Ejercicios

Análisis Numérico

Joaquin Cavieres G.

1. Introducción a `R`

Notación

- Las matrices genralmente las notaremos con negrita y mayúscula: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, etc.
- Los vectores columna son denotados con negrita pero con minúscula: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, etc.
- Los elementos de un vector $\boldsymbol{x}$ se denotan como x_1, $x_2, ..., x_m$, etc
- Los elementos de una matriz $\boldsymbol{X}$ se denotan como x_{11}, $x_{12}, ..., x_{1m}$, o x_{11}, $x_{21}, ..., x_{mn}$ etc

Vectores

- Un vector $\boldsymbol{x}$ de tamaño n es una columna de n números:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Los números x_i con elementos del vector $\boldsymbol{x}$. La transpuesta del vector $\boldsymbol{x}$ se puede representar como $\boldsymbol{x}^T = (x_1, ..., x_n)$ que a su vez se llama vector fila. La suma y resta de vectores de igual dimensión es realizada elemento por elemento:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

No es posible sumar o restar vectores que no tienen la misma dimensión u orden.

- La multiplicación escalar de un vector es elemento por elemento:

$$\lambda \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

para cualquier escalar λ que es un número real.

- Dos vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son iguales si son del mismo orden y cada par de elementos correspondientes es igual, por ejemplo $x_i = y_i$ para un $i = 1, ..., n$.
- El producto escalar (o producto interno) puede ser denotado como $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ como comúnmente lo hacen los matemáticos, pero los estadísticos representan esta operación generalmente como $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$.

Ejemplo: Se tiene un vector $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)^T$ y otro vector $\boldsymbol{y} = (4, 5, 6)^T$. El producto escalar es: 1 * 4 + 2 * 5 + 3 * 6 = 32.

Creando vectores en `R`

La manera más sencilla de crear un vector es mediante la función `c(x_1, x_2,..., x_n)`

```
x = c(1,2,3)
x
```

```
## [1] 1 2 3
```

```
z = c(4,5,6)
```

`x` y `z` serán interpretados como una columna o un vector de fila según el contexto. Nos podemos asegurar y evitar la ambiguedad de que el vector sea de la clase correcta y forzarlo haciendo el uso de la función de `matrix (.,.,.)` de 1 columna como:

```
c = matrix(c(3,2,1),3,1, byrow=T)
d = matrix(c(6,5,4), nrow=3, ncol=1,byrow=T)
```

```
c
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    2
## [3,]    1
```

```
d
```

```
##      [,1]
## [1,]    6
## [2,]    5
## [3,]    4
```

Si no utilizamos la función `matrix (.,.,.)` entonces el vector tiene una clase `numeric()` mientras que si usamos la función nos aseguramos que sea una matriz (un vector columna en este caso). De todas maneras podemos convertir un vector númerico a una matriz de la siguiente manera:

```
b = c(4,5,6)
b
```

```
## [1] 4 5 6
```

```r
class(b)
```

```
## [1] "numeric"
```

```r
b = as.matrix(b)
b
```

```
##      [,1]
## [1,]    4
## [2,]    5
## [3,]    6
```

```r
class(b)
```

```
## [1] "matrix"
```

Cabe señalar que los argumentos `nrow()` y `ncol()` son asumidos por defecto pero nosotros podemos cambiar el orden de los elementos en la matriz:

```r
u = matrix(c( 3, 2, 1), 1, 3, byrow=T)
u
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    2    1
```

```r
v = matrix(c(6,5,4), ncol=1, nrow=3, byrow=T)
v
```

```
##      [,1]
## [1,]    6
## [2,]    5
## [3,]    4
```

Adicionales

Otras formas de crear vectores en `R`:

```r
x = 1:5
x
```

```
## [1] 1 2 3 4 5
```

```r
x = seq(1,5, by =0.25)
x
```

```
##  [1] 1.00 1.25 1.50 1.75 2.00 2.25 2.50 2.75 3.00 3.25 3.50 3.75 4.00 4.25 4.50
## [16] 4.75 5.00
```

```r
x = seq(10,1, by =-1)
x
```

```
##  [1] 10  9  8  7  6  5  4  3  2  1
```

```r
x = rep(1, times = 5)
x
```

```
## [1] 1 1 1 1 1
```

```r
length(x)
```

```
## [1] 5
```

```r
rep(x, 2)
```

```
##  [1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```r
set.seed(1) # "semilla"
x = sample(1:10, 5)
x
```

```
## [1] 9 4 7 1 2
```

Operaciones con vectores:

```r
u = 1:5           # Creamos el vector
v = rep(0.5, times = length(u))
u + v
```

```
## [1] 1.5 2.5 3.5 4.5 5.5
```

```r
u * v
```

```
## [1] 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5
```

```r
u^v
```

```
## [1] 1.000000 1.414214 1.732051 2.000000 2.236068
```

Funciones con vectores:

```r
x = 1:10
sqrt(x)           # Raíz cuadrada
```

```
##  [1] 1.000000 1.414214 1.732051 2.000000 2.236068 2.449490 2.645751 2.828427
##  [9] 3.000000 3.162278
```

```r
sum(x)            # Suma
```

```
## [1] 55
```

```r
prod(x)           # Productoria
```

```
## [1] 3628800
```

```r
mean(x)           # Media del vector
```

```
## [1] 5.5
```

```r
var(x)           # Varianza del vector
```

```
## [1] 9.166667
```

Acceder a elementos de vectores:

```r
x=c(3, 2, 1, 7, 5)          # Creamos un vector
x[4]                        # Accedemos al elemento 4
```

```
## [1] 7
```

```r
x[2];x[5]                   # Accedemos al elemento 2 y 5
```

```
## [1] 2
```

```
## [1] 5
```

```r
x[1:3]; x[c(2,4,5)]         # Accedemos a sub-vectores
```

```
## [1] 3 2 1
```

```
## [1] 2 7 5
```

```r
x[4]= 4                     # Cambiamos de valor a un elemento
x
```

```
## [1] 3 2 1 4 5
```

```r
x[-5]                       # Eliminar el elemento 5
```

```
## [1] 3 2 1 4
```

```r
x = c( x[1:3],16, x[4:5] ) # Insertar 16 entre la entrada 3 y 4
```

Matrices

Una matriz es un arreglo (estructura) rectangular de números reales, por tanto, una matriz $\boldsymbol{X}_{m\times n}$ es un arreglo rectangular de números escalares tal que:

$$\boldsymbol{X}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

con m filas y n columnas y se le suele llamar de *orden* $m \times n$. Se puede decir que $\boldsymbol{X}$ tiene dimensiones m y n y algunas veces tambien se puede denotar como $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$. Por ejemplo, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ es una matriz de 2×3. La notación para x_{ij} indican los componentes o elementos de $\boldsymbol{X}$. Otro tipo de caracteristicas de una matriz son:

- Se dice que una matriz es una matriz cuadrada cuando $m = n$ (mismo número de filas y columnas).
- Una matriz con elementos '0' es denotada como $\mathbf{0}$, por ejemplo si $x_{ij} = 0$, entonces $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$.
- Una matriz se dice que es simétrica si $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T$.
- Una matriz cuadrada con los elementos fuera de la diagonal iguales a 0 es una matriz diagonal, por ejemplo $x_{ij} = 0$ para todos los $i \neq j$ (y $x_{ii} \neq 0$ para al menos un i).
- Una matriz diagonal con 1's en la diagonal y 0's en los demas elementos es denotada como $\boldsymbol{I}_n$. A esta matriz se le conoce como matriz identidad.

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Resumen de comandos en R para matrices:

- Acceder a la columna de una matrix $\boldsymbol{U}$, el valor $j - esimo \Rightarrow \texttt{U}[,\texttt{j}]$
- Acceder a un subconjunto de filas de una matrix $\boldsymbol{U} \Rightarrow \texttt{U}[\texttt{i}_1 : \texttt{i}_2,]$
- Acceder a un subconjunto de columnas de una matrix $\boldsymbol{U} \Rightarrow \texttt{U}[,\texttt{j}_1 : \texttt{j}_2]$
- Acceder a un submatriz de una matrix $\boldsymbol{U} \Rightarrow \texttt{U}[\texttt{i}_1 : \texttt{i}_2, \texttt{j}_1 : \texttt{j}_2]$
- Suma de $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} \Rightarrow \texttt{U} + \texttt{V}$
- Resta de $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} \Rightarrow \texttt{U} - \texttt{V}$
- Multiplicación de $\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} \Rightarrow \texttt{U}\,\% * \%\texttt{V}$
- Hadamard multiplicación $\boldsymbol{U} \odot \boldsymbol{V} \Rightarrow \texttt{U} * \texttt{V}$
- Kronecker multiplicación $\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V} \Rightarrow \texttt{U}\,\%\texttt{x}\,\%\texttt{V}$
- Transpuesta de $\boldsymbol{U}^T \Rightarrow \texttt{t}(\texttt{U})$
- Matrix producto-vectorial $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{V} \Rightarrow \texttt{crossprod}(\texttt{U}, \texttt{V})$
- Inversa $\boldsymbol{U}^{-1}$, $\texttt{solve}(\texttt{U})$
- Determinante de $\boldsymbol{U}$, $\det(\mathrm{A})$ o tambien denotada como $|\texttt{U}| \Rightarrow \texttt{det}(\texttt{A})$
- Diagonal de una matriz $\boldsymbol{U} \Rightarrow \texttt{diag}(\texttt{U})$
- Union de matrices por columnas $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V} \Rightarrow \texttt{cbind}(\texttt{U}, \texttt{V})$
- Union de matrices por filas $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V} \Rightarrow \texttt{rbind}(\texttt{U}, \texttt{V})$
- Largo de un vector $\boldsymbol{x} \Rightarrow \texttt{length}(\texttt{x})$
- Dimensión de una matriz $\boldsymbol{U} \Rightarrow \texttt{dim}(\texttt{U})$

Ejemplos:

```r
A = matrix(c(1,2,3,4,5,6),nrow=2,ncol=3,byrow=F)
B = matrix(c(1,2,3,4,5,6),nrow=2,ncol=3,byrow=T)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    2    4    6
```

```r
B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    4    5    6
```

```r
A[1, ]   # Accede a la primera fila de A
```

```
## [1] 1 3 5
```

```r
B[2, ]   # Accede a la segunda fila de B
```

```
## [1] 4 5 6
```

```r
A[1, 3]   # Accede al elemento de la fila 1 y de la columna 3
```

```
## [1] 5
```

```r
B[2, 3]   # Accede al elemento de la fila 2 y de la columna 3
```

```
## [1] 6
```

Calculos en matrices:

```r
A + B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    5    8
## [2,]    6    9   12
```

```r
A - B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1    2
## [2,]   -2   -1    0
```

```r
2*B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    4    6
## [2,]    8   10   12
```

Nota: Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices, y queremos realizar la multiplicación de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, sólo se puede hacer cuando el número de columnas de $\boldsymbol{A}$ es igual el número de filas de $\boldsymbol{B}$. Por ejemplo, si $\boldsymbol{A}$ es de dimensión $m \times n$ y $\boldsymbol{B}$ es de dimensión $n \times p$, el producto $\boldsymbol{AB}$ puede ser calculado pero no el de $\boldsymbol{BA}$

```r
t(A)  # Transpuesta de A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    2
## [2,]    3    4
## [3,]    5    6
```

```r
t(A)%*%B  # Multiplica transpuesta de A por B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    9   12   15
## [2,]   19   26   33
## [3,]   29   40   51
```

Dimensión y largo de los vectores en matrices:

```r
U = matrix(c(1,2,3,4,5,6),2,3)
```

```r
dim(U)        # Dimensión de U
```

```
## [1] 2 3
```

```r
dim(t(U))     # Dimensión de la transpuesta de U
```

```
## [1] 3 2
```

```r
length(U)     # Largo de los elementos en U
```

```
## [1] 6
```

```r
dim(U)        # Dimensión de U
```

```
## [1] 2 3
```

```r
dim(t(U))     # Dimensión de la transpuesta de U
```

```
## [1] 3 2
```