Análisis numérico

Clase 18: Método de Montecarlo

Joaquin Cavieres

Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

Outline

1 Método de Monte Carlo

Introducción

El método de Monte Carlo es una técnica numérica que es usada para aproximar expresiones matemáticas complejas y computacionalmente costosas de evaluar exactamente.

Historia

El método se nombró así en relación al casino de Montecarlo (Mónaco) por ser en ese entonces "la capital del juego de azar" , ya que se consideró a la ruleta como una forma simple de generar números aleatorios. El desarrollo del método de Montecarlo comenzó aproximadamente en 1944 y luego su utilización se expandió enormemente con el desarrollo de la computadora.

Historia

El trabajo inicial proviene de la investigación inicial sobre la bomba atómica en la segunda Guerra Mundial en los Álamos, Estados Unidos, y tenía como objetivo simular problemas probabilísticos aplicados en difusón de neutrones. Se concede el nacimiento de este método a John von Neumann y Stanislaw Ulam quienes participaban de esta investigación.

Método de Monte Carlo

La idea principal del método es evaluar integrales de la forma:

$$\int_X h(x)f(x)dx$$

donde f es una función de densidad y de la cual nosotros podemos generar un número casi infinito de variables aleatorias.

De lo planteado anteriormente:

- Experimentar con resultados probabilísticos
- Aplicar la ley de los grandes números
- Aplicar el teorema del límite central

De lo planteado anteriormente:

- Experimentar con resultados probabilísticos
- Aplicar la ley de los grandes números
- Aplicar el teorema del límite central

Sin embargo, en análisis numérico el proceso debe ser determinista, por lo que en este tópico la integración númerica será considerada como tal.

El problema principal a desarrollar es el siguiente:

$$\mathbb{E}_f[h(X)] = \int_{\mathcal{X}} h(x)f(x)dx$$

en donde X va tomando valores en $\mathcal{X}$

El método de Monte Carlo genera muestras (sampling) $X_1, ..., X_n$ desde la función de densidad f y aproxima la integral mediante la siguiente formula matemática:

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(x_j)$$

Método de Monte Carlo

La validación del método se puede hacer mediante la Convergencia:

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(x_j) \Longrightarrow \int_{\mathcal{X}} h(x)f(x)dx = \mathbb{E}_f[h(X)]$$

que se cumple gracias a la Ley de Grandes Números, y además, cuando $h^2(X)$ tiene una esperanza finita en f entonces:

$$\frac{\bar{h}_n - \mathbb{E}_f[h(X)]}{\sqrt{v_n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

se cumple gracias al Teorema del Límite Central, en donde la expresión $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}[h(x_j) - \bar{h}_n]^2$

Ver ejemplo en R

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis.
- Robert, C. P., Casella, G., & Casella, G. (2010). Introducing monte carlo methods with r (Vol. 18). New York: Springer.
- Howard, J. P. (2017). Computational Methods for Numerical Analysis with R. CRC Press.
- Banerjee, S., & Roy, A. (2014). Linear algebra and matrix analysis for statistics. Crc Pr
- Kiusalaas, J. (2013). Numerical methods in engineering with python (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.