Ejercicios

Análisis Numérico

Joaquin Cavieres G.

Factorización QR

Ejemplo 1

Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A contiene a los vectores columna $a_1 = (1, 1, 0)^T$, $a_2 = (1, 0, 0)^T$ y $a_3 = (0, 1, 1)^T$. Eliminaremos la notación de ^{T} sólo por simplicidad, pero hay que recordar que estamos trabajando con vectores columna.

Proceso de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1 = (1, 1, 0) \\
q_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\
v_2 &= a_2 - (a_2 q_1) q_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\
q_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\
v_3 &= a_3 - (a_3 q_1) q_1 - (a_3 q_2) q_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
q_3 &= \frac{v_3}{||v_3||} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

y

$$R = \begin{bmatrix} a_1 q_1 & a_2 q_1 & a_3 q_1 \\ 0 & a_2 q_2 & a_3 q_2 \\ 0 & 0 & a_3 q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Considere la siguiente matriz A:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 18 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollo paso a paso

Nosotros queremos ortogonalizar esta matriz mediante el método de Gram-Schmidt, así:

$$v_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad q_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\sum \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}^2}}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = a_2 - (a_2 \cdot q_1) q_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad q_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{\sum \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^2}}$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$v_3 = a_3 - (a_3 \cdot q_1)q_1 - (a_3 \cdot q_2)q_2$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad q_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}}{\sqrt{\sum \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}^2}}$$

$$q_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

La matriz ortogonalizada resultante del proceso es:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

De los calculos anteriores podemos encontrar a la matriz R (de la descomposición QR):

$$R = \begin{bmatrix} a_1 \cdot q_1 & a_2 \cdot q_1 & \cdots & a_n \cdot q_1 \\ 0 & a_2 \cdot q_2 & \cdots & a_n \cdot q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \cdot e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

Factorización QR en R

```r
# Creamos la matriz del ejercicio 2
A = rbind(c(2,-2,18),c(2,1,0),c(1,2,0))
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2   -2   18
## [2,]    2    1    0
## [3,]    1    2    0
```

La función `qr()` de `R` nos ayuda a encontrar rapidamente la descomposición de nuestra matriz A mediante el método de reflexiones de Householder pero puede servirnos para corroborar nuestros resultados previos. Este método es más común para la descomposición QR y numéricamente más estable en comparación con el de Gram-Schmidt, ya que el método de Gram-Schmidt puede dar como resultado una matriz Q no ortogonal debido a errores de redondeo.

```r
# Creamos la matriz del ejercicio 1
A.qr = qr(A)
A.qr.full = list('Q'=qr.Q(A.qr), 'R'=qr.R(A.qr))
A.qr.full
```

```
## $Q
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] -0.6666667  0.6666667  0.3333333
## [2,] -0.6666667 -0.3333333 -0.6666667
## [3,] -0.3333333 -0.6666667  0.6666667
##
## $R
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   -3    0  -12
## [2,]    0   -3   12
## [3,]    0    0    6
```

Ahora, para comparar resultados, generamos una función para el proceso de Gram-Schmidt:

```r
# Función para utilizar el método de Gram-Schmidt
GSC = function(x) {
  x = as.matrix(x)
  # Obtenemos número de filas y columnas de la matriz x
  n <- ncol(x)
  m <- nrow(x)

  # Inicialzamos las matrices Q y R
  q <- matrix(0, m, n)
```

```r
  r <- matrix(0, n, n)

  for (j in 1:n) {
    v = x[,j] # Paso 1 del proceso Gram-Schmidt (v1 = a1)
    # Saltamos la siguiente columna
    if (j > 1) {
      for (i in 1:(j-1)) {
        r[i,j] <- t(q[,i]) %*% x[,j] # encontrar el producto interno (q^T )
        # Restar la proyección desde v que hace que v sea perpendicular a las
        # columnas de Q
        v <- v - r[i,j] * q[,i]
      }
    }
    # Encontrar la norma L2 de la j-esima diagonal de R
    r[j,j] <- sqrt(sum(v^2))
    # El resultado ortogonalizado se almacena en la columna i-esima de Q
    q[,j] <- v / r[j,j]
  }

  # Guardar las matrices Q y R en una lista y retornar la lista
  qrcomp <- list('Q'=q, 'R'=r)
  return(qrcomp)
}
```

Utilizamos la función `GSC`

```r
GSC(A)
```

```
## $Q
##           [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.6666667 -0.6666667  0.3333333
## [2,] 0.6666667  0.3333333 -0.6666667
## [3,] 0.3333333  0.6666667  0.6666667
##
## $R
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    0   12
## [2,]    0    3  -12
## [3,]    0    0    6
```