

Análisis numérico

Clase 9: Matrices y solución de ecuaciones lineales

Joaquin Cavieres

Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso



1 Matrices y solución de ecuaciones lineales

Método de Newton (continuación)

El método de Newton es un proceso iterativo para encontrar la raíz de una función.

- Partimos de un valor inicial de x_0
- Se comienza el algoritmo y luego se va estimando un nuevo valor para resolver:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Método de Newton (continuación)

Desarrollo paso a paso:

Suponga que deseamos encontrar la raíz de una función $f(x)$, lo que significa, "encontrar un nuevo valor x^* tal que $f(x^*) = 0$. Por tanto, el método de Newton usualmente nos permite encontrar iterativamente ese x^* mediante calculos sencillos.

Método de Newton (continuación)

Desarrollo paso a paso:

- Damos un valor inicial x_0 .
- Aprimamos linealmente a la función $f(x)$ alrededor de x_0 .
- Encontramos la raíz de esta aproximación.
- Iterar "n" pasos hasta que el método converga

Método de Newton (continuación)

La aproximación lineal alrededor de $x = x_0$ esta determinada por:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La solución de $f(x) = 0$ no es tan simple, por lo que el método de Newton nos ayuda a encontrar la raíz de la aproximación lineal mediante:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Matrices y solución de ecuaciones lineales

En el método de bisección nosotros sólo consideramos los signos de $f(x)$ en los extremos de los intervalos generados por el método, pero si nuestra función es *smooth* (suave), podemos encontrar otros métodos más eficientes que toman ventaja, no sólo de los valores de $f(x)$ en cada iteración, sino también de sus *derivadas*.

Método de Newton

El método de Newton (o también conocido como Newton-Raphson) es uno de los métodos numéricos más conocidos y utilizados para la solución de encontrar una raíz. Además, es uno de los métodos con mayor velocidad de convergencia en comparación con otros métodos.

Método de Newton

Definición

Suponga que $f \in C^2[a, b]$, entonces $p_0 \in [a, b]$ es una aproximación para p , con $f'(p_0) \neq 0$ y $|p - p_0|$ lo suficientemente pequeño.

Consideremos el siguiente ejemplo. El primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandido alrededor de p_0 y evaluado en $x = p$:

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\varepsilon(p))$$

donde $\varepsilon(p)$ se encuentra entre p y p_0 .

Método de Newton

Ya que $f(p) = 0$, lo anterior significa que:

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\varepsilon(p))$$

Como nosotros suponemos que $|p - p_0|$ es suficientemente pequeño, el método de Newton asume que el termino $(p - p_0)^2$ es aún más pequeño, así:

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0).$$

Método de Newton

Resolviendo la ecuación para p tenemos:

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1.$$

En esencia, lo anterior es la base del método de Newton, ya que nosotros comenzamos con una aproximación inicial p_0 y generamos la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ como:

Definición

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \text{ para } n \geq 1 \quad (1)$$

El siguiente algoritmo está escrito en pseudocódigo para especificar el método de Newton para encontrar una solución a $f(x) = 0$ dado un valor inicial de p_0 .

Matrices y solución de ecuaciones lineales

Entrada $p_0, TOL; N_0$.

Salida Sol_approx de p o mensaje de error

Paso 1 Determine $i = 1$.

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ hacer pasos 3 - 6.

Paso 3 Determine $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$. (Calcule p_i .)

Paso 4 Si $|p - p_0| < TOL$ entonces

Salida (p) ; (Proceso completado con éxito)

Pare.

Paso 5 Determine $i = i + 1$.

Paso 6 Determine $p_0 = p$. (Actualice p_0)

Paso 7 Salida El método falló despues de N_0 iteraciones, $N_0 = '$.

(el procedimiento no fue exitoso).

(Pare).

Matrices y solución de ecuaciones lineales

Las desigualdades en las técnicas de parada aplicadas en el método de bisección también son aplicables al método de Newton, así por ejemplo, podemos seleccionar una tolerancia $\epsilon > 0$ e iterar p_1, \dots, p_N tal que:

$$\begin{aligned} |p_N - p_{N-1}| &< \epsilon \quad \text{o} \\ \frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} &< \epsilon, \quad p_N \neq 0 \quad \text{o} \\ |f(p_N)| &< \epsilon \end{aligned}$$

Método de Newton

En terminos generales el método se puede expresar como:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

donde la siguiente estimación, (p_2) , es obtenida desde p_1 de la misma manera que el paso anterior:

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}$$

así finalmente podemos generalizar el método de la siguiente manera:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad (2)$$

Método de Newton Ejemplos:

- 1) Encontrar la solución para $f(x) = x^2 - 1$.
- 2) Encontrar la solución para $e^{2x} = x + 6$.

Ver solución en R.

Método de Newton

El método de Newton es un método poderoso y relativamente sencillo de aplicar, además, nos permite encontrar rápidamente las raíces de una ecuación. Sin embargo, también tiene desventajas:

Método de Newton

El método de Newton es un método poderoso y relativamente sencillo de aplicar, además, nos permite encontrar rápidamente las raíces de una ecuación. Sin embargo, también tiene desventajas:

Ventajas

- Rápida convergencia.

Desventajas

- Calcular la derivada de $f(x_{n-1})$ en cada iteración puede ser costoso computacionalmente para algunas funciones complejas.
- No puede encontrar una raíz a menos que el valor inicial x_0 esté cerca de la raíz real de la función.
- El método fallará cuando las iteraciones en un punto x_{n-1} resultan en $f'(x_{n-1}) = 0$.



Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis.



Howard, J. P. (2017). Computational Methods for Numerical Analysis with R. CRC Press.



Banerjee, S., & Roy, A. (2014). Linear algebra and matrix analysis for statistics. Crc Pr



Kiusalaas, J. (2013). Numerical methods in engineering with python (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.