Análisis numérico

Clase 17: Integración Numérica

Joaquin Cavieres

Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

Outline

Introducción

La integración y la diferenciación dentro del cálculo analítico estan intrínsicamente vinculados ya que uno es el inverso de otro. Sin embargo, aunque la integración es un campo desarrollado completamente dentro del análisis numérico, la diferenciación numérica sólo ofrece algunos métodos relacionados.

Introducción

Definición

La diferenciación numérica es un método de aproximación de la derivada de una función f en un valor particular x. En ingeniería o en física, una función puede tener una derivada exacta difícil de encontrar, o la función en si misma es desconocida, y de lo único que disponemos son algunos puntos x y la función evaluada en esos puntos.

Definición

La diferenciación numérica es un método de aproximación de la derivada de una función f en un valor particular x. En ingeniería o en física, una función puede tener una derivada exacta difícil de encontrar, o la función en si misma es desconocida, y de lo único que disponemos son algunos puntos x y la función evaluada en esos puntos.

La diferenciación numérica, de la cual el método de diferencias finitas es solo un enfoque, permite evitar estas complicaciones al aproximar la derivada.

Introducción

Una forma sencilla y directa de aproximación es a través de la primera derivada definida como:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad h > 0$$

donde el error de aproximación de esta ecuación puede ser encontrado mediante la expansión de Taylor de $f(x+h)$ sobre x, que nos da como resultado:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\epsilon)$$

Cuando reordenamos la expansión y sustituimos f' con la aproximacion anterior entonces podemos llegar a la siguiente ecuación de aproximación:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h^2}{2} f''(\epsilon)$$

Método de diferencias finitas

Método de diferencias finitas

El método de diferencias esta basado en aproximar funciones que permiten reemplazar ecuaciones diferenciales por ecuaciones de diferencia, y aunque existen otros tipos de algoritmos para aproximar las derivadas, los métodos de diferenciación son una herramienta adecuada para la diferenciación numérica debido a su relativa facilidad de cálculo y precisión.

Existen 3 técnicas de diferenciación que son las más conocidas para aproximar la derivada de una función en un punto:

- Forward
- Backward
- Central

La técnica de forward (hacia adelante) para la aproximación diferencial es la misma que la que mencionamos anteriormente:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La técnica de backward (hacia atras) para la aproximación diferencial se basa en los valores de la función evaluada en $x - h$ y x, definida como:

$$f' \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

y la técnica central (o centrada) para la aproximación diferencial esencialmente un promedio de la técnica forward y backward:

$$f' \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Error de aproximación

El error de aproximación en forward y backward esta expresado mediante el termino $\frac{h^2}{2} f''(\epsilon)$ donde $\epsilon \in (x, x+h)$. El error de aproximación en la técnica central puede encontrarse mediante la expansión de Taylor en $f(x+h)$ y $f(x-h)$ sobre x. Esto es:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) =& f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(\epsilon) \qquad \epsilon \in (x, x+h) \\
f(x-h) =& f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(\epsilon) \qquad \epsilon \in (x-h, x)
\end{aligned}
$$

Error de aproximación

Las dos ecuaciones anteriores son restadas y así se resuelve $f'(x)$ para conducir a la técnica central de aproximacipón:

$$f' \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}\left(f'''(\epsilon_1) + f'''(\epsilon_2)\right)$$

Error de aproximación

Las dos ecuaciones anteriores son restadas y así se resuelve $f'(x)$ para conducir a la técnica central de aproximacipón:

$$f' \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}\left(f'''(\epsilon_1) + f'''(\epsilon_2)\right)$$

La aproximación mediante la técnica central es más precisa que las otras dos, por lo que se recomienda usar siempre que se pueda.

Ver ejemplo en `R`

Elementos de integración numérica

Observación

Generalmente nos enfrentamos con el problema de evaluar integrales que no son sencillas de resolver.Así, existe un método básico de aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ conocido como cuadratura numérica. Este método utiliza la suma $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ para aproximar $\int_a^b f(x)dx$

Observación

Generalmente nos enfrentamos con el problema de evaluar integrales que no son sencillas de resolver.Así, existe un método básico de aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ conocido como cuadratura numérica. Este método utiliza la suma $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ para aproximar $\int_a^b f(x)dx$

Normalmente se utilizan polinomios de interpolación en donde se seleccionan un conjunto de nodos $\{x_0, ..., x_n\}$ de un intervalo $[a, b]$ para integrar el polinomio de Lagrange de la forma:

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Método de Integración Gaussiana

La integración gaussiana se basa en encontrar aproximaciones polinomiales en donde los ponderadores y puntos de evaluación consideran polinomios ortogonales.

Definición

Dado un $f(x)$ nosotros sabemos que para alguna función, $w(x)$ produciendo ponderadores, en donde $g(x)$ es una aproximación polinomial a $f(x)$, entonces:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} w(x)g(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

donde x_i es un punto de evaluación y w_i es su ponderador asociado. Ambos son elegidos por la minimización del error.

Por ejemplo, si partimos con $w(x) = 1$ y resolviendo :

$$w_1 x_1^i + ... + w_n x_n^i = \int_{-1}^{1} x^i dx$$

para un $i = 0, 1, ..., 2n-1$ en el polinomial de orden que necesitemos. El valor de $w(x)$ nos entrega los polinomiales de Legendre y el método es llamado la integración de Gauss-Legendre.

Método de Integración Gaussiana

Otros puntos de evaluación y ponderadores pueden ser utilizados, por ejemplo si $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, este nos entrega los polinomiales de Chebyshev, llamando a esta opción el método de integración Gauss-Chebyshev a través de $(-1, 1)$. También podemos hacer que $w(x) = e^{-x}$ que nos entrega el método de Gauss-Laguerre y que puede integrar funciones a través del intervalo $[0, \infty)$. Este último método nos permite integrar por ejemplo expresiones:

$$\int_0^{\infty} w(x) f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx$$

Por último, haciendo que $w(x) = e^{-x^2}$, nos da como resultado el método Gauss-Hermite a través del intervalo $(-\infty, \infty)$ para resolver integrales de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx$$

Nota: Hay muchos otros conjuntos de ponderadores y puntos de evaluación de integración Gaussiana disponibles distintos a los que se presentaron aquí.

Ver ejemplo en `R`

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis.
- Howard, J. P. (2017). Computational Methods for Numerical Analysis with R. CRC Press.
- Banerjee, S., & Roy, A. (2014). Linear algebra and matrix analysis for statistics. Crc Pr
- Kiusalaas, J. (2013). Numerical methods in engineering with python (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.