Análisis numérico

Clase 8: Matrices y solución de ecuaciones lineales

Joaquin Cavieres

Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

Outline

Método de bisección (continuación)

El método de bisección es uno de los métodos básicos en la aproximación numérica.

- Necesitamos encontrar una raíz (o solución) para:

$$f(x) = 0, \quad \text{para una función dada}$$

- El nombre de la solución de esa ecuación (la raíz) se conoce también como cero de la función f

Método de bisección (continuación)

El método de bisección requiere un intervalo de partida $[a_0, b_0]$ y este procede dividiendo el intervalos 'a la mitad', descartando el intervalo en donde el signo no cambió y vuelve a repetir el procedimiento. Una vez que los valores del intervalo tengan una diferencia suficientemente pequeña, δ, el método considerará que la sucesión convergió a la solución.

Método de bisección (continuación)

Formalmente, el método considera los siguientes n pasos:

- Calcular $m = (a_{n-1} + b_{n-1})/2 \rightarrow$ punto medio del actual intervalo.
- Si $f(a_{n-1}) * f(m) < 0$ (por ejemplo el signo no cambia en el intervalo (a_{n-1}, m), entonces $a_n = a_{n-1}$ y $b_n = m$. De otra manera, $a_n = m$ y $b_n = b_{n-1}$.
- Repetir hasta que $b_n - a_n < \delta$ (Para un valor pequeño de δ elegido previamente.

Lo que esperamos es que finalmente $f(m) \approx 0$.

Método de bisección (continuación)

Ejemplo: Encontrar la raíz de la función $f(x) = \frac{1}{4} - e^{-x^4}$.

Ver la solución en `R`.

En el método de bisección nosotros sólo consideramos los signos de $f(x)$ en los extremos de los intervalos generados por el método, pero si nuestra función es *smooth* (suave), podemos encontrar otros métodos más eficientes que toman ventaja, no sólo de los valores de $f(x)$ en casa iteración, sino también de sus derivadas.

Método de Newton

El método de Newton (o también conocido como Newton-Raphson) es uno de los métodos numéricos más conocidos y utilizados para la solución de encontrar una raíz. Además, es uno de los métodos con mayor velocidad de convergencia en comparación con otros métodos.

Método de Newton

Definición

Suponga que $f \in C^2[a,b]$, entonces $p_0 \in [a,b]$ es una aproximación para p, con $f'(p_0) \neq 0$ y $|p - p_0|$ lo suficientemente pequeño.

Consideremos el siguiente ejemplo. El primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandido alrededor de p_0 y evaluado en $x = p$:

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\varepsilon(p))$$

donde $\varepsilon(p)$ se encuentra entre p y p_0.

Método de Newton

Ya que $f(p) = 0$, lo anterior significa que:

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f^{'}(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f^{''}(\varepsilon(p))$$

Como nosotros suponemos que $|p - p_0|$ es suficientemente pequeño, el método de Newton asume que el termino $(p - p_0)^2$ es aún más pequeño, así:

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f^{'}(p_0).$$

Método de Newton

Resolviendo la ecuación para p tenemos:

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1 .$$

En escencia, lo anterior es la base del método de Newton, ya que nosotros comenzamos con una aproximación inicial p_0 y generamos la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ como:

Definición

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad \text{para} \quad n \geq 1 \tag{1}$$

El siguiente algoritmo está escrito en pseudocódigo para especificar el método de Newton para encontrar una solución a $f(x) = 0$ dado un valor inicial de p_0.

Entrada $p_0, TOL; N_0$.

Salida Sol_approx de p o mensaje de error

Paso 1 Determine $i = 1$.

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ hacer pasos 3 - 6.

Paso 3 Determine $p = p_0 - f(p_0)/f^{'}(p_0)$. (Calcule p_i.)

Paso 4 Si $|p - p_0| < TOL$ entonces

Salida (p); (Proceso completado con éxito)

Pare.

Paso 5 Determine $i = i + 1$.

Paso 6 Determine $p_0 = p$. (Actualice p_0)

Paso 7 Salida El método falló despues de N_0 iteraciones, $N_0 =^{'}$.

(el procedimiento no fue exitoso). (Pare).

Las desigualdades en las técnicas de parada aplicadas en el método de bisección también son aplicables al método de Newton, así por ejemplo, podemos seleccionar una tolerancia $\epsilon > 0$ e iterar $p_1, \ldots, p_N$ tal que:

$$
\begin{aligned}
|p_N - p_{N-1}| &< \epsilon \quad \text{o} \\
\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} &< \epsilon, \quad p_N \neq 0 \quad \text{o} \\
|f(p_N)| &< \epsilon
\end{aligned}
$$

Método de Newton

En terminos generales el método se puede expresar como:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

donde la siguiente estimación, (p_2), es obtenida desde p_1 de la misma manera que el paso anterior:

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}$$

así finalmente podemos generalizar el método de la siguiente manera:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \tag{2}$$

Método de Newton Ejemplos:

1) Encontrar la solución para $f(x) = x^2 - 1$.

2) Encontrar la solución para $e^{2x} = x + 6$.

Ver solución en `R`.

Método de Newton

El método de Newton es un método poderoso y relativamente sencillo de aplicar, además, nos permite encontrar rapidámente las raices de una ecuación. Sin embargo, tambien tiene desventajas:

Método de Newton

El método de Newton es un método poderoso y relativamente sencillo de aplicar, además, nos permite encontrar rapidámente las raices de una ecuación. Sin embargo, tambien tiene desventajas:

Ventajas

- Rápida convergencia.

Desventajas

- Calcular la derivada de $f(x_{n-1})$ en cada iteración puede ser costoso computacionalmente para algunas funciones complejas.
- No puede encotnrar una raíz a menos que el valor inicial x_0 esté cerca de la raíz real de la función.
- El método fallá cuando las iteraciones en un punto x_{n-1} resultan en $f^{'}(x_{n-1}) = 0$.

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis.
- Howard, J. P. (2017). Computational Methods for Numerical Analysis with R. CRC Press.
- Banerjee, S., & Roy, A. (2014). Linear algebra and matrix analysis for statistics. Crc Pr
- Kiusalaas, J. (2013). Numerical methods in engineering with python (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.