Ejercicio 1

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

La matriz X es de orden 2×2 así que $\rho(X) \leq 2$.

Si $a_1(4,6) + a_2(6,9) = 0$ (por ejemplo $2a_1 + 3a_2 = 0$)
entonces

$$4a_1 + 6a_2 = 0 \quad y \quad 6a_1 + 9a_2 = 0 \quad (\text{por ejemplo } 2a_1 + 3a_2 = 0)$$

Como $2a_1 + 3a_2$ se repite en la fila 1 y fila 2 podemos hacer:

$a_1 = 3$ y $a_2 = -2$, así

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot -2 = 0 \Rightarrow 6 + -6 = 0$$
$$2 \cdot 3 + 3 \cdot -2 = 0 \Rightarrow 6 + -6 = 0$$

Entonces las columnas de X son linealmente dependientes, así $\rho(X) = 1$

Ejemplo 2 $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz X es de orden 3×4, por tanto $\rho(X) = \min(3,4) = 3$.

Si vemos cuidadosamente en X, la primera fila $(1,2,3,2)$ más la segunda fila $(4,5,6,-1)$ es la tercera fila $(5,7,9,1)$, por lo tanto $\rho(X) < 3$.

Si $\rho(X) = 1$, entonces cada fila debe ser multiplo (quizás fraccional) de cada otra fila, y viendo cuidadosamente la matriz esto no se cumple, así $\rho(X) \geq 2$, así podemos concluir que $\rho(X) = 2$.

Ejemplo 3 $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz X es de orden 4×3, por tanto $\rho(X) = \min(4,3) = 3$.

Es facil ver que las primeras dos columnas son linealmente independientes (de otra manera una podria ser multiplo de otra). Supongamos que $X(a_1, a_2, a_3)^T = 0$, entonces tendriamos $(a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0)$, $(5a_1 + a_2 + 5a_3 = 0)$, $(6a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0)$ y $(3a_1 + a_2 + 4a_3 = 0)$.

De la primera fila podemos obtener multiplos

Determinantes

Para cada matriz cuadrada $A_{n \times n} = (a_{ij})$, existe un valor $|A|$ o $\det(A)$, que es la determinante de A que es calculada desde los elementos de A.

Ejemplo del calculo de la determinante

a) Una matriz de 2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

b) Una matriz de 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

La determinante de la matriz 3×3 se da expandiendo a lo largo de la primera fila, con cada elemento en la fila multiplicado la determinante de una sub matriz 2×2, obtenida por la eliminación de la fila y columna que contienen ese elemento. De hecho, la determinante de una matriz 3×3 podría representarse como

$$= a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Expandir a lo largo de la primera columna da los mismos términos que expandir a lo largo de la primera fila

c) Una matriz de orden 4×4 puede ser evaluada expandiéndola y usando cualquier fila y columna con cada elemento multiplicándolo por una matriz de 3×3.

d) Si $A_{n \times n}$ entonces la det de A es $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} c_{kj}$

para cualquier elección de i o j (recuerde que c_{ik} es la determinante de una matriz $(n-1) \times (n \times 1)$

Recordatorio: La determinante de una matriz 3×3 puede expandirse usando cualquier fila o columna utilizando $+$ o $-$ que se alternan según el número de fila o columna par o impar. Por ejemplo

$$|A| = -a_{21} \, |A(21)| + a_{22} \, |A(22)| - a_{23} \, |A(23)|$$

Donde $A(ij)$ es la matriz obtenida eliminando la fila i y la columna j. La cantidad $c_{ij} = (1)^{i+j} \, |A(ij)|$ es el cofactor de a_{ij}. El cofactor matriz de A es la matriz $C = (c_{ij})$, C^T es la transpuesta de C.

Cada c_{ik} a su vez puede expresarse como una suma de términos en cualquier fila y sus cofactores

Ejemplo 1 $\quad X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $|X| = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 = 0$

Ejemplo 2 $\quad X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $|X| = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 = 8$

Ejemplo 3

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|X| = 1\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= 1(6 \cdot 8 - 1 \cdot 8) - 2(5 \cdot 8 - 6 \cdot 1) + 7(5 \cdot 8 - 6 \cdot 6)$$

$$= 40 - 68 + 28 = 0$$