# Análisis numérico

## Clase 2: Preliminares, algoritmos y computación

Joaquin Cavieres

Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

UNIVERSIDAD DE VALPARAISO CHILE

# Outline

## Definición

Una matriz de dimensión $m \times n$ es un arreglo (estructura) rectangular de números escalares:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matriz $\boldsymbol{X}$ tiene $m$ filas y $n$ columnas. Comúnmente se dice que "$\boldsymbol{X}$ es una matriz de $m \times n$" o que es una matriz "$\boldsymbol{X}$ es de orden $m \times n$". También se puede escribir $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$.

# Matrices

**Ejemplo**

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{X}$ es una matriz de $2 \times 3$. Un vector columna es una matriz $n \times 1$ con una columna. Un vector fila es una matriz de dimensión $1 \times m$.

**Carácteristicas básicas en matrices**:

- La notación $x_{ij}$ representan los componentes o los elementos de la matriz $\boldsymbol{X}$.
- Una matriz se dice que es cuadrada si $m = n$, por ejemplo, que una matriz tenga el mismo número de filas y el mismo número de columnas.
- La transpuesta de una matriz $m \times n$ es entonces de dimensión $n \times m$ y se denota como $\boldsymbol{X}^T$.

# Matrices

**Carácteristicas básicas en matrices**:

- Una matriz cuadrada $\boldsymbol{X}$ es simétrica si $\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{X}$.
- Dos matrices $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ son iguales si ellas tienen el mismo orden y cada par de sus correspondientes elementos son iguales (por ejemplo, $x_{ij} = y_{ij}$), para un $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ...., n$.
- Una matriz cuadrada con todo los elementos fuera de la diagonal iguales a 0 es una matriz diagonal (por ejemplo, si $x_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$ (y $x_{ii} \neq 0$ para al menos un $i$)).

**Carácteristicas básicas en matrices**:

- Una matriz diagonal con todos los elementos en la diagonal iguales a 1 (y los demás fuera de la diagonal iguales a 0) es llamada $\boldsymbol{I}_n$. Por ejemplo, si $x_{ii} = 1$, $i = 1, ...., n$ y $x_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$ para $i, j = 1, ...., n$, entonces $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_n$. Esta es conocida como la matriz identidad

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Si $\boldsymbol{X}$ es una matriz cuadrada entonces la diagonal diag($\boldsymbol{X}$) es el vector columna con elementos en la diagonal.

**Carácteristicas básicas en matrices**:

- La traza de una matriz cuadrada es la suma de todos los elementos en la diagonal de la matriz. Por ejemplo, trace($\boldsymbol{X} = \text{tr}(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$. Observación: La $\text{tr}(\boldsymbol{I}_n) = n$.

La suma y resta en matrices del mismo orden son realizadas elemento por elemento (al igual que en los vectores):

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = (x_{ij}) + (y_{ij}) = (x_{ij} + y_{ij})$$

No es posible sumar o restar matrices que no tengan la misma dimensión u orden.

# Operaciones básicas con matrices

La multiplicación escalar de una matriz es realizada elemento por elemento:

$$\lambda \boldsymbol{X} = \lambda(x_{ij}) = (\lambda x_{ij})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

# Multiplicación de matrices

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices, entonces nosotros podemos multiplicar $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ sólo si el número de columnas de $\boldsymbol{A}$ son iguales al número de filas de $\boldsymbol{B}$. Esto es, si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de $m \times n$ y $\boldsymbol{B}$ es una matriz de $n \times p$, el producto $\boldsymbol{AB}$ puede ser definido (pero no el producto $\boldsymbol{BA}$). El resultado debería ser una matriz $m \times p$ (el número de filas de la primera matriz ($\boldsymbol{A}$) y el número de columnas de la segunda ($\boldsymbol{B}$)).

# Multiplicación de matrices

El elemento $(i,k) - esimo$ de $\boldsymbol{AB}$ se obtiene mediante la sumatoria de productos de los elementos de la $i - esima$ fila de $\boldsymbol{A}$ con los elementos de la $k - esima$ columna de $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{AB} = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk})$$

# Multiplicación de matrices

- Si $\boldsymbol{C}$ es una martriz de orden $m \times n$ y $\boldsymbol{D}$ es de orden $p \times q$, entonces el producto $\boldsymbol{CD}$ puede ser solamente definido si $n = p$, en tal caso las matrices $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ son confortables. Si el producto $\boldsymbol{CD}$ no es definido, entonces las matrices son no confortables.
- Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son vectores de orden $m$ y $n$ respectivamente ($m \times 1$ matriz para $\boldsymbol{x}$ y $n \times 1$ matriz para $\boldsymbol{y}$), entonces $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}^T$ con confortables si el producto $\boldsymbol{xy}^T$ esta definido y es una matriz $m \times n$ con $(i, j)$ elementos $x_i y_j$, para $i = 1, ...., m$ y $j = 1, ...., n$. Esto se denomina como producto exterior de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$.

# Multiplicación de matrices

## Ejemplo 1

Si $\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, entonces $\boldsymbol{W}$ es de orden $2 \times 2$ y $\boldsymbol{Z}$ es de orden $2 \times 2$. Esto significa que $\boldsymbol{WZ}$ es $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \equiv 2 \times 2$ y $\boldsymbol{ZW}$ es $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \equiv 2 \times 2$.

$$\boldsymbol{WZ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+2*7 & 1*6+2*8 \\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{ZW} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

Por tanto $\boldsymbol{WZ} \neq \boldsymbol{ZW}$.

**Ejemplo 2**

Si $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $\boldsymbol{U}$ es de orden $2 \times 3$ y $\boldsymbol{V}$ es de orden $3 \times 2$. Esto significa que $\boldsymbol{UV}$ es $2 \times 3 \times 3 \times 2 \times \equiv 2 \times 2$ y $\boldsymbol{VU}$ es $3 \times 2 \times 2 \times 3 \times \equiv 3 \times 3$.

$$\boldsymbol{UV} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+2*3+3*5 & 1*2+2*4+3*6 \\ 4*1+5*3+6*5 & 4*2+5*4+6*6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{VU} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+2*4 & 1*2+2*5 & 1*3+2*6 \\ 3*1+4*4 & 3*2+4*5 & 3*3+4*6 \\ 5*1+6*4 & 5*2+6*5 & 5*3+6*6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{bmatrix}$$

Por tanto $\boldsymbol{UV} \neq \boldsymbol{VU}$.

**Ejemplo 3**

Si $\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $\boldsymbol{W}$ es de orden $2 \times 2$ y $\boldsymbol{V}$ es de orden $3 \times 2$.

- ¿Que pasa si hacemos $\boldsymbol{WV}$?

**Ejemplo 3**

Si $\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $\boldsymbol{W}$ es de orden $2 \times 2$ y $\boldsymbol{V}$ es de orden $3 \times 2$.

- ¿Que pasa si hacemos $\boldsymbol{WV}$?
- ¿Que pasa si multiplicamos $\boldsymbol{W}$ con $\boldsymbol{V}^T$?

**Ejemplo 3**

Si $\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $\boldsymbol{W}$ es de orden $2 \times 2$ y $\boldsymbol{V}$ es de orden $3 \times 2$.

- ¿Que pasa si hacemos $\boldsymbol{WV}$?
- ¿Que pasa si multiplicamos $\boldsymbol{W}$ con $\boldsymbol{V}^T$?

Solución

- No es posible ya que el número de columnas de $\boldsymbol{W}$ es distinto al número de filas de $\boldsymbol{V}$.

# Multiplicación de matrices

**Ejemplo 3**

Si $\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $\boldsymbol{W}$ es de orden $2 \times 2$ y $\boldsymbol{V}$ es de orden $3 \times 2$.

- ¿Que pasa si hacemos $\boldsymbol{WV}$?
- ¿Que pasa si multiplicamos $\boldsymbol{W}$ con $\boldsymbol{V}^T$?

Solución

- No es posible ya que el número de columnas de $\boldsymbol{W}$ es distinto al número de filas de $\boldsymbol{V}$.
- Esto significa que $\boldsymbol{WV}$ es $2 \times 2 \times 2 \times 3 \equiv 2 \times 3$. Es posible realizar la multiplicación

# Multiplicación de matrices

En general, para $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ matrices, $\boldsymbol{XY} \neq \boldsymbol{YX}$ incluso si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son mutuamente confortables (si lor productos estan definidos). Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ estan definidas y $\boldsymbol{XY} = \boldsymbol{YX}$ entonces $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son conmutativas.

# Ejercicio en R

Crear matrices en R:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{W} =& \mathtt{matrix}(\mathtt{c}(1,2,3,4),2,2,\mathtt{byrow}=\mathtt{T})\\
\mathtt{Z} =& \mathtt{matrix}(\mathtt{c}(5,6,7,8),2,2,\mathtt{byrow}=\mathtt{T})\\
\mathtt{A} =& \mathtt{matrix}(\mathtt{c}(2,2,3,5),2,2,\mathtt{byrow}=\mathtt{T})\\
\mathtt{U} =& \mathtt{matrix}(\mathtt{c}(1,2,3,4,5,6),2,3,\mathtt{byrow}=\mathtt{T})\\
\mathtt{V} =& \mathtt{matrix}(\mathtt{c}(1,2,3,4,5,6),3,2,\mathtt{byrow}=\mathtt{T})
\end{aligned}
$$

**Ejercicio**

- Cree dos matrices, una matriz $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ y otra $\boldsymbol{B}_{p\times m}$, en donde $m = 3$, $n = 3$ y $p = 3$. Invente los valores y proponga una expresión de multiplicación en R.
- Haga lo mismo pero ahora con $p = 2$, ¿Cual es el resultado?

Nos vemos la siguiente clase!...

Howard, J. P. (2017). Computational Methods for Numerical Analysis with R. CRC Press.