✪ Ex. 1. ——————— *./fonctionsplusieursvar/exo-1/texte.tex*

Soit $a \in \mathbb{R}$ donné. Déterminer les extremums locaux de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ sur $\mathbb{R}^2$.

——— Corrigé de l'exercice 1 ———

Pour tout $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3ay$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3ax$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) = 6x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = 6y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3a.$

Nous allons raisonner par disjonction des cas :

Le cas $a = 0$ **:** une condition nécessaire pour avoir un extremum est que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 = 0$, ce qui conduit à $x = y = 0$.

On remarque alors que $f(x, x) = 2x^3$ qui change de signe suivant celui de x au voisinage de 0. f n'admet donc pas d'extremum en $(0, 0)$ lorsque $a = 0$.

Le cas $a \neq 0$ **:** déterminons les points critiques. On doit résoudre le système $\begin{cases} x^2 - ay = 0 \\ y^2 - ax = 0 \end{cases}$, de manière équivalente : $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{a} \\ \dfrac{x^4}{a^2} - ax = 0 \end{cases}$, la seconde ligne donnant $x(x^3 - a^3) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = a$, les points critiques sont donc $(0, 0)$ et (a, a).

La matrice hessienne de f en (x, y), notée ici $H_f(x, y)$ vaut :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 3a \\ 3a & 6y \end{pmatrix}.$$

Ainsi $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 3a & 0 \end{pmatrix}$ et $\det H_f(0, 0) = -9a^2 < 0$, le point $(0, 0)$ est donc un point selle.

De même : $H_f(a, a) = \begin{pmatrix} 6a & 3a \\ 3a & 6a \end{pmatrix}$, et $\det H_f(a, a) = 36a^2 - 9a^2 = 25a^2 > 0$.

Comme la trace de $H_f(a, a)$ vaut $12a$, on a alors :

- si $a > 0$, $\mathrm{tr}(H_f(a, a)) = 12a > 0$, f admet donc un minimum en (a, a) valant $f(a, a) = 2a^3 - 3a^3 = -a^3$;
- si $a < 0$, $\mathrm{tr}(H_f(a, a)) = 12a < 0$, f admet donc un maximum en (a, a) valant aussi $-a^3$.

On peut aussi regarder

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, a) &= x^3 - a^3 + y^3 - a^3 - 3axy + 3a^3 \\ &= (x-a)(x^2 + ax + a^2) + (y-a)(y^2 + ay + a^2) - 3a(xy - a^2) \end{aligned}$$

En posant $x = a + h$ et $y = a + k$, on obtient après calculs :

$$f(x,\ y) - f(a,\ a) = 3a(h^2 - hk + k^2) + (h^3 + k^3),$$

et au voisinage de $(0,\ 0)$ pour $(h,\ k)$, cette différence est du signe de a comme obtenu ci-dessus, car $q(h,\ k) = h^2 - hk + k^2$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^2$ puisque $q(h,\ k) = \left(h - \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2$.