Análisis numérico

Clase 11: Matrices y solución de ecuaciones lineales

Joaquin Cavieres

Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

Outline

Factorización LU

La factorización (descomposición) LU simplifica el proceso de eliminiación Gaussiana que es aplicado a una matriz. Esta factorización es conveniente de utilizar cuando deseamos calcular la inversa de una matriz o cuando resolvemos un sistema lineal de ecuaciones.

Factorización LU

Definición

Suponga que una matriz A de dimensión $m \times n$ se puede escribir como:

$$A = LU,$$

donde L es una matriz triangular inferior $m \times m$ y U es una matriz escalonada $m \times n$.

Factorización LU

Definición

Suponga que una matriz A de dimensión $m \times n$ se puede escribir como:

$$A = LU,$$

donde L es una matriz triangular inferior $m \times m$ y U es una matriz escalonada $m \times n$.

¿Matriz escalonada?

Factorización LU

Definición

Suponga que una matriz A de dimensión $m \times n$ se puede escribir como:

$$A = LU,$$

donde L es una matriz triangular inferior $m \times m$ y U es una matriz escalonada $m \times n$.

¿Matriz escalonada?

¿Eliminación Gaussiana?

Definiciones

Matriz escalonada

Una matriz es escalonada cuando:

- Si existen filas iguales a cero, entonces ellas están en la parte inferior de la matriz
- El elemento delantero de cada fila distinto de cero se encuentra a la derecha del elemento delantero diferente de cero de la fila anterior.

Matriz escalonada reducida

Si una matriz escalonada además cumple que:

- El elemento delantero de cualquier fila $\neq 0$ es 1.
- Todos los elementos superiores e inferiores de un 1 delantero son 0.

Ejemplo 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es una matriz escalonada?

Matrices y solución de ecuaciones lineales

Ejemplo 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es una matriz escalonada?

Si comparamos la posición del primer elemento no cero de la seguna fila con la posición del primer elemento no cero de la tercera fila (2) vemos que este no está a la derecha de 5, por tanto no se cumple la segunda condición.

Ejemplo 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Es una matriz escalonada?

Ejemplo 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Es una matriz escalonada?

Sólo existen matrices escalonadas de derecha a izquierda, así el elemento delantero de la fila 2 no esá a la derecha del delantero de la fila 1.

Ejemplo 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es una matriz escalonada?

Ejemplo 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es una matriz escalonada?

Existen 0 en la fila inferior (se cumple punto 1) y el elemento delantero de cada fila de no ceros se encuentra a la derecha del elemento de la fila anterior (se cumple punto 2)

Pivotes

Si una matriz es escalonada, los primeros elementos diferentes de cero de cada fila reciben el nombre de elementos pivote (o "pivote" simplemente). Note que por ser el pivote el primer elemento no cero de la fila, no hay forma que una fila tenga más de un pivote, puede no tener pivote en caso de que sea un fila de ceros, pero no puede tener dos o más. Además, una matriz $m \times n$ no puede tener mas de m pivotes porque tiene a lo más uno por cada fila y tampoco más de n pivotes pues a lo más tiene un pivote por cada columna.

Eliminación Gaussiana

El algoritmo de Eliminación Gaussiana (Método de Gauss) es el siguiente:

- Determinar la columna (a la izquierda) no cero.
- Si el primer elemento de la columna es cero, cambiar por una fila que no tenga cero.
- Por eliminación, obtenga ceros abajo del elemento delantero (pivote) en las filas debajo de él.
- Cubrir la fila y la columna de trabajo y repita el proceso comenzando en el paso 1. Iterar entre el paso 1 al 4 (es decir cuando se han considerado todas las filas) para así tener una matriz en forma escalonada.
- En la última fila no cero, avanzar hacia arriba para que en cada fila exista un 1 delantero y arriba de ella queden sólo ceros. Para esto se debe sumar los múltiplos adecuados de la fila a las filas correspondientes.

Eliminación Gaussiana

Ejemplo: Ver ejercicios resueltos

Descomposición LU

El objetivo de la factorización LU es descomponer la matriz original A al producto de una matriz triangular superior U con el de una matriz trangular inferior L. De esta forma podemos obtener:

$$A = LU$$

Nota: No todas las matrices cuadradas pueden tener este tipo de descomposición

Descomposición LU

Matrices admisibles para factorizar:

- Matrices diagonales estrictamente dominantes
  - Por filas que satisfacen:

$$|a_{ii}| \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n$$

  - Por columnas que satisfacen:

$$|a_{ii}| \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n$$

- Las matrices definidas positivas (matrices simétricas, como $A = A^T$) que satisftacen:

$$x^T A x > 0, \quad \forall \quad x \neq 0$$

Descomposición LU

Si lo anterior no se cumple, entonces la factorización LU no es única, por lo tanto se requiere una condición adicional:

$$l_{ii} = 1, \quad i = 1, 2...., n$$

Descomposición LU

Ver ejemplo

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis.
- Howard, J. P. (2017). Computational Methods for Numerical Analysis with R. CRC Press.
- Banerjee, S., & Roy, A. (2014). Linear algebra and matrix analysis for statistics. Crc Pr
- Kiusalaas, J. (2013). Numerical methods in engineering with python (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.