

## Übungsserie 9

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name\_S8.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

### Aufgabe 1 (40 Minuten):

Wie gross ist die Schrittweite  $h$  bzw. die Anzahl benötigter Subintervalle  $n$ , um das Integral

$$I = \int_1^2 \ln(x^2) dx$$

auf einen Fehler von maximal  $10^{-5}$  genau berechnen zu können für die summierten Rechtecksregel, die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel?

### Aufgabe 2 (40 Minuten):

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \cos(x^2) dx$$

manuell mit der Trapezregel  $Tf(h)$  für die Schrittweiten  $h_j = \frac{b-a}{2^j}$ , ( $j = 0, \dots, 4$ ) (Achtung: die erste Spalte enthält also fünf Werte) und extrapolieren Sie diese mittels Romberg-Extrapolation so weit wie möglich. Schreiben Sie die Summen für die  $T_{j0}$  komplett mit allen Summanden auf soweit nötig, also z.B.

$$T_{20} = h_2 \left( \frac{\cos(\dots) + \cos(\dots)}{2} + \cos(\dots) + \cos(\dots) + \cos(\dots) \right),$$

aber

$$T_{40} = h_4 \left( \frac{\cos(\dots) + \cos(\dots)}{2} + \cos(\dots) + \cos(\dots) + \dots + \cos(\dots) \right).$$

### Aufgabe 3 (40 Minuten):

Implementieren Sie die Romberg-Extrapolation in einer Python Funktion `[T] = Name_S9_Aufg3(f, a, b, m)`, welches Ihnen das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

für eine vorgegebene Funktion  $f$  und ein gegebenes  $m$  auf dem Intervall  $[a, b]$  für die Schrittweiten  $h_j = \frac{b-a}{2^j}$ , ( $j = 0, \dots, m$ ) berechnet und anschliessend extrapoliert. Der letzte (genaueste) Wert wird als  $T$  zurückgegeben. Überprüfen Sie damit Ihre Resultate der Aufgabe 2.

Achtung:  $m$  definiert die Anzahl  $T_{j0}$  für die erste Spalte des Romberg-Algorithmus, während  $n_j = 2^j$  die Anzahl der Summanden in der summierten Trapezregel bestimmt:

$$T_{j0} = h_j \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n_j-1} f(x_i) \right) \text{ für } h_j = \frac{b-a}{2^j}, n_j = 2^j \text{ und } j = 0, \dots, m.$$