

⊗ Ex.1 _____ Cox page 210.

Soit k un corps. Considérons a_1, a_2, \dots, a_n des éléments de k .

1. On considère l'idéal $I = \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$. Montrer que I est un idéal maximal.
2. Tout élément $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ correspond à un idéal maximal de $k[x_1, \dots, x_n]$. Montrer que la réciproque est fausse en étudiant l'idéal $\langle x^2 + 1 \rangle$ de $\mathbb{R}[x]$.
3. Montrer que tout idéal maximal de $k[x_1, \dots, x_n]$ est un idéal premier.
4. On suppose de plus que k est un corps algébriquement clos. Montrer qu'alors tout idéal maximal de $k[x_1, \dots, x_n]$ est de la forme $\langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n \rangle$ avec $a_1, \dots, a_n \in k$.