❊ Ex.1

Soit G un sous-groupe fini des déplacements du plan.

1. Montrer que G ne contient pas d'autre translation que l'identité.
2. En déduire que G est commutatif. Peut-on en dire autant d'un sous-groupe fini des déplacements de l'espace de dimension 3 ?
3. Montrer que G est engendré par une seule rotation. Á quel groupe connu est-il isomorphe ?

Corrigé de l'exercice 1

1. Supposons que G contienne une translation de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.
   Alors en tantq eu groupe, G contientrait toutes les translations de vecteurs $n\vec{u}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit le fait que G soit d'ordre fini. La seule translation contenue dans le groupe G est donc l'identité.
2. Les déplacements du plan étant les translations et les rotations, G ne contient donc que des rotations.
   Soient r_1 et r_2 deux rotations de G d'angles respectifs θ_1 et θ_2. Le déplacement $r_1 \circ r_2 \circ r_1^{-1} \circ r_2^{-1}$ est donc une translation qui appartient aussi à G : d'après la question précédente c'est donc l'identité du plan.
   On a alors
   $$\begin{aligned} r_1 \circ r_2 \circ r_1^{-1} \circ r_2^{-1} &= \mathrm{Id} \\ r_1 \circ r_2 &= (r_1^{-1} \circ r_2^{-1})^{-1} \\ &= r_2 \circ r_1. \end{aligned}$$
   Le groupe G est donc commutatif.
   Dans l'espace le groupe des déplacements du cube est fini mais non abélien.
3. Deux rotations du plan ayant un centre différent ne commutant pas, toutes les rotations de G ont un même centre.
   G étant fini, l'ensemble des mesures des angles des rotations de G ont un plus petit élément dans $]0\,;2\pi]$. Notons θ_0 ce plus petit élément, et r_0 cette rotation. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, r_0^n est dans G.
   Soit r une rotation élément de G d'angle $\theta \in]0\,;2\pi]$.
   Il existe un élément p de $\mathbb{Z}$ tel que $\theta - p\theta_0 \in [0\,;\theta_0[$. La rotation d'angle $\theta - p\theta_0$ appartenant à G est donc l'identité du plan car θ_0 est le plus petit angle non nul de raotation de G.
   Par suite, pour toute rotation r de g, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que r soit une rotation d'angle $p\theta_0$, et donc $r = r_0^p$.
   Le groupe G est donc engendré par r_0.
   Notons $n \in \mathbb{N}^\star$ l'ordre de G, on a donc $\theta_0 = \dfrac{2\pi}{n}$, et est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou encore au groupe des racines n-ièmes de l'unité.

❊ Ex.2

Soit a, b et c trois réels ; on considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$
On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A dans la base canonique.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit orthogonale.
   Montrer que dans ce cas, $a+b+c = \pm 1$.
2. On suppose que la matrice A est orthogonale.
   Déterminer la nature géométrique de f et ses éléments caractéristiques lorsque :
   a) $a+b+c = 1$;
   b) $a+b+c = -1$.
   On examinera le cas particulier où $b = c$.

Corrigé de l'exercice 2

1. A étant orthogonale étant équivalent au fait que les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, de manière équivalente à
$$\begin{cases} a^2+b^2+c^1=1 \\ ab+bc+ca=0. \end{cases}$$
Or
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1,$$
ce qui donne
$$a+b+c=\pm 1.$$

2. Posons $a+b+c=\epsilon$.
On a
$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc.$$
De plus on a
$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-ab(a+b)-bc(b+c)-ac(a+c)-3abc \\ &= \epsilon - ab(\epsilon-c)-bc(\epsilon-a)-ac(\epsilon-b)-3abc \\ &= \epsilon-(ab+bc+ca)\epsilon+3abc-3abc \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

a) Si $\epsilon=1$, on a donc $\det A=1$ et $A\in\mathscr{SO}_3(\mathbb{R})$, f est donc une rotation.
De plus
$$A=\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
Le vecteur $\vec{u}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est invariant par f : il dirige donc l'axe de la rotation.
Soit $\vec{v}(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$ dans $\vec{v}^{\perp}$ (on a plein de choix bien sûr...),
on a alors
$$A=\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c\\b-a\\c-b\end{pmatrix}.$$
Soit θ l'angle de la rotation :
$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(\vec{v}|f(\vec{v}))}{|\vec{v}\|\,\|f(\vec{v})\|} \\ &= \frac{3a-1}{\sqrt{2}\sqrt{(a-c)^2+(b-a)^2+(c-b)^2}} \\ &= \frac{3a-1}{2}, \end{aligned}$$
car : $(a-c)^2+(b-a)^2+(c-b)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=2$.
Pour orienter l'axe de la rotation on calcule $\vec{v}\wedge f(\vec{v})$:
$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a-c\\b-c\\c-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-c\\b-c\\b-c\end{pmatrix}=(b-c)\vec{u}.$$

- Si $b>c$, f est la rotation d'axe Vect $(\vec{u})$dirigé par $\vec{u}$ et d'angle $\arccos\dfrac{3a-1}{2}$.
- Si $b<c$ f est la rotation d'axe Vect$(\vec{u})$, dirigé par $-\vec{u}$ et d'angle $\arccos\dfrac{3a-1}{2}$.
- Si $b=c$, la relation $ab+bc+ca=0$ donne $2ba+b^2=0$ soit $b=0$ ou $2a+b=0$
  - Si $b=c=0$ alors $a=1$ et $A=I_3$, f est l'identité de $\mathbb{R}^3$.
  - si $2a+b=0$, $a+b+c=-3a=1$ d'où $\cos\theta=-1$; f est le demi-tour d'axe Vect$(\vec{u})$.

3. Si $\epsilon = -1$, on a $A \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R}) - \mathscr{S}\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$; f est donc une reflexion orthogonale ou la composée d'une réflexion orthogonale par une rotation.

   On a
$$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est change en son opposé. En reprenant les mêmes calculs qu'à la question 2a avec le vecteur $\overrightarrow{v}$, on obtient :
$$\cos\theta = \frac{3a+1}{2}.$$

- Si $b > c$, f est la composée de la rotation d'axe $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$, dirigé par $\overrightarrow{u}$, d'angle $\arccos\frac{3a+1}{2}$, et de la réflexion par rapport au plan $\text{Vect}(\overrightarrow{u})^{\perp}$.
- Si $b < c$, f est la composée de la rotation d'axe $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$, dirigé par $-\overrightarrow{u}$, d'angle $\arccos\frac{3a+1}{2}$, et de la réflexion par rapport au plan $\text{Vect}(\overrightarrow{u})^{\perp}$.
- Si $b = c$, la relation $ab + bc + ca = 0$ donne $2ab + b^2 = 0$ soit $b = 0$ ou $2a + b = 0$.
  - si $b = c = 0$, alors $a = -1$, d'où $A = -I_3$, f est l'homothétie de rapport -1.
  - Si $2a + b = 0$, $a + b + c = -3a = -1$, d'où $\cos\theta = 1$; f est la réflexion par rapport au plan $\text{Vect}(\overrightarrow{u})^{\perp}$.

❊ Ex.3

On considère dans l'espace affine euclidien E de dimension 3 orienté, deux rotations r te r' d'axes respectifs D et D' et d'angles respectifs θ et θ' (en orientant convenablement les axes, on peut choisir θ et θ' dans $[0\,;\pi]$).
Les rotations r et r' sont dites **conjuguées** si, et seulement si, il existe un déplacement f de E tel que
$$r' = f^{-1} \circ r \circ f.$$
Montrer que r et r' sont conjuguées si, et seulement si
$$\theta = \theta'.$$
Expliciter alors le déplecement f.

Corrigé de l'exercice 3

Il existe un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ de E dans lequel r a pour écriture analytique :
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
La relation $r' = f^{-1} \circ r \circ f$ signifie que r' a la même expression analytique que r dans le repère $(O;\ f(\overrightarrow{e}_1), f(\overrightarrow{e}_2), f(\overrightarrow{e}_3))$, qui est aussi orthonomal direct. Cette condition est satisfaite si, et seulement si, les deux rotations ont le même angle dans $[0\,;\pi]$.
Plus généralement, désignons par O et O' les intersections respectives de D et D' avec leur perpendiculaire commune. Notons $\overrightarrow{e}_1$ et $\overrightarrow{e}'_1$ les vecteurs unitaires de D et de D' qui orientent les axes de rotations conformément à r et r'. On complète alors par deux vecteurs $\overrightarrow{e}_2$ et $\overrightarrow{e}_3$ pour obtenir une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e}_2,\ \overrightarrow{e}_3)$ directe.
L'unique vissage V qui transforme O en O' et $\overrightarrow{e}_1$ en $\overrightarrow{e}'_1$, transforme le repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e}_1,\ \overrightarrow{e}_2,\ \overrightarrow{e}_3)$ en le repère orthonormé direct $(O';\ \overrightarrow{e}'_1,\ \overrightarrow{e}'_2,\ \overrightarrow{e}'_3)$ dans lequel l'expression analytique de r' est celle indiquée ci-dessus. On a bien
$$r' = V \circ r \circ V^{-1}.$$

❊ Ex.4

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, $D_1,\ D_2$ et D_3 trois droites de E deux à deux non coplanaires et non parallèles à un même plan.
Démontrer qu'il existe des vissages $V_1,\ V_2$ et V_3, d'axes respectifs $D_1,\ D_2$ et D_3 tels que

$$V_3 \circ V_2 \circ V_1 = \mathrm{Id}_E.$$

Corrigé de l'exercice 4

Considérons les droites :

- Δ_1 perpendiculaire commune à D_2 et D_3 ;
- Δ_2 perpendiculaire commune à D_3 et D_1 ;
- Δ_3 perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

Désignons par $s_1,\ s_2$ et s_3 les demi-tours d'axes respectifs $\Delta_1,\ \Delta_2$ et Δ_3.

- $V_1 = s_3 \circ s_2$ est un vissage d'axe D_1 ;
- $V_2 = s_1 \circ s_3$ est un vissage d'axe D_2 ;
- $V_3 = s_2 \circ s_1$ est un vissage d'axe D_3.

Alors :

$$V_3 \circ V_2 \circ V_1 = s_2 \circ s_1 \circ s_1 \circ s_3 \circ s_3 \circ s_2 = \mathrm{Id}_E.$$