Ejemplo SVD

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar U, partimos usando AA^T, entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Ahora debemos encontrar valores y vectores propios de AA^T. Como $Av = \lambda v$, entonces para AA^T tenemos

$$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Así escribimos el siguiente sist de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 11x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ x_1 + 11x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}\right\} \text{ Reordenando tenemos } \begin{aligned} (11-\lambda)x_1 + x_2 &= 0 \quad (1) \\ x_1 + (11-\lambda)x_2 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Así podemos encontrar λ mediante la determinante

$$\begin{vmatrix} (11-\lambda) & 1 \\ 1 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad , \text{ así } \quad (11-\lambda)(11-\lambda) - 1\cdot 1 = 0$$

$$\hookrightarrow (\lambda-10)(\lambda-12) = 0$$

$$\lambda_1 = 10 \quad , \quad \lambda_2 = 12$$

Poniendo a λ_1 en las ecuaciones iniciales (específicamente en (1))

$$(11-10)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2 \quad , \text{ así } \quad x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -1$$

El vector propio asociado a λ_1 es $[1, -1]$ y haciendo lo mismo para λ_2 nos da el vector propio $[1, 1]$

Así, podemos crear la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

→ Vector propio asociado a λ_1

V.p asociado a λ_2

Ahora necesitamos convertir esta matriz a una matriz ortogonal aplicando Gram-Schmidt

$$U_1 = \frac{V_1}{|V_1|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Así calculamos $W_2 = V_2 - U_1 \cdot V_2 \cdot U_1$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y normalizamos : $U_2 = \frac{W_2}{|W_2|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

para dar $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

U_1 $\quad$ U_2

Ahora, para calcular V es a través de A^TA y hacer lo mismo que anteriormente

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

; luego encontrar valores propios

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 10x_1 + 2x_3 = \lambda x_1 \\ 10x_2 + 4x_3 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \lambda x_3 \end{matrix} \left.\right\} \begin{matrix} (10-\lambda)x_1 + 2x_3 = 0 \\ (10-\lambda)x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} (10-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & (10-\lambda) & 4 \\ 2 & 4 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (10-\lambda)\begin{vmatrix} (10-\lambda) & 4 \\ 4 & (2-\lambda) \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & (10-\lambda) \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$(10-\lambda)\left[(10-\lambda)(2-\lambda)-16\right] + 2\left[0-(20-2\lambda)\right] =$$

$$\lambda(\lambda-10)(\lambda-12) = 0 \text{ , así } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = 12$$

Sustituimos λ_3 en las ecuaciones previas: $(\lambda_3 = 12)$

$$(10-12)x_1 + 2x_3 = -2x_1 + 2x_3 = 0 \quad , \Rightarrow x_1 = 1 , \ x_3 = 1$$

$$(10-12)x_2 + 4x_3 = -2x_3 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3 \quad , x_2 = 2$$

Así, el vector propio para λ_3 es $[1,2,1]$

Para $\lambda_2 = 10$ hacer lo mismo y se obtiene el vector propio $[2,-1,0]$ y para $\lambda_1 = 0$ es $[1,2,-5]$, así tenemos final:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ahora, con Gram-Schmidt

$$u_1 = \frac{V_1}{|V_1|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} ; \quad w_2 = V_2 - u_1 \cdot V_2 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad w_3 = V_3 - u_1 \cdot V_3 \cdot u_1 - u_2 \cdot V_3 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ 10/3 \end{bmatrix} \text{ y } u_3 = \frac{w_3}{|w_3|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

así, $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$ y su traspuesta $V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$, así finalmente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}}_{V^T} = A$$