APP1 - Partie B - Intégrale curviligne

Jérome Eertmans

Objectifs

Cet APP a pour objectif d'introduire ou de rappeler le concept d'intégrale curviligne, en partant de notions de la vie de tous les jours, pour arriver à son application en électromagnétisme.

Ce document s'accompagne d'un **Notebook** exécutable en ligne[1]. Il est donc utile de parcourir les deux documents en parallèle.

1 Contexte

Après une journée au ski, trois ingénieurs en herbe, Guillaume, François et Florian, discutent de leurs meilleures descentes de ski. Notamment, ils se souviennent d'une piste qui, à un moment donné (y_0), se sépare en deux pentes différentes qui se rejoignent un peu plus bas (y_L), voir Figure 1.

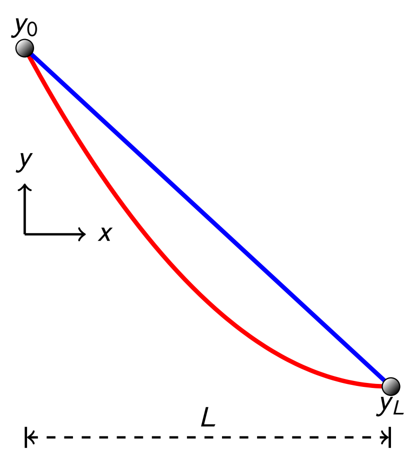

Figure 1. Vue 2D de la pente et des deux trajectoires.

Guillaume ayant pris la pente rouge (R), et François la bleue (B), n'arrivent pas à se mettre d'accord sur qui a été le plus rapide, c.-à-d., celui qui atteint la vitesse la plus élevée. Afin de clore le débat et d'éviter une bagarre, Florian leur explique que, pour avoir le fin mot de l'histoire, il suffit de faire le calcul ! En effet, si on néglige les frottements, et que l'on suppose que la gravité g est constante et que toute l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique, il est possible de déterminer la vitesse finale de Guillaume et François.

La courbe R suit la fonction

$$y_R(x) = y_L + (y_0 - y_L)\left(\frac{x-L}{L}\right)^2, \tag{1}$$

et la courbe B suit, quant à elle, la fonction

$$y_B(x) = y_0 - (y_0 - y_L)\frac{x}{L}, \tag{2}$$

avec L la distance horizontale parcourue, la piste s'étalant de $x = 0$ (gauche) à $x = L$ (droite).

1. Lien :https://eertmans.be/LEPL1202_APP1-B/retro/notebooks/?path=index.ipynb. Si JupyterLite ne fonctionne pas, essayez avec Binder (plus lent) : https://mybinder.org/v2/gh/jeertmans/LEPL1202_APP1-B/HEAD?urlpath=/tree/index.ipynb.

– **Dans le notebook** : lisez la section 2, et executez ses cellules.

– **Questions** :

1. En supposant une vitesse initiale nulle, déterminez la vitesse finale de chacun des skieurs.
2. Pourquoi, en théorie, la vitesse terminale des skieurs ne dépend pas du chemin parcouru ?
3. Écrivez la forme intégrale de l'énergie dépensée[2] (par le skieur) lors du trajet, sans tenir compte de la courbe.

1.1 Le chemin a son importance

Le résultat ci-dessus déplait fortement à nos deux ingénieurs qui ne font pas confiance aux maths et décident de refaire chacun la descente, en mesurant cette fois-ci leur vitesse. Cette journée-là, le vent soufflait fort (vers la droite), et François et Guillaume ont des gabarits assez différents : le premier est tout petit, alors que le second est très grand. Les résultats sont sans appel : François a terminé avec une vitesse de 100 $\mathrm{km\,h^{-1}}$, alors que Guillaume n'a lui atteint qu'un maximum de 90 $\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Mécontents, ils retournent vers Florian en lui reprochant de les avoir induits en erreur. Florian se défend en disant que tout ce qu'il a dit était correct, sous réserve de l'hypothèse que la seule force en action est celle de la gravité. Or, avec une telle différence entre les deux skieurs et un vent très fort, cette hypothèse n'est plus vérifiée.

Afin d'obtenir la bonne vitesse finale, il leur explique que le chemin parcouru a toute son importance et que ce qu'ils cherchent à calculer s'appelle une *intégrale curviligne*. En fait, les intégrales (telles que vues en secondaire), de la forme

$$\int_A^B F(x)dx, \tag{3}$$

sont un cas simplifié d'une intégrale curviligne pour laquelle le chemin de parcours est une droite allant de $x = A$ à $x = B$.

De manière générale, l'intégrale d'une fonction scalaire $F(x, y, z)$ le long d'un chemin C peut se calculer

$$\int_C F(x, y, z)d\ell, \tag{4}$$

avec $d\ell$ l'incrément infinitésimal de longueur de la courbe.

Attention, $F(x, y, z)$ est bien la fonction à intégrer, **pas le chemin parcouru**. Pour tenir compte du chemin, c'est similaire à une intégrale par substitution.

Pour le chemin rouge,

$$\vec{\ell}_R(x) = \begin{bmatrix} x & y_R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y_L + (y_0 - y_L)\left(\frac{x-L}{L}\right)^2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

et, de manière similaire, le chemin bleu suit maintenant la courbe

$$\vec{\ell}_B(x) = \begin{bmatrix} x & y_B(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y_0 - (y_0 - y_L)\frac{x}{L} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Attention, quand $\vec{F}$ est un champ vectoriel, son intégrale curviligne s'écrit:

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{\ell}, \tag{7}$$

où $< \cdot >$ représente le produit scalaire, et $d\vec{\ell}$ est le vecteur tangent à $\vec{\ell}$.

Dans le cas où C peut s'écrire en fonction de x uniquement, $d\vec{\ell}$ s'obtient en calculant:

$$d\vec{\ell} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dx} & \frac{dy}{dx} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 1 & \frac{dy}{dx} \end{bmatrix} dx. \tag{8}$$

2. Attention au signe : le skieur donne-t-il ou reçoit-il de l'énergie dans la descente ?

L'intégrale (7) se simplifie et devient :

$$\int_0^L \vec{F} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{dy}{dx} \end{bmatrix} dx. \tag{9}$$

Champ conservatif

Avant de prendre en compte des forces non conservatives, vérifiez que l'énergie accumulée est la même pour les deux chemins si la seule force en jeu est la force de gravité

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & -mg \end{bmatrix}. \tag{10}$$

? – **Questions** :

1. Calculez, pour chacun des deux chemins, le travail effectué par la force de gravité sur le skieur $\vec{F}$ en utilisant (7). Le champ gravitationnel étant conservatif, les résultats sont censés être les mêmes.
2. Montrez, **intuitivement**, que, si vous aviez défini la force comme étant une grandeur scalaire ($F = mg$) à la place d'une grandeur vectorielle (10), l'intégrale calculée (4) n'est pas la même pour la courbe bleue et la courbe rouge.

– **Dans le notebook** : lisez et complétez les sections 3 et 4. Vérifiez que vos résultats concordent.

Champ non conservatif

Maintenant, Guillaume et François ont toutes les clés en main pour calculer le travail dans un champ non conservatif. Pour ce faire, ils supposent que, en plus de la force de gravité, une force de frottement du vent agit de manière proportionnelle à leur altitude :

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \alpha y & -mg \end{bmatrix}, \tag{11}$$

avec α un coefficient positif de prise de vent propre à la corpulence du skieur (à remplacer en fonction de la courbe rouge ou bleue), et y l'altitude du skieur.

– **Dans le notebook** : lisez et complétez la section 5. Vérifiez que vos résultats concordent (voir questions ci-dessous).

? – **Questions** :

1. Calculez, pour chacun des deux chemins, le travail effectué par la force totale $\vec{F}$ sur le skieur. Notez α_R pour le chemin rouge, α_B pour le bleu.
2. En supposant que nos deux skieurs ont tous les deux une masse de $70\,\mathrm{kg}$, calculez leur coefficient α respectif de manière à atteindre les vitesses mentionnées plus haut. Utilisez $y_0 = 20\,\mathrm{m}$, $y_L = 0\,\mathrm{m}$, et $L = 100\,\mathrm{m}$.

Application à l'électromagnétisme

Pouvez-vous faire des liens entre l'intégrale curviligne et des grandeurs définies en Physique 1 (en électricité) ? Il peut être intéressant de ré-écrire ces grandeurs à la lumière de cet APP.

1.2 Une descente un peu plus réaliste (pour aller plus loin)

En pratique, les skieurs peuvent prendre des chemins allant dans au moins 2 directions différentes, la troisième étant imposée par le relief. Guillaume et François décident donc, cette fois-ci, de comparer deux trajectoires différentes sur une même piste de ski (Figure 2 et Figure 3).

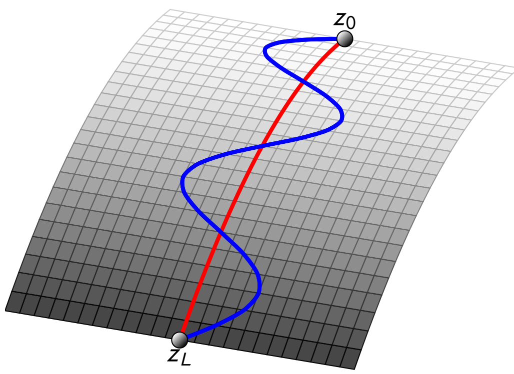

Figure 2. Vue 3D de la pente et des deux trajectoires.

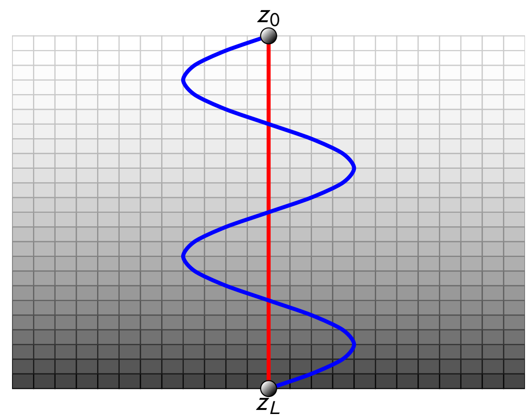

Figure 3. Vue du haut de la pente.

Même dans le cas général d'une intégrale curviligne, il est possible de visualiser ceci comme un calcul de surface sous une courbe (Figure 4). Cependant, quand $\vec{F}$ est un champ vectoriel, la courbe en question est obtenue en faisant le produit scalaire entre $\vec{F}$ et la tangente au chemin $d\vec{\ell}$ (voir https://tinyurl.com/2p89s34s).

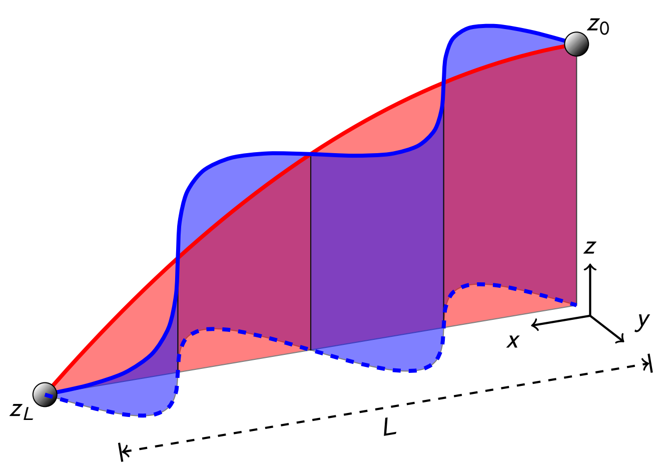

Figure 4. Vue 3D de la pente et des deux trajectoires.

Dans le cas présent, la pente de ski a pour fonction $z = z_0 + (z_L - z_0)\left(\frac{x}{L}\right)^2$, avec L la longueur de la piste et x variant entre 0 et L. Dans le cas du chemin rouge, y est fixé à 0. Le vecteur direction du chemin est

$$\vec{\ell}_R(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & z_0 + (z_L - z_0)\left(\frac{x}{L}\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Dans le cas du chemin bleu, y suit la fonction $y = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Nous avons donc que

$$\vec{\ell}_B(x) = \begin{bmatrix} x & \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & z_0 + (z_L - z_0)\left(\frac{x}{L}\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

En supposant le cas conservatif, à savoir

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \end{bmatrix}. \tag{14}$$

? – **Questions** :

1. Trouvez (dessinez) un autre chemin qui faciliterait le calcul de la variation d'énergie potentielle et calculez cette dernière.
2. Écrivez les deux intégrales, pour les courbes rouge et bleue, qu'il faudrait résoudre afin de calculer le travail effectué par la force de gravité sur le skieur.
3. Effectuez les calculs et vérifiez que la réponse est bien la même, quel que soit le chemin.
4. Le travail de la force est-il proportionnel (voire égal) à l'aire sous la courbe correspondante (Figure 4) ? Pourquoi ?