i(\tau_j g) = [(\tau_j g)^{-1}]^*. \tag{1135}$$

اثبات:

$$\mathrm{pf}_i(\tau_j g) = [(\tau_i g)^{-1}]^*\,(\tau_j g)\,(\tau_i g)^{-1}. \tag{1136}$$

اگر i و j یک‌سان باشند، حاصلِ‌ضرب ـِ دوعامل ـِ آخر ـِ طرف ـِ راست همانی است. اگر i و j متفاوت باشند هم حاصلِ‌ضرب ـِ دوعامل ـِ اول ـِ طرف ـِ راست همانی است. پس،

$$\mathrm{pf}_i(\tau_j g) = \begin{cases} [(\tau_i g)^{-1}]^*, & i = j \\ (\tau_i g)^{-1}, & i \neq j \end{cases}. \tag{1137}$$

از این رابط هم‌راه با قضیه یِ 293، حکم نتیجه می‌شود.

■

بر حسب ـِ مئلفه‌ها، این قضیه می‌گوید

$$\begin{aligned}[\mathrm{pf}_i(g)]^{j\,k}\,g_{j\,l} &= [\mathrm{pf}_i(g)]^{k\,j}\,g_{l\,j},\\ &= \delta^k_l,\end{aligned} \tag{1138}$$

که گاه برا یِ ساده‌گی آن را چنین می‌نویسند.

$$g^{j\,k}\,g_{j\,l} = g^{k\,j}\,g_{l\,j},$$
$$= \delta^k_l. \tag{1139}$$

هم‌چنین، با استفاده از قضیه‌ها یِ پیش‌ران به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 322: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. اگر $h \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$، آن‌گاه

$$\forall\,(i,j)\ :\ \tau_j[\mathrm{pf}_i(h)] = \mathrm{pf}_i(\tau_j h) \tag{1140}$$

که pf_i ها با g تعریف شده اند. از جمله،

$$\forall\,(i,j)\ :\ \tau_j[\mathrm{pf}_i(g)] = \mathrm{pf}_i(\tau_j g) \tag{1141}$$

★

lix ترانهاده

قضیه یِ 323: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی، و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ و $g_{\mathbb{W}} \in (\mathbb{W}^{\otimes 2})^*$ ناتکین اند. در این صورت متناظر با هر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ دو نگاشت ِ T_1 و T_2 در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{W})$ هست که

$$\forall\,(v,w) \in (\mathbb{V}\times\mathbb{W})\ :\ g_{\mathbb{V}}(T_1\,w, v) = g_{\mathbb{W}}(w, T\,v),$$
$$\forall\,(v,w) \in (\mathbb{V}\times\mathbb{W})\ :\ g_{\mathbb{V}}(v, T_2\,w) = g_{\mathbb{W}}(T\,v, w). \tag{1142}$$

این نگاشت‌ها یک‌تا یند و

$$T_i = (\tau_i g_{\mathbb{V}})^{-1}\,T^*\,(\tau_i g_{\mathbb{W}}). \tag{1143}$$

اثبات: رابطه ای که T_1 آن را بر می آورَد هم‌ارز است با

$$(\tau_1 g_{\mathbb{V}})\,T_1 = T^*\,(\tau_1 g_{\mathbb{W}}), \tag{1144}$$

که این هم هم‌ارز است با

$$T_1 = (\tau_1 g_{\mathbb{V}})^{-1}\, T^*\, (\tau_1 g_{\mathbb{W}}). \tag{1145}$$

اثبات برا یِ T_2 هم کاملاً مشابه است.

■

فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی، و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ و $g_{\mathbb{W}} \in (\mathbb{W}^{\otimes 2})^*$ ناتکین اند. متناظر با $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ نگاشت‌ها یِ $[\mathrm{trans}_1(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T$ و $[\mathrm{trans}_2(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T$ (ترانهاده‌ها یِ T) را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\forall\, i\ :\ [\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T = (\tau_i g_{\mathbb{V}})^{-1}\, T^*\, (\tau_i g_{\mathbb{W}}). \tag{1146}$$

بر حسب ِ مئلفه‌ها،

$$\begin{aligned}
\{[\mathrm{trans}_1(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T\}^a{}_i &= (g_{\mathbb{V}})^{a\,b}\, T^j{}_b\, (g_{\mathbb{W}})_{i\,j},\\
\{[\mathrm{trans}_2(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T\}^a{}_i &= (g_{\mathbb{V}})^{b\,a}\, T^j{}_b\, (g_{\mathbb{W}})_{j\,i}.
\end{aligned} \tag{1147}$$

قضیه یِ 324: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی، و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ و $g_{\mathbb{W}} \in (\mathbb{W}^{\otimes 2})^*$ ناتکین اند. در این صورت اگر $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
[\mathrm{trans}_2(g_{\mathbb{V}};g_{\mathbb{W}})]\{[\mathrm{trans}_1(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T\} &= T,\\
[\mathrm{trans}_1(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]\{[\mathrm{trans}_2(g_{\mathbb{V}};g_{\mathbb{W}})]T\} &= T.
\end{aligned} \tag{1148}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{trans}_2(g_{\mathbb{V}};g_{\mathbb{W}})]\{[\mathrm{trans}_1(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T\} &= (\tau_2 g_{\mathbb{W}})^{-1}\, \{[\mathrm{trans}_1(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})]T\}^*\, (\tau_2 g_{\mathbb{V}}),\\
&= (\tau_2 g_{\mathbb{W}})^{-1}\, (\tau_1 g_{\mathbb{W}})^*\, T\, [(\tau_1 g_{\mathbb{V}})^*]^{-1}\, (\tau_2 g_{\mathbb{V}}),\\
&= T.
\end{aligned} \tag{1149}$$

اثبات ِ تساوی یِ دوم هم کاملاً مشابه است.

■

اثبات ِ قضیه‌ها یِ زیر بسیار ساده است.

قضیه یِ 325: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی، و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ و $g_{\mathbb{W}} \in (\mathbb{W}^{\otimes 2})^*$ ناتکین اند. در این صورت به ازا یِ نگاشت‌ها یِ خطی یِ دل‌بخواه ِ S و T در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ و اسکالرها یِ دل‌بخواه ِ α و β،

$$\forall\, i\ :\ [\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})](\alpha\, S+\beta\, T)=\alpha\,[\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})](S)+\beta\,[\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})](T). \tag{1150}$$

★

قضیه یِ 326: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت،

$$\forall\, i\ :\ [\mathrm{trans}_i(g;g)](1_{\mathbb{V}})=1_{\mathbb{V}}. \tag{1151}$$

★

قضیه یِ 327: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی، و $g_{\mathbb{U}} \in (\mathbb{U}^{\otimes 2})^*$ و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ و $g_{\mathbb{W}} \in (\mathbb{W}^{\otimes 2})^*$ ناتکین اند. در این صورت به ازا یِ نگاشت‌ها یِ دل‌بخواه ِ $S \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$،

$$\forall\, i\ :\ [\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{U}})](T\,S)=\{[\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{V}};g_{\mathbb{U}})](S)\}\,\{[\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})](T)\}. \tag{1152}$$

★

قضیه یِ 328: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی، و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ و $g_{\mathbb{W}} \in (\mathbb{W}^{\otimes 2})^*$ ناتکین اند. در این صورت به ازا یِ نگاشت ِ دل‌بخواه ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ که در $\mathbb{W}$ وارون‌پذیر است، ترانهاده‌ها یِ T هم وارون‌پذیر اند و

$$\forall\, i\ :\ \{[\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{W}};g_{\mathbb{V}})](T)\}^{-1}=[\mathrm{trans}_i(g_{\mathbb{V}};g_{\mathbb{W}})](T^{-1}). \tag{1153}$$

★

قضیه یِ 329: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت به ازا یِ نگاشت ِ دل‌بخواه ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$،

$$\forall\ i\ :\ \det\{[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)\} = \det(T). \tag{1154}$$

هم‌چنین، λ ویژه‌مقدار ِ T است اگر و تنها اگر λ ویژه‌مقدار ِ $[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)$ باشد.
★

از قضیه ی 130 به‌ساده‌گی دیده می‌شود
قضیه یِ 330: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت،

$$\forall\ (\lambda, l, i)\ :\ \mathrm{null}[(T-\lambda)^l] = \mathrm{null}[(T_i-\lambda)^l], \tag{1155}$$

که

$$T_i := [\mathrm{trans}_i(g;g)](T). \tag{1156}$$

از جمله، بُعد ِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ با بُعد ِ ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ $\{[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)\}$ متناظر با λ برابر است. هم‌چنین، اگر $N \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان باشد $N_i := \{[\mathrm{trans}_i(g;g)](N)\}$ هم پوچ‌توان است و

$$\forall\ i\ :\ \mathrm{np}(N) = \mathrm{np}(N_i). \tag{1157}$$

★

از قضیه یِ 131 هم دیده می‌شود
قضیه یِ 331: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت اگر v یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با λ و v_i یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ $\{[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)\}$ متناظر با μ باشد که $\lambda \ne \mu$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} g(v_1, v) &= 0,\\ g(v, v_2) &= 0. \end{aligned} \tag{1158}$$

★

قضیه یِ 332: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در این صورت $[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)$ ها هم ژُردَن‌تجزیه‌پذیر اند و

$$\forall\, i\ :\ \mathrm{sem}\{[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)\} = [\mathrm{trans}_i(g;g)][\mathrm{sem}(T)],$$
$$\mathrm{nil}\{[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)\} = [\mathrm{trans}_i(g;g)][\mathrm{nil}(T)]. \qquad (1159)$$

اگر مجموعه يِ $e_{i,r,s,j}$ ها یک پایه يِ ژُردنی‌گر ـِ T باشد، مجموعه يِ $[(\tau_l g)^{-1}\, e^{i,r,r-s,j}]$ ها یک پایه يِ ژُردنی‌گر ـِ $[\mathrm{trans}_l(g;g)](T)$ است:

$$\{[\mathrm{trans}_l(g;g)](T)\}\,[(\tau_l g)^{-1}\, e^{i,r,s,j}] = \lambda^i\,[(\tau_l g)^{-1}\, e^{i,r,s,j}] + [(\tau_l g)^{-1}\, e^{i,r,s+1,j}], \qquad (1160)$$

که $\lambda^i = \lambda_i$، و مجموعه يِ $e^{i,r,s,j}$ ها دوگان ـِ مجموعه يِ $e_{i,r,s,j}$ ها است.

★

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه يِ 333: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است، $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا يِ ناوردا يِ T است. در این صورت به ازا يِ هر i مجموعه يِ $\mathbb{U}_i$ یک زیرفضا يِ ناوردا يِ $[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)$ است، که

$$\mathbb{U}_1 := \{v \in \mathbb{V} \mid \forall\, u \in \mathbb{U}\ :\ g(v,u) = 0\},$$
$$\mathbb{U}_2 := \{v \in \mathbb{V} \mid \forall\, u \in \mathbb{U}\ :\ g(u,v) = 0\}. \qquad (1161)$$

اثبات: $[\mathrm{trans}_i(g;g)](T)$ را با T_i نمایش می‌دهیم. $v \in \mathbb{U}_1$ را در نظر بگیرید. به ازا يِ بردار ـِ دل‌بخواه ـِ $u \in \mathbb{U}$،

$$g(T_1\, v, u) = g(v, T\, u),$$
$$= 0, \qquad (1162)$$

که نتیجه می‌دهد $(T_1\, v)$ در $\mathbb{U}_1$ است. اثبات ـِ حکم برا يِ T_2 و $\mathbb{U}_2$ هم کاملاً مشابه است.

■

ترانهاده به شکل ی که در بالا تعریف شد، نَه تنها به دوفرم‌ها يِ فضاها يِ مبدئ و مقصد که به یک شاخص هم بسته‌گی دارد. حالت‌ها یی هست که این بسته‌گی حذف می‌شود.

قضیه یِ 334: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ باپایان‌بُعدی، و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ و $g_{\mathbb{W}} \in (\mathbb{W}^{\otimes 2})^*$ ناتکین و هردو متقارن یا هردو پادمتقارن اند. در این صورت اگر $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$، آن‌گاه

$$[\mathrm{trans}_2(g_{\mathbb{W}}; g_{\mathbb{V}})]T = [\mathrm{trans}_1(g_{\mathbb{W}}; g_{\mathbb{V}})]T. \tag{1163}$$

★

وقت ی بین ِ ترانهاده‌ها فرق ی نیست و نگاشت‌هایِ‌دوخطی یِ متناظر هم معلوم اند، برا یِ ترانهاده این نماد ِ ساده‌تر را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{t}} :=&\ [\mathrm{trans}_1(g_{\mathbb{W}}; g_{\mathbb{V}})]T, \\ =&\ [\mathrm{trans}_2(g_{\mathbb{W}}; g_{\mathbb{V}})]T. \end{aligned} \tag{1164}$$

در این حالت حکم ِ قضیه یِ 324 می‌شود

$$(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = T. \tag{1165}$$

هم‌چنین، حکم‌ها یِ قضیه‌ها یِ 325 تا 332 می‌شوند،

$$(\alpha\, S + \beta\, T)^{\mathrm{t}} = \alpha\, S^{\mathrm{t}} + \beta\, T^{\mathrm{t}}, \tag{1166}$$

$$1^{\mathrm{t}} = 1, \tag{1167}$$

$$(T\, S)^{\mathrm{t}} = S^{\mathrm{t}}\, T^{\mathrm{t}}, \tag{1168}$$

$$(T^{-1})^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}})^{-1}, \tag{1169}$$

$$\det(T^{\mathrm{t}}) = \det(T), \tag{1170}$$

$$\mathrm{null}[(T - \lambda)^l] = \mathrm{null}[(T^{\mathrm{t}} - \lambda)^l], \tag{1171}$$

$$\mathrm{np}(N) = \mathrm{np}(N^{\mathrm{t}}), \tag{1172}$$

$$\mathrm{sem}(T^{\mathrm{t}}) = [\mathrm{sem}(T)]^{\mathrm{t}}, \tag{1173}$$

$$\mathrm{nil}(T^{\mathrm{t}}) = [\mathrm{nil}(T)]^{\mathrm{t}}, \tag{1174}$$

$$T^{\mathrm{t}}\, [(\tau_l g)^{-1}\, e^{i,r,s,j}] = \lambda^i\, [(\tau_l g)^{-1}\, e^{i,r,s,j}] + [(\tau_l g)^{-1}\, e^{i,r,s+1,j}], \tag{1175}$$

و این که ویژه‌مقدارها یِ T و T^{t} یک‌سان اند، و اثر ِ g بر دو بردار که یک ی ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ T و دیگری ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ T^{t} است صفر است، مگر

ویژه‌مقدارها یِ متناظر یکسان باشند.

فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ و دوفرم ـِ ناتکین ـِ $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ را در نظر بگیرید. نگاشت‌ها یِ $\tau_i g$ از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{V}^*$ اند و می‌شود ترانهاده یِ این نگاشت‌ها را بررسی کرد. برا یِ این کار دوفرم ـِ متناظر با $\mathbb{V}$ را خود ـِ g، و دوفرم ـِ متناظر با $\mathbb{V}^*$ را $\mathrm{pf}_i(g)$ می‌گیریم (که از قضیه یِ 320 می‌دانیم مستقل از i است).

قضیه یِ 335: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، و $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت،

$$\forall\ (i,j,k)\ :\ \{\mathrm{trans}_k[\mathrm{pf}_i(g),g]\}(\tau_j g) = (\tau_j g)^{-1}. \tag{1176}$$

اثبات:

$$\{\mathrm{trans}_k[\mathrm{pf}_i(g),g]\}(\tau_j g) = (\tau_k g)^{-1}\,(\tau_j g)^*\,[(\tau_k g)^*]^{-1}. \tag{1177}$$

اگر k و j یک‌سان باشند، حاصلِ‌ضرب ـِ دوعامل ـِ آخر ـِ طرف ـِ راست همانی است. اگر k و j متفاوت باشند، حاصلِ‌ضرب ـِ دوعامل ـِ اول ـِ طرف ـِ راست همانی است. در هردو حالت حکم نتیجه می‌شود.

■

نتیجه یِ این قضیه آن است که همه یِ ترانهاده‌ها یی که با خود ـِ g برا یِ $\tau_j g$ تعریف شوند یک‌سان اند. به این ترتیب نتیجه یِ قضیه یِ 335 را می‌شود چنین نوشت.

$$\forall\ j\ :\ (\tau_j g)^{\mathrm{t}} = (\tau_j g)^{-1}, \tag{1178}$$

یا با تسامح و به شکل ـِ ساده‌تر،

$$g^{\mathrm{t}} = g^{-1}, \tag{1179}$$

و بر حسب ـِ مئلفه‌ها،

$$(g^{\mathrm{t}})^{i\,j} = g^{j\,i}. \tag{1180}$$

lx دوفرم و حجم

فضا يِ خطی يِ n بُعدی يِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. هر n تانسور ـِ پادمتقارن با فقط یک عدد مشخص می‌شود. یعنی اگر $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$، برا يِ تعیین ـِ ε کافی است $\varepsilon(e_1, \dots, e_n)$ مشخص شود، که $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه يِ $\mathbb{V}$ است. می‌شود n تانسور ـِ پادمتقارن را به یک دوفرم ـِ ناتکین که بر $\mathbb{V}$ تعیین شده مربوط کرد. متناظر با پایه يِ B، نگاشت ـِ $\delta_B \in \mathcal{LF}(\mathbb{V}; \mathbb{V}^*)$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\forall\, i \ : \ \delta_B(e^i) := e_i, \tag{1181}$$

که $\{e^1, \dots, e^n\}$ دوگان ـِ پایه يِ B است. روشن است که عنصرها يِ ماتریسی يِ δ_B به این شکل اند.

$$(\delta_B)^{i\,j} = \delta^{i\,j}. \tag{1182}$$

می‌گوییم n تانسور ـِ پادمتقارن ـِ ε، درپایه يِ B با دوفرم ـِ ناتکین ـِ $g \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ سازگار است، اگر

$$[\varepsilon(e_1, \dots, e_n)]^2 = \pm \det[\delta_B\,(\tau_1 g)]. \tag{1183}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه يِ 336: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است، و n تانسور ـِ پادمتقارن ـِ $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ در پایه يِ B با g سازگار است. در این صورت ε ناصفر (و بنابراین یک حجم) است.

★

قضیه يِ 337: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است، و حجم ـِ $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ در پایه يِ B با g سازگار است. در این صورت، ε در هر پایه ای با g سازگار است.

اثبات: $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ را یک پایه يِ دل‌بخواه می‌گیریم که اعضا يِ آن با نگاشتِ‌تغییرِپایه يِ Λ به اعضا يِ B مربوط اند:

$$e'_i = \Lambda\, e_i. \tag{1184}$$

داریم

$$\varepsilon(e'_1,\ldots,e'_n) = [\det(\Lambda)]\,\varepsilon(e_1,\ldots,e_n). \tag{1185}$$

هم‌چنین

$$(\delta_{B'})^{i\,j} = (\delta_{B'})^{k\,l}\,\Lambda^i{}_k\,\Lambda^j{}_l, \tag{1186}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\delta_{B'} = \Lambda\,\delta_B\,\Lambda^*. \tag{1187}$$

از این‌جا،

$$\begin{aligned}
\det[\delta_{B'}\,(\tau_1 g)] &= \det[\Lambda\,\delta_B\,\Lambda^*\,(\tau_1 g)],\\
&= [\det(\Lambda)]\,\{\det[\delta_B\,\Lambda^*\,(\tau_1 g)]\},\\
&= [\det(\Lambda)]\,\{\det[(\tau_1 g)\,\delta_B\,\Lambda^*]\},\\
&= [\det(\Lambda)]\,\{\det[(\tau_1 g)\,\delta_B]\}\,[\det(\Lambda^*)],\\
&= [\det(\Lambda)]^2\,\{\det[(\tau_1 g)\,\delta_B]\},\\
&= [\det(\Lambda)]^2\,\{\det[\delta_B\,(\tau_1 g)]\}.
\end{aligned} \tag{1188}$$

از ترکیب ِ این با (1185) نتیجه می‌شود

$$[\varepsilon(e'_1,\ldots,e'_n)]^2 = \pm\det[\delta_{B'}\,(\tau_1 g)], \tag{1189}$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

به این ترتیب سازگاری یِ یک حجم با یک دوفرم به پایه بسته‌گی ندارد و این گزاره که حجم ِ ε با دوفرم ِ g سازگار است مستقل از پایه معنی دارد. معنی یِ سازگاری یِ حجم با دوفرم، برا یِ دوفرم‌ها یِ متقارن بسیار ساده است. فرض کنید B یک پایه یِ یکه‌متعامد برا یِ g است. در این حالت $\varepsilon(e_1,\ldots,e_n)$ برابر ِ ± 1 است. پس سازگاری یِ حجم با دوفرم یعنی حجم ِ متوازی‌السطوح ِ یکه ± 1 است.

سازگاری را می‌شد با $\tau_2 g$ به جا یِ $\tau_1 g$ تعریف کرد. اما این دوتعریف هم‌ارز اند:

قضیه ی 338: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت سازگاری یِ حجم ـ $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ با g هم‌ارز است با این که در یک پایه یِ B

$$[\varepsilon(e_1, \dots, e_n)]^2 = \pm \det[\delta_B\,(\tau_2 g)]. \tag{1190}$$

اثبات: داریم

$$\begin{aligned}
\det[\delta_B\,(\tau_2 g)] &= \det[\delta_B\,(\tau_1 g)^*], \\
&= \det\{[(\tau_1 g)\,(\delta_B)^*]^*\}, \\
&= \det[(\tau_1 g)\,(\delta_B)^*], \\
&= \det\{[(\tau_1 g)\,(\delta_B)], \\
&= \det\{[\delta_B\,(\tau_1 g)]\},
\end{aligned} \tag{1191}$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه ی 339: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی و $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. در این صورت متناظر با n تانسور ـ $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$، پایه یِ $B = \{e_1, \dots, e_n\}$، و به ازا یِ هر i،

$$(\mathrm{pf}_i\varepsilon)(e^1, \dots, e^n) = \frac{1}{\det[\delta_B\,(\tau_1 g)]}\,\varepsilon(e_1, \dots, e_n), \tag{1192}$$

که $\{e^1, \dots, e^n\}$ دوگان ـ پایه یِ B است. از جمله،

$$\mathrm{pf}_2\varepsilon = \mathrm{pf}_1\varepsilon. \tag{1193}$$

★

یک نتیجه یِ این قضیه این است.

قضیه ی 340: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی، $g_{\mathbb{V}} \in (\mathbb{V}^{\otimes 2})^*$ ناتکین است. و $\varepsilon \in (\mathbb{V}^*)^{\wedge n}$ با g سازگار است. در این صورت $\mathrm{pf}_i\,\varepsilon$ هم با g^{t} سازگار است.

اثبات: $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ و $B^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ را دوگان ـ B می‌گیریم. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\delta_{B^*} = (\delta_B)^{-1}. \tag{1194}$$

داریم

$$
\begin{aligned}
[(\mathrm{pf}_i\varepsilon)(e^1,\ldots,e^n)]^2 &= \pm\frac{1}{\det[\delta_B\,(\tau_1 g)]},\\
&= \pm\{\det[(\tau_1 g)^{-1}\,(\delta_B)^{-1}]\},\\
&= \pm\{\det[(\tau_1 g)^{-1}\,(\delta_{B^*})]\},\\
&= \pm\{\det[(\tau_1 g^{\mathrm{t}})\,(\delta_{B^*})]\}, \qquad (1195)
\end{aligned}
$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

XIII

شبهِ‌فرم

lxi نگاشت ِ شبهِ‌خطی

فضاها يِ خطی يِ مختلط ِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ و نگاشت ِ T با دامنه يِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{W}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم T شبهِ‌خطی است، اگر

$$\forall\ (u, v) \in (\mathbb{V} \times \mathbb{V})\ :\ T(u+v) = T(u) + T(v), \tag{1196}$$

و

$$\forall\ (a, v) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{V})\ :\ T(a\, v) = a'\, T(v), \tag{1197}$$

که

$$|a'| = |a|. \tag{1198}$$

مجموعه يِ نگاشت‌ها يِ شبهِ‌خطی با دامنه يِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{W}$ را با $\mathfrak{LF}_{\mathrm{p}}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ نمایش می‌دهیم.

فضاها يِ خطی يِ مختلط ِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ و نگاشت ِ T با دامنه يِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{W}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم T پادخطی است، اگر (1196) برقرار باشد و

$$\forall\,(a,v)\in(\mathbb{C}\times\mathbb{V})\ :\ T(a\,v)=a^\star\,T(v), \tag{1199}$$

که $a^\star$ مزدوجِ مختلطِ a است. به این ترتیب نگاشتِ خطی حالتِ خاص ی از نگاشتِ شبهِخطی است که a' همان a است، و نگاشتِ پادخطی یک حالتِ خاصِ دیگر که a' همان $a^\star$ است.

مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ پادخطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{W}$ را با $\mathfrak{LF}_-(\mathbb{W};\mathbb{V})$ نمایش می‌دهیم. مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{W}$ را با $\mathfrak{LF}_+(\mathbb{W};\mathbb{V})$ هم نمایش می‌دهیم.

قضیه یِ 341: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط و T یک نگاشتِ شبهِخطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت،

$$\forall\,(a,v)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{V})\ :\ T(a\,v)=a\,T(v). \tag{1200}$$

اثبات: اگر مقدارِ T هم‌واره صفر باشد، حکم بدیهی است. در غیرِ این صورت یک بردارِ $v\in\mathbb{V}$ هست که

$$T(v)\neq 0. \tag{1201}$$

a را یک عددِ حقیقی می‌گیریم. داریم

$$T(a\,v)=c\,T(v), \tag{1202}$$

که

$$|c|=|a|. \tag{1203}$$

هم‌چنین،

$$T[(1+a)\,v]=b\,T(v), \tag{1204}$$

و

$$\begin{aligned} T[(1+a)\,v]&=T(v)+T(a\,v),\\ &=(1+c)\,T(v), \end{aligned} \tag{1205}$$

که

$$|b|^2 = 1 + a^2 + 2\,a. \qquad (1206)$$

از (1201)، (1205)، و (1206) نتیجه می‌شود

$$|1 + c|^2 = |1 + a|^2. \qquad (1207)$$

از این رابطه هم‌راه با (1203) معلوم می‌شود

$$c + c^\star = 2\,a, \qquad (1208)$$

که از ترکیب ِ آن با (1203) نتیجه می‌شود

$$c = a. \qquad (1209)$$

■

قضیه یِ 342: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط و T یک نگاشت ِ شبهِ‌خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است، و

$$\forall v \in \mathbb{V}\ :\ T(\mathrm{i}\,v) = a\,T(v), \qquad (1210)$$

در این صورت a ثابت و برابر ِ i یا $(-\mathrm{i})$ است.

اثبات: اگر مقدار ِ T هم‌واره صفر باشد، حکم بدیهی است. در غیر ِ این صورت یک بردار ِ $v \in \mathbb{V}$ هست که (1201) را بر می‌آورَد. داریم

$$T[(1 + \mathrm{i})\,v] = (1 + a)\,T(v), \qquad (1211)$$

و

$$T[(1 + \mathrm{i})\,v] = b\,T(v), \qquad (1212)$$

که

$$|a| = 1, \qquad (1213)$$

$$|b|^2 = 2. \qquad (1214)$$

از (1201)، (1211)، و (1212) نتیجه می‌شود

$$|b|^2 = 1 + |a|^2 + a + a^\star. \tag{1215}$$

از ترکیب ِ این با (1213) و (1214) هم نتیجه می‌شود

$$a + a^\star = 0, \tag{1216}$$

که هم‌راه با (1213) نتیجه می‌دهد a برابر ِ i یا $(-\mathrm{i})$ است.

برا یِ نشان‌دادن ِ این که a ثابت است، یک بردار ِ دیگر ِ u در $\mathbb{V}$ می‌گیریم. داریم

$$T(\mathrm{i}\,u) = c\,T(u). \tag{1217}$$

اگر $T(u)$ صفر باشد حکم بدیهی است (می‌شود c را همان a گرفت). پس فرض می‌کنیم چنین نیست. داریم

$$\begin{aligned} c\,T(u) + a\,T(v) &= T[\mathrm{i}\,(u+v)], \\ &= d\,T(u) + d\,T(v), \end{aligned} \tag{1218}$$

که c و d هم هر کدام i یا $(-\mathrm{i})$ اند. می‌خواهیم نشان دهیم c با a برابر است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت d با a یا c برابر است. اگر $d = a \ne c$، آن‌گاه $T(u)$ صفر می‌شود که با فرض ناسازگار است. اگر هم $d = c \ne a$، آن‌گاه $T(v)$ صفر می‌شود که باز هم با فرض ناسازگار است. پس a با c برابر است. یعنی a در (1210) مستقل از v است.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ دوقضیه یِ 341 و 342 این است که

قضیه یِ 343: هر نگاشت ِ شبهِخطی یی، یا خطی است یا پادخطی.

★

هر نگاشت ِ شبهِخطی، با اسکالرها یِ حقیقی خطی است. قضیه یِ بَعد می‌گوید عکس ِ این موضوع هم با یک شرط ِ اضافه درست است.

قضیه یِ 344: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ مختلط اند، و T یک نگاشت با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{W}$ است که (1196) و (1200) را بر می‌آورَد (یعنی با اسکالرها یِ حقیقی خطی است)، و

$$\forall v \in \mathbb{V} \;:\; T(\mathrm{i}\, v) = \pm \mathrm{i}\, T(v). \tag{1219}$$

در این صورت T شبهِ‌خطی است. توجه کنید که فرض نشده ضریب ِ $T(v)$ در طرف ِ راست مستقل از v است.

اثبات: عددها یِ حقیقی یِ a_1 و a_2 را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} T[(a_1 + \mathrm{i}\, a_2)\, v] &= T(a_1\, v) + T(\mathrm{i}\, a_2\, v),\\ &= (a_1 \pm \mathrm{i}\, a_2)\, T(v). \end{aligned} \tag{1220}$$

اما

$$|a_1 + \mathrm{i}\, a_2| = |a_1 \pm \mathrm{i}\, a_2|. \tag{1221}$$

به این ترتیب (1197) با (1198) برقرار است.

■

هسته یِ یک نگاشت ِ شبهِ‌خطی مجموعه یِ بردارها یی است که اثر ِ آن نگاشت بر آن‌ها صفر می‌شود. هسته یِ نگاشت ِ شبهِ‌خطی یِ T را با $\ker(T)$ نمایش می‌دهیم. هسته‌جدابودن، پوچی، رتبه، و دامنه یِ مئثر ِ یک نگاشت ِ شبهِ‌خطی را هم مثل ِ مانسته‌ها یِ مربوط به نگاشت‌ها یِ خطی تعریف می‌کنیم. به‌ساده‌گی دیده می‌شود مانسته یِ قضیه‌ها یِ 24 تا 29، برا یِ نگاشت‌ها یِ شبهِ‌خطی هم درست اند.

قضیه یِ 345: تصویر و هسته یِ هر نگاشت ِ شبهِ‌خطی فضاها یی خطی اند.

★

قضیه یِ 346: یک نگاشت ِ شبهِ‌خطی یک‌به‌یک است، اگر و تنها اگر هسته یِ آن $\{0\}$ باشد.

★

قضیه یِ 347: فرض کنید $T \in \mathfrak{L}\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، و بُعد ِ $\mathbb{W}$ باپایان است. در این صورت، اگر بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان و بزرگ‌تر از بُعد ِ $\mathbb{W}$ باشد، یا $\mathbb{V}$ بی‌پایان‌بُعدی باشد، آن‌گاه T یک‌به‌یک نیست.

★

قضیه یِ 348: فرض کنید نگاشت ِ $T\in \mathfrak{LF}_{\mathrm{p}}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ هسته‌جدا است. در این صورت یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ مثل ِ $\mathbb{V}_1$ هست که

$$\mathbb{V}=\mathbb{V}_1\oplus \ker(T), \tag{1222}$$

و $\mathrm{res}(T;\mathbb{V}_1)$ یک‌به‌یک و تصویر َش $\mathrm{img}(T)$ است.

★

قضیه یِ 349: فرض کنید $T\in \mathfrak{LF}_{\mathrm{p}}(\mathbb{W};\mathbb{V})$. در این صورت بُعد ِ $\mathrm{img}(T)$ باپایان است، اگر و تنها اگر T هسته‌جدا و بُعد ِ $\mathrm{edom}(T)$ باپایان باشد. هر یک از این دوگزاره یِ هم‌ارز که برقرار باشد، بُعد ِ $\mathrm{edom}(T)$ با بُعد ِ $\mathrm{img}(T)$ برابر است.

★

قضیه یِ 350: فرض کنید $T\in \mathfrak{LF}_{\mathrm{p}}(\mathbb{W};\mathbb{V})$، و بُعد ِ $\mathbb{V}$ باپایان است. در این صورت بُعد ِ هسته و تصویر ِ T هم باپایان است و مجموع ِ این دوبُعد برابر است با بُعد ِ $\mathbb{V}$.

★

تعریف ِ نگاشت‌ها یِ چندشبهِ‌خطی هم کاملاً سرراست است. $\mathbb{V}_1$ تا $\mathbb{V}_k$ و $\mathbb{W}$ را فضاها یِ خطی یِ مختلط ی بگیرید. می‌گوییم نگاشت ِ T با دامنه یِ $(\mathbb{V}_1\times\cdots\times\mathbb{V}_k)$ و مقدار در $\mathbb{W}$ چندشبهِ‌خطی است، اگر این نگاشت نسبت به هر یک از $\mathbb{V}_i$ ها شبهِ‌خطی باشد. به همین شکل می‌شود نگاشت‌ها یی را در نظر گرفت که مثلاً نسبت به $\mathbb{V}_1$ خطی، نسبت به $\mathbb{V}_2$ پادخطی، و نسبت به $\mathbb{V}_3$ شبهِ‌خطی باشند. $\mathfrak{LF}_{+\,-\,\mathrm{p}}(\mathbb{W};\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2,\mathbb{V}_3)$ نشان‌دهنده یِ مجموعه یِ نگاشت‌ها یی از این نوع است که دامنه یِشان $(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2\times\mathbb{V}_3)$ است و در $\mathbb{W}$ مقدار می‌گیرند.

از جمله، اگر $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ مختلط باشند، به هر عضو ِ $\mathfrak{LF}_{\mathrm{p\,p}}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{W})$ یک دوشبهِ‌فرم می‌گوییم. متناظر با g در $\mathfrak{LF}_{\alpha\,\beta}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{W})$ دو نگاشت ِ $\tau_1 g\in\mathfrak{LF}_{\alpha}[\mathfrak{LF}_{\beta}(\mathbb{C};\mathbb{W});\mathbb{V}]$ و $\tau_2 g\in\mathfrak{LF}_{\beta}[\mathfrak{LF}_{\alpha}(\mathbb{C};\mathbb{V});\mathbb{W}]$ تعریف می‌شود که کاملاً مشابه ِ تعریف ِ متناظر برا یِ نگاشت‌ها یِ خطی یعنی رابطه‌ها یِ (1047) است. α و β هر کدام ممکن است p، $+$، یا $-$ باشند. به همین ترتیب، مشابه با (1052) دو هسته برا یِ g تعریف می‌شود که هسته‌ها یِ $\tau_1 g$ و $\tau_2 g$ اند. می‌گوییم g ناتکین است، اگر $\tau_1 g$ و $\tau_2 g$ هردو بدیهی باشند.

lxii مختلط‌شده ي یک فضا ي خطی ي حقیقی

فضا ي خطی ي $\mathbb{V}$ با میدان ـ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ هم یک فضا ي خطی ي حقیقی است. حاصل‌ِضرب ـ یک عدد ـ مختلط در یک عضو ـ $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\forall\,[(a,b),u,v]\in(\mathbb{C}\times\mathbb{V}\times\mathbb{V})\ :\ (a,b)\,(u,v):=(a\,u-b\,v,a\,v+b\,u). \qquad (1223)$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه ي 351: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ي خطی ي حقیقی است. در این صورت مجموعه ي بردارها ي $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ و میدان ـ $\mathbb{C}$، هم‌راه با حاصل‌ِجمع ـ معمول ـ بردارها در فضا ي حقیقی ي $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ و حاصل‌ِضرب ـ تعریف‌شده در (1223) یک فضا ي خطی (ي مختلط) است.

★

دیده می‌شود معنی ي این تعریف عملاً این است که فضا ي خطی ي $\mathbb{V}$ را به مجموعه ي عنصرها یی به شکل ـ $(u+\mathrm{i}\,v)$ گسترش دهیم که u و v عضو ـ $\mathbb{V}$ اند، و با i،

$$\mathrm{i}:=(0,1), \qquad (1224)$$

همان طور رفتار کنیم که با اسکالرها ي حقیقی رفتار می‌کردیم، جز این که

$$\mathrm{i}^2=-1. \qquad (1225)$$

به فضا ي خطی ي مختلط ی که به این شکل از فضا ي خطی ي حقیقی ي $\mathbb{V}$ ساخته می‌شود مختلط‌شده ي $\mathbb{V}$ می‌گوییم و آن را با $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ نشان می‌دهیم.

به ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه ي 352: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ي خطی ي حقیقی ي n بُعدی است. در این صورت $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ یک فضا ي خطی ي مختلط ـ n بُعدی است.

★

پس $\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ با $\mathbb{C}^n$ یک‌ریخت است. این را برا ي ساده‌گی به شکل ـ

$$\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{C}^n \qquad (1226)$$

هم می‌نویسیم.

توجه داریم که اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی یِ n بُعدی باشد، آن‌گاه $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی یِ $(2\,n)$ بُعدی است.

فضاها یِ خطی یِ حقیقی یِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$، و T_1 و T_2 در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. با استفاده از این‌ها نگاشت ـِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\times\mathbb{W};\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\forall\,(u,v)\in(\mathbb{V}\times\mathbb{V})\ :\ T(u,v):=[T_1(u,v),T_2(u,v)]. \tag{1227}$$

توجه داریم که این تعریف دوسویه است. یعنی با معلوم‌بودن ـِ نگاشت ـِ T هم می‌شود نگاشت‌ها یِ T_1 و T_2 را تعریف کرد. ضمناً هر یک از نگاشت‌ها یِ خطی یِ T_1 و T_2 با دو نگاشت در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ تعیین می‌شود:

$$T_i(u,v)=T_{i\,1}(u)+T_{i\,2}(v), \tag{1228}$$

که هر یک از $T_{i\,j}$ ها عضو ـِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ است. به این ترتیب، هر عضو ـِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\times\mathbb{W};\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ با چهار عضو ـِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ مشخص می‌شود.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 353: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یِ خطی یِ حقیقی یی اند، T_1 و T_2 در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ اند، و T در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\times\mathbb{W};\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ با (1227) تعریف شده است. در این صورت

$$\forall\,v\in\mathbb{V}\ :\ T(0,v)=-(0,1)\,T(v,0), \tag{1229}$$

اگر و تنها اگر

$$\forall\,v\in\mathbb{V}\ :\ \{[T_1(0,v)=T_2(v,0)]\wedge[T_2(0,v)=-T_1(v,0)]\}. \tag{1230}$$

در (1229)، حاصلِ‌ضرب ـِ طرف ـِ راست مثل ـِ (1223) تعریف شده است.

★

رابطه‌ها یِ (1229) و (1230) را می‌شود به این شکل‌ها یِ ساده‌تر هم نوشت.

$$T(\mathrm{i}\,z)=-\mathrm{i}\,T(z), \tag{1231}$$

و

$$T_2(z) = T_1(\mathrm{i}\, z). \tag{1232}$$

در این صورت T به شکل ِ ساده می‌شود

$$T(z) = T_1(z) + \mathrm{i}\, T_1(\mathrm{i}\, z). \tag{1233}$$

با این شکل رابطه ي (1231) کاملاً بدیهی می‌شود.

قضیه ي 354: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها ي خطی ي حقیقی یی اند، T_1 و T_2 در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}\times\mathbb{V})$ اند، و T در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\times\mathbb{W}; \mathbb{V}\times\mathbb{V})$ با (1227) تعریف شده است. در این صورت T پادخطی است اگر و تنها اگر T_1 و T_2 شرط‌ها ي (1230) را بر آورند.

★

نتیجه ي این حرف‌ها آن است که یک عضو ِ $\mathfrak{LF}_-[\mathrm{K}(\mathbb{W}); \mathrm{K}(\mathbb{V})]$، ضمناً یک عضو ِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\times\mathbb{W}; \mathbb{V}\times\mathbb{V})$ است. چنین‌نگاشت ی با دو عضو ِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}\times\mathbb{V})$ تعیین می‌شود. اما این دونگاشت مستقل از هم نیستند و یک ی از آن‌ها را می‌شود بر حسب ِ دیگر ی نوشت.

مانسته ي این‌ها برا ي یک نگاشت ِ خطی در مختلط‌شده ي یک فضا ي حقیقی چنین است.

قضیه ي 355: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها ي خطی ي حقیقی یی اند، T_1 و T_2 در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V}\times\mathbb{V})$ اند، و T در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}\times\mathbb{W}; \mathbb{V}\times\mathbb{V})$ با (1227) تعریف شده است. در این صورت T خطی است اگر و تنها اگر

$$\forall\, v \in \mathbb{V}\ :\ \{[T_1(0,v) = -T_2(v,0)] \wedge [T_2(0,v) = T_1(v,0)]\}. \tag{1234}$$

★

شرط ِ (1234) هم به شکل ِ ساده‌تر یعنی

$$T_2(z) = -T_1(\mathrm{i}\, z), \tag{1235}$$

نوشت، که از آن نتیجه می‌شود

$$T(z) = T_1(z) - \mathrm{i}\, T_1(\mathrm{i}\, z). \tag{1236}$$

به این ترتیب، هر نگاشت ـِ خطی یا پادخطی با دو عضو ـِ $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ تعیین می‌شود.

فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ حقیقی اند. می‌گوییم $T\in\mathfrak{LF}_{\rm p}[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ حقیقی است، اگر

$$T(\mathbb{V}\times\{0\})\sqsubseteq(\mathbb{W}\times\{0\}). \tag{1237}$$

مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ حقیقی یِ عضو ـِ $\mathfrak{LF}_\alpha[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ (با α برابر ـِ $+$، $-$، یا p) را با $\mathfrak{RLF}_\alpha[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ نمایش می‌دهیم. مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ حقیقی یِ عضو ـِ $\mathfrak{LF}[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ را هم با $\mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی است. مزدوج ـِ مختلط ـِ $z\in\mathrm{K}(\mathbb{V})$ با

$$z=(u,v) \tag{1238}$$

را با $z^\star$ نمایش می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم.

$$z^\star:=(u,-v). \tag{1239}$$

مزدوج ـِ مختلط ـِ یک زیرمجموعه یِ $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ مثل ـِ $\mathbb{S}$ را هم مجموعه یِ همه یِ بردارها یی تعریف می‌کنیم که هر مزدوج ـِ مختلط ـِ یک بردار در $\mathbb{S}$ است. این مجموعه را $\mathbb{S}^\star$ نمایش می‌دهیم.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 356: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ است. در این صورت $\mathbb{U}^\star$ یک زیرفضا یِ $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ است.

★

قضیه یِ 357: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ حقیقی اند. در این صورت $T\in\mathfrak{LF}_{\rm p}[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ حقیقی است، اگر و تنها اگر

$$\forall\ z\in[\mathrm{K}(\mathbb{V})]\ :\ T(z^\star)=[T(z)]^\star. \tag{1240}$$

★

قضیه یِ 358: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی است، و S و T در $\mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{V});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ اند. در این صورت $(S\,T)$ در $\mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{V});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ است. هم‌چنین، هر ترکیب ـِ خطی یِ S و T با ضریب‌ها یِ حقیقی در $\mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{V});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ است. از جمله،

اگر P یک چندجمله‌ای با ضریب‌ها یِ حقیقی باشد، آن‌گاه $P(T)$ در $\mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{V});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ است.

★

قضیه یِ 359: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی است، و $T \in \mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{V});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$. در این صورت

$$\forall\, z \in [\mathrm{K}(\mathbb{V})]\ :\ [P^{\star}(T)](z^{\star}) = \{[P(T)](z)]\}^{\star}. \tag{1241}$$

★

چندجمله‌ای یِ مختلط ـِ P را در نظر بگیرید. مزدوج ـِ مختلط ـِ P را چندجمله‌ای یی تعریف می‌کنیم که ضریب‌ها یَش مزدوج ـِ متخلط ـِ ضریب‌ها یِ متناظر در P اند. مزدوج ـِ مختلط ـِ P را با $P^{\star}$ نمایش می‌دهیم. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 360: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی، و $T \in \mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{V});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در این صورت $\mathrm{sem}(T)$ و $\mathrm{nil}(T)$ حقیقی اند.

اثبات: $\mathrm{sem}(T)$ را با S و $\mathrm{nil}(T)$ را با N نمایش می‌دهیم. چندجمله‌ای‌ها یِ P و Q هستند که

$$\begin{aligned} S &= P(T),\\ N &= Q(T). \end{aligned} \tag{1242}$$

$\mathbb{V}_i$ را ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_i می‌گیریم. در این صورت اگر $z_i \in \mathbb{V}_i$، آن‌گاه

$$S\, z_i = \lambda_i\, z_i. \tag{1243}$$

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} S' &:= P^{\star}(T),\\ N' &:= Q^{\star}(T). \end{aligned} \tag{1244}$$

نشان می‌دهیم S' شبهِ‌ساده است. برا یِ این کار $z \in \mathbb{V}$ را در نظر می‌گیریم. بردارها یِ $s_i \in \mathbb{V}_i$ هستند که

$$z^\star = \sum\nolimits_i s_i. \tag{1245}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$z = \left(\sum\nolimits_i s_i^\star\right), \tag{1246}$$

و

$$\begin{aligned} S'\, z &= [P^\star(T)] \left(\sum\nolimits_i s_i^\star\right), \\ &= \sum_i \{[P(T)] s_i\}^\star, \\ &= \sum\nolimits_i (\lambda_i\, s_i)^\star, \\ &= \sum\nolimits_i \lambda_i^\star\, s_i^\star. \end{aligned} \tag{1247}$$

پس z را می‌شود به شکل ِ مجموع ِ $s_i^\star$ ها نوشت که به ازا یِ هر i بردار ِ s_i در زیرفضا یِ $\mathbb{V}_i^\star$ است، و اثر ِ S' بر هر بردار در $\mathbb{V}_i^\star$ این است که آن بردار در $\lambda_i^\star$ ضرب می‌شود. این نشان می‌دهد S' شبهِساده است.

به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد N' هم پوچ‌توان است. از این که T حقیقی است معلوم می‌شود T مجموع ِ S' و N' است. به این ترتیب T مجموع ِ دو نگاشت است که اولی (S') شبهِساده و دومی (N') پوچ‌توان است، و این دونگاشت با هم جابه‌جا می‌شوند (چون هر کدام یک چندجمله‌ای از T اند). از یک‌تایی یِ تجزیه یِ ژُردَن نتیجه می‌شود S' همان S، و N' همان N است. پس چندجمله‌ای‌ها یِ P و Q حقیقی اند. این حکم را ثابت می‌کند.

■

می‌گوییم تابع ِ f از متغیرها یِ مختلط حقیقی است، اگر به ازا یِ هر λ و k که $f^{(k)}(\lambda)$ تعریف شده باشد، $f^{(k)}(\lambda^\star)$ هم تعریف شده باشد و

$$f^{(k)}(\lambda^\star) = [f^{(k)}(\lambda)]^\star. \tag{1248}$$

با استفاده از قضیه یِ 360، به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود

قضیه یِ 361: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی و $T \in \mathcal{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{V}); \mathrm{K}(\mathbb{V})]$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است، و f یک تابع ِ حقیقی است که $f(T)$ تعریف شده است. در این صورت $f(T)$ حقیقی است.

★

lxiii بخشِ‌حقیقی یِ یک فضا یِ خطی یِ مختلط

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط است. می‌گوییم $\mathrm{cc} \in \mathcal{LF}_{-}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$ یک برگشت است اگر

$$\mathrm{cc}^2 = 1_{\mathbb{V}}. \tag{1249}$$

نگاشت‌ها یِ Re و Im با دامنه یِ $\mathbb{V}$ را هم چنین تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{Re} := \frac{1}{2}\,(1 + \mathrm{cc}),$$

$$\mathrm{Im} := \frac{-\mathrm{i}}{2}\,(1 - \mathrm{cc}). \tag{1250}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 362: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط، و cc یک برگشت بر آن است. در این صورت،

$$\begin{aligned}\mathrm{cc}\ \mathrm{Re} &= \mathrm{Re}\ \mathrm{cc},\\ &= \mathrm{Re},\end{aligned} \tag{1251}$$

و

$$\mathrm{cc}\ \mathrm{Im} = -\mathrm{Im}\ \mathrm{cc},$$

$$= \mathrm{Im}. \tag{1252}$$

هم‌چنین،

$$\forall\, v \in \mathbb{V} \;:\; \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Re}(-\mathrm{i}\, v), \tag{1253}$$

و

$$\forall\, v \in \mathbb{V} \;:\; v = \mathrm{Re}(v) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(v), \tag{1254}$$

و

$$\forall\, v \in \mathbb{V} \;:\; \mathrm{cc}(v) = \mathrm{Re}(v) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(v). \tag{1255}$$

★

نگاشت‌ها یِ cc، Re، و Im، تعمیم ِ نگاشت‌ها یِ مزدوجِ‌مختلط، بخشِ‌حقیقی، و بخشِ‌موهومی بر عددها یِ مختلط اند. البته این نگاشت‌ها یک‌تا نیستند. اما به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 363: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط ِ باپایان‌بعدی، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ آن است. در این صورت cc با تعریف ِ

$$\forall\, (v = v^i\, e_i) \in \mathbb{V} \;:\; \mathrm{cc}(v) := (v^i)^\star\, e_i, \tag{1256}$$

یک برگشت است.

★

قضیه یِ 364: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی است. در این صورت cc با تعریف ِ

$$\forall\, (u, v) \in \mathbb{V} \;:\; \mathrm{cc}(u, v) := (u, v)^\star, \tag{1257}$$

یک برگشت بر $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ است.

★

به این برگشت، برگشت ِ طبیعی می‌گوییم.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 365: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط، و cc یک برگشت بر آن است. در این صورت $\mathrm{Re}(\mathbb{V})$ با جمع ِ تعریف‌شده در $\mathbb{V}$ و با ضرب ِ اسکالرها یِ حقیقی در بردارها به شکل ی که در $\mathbb{V}$ تعریف شده، یک فضا یِ خطی یِ حقیقی است.

★

به $\mathrm{Re}(\mathbb{V})$ بخشِ‌حقیقی یِ $\mathbb{V}$ می‌گوییم. البته توجه داریم که این زیرمجموعه یک‌تا نیست، چون cc یک‌تا نیست.

قضیه یِ 366: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط، و cc یک برگشت بر آن است. در این صورت بین ِ $\mathbb{V}$ و $\mathrm{K}[\mathrm{Re}(\mathbb{V})]$ یک تناظر ِ یک‌به‌یک هست.

اثبات: نگاشت ِ t با دامنه یِ $\mathbb{V}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\forall\, v \in \mathbb{V}\ :\ t(v) := [\mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v)]. \tag{1258}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود این نگاشت یک‌به‌یک است. برا یِ این که پوشابودن ِ آن در $\mathrm{K}[\mathrm{Re}(\mathbb{V})]$ را نشان دهیم، توجه می‌کنیم که اعضا یِ $\mathrm{K}[\mathrm{Re}(\mathbb{V})]$ دوتایی‌ها یی به شکل ِ $[\mathrm{Re}(u), \mathrm{Re}(w)]$ یند. داریم

$$t[\mathrm{Re}(u) + \mathrm{i}\mathrm{Re}(w)] = [\mathrm{Re}(u), \mathrm{Re}(w)], \tag{1259}$$

که نشان می‌دهد t در $\mathrm{K}[\mathrm{Re}(\mathbb{V})]$ پوشا است.

■

هم‌چنین،

قضیه یِ 367: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی، و cc برگشت ِ طبیعی بر $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ است. در این صورت بین ِ $\mathbb{V}$ و $\mathrm{Re}[\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ یک تناظر ِ یک‌به‌یک هست.

اثبات: نگاشت ِ t با دامنه یِ $\mathbb{V}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\forall\, v \in \mathbb{V}\ :\ t(v) := (v, 0). \tag{1260}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود این نگاشت یک‌به‌یک و در $\mathrm{Re}[\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ پوشا است.

■

سرانجام،

قضیه یِ 368: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ حقیقی اند. در این صورت متناظر با هر $T \in \mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{W}); \mathrm{K}(\mathbb{V})]$ یک و تنها یک $T' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ هست که

$$\forall\, v \in \mathbb{V}\ :\ [T(v,0) = T'(v)], \tag{1261}$$

و متناظر با هر $T' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ هم یک و تنها یک $T \in \mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{W});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ هست که رابطه یِ بالا را بر می‌آورَد.

اثبات: بخش ِ اول ِ حکم بدیهی است: کافی است (1261) را تعریف ِ T' بگیریم. برا یِ اثبات ِ بخش ِ دوم، (u,v) را بردار ی دل‌بخواه در $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} T(u,v) &= T(u,0) + \mathrm{i}\, T(v,0),\\ &= [T'(u), T'(v)], \end{aligned} \tag{1262}$$

که با آن T از رو یِ T' ساخته می‌شود. به‌ساده‌گی دیده می‌شود این T در $\mathfrak{RLF}[\mathrm{K}(\mathbb{V});\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ است.

■

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی است. به T و T' در قضیه یِ بالا، به ترتیب مختلط‌شده یِ T' و شکلِ‌حقیقی یِ T می‌گوییم و آن‌ها را با به ترتیب $\mathrm{K}(T')$ و $\mathrm{R}(T)$ نمایش می‌دهیم.

وقت ی با فضاها یِ باپایان‌بُعدی کار می‌کنیم، رابطه یِ یک فضا یِ حقیقی و مختلط‌شده یِ آن، یک فضا یِ مختلط و بخشِ‌حقیقی یِ آن، یک نگاشت ِ خطی بر یک فضا یِ حقیقی و مختلط‌شده یِ آن، و یک نگاشت ِ خطی یِ حقیقی بر مختلط‌شده یِ یک فضا یِ حقیقی و بخشِ‌حقیقی یِ آن بسیار ساده است. کافی است متناظر با هر فضا و مختلط‌شده یا بخشِ‌حقیقی یِ آن یک پایه در فضا یِ حقیقی بگیریم. فضاها یِ حقیقی و مختلط ِ متناظر مجموعه یِ ترکیب‌ها یِ خطی یِ به‌ترتیب حقیقی و مختلط ِ این پایه اند. در چنین‌پایه ای، عنصرها یِ ماتریسی یِ نگاشت‌ها یِ حقیقی بر فضاها یِ مختلط حقیقی و با عنصرها یِ ماتریسی یِ شکلِ‌حقیقی یِشان برابر اند.

lxiv شبهِ‌دوفرم ِ بازتابی

فضاها یِ خطی یِ مختلط ِ $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ و نگاشت ِ g با دامنه یِ $(\mathbb{V}\times\mathbb{W})$ و مقدار در $\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید، که با اسکالرها یِ حقیقی دوخطی است. می‌گوییم g یک شبهِ‌دوفرم ِ بازتابی

است اگر

$$\forall\ (v,w) \in (\mathbb{V} \times \mathbb{W})\ :\ g(\mathrm{i}\,v, \mathrm{i}\,w) = g(v,w). \tag{1263}$$

قضیه یِ 369: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ خطی یِ مختلط اند و g یک شبهِدوفرم ـِ بازتابی با دامنه یِ $(\mathbb{V} \times \mathbb{W})$ است. در این صورت دوشبهِفرم‌ها یِ یک‌تا یِ g_1 و g_2 هستند که

$$g = g_1 + g_2, \tag{1264}$$

چنان که $g_1 \in \mathfrak{LF}_{+-}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{W})$ و $g_1 \in \mathfrak{LF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{W})$. داریم

$$g_1(v,w) = \frac{1}{2}\, g(v,w) + \frac{\mathrm{i}}{2}\, g(v, \mathrm{i}\, w), \tag{1265}$$

$$g_2(v,w) = \frac{1}{2}\, g(v,w) - \frac{\mathrm{i}}{2}\, g(v, \mathrm{i}\, w). \tag{1266}$$

اثبات: g_1 را به شکل ـِ (1265) تعریف می‌کنیم. از این که g با اسکالرها یِ حقیقی خطی است نتیجه می‌شود g_1 هم چنین است. داریم

$$\begin{aligned} g_1(v, \mathrm{i}\, w) &= \frac{1}{2}\, g(v, \mathrm{i}\, w) - \frac{\mathrm{i}}{2}\, g(v,w), \\ &= -\mathrm{i}\, \left[\frac{1}{2}\, g(v,w) + \frac{\mathrm{i}}{2}\, g(v, \mathrm{i}\, w)\right], \end{aligned} \tag{1267}$$

که نشان می‌دهد g_1 نسبت به $\mathbb{W}$ پادخطی است. هم‌چنین،

$$\begin{aligned} g_1(\mathrm{i}\, v, w) &= \frac{1}{2}\, g(\mathrm{i}\, v, w) + \frac{\mathrm{i}}{2}\, g(\mathrm{i}\, v, \mathrm{i}\, w), \\ &= -\frac{1}{2}\, g(v, \mathrm{i}\, w) + \frac{\mathrm{i}}{2}\, g(v,w), \\ &= \mathrm{i}\, \left[\frac{1}{2}\, g(v,w) + \frac{\mathrm{i}}{2}\, g(v, \mathrm{i}\, w)\right], \end{aligned} \tag{1268}$$

که نشان می‌دهد g_1 نسبت به $\mathbb{V}$ خطی است. اثبات برا یِ g_2 هم کاملاً مشابه است.

برا يِ اثبات ـِ یک‌تایی، از (1264) شروع می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} g(v, \mathrm{i}\, w) &= g_1(v, \mathrm{i}\, w) + g_2(v, \mathrm{i}\, w), \\ &= -\mathrm{i}\, g_1(v, w) + \mathrm{i}\, g_2(v, w). \end{aligned} \tag{1269}$$

از ترکیب ـِ این با (1264) رابطه‌ها يِ (1265) و (1266) نتیجه می‌شود.

■

شبهِدوفرم ـِ بازتابی، لزوماً نسبت به مئلفه‌ها یَش شبهِخطی، یعنی لزوماً دوشبهِفرم نیست.

قضیه يِ 370: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا يِ خطی يِ مختلط اند و g یک شبهِدوفرم ـِ بازتابی با دامنه يِ $(\mathbb{V}\times\mathbb{W})$ است. در این صورت $g \in \mathfrak{LF}_{\mathrm{p\,p}}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{W})$، اگر و تنها اگر $g \in \mathfrak{LF}_{+\,-}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{W})$ یا $g \in \mathfrak{LF}_{-\,+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{W})$.

اثبات: از شبهِخطی‌بودن ـِ g نسبت به مئلفه‌ها یَش نتیجه می‌شود

$$g(\mathrm{i}\, v, \mathrm{i}\, w) = a\, b\, g(v, w), \tag{1270}$$

که a و b ثابت اند و هر یک از آن‌ها یا i یا $(-\mathrm{i})$ است. از ترکیب ـِ این با (1263) نتیجه می‌شود

$$g(v, w) = a\, b\, g(v, w). \tag{1271}$$

اگر g نگاشت ـِ صفر باشد، حکم بدیهی است. در غیر ـِ این صورت

$$a\, b = 1, \tag{1272}$$

که یعنی یا a برابر i و b برابر ـِ $(-\mathrm{i})$ است، یا برعکس.

■

ترکیب ـِ حکم ـِ این قضیه با حکم ـِ قضیه يِ 369 این است که شبهِدوفرم ـِ بازتابی g دوشبهِفرم است، اگر و تنها اگر بین ـِ g_1 و g_2 در قضیه يِ 369 یک ی صفر باشد.

lxv دوشبهِفرم ـِ اِرمیتی

فضا يِ خطی يِ مختلط ـِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم g یک دوشبهِفرم ـِ اِرمیتی رو يِ $\mathbb{V}$ است اگر $g \in \mathfrak{LF}_{-\,+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ و

$$\forall\,(u,v)\in(\mathbb{V}\times\mathbb{V})\ :\ g(u,v)=[g(v,u)]^\star. \tag{1273}$$

می‌شد تعریف ِ مشابه ی با $\mathcal{LF}_{+-}$ هم ارائه کرد. در واقع منظور این است که g یک شبهِ‌دوفرم ِ بازتابی و ضمناً دوشبهِ‌فرم باشد، که در این صورت قضیه یِ 370 نتیجه می‌دهد $g\in\mathcal{LF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$ یا $g\in\mathcal{LF}_{+-}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$. مجموعه یِ دوشبهِ‌فرم‌ها یِ اِرمیتی رو یِ $\mathbb{V}$ را با $\mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$ نمایش می‌دهیم.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 371: فرض کنید $g\in\mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت $[\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})]\in\mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{U},\mathbb{U})$.

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 372: فرض کنید $g\in\mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$. در این صورت

$$\forall\,v\in\mathbb{V}\ :\ g(v,v)\in\mathbb{R}. \tag{1274}$$

★

مانسته یِ خیل ی از حکم‌ها یی که برا یِ دوفرم‌ها یِ حقیقی یِ متقارن برقرار بود، برا یِ دوشبهِ‌فرم‌ها یِ اِرمیتی هم برقرار است.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 373: فرض کنید $g\in\mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$. در این صورت

$$\tau_2 g=(\tau_1 g)^\star, \tag{1275}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\ker_1(g)&=\ker_2(g),\\ \mathrm{img}_1(g)&=\mathrm{img}_2(g).\end{aligned} \tag{1276}$$

★

به $\ker_1(g)=\ker_2(g)$ هسته یِ g می‌گوییم و آن را با $\ker(g)$ نمایش می‌دهیم. به

$\mathrm{img}_1(g)=\mathrm{img}_2(g)$ هم تصویرِ g می‌گوییم و آن را با $\mathrm{img}(g)$ نمایش می‌دهیم. می‌گوییم g ناتکین است اگر $\ker(g)$ بدیهی باشد.

قضیه یِ 374: فرض کنید $g\in\mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$. در این صورت g صفر است، اگر و تنها اگر

$$\forall\, v\in\mathbb{V}\ :\ g(v,v)=0. \tag{1277}$$

اثبات: به ازا یِ هر دوبردارِ u و v در $\mathbb{V}$،

$$g(u,v)=\frac{1}{2}\,\{g(u+v,u+v)-\mathrm{i}\,g(u+\mathrm{i}\,v,u+\mathrm{i}\,v)+(\mathrm{i}-1)\,[g(u,u)+g(v,v)]\}. \tag{1278}$$

بقیه یِ اثبات مثلِ اثباتِ قضیه یِ 305 است.

■

قضیه یِ 375: فرض کنید $g\in\mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$، و $\{e_i\mid i\}$ یک زیرمجموعه یِ $\mathbb{V}$ است با این ویژه‌گی که

$$\forall\,(i,j)\,;\ g(e_i,e_j)=g_i\,\delta_{i\,j}, \tag{1279}$$

که g_i ها همه ناصفر اند. در این صورت $\{e_i\mid i\}$ خطی‌مستقل است.

اثبات: یک ترکیبِ خطی از e_i ها را در نظر بگیرید که صفر است. کافی است اثرِ g بر این ترکیب و e_j را حساب کنیم.

■

قضیه یِ 376: فرض کنید $g\in\mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$ ناتکین، و $\{e_i\mid i\}$ یک زیرمجموعه یِ (باپایانِ) $\mathbb{V}$ است که (1279) را با g_i ها یِ ناصفر بر می‌آورَد. مجموعه یِ $\mathbb{W}$ با

$$\mathbb{W}:=\{w\in\mathbb{V}\mid\forall\,i\ :\ g(e_i,w)=0]\} \tag{1280}$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$\mathbb{W}\oplus\mathrm{span}\{e_i\mid i\}=\mathbb{V}. \tag{1281}$$

از جمله اگر $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی باشد، $\dim(\mathbb{W})$ برابر است با $\dim(\mathbb{V})$ منها یِ تعدادِ e_i ها.

اثبات: بردارِ دل‌بخواهِ $v\in\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$w := v - \sum_i \frac{g(e_i, v)}{g_i}\, e_i. \tag{1282}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود w عضو ـِ $\mathbb{W}$ است. پس $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ $\mathbb{W}$ و $\mathrm{span}\{e_i \mid i\}$ است. حالا فرض کنید u در اشتراک ـِ این دوزیرفضا است. در این صورت اسکالرها یِ u^i هستند که

$$u = \sum_i u^i\, e_i. \tag{1283}$$

با محاسبه یِ $g(e_j, u)$ معلوم می‌شود u^j صفر است. پس فقط بردار ـِ صفر در اشتراک ـِ $\mathbb{W}$ و $\mathrm{span}\{e_i \mid i\}$ هست.

■

قضیه یِ 377: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ ناتکین، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای مثل ـِ $\{e_i \mid i\}$ دارد که

$$g(e_i, e_j) = g_i\, \delta_{i\,j}, \tag{1284}$$

و همه یِ g_i ها ناصفر اند.

اثبات: پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ را با استقرا می‌سازیم. چون g ناتکین (و در نتیجه ناصفر) است، حتماً بردار یِ مثل ـِ e_1 هست که

$$g(e_1, e_1) \neq 0. \tag{1285}$$

حالا فرض کنید مجموعه یِ $\{e_i \mid i; i \le k\}$ با $k < \dim(\mathbb{V})$ را چنان ساخته ایم که (1284) را با g_i ها یِ ناصفر و $i, j \le k$ بر می آورَد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_k &:= \mathrm{span}\{e_i \mid i; i \le k\},\\ \mathbb{W}_k &:= \{v \in \mathbb{V} \mid \forall\, (i \le k)\ :\ g(e_i, v) = 0\}.\end{aligned} \tag{1286}$$

بُعد ـِ $\mathbb{W}_k$ برابر ـِ $[\dim(\mathbb{V}) - k]$ و در نتیجه بزرگ‌تر از صفر است. $\mathrm{res}(g; \mathbb{W}_k, \mathbb{W}_k)$ هم صفر نیست، چون اگر چنین می‌بود $\mathbb{W}_k$ زیرمجموعه یِ $\ker(g)$ می‌شد. پس یک بردار مثل ـِ e_{k+1} در $\mathbb{W}_k$ هست که

$$g(e_{k+1}, e_{k+1}) \neq 0. \tag{1287}$$

دیده می‌شود با این بردار، $\{e_i \mid i; i \leq k+1\}$ رابطه ‌ي (1284) را با g_i ها ‌ي ناصفر و $i, j \leq (k+1)$ بر می آورَد.

به این ترتیب، می‌شود مجموعه ای مثل ِ $\{e_i \mid i\}$ ساخت که تعداد ِ اعضا ‌یَش با $\dim(\mathbb{V})$ برابر است، و (1284) را با g_i ها ‌ي ناصفر بر می آورَد. قضیه ‌ي 375 نتیجه می‌دهد این مجموعه خطی‌مستقل، و بنابراین پایه است.

■

قضیه ‌ي 378: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{W}$ یک زیرفضا ‌ي $\mathbb{V}$ است که

$$\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \ker(g). \tag{1288}$$

در این صورت $\operatorname{res}(g; \mathbb{W}, \mathbb{W})$ ناتکین است.

اثبات: بردار ِ $u \in \ker[\operatorname{res}(g; \mathbb{W}, \mathbb{W})]$ و بردار ِ $v \in \mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$v = w + v', \tag{1289}$$

که $w \in \mathbb{W}$ و $v' \in \ker(g)$. دیده می‌شود

$$g(u, v) = 0, \tag{1290}$$

که نتیجه می‌دهد $u \in \ker(g)$. پس u صفر است.

■

قضیه ‌ي 379: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ پایه ای مثل ِ $\{e_i \mid i\}$ دارد که (1284) را بر می آورَد. به علاوه، به ازا ‌ي هر پایه ‌ي $\{e_i \mid i\}$ از $\mathbb{V}$ که (1284) را بر آورَد، تعداد ِ i ها ‌ي با $g_i = 0$، برابر با $\dim[\ker(g)]$ است.

اثبات: $\mathbb{W}$ را چنان می‌گیریم که

$$\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \ker(g). \tag{1291}$$

$\operatorname{res}(g; \mathbb{W}, \mathbb{W})$ ناتکین است، پس پایه ای دارد که (1284) را با g_i ها ‌ي ناصفر بر می آورَد. اجتماع ِ این پایه با یک پایه ‌ي $\ker(g)$ همان پایه ‌ي موردِنظر است.

$\{e_i \mid i\}$ را یک پایه ‌ي $\mathbb{V}$ بگیرید که (1284) را بر می آورَد. بردار ِ دل‌بخواه ِ $v = v^i\, e_i$ در $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. به‌ساده‌گی دیده می‌شود $v \in \ker(g)$ اگر و تنها اگر به ازا ‌ي هر i که

g_i ناصفر باشد v^i صفر باشد. این یعنی $\ker(g)$ پهنه یِ مجموعه یِ $\{e_i \mid i; g_i = 0\}$ است، پس تعداد ِ i ها یِ با $g_i = 0$ برابر ِ $\dim[\ker(g)]$ است.

■

فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است که (1284) را بر می‌آورَد. در این صورت می‌گوییم g در این پایه قطری است، یا این پایه یک پایه یِ قطری‌گر برا یِ g است.

فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$. می‌گوییم g مثبت ِ شبهِ‌معین است، اگر

$$\forall\, v \in \mathbb{V} \;:\; g(v, v) \geq 0. \tag{1292}$$

می‌گوییم g مثبت ِ معین است، اگر g مثبت ِ شبهِ‌معین و ناتکین باشد.

قضیه یِ 380: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$. در این صورت g مثبت ِ معین است، اگر و تنها اگر

$$\forall\, (v \neq 0) \in \mathbb{V} \;:\; g(v, v) > 0. \tag{1293}$$

اثبات: روشن است که اگر (1293) برقرار باشد، g مثبت ِ معین است. فرض کنید g مثبت ِ معین است، و v بردار ی است که

$$g(v, v) = 0. \tag{1294}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود به ازا یِ هر اسکالر ِ حقیقی یِ α و هر بردار ِ u،

$$\begin{aligned} g(u, u) + \alpha\,[g(u, v) + g(v, u)] &= g(u + \alpha\, v, u + \alpha\, v), \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{1295}$$

این نتیجه می‌دهد

$$g(u, v) + g(v, u) = 0. \tag{1296}$$

در این رابطه به جا یِ u بردار ِ $(\mathrm{i}\, u)$ می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\mathrm{i}\,[-g(u, v) + g(v, u)] = 0, \tag{1297}$$

که از ترکیب ِ آن با (1296) معلوم می‌شود $v \in \ker(g)$، و در نتیجه v صفر است. یعنی (1293) برقرار است.

■

متناظر با قضیه یِ 310، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 381: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت g مثبت ِ شبهِ‌معین است، اگر و تنها اگر متناظر با هر پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ از $\mathbb{V}$ که (1284) را بر آورَد، همه یِ g_i ها در رابطه یِ (1284) نامنفی باشند؛ و g مثبت ِ معین است، اگر و تنها اگر متناظر با هر پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ از $\mathbb{V}$ که (1284) را بر آورَد، همه یِ g_i ها در رابطه یِ (1284) مثبت باشند.

★

فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$. می‌گوییم g منفی یِ معین است، اگر $(-g)$ مثبت ِ معین باشد؛ و می‌گوییم g منفی یِ شبهِ‌معین است، اگر $(-g)$ مثبت ِ شبهِ‌معین باشد. روشن است که مانسته یِ قضیه‌ها یِ 380 و 381 برا یِ g یِ منفی یِ معین یا منفی یِ شبهِ‌معین هم برقرار اند.

سرانجام، متناظر با قضیه‌ها یِ 311 تا 314 به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 382: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_-, \tag{1298}$$

$\mathbb{V}_0 \sqsubseteq \ker(g)$، $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_+)$ مثبت ِ معین، $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_-, \mathbb{V}_-)$ منفی یِ معین، و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_-)$ صفر است. در این صورت $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_-, \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_-)$ ناتکین است و

$$\mathbb{V}_0 = \ker(g). \tag{1299}$$

ضمناً $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_+)$ مثبت ِ شبهِ‌معین، $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_-, \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_-)$ منفی یِ شبهِ‌معین، و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_-)$ صفر است.

★

قضیه یِ 383: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_-,$$

$$= \mathbb{V}'_+ \oplus \mathbb{V}'_-, \tag{1300}$$

که $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_+)$ و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}'_+, \mathbb{V}'_+)$ مثبت ِ معین، $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_-, \mathbb{V}_-)$ و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}'_-, \mathbb{V}'_-)$ منفی یِ شبهِمعین، و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_-)$ و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}'_+, \mathbb{V}'_-)$ صفر است. در این صورت یک نگاشت ِ خطی یِ یک‌به‌یک از $\mathbb{V}_+$ به $\mathbb{V}'_+$، و یک نگاشت ِ خطی یِ یک‌به‌یک از $\mathbb{V}_-$ به $\mathbb{V}'_-$ هست. اگر بین ِ $\mathbb{V}_+$ و $\mathbb{V}'_+$ دستِ‌کم یک ی باپایان‌بعدی باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{V}'_+ \sim \mathbb{V}_+. \tag{1301}$$

اگر بین ِ $\mathbb{V}_-$ و $\mathbb{V}'_-$ دستِ‌کم یک ی باپایان‌بعدی باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{V}'_- \sim \mathbb{V}_-. \tag{1302}$$

★

قضیه یِ 384: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $\mathbb{V}$ را می‌شود به شکل ِ

$$\mathbb{V} = \ker(g) \oplus \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_- \tag{1303}$$

نوشت، که $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_+)$ مثبت ِ معین، $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_-, \mathbb{V}_-)$ منفی یِ معین، و $\mathrm{res}(g; \mathbb{V}_+, \mathbb{V}_-)$ صفر است. $\dim(\mathbb{V}_+)$ و $\dim(\mathbb{V}_-)$ به انتخاب ِ $\mathbb{V}_+$ و $\mathbb{V}_-$ بسته‌گی ندارد.

★

قضیه یِ 385: فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت یک پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ برا یِ $\mathbb{V}$ هست که (1284) را بر می‌آورَد، و هر یک از g_i ها برابر با 0، 1، یا -1 است. تعداد ِ i ها یِ با g_i برابر با 0، 1، یا -1 هم به این پایه (که البته (1284) را بر می‌آورَد) بسته‌گی ندارد.

★

به پایه ای که ویژه‌گی‌ها یِ بالا را داشته باشد، یک پایه یِ یکه‌متعامد برا یِ g می‌گوییم. به یک مجموعه یِ خطی‌مستقل ِ $\{e_i \mid i\}$ که (1284) را با g_i ها یِ برابر با 1 یا (-1) یا 0 بر آورَد هم یک مجموعه یِ یکه‌متعامد (متناظر با g) می‌گوییم. اگر (1284) برقرار باشد اما g_i ها لزوماً 1 یا (-1) یا 0 نباشد، می‌گوییم این مجموعه متعامد است.
فرض کنید $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}$ است که (1284) را بر می‌آورَد. تعریف می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
n_0(g) &:= \dim[\ker(g)],\\
n_+(g) &:= \dim(\mathbb{V}_+),\\
n_-(g) &:= \dim(\mathbb{V}_-),
\end{aligned}
\tag{1304}
$$

که $\mathbb{V}_+$ و $\mathbb{V}_-$ همان زیرفضاها یی اند که در قضیه ي 384 به کار رفتند. به $(n_0(g); n_+(g), n_-(g))$ نشان‌گان ِ g می‌گویند:

$$\mathrm{sig}(g) := (n_0(g); n_+(g), n_-(g)). \tag{1305}$$

اگر g ناتکین باشد، $n_0(g)$ صفر است و به $(n_+(g), n_-(g))$ نشان‌گان ِ g می‌گویند:

$$\mathrm{sig}(g) := (n_+(g), n_-(g)). \tag{1306}$$

lxvi ضرب ِ درونی

فضا يِ خطی يِ مختلط ِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم g یک شبهِ‌ضرب ِ درونی است اگر $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ و g ناتکین باشد. می‌گوییم g یک ضرب ِ درونی است اگر $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ و g مثبت ِ معین باشد.

قضیه يِ 386: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا يِ خطی، g یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر آن، و $\{e_i \mid i\}$ یک مجموعه يِ متعامد برا يِ g است. در این صورت به ازا يِ هر بردار ِ v با

$$v = v^i\, e_i, \tag{1307}$$

داریم

$$v^i = \frac{1}{g(e_i, e_i)}\, g(e_i, v). \tag{1308}$$

اثبات: داریم

$$g(e_j, v) = v^i\, g(e_j, e_i),$$

$$= v^j\, g(e_j, e_j), \tag{1309}$$

که حکم را نتیجه می‌دهد.

■

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی و g یک شبهِ‌ضرب ـ درونی بر آن است. می‌گوییم دو بردار ـ u و v در $\mathbb{V}$ بر هم عمود اند، اگر

$$g(u, v) = 0. \tag{1310}$$

هم‌چنین، می‌گوییم بردار ـ v بر یک زیرمجموعه یِ$\mathbb{S}$ از $\mathbb{V}$ عمود است، اگر

$$\forall\, (u \in \mathbb{S})\ :\ g(u, v) = 0. \tag{1311}$$

سرانجام، می‌گوییم دو زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}$ و $\mathbb{S}'$ از $\mathbb{V}$ بر هم عمود اند، اگر

$$\forall\, (v, v') \in (\mathbb{S} \times \mathbb{S}')\ :\ g(v, v') = 0. \tag{1312}$$

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک شبهِ‌ضرب ـ درونی بر آن، و $\mathbb{S}$ یک زیرمجموعه یِ $\mathbb{V}$ است. مجموعه یِ عمود بر $\mathbb{S}$ (که آن را با $\mathbb{S}^\perp$ نشان می‌دهیم) به این شکل تعریف می‌شود.

$$\mathbb{S}^\perp := \{v \in \mathbb{V} \mid \forall\, u \in \mathbb{S}\ :\ g(v, u) = 0\}. \tag{1313}$$

به ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 387: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک شبهِ‌ضرب ـ درونی بر آن، و $\mathbb{S}$ یک زیرمجموعه یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت $\mathbb{S}^\perp$ یک زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است.

★

قضیه یِ 388: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، g یک شبهِ‌ضرب ـ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت

$$\dim(\mathbb{U}^\perp) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{U}). \tag{1314}$$

اثبات: $\tau_1 g$ یک نگاشت ـ پادخطی با هسته یِ بدیهی است. پس

$$\dim[\tau_1 g(\mathbb{U})] = \dim(\mathbb{U}). \tag{1315}$$

داریم

$$\mathbb{U}^{\perp} = [\tau_1 g(\mathbb{U})]^{\mathrm{c}}. \tag{1316}$$

از ترکیب ِ این دورابطه با قضیه یِ 115، حکم نتیجه می‌شود.

■

قضیه یِ 389: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی، g یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت

$$(\mathbb{U}^{\perp})^{\perp} = \mathbb{U}. \tag{1317}$$

اثبات: از تعریف ِ $(\mathbb{U}^{\perp})^{\perp}$ دیده می‌شود

$$\mathbb{U} \sqsubseteq (\mathbb{U}^{\perp})^{\perp}. \tag{1318}$$

از قضیه یِ 388 هم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \dim[(\mathbb{U}^{\perp})^{\perp}] &= \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{U}^{\perp}), \\ &= \dim(\mathbb{U}). \end{aligned} \tag{1319}$$

از ترکیب ِ این دورابطه حکم نتیجه می‌شود.

■

قضیه یِ 390: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی و g یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر آن است، و $\mathbb{U}$ و $\mathbb{U}'$ دو زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ اند، چنان که $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ِ آن‌ها است و $\mathbb{U}$ و $\mathbb{U}'$ بر هم عمود اند. در این صورت $\mathrm{res}(g; \mathbb{U}, \mathbb{U})$ یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر $\mathbb{U}$ است.

اثبات: از قضیه یِ 371 داریم $\mathrm{res}(g; \mathbb{U}, \mathbb{U}) \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C}; \mathbb{U}, \mathbb{U})$. کافی است ثابت کنیم $\mathrm{res}(g; \mathbb{U}, \mathbb{U})$ ناتکین است. بردار ِ دل‌بخواه ِ $w \in \ker[\mathrm{res}(g; \mathbb{U}, \mathbb{U})]$ را در نظر بگیرید. متناظر با هر بردار ِ $v \in \mathbb{V}$ دو بردار ِ $u \in \mathbb{U}$ و $u' \in \mathbb{U}'$ هست که

$$v = u + u'. \tag{1320}$$

داریم

$$g(w,v) = g(w,u) + g(w,u'),$$
$$= 0, \qquad (1321)$$

که نتیجه می‌دهد w در $\ker(g)$ است. پس w صفر است، یعنی $\ker[\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})]$ بدیهی است.

■

هم‌چنین، با استفاده از قضیه ی 380 به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 391: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ـِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت $\mathrm{res}(g,\mathbb{U};\mathbb{U})$ یک ضرب ـِ درونی بر $\mathbb{U}$ است.

★

قضیه یِ 392: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ـِ درونی بر آن، و $\{e_i \mid i; 1 \le i \le n\}$ یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل از $\mathbb{V}$ است. در این صورت یک زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ـِ $\{f_i \mid i; 1 \le i \le n\}$ هست که

$$\forall\ [(i \le n), (j \le n)]\ :\ g(f_i, f_j) = \delta_{i\,j}, \qquad (1322)$$

و

$$\forall\ (k \le n)\ :\ \mathrm{span}\{f_i \mid i; 1 \le i \le k\} = \mathrm{span}\{e_i \mid i; 1 \le i \le k\}. \qquad (1323)$$

اثبات: f_i ها به طور ـِ استقرایی می‌سازیم. e_1 صفر نیست، چون $\{e_i \mid i; 1 \le i \le n\}$ خطی‌مستقل است. پس $g(e_1, e_1)$ مثبت است. تعریف می‌کنیم

$$f_1 := \frac{1}{\sqrt{g(e_1, e_1)}}\, e_1. \qquad (1324)$$

روشن است که این بردار حکم‌ها یِ قضیه به ازا یِ $k = 1$ را بر می‌آوَرَد. حالا فرض کنید f_1 تا f_m ساخته شده اند و حکم‌ها یِ قضیه را با $k \le m$ بر می‌آورَند. تعریف می‌کنیم

$$f'_{m+1} := e_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} g(f_i, e_{m+1})\, f_i. \qquad (1325)$$

طرف ِ راست یک ترکیب ِ خطی از e_1 تا e_{m+1} است، که ضریب ِ e_{m+1} در آن یک است. پس f'_{m+1} صفر نیست و در نتیجه $g(f'_{m+1}, f'_{m+1})$ صفر نیست. تعریف می‌کنیم

$$f_{m+1} := \frac{1}{\sqrt{g(f'_{m+1}, f'_{m+1})}}\, f'_{m+1}. \tag{1326}$$

به ساده‌گی دیده می‌شود (1322) با $k \le (m+1)$ برقرار است. برا یِ تحقیق ِ (1323) با $k \le (m+1)$ هم توجه می‌کنیم که f_{m+1} در $\mathrm{span}\{e_i \mid i; 1 \le i \le (m+1)\}$ است و

$$e_{m+1} = \sqrt{g(f'_{m+1}, f'_{m+1})}\, f_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} g(f_i, e_{m+1})\, f_i, \tag{1327}$$

که نشان می‌دهد e_{m+1} در $\mathrm{span}\{f_i \mid i; 1 \le i \le (m+1)\}$ است.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 393: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت $\mathbb{U}$ یک پایه یِ یکه‌متعامد دارد.

★

به روش ی که در قضیه یِ 392 برا یِ یکه‌متعامدکردن ِ یک مجموعه یِ خطی‌مستقل به کار رفت، روش ِ گْرام‌ـ شْمیت می‌گویند.

قضیه یِ 394: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت،

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{U}^{\perp} = \{0\}. \tag{1328}$$

اثبات: می‌گیریم $v \in (\mathbb{U} \cap \mathbb{U}^{\perp})$. نتیجه می‌شود

$$g(v, v) = 0, \tag{1329}$$

که نتیجه می‌دهد v صفر است.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 395: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ خطی یِ آن است، چنان که $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ِ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{U}^{\perp}$ است. در این صورت

$\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ مستقیم ـِ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{U}^{\perp}$ است.

★

قضیه یِ 396: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ـِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ است. در این صورت،

$$\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^{\perp}. \tag{1330}$$

اثبات: $\{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ یکه‌متعامد برا یِ $\mathbb{U}$ می‌گیریم. حکم از قضیه یِ 376 نتیجه می‌شود.

■

قضیه یِ 397: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ـِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است، چنان که $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{U}^{\perp}$ است. متناظر با بردار ـِ $v \in \mathbb{V}$ یک تابع ـِ f با دامنه یِ $\mathbb{U}$ و مقدار در $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم که

$$f(u) := g(v - u, v - u). \tag{1331}$$

در این صورت یک و فقط یک بردار در $\mathbb{U}$ هست که f را کمینه می‌کند.

اثبات: بردارها یِ یک‌تا یِ $v' \in \mathbb{U}$ و $v'' \in \mathbb{U}^{\perp}$ هستند، چنان که

$$v = v' + v''. \tag{1332}$$

داریم

$$\begin{aligned} f(u) &= g(v' - u + v'', v' - u + v''), \\ &= g(v' - u, v' - u) + g(v'', v''), \\ &= g(v' - u, v' - u) + f(v'). \end{aligned} \tag{1333}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$f(u) \geq f(v'), \tag{1334}$$

و تساوی فقط زمان یِ رخ می‌دهد که

$$g(v' - u, v' - u) = 0, \tag{1335}$$

یعنی وقت ی u همان v' است.

■

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ـِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است، چنان که $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{U}^{\perp}$ است. به آن بردار ـِ $u \in \mathbb{U}$ که $g(v-u, v-u)$ را کمینه می‌کند تصویر ـِ قائم ـِ v بر $\mathbb{U}$ می‌گوییم. تصویر ـِ قائم ـِ v بر $\mathbb{U}$ را با $\mathrm{Proj}^{\perp}_{\mathbb{U}}(v)$ نشان می‌دهیم.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 398: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ـِ درونی بر آن، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است، چنان که $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ـِ $\mathbb{U}$ و $\mathbb{U}^{\perp}$ است. در این صورت $\mathrm{Proj}^{\perp}_{\mathbb{U}}$ یک افکنش ـِ خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و تصویر ـِ $\mathbb{U}$ است، که هسته اَش $\mathbb{U}^{\perp}$ است، و

$$\forall\, v \in \mathbb{V} \;:\; g[\mathrm{Proj}^{\perp}_{\mathbb{U}}(v), v - \mathrm{Proj}^{\perp}_{\mathbb{U}}(v)] = 0. \qquad (1336)$$

★

هم‌چنین، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 399: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی، g یک ضرب ـِ درونی بر آن، $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ خطی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$، و $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ یکه‌متعامد ـِ $\mathbb{U}$ است. در این صورت،

$$\forall\, v \in \mathbb{V} \;:\; \mathrm{Proj}^{\perp}_{\mathbb{U}}(v) = \sum_i g(e_i, v)\, e_i. \qquad (1337)$$

★

به یک فضا یِ خطی یِ مختلط که یک شبهِ‌ضرب ـِ درونی (ضرب ـِ درونی) بر آن تعریف شده باشد یک فضا یِ شبهِ‌یکانی (یکانی) می‌گویند.

lxvii ضرب ـِ درونی بر فضاها یِ حقیقی

فضا یِ خطی یِ حقیقی یِ $\mathbb{V}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم g یک شبهِ‌ضرب ـِ درونی است اگر $g \in \mathfrak{SLF}(\mathbb{R}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ و g ناتکین باشد. می‌گوییم g یک ضرب ـِ درونی است اگر $g \in \mathfrak{SLF}(\mathbb{R}; \mathbb{V}, \mathbb{V})$ و g مثبت ـِ معین باشد.

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی، و g یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر آن است. $\mathrm{H}(g)$ را نگاشت ی با دامنه یِ $[\mathrm{K}(\mathbb{V})\times\mathrm{K}(\mathbb{V})]$ و مقدار در $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم که

$$[\mathrm{H}(g)][(u_1,v_1),(u_2,v_2)] := g(u_1,u_2)+g(v_1,v_2)+\mathrm{i}\,[g(u_1,v_2)-g(v_1,u_2)]. \quad (1338)$$

به $\mathrm{H}(g)$ اِرمیتی‌شده یِ g می‌گوییم. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 400: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ حقیقی، و g یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر آن است. در این صورت $\mathrm{H}(g)$ یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر $\mathrm{K}(\mathbb{V})$ است و

$$\forall\ (a,b,u,v)\in(\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{V}\times\mathbb{V})\ :\ [\mathrm{H}(g)](a\,u,b\,v)=a^\star\,b\,g(u,v). \quad (1339)$$

هم‌چنین، g ضرب ِ درونی است (مثبت ِ معین است) اگر و تنها اگر $\mathrm{H}(g)$ ضرب ِ درونی باشد (مثبت ِ معین باشد).

★

به‌ساده‌گی دیده می‌شود مانسته یِ قضیه‌ها یِ 386 تا 399 در مورد ِ شبه‌ضرب ِ درونی و ضرب ِ درونی بر فضاها یِ حقیقی هم برقرار است. یک روش ِ ساده یِ اثبات این است که فضاها یِ خطی و شبهِ‌ضرب‌ها یِ درونی یا ضرب‌ها یِ درونی را مختلط کنیم و حکم‌ها یِ مربوط به شبهِ‌ضرب ِ درونی و ضرب ِ درونی یِ مختلط را به کار ببریم، و فقط تحقیق کنیم که در نتیجه یِ نهایی همه یِ اسکالرها حقیقی اند، همه یِ بردارها در همان فضاها یِ خطی یِ حقیقی یِ اولیه اند، و خود ِ شبهِ‌ضرب ِ درونی یا ضرب ِ درونی یِ اولیه ظاهر شده (نَه مختلط‌شده یِ آن). مثلاً در قضیه یِ 386، حکم بر حسب ِ مختلط‌شده‌ها می‌شود

$$v^i=\frac{1}{[\mathrm{H}(g)](e_i,e_i)}\,[\mathrm{H}(g)](e_i,v), \quad (1340)$$

اما چون e_i و v اعضا یِ $\mathbb{V}$ اند، به جا یِ $\mathrm{H}(g)$ در رابطه یِ بالا می‌شود خود ِ g را گذاشت.

به این ترتیب، حکم‌ها یِ قضیه‌ها یِ 386 تا 399 برا یِ فضاها یِ خطی یِ حقیقی هم درست اند.

تعریف ِ دو بردار ِ عمود بر هم، یک بردار ِ عمود بر یک مجموعه، دو مجموعه یِ عمود برهم، مجموعه یِ عمود بر یک زیرفضا و افکنش ِ قائم بر یک زیرفضا هم شبیه ِ همان تعریف‌ها یی است که برا یِ فضاها یِ خطی یِ مختلط به کار رفت.

به یک فضا یِ خطی یِ حقیقی که یک شبهِضرب ِ درونی (ضرب ِ درونی) بر آن تعریف شده باشد یک فضا یِ شبهِاقلیدسی (اقلیدسی) می‌گویند.

XIV

نگاشت ـِ بهنجار

lxviii مزدوج ـِ اِرمیتی

قضیه یِ 401: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایانبُعدی اند که شبهِضرب‌ها یِ درونی یِ متناظر با آن‌ها، به‌ترتیب $g_{\mathbb{V}}$ و $g_{\mathbb{W}}$ اند. در این صورت متناظر با هر $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ یک نگاشت ـِ $T^\dagger \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{W})$ هست که

$$\forall\,(v,w) \in (\mathbb{V}\times\mathbb{W})\ :\ g_{\mathbb{V}}(T^\dagger\,w,v) = g_{\mathbb{W}}(w,T\,v). \tag{1341}$$

این نگاشت یک‌تا است و

$$T^\dagger = (\tau_1 g_{\mathbb{V}})^{-1}\,T^*\,(\tau_1 g_{\mathbb{W}}). \tag{1342}$$

اثبات: اثبات کاملاً شبیه ـِ اثبات ـِ قضیه یِ 323 است. البته توجه داریم که $\tau_1 g_{\mathbb{V}}$ یک نگاشت ـِ پادخطی است که مقدار ـِ آن یک نگاشت ـِ خطی است.

■

$\{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ و $\{f_a \mid a\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{W}$ می‌گیریم. شکل ـِ مئلفه‌ای یِ (1342) می‌شود

$$[g_{\mathbb{V}}(e_j,e_i)]\,[(T^\dagger)^j{}_a]^\star = [g_{\mathbb{W}}(f_a,f_b)]\,T^b{}_i, \tag{1343}$$

یا

$$[g_{\mathbb{V}}(e_i, e_j)]\,(T^\dagger)^j{}_a = [g_{\mathbb{W}}(f_b, f_a)]\,(T^b{}_i)^\star. \qquad (1344)$$

فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایان‌بُعدی اند که شبهِضرب‌ها یِ درونی یِ متناظر با آن‌ها، به‌ترتیب $g_{\mathbb{V}}$ و $g_{\mathbb{W}}$ اند. به نگاشت ِ خطی یِ $T^\dagger$ در (1341) مزدوجِ ِ اِرمیتی یِ T می‌گویند.

اثبات ِ قضیه‌ها یِ 402 تا 411 (مانسته‌ها یِ 324 تا 333 برا یِ دوفرم‌ها یِ متقارن) بسیار ساده است.

قضیه یِ 402: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایان‌بُعدی اند و $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$. در این صورت،

$$(T^\dagger)^\dagger = T. \qquad (1345)$$

★

قضیه یِ 403: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایان‌بُعدی اند. در این صورت به ازا یِ نگاشت‌ها یِ خطی یِ دل‌بخواه ِ S و T در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ و اسکالرها یِ دل‌بخواه ِ α و β،

$$(\alpha\,S + \beta\,T)^\dagger = \alpha^\star\,S^\dagger + \beta^\star\,T^\dagger. \qquad (1346)$$

★

قضیه یِ 404: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت،

$$(1_{\mathbb{V}})^\dagger = 1_{\mathbb{V}}. \qquad (1347)$$

★

قضیه یِ 405: فرض کنید $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ سه فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایان‌بُعدی اند. در این صورت به ازا یِ نگاشت‌ها یِ دل‌بخواه ِ $S\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ و $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$،

$$(T\,S)^\dagger = S^\dagger\,T^\dagger. \qquad (1348)$$

★

قضیه یِ 406: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ دو فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایانبُعدی اند. در این صورت به ازا یِ نگاشت ِ دلبخواه ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{W};\mathbb{V})$ که در $\mathbb{W}$ وارونپذیر است، $T^\dagger$ هم وارونپذیر است و

$$(T^\dagger)^{-1} = (T^{-1})^\dagger. \tag{1349}$$

★

قضیه یِ 407: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایانبُعدی است. در این صورت به ازا یِ نگاشت ِ دلبخواه ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$،

$$\det(T^\dagger) = [\det(T)]^\star. \tag{1350}$$

همچنین، λ ویژهمقدار ِ T است اگر و تنها اگر $\lambda^\star$ ویژهمقدار ِ $T^\dagger$ باشد.

★

قضیه یِ 408: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ یک فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایانبُعدی است. در این صورت،

$$\forall\ (\lambda, l)\ :\ \mathrm{null}[(T-\lambda)^l] = \mathrm{null}[(T^\dagger - \lambda^\star)^l], \tag{1351}$$

از جمله، بُعد ِ ویژهفضا یِ تعمیمیافته یِ T متناظر با λ با بُعد ِ ویژهفضا یِ تعمیمیافته یِ $T^\dagger$ متناظر با $\lambda^\star$ برابر است. همچنین، اگر $N \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچتوان باشد $N^\dagger$ هم پوچتوان است و

$$\mathrm{np}(N) = \mathrm{np}(N^\dagger). \tag{1352}$$

★

قضیه یِ 409: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ یک فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایانبُعدی است با شبهِمتریک ِ g است. در این صورت اگر v یک ویژهبردار ِ تعمیمیافته یِ T متناظر با λ و u یک ویژهبردار ِ تعمیمیافته یِ $T^\dagger$ متناظر با μ باشد که $\mu \neq \lambda^\star$، آنگاه

$$g(u,v) = 0. \tag{1353}$$

★

قضیه یِ 410: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایانبُعدی، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَنتجزیه‌پذیر است. در این صورت $T^\dagger$ هم ژُردَنتجزیه‌پذیر است و

$$\begin{aligned}\mathrm{sem}(T^\dagger) &= [\mathrm{sem}(T)]^\dagger,\\ \mathrm{nil}(T^\dagger) &= [\mathrm{nil}(T)]^\dagger\end{aligned} \tag{1354}$$

اگر مجموعه یِ $e_{i,r,s,j}$ ها یک پایه‌ی ژُردَنی‌گر ِ T باشد، مجموعه یِ $[(\tau_1 g)^{-1}\, e^{i,r,r-s,j}]$ ها یک پایه یِ ژُردَنی‌گر ِ $T^\dagger$ است:

$$T^\dagger\,[(\tau_1 g)^{-1}\, e^{i,r,s,j}] = \lambda^{i\star}\,[(\tau_1 g)^{-1}\, e^{i,r,s,j}] + [(\tau_l g)^{-1}\, e^{i,r,s+1,j}], \tag{1355}$$

که $\lambda^i = \lambda_i$، مجموعه یِ $e^{i,r,s,j}$ ها دوگان ِ مجموعه یِ $e_{i,r,s,j}$ ها است، و g شبهِمتریک ِ تعریف‌شده بر $\mathbb{V}$ است.

★

قضیه یِ 411: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ شبهِیکانی یِ باپایانبُعدی است، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ T است. در این صورت $\mathbb{U}^\perp$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $T^\dagger$ است.

★

قضیه یِ 412: فرض کنید $\mathbb{V}$ باپایانبُعدی و شبهِیکانی، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَنتجزیه‌پذیر است. در این صورت اگر $f(T)$ یک تابع ِ T باشد، آن‌گاه

$$f(T^\dagger) = [f^\star(T)]^\dagger, \tag{1356}$$

که هر یک از $f^{\star(k)}$ ها یی که در تعریف ِ $f^\star$ وارد می‌شوند، در λ تعریف شده اند اگر و تنها اگر $f^{(k)}$ در $\lambda^\star$ تعریف شده باشد، و

$$\forall\ (k,\lambda)\ :\ f^{\star(k)}(\lambda) := [f^{(k)}(\lambda^\star)]^\star. \tag{1357}$$

اثبات: $B = \{e_i \mid i\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که هر یک از اعضا یِ آن ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ T است، چنان که به ازا یِ هر i ویژه‌مقدار ِ متناظر با e_i برابر ِ $\lambda_i = \lambda^i$ است. $\{e^i \mid i\}$ را دوگان ِ B می‌گیریم. g را شبهِمتریک ی می‌گیریم که بر $\mathbb{V}$ تعریف شده. $\{(\tau_1 g)^{-1}\, e^i \mid i\}$ پایه ای است که هر یک از اعضا یِ آن ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ

$T^{\dagger}$ است، چنان که $[(\tau_1 g)^{-1}\, e^i]$ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ $\lambda^{i\star}$ است. دوگان ـِ این پایه $\{(\tau_1 g)^*\, e_i \mid i\}$ است. داریم

$$
\begin{aligned}
[(\tau_1 g)^*\, e_i]\{[f(T^{\dagger})]\,(\tau_1 g)^{-1}\, e^j\} &= [(\tau_1 g)^*\, e_i]\left\{\left[\sum\nolimits_k \frac{f^{(k)}(\lambda^{j\star})}{k!}\,(N^{\dagger})^k\right]\,(\tau_1 g)^{-1}\, e^j\right\},\\
&= [(\tau_1 g)^*\, e_i]\left\{(\tau_1 g)^{-1}\,\left[\sum\nolimits_k \frac{f^{\star(k)}(\lambda^{j})}{k!}\,(N^{*})^k\right]\, e^j\right\},\\
&= \left\{\left[\sum\nolimits_k \frac{f^{\star(k)}(\lambda^{j})}{k!}\,(N^{*})^k\right]\, e^j\right\}(e_i),\\
&= e^j\left\{\left[\sum\nolimits_k \frac{f^{\star(k)}(\lambda^{j})}{k!}\,N^k\right]\, e_i\right\},\\
&= e^j\left\{\left[\sum\nolimits_k \frac{f^{\star(k)}(\lambda_{i})}{k!}\,N^k\right]\, e_i\right\},\\
&= e^j\{[f^{\star}(T)]\, e_i\},\\
&= \{[f^{\star}(T)]^*\, e^j\}(e_i),\\
&= [(\tau_1 g)^*\, e_i]\{(\tau_1 g)^{-1}[f^{\star}(T)]^*\, e^j\},\\
&= [(\tau_1 g)^*\, e_i]\{[f^{\star}(T)]^{\dagger}\,(\tau_1 g)^{-1}\, e^j\},
\end{aligned}
\tag{1358}
$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

lxix تعریف و ویژه‌گی‌ها یِ نگاشت ـِ بهنجار

فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. می‌گوییم T بهنجار است اگر

$$T\,T^{\dagger} = T^{\dagger}\,T. \tag{1359}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه ی 413: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی است، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت T بهنجار است اگر و تنها اگر $T^{\dagger}$ بهنجار باشد.

★

قضیه ی 414: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ شبهِ‌یکانی یِ باپایان‌بُعدی، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار، و $\mathbb{U}$ یک ویژه‌فضا یِ T است. در این صورت $\mathbb{U}^{\perp}$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ T است.

اثبات: بردار ِ $w \in \mathbb{U}^{\perp}$ را در نظر بگیرید. به ازا یِ بردار ِ دل‌بخواه ِ $u \in \mathbb{U}$ داریم

$$T^{\dagger}\,u \in \mathbb{U}, \tag{1360}$$

چون $T^{\dagger}$ با T جابه‌جا می‌شود. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} g(u, T\,w) &= g(T^{\dagger}\,u, w), \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1361}$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

قضیه ی 415: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار، و $\mathbb{U}$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ T و $T^{\dagger}$ است. در این صورت،

$$[\mathrm{res}(T;\mathbb{U})]^{\dagger} = \mathrm{res}(T^{\dagger};\mathbb{U}), \tag{1362}$$

که ضربِ‌درونی یی که در تعریف ِ $[\mathrm{res}(T;\mathbb{U})]^{\dagger}$ به کار رفته $\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})$ است. هم‌چنین، $\mathrm{res}(T;\mathbb{U})$ بهنجار است.

اثبات: داریم $\mathrm{res}(T;\mathbb{U}) \in \mathfrak{LF}(\mathbb{U};\mathbb{U})$. از 391 هم نتیجه می‌شود $\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})$ یک ضرب ِ درونی بر $\mathbb{U}$ است. بنابراین $[\mathrm{res}(T;\mathbb{U})]^{\dagger}$ و حاصلِ‌ضرب ِ آن از هر طرف در $[\mathrm{res}(T;\mathbb{U})]$ خوش‌تعریف است. هم‌چنین داریم $\mathrm{res}(T^{\dagger};\mathbb{U}) \in \mathfrak{LF}(\mathbb{U};\mathbb{U})$. $\mathrm{res}(T;\mathbb{U})$ را

با S و $\mathrm{res}(T^\dagger;\mathbb{U})$ را با R نمایش می‌دهیم. بردارها یِ دل‌بخواه ِ u و v در $\mathbb{U}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})](S^\dagger\,u,v) &= [\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})](u,S\,v),\\
&= g(u,T\,v),\\
&= g(T^\dagger\,u,v),\\
&= g(R\,u,v),\\
&= [\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})](R\,u,v). \qquad (1363)
\end{aligned}
$$

این رابطه، هم‌راه با ناتکین‌بودن ِ $\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})$ رابطه یِ (1362) را نتیجه می‌دهد.

برا یِ اثبات ِ باقی‌مانده یِ حکم هم،

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{res}(T;\mathbb{U})]^\dagger\,[\mathrm{res}(T;\mathbb{U})] &= [\mathrm{res}(T^\dagger;\mathbb{U})]\,[\mathrm{res}(T;\mathbb{U})],\\
&= \mathrm{res}(T^\dagger\,T;\mathbb{U}),\\
&= \mathrm{res}(T\,T^\dagger;\mathbb{U}),\\
&= [\mathrm{res}(T;\mathbb{U})]\,[\mathrm{res}(T^\dagger;\mathbb{U})],\\
&= [\mathrm{res}(T;\mathbb{U})]\,[\mathrm{res}(T;\mathbb{U})]^\dagger. \qquad (1364)
\end{aligned}
$$

■

قضیه یِ 416: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار، و $\mathbb{U}$ یک ویژه‌فضا یِ T است. در این صورت،

$$
[\mathrm{res}(T;\mathbb{U}^\perp)]^\dagger = \mathrm{res}(T^\dagger;\mathbb{U}^\perp), \qquad (1365)
$$

که ضرب‌ِدرونی یی که در تعریف ِ $[\mathrm{res}(T;\mathbb{U}^\perp)]^\dagger$ به کار رفته $\mathrm{res}(g;\mathbb{U}^\perp,\mathbb{U}^\perp)$ است. هم‌چنین، $\mathrm{res}(T;\mathbb{U}^\perp)$ بهنجار است.

اثبات: از 414 و 411 نتیجه می‌شود $\mathbb{U}^\perp$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ به‌ترتیب T و $T^\dagger$ است. به این ترتیب حکم از قضیه یِ 415 نتیجه می‌شود.

■

قضیه یِ 417: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، و $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار است. در این صورت هر اگر u یک ویژه‌بردار ِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ باشد،

آن‌گاه u ویژه‌بردار ِ $T^{\dagger}$ متناظر با ویژه‌مقدار ِ $\lambda^{\star}$ است.

اثبات: ویژه‌فضا یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ را با $\mathbb{U}$ نمایش می‌دهیم و v را یک بردار ِ دل‌بخواه در آن می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}[\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})](T^{\dagger}\,u,v) &= [\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})](u,T\,v),\\ &= \lambda[\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})](u,v),\\ &= [\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})][(\lambda^{\star}\,u),v]. \end{aligned} \tag{1366}$$

از این رابطه هم‌راه با این که $[\mathrm{res}(g;\mathbb{U},\mathbb{U})]$ ناتکین است، نتیجه می‌شود

$$T^{\dagger}\,u = \lambda^{\star}\,u. \tag{1367}$$

■

قضیه یِ 418: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار است. در این صورت T شبهِ‌ساده است.

اثبات: اثبات را با استقرا بر $\dim(\mathbb{V})$ انجام می‌دهیم. اگر $\mathbb{V}$ یک‌بُعدی باشد حکم بدیهی است. فرض کنید حکم برا یِ بُعدها یِ نابزرگ‌تر از n درست است. $\mathbb{V}$ را $(n+1)$ بُعدی می‌گیریم. T دستِ‌کم یک ویژه‌مقدار دارد. ویژه‌فضا یِ متناظر با این ویژه‌مقدار را $\mathbb{U}$ می‌نامیم. $\mathrm{res}(T;\mathbb{U}^{\perp})$ بهنجار، و بُعد ِ $\mathbb{U}^{\perp}$ نابزرگ‌تر از n است. پس $\mathrm{res}(T;\mathbb{U}^{\perp})$ قطری‌شدنی است، و در نتیجه T قطری‌شدنی است.

■

قضیه یِ 419: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار است، و $\mathbb{V}_{\lambda}$ و $\mathbb{V}_{\mu}$ دو ویژه‌فضا یِ $\mathbb{V}$ متناظر با به‌ترتیب ویژه‌مقدارها یِ λ و μ اند، که λ و μ متمایز اند. در این صورت $\mathbb{V}_{\lambda}$ و $\mathbb{V}_{\mu}$ بر هم عمود اند.

اثبات: بردار ِ دل‌بخواه ِ $u \in \mathbb{V}_{\lambda}$ را در نظر بگیرید. دو بردار ِ $v \in \mathbb{V}_{\mu}$ و $w \in (\mathbb{V}_{\mu})^{\perp}$ هست که

$$u = v + w. \tag{1368}$$

داریم

$$\lambda\,(v+w) = T\,(v+w),$$

$$= \mu\, v + T\, w, \tag{1369}$$

یا

$$(\lambda - \mu)\, v = T\, w - \lambda\, w. \tag{1370}$$

طرف ِ راست در $(\mathbb{V}_\mu)^\perp$ و طرف ِ چپ در $\mathbb{V}_\mu$ است. پس دوطرف صفر اند و نتیجه می‌شود v صفر است. یعنی u بر $\mathbb{V}_\mu$ عمود است.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ قضیه‌ها یِ 418، 419، و 393 این است.

قضیه یِ 420: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار است. در این صورت $\mathbb{V}$ یک پایه یِ یکه‌متعامد دارد که T را قطری می‌کند.

★

هم‌چنین،

قضیه یِ 421: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبه‌ِساده است، و ویژه‌فضاها یِ متناظر با ویژه‌مقدارها یِ متمایز ِ T برهم عمود اند. در این صورت T بهنجار است.

اثبات: u و v را دو بردار ِ دل‌بخواه در $\mathbb{V}$ می‌گیریم. دو مجموعه یِ $\{u_i \mid i\}$ و $\{v_i \mid i\}$ هست که به ازا یِ هر i بردارها یِ u_i و v_i در ویژه‌فضا یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ_i است (λ_i ها متمایز اند) و u مجمع ِ u_i ها و v مجموع ِ v_i ها است. داریم

$$\begin{aligned} g(T^\dagger\, u, v) &= g(u, T\, v), \\ &= \sum\nolimits_{i\,j} \lambda_j\, g(u_i, v_j), \\ &= \sum\nolimits_{i} \lambda_i\, g(u_i, v_i), \\ &= \sum\nolimits_{i\,j} \lambda_i\, g(u_i, v_j), \\ &= \sum\nolimits_{i} \lambda_i\, g(u_i, v). \end{aligned} \tag{1371}$$

از این که g ناتکین است، نتیجه می‌شود

$$T^\dagger u = \sum_i \lambda_i^\star u_i, \tag{1372}$$

که نشان می‌دهد $T^\dagger$ با T جابه‌جا می‌شود.

■

قضیه یِ 422: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط ِ باپایان‌بُعدی، و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده است. در این صورت متناظر با هر نشان‌گان ی یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر $\mathbb{V}$ هست که $\mathbb{V}$ را شبهِ‌یکانی می‌کند و با این شبهِ‌ضرب ِ درونی T بهنجار است. از جمله یک ضرب ِ درونی بر $\mathbb{V}$ هست که $\mathbb{V}$ را یکانی می‌کند و با این ضرب ِ درونی T بهنجار است.

اثبات: $\{e_i \mid i\}$ را پایه ای می‌گیریم که اعضا یِ آن ویژه‌بردارها یِ T اند. $g \in \mathcal{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$g(u^i\, e_i, v^j\, e_j) := \sum_i \alpha_i\, (u^i)^\star\, v^i, \tag{1373}$$

که α^i ها اعداد ِ حقیقی یِ ناصفر ِ دل‌بخواه ی اند. به‌ساده‌گی می‌شود تحقیق کرد این g یک شبهِ‌ضرب ِ درونی است. نشان‌گان ِ این شبهِ‌ضرب هم (n_+, n_-) است، که n_+ و n_- تعداد ِ α^i ها یِ به‌ترتیب مثبت و منفی است. g ضرب ِ درونی می‌شود اگر همه یِ α^i ها مثبت باشند. از (1343) یا (1344) دیده می‌شود $T^\dagger$ هم در پایه یِ $\{e_i \mid i\}$ قطری است. پس T و $T^\dagger$ با هم جابه‌جا می‌شوند.

■

قضیه یِ 423: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی است، T_1 تا T_k در $\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار اند، و به ازا یِ هر i و j جابه‌جاگر ِ T_i و T_j صفر است. در این صورت یک پایه یِ یکه‌متعامد هست که همه یِ T_i ها در آن قطری اند. هم‌چنین به ازا یِ هر i و j جابه‌جاگر ِ T_i با $T_j^\dagger$ و نیز جابه‌جاگر ِ $T_i^\dagger$ با $T_j^\dagger$ صفر است.

اثبات: T_i ها شبهِ‌ساده اند (چون بهنجار اند) و با هم جابه‌جا می‌شوند، پس $\mathbb{V}$ یک پایه دارد که در آن همه یِ T_i ها قطری اند. هر یک از ویژه‌فضاها یِ مشترک ِ T_i ها یک پایه یِ یکه‌متعامد دارد، و دو ویژه‌فضایِ‌مشترک ِ متمایز بر هم عمود اند. اجتماع ِ این پایه‌ها یِ یکه‌متعامد ِ ویژه‌فضاها یِ مشترک، همان پایه یِ موردِنظر است.

در این پایه همه یِ $T_i^\dagger$ ها هم قطری اند. پس جابه‌جاگر ِ هر دونگاشت ی از مجموعه یِ T_i ها و $T_j^\dagger$ ها صفر است.

■

lxx نگاشت‌ها یِ اِرمیتی و یکانی

فضا یِ شبهِ‌یکانی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ و نگاشت ِ $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم T اِرمیتی است اگر

$$T^\dagger = T. \tag{1374}$$

از این تعریف به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 424: هر نگاشت ِ اِرمیتی بهنجار است.

★

قضیه یِ 425: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اِرمیتی، و λ یک ویژه‌مقدار ِ T است. در این صورت

$$\lambda^\star = \lambda, \tag{1375}$$

یعنی λ حقیقی است.

اثبات: v را یک ویژه‌بردار ِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ می‌گیریم. از قضیه یِ 417 دیده می‌شود v ویژه‌بردار ِ T با ویژه‌مقدار ِ $\lambda^\star$ است (چون $T^\dagger$ همان T است). پس $\lambda^\star$ همان λ است، یعنی λ حقیقی است.

■

متناظر با قضیه یِ 421، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 426: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده است، ویژه‌فضاها یِ متناظر با ویژه‌مقدارها یِ متمایز ِ T برهم عمود اند، و ویژه‌مقدارها یِ T حقیقی اند. در این صورت T اِرمیتی است.

★

یک نتیجه یِ قضیه یِ 425، هم‌راه با قضیه‌ها یِ 420 و 422 و 424 این است که

قضیه یِ 427: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اِرمیتی باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}$ یک پایه دارد که T را قطری می‌کند و عنصرها یِ قطری یِ T حقیقی اند. هم‌چنین، اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط ِ باپایان‌بُعدی و $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده با ویژه‌مقدارها یِ حقیقی باشد، آن‌گاه متناظر با هر نشان‌گان ی یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر $\mathbb{V}$ هست که $\mathbb{V}$ را شبهِ‌یکانی می‌کند و با این شبهِ‌ضرب ِ درونی T اِرمیتی است. از جمله یک ضرب ِ درونی بر $\mathbb{V}$ هست که $\mathbb{V}$ را یکانی می‌کند و با این ضرب ِ درونی T اِرمیتی است.
★

قضیه یِ 428: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی و g شبهِ‌ضرب ِ تعریف‌شده بر آن است، و $h \in \mathfrak{HLF}_{-+}(\mathbb{C};\mathbb{V},\mathbb{V})$. در این صورت نگاشت ِ T با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{V}$ با تعریف ِ

$$\forall\ (u,v) \in (\mathbb{V}\times\mathbb{V})\ :\ g(u,T\,v) := h(u,v) \tag{1376}$$

اِرمیتی است و

$$T = (\tau_2 g)^{-1}\,\tau_2 h. \tag{1377}$$

اثبات: رابطه یِ (1376) هم‌ارز است با

$$\tau_2 g\,T = \tau_2 h., \tag{1378}$$

$\tau_2 g$ ناتکین است، پس در $\mathfrak{LF}_{-}(\mathbb{C};\mathbb{V})$ وارون‌پذیر است. از این‌جا نتیجه می‌شود (1378) برا یِ T جواب دارد و تنهاجواب ِ آن (1377) است. چون $\tau_2 h$ و $(\tau_2 g)^{-1}$ خطی اند، T هم خطی است. u و v را دو بردار ِ دل‌بخواه در $\mathbb{V}$ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} g(T^\dagger\,u,v) &= g(u,T\,v),\\ &= h(u,v),\\ &= [h(v,u)]^\star,\\ &= [g(v,T\,u)]^\star,\\ &= g(T\,u,v). \end{aligned} \tag{1379}$$

g ناتکین است. پس نتیجه می‌شود $T^\dagger$ با T برابر است.
■

فضا یِ شبهِ‌یکانی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ و نگاشت ِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم T پادِاِرمیتی است اگر

$$T^{\dagger}=-T. \tag{1380}$$

از این تعریف به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 429: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اِرمیتی است اگر و تنها اگر $(\mathrm{i}\,T)$ اِرمیتی باشد. از جمله، هر نگاشت ِ پادِاِرمیتی بهنجار است.

★

با این قضیه به‌ساده‌گی می‌شود ویژه‌گی‌ها یِ نگاشت‌ها یِ پادِاِرمیتی را به مانسته‌یِشان برا یِ نگاشت‌ها یِ اِرمیتی مربوط کرد.

فضا یِ شبهِ‌یکانی یِ باپایان‌بُعدی یِ $\mathbb{V}$ و نگاشت ِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم T یکانی است اگر

$$T^{\dagger}=T^{-1}. \tag{1381}$$

از این تعریف به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 430: هر نگاشت ِ یکانی بهنجار است.

★

هم‌چنین، کاملاً مشابه با قضیه‌ها یِ 425 تا 427 دیده می‌شود

قضیه یِ 431: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ یکانی، و λ یک ویژه‌مقدار ِ T است. در این صورت

$$\lambda^{\star}\,\lambda=1, \tag{1382}$$

یعنی λ یکه است.

★

قضیه یِ 432: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی و $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده است، ویژه‌فضاها یِ متناظر با ویژه‌مقدارها یِ متمایز ِ T برهم عمود اند، و ویژه‌مقدارها یِ T یکه اند. در این صورت T یکانی است.

★

قضیه یِ 433: اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ یکانی باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}$ یک پایه دارد که T را قطری می‌کند و عنصرها یِ قطری یِ T یکه اند. هم‌چنین، اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط ِ باپایان‌بُعدی و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده با ویژه‌مقدارها یِ یکه باشد، آن‌گاه متناظر با هر نشان‌گان ی یک شبهِ‌ضرب ِ درونی بر $\mathbb{V}$ هست که $\mathbb{V}$ را شبهِ‌یکانی می‌کند و با این شبهِ‌ضرب ِ درونی T یکانی است. از جمله یک ضرب ِ درونی بر $\mathbb{V}$ هست که $\mathbb{V}$ را یکانی می‌کند و با این ضرب ِ درونی T یکانی است.

★

سرانجام،

قضیه یِ 434: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار است. در این صورت دو نگاشت ِ T_1 و T_2 هست که با هم جابه‌جا می‌شوند، T_1 اِرمیتی و T_2 یکانی است، و

$$T = T_1\, T_2. \tag{1383}$$

اثبات: چون T شبهِ‌ساده است $\mathbb{V}$ حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ ویژه‌فضاها یِ T است. ویژه‌فضا یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ_i را با $\mathbb{V}_i$ نمایش می‌دهیم. Π_i را هم افکنش یِ می‌گیریم که تصویر َش $\mathbb{V}_i$ و هسته اَش حاصلِ‌جمع ِ بقیه یِ ویژه‌فضاها یِ T (جز $\mathbb{V}_i$) است. تعریف می‌کنیم

$$T_1 := \sum\nolimits_i \rho_i\, \Pi_i,$$

$$T_2 := \sum\nolimits_i \eta_i\, \Pi_i, \tag{1384}$$

که

$$\forall\, i\ :\ \begin{cases} \rho_i\, \eta_i = \lambda_i, \\ \rho_i \in \mathbb{R}, \\ |\eta_i| = 1. \end{cases} \tag{1385}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود T_1 و T_2 با تعریف ِ (1384) به‌ترتیب اِرمیتی و یکانی اند، با هم جابه‌جا می‌شوند، و (1383) را بر می آورَند.

■

XV

نمایی یِ یک نگاشت ِ خطی

lxxi تعریف ِ نمایی یِ یک نگاشت ِ خطی

فرض کنید میدان ِ $\mathbb{F}$ چنان است که یک تابع ِ نمایی (exp) هست با دامنه یِ $\mathbb{F}$ و مقدار در $\mathbb{F}$ و این ویژه‌گی‌ها.

$$\forall\ (a,b) \in (\mathbb{F}\times\mathbb{F})\ :\ \exp(a+b) = [\exp(a)]\,[\exp(b)],$$

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \tag{1386}$$

که در آن فرض شده جمله‌ها یِ سری خوش‌تعریف اند و این سری هم‌گرا است و حد ِ آن صفر نیست. به چنین‌میدان ی یک میدان ِ نمایی‌پذیر می‌گوییم. مثلاً $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نمایی‌پذیر اند، در حال ی که $\mathbb{Q}$ چنین نیست. به ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 435: فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان ِ نمایی‌پذیر است. در این صورت

$$\exp(0) = 1. \tag{1387}$$

★

همه یِ مشتق‌ها یِ صوری یِ تابع ِ نمایی را خود ِ تابع ِ نمایی تعریف می‌کنیم:

$$\forall\,(n,a)\in(\mathbb{N}\times\mathbb{F})\;:\;\exp^{(n)}(a):=\exp(a). \tag{1388}$$

نگاشت ِ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر ِ $T\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ را در نظر بگیرید، که میدان ِ متناظر با $\mathbb{V}$ نمایی‌پذیر است. با تعریف ِ نمایی و مشتق‌ها یِ صوری یِ آن، $\exp(T)$ (به شکل ِ بخش ِ xxiv) تعریف می‌شود. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 436: فرض کنید $N\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ یک نگاشت ِ پوچ‌توان، و میدان ِ متناظر با $\mathbb{V}$ نمایی‌پذیر است. در این صورت،

$$\exp(N)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,N^k. \tag{1389}$$

★

توجه داریم که در طرف ِ راست ِ (1389) حدگیری لازم نیست، چون فقط تعداد ِ باپایان ی از جمله‌ها غیرِصفر اند.

قضیه یِ 437: فرض کنید $S\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده، $N\in\mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان، و میدان ِ متناظر با $\mathbb{V}$ نمایی‌پذیر است، و S و N با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت،

$$\exp(S+N)=[\exp(N)]\,[\exp(S)]. \tag{1390}$$

اثبات: T را $(S+N)$ تعریف می‌کنیم. روشن است که S بخش ِ شبهِ‌ساده و N بخش ِ پوچ‌توان ِ T است. v را در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}
[\exp(T)]\,v&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\,[\exp^{(m)}(\lambda)]\,N^m\,v,\\
&=[\exp(\lambda)]\,\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\,N^m\,v,\\
&=[\exp(\lambda)]\,[\exp(N)]\,v,\\
&=[\exp(N)]\,[\exp(S)]\,v.
\end{aligned} \tag{1391}$$

اثبات با اثر ِ دادن ِ $\exp(T)$ بر یک حاصلِ جمع ِ دل‌بخواهد از ویژه‌بردارها ی تعمیم‌یافته ی T کامل می‌شود.

■

قضیه ی 438: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی خطی با میدان ی نمایی‌پذیر است، و $S_1 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $S_2 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ نگاشت‌ها یی شبهِ‌ساده اند که با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت،

$$\exp(S_1 + S_2) = [\exp(S_1)]\,[\exp(S_2)]. \tag{1392}$$

اثبات: $(S_1 + S_2)$ شبه‌ساده است. $\mathbb{V}$ را به شکل ِ حاصلِ جمع ِ مستقیم ِ زیرفضاها یی می‌نویسیم که هر یک از آن‌ها ویژه‌فضا ی S_1 و S_2 اند. هر یک از این زیرفضاها ویژه‌فضا ی $(S_1 + S_2)$ است. $\mathbb{W}$ را یک ی از این زیرفضاها متناظر با ویژه‌مقدارها ی λ_1 و λ_2 برا ی به‌ترتیب S_1 و S_2 می‌گیریم. w را بردار ی دل‌بخواه در این زیرفضا می‌گیریم. داریم

$$(S_1 + S_2)\,w = (\lambda_1 + \lambda_2)\,w, \tag{1393}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}
[\exp(S_1 + S_2)]\,w &= [\exp(\lambda_1 + \lambda_2)]\,w,\\
&= [\exp(\lambda_2)]\,[\exp(S_1)]\,w,\\
&= [\exp(S_1)]\,[\exp(S_2)]\,w.
\end{aligned} \tag{1394}$$

برا ی تکمیل ِ اثبات، کافی است دوطرف ِ (1392) را بر مجموع ِ دل‌بخواه ی از بردارها یی اثر دهیم که هر یک ویژه‌بردار ِ مشترک ِ S_1 و S_2 یند.

■

قضیه ی 439: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ی خطی با میدان ی نمایی‌پذیر است، و $N_1 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $N_2 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ نگاشت‌ها یی پوچ‌توان اند که با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت،

$$\exp(N_1 + N_2) = [\exp(N_1)]\,[\exp(N_2)]. \tag{1395}$$

اثبات: (N_1+N_2) پوچ‌توان است. پس داریم

$$\begin{aligned}\exp(N_1+N_2) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,(N_1+N_2)^k,\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!\,(k-l)!}N_1^l\,N_2^{l-k},\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{N_1^l}{l!}\,\frac{N_2^m}{m!},\\ &= [\exp(N_1)]\,[\exp(N_2)]. \qquad (1396)\end{aligned}$$

توجه داریم که هیچ یک از حدها یِ بالا یِ جمع‌بندی واقعاً تا بی‌نهایت نمی‌رود (چون از جا یی به بعد جمله‌ها صفر اند). پس می‌شود ترتیب ـِ جمع‌بندی‌ها را عوض کرد.

■

با استفاده از این سه‌قضیه معلوم می‌شود

قضیه یِ 440: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان یِ نمایی‌پذیر است، و $T_1\in\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ و $T_2\in\mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ نگاشت‌ها یی ژُردَن‌تجزیه‌پذیر اند که با هم جابه‌جا می‌شوند. در این صورت،

$$\exp(T_1+T_2)=[\exp(T_1)]\,[\exp(T_2)]. \qquad (1397)$$

اثبات: داریم

$$\begin{aligned}\exp(T_1+T_2) &= \{\exp[\mathrm{nil}(T_1+T_2)]\}\,\{\exp[\mathrm{sem}(T_1+T_2)]\},\\ &= \{\exp[\mathrm{nil}(T_1)+\mathrm{nil}(T_2)]\}\,\{\exp[\mathrm{sem}(T_1)+\mathrm{sem}(T_2)]\}\\ &= \{\exp[\mathrm{nil}(T_1)]\}\,\{\exp[\mathrm{nil}(T_2)]\}\,\{\exp[\mathrm{sem}(T_1)]\}\,\{\exp[\mathrm{sem}(T_2)]\},\\ &= \{\exp[\mathrm{nil}(T_1)]\}\,\{\exp[\mathrm{sem}(T_1)]\}\,\{\exp[\mathrm{nil}(T_2)]\}\,\{\exp[\mathrm{sem}(T_2)]\},\\ &= [\exp(T_1)]\,[\exp(T_2)]. \qquad (1398)\end{aligned}$$

در اثبات از قضیه یِ 102 استفاده شده، که بر اساس ـِ آن اگر دو نگاشت ژُردَن‌تجزیه‌پذیر با هم جابه‌جا شوند، نمایی‌ها یِشان هم با هم جابه‌جا می‌شوند.

■

نمایی یِ یک نگاشت ِ خطی را بر اساس ِ یک سری هم می‌شد تعریف کرد. فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. تعریف می‌کنیم

$$\forall\, v \in \mathbb{V}\ :\ [\widetilde{\exp}(T)]\, v := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, T^k\, v\right). \tag{1399}$$

البته برا یِ این تعریف باید حد ِ طرف ِ راست تعریف شده و وجود داشته باشد. مثلاً اگر $\mathbb{V}$ یک فضا یِ مختلط ِ باپایان‌بُعدی باشد، می‌شود حد ِ طرف ِ راست را بر اساس ِ حد ِ هر یک از مئلفه‌ها یِ آن تعریف کرد. می‌شود نشان داد در این حالت $\exp$ و $\widetilde{\exp}$ یک‌سان اند:

قضیه یِ 441: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ مختلط ِ باپایان‌بُعدی است و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$. در این صورت $\widetilde{\exp}(T)$ خوش‌تعریف است و

$$\widetilde{\exp}(T) = \exp(T). \tag{1400}$$

اثبات: T ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. داریم

$$\frac{1}{k!}\, T^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[\mathrm{nil}(T)]^l}{l!}\, \frac{[\mathrm{sem}(T)]^{k-l}}{(k-l)!}. \tag{1401}$$

حد ِ بالا یِ جمع در واقع کمینه یِ k و $\{\mathrm{np}[\mathrm{nil}(T)] - 1\}$ است و بقیه یِ جمله‌ها صفر اند. پس تعداد ِ جمله‌ها از $\{\mathrm{np}[\mathrm{nil}(T)]\}$ بیش‌تر نمی‌شود. فرض کنید v در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ است. داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, T^k\, v &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[\mathrm{nil}(T)]^l}{l!}\, \sum_{k=l}^{n} \frac{[\mathrm{sem}(T)]^{k-l}}{(k-l)!}\, v,\\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[\mathrm{nil}(T)]^l}{l!}\, \sum_{m=0}^{n-l} \frac{\lambda^m}{m!}\, v\end{aligned} \tag{1402}$$

اما به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[\mathrm{nil}(T)]^l}{l!}\, \sum_{m=0}^{n-l} \frac{\lambda^m}{m!}\, v\right) = [\exp(\lambda)]\, \frac{[\mathrm{nil}(T)]^l}{l!}\, v, \tag{1403}$$

و از آن‌جا،

$$[\widetilde{\exp}(T)]\, v = [\exp(\lambda)]\, \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[\mathrm{nil}(T)]^l}{l!}\, v. \tag{1404}$$

باز توجه داریم که تعداد ِ جمله‌ها یِ ناصفر ِ طرف ِ راست باپایان است. به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\exp}(T)]\, v &= [\exp(\lambda)]\, \{\exp[\mathrm{nil}(T)]\}\, v,\\
&= \{\exp[\mathrm{nil}(T)]\}\, \{\exp[\mathrm{sem}(T)]\}\, v,\\
&= [\exp(T)]\, v. \qquad (1405)
\end{aligned}
$$

کافی است استدلال ِ مشابه ی را برا یِ حاصلِ‌جمع ی از بردارها به کار ببریم که هر کدام در یک ویژه‌فضا یِ S اند.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 442: فرض کنید $T\in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت،

$$\exp(T^{*}) = [\exp(T)]^{*}. \qquad (1406)$$

اگر علاوه بر این $\mathbb{V}$ شبهِ‌یکانی باشد، آن‌گاه

$$\exp(T^{\dagger}) = [\exp(T)]^{\dagger}. \qquad (1407)$$

★

سرانجام،

قضیه یِ 443: فرض کنید $T\in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت،

$$\det[\exp(T)] = \exp[\mathrm{tr}(T)]. \qquad (1408)$$

اثبات: از قضیه یِ 104 داریم اگر $\mathbb{V}_i$ ویژه‌فضا یِ T متناظر با λ_i باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}_i$ زیرمجموعه یِ ویژه‌فضا یِ $[\exp(T)]$ متناظر با $[\exp(\lambda_i)]$ است. بُعد ِ $\mathbb{V}_i$ را با n_i نمایش می‌دهیم. از قضیه یِ 176 داریم

$$\mathrm{tr}(T) = \sum\nolimits_i n_i\, \lambda_i, \qquad (1409)$$

و از قضیه یِ 260 داریم

$$\det[\exp(T)] = \prod\nolimits_i [\exp(\lambda_i)]^{n_i}. \qquad (1410)$$

از ترکیب ِ این دورابطه حکم نتیجه می‌شود.

■

تعریف ِ نمایی ي یک نگاشت ِ خطی برا ي نگاشت‌ها ي ژُردَن‌تجزیه‌پذیر انجام شد. پس در فضاها ي خطی ي مختلط ِ باپایان‌بُعدی می‌شود این تعریف را به کار برد. اما نگاشت‌ها ي خطی یی که بر فضاها ي حقیقی تعریف شده باشند، لزوماً ژُردَن‌تجزیه‌پذیر نیستند. در مورد ِ این نگاشت‌ها، با استفاده از مختلط‌شده ي نگاشت می‌شود نمایی را تعریف کرد. به طور ِ دقیق‌تر،

قضیه ي 444: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ي خطی ي حقیقی، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathrm{K}(T)$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در این صورت $\exp[\mathrm{K}(T)]$ حقیقی است.

اثبات: کافی است قضیه ي 361 را در مورد ِ تابع ِ نمایی به کار ببریم.

■

با استفاده از این قضیه، نما یی برا ي نگاشت‌ها یی که بر فضاها ي خطی ي حقیقی تعریف شده اند را به این شکل تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ي خطی ي حقیقی، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathrm{K}(T)$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است. در این صورت

$$\exp(T) := \mathrm{R}\{\exp[\mathrm{K}(T)]\}. \tag{1411}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود با این تعریف ویژه‌گی‌ها ي تابع ِ نمایی برا ي نگاشت‌ها یی که بر فضاها ي حقیقی تعریف شده اند هم برقرار است.

lxxii لگاریتم ِ یک نگاشت ِ خطی

قضیه ي 445: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ي خطی با میدان ی نمایی‌پذیر، و $N \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان است. در این صورت یک و تنها یک نگاشت ِ پوچ‌توان ِ $N' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هست که

$$\exp(N') = 1 + N. \tag{1412}$$

اثبات: فرض کنید N' ـِ پوچ‌توان ی هست که (1412) را بر آورَد. پوچ‌توان یِ N و N' را با به‌ترتیب n و n' نمایش می‌دهیم. دیده می‌شود

$$\begin{aligned}[\exp(N')-1]^{n'} &= 0,\\ [\exp(N')-1]^{n'-1} &\neq 0.\end{aligned} \tag{1413}$$

از این نتیجه می‌شود

$$n' = n. \tag{1414}$$

حالا نشان می‌دهیم توان‌ها یِ مختلف ـِ N' را می‌شود به شکل ـِ یک چندجمله‌ای از N نوشت، چنان که در بسط ـِ $(N')^k$ فقط جمله‌ها یِ N^l با $l \geq k$ ظاهر می‌شوند. این با یک استقرا یِ ساده انجام می‌شود، با استفاده از

$$\begin{aligned}N^k &= [\exp(N')-1]^k,\\ &= (N')^k + \sum_{l=k+1}^{n-1} \alpha_{k\,l}\,(N')^l,\end{aligned} \tag{1415}$$

معلوم می‌شود $(N')^{n-1}$ همان N^{n-1} است، و می‌شود استقرا را رو یِ k به شکل ـِ نزولی کامل کرد. از جمله N' یک چندجمله‌ای از N است که جمله یِ ثابت ندارد. این یک‌تایی یِ جواب را نشان می‌دهد.

برا یِ نشان‌دادن ـِ وجود ـِ N'، می‌گیریم

$$N' = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\, N^k. \tag{1416}$$

این را در (1412) می‌گذاریم و می‌کوشیم α_k ها را حساب کنیم. دیده می‌شود در معادله ای که از برابرگذاشتن ـِ ضریب ـِ N^k در دوطرف به دست می‌آید فقط α_1 تا α_k ظاهر می‌شود و ضریب ـِ α_k هم صفر نیست. پس می‌شود α_k ها را به طور ـِ بازگشتی و به ترتیب ـِ صعودی حساب کرد.

■

قضیه یِ 446: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ی نمایی‌پذیر است، $N \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ پوچ‌توان است، و $N' \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ نگاشت ـِ پوچ‌توان ی است که (1412)

را بر می‌آورَد. در این صورت،

$$N' = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, N^k. \tag{1417}$$

اثبات: داریم

$$\exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, N^k\right] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\, \left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, N^k\right]^l,$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, N^m, \tag{1418}$$

که

$$c_m := \left(\sum_{\substack{m_1=0\\ \sum k\, m_k = m}}^{\infty} \cdots\right) \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{k}\right)^{m_k}\, \frac{(-1)^{k\, m_k}}{m_k!}\right]. \tag{1419}$$

برا یِ رسیدن به این رابطه از بسط ِ چندجمله‌ای استفاده شده:

$$\left(\sum_k a_k\right)^l = l!\, \left(\sum_{\substack{m_1=0\\ \sum m_k = l}}^{\infty} \cdots\right) \left(\prod_k \frac{a_k^{m_k}}{m_k!}\right), \tag{1420}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\, \left(\sum_k a_k\right)^l = \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots\right) \left(\prod_k \frac{a_k^{m_k}}{m_k!}\right). \tag{1421}$$

البته توجه داریم که تعداد ِ جمله‌ها یِ جمع‌ها یی که در رابطه‌ها یِ (1418)، (1419)، و (1420) ظاهر می‌شوند باپایان است. در کاربرد ِ (1421) در (1418) هم واقعاً تعداد ِ جمله‌ها باپایان است. پس برا یِ محاسبه چیز ی از نوع ِ حدگیری لازم نیست.

(1419) را این طور هم می‌شود نوشت

$$c_m := (-1)^m\, \left(\sum_{\substack{m_1=0\\ \sum k\, m_k = m}}^{\infty} \cdots\right) \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{k}\right)^{m_k}\, \frac{1}{m_k!}\right]. \tag{1422}$$

از (1422) نتیجه می‌شود

$$m\, c_m = (-1)^{m+1} \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{\substack{m_1=0\\ \sum k\, m_k = m}}^{\infty} \cdots\right) \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{k}\right)^{m_k - \delta_k^s}\, \frac{1}{(m_k - \delta_k^s)!}\right],$$

$$= (-1)^{m+1} \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{\substack{m_1=0 \\ \sum k\, m_k = m-s}}^{\infty} \cdots \right) \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{k} \right)^{m_k} \frac{1}{m_k!} \right], \qquad (1423)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$m\, c_m = \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s+1}\, c_{m-s}. \qquad (1424)$$

از این رابطه یِ بازگشتی، با یک استقرا یِ ساده نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0, \\ c_m &= 0, \quad m > 1. \end{aligned} \qquad (1425)$$

با محاسبه یِ مستقیم از (1422) دیده می‌شود

$$c_0 = 1, \qquad (1426)$$

که از ترکیب ِ آن با رابطه‌ها یِ قبلی دیده می‌شود

$$\exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, N^k \right] = 1 + N. \qquad (1427)$$

■

بد نیست توجه کنیم طرف ِ راست ِ (1417) در واقع بسط ِ $\ln(1+N)$ است. به N' در (1412) لگاریتم ِ $(1+N)$ می‌گوییم:

$$\begin{aligned} N' &= \ln(1+N), \\ &:= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, N^k. \end{aligned} \qquad (1428)$$

میدان ِ نمایی‌پذیر ِ $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم $\lambda \in \mathbb{F}$ لگاریتم‌پذیر است اگر $\lambda \in \exp(\mathbb{F})$.

قضیه ي 447: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ي خطی با میدان ی نمایی‌پذیر است، $S \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده است، و همه ي ویژه‌مقدارها ي S لگاریتم‌پذیر اند. در این صورت یک نگاشت ِ شبهِ‌ساده ي $S' \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هست که

$$\exp(S') = S. \tag{1429}$$

اثبات: ویژه‌فضاها ي S را با $\mathbb{V}_i$ ها، و ویژه‌مقدارها ي متناظر را با λ_i نمایش می‌دهیم. $\mathbb{V}$ را حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ زیرفضاها ي $\mathbb{W}_a$ می‌گیریم که هر یک از آن‌ها زیرفضا ي یک ی از $\mathbb{V}_i$ ها است. فرض کنید $\mathbb{W}_a$ زیرفضا ي $\mathbb{V}_i$ است. μ_a را چنان می‌گیریم که

$$\exp(\mu_a) = \lambda_i. \tag{1430}$$

S' را نگاشت ی خطی تعریف می‌کنیم که

$$\mathrm{res}(S';\mathbb{W}_a) = \mu_a\, 1_{\mathbb{W}_a}. \tag{1431}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود این نگاشت شبهِ‌ساده است و (1429) را بر می‌آورَد.

■

توجه کنید که S' لزوماً یک‌تا نیست، چون تابع ِ نمایی لزوماً یک‌به‌یک نیست. S' لزوماً تابع ِ S هم نیست، باز چون تابع ِ نمایی لزوماً یک‌به‌یک نیست. اگر اسکالرها ي متمایز ِ μ_1 و μ_2 چنان باشند که

$$\forall\ a \in \{1,2\}\ :\ \exp(\mu_a) = \lambda, \tag{1432}$$

و λ یک ویژه‌مقدار ِ S باشد که ویژه‌فضا ي متناظر با آن حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ دو زیرفضا ي نابدیهی ي $\mathbb{W}_1$ و $\mathbb{W}_2$ باشد، اگر $\mathrm{res}(S';\mathbb{W}_a)$ را برا ي $a \in \{1,2\}$ به شکل ِ (1431) تعریف کنیم، آن‌گاه S' تابع ِ S نیست. علت این است که اگر S' تابع ِ S باشد، آن‌گاه هر ویژه‌بردار ِ S ویژه‌بردار ِ S' هم هست. در حال ی که مجموع ِ دو بردار ِ ناصفر که یک ی از آن‌ها عضو ِ $\mathbb{W}_1$ و دیگر ی عضو ِ $\mathbb{W}_2$ باشد ویژه‌بردار ِ S هست ولی ویژه‌بردار ِ S' نیست. اما می‌شود S' را چنان تعریف کرد که تابع ِ S باشد:

قضیه ي 448: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا ي خطی با میدان ی نمایی‌پذیر است، $S \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ شبهِ‌ساده است، و همه ي ویژه‌مقدارها ي S لگاریتم‌پذیر اند. در این صورت یک نگاشت ِ شبهِ‌ساده ي $S' \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هست که (1429) را بر می‌آورَد و تابع ِ S است.

اثبات: کافی است در اثبات ِ قضیه یِ 447 ویژه‌فضاها یِ S' را همان ویژه‌فضاها یِ S بگیریم.

■

به نگاشت ِ شبهِ‌ساده یِ S' با رابطه یِ (1429) و این شرط که ویژه‌فضاها یَش همان ویژه‌فضاها یِ S باشد، لگاریتم ِ S می‌گوییم:

$$S' = \ln(S). \tag{1433}$$

توجه داریم که این S' هم لزوماً یک‌تا نیست، چون تابع ِ نمایی لزوماً یک‌به‌یک نیست.

قضیه یِ 449: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ی نمایی‌پذیر است، $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر است، و همه یِ ویژه‌مقدارها یِ T لگاریتم‌پذیر اند. در این صورت یک نگاشت ِ شبهِ‌ساده یِ $T' \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ هست که یک تابع ِ T است و

$$\exp(T') = T, \tag{1434}$$

اثبات: ویژه‌مقدارها یِ T لگاریتم‌پذیر اند، پس هیچ یک صفر نیستند. به این ترتیب $\mathrm{sem}(T)$ ناتکین است. داریم

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{sem}(T) + \mathrm{nil}(T),\\ &= [\mathrm{sem}(T)]\,\{1 + [\mathrm{sem}(T)]^{-1}\,[\mathrm{nil}(T)]\},\\ &= [\mathrm{sem}(T)]\,(1 + N), \end{aligned} \tag{1435}$$

که

$$N := [\mathrm{sem}(T)]^{-1}\,[\mathrm{nil}(T)]. \tag{1436}$$

N پوچ‌توان است و با $\mathrm{sem}(T)$ جابه‌جا می‌شود. نگاشت ِ شبهِ‌ساده یِ S را لگاریتم ِ $\mathrm{sem}(T)$ می‌گیریم:

$$S := \ln[\mathrm{sem}(T)]. \tag{1437}$$

S با N جابه‌جا می‌شود. می‌گیریم

$$T' := S + \ln(1 + N). \tag{1438}$$

S شبه‌ِساده است، $\ln(1+N)$ پوچ‌توان است، و این دونگاشت با هم جابه‌جا می‌شوند. به ساده‌گی دیده می‌شود T' با تعریف ِ بالا (1434) را بر می‌آورَد. ضمناً T' یک تابع ِ T است. کافی است خانواده یِ f را چنین تعریف کنیم.

$$f^{(k)}(\lambda) := \begin{cases} \ln(\lambda), & k=0 \\ \dfrac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{\lambda^k}, & k \neq 0 \end{cases}. \tag{1439}$$

در این‌جا λ ویژه‌مقدار ِ T، و $\ln(\lambda)$ ویژه‌مقدار ِ متناظر ِ S است. v را بردار ی در ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته یِ T متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ می‌گیریم. در این صورت،

$$\begin{aligned}
[f(T)]\,v &= \{f[\mathrm{sem}(T)+\mathrm{nil}(T)]\}\,v,\\
&= [\ln(\lambda)]\,v + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\mathrm{nil}(T)]^k}{k!}\,\frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{\lambda^k}\,v,\\
&= S\,v - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,[\mathrm{nil}(T)]^k\,\{[\mathrm{sem}(T)]^{-1}\}^k\,v,\\
&= S\,v - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,N^k\,v,\\
&= [S+\ln(1+N)]\,v. \qquad (1440)
\end{aligned}$$

از این‌جا،

$$T' = f(T). \tag{1441}$$

■

به T' که ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته اَش همان ویژه‌فضاها یِ تعمیم‌یافته یِ T اند و نمایی یِ آن T است، لگاریتم ِ T می‌گوییم:

$$T' = \ln(T). \tag{1442}$$

توجه داریم که T' با این مشخصات لزوماً یک‌تا نیست، چون تابع ِ نمایی لزوماً یک‌به‌یک نیست.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 450: فرض کنید $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ ژُردَن‌تجزیه‌پذیر با ویژه‌مقدارها یِ لگاریتم‌پذیر، و $\mathbb{V}$ باپایان‌بُعدی است. در این صورت،

$$\ln(T^*) = [\ln(T)]^*. \tag{1443}$$

اگر علاوه بر این $\mathbb{V}$ شبهِ‌یکانی باشد و لگاریتم چنان تعریف شده باشد که

$$\ln(\lambda^\star) = [\ln(\lambda)]^\star, \tag{1444}$$

آن‌گاه

$$\ln(T^\dagger) = [\ln(T)]^\dagger. \tag{1445}$$

★

lxxiii نمایی و لگاریتم ِ نگاشت‌ها یِ بهنجار

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 451: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ بهنجار است. در این صورت $\exp(T)$ هم بهنجار است. هم‌چنین، اگر T ناتکین باشد $\ln(T)$ هم بهنجار است.

★

قضیه یِ 452: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی، و $T \in \mathcal{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$ اِرمیتی است. در این صورت $\exp(T)$ هم اِرمیتی است. هم‌چنین، اگر همه یِ ویژه‌مقدارها یِ T مثبت باشند بین ِ نگاشت‌ها یِ مختلف ی که $\ln(T)$ اند یک و فقط یک ی هست که اِرمیتی است.

اثبات: اثبات ِ بخش ِ اول ِ حکم سرراست است. برا یِ اثبات ِ بخش ِ دوم، کافی است توجه کنیم که به ازا یِ هر λ یِ مثبت یک و فقط یک ی از μ ها یی که معادله یِ $\exp(\mu) = \lambda$ را بر می‌آورند حقیقی است.

■

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 453: فرض کنید $T \in \mathfrak{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V})$، و $\mathbb{V}$ یک فضا یِ یکانی یِ باپایان‌بُعدی است. در این صورت اگر T پادارمیتی باشد، $\exp(T)$ یکانی است. هم‌چنین، اگر T یکانی باشد $\ln(T)$ پادارمیتی است.

★

XVI

پی‌وست ـِ A

lxxiii پایه ي هامِل ـِ یک فضا يِ خطی

فضا يِ خطی يِ $\mathbb{V}$ و زیرمجموعه يِ B از آن را در نظر بگیرید. یک ترکیب ـِ خطی از اعضا يِ B، یعنی مجموع ـِ تعداد ـِ باپایان ی جمله، که هر یک از آن‌ها برابر است با حاصلِ‌ضرب ـِ یک اسکالر در یک بردار ـِ عضو ـِ B. می‌گوییم زیرمجموعه يِ B از فضا يِ خطی يِ $\mathbb{V}$ خطی‌مستقل است، اگر هیچ ترکیب ـِ خطی يِ نابدیهی از اعضا يِ آن صفر نباشد. به این ترتیب، B خطی‌مستقل است اگر و تنها اگر همه يِ زیرمجموعه‌ها يِ باپایان‌عضوی يَش خطی‌مستقل باشند. متناظر با هر زیرمجموعه يِ B از فضا يِ خطی يِ $\mathbb{V}$، پهنه يِ B را مجموعه يِ همه يِ ترکیب‌ها يِ خطی يِ اعضا يِ B تعریف می‌کنیم. این تعریف‌ها، حالت ـِ کلی يِ تعریف‌ها يِ بخش ـِ iv اند.

فضا يِ خطی يِ $\mathbb{V}$ و زیرمجموعه يِ B از آن را در نظر بگیرید. می‌گوییم B یک پایه يِ (پایه يِ هامِل ـِ) $\mathbb{V}$ است، اگر و تنها اگر B خطی‌مستقل باشد و پهنه اَش با $\mathbb{V}$ برابر باشد. این تعریف هم تعمیم ـِ تعریف ـِ پایه در بخش ـِ iv است.

در بخش ـِ iv دیدیم هر فضا يِ خطی يِ باپایان‌بُعدی پایه دارد. در واقع بُعد ـِ یک فضا يِ خطی يِ باپایان‌بُعدی را تعداد ـِ اعضا يِ پایه اَش تعریف کردیم. چنین‌حکم ی (وجود ـِ پایه يِ هامِل) برا ی فضاها يِ خطی يِ بی‌پایان‌بُعدی بدیهی نیست. ثابت

می‌شود وجود ـِ پایه برا یِ فضاها یِ خطی یِ دل‌بخواه، هم‌ارز است با اصل ـِ انتخاب. حتا بیش از این: اصل ـِ انتخاب هم‌ارز است با این گزاره.
گزاره یِ 1: به ازا یِ هر فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ و هر زیرمجموعه یِ خطی‌مستقل ـِ A از آن، $\mathbb{V}$ یک پایه دارد که شامل ـِ A است.

★

با پذیرش ـِ این حکم، خیل ی از قضیه‌ها یِ جبرِخطی قوی‌تر می‌شوند. مثلاً
قضیه یِ 454: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی و $\mathbb{V}_1$ یک زیرفضا یِ آن است. در این صورت $\mathbb{V}_1$ در $\mathbb{V}$ جداشدنی است. از جمله، همه یِ نگاشت‌ها یِ خطی هسته‌جدا هستند.

★

قضیه یِ 455: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. اگر $v \in \mathbb{V}$ بردار ی ناصفر باشد، آن‌گاه یک هم‌بردار ـِ $s \in \mathbb{V}^*$ هست که

$$s(v) = 1. \tag{1446}$$

اثبات: B را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم که شامل ـِ v است. s را هم‌بردار ی تعریف می‌کنیم که اثر ـَ ش رو یِ هر بردار ی برابر است با ضریب ـِ v در بسط ـِ آن بردار بر حسب ـِ پایه یِ B.

■

به همین ترتیب، دیده می‌شود فرض ـِ باپایان‌بودن ـِ بُعد ـِ $\mathbb{V}$ در قضیه‌ها یِ 195 و 213 لازم نیست.
قضیه یِ 456: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی است. در این صورت نگاشت ـِ خطی یِ $t \in \mathfrak{LF}[(\mathbb{V}^*)^*; \mathbb{V}]$ در قضیه یِ 121 یک‌به‌یک است.

★

lxxiv میدان ـِ جبری‌بسته، و بستار ـِ جبری یِ یک میدان

می‌گوییم میدان ـِ $\mathbb{F}$ جبری‌بسته است، اگر و تنها اگر هر چندجمله‌ای یِ ناثابت در آن ریشه داشته باشد. این هم‌ارز است با این که هر چندجمله‌ای قابل ـِ تجزیه به عامل‌ها یِ

درجه‌یِ‌یک باشد.

می‌گوییم میدان ـ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ میدان ـ $\mathbb{F}$ است، اگر و تنها اگر $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$. از جمله، $\mathbb{C}$ (میدان ـ عددها یِ مختلط) یک گسترش ـ $\mathbb{R}$ (میدان ـ عددها یِ حقیقی) است، و $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ گسترش‌ها یی از $\mathbb{Q}$ (میدان ـ عددها یِ گویا) یند.

فرض کنید میدان ـ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ میدان ـ $\mathbb{F}$ است. حاصلِ‌ضرب ـ یک عضو ـ $\mathbb{F}$ در یک عضو ـ $\mathbb{K}$، عضو ـ $\mathbb{K}$ است. مجموع ـ دو عضو ـ $\mathbb{K}$ هم در $\mathbb{K}$ است. با این ضرب و جمع، میدان ـ $\mathbb{K}$ یک فضا یِ خطی با میدان ـ $\mathbb{F}$ است.

با استفاده از گسترش ـ یک میدان، می‌شود گسترش ـ یک فضا یِ خطی را تعریف کرد. فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ با میدان ـ $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید، و فرض کنید میدان ـ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ میدان ـ $\mathbb{F}$ است. $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{V})$ یک فضا یِ خطی با میدان ـ $\mathbb{F}$ است. با استفاده از این فضا، یک فضا یِ خطی رو ی میدان ـ $\mathbb{K}$ می‌سازیم. مجموعه یِ بردارها را همان $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{V})$ می‌گیریم. تعریف می‌کنیم

$$\forall\,(a, v) \in [\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \otimes \mathbb{V})] \;:\; a\,(v = k^i \otimes v_i) := (a\,k^i) \otimes v_i. \tag{1447}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 457: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ـ $\mathbb{F}$، و میدان ـ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ میدان ـ $\mathbb{F}$ است. در این صورت مجموعه یِ $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{V})$ با میدان ـ $\mathbb{K}$، جمع ـ فضا یِ خطی یِ $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{V})$ رو یِ میدان ـ $\mathbb{F}$، و ضرب ـ تعریف‌شده با (1447)، یک فضا یِ خطی است.

★

$(\mathbb{K} \otimes \mathbb{V})$ با میدان ـ $\mathbb{K}$، جمع ـ فضا یِ خطی یِ $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{V})$ رو یِ میدان ـ $\mathbb{F}$، و ضرب ـ تعریف‌شده با (1447) را $\mathbb{K}$–گسترش‌یافته یِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ می‌نامیم. به‌ساده‌گی می‌شود ثابت کرد

قضیه یِ 458: فرض کنید $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی با میدان ـ $\mathbb{F}$، و میدان ـ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ میدان ـ $\mathbb{F}$ است. در این صورت، اگر B یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{K}$–گسترش‌یافته یِ $\mathbb{V}$ با $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}(B)$ (مجموعه یِ ترکیب‌ها یِ خطی یِ اعضا یِ B با ضریب‌ها یِ عضو ـ $\mathbb{K}$) یک‌ریخت است و B یک پایه یِ $\mathbb{K}$–گسترش‌یافته یِ $\mathbb{V}$ است. از جمله، $\mathbb{K}$–گسترش‌یافته یِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{F}^n$ با فضا یِ خطی یِ $\mathbb{K}^n$ یک‌ریخت است.

★

به عنوان ـِ مثال، میدان‌ها یِ $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ و فضا یِ خطی یِ حقیقی یِ $\mathbb{V}$ (یعنی فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ با میدان ـِ $\mathbb{R}$) را در نظر بگیرید. هر عضو ـِ $\mathbb{C}$—گسترش‌یافته یِ $\mathbb{V}$ (مختلط‌شده یِ $\mathbb{V}$) را می‌شود با یک دوتایی نشان داد که هر یک از مئلفه‌ها یَش عضو ـِ $\mathbb{V}$ اند. حاصلِ‌جمع ـِ دو تا از این دوتایی‌ها، به این شکل است که مئلفه‌ها یِ نظیر را با هم جمع می‌کنیم. ضمناً

$$(\alpha + i\beta)\,(v_1, v_2) := (\alpha\, v_1 - \beta\, v_2, \alpha\, v_2 + \beta\, v_1), \qquad (1448)$$

که در آن α و β عددها یی حقیقی اند و v_1 و v_2 عضو ـِ $\mathbb{V}$ اند. ضرب ـِ رابطه یِ بالا کاملاً شبیه ضرب ـِ عدد ـِ مختلط ـِ $(\alpha + i\beta)$ در به‌اصطلاح بردار ـِ مختلط ـِ $(v_1 + iv_2)$ است.

اگر B یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{V}$ برابر است با مجموعه یِ ترکیب‌ها یِ خطی یِ حقیقی یِ اعضا یِ B. $\mathbb{C}$—گسترش‌یافته یِ $\mathbb{V}$ (مختلط‌شده یِ $\mathbb{V}$) هم برابر است با مجموعه یِ ترکیب‌ها یِ خطی یِ مختلط ـِ اعضا یِ B.

فرض کنید T یک نگاشت ـِ خطی از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{W}$ است، $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ اند، و میدان ـِ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـِ میدان ـِ $\mathbb{F}$ است. در این صورت $(1_{\mathbb{K}} \otimes T)$ یک نگاشت ـِ خطی از $\mathbb{K} \otimes \mathbb{V}$ به $\mathbb{K} \otimes \mathbb{W}$ است. به‌ساده‌گی می‌شود ثابت کرد

قضیه یِ 459: فرض کنید T در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ است، $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ اند، و میدان ـِ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـِ میدان ـِ $\mathbb{F}$ است. در این صورت $(1_{\mathbb{K}} \otimes T)$ به عنوان ـِ نگاشت ی از $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته یِ $\mathbb{V}$ به $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته یِ $\mathbb{W}$، خطی است.

★

به نگاشت ـِ $(1_{\mathbb{K}} \otimes T)$ از $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته یِ $\mathbb{V}$ به $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته یِ $\mathbb{W}$، $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته یِ T می‌گوییم.

قضیه یِ 460: فرض کنید $\mathbb{V}$ و $\mathbb{W}$ فضاها یی خطی با میدان ـِ $\mathbb{F}$ اند، میدان ـِ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـِ میدان ـِ $\mathbb{F}$ است، و T در $\mathfrak{LF}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$ است. در این صورت، اگر B یک پایه یِ $\mathbb{V}$ و C یک پایه یِ $\mathbb{W}$ باشد، آن‌گاه ـِ شکل ـِ ماتریسی یِ $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته یِ T در پایه‌ها یِ B و C، با شکل ـِ ماتریسی یِ T در پایه‌ها یِ B و C یک‌سان است. (یعنی مئلفه‌ها یِ ماتریسی یِ T و $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته یِ T در این پایه‌ها، یک‌سان اند.

★

معنی یِ ساده یِ $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته یِ فضاها یِ خطی و نگاشت‌ها یِ خطی این است که همان عمل‌ها یِ خطی با میدان ـ $\mathbb{F}$ را انجام می‌دهیم، اما اسکالرها را به جا یِ این که از $\mathbb{F}$ بگیریم، عضو ـ مجموعه یِ بزرگ‌تر ـ $\mathbb{K}$ می‌گیریم.

فرض کنید میدان ـ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ میدان ـ $\mathbb{F}$ است. می‌گوییم عضو ـ x از $\mathbb{K}$ رو یِ $\mathbb{F}$ جبری است، اگر و تنها اگر x ریشه یِ یک چندجمله‌ای یِ ناصفر از $\mathbb{K}$ باشد، که همه یِ ضریب‌ها یِ آن چندجمله‌ای عضو ـ $\mathbb{F}$ باشند. می‌گوییم میدان ـ $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ جبری یِ میدان ـ $\mathbb{F}$ است، اگر و تنها اگر $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ $\mathbb{F}$ باشد و همه یِ اعضا یِ $\mathbb{K}$ رو یِ $\mathbb{F}$ جبری باشند.

می‌گوییم میدان ـ $\mathbb{K}$ یک بستار ـ جبری یِ میدان ـ $\mathbb{F}$ است، اگر و تنها اگر $\mathbb{K}$ یک گسترش ـ جبری یِ $\mathbb{F}$ باشد و جبری‌بسته باشد. ثابت می‌شود

گزاره یِ 2: هر میدان یک بستار ـ جبری دارد.

★

با این گزاره، بسیار ی از قضیه‌ها یی که فرض ـِشان شامل ـ این است که میدان ـ یک فضا یِ خطی جبری‌بسته باشد را می‌شود تعمیم داد. روش ـ کار این است که به جا یِ $\mathbb{F}$ (میدان ـ آن فضا یِ خطی)، و فضاها یِ خطی و نگاشت‌ها یِ خطی یِ با $\mathbb{F}$، میدان ـ $\mathbb{K}$ و موجودات ـ $\mathbb{K}$—گسترش‌یافته را به کار می‌برند، که میدان ـ $\mathbb{K}$ یک بستار ـ جبری یِ میدان ـ $\mathbb{F}$ است. یک مثال ـ مهم میدان‌ها یِ $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ است. $\mathbb{R}$ جبری‌بسته نیست و $\mathbb{C}$ یک بستار ـ جبری یِ آن است. در خیل ی از موارد به جا یِ فضاها یِ حقیقی و نگاشت‌ها یِ خطی یِ حقیقی، فضاها یِ مختلط و نگاشت‌ها یِ خطی یِ مختلط را به کار می‌برند.

lxxv بخش‌پذیری یِ چندجمله‌ای‌ها

چندجمله‌ای یِ P رو یِ میدان ـ $\mathbb{F}$، یک تابع از $\mathbb{F}$ به $\mathbb{F}$ است با

$$\forall\ z \in \mathbb{F}\ :\ P(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i\, z^i, \tag{1449}$$

که در آن a_i ها عضو ـ $\mathbb{F}$ اند. چندجمله‌ای یِ P از درجه یِ n است، اگر P ناصفر باشد و در عبارت ـ بالا $a_n \neq 0$. در این صورت به a_n ضریب ـ غالب ـ P می‌گوییم. درجه یِ $P \neq 0$ را با $\deg(P)$ نشان می‌دهیم. می‌گوییم چندجمله‌ای یِ P اسکالر است، اگر $P = 0$

یا $\deg(P)=0$. در این حالت مقدار ِ P ثابت است و می‌شود با P مثل ِ یک اسکالر برابر با مقدار ِ P رفتار کرد.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 461: فرض کنید P_1 و P_2 دوچندجمله‌ای رو یِ $\mathbb{F}$ اند. در این صورت مجموع و حاصلِ‌ضرب ِشان هم یک چندجمله‌ای رو یِ $\mathbb{F}$ است، $(P_1\,P_2)$ با $(P_2\,P_1)$ برابر است، و اگر P_1 و P_2 هردو ناصفر باشند، آن‌گاه

$$\deg(P_1\,P_2)=\deg(P_1)+\deg(P_2). \tag{1450}$$

اگر $(P_1\,P_2)=0$، آن‌گاه $P_1=0$ یا $P_2=0$. هم‌چنین، اگر P_1 و P_2 هردو ناصفر باشند، آن‌گاه (P_1+P_2) صفر است یا درجه اَش از بیشینه یِ $\deg(P_1)$ و $\deg(P_2)$ نابزرگ‌تر است.

★

قضیه یِ 462: فرض کنید P_1 و P_2 دو چندجمله‌ای رو یِ میدان ِ $\mathbb{F}$ اند، و P_1 ناصفر است. در این صورت دو چند جمله‌ای یِ Q و R رو یِ $\mathbb{F}$ هستند که

$$P_2=Q\,P_1+R, \tag{1451}$$

و R صفر است یا $\deg(R)$ از $\deg(P_1)$ کوچک‌تر است. هم‌چنین، چندجمله‌ای‌ها یِ Q و R در (1451) یک‌تا یند.

اثبات: اگر P_2 صفر باشد یا $\deg(P_2)$ از $\deg(P_1)$ کوچک‌تر باشد، Q را صفر و R را P_2 می‌گیریم. در حالت ی که $\deg(P_2)$ ناکوچک‌تر از $\deg(P_1)$ است، فرض کنید $k=\deg(P_2)-\deg(P_1)$. اثبات ِ وجود ِ Q و R، با استقرا بر k کامل می‌شود. برا یِ $k=0$، چند جمله‌ای یِ Q را اسکالر و برابر با ضریب ِ غالب ِ P_2 تقسیم بر ضریب ِ غالب ِ P_1 می‌گیریم. بخش ِ اول ِ حکم به‌روشنی برقرار است. حالا فرض کنید بخش ِ اول ِ حکم برا یِ $k\le m$ برقرار است، و می‌گیریم $k=m+1$. داریم

$$P_2(z)=\alpha\,z^{m+1}\,P_1(z)+R_1(z), \tag{1452}$$

که α برابر است با ضریب ِ غالب ِ P_2 تقسیم بر ضریب ِ غالب ِ P_1. روشن است که R_1 صفر است، یا $\deg(R_1)<\deg(P_2)$. پس بخش ِ اول ِ حکم را می‌شود در مورد ِ R_1 و P_1 به کار برد:

$$R_1 = Q_1\, P_1 + R, \tag{1453}$$

که R صفر است، یا $\deg(R) < \deg(P_1)$. از این‌جا،

$$P_2(z) = [\alpha\, z^{m+1} + Q_1(z)]\, P_1(z) + R(z). \tag{1454}$$

برا یِ اثبات ـ یک‌تایی هم، فرض کنید Q' و R' هم (1451) را بر آورند. در این صورت،

$$(Q' - Q)\, P_1 = R - R'. \tag{1455}$$

طرف ـ راست صفر است، یا درجه اَش از $\deg(P_1)$ کوچک‌تر است. طرف ـ چپ هم صفر است، یا درجه اَش از $\deg(P_1)$ ناکوچک‌تر است. پس $R' = R$ و $Q' = Q$.

■

به Q و R در (1451)، به‌ترتیب خارجِ‌قسمت و باقی‌مانده یِ تقسیم ـ P_2 بر P_1 می‌گویند. هم‌چنین، می‌گویند چندجمله‌ای یِ P_1 چندجمله‌ای یِ P_2 را می‌شمارد، اگر باقی‌مانده یِ تقسیم ـ P_2 بر P_1 صفر باشد. در این حالت خارجِ‌قسمت ـ P_2 بر P_1 را با (P_2/P_1) نشان می‌دهیم. تعریف می‌کنیم صفر هم صفر را می‌شمارد.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 463: فرض کنید P_1 و P_2 دو چندجمله‌ای یِ ناصفر رو یِ میدان ـ $\mathbb{F}$ اند. در این صورت اگر چندجمله‌ای یِ P_1 چندجمله‌ای یِ P_2 را بشمارد، و $\deg(P_2) = \deg(P_1)$، آن‌گاه P_2 هم P_1 را می‌شمارد و خارجِ‌قسمت‌ها یِ (P_2/P_1) و (P_1/P_2) اسکالر اند. برعکس، اگر چندجمله‌ای یِ P_1 چندجمله‌ای یِ P_2 را بشمارد و P_1 هم P_2 را بشمارد، آن‌گاه $\deg(P_2) = \deg(P_1)$، و خارجِ‌قسمت‌ها یِ (P_2/P_1) و (P_1/P_2) اسکالر اند.

اثبات: اگر P_1 شمارنده یِ P_2 باشد و $\deg(P_2) = \deg(P_1)$، آن‌گاه (P_2/P_1) اسکالر است و $P_1 = (P_2/P_1)^{-1}\, P_2$. اگر P_1 شمارنده یِ P_2 باشد، آن‌گاه $\deg(P_2) \geq \deg(P_1)$. اگر P_2 شمارنده یِ P_1 باشد، آن‌گاه $\deg(P_2) \leq \deg(P_1)$. پس اگر هردوشرط برقرار باشد، آن‌گاه $\deg(P_2) = \deg(P_1)$.

■

قضیه یِ 464: فرض کنید P_1 و P_2 دو چندجمله‌ای رو یِ میدانِ $\mathbb{F}$ اند، و دستِ‌کم یک ی از آن‌ها ناصفر است. در این صورت یک چندجمله‌ای یِ D به شکلِ

$$D = Q_1\, P_1 + Q_2\, P_2 \tag{1456}$$

هست، که Q_1 و Q_2 چندجمله‌ای اند، و D ناصفر و شمارنده یِ مشترکِ P_1 و P_2 است.
اثبات: اگر یک ی از چندجمله‌ای‌ها یِ P_1 و P_2 صفر بود، درجه یِ چندجمله‌ای یِ دیگر را k می‌گیریم. اگر هردو ناصفر بودند، کمینه یِ درجه‌ها یِشان را k می‌گیریم. اگر مثلاً P_2 صفر باشد، Q_1 را یک و Q_2 را صفر می‌گیریم. اگر هیچ یک از P_1 و P_2 صفر نبود، مثلاً فرض کنید درجه یِ P_2 ناکوچک‌تر از درجه یِ P_1 است. اثبات با استقرا بر k انجام می‌شود. در حالتِ $k = 0$، Q_1 را یک و Q_2 را صفر می‌گیریم. درستی یِ حکم روشن است. حالا فرض کنید حکم برا یِ $k \le m$ درست است. می‌گیریم $k = m + 1$. P_2 را به P_1 تقسیم می‌کنیم:

$$P_2 = Q\, P_1 + R, \tag{1457}$$

که R صفر است، یا $\deg(R) < \deg(P_2)$. پس حکم در موردِ P_1 و R درست است:

$$D = Q_1'\, P_1 + Q_2\, R, \tag{1458}$$

که D ناصفر است، و چندجمله‌ای‌ها یِ P_1 و R را می‌شمارد. از این جا نتیجه می‌شود D چندجمله‌ای یِ P_2 را هم می‌شمارد. ضمناً

$$D = (Q_1' - Q_2\, Q)\, P_1 + Q_2\, P_2. \tag{1459}$$

■

از قضیه یِ بالا به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود
قضیه یِ 465: فرض کنید P_1 و P_2 دو چندجمله‌ای رو یِ میدانِ $\mathbb{F}$ اند، دستِ‌کم یک ی از آن‌ها ناصفر است، و چندجمله‌ای یِ P یک شمارنده یِ مشترکِ P_1 و P_2 است. در این صورت P یک شمارنده یِ D در (1456) هم هست. از جمله، D در (1456) با این شرطِ اضافی که ضریبِ غالبَ ش یک است، یک‌تا است.
★

به چندجمله‌ای یِ D در قضیه یِ 464، با این شرط ـِ اضافی که ضریب ـِ غالب ـِ D یک است، بزرگ‌ترین شمارنده یِ مشترک ـِ P_1 و P_2 می‌گوییم و آن را با $\gcd(P_1, P_2)$ نشان می‌دهیم. برا یِ تکمیل ـِ تعریف، بزرگ‌ترین شمارنده یِ مشترک ـِ صفر و صفر را هم خود ـِ صفر تعریف می‌کنیم:

$$\gcd(0, 0) := 0. \tag{1460}$$

قضیه یِ 466: فرض کنید P_1 و P_2 و P_3 چندجمله‌ای‌ها یی رو یِ میدان ـِ $\mathbb{F}$ اند. در این صورت،

$$\gcd[P_1, \gcd(P_2, P_3)] = \gcd[\gcd(P_1, P_2), P_3]. \tag{1461}$$

اثبات: طرف ـِ چپ P_1 و $\gcd(P_2, P_3)$ را می‌شمارد؛ پس P_1 و P_2 و P_3 را می‌شمارد؛ پس $\gcd(P_1, P_2)$ و P_3 را می‌شمارد، پس طرف ـِ راست را می‌شمارد. به همین ترتیب، طرف ـِ راست هم طرف ـِ چپ را می‌شمارد. پس طرف ـِ راست برابر است با طرف ـِ چپ ضرب در یک اسکالر. این اسکالر هم یک است، چون ضریب ـِ غالب ـِ دوطرف هم یک‌سان (یک) است. (برا یِ تکمیل ـِ اثبات، باید حالت ـِ خاص ـِ $P_1 = P_2 = P_3 = 0$ را هم در نظر گرفت. در این حالت دوطرف صفر اند.)

■

به این ترتیب، می‌شود بزرگ‌ترین شمارنده یِ مشترک ـِ k چندجمله‌ای را تعریف کرد:

$$\gcd(P_1, \ldots, P_k) := \gcd[\gcd(P_1, \ldots, P_{k-1}), P_k], \tag{1462}$$

و از قضیه یِ بالا معلوم می‌شود جا یِ پرانتزها هم مهم نیست. یک نتیجه یِ این تعریف و قضیه‌ها یِ 464 و 465 این است.

قضیه یِ 467: فرض کنید P_1 تا P_k چندجمله‌ای‌ها یی رو یِ میدان ـِ $\mathbb{F}$ اند. در این صورت چندجمله‌ای‌ها یِ Q_1 تا Q_k رو یِ $\mathbb{F}$ هستند، که

$$\gcd(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} Q_i\, P_i. \tag{1463}$$

هم‌چنین، هر شمارنده یِ مشترک ـِ P_1 تا P_k، چندجمله‌ای یِ $\gcd(P_1, \ldots, P_k)$ را هم می‌شمارد، و $\gcd(P_1, \ldots, P_k)$ نسبت به متغیرها یَش متقارن است. اگر همه یِ P_i ها صفر

نباشند، آن‌گاه $\gcd(P_1,\dots,P_k)$ ناصفر است، و یک و فقط یک چندجمله‌ای هست که به شکل ِ طرف ِ راست ِ (1463) است و همه ی P_i ها را می‌شمارد و ضریب ِ غالب َ ش یک است.

★

هم‌چنین،

قضیه ی 468: فرض کنید P_1 تا P_k چندجمله‌ای‌ها یی رو ی میدان ِ $\mathbb{F}$ اند، و دستِ‌کم یک ی از آن‌ها ناصفر است. در این صورت،

$$\gcd\{P_1/[\gcd(P_1,\dots,P_k)],\dots,P_k/[\gcd(P_1,\dots,P_k)]\} = 1. \tag{1464}$$

★

قضیه ی 469: فرض کنید P_1 و P_2 و P چندجمله‌ای‌ها یی رو ی میدان ِ $\mathbb{F}$ اند، و P ناصفر است و $(P_1\,P_2)$ را می‌شمارد. در این صورت $\{P/[\gcd(P_1,P)]\}$ چندجمله‌ای ی P_2 را می‌شمارد.

اثبات: چندجمله‌ای‌ها ی Q و Q_1 ی هستند که

$$\gcd(P_1,P) = Q\,P + Q_1\,P_1. \tag{1465}$$

دوطرف را در P_2 ضرب می‌کنیم:

$$P_2\ \gcd(P_1,P) = (Q\,P_2)\,P + Q_1\,(P_1\,P_2). \tag{1466}$$

دو چندجمله‌ای ی Q' و Q'' هستند که

$$P_1\,P_2 = Q'\,P, \qquad P = Q''\ \gcd(P_1,P). \tag{1467}$$

پس،

$$\gcd(P_1,P)\,(Q_1\,Q'\,Q'' + Q\,P_2\,Q'' - P_2) = 0. \tag{1468}$$

چون P ناصفر است، $\gcd(P_1,P)$ هم ناصفر است. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} P_2 &= (Q_1\,Q' + Q\,P_2)\,Q'', \\ &= (Q_1\,Q' + Q\,P_2)[P/\gcd(P_1,P)]. \end{aligned} \tag{1469}$$

■

متناظر با هر اسکالر ـ λ در میدان ـ $\mathbb{F}$ و هر عدد ـ صحیح ـ نامنفی یِ n، یک چندجمله‌ای یِ Mon_λ^n رو یِ میدان ـ $\mathbb{F}$ تعریف می‌کنیم که

$$\forall\, z \in \mathbb{F}\ :\ \mathrm{Mon}_\lambda^n(z) := (z-\lambda)^n. \qquad (1470)$$

قضیه یِ 470: فرض کنید P یک چندجمله‌ای رو یِ میدان ـ $\mathbb{F}$ است، λ یک اسکالر است، و $P(\lambda)=0$. در این صورت $\mathrm{Mon}_\lambda(=\mathrm{Mon}_\lambda^1)$ چندجمله‌ای یِ P را می‌شمارد.

اثبات: $\gcd(\mathrm{Mon}_\lambda, P)$ ناصفر است (چون Mon_λ ناصفر است). چون $\gcd(\mathrm{Mon}_\lambda, P)$ چندجمله‌ای یِ Mon_λ را می‌شمارد، $\deg[\gcd(\mathrm{Mon}_\lambda, P)]$ نابزرگ‌تر از یک است. اگر $\deg[\gcd(\mathrm{Mon}_\lambda, P)]$ صفر باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای‌ها یِ Q و Q' هستند که

$$Q\,P + Q'\,\mathrm{Mon}_\lambda = 1. \qquad (1471)$$

اما به ازا یِ متغیر ـ λ، طرف ـ چپ صفر و طرف ـ راست یک است. پس این تساوی برقرار نیست. بنابراین $\deg[\gcd(\mathrm{Mon}_\lambda, P)]$ یک است. در این صورت Mon_λ هم $\gcd(\mathrm{Mon}_\lambda, P)$، و در نتیجه P را می‌شمارد.

■

قضیه یِ 471: فرض کنید P یک چندجمله‌ای رو یِ میدان ـ $\mathbb{F}$ است، λ یک اسکالر و n یک عدد ـ صحیح ـ نامنفی است، و P چندجمله‌ای یِ Mon_λ^n را می‌شمارد. در این صورت یک عدد ـ صحیح ـ نامنفی یِ m و یک اسکالر ـ ناصفر ـ α هست که

$$P = \alpha\,\mathrm{Mon}_\lambda^m, \qquad (1472)$$

و $m \le n$.

اثبات: برا یِ $n=0$، اثبات ـ حکم روشن است. برا یِ $n>0$، یک چندجمله‌ای یِ Q هست که

$$\mathrm{Mon}_\lambda^n = Q\,P. \qquad (1473)$$

طرف ـ چپ به ازا یِ متغیر ـ λ صفر می‌شود. پس $Q(\lambda)=0$، یا $P(\lambda)=0$. در این صورت Mon_λ چندجمله‌ای یِ P یا چندجمله‌ای یِ Q را می‌شمارد. پس می‌شود دوطرف ـ

رابطه یِ بالا را بر Mon_λ تقسیم کرد. اثبات با استقرا بر n کامل می‌شود.

■

قضیه یِ 472: فرض کنید λ_1 تا λ_k اسکالرها یی متمایز در میدان ـِ $\mathbb{F}$، و n_1 تا n_k عددها یی صحیح و نامنفی اند، و P یک چندجمله‌ای رو یِ $\mathbb{F}$ است که چندجمله‌ای یِ

$$M := \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Mon}_{\lambda_i}^{n_i} \tag{1474}$$

را می‌شمارد. در این صورت

$$P = \alpha \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Mon}_{\lambda_i}^{m_i}, \tag{1475}$$

که α یک اسکالر ـِ ناصفر است و m_1 تا m_k عددها یِ صحیح ـِ نامنفی یِ هستند، که به ازا یِ هر i داریم $m_i \le n_i$.

اثبات: P ناصفر است. می‌گیریم

$$P' := P/[\gcd(P, \mathrm{Mon}_{\lambda_k}^{n_k})]. \tag{1476}$$

طبق ـِ قضیه یِ 469، چندجمله‌ای یِ P' چندجمله‌ای یِ Q با

$$Q := \prod_{i=1}^{k-1} \mathrm{Mon}_{\lambda_i}^{n_i} \tag{1477}$$

را می‌شمارد. طبق ـِ قضیه یِ 471، یک عدد ـِ صحیح ـِ نامنفی یِ m_k هست که نابزرگ‌تر از n_k است، و

$$\gcd(P, \mathrm{Mon}_{\lambda_k}^{n_k}) = \mathrm{Mon}_{\lambda_k}^{m_k}. \tag{1478}$$

حالا می‌شود اثبات را با استقرا رو یِ k کامل کرد.

■

می‌گویند چندجمله‌ها یِ P_1 تا P_k نسبت به هم اول اند، اگر بزرگ‌ترین شمارنده یِ مشترک ـِشان یک باشد. یک نتیجه یِ قضیه یِ بالا این است که

قضیه یِ 473: فرض کنید λ_1 تا λ_k اسکالرها یی متمایز در میدان ـِ $\mathbb{F}$، و n_1 تا n_k عددها یی صحیح و نامنفی اند، و چندجمله‌ای یِ M رو یِ $\mathbb{F}$ به شکل ـِ (1474) تعریف شده است. تعریف می‌کنیم

$$P_i := M/\mathrm{Mon}_{\lambda_i}^{n_i}. \tag{1479}$$

در این صورت P_1 تا P_k نسبت به هم اول اند. از جمله اگر $\lambda \neq \mu$، آن‌گاه Mon_λ^n و Mon_μ^m نسبت به هم اول اند.

★

lxxvi جای‌گشت

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. می‌گوییم $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ یک جای‌گشت ـ n تایی است، اگر σ در $\mathbb{N}$ وارون‌پذیر و $\mathrm{res}(\sigma; \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_n)$ همانی باشد. از این که $\mathbb{N}_n$ باپایان است (n عضوی است)، به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود

قضیه یِ 474: فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، و f نگاشت ی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ است، که $\mathrm{res}(f; \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_n)$ همانی است. در این صورت این سه‌گزاره هم‌ارز اند.

a f در $\mathbb{N}$ پوشا است.

b f یک‌به‌یک است.

c f در $\mathbb{N}$ وارون‌پذیر است.

★

مجموعه یِ همه یِ جای‌گشت‌ها یِ n تایی را با $\mathbb{S}_n$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{S} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{S}_n. \tag{1480}$$

می‌گوییم σ یک جای‌گشت است، اگر $\sigma \in \mathbb{S}$. این یعنی یک عدد ـ طبیعی یِ n هست، که σ یک جای‌گشت ـ n تایی است.

قضیه یِ 475: فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. در این صورت تعداد ـ اعضا یِ $\mathbb{S}_n$ برابر با $n!$ است.

★

از این که حاصلِ‌ضرب ـ (ترکیب ـ) دو نگاشت ـ وارون‌پذیر، یک نگاشت ـ وارون‌پذیر است، نتیجه می‌شود

قضیه یِ 476:

a اگر $n\in\mathbb{N}$، و $\sigma,\tau\in\mathcal{S}_n$، آن‌گاه $(\sigma\,\tau)\in\mathcal{S}_n$.

b اگر $\sigma,\tau\in\mathcal{S}$، آن‌گاه $(\sigma\,\tau)\in\mathcal{S}$.

★

هم‌چنین، به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد
قضیه یِ 477: فرض کنید σ یک جای‌گشت ِ n تایی است. در این صورت از ضرب ِ σ از چپ (از راست) در همه یِ اعضا یِ $\mathcal{S}_n$، هر یک از اعضا یِ $\mathcal{S}_n$ دقیقاً یک بار به دست می‌آیند.

★

(در واقع این حکم برا یِ هر گروه ی درست است.)

فرض کنید $i,j\in\mathbb{N}$، و $i\neq j$. جای‌گشت ِ $\sigma_{i\,j}$ را جای‌گشت ی تعریف می‌کنیم که i را به j تبدیل می‌کند، j را به i تبدیل می‌کند، و بقیه یِ اعضا یِ $\mathbb{N}$ را تغییر نمی‌دهد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود
قضیه یِ 478: فرض کنید $i,j\in\mathbb{N}$، و $i\neq j$. در این صورت $\sigma_{i\,j}=\sigma_{j\,i}$، و مجذور ِ $\sigma_{i\,j}$ نگاشت ِ همانی است. (یا وارون ِ $\sigma_{i\,j}$ خود ِ $\sigma_{i\,j}$ است.)

★

قضیه یِ 479: هر جای‌گشت را می‌شود به شکل ِ حاصلِ‌ضرب ی از جای‌گشت‌ها یِ $\sigma_{i\,j}$ (با $i\neq j$) نوشت.

اثبات: نشان می‌دهیم به ازا یِ هر $n\in\mathbb{N}$، هر جای‌گشت ِ n تایی را می‌شود به شکل ِ حاصلِ‌ضرب ی از $\sigma_{i\,j}$ ها نوشت. اثبات با استقرا بر n انجام می‌شود. در حالت ِ $n=1$، درستی یِ حکم روشن است: تنها‌جای‌گشت ِ یک‌تایی نگاشت ِ همانی است (حاصلِ‌ضرب ِ صفر تا از جای‌گشت‌ها یِ $\sigma_{i\,j}$). فرض کنید حکم برا یِ $n=m$ برقرار است. σ را یک جای‌گشت ِ $(m+1)$ تایی یِ دل‌بخواه می‌گیریم. اگر $\sigma(m+1)=(m+1)$، آن‌گاه σ یک جای‌گشت ِ m تایی است و حکم برا یَش درست است. اگر نَه،

$$\exists k\in\mathbb{N}_m\ :\ \sigma(m+1)=k. \tag{1481}$$

در این صورت جای‌گشت ِ $(m+1)$ تایی یِ τ با $\tau:=(\sigma_{m+1\,k}\,\sigma)$، این ویژه‌گی را دارد که

$$\tau(m+1)=m+1. \tag{1482}$$

پس τ یک جای‌گشت ـ m تایی است، و می‌شود آن را به شکل ـ حاصلِ‌ضرب ی از $\sigma_{i\,j}$ ها نوشت. از این‌جا (و با استفاده از قضیه یِ 478) نتیجه می‌شود σ را هم می‌شود به شکل ـ حاصلِ‌ضرب ی از $\sigma_{i\,j}$ ها نوشت.

■

فرض کنید $i\in\mathbb{N}$. در این صورت جای‌گشت ـ σ_i را $\sigma_{i\,i+1}$ تعریف می‌کنیم.

قضیه یِ 480: هر جای‌گشت را می‌شود به شکل ـ حاصلِ‌ضرب ی از جای‌گشت‌ها یِ σ_i نوشت.

اثبات: نشان می‌دهیم به ازا یِ هر $n\in\mathbb{N}$، هر جای‌گشت ـ n تایی را می‌شود به شکل ـ حاصلِ‌ضرب ی از σ_i ها نوشت. در حالت ـ $n=1$، تنهاجای‌گشت ـ n تایی نگاشت ـ همانی است، که حاصلِ‌ضرب ـ صفر تا از جای‌گشت‌ها یِ σ_i است. در حالت ـ کلی، با استفاده از قضیه یِ 479 کافی است حکم را برا یِ $\sigma_{i\,j}$ ها ثابت کنیم. فرض کنید $i<j$. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\sigma_{i\,j}=\sigma_i\cdots\sigma_{j-1}\cdots\sigma_i. \tag{1483}$$

■

این قضیه می‌گوید همه یِ جای‌گشت‌ها یِ n تایی را می‌شود با ترکیب ـ $(n-1)$ جای‌گشت ـ ساده (و البته جای‌گشت ـ همانی) ساخت.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 481: فرض کنید $i\in\mathbb{N}$. در این صورت،

$$\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i=\sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}. \tag{1484}$$

فرض کنید علاوه بر این $j\in\mathbb{N}$، و $|j-i|>1$. در این صورت،

$$\sigma_i\,\sigma_j=\sigma_j\,\sigma_i. \tag{1485}$$

★

فرض کنید k یک عدد ـ طبیعی یِ نایک است، و x_1 تا x_k عددها یی گویا یند. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{va}_k(x_1,\ldots,x_k) := (x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1}), \tag{1486}$$

و

$$\mathrm{van}_k(x_1,\ldots,x_k) := \mathrm{va}_2(x_1,x_2)\cdots\mathrm{va}_k(x_1,\ldots,x_k). \tag{1487}$$

می‌شد va و van را با هر میدان ـِ دیگر ی (به جا یِ میدان ـِ عددها یِ گویا) هم تعریف کرد. کافی است آن میدان بی‌پایان باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود
قضیه یِ 482: فرض کنید k و n دو عدد ـِ طبیعی اند، $n < k$، و x_1 تا x_k عددها یی گویا یند. در این صورت به ازا یِ هر جای‌گشت ـِ n تایی یِ σ،

$$\mathrm{va}_k(x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(k)}) = \mathrm{va}_k(x_1,\ldots,x_k). \tag{1488}$$

★

هم‌چنین،
قضیه یِ 483: فرض کنید k و n دو عدد ـِ طبیعی اند، $n \le k$، و x_1 تا x_k عددها یی گویا و متمایز اند. در این صورت،

$$\mathrm{van}_k(x_1,\ldots,x_k) \ne 0, \tag{1489}$$

و به ازا یِ هر جای‌گشت ـِ n تایی یِ σ،

$$\frac{\mathrm{van}_k(x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(k)})}{\mathrm{van}_k(x_1,\ldots,x_k)} = \pm 1. \tag{1490}$$

هم‌چنین، طرف ـِ راست ـِ عبارت ـِ بالا مستقل از k و مقدار ـِ x_1 تا x_k است.
اثبات: (1489) ناشی از آن است که هیچ یک از عامل‌ها یِ سازنده یِ طرف ـِ چپ صفر نیستند. برا یِ اثبات ـِ (1490)، دو عدد ـِ طبیعی یِ i و j بگیرید که $i < j \le k$. بگیرید

$$\sigma^{-1}(i) = \imath', \qquad \sigma^{-1}(j) = \jmath'. \tag{1491}$$

صورت ـِ طرف ـِ چپ ـِ (1490) شامل ـِ $(x_{\jmath'} - x_{\imath'})$ است. اگر $\imath' < \jmath'$، آن‌گاه مخرج هم شامل ـِ $(x_{\jmath'} - x_{\imath'})$ است. اگر $\imath' > \jmath'$، آن‌گاه مخرج شامل ـِ $(x_{\imath'} - x_{\jmath'})$ است. پس متناظر با هر عامل در صورت، خود ـِ آن عامل یا منفی یِ آن عامل در مخرج است، و این که خود ـِ آن عامل در مخرج ظاهر می‌شود یا منفی یِ آن عامل، به مقدار ـِ x_i ها بسته‌گی

ندارد. پس طرف ـ چپ ـ (1490) حاصلِ‌ضرب ـ تعداد ی $(+1)$ و تعداد ی (-1) است، که می‌شود (± 1)، و این نتیجه به مقدار ـ x_i ها هم بسته‌گی ندارد. با استفاده از قضیه یِ 482، ضمناً داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{van}_k(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(k)}) &= \mathrm{van}_n(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)})\,\mathrm{va}_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})\\ &\quad\times\cdots\mathrm{va}_k(x_1,\dots,x_k),\end{aligned} \tag{1492}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\mathrm{van}_k(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(k)})}{\mathrm{van}_k(x_1,\dots,x_k)}=\frac{\mathrm{van}_n(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)})}{\mathrm{van}_n(x_1,\dots,x_n)}. \tag{1493}$$

پس طرف ـ چپ ـ (1490) به k بسته‌گی ندارد.

■

با استفاده از این قضیه، ζ_σ (علامت ـ جای‌گشت ـ σ) را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{van}_k(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(k)}) =: \zeta_\sigma\,\mathrm{van}_k(x_1,\dots,x_k). \tag{1494}$$

در این‌جا n یک عدد ـ طبیعی، σ یک جای‌گشت ـ n تایی، k یک عدد ـ طبیعی یِ ناکوچک‌تر از n، و x_1 تا x_k عددها یی گویا و متمایز اند. البته اگر بعض ی از x_i ها با هم برابر باشند هم رابطه یِ بالا درست است. اما در این حالت دوطرف ـ این رابطه صفر اند و از آن نمی‌شود ζ_σ را تعیین کرد. می‌گوییم جای‌گشت ـ σ زوج است، اگر $\zeta_\sigma = 1$، و می‌گوییم جای‌گشت ـ σ فرد است، اگر $\zeta_\sigma = -1$.

قضیه یِ 484: فرض کنید σ و τ دو جای‌گشت اند. در این صورت،

$$\zeta_{\tau\,\sigma} = \zeta_\tau\,\zeta_\sigma. \tag{1495}$$

اثبات: فرض کنید σ و τ دو جای‌گشت ـ n تایی اند. در این صورت،

$$\begin{aligned}\zeta_{\tau\,\sigma}\,\mathrm{van}_n(x_1,\dots,x_n) &= \mathrm{van}_n(x_{\sigma^{-1}\,\tau^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}\,\tau^{-1}(n)}),\\ &= \zeta_\tau\,\mathrm{van}_n(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)}),\\ &= \zeta_\tau\,\zeta_\sigma\,\mathrm{van}_n(x_1,\dots,x_n),\end{aligned} \tag{1496}$$

که حکم از آن نتیجه می‌شود.

■

یک نتیجه یِ ساده یِ این قضیه این است.

قضیه یِ 485: علامت ِ جای‌گشت ِ همانی $(+1)$ است. هم‌چنین، اگر σ یک جای‌گشت باشد، آن‌گاه

$$\zeta_{\sigma^{-1}} = \zeta_\sigma. \tag{1497}$$

★

قضیه یِ 486: فرض کنید $i \in \mathbb{N}$. در این صورت،

$$\zeta_{\sigma_i} = -1. \tag{1498}$$

هم‌چنین، اگر j هم عدد ی طبیعی باشد و $j \neq i$، آن‌گاه

$$\zeta_{\sigma_{i\,j}} = -1. \tag{1499}$$

اثبات: (1498) ناشی از آن است که در طرف ِ چپ ِ (1490)، تنهاتفاوت ِ صورت و مخرج آن است که در صورت $(x_i - x_{i+1})$ ظاهر شده و در مخرج $(x_{i+1} - x_i)$. (1499) هم به‌ساده‌گی از (1483) و قضیه یِ 484 نتیجه می‌شود.

■

سرانجام، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 487: فرض کنید σ یک جای‌گشت است. در این صورت،

a اگر σ برابر با حاصلِ‌ضرب ِ تعداد ِ فرد ی از $\sigma_{i\,j}$ ها باشد، آن‌گاه ζ_σ برابر ِ (-1) است.

b اگر σ برابر با حاصلِ‌ضرب ِ تعداد ِ زوج ی از $\sigma_{i\,j}$ ها باشد، آن‌گاه ζ_σ برابر ِ $(+1)$ است.

c ممکن نیست σ هم با حاصلِ‌ضرب ِ تعداد ِ فرد ی از $\sigma_{i\,j}$ ها برابر باشد، هم با حاصلِ‌ضرب ِ تعداد ِ زوج ی از $\sigma_{i\,j}$ ها برابر باشد.

★

پس زوج‌یافردبودن ِ یک جای‌گشت، یعنی زوج‌یافردبودن ِ تعداد ِ $\sigma_{i\,j}$ ها یِ سازنده اَش. ممکن است یک جای‌گشت برابر باشد با حاصلِ‌ضرب ِ m تا از $\sigma_{i\,j}$ ها، و در همان حال

برابر باشد با حاصلِ‌ضرب ـِ n تا از σ_{ij} ها. لزوم ی ندارد m با n برابر باشد. اما $(n-m)$ هم‌واره زوج است.

XVII

پی‌وست ِ B

lxxvii چند مرجع

در این بخش، [0] یعنی همین کتاب.

[1] از جمله شامل ِ مطالب ی در باره یِ گروه و میدان است (فصل‌ها یِ 2 و 3 و 5). البته سطح ِ آن مطالب در [1]، خیل ی بالاتر از چیز ی است که در [0] به کار رفته.

[2] چیزها یی هم در باره یِ جبر ِ خطی دارد (فصل‌ها یِ 1 تا 5 ِ جلد ِ 2)، که البته سطح ِ آن خیل ی پایین‌تر از سطح ِ [0] است.

[3] یک کتاب ِ درسی یِ استاندارد ِ جبر ِ خطی است.

[4] از جمله شامل ِ اثبات ِ قضیه یِ بنیادی یِ جبر است. (قضیه یِ بنیادی یِ جبر این است که هر چندجمله‌ای یِ مختلط ِ ناثابت، دستِ‌کم یک ریشه دارد. از این نتیجه می‌شود میدان ِ عددها یِ مختلط جبری‌بسته است.)

[5] شامل ِ مرجع‌ها یی در باره یِ گزاره‌ها یِ هم‌ارز با اصل ِ انتخاب است. از جمله گزاره یِ 1 ِ [0]، همان شکل ِ 109 در صفحه‌ها یِ 42 و 78 ِ [5] است.

[6] از جمله شامل ـِ مطالب ی در باره یِ گسترش ـِ یک میدان است. به‌ویژه، بیان و اثبات ـِ گزاره یِ 2 یِ [0] را می‌شود در بخش ـِ 3 (فصل ـِ I) یِ [6] یافت.

[1] I. N. Herstein; "Topics in algebra", 2nd edition (John Wiley & Sons, 1975)

[2] Tom, M. Apostol; "Calculus", 2nd edition (John Wiley & Sons, 1967)

[3] Kenneth Hoffman & Ray Kunze; "Linear algebra", 2nd edition (Prentice Hall, 1971)

[4] James Ward Brown & Ruel V. Churchill; "Complex variables and applications", 6th edition (Mc Graw Hill, 1996)

[5] Paul Howard & James E. Rubin; "Consequences of the axiom of choice", (The American Mathematical Society, 1998)

[6] Patrick Morandi; "Fileds and Galois theory", (Springer, 1996)

lxxviii اسم‌ها یِ خاص

آبِل (ریاضی‌پیشه یِ نروژی)
نیلس هِنریک آبِل (1802 تا 1829) — Niels Henrik Abel

اِرمیت (ریاضی‌پیشه یِ فرانسوی)
شَرل اِرمیت (1822 تا 1901) — Charles Hermite

اقلیدس (ریاضی‌پیشه یِ یونانی)
اِکلیدِس (300 BEC) — Euclid (Eukleides)

اَین‌شْتَین (فیزیک‌پیشه یِ سویسی، آلمانی، امریکایی)
آلبِرت اَین‌شْتَین (1879 تا 1955) — Albert Einstein

تِیلِر (ریاضی‌پیشه یِ بریتانیایی)
بْروک تِیلِر (1685 تا 1731) — Brook Taylor

دِکَرت (ریاضی‌پیشه یِ فرانسوی)
رُنه دِکَرت (1596 تا 1650) — René Descartes

ژُردَن (ریاضی‌پیشه یِ فرانسوی)	
مَری‌ـ آنُمُن کَمیی ژُردَن (1838 تا 1922)	Marie-Ennemond Camille Jordan
شْمیت (ریاضی‌پیشه یِ آلمانی)	
اِرهارد شْمیت (1876 تا 1959)	Erhard Schmidt
کْرُنِکِر (ریاضی‌پیشه یِ آلمانی)	
لِئُپُلد کْرُنِکِر (1823 تا 1891)	Leopold Kronecker
کِیلی (ریاضی‌پیشه یِ بریتانیایی)	
آرتور کِیلی (1821 تا 1895)	Arthur Cayley
گاؤس (ریاضی‌پیشه یِ آلمانی)	
کارل فْریدریش گاؤس (1777 تا 1855)	Karl Friedrich Gauss
گرام (ریاضی‌پیشه یِ دانمارکی)	
یُرگِن پِدِرسِن گْرام (1850 تا 1916)	Jørgen Pedersen Gram
لَگرانژ (ریاضی‌پیشه یِ فرانسوی)	
ژُزِف لویی لَگرانژ (1736 تا 1813)	Joseph Louis Lagrange
نیوتُن (فیزیک‌پیشه‌ـ ریاضی‌پیشه یِ بریتانیایی)	
آیزاک نیوتُن (1642 تا 1727)	Isaac Newton
هامِل (ریاضی‌پیشه یِ آلمانی)	
گِئُرگ هامِل (1877 تا 1954)	Georg Hamel
هَمیلتِن (ریاضی‌پیشه یِ ایرلندی)	
ویلیام روان هَمیلتِن (1805 تا 1865)	William Rowan Hamilton
یُردان (ریاضی‌پیشه یِ آلمانی)	
ویلهِلم یِردان (1842 تا 1899)	Wilhelm Jordan

lxxix واژه‌نامه یِ فارسی به انگلیسی

در این بخش، ♦ یعنی واژه یِ انگلیسی من‌درآوردی است.

آبِل	Abel
آبِلی	Abelian
اجتماع	union
ادغام	contraction
اِرمیت	Hermite
اِرمیتی	Hermitian
اِرمیتی‌شده	Hermitianized ⧫
اساس	essence ⧫
استقلال ِ خطی	linear independence
اسکالر	scalar
اشتراک	intersection
اصل ِ انتخاب	axiom of choice
افکنش	projection
اقلیدس	Euclid
اقلیدسی	Euclidean
الحاقی	adjoint
الگریتم	algorithm
اول	prime
اَین‌شْتَین	Einstein

باپایان	finite
باپایان‌بُعدی	finite-dimensional
بازتابی	reflexive ⧫
باقی‌مانده	remainder
بالامثلثی	upper-triangular
بالانویس	superscript
بخش	part
بخشِ حقیقی	real part

imaginary part	بخشِ‌موهومی
divisibility	بخش‌پذیری
trivial	بدیهی
vector	بردار
column vector	بردار ِ ستونی
involution	برگشت
greatest common divisor	بزرگ‌ترین شمارنده یِ مشترک
algebraic closure	بستار ِ جبری
closed	بسته
Taylor expansion	بسط ِ تِیلِر
dimension	بُعد
block	بلُک
block-diagonal	بلُکی‌قطری
block-upper-triangular	بلُکی‌بالامثلثی
block-lower-triangular	بلُکی‌پایین‌مثلثی
block-triangular	بلُکی‌مثلثی
fundamental	بنیادی
normal	بهنجار
infinite	بی‌پایان
infinite-dimensional	بی‌پایان‌بُعدی
anitiHermitian	پادارِمیتی
antilinear ♦	پادخطی
antisymmetric	پادمتقارن
antisymmetrizer	پادمتقارن‌گر
basis	پایه
lower-triangular	پایین‌مثلثی
distributivity	پخشی

پس‌آر	pullback
پوچ‌توان	nilpotent
پوچ‌توانی	nilpotency ♦
پوچی	nullity ♦
پوشا	onto, surjective
پهنه	span
پیش‌ران	pushforward

تابع	function
تابعی	functional
تانسور	tensor
تبدیل	transformation
تبدیلِ‌تشابهی‌یافته	similarity-transformed ♦
تجزیه	decomposition
تحدید	restriction
ترانهاده	transpose
ترکیبِ تابع‌ها	composition of functions
ترکیبِ خطی	linear combination
تشابهی	similarity
تصویر	image
تصویرِ قائم	normal projection
تعمیم‌یافته	generalized
تکین	singular
تناظر	correspondence
تِیلِر	Taylor

جابه‌جاگر	commutator
جابه‌جایی	commutative

جای‌گشت	permutation
جبر	algebra
جبری	algebraic
جبری‌بسته	algebraically-closed
جداشدنی	separable
جمع	addition
جوابِ خاص	particular solution
جوابِ کلی	general solution
چپ	left
چندجمله‌ای	polynomial
چندجمله‌ای یِ تعمیم‌یافته	generalized polynomial
چندجمله‌ای یِ کمین	minimal polynomial
چندجمله‌ای یِ مشخصه	characteristic polynomial
چندخطی	multilinear
چندشبهِ‌خطی	multipseudolinear ♦
حاصلِ‌جمع	sum
حاصلِ‌جمعِ مستقیم	direct sum
حاصلِ‌ضرب	product
حاصلِ‌ضربِ برونی	exterior product
حاصلِ‌ضربِ تانسوری	tensor product
حاصلِ‌ضربِ درونی	inner product
حاصلِ‌ضربِ دِکَرتی	Cartesian product
حاصلِ‌ضربِ گوه‌ای	wedge product
حجم	volume
حجمِ جبری	algebraic volume
حقیقی	real

خارجِ‌قسمت	quotient
خاص	particular
خطی	linear
خطی مستقل	linearly-independent
خطی‌وابسته	linearly-dependent
خوش‌تعریف	well-defined
دامنه	domain
دامنه يِ مئثر	effective domain ♦
دترمینان	determinant
دست‌گاه	system
دفاعیه	apology
دِکَرت	Descartes
دل‌بخواه	arbitrary
دلتا يِ کْرُنِکِر	Kronecker delta
دوخطی	bilinear
دوشبهِ‌فرم	two-pseudoform ♦
دوفرم	two-form
دوگان	dual
راست	right
رتبه	rank
رد	trace
رده	class
روش ـِ گاؤس‌ـ یُردان	Gauss-Jordan method
روش ـِ گْرام‌ـ شْمیت	Gram-Schmidt Process

زوج (دوتایی)	pair
زوج (متضاد ِ فرد)	even
زیرستون	subcolumn
زیرفضا	subspace
زیرفضا يِ برداری	vector subspace
زیرفضا يِ خطی	linear subspace
زیرماتریس	submatrix
زیرمجموعه	subset
زیرنویس	subscript
ژُردَن	Jordan
ژُردَن‌تجزیه‌پذیر	Jordan-decomposible ♦
ژُردَنی‌گر	Jordanizer ♦
ساده	simple
سازگار	compatible
ستون	column
سطر	row
شاخص	index
شبهِ‌اقلیدسی	PseudoEclidean
شکلِ‌حقیقی	real form
شبهِ‌خطی	pseudolinear ♦
شبهِ‌دوفرم	pseudotwo-form ♦
شبهِ‌ساده	semisimple
شبهِ‌ضرب ِ درونی	pseudoinner product
شبهِ‌فرم	pseudoform ♦
شبهِ‌متریک	pseudometric

شبه‌ِیکانی	pseudounitary
شرکت‌پذیر	associative
شکل ـِ ژُردَن	Jordan form
شمارنده	divisor
شمارنده یِ مشترک	common divisor
شْمیت	Schmidt
صفر	zero
ضرب	multiplication
ضرب ـِ برونی	exterior product
ضرب ـِ تانسوری	tensor product
ضرب ـِ درونی	inner product
ضرب ـِ دِکَرتی	Cartesian product
ضرب ـِ گوه‌ای	wedge product
طبیعی	natural
عدد ـِ صحیح	integer
عمل	operation
عمل ـِ مقدماتی	elementary operation ⧫
عمل‌گر	operator
عمود	normal
عنصر ـِ ماتریسی	matrix element
علامت	sign
علامت ـِ جای‌گشت	sign of the permutation
فرد	odd

فضا	space
فضا یِ برداری	vector space
فضا یِ خارجِ‌قسمت	quotient space
فضا یِ خطی	linear space
قراردادِجمع ِ اَین‌شْتَین	Einstein's summation convention
قضیه	theorem
قضیه یِ بنیادی یِ جبر	fundamental theorem of algebra
قضیه یِ کِیلی‌ـ هَیملتِن	Cayley-Hamilton theorem
قطری	diagonal
قطری‌شدنی	diagonalizable
قطری‌گر	diagonalizer
کْرُنِکِر	Kronecker
کلی	general
کمین	minimal
کِیلی	Cayley
گاؤس	Gauss
گْرام	Gram
گروه	group
گسترش	extension
گسترش ِ جبری	algebraic extension
گسترش‌یافته	extended
گوه	wedge
گویا	rational
لگاریتم	logarithm

لگاریتم‌پذیر	logarithmable ♦
لَگرانژ	Lagrange
ماتریس	matrix
ماتریس ـ ستونی	column matrix
ماتریس ـ سطری	row matrix
ماتریس ـ مقدماتی	elementary matrix ♦
ماتریس ـ واحد	unit matrix
ماتریس ـ یکه	unit matrix
مئلفه	component
متریک	metric
متعامد	orthogonal
متقارن	symmetric
متقارن‌گر	symmetrizer
متوازی‌السطوح	parallelepiped
مثبت	positive
مثبت ـ شبهِ‌معین	positive semidefinite
مثبت ـ معین	positive definite
مثلثی	triangular
مجموعه	set
مجهول	unknown
محمل	support
مختلط	complex
مختلط‌شده	complexified
مزدوج	conjugate
مستقل	independent
مشترک	common
مشخصه	characteristic

مُصَوِر	projection
معادله	equation
مغزی	core ♦
مقدماتی	elementary ♦
مکمل ِ حجمی	volume complement ♦
منفی	negative
منفی یِ شبهِ‌معین	negative semidefinite
منفی یِ معین	negative definite
موهومی	imaginary
میدان	field

ناتکین	nonsingular
ناشبهِ‌ساده	nonsemisimple
ناصفر	nonzero
ناقطری	nondiagonal
نامثبت	nonpositive
نامنفی	nonnegative
ناوردا	invariant
نشان‌گان	signature
نگاشت	mapping
نگاشت ِ جای‌گشت	permutation mapping ♦
نگاشت ِ جای‌گشت ِ علامت‌دار	signed permutation mapping ♦
نمایش ِ ماتریسی	matrix representation
نمایی	exponential
نمایی‌پذیر	exponentiable ♦
نیوتُن	Newton

وابسته	dependent

وابسته‌گی یِ خطی	linear dependence
واحد	unit
وارون	inverse
وارون ـ راست	right inverse
وارون‌پذیر	invertible
ویژه‌بردار	eigenvector
ویژه‌بردار ـ تعمیم‌یافته	generalized eigenvector
ویژه‌فضا	eigenspace
ویژه‌فضا یِ تعمیم‌یافته	generalized eigenspace
ویژه‌مقدار	eigenvalue
هامِل	Hamel
هسته	kernel
هسته‌جدا	kernel-separable ♦
هم‌ارزی	equivalence
همانی	identity
هم‌بردار	covector
هم‌تافته	symplectic
هم‌ریختی	homomorphism
هم‌گن	homogeneous
هَمیلتِن	Hamilton
یُردان	Jordan
یکانی	unitary
یک‌به‌یک	one-to-one, injective
یک‌ریخت	isomorphic
یک‌ریختی	isomorphism
یکه	unit

یکه	unimodular
یکه‌متعامد	orthonormal

XB-001 (2008/04/01)

Linear algebra

Mohammad Khorrami mamwad@mailaps.org

XB-001

Linear algebra

Mohammad Khorrami