Übungsserie 12

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S12.zip* zusammen. Sofern verlangt, laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (15 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `[x, y] = Name_S12_Aufg1(f , a, b, n, y0)`, welche Ihnen das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit n Schritten gemäss dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren berechnet. Die Lösung wird in den Vektor `y` geschrieben, `x` enthält die entsprechenden x_i-Werte. Überprüfen Sie Ihre Funktion anhand des Beispiels 8.7 im Skript.

Aufgabe 2 (45 Minuten):

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

a) Berechnen Sie mit Ihrer Funktion aus Aufgabe 1 die Lösung des Anfangswertproblem

$$y' = 1 - \frac{y}{t} \quad \text{mit} \quad y(1) = 5$$

für $t \in [1, 6]$ mit einer Schrittweite von $h = 0.01$ mit dem klassischen vierstufigen Runge-Kutta Verfahren und plotten Sie sowohl Ihre numerische Lösung als auch die exakte Lösung

$$y(t) = \frac{t}{2} + \frac{9}{2t}$$

ins gleiche Fenster.

b) Erfinden Sie ein neues vierstufiges Runge-Kutta Verfahren und notieren Sie die Koeffizienten in einem Butcher-Schema auf einem Blatt Papier (vgl. Skript Kap. 8.7.2). Wählen Sie dazu eine beliebige Kombination von Werten aus $c_n \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$, $a_{nm} \in \{0.5, 0.75, 1\}$ und $b_n \in \{1/10, 2/10, 3/10, 4/10\}$, wobei für die b_n noch gelten muss

$$\sum_{n=1}^{4} b_n = 1.$$

c) Implementieren Sie Ihr in b) entworfenes neues Runge-Kutta Verfahren in Python durch Anpassen Ihres Codes des klassischen Runge-Kutta Verfahren.

d) Lösen Sie die DGL aus a) nun nochmals mit Ihrem neuen Runge-Kutta Verfahren aus c) und plotten Sie die Lösung ins gleiche Grafikfenster wie a). Erzeugen Sie einen weiteren Plot mit dem absoluten Fehler der beiden Verfahren. Taugt Ihr neues Verfahren etwas? Schreiben Sie Ihren Kommentar ins Skript.

Aufgabe 3 (30 Minuten):

Betrachten Sie die folgende DGL aus Serie 11

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

auf dem Intervall $0 \leq x \leq 10$ mit $y(0) = 2$. Die exakte Lösung der DGL ist $y(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 4}$.

a) Schreiben Sie ein Skript `Name_S12_Aufg3.py`, welches Ihnen die DGL für die vier Verfahren (Euler, Mittelpunkt, mod. Euler, klass. Runge-Kutta) mit Schrittweite $h = 0.1$ löst und die vier Lösungen zusammen in einer Grafik darstellt. Erzeugen Sie eine zweite Grafik (mit logarithmischer $y-$Achse), welche den globalen Fehler $\mid y(x_i) - y_i \mid$ nach der $i-$ten Iteration als Funktion von x_i für jedes der vier Verfahren zeigt.

b) - optional: Benutzen Sie Ihr Skript aus Aufgabe a) um grafisch zu testen, um was für einen Faktor Sie die Schrittweite des Euler-Verfahrens oder des Mittelpunkt-Verfahrens oder des modifizierten Euler-Verfahrens verkleinern müssen, um in etwa einen ähnlichen Verlauf des globalen Fehlers wie bei Runge-Kutta Verfahren für $h = 0.1$ zu erhalten. Können Sie das theoretisch begründen? Schreiben Sie ihre Antwort in Ihr Skript.