Análisis numérico

Clase 5: Preliminares, algoritmos y computación

Joaquin Cavieres

Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

Outline

- Nosotros utilizamos números en base 10 considerando los dedos de las manos.
- Los computadores usan números en base 2 considerando el "encendido/apagado".

Ejemplo: Expansión en base 10.

$$\begin{aligned}76321 &= 1 + 20 + 300 + 6000 + 70000 \\ &= 1 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^2 \\ &+ 6 \times 10^3 + 7 \times 10^4\end{aligned}$$

Así la formula general esta dada por:

$$\begin{aligned}a_n a_{n+1} \ldots . a_2 a_1 a_0 &= a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 \\ &+ a_2 \times 10^2 + \ldots . + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_n \times 10^n\end{aligned}$$

Números de máquina

Los números que son representados en los computadores generalmente son llamados "números de máquina" , sin embargo, la mayoría de los números reales no son números de máquina.

Si un computador tiene un largo de palabras de la forma $0.d_1 d_2 d_3 d_4$, entonces 0.1011 es un número de máquina, pero 0.10101 no lo es.

Error de análisis

Si bien estamos considerando la exactitud (*accuracy*) y precisión para nuestros datos de origen, los números de punto flotante también pueden crear nuevos errores. La combinación entre los números de entrada y el tipo de almacenamiento en el computador, puede llevarnos a nuevos errores distintos a los errores de medición, por lo que es necesario tenerlos en cuenta para poder lidiar con ellos.

Errores numéricos: Error de máquina ϵ

El error de máquina es otra cárcteristica del almacenamiento de datos que debemos considerar en nuestros análisis.

Definición

El error de máquina ϵ captura el espacio de números dentro del espacio de un número de punto flotante. El error de máquina ϵ está definido como:

$$1 + \epsilon > 1,$$

dentro del sistema de los números de punto flotante.

De acuerdo a la definición anterior nos damos cuenta que los números de putno flotante pueden representar un amplio rango de números. Sin embargo, no puede representar todos los número entre 0 y $1.79769313486232e^{308}$.

Error de análisis

Dado lo anterior, nosotros sabemos que 1 + cualquier número mayor que 0 debe ser mayor que 1, pero dentro del espacio del número del punto flotante esto no necesariamente se cumple. En este caso ϵ es el valor referencial para esta representación.

Si tomamos el número más pequeño posible que puede admitir el tipo número de doble precisión (*double*), nosotros esperaríamos que este número sea tan pequeño como intrascendente. Sin embargo, este número disponible en `R` por ejemplo, es comparativamente bastante grande (`Machine$double.eps`).

Ver ejemplo 1 en `R`.

Error de análisis

Aunque este número pareciera ser bastante pequeño, el valor de ϵ podría contener información necesaria para ciertos análisis. Por ejemplo, el ancho de un protón es de 8.4087×10^{-16} metros, un valor sobre 4 veces el largo del error de máquina ϵ.

Si ejecutamos la función `print()` en `R` entonces lo forzamos a que pueda mostrar más digítos en la consola y mostrarnos que sucede si sumamos valores numéricos a ϵ.

Los valores iguales o mayores que ϵ, cuando se suman a 1, serán diiferentes y los más pequeños no lo serán. El computador simplemente redondeará hacia arriba o hacia abajo un resultado de manera apropiada.

Error de análisis

En R también podemos encontrar un segundo valor que mide la precisión de la implementación de un número de punto flotante y podemos encontrarlo mediante la función `.Machine$double.neg.eps`. Este es el valor de ϵ más pequeño tal que:

Definición

$$1 - \epsilon < 1,$$

dentro del sistema de almacenamiento del número de punto flotante. Al igual que la anterior definición este número también muy grande para aplicaciones particulares.
Ver ejemplo 2 en R.

Ya que el número de punto flotante está en un sistemá de notación científica, existe un efecto relativo cambiante ante distintos sumandos, por tanto podemos definir un nuevo valor ϵ_x tal que:

Definición

$$x + \epsilon_x > x,$$

en un sistema de almacenamiento de un número de punto flotante donde x puede ser cualquier número positivo. Dado lo anterior, si x tiende a crecer en magnitud, entonces ϵ_x también lo hace.

Ver ejemplo 4 en R.

Error de análisis

Lo anterior no muestra que ciertos números no pueden ser representados con precisión en un sistemá numérico de punto flotante. Valores tales como π o $\sqrt{2}$ tienen una precisión infinita, pero como la precisión infinita requiere de un almacenamiento infinito, podemos asumir que estos números deben representarse mediante aproximaciones en lugar de valores verdaderos.

Error de análisis

Lo anterior no muestra que ciertos números no pueden ser representados con precisión en un sistemá numérico de punto flotante. Valores tales como π o $\sqrt{2}$ tienen una precisión infinita, pero como la precisión infinita requiere de un almacenamiento infinito, podemos asumir que estos números deben representarse mediante aproximaciones en lugar de valores verdaderos.

Este es un error inducido por el computador llamado error de redondeo y es la diferencia entre el valor real x y la representación del número de punto flotante x_0.

Error de análisis

Ejemplos

- El número 1/3 no puede ser representado.
- 1/ 10 tampoco puede ser representado.
- Los números pares que no se repiten en binario y son racionales no se pueden representar si la mantisa requiere más de 53 bits para su almacenamiento, incluido el signo.

Error de análisis

En `R` la librería `MASS` puede ayudarnos a convertir decimales. Si la precisión doble es insuficiente para cumplir con esos requisitos, existen otras librerías que nos ayudan a encontrar una mayor precisión.

- `gmp`: Proporciona una precisión multiple para la aritmética de los números de punto flotante.
- `Rmpfr`: Proporciona cárácteristicas similares a la anterior y basada en su funcionamiento.

Perdida de significancia

Mientras que el error de redondeo generalmente aparece en los últimos lugares de los números, tambíen puede aparecer en otros lugares. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} - 0.33333333333333 = 3.330669e - 15$$

Aquí el $\frac{1}{3}$ se almacena con 53 digítos binarios (alrededor de 15 decimales de importancia). Restando $\frac{1}{3} - 0.33333333333333$ entonces deberiamos tener como resultado 3.3×10^{15}, sin embargo, el número de punto flotante que representa al $\frac{1}{3}$ no tiene números significantes despues del 50. El resultado nos muestra los bits sobrantes en la representación del error de redondeo en el almacenamiento de $\frac{1}{3}$. Este problema es el llamado perdida de significancia (*loss of signifance*)

Ver ejemplo 5 en R.

Perdida de significancia

La perdida de significancia ocurre cuando se restan dos números y al menos uno no está perfectamente representado en número binario. Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
0.11111111 - 0.11101010 = 0.00010101 \qquad &= 0.1010 \times 10^{-3} \\
0.1111 - 0.1110 = 0.00010000 \qquad &= 0.1010 \times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

Perdida de significancia

Matemáticamente el error de redondeo se convierte en más significante cuando restamos: $x - (x - \delta)$. Así, este error puede intensificarse si la resta es un valor intermedio que precede a una multiplicación, ya que el resultado intermedio simplemente se multiplicará como está y el error aumentará en magnitud.

Ver ejemplo 6 en R.

Perdida de significancia

- La pérdida de significancia se caracteriza por el comportamiento del cambio en el error relativo de un resultado ya que, después de una operación, este es mucho mayor que el cambio en el error absoluto.
- Generalmente, el error relativose espera mucho menor en comparación con el error absoluto.
- La pérdida de significancia invierte esto al crear una situación en la que el cambio en el error absoluto es muy pequeño en terminos comparativos. Esto dificulta nuestra capacidad para comprender el error en su generalidad.

Vea el siguiente ejemplo en R en donde la perdida de significancia cambia mediante el enfoque en la cual la estamos estimando (Ver ejemplo 7 en R.)

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis.
- Howard, J. P. (2017). Computational Methods for Numerical Analysis with R. CRC Press.
- Banerjee, S., & Roy, A. (2014). Linear algebra and matrix analysis for statistics. Crc Pr