Descomposición Valores singulares

1) Encontrar la SVD (inglés) de A, con $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Solución

Recuerde que queremos una expresión para A tal que $\Rightarrow A = U \Sigma V^T$

Primero calculamos los valores singulares σ_i a través de los valores propios de AA^T

$$AA^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $\det(AA^T - \lambda I) \Rightarrow \lambda^2 - 34\lambda + 225 \Rightarrow (\lambda - 25)(\lambda - 9)$ //

Por tanto, los valores singulares son $\sigma_1 = \sqrt{25}$ y $\sigma_2 = \sqrt{9} \Rightarrow \sigma_1 = 5$ y $\sigma_2 = 3$

Ahora, necesitamos encontrar los vectores propios singulares (columnas de V) a través de un conjunto de vectores propios ortonormales de A^TA. Como los valores propios de A^TA son 25, 9 y 0, y ya que A^TA es simétrica, entonces sabemos que los vectores propios son ortogonales

Para $\lambda = 25$ tenemos

$$A^TA - 25I = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{pmatrix}$$; que en forma reducida se convierte en: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y el vector de largo unitario $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 9$, tenemos $A^TA - 9I = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; forma reducida $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y el vector de largo unitario $v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{pmatrix}$

Para este último vector propio podemos calcular A^TA para encontrar un vector perpendicular a v_1 y v_2. Para que ese vector sea perpendicular a $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, necesitamos $-a = b$. Así, la condición que $v_2^T v_3 = 0$ se convierte $2a/\sqrt{18} + 4c/\sqrt{18} = 0$ o $-a = 2c$, por lo que $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a/2 \end{pmatrix}$ y por esto $a = 2/3$, entonces $v_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

Finalmente:

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow U \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}}_{V^T} \begin{array}{l} \rightarrow v_1 \\ \rightarrow v_2 \\ \rightarrow v_3 \end{array}$$

y calculamos U mediante la fórmula $\sigma u_i = Av_i$ o $\frac{Av_i}{\sigma}$, que nos da:

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Así:

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}}_{V^T}$$