✪ Ex. 1.

Montrer que l'idéal $I = \left\langle X^2+1 \right\rangle$ est un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$.

Corrigé de l'exercice 1

Notons $I = \langle X^2+1 \rangle$ et considérons un idéal J tel que $I \subset J \subset \mathbb{R}[X]$ et $I \neq J$.
Soit $P \in J - I$. Écrivons la division euclidienne de P par X^2+1. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ ainsi que $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ tels que

$$P(X) = (X^2+1)Q(x) + aX + b.$$

Alors $aX + b = P(X) - (X^2+1)Q(X) \in J$ car $P \in J$ et $(X^2+1)Q(X) \in I \subset J$.
Alors $a^2X - b^2 = (aX+b)(aX-b) \in J$ et donc

$$(aX^2 - b^2) - a^2(X^2+1) = -(a^2+b^2) \in J.$$

Comme $a^2 + b^2 \neq 0$ car $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, J contient a^2+b^2 un inversible de $\mathbb{R}[X]$, et donc $1 \in J$, $J = \mathbb{R}[X]$.
Tout idéal J contenant strictement I étant égal à $\mathbb{R}[X]$, I est bien un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$.