

時間序列分析期末報告

台中市空氣污染與發電量之相關性分析

第十九組

統計 112 韓伊晴 H24099019

統計 111 劉貞莉 H24099077

統計 111 張捷琳 H24099085

目錄

一、 研究動機	3
二、 資料介紹	3
三、 建模流程	4
四、 模型建立	
(一)AQI	5
1. 繪製時間序列圖	5
2. 確認資料是否平穩	5
3. 選擇候選模型	7
4. 殘差檢定	9
5. 比較候選模型	11
6. 最終模型	11
(二)發電量	12
1. 繪製時間序列圖	12
2. 確認資料是否平穩	12
3. 選擇候選模型	14
4. 殘差檢定	15
5. 比較候選模型	19
6. 最終模型	20
五、相關性分析	
1. 兩模型殘差時間序列圖	20
2. 兩模型殘差 CCF 圖	21
3. 估計候選模型參數	21
4. 進行迴歸的殘差檢定	22
5. 最終模型	24
六、 結論	24
七、 參考資料	24
八、 心得	25
九、 加分題	26

一、研究動機

「空氣汙染」一詞已越來越受到大眾的重視，隨著科技的進步、工業發展大量排放廢氣，使得空氣汙染越來越嚴重，而每天暴露在受到汙染的空氣下，人們患病罹癌的機率也隨之提升，但造成空氣汙染的原因該歸咎於誰？

目前大家普遍把空氣汙染跟火力發電廠做直接的連結，但火力發電廠是否是造成空汙的主要元兇還是另有其他原因，我們將透過火力發電興盛的台中和其空氣狀況來做研究。

而空氣汙染是指一些危害人體健康及周邊環境物質所對大氣層造成的汙染，這些物質可能是氣體(一氧化碳、二氧化碳)、固體或液體懸浮物等，而現今環保署是利用空氣品質指標(AQI)對空氣進行量化，當AQI>100時將對敏感族群有不健康的影響，故本次報告我們將針對「AQI跟發電量兩者的關聯性」進行研究。

二、資料介紹

1. AQI

- 資料來源：行政院環境保護署（環境資料開放平臺）
- 資料處理：取「忠明」觀測站的觀察值
- 資料範圍：2020 年 1 月 1 日 ~ 2021 年 11 月 30 日
- 資料筆數：100 筆
- 時間間隔：以週為單位

2. 台中市發電量（單位：千瓦時kWh）

- 資料來源：政府資料開放平臺
- 資料處理：取台中火力發電廠發電量
- 資料範圍：2020 年 1 月 1 日 ~ 2021 年 11 月 30 日
- 資料筆數：100 筆
- 時間間隔：以週為單位

3. 分析軟體：R, 使用 package: TSA、aTSA、tseries

三、建模流程

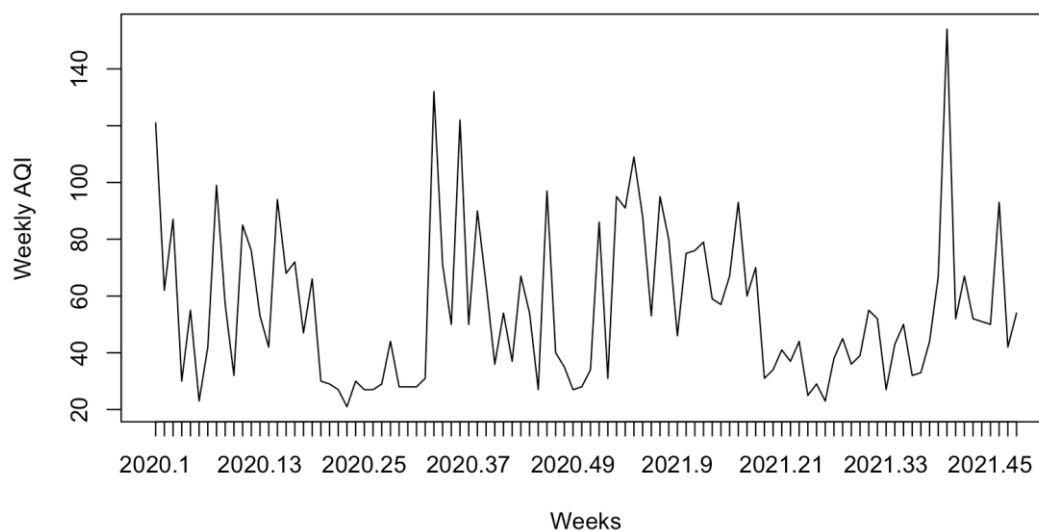


四、模型建立

(一)AQI

1. 繪製時間序列圖

首先對AQI的原始資料繪製時間序列圖，並觀察趨勢。



圖一、AQI 時間序列圖

2. 確認資料是否平穩

為了確認資料是否需要差分，因此做Augmented Dickey-Fuller Test (ADF test)及 KPSS Test，以檢定的方式做判斷。

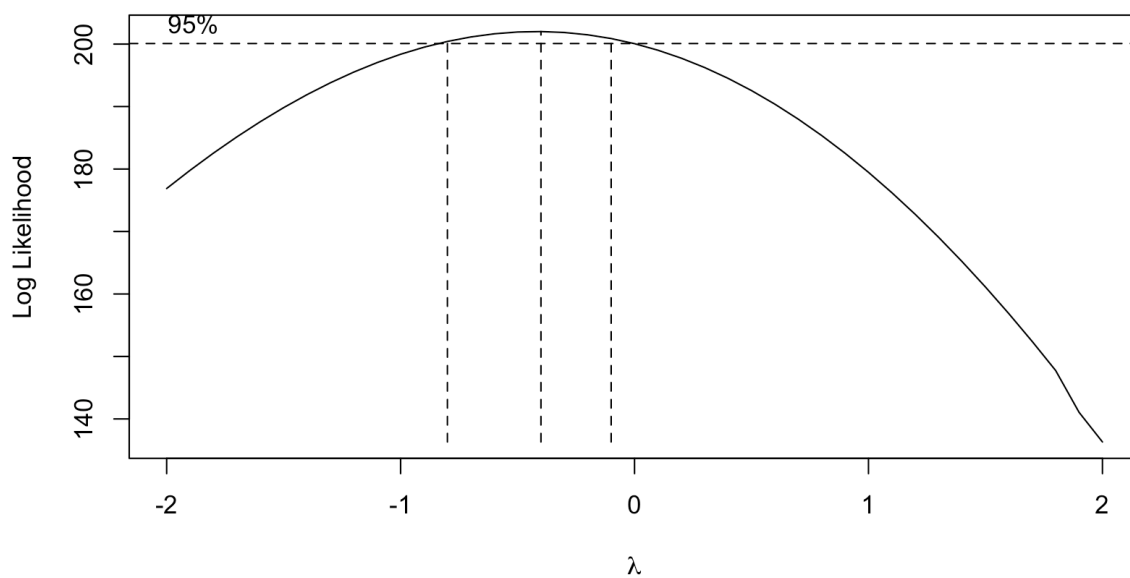
表一、ADF test & KPSS test 結果

	ADF test	KPSS test
虛無假設 H_0	時間序列資料不平穩	時間序列資料不需差分
對立假設 H_a	時間序列資料平穩	時間序列資料需差分
顯著水準	0.05	0.05
P值	0.07935	0.1
檢定結果	不拒絕虛無假設	不拒絕虛無假設

上述兩個檢定矛盾，我們接著做Box-Cox檢定。

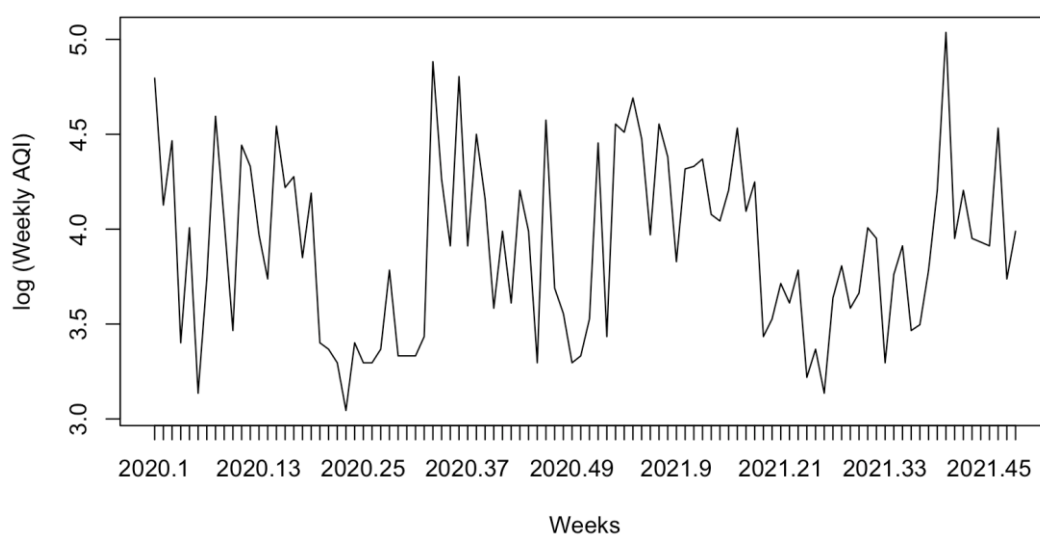
Box-Cox檢定方法與結果如下：

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{if } \lambda = 0 \\ \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{if } \lambda \neq 0 \end{cases}$$



圖二、Box-Cox 檢定圖

由圖可知95%的信賴區間介於-1和0之間，所以我們將資料取log。



圖三、log(AQI)時間序列圖

接著進行Augmented Dickey-Fuller Test (ADF test)及 KPSS Test檢定是否需要做差分。

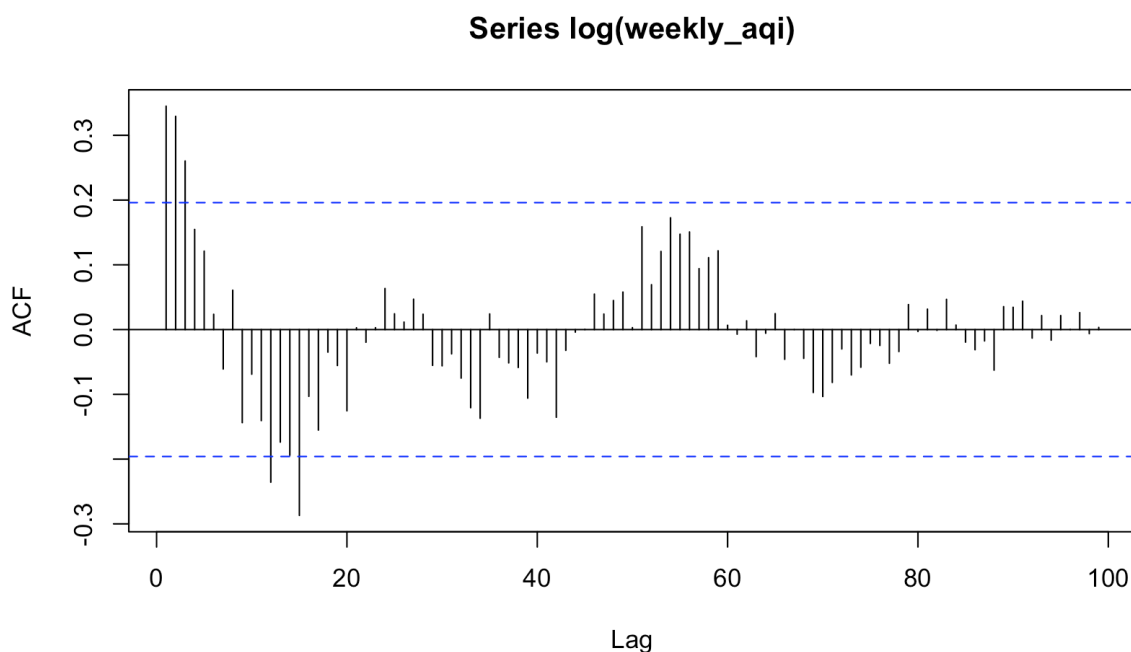
表二、ADF test & KPSS test 結果

	ADF test	KPSS test
虛無假設 H_0	時間虛列資料不平穩	時間序列資料不需差分
對立假設 H_a	時間序列資料平穩	時間序列資料需差分
顯著水準	0.05	0.05
P值	0.1234	0.1
檢定結果	不拒絕虛無假設	不拒絕虛無假設

做完檢定後兩者仍互相矛盾，我們決定用轉換後的資料進行配適。

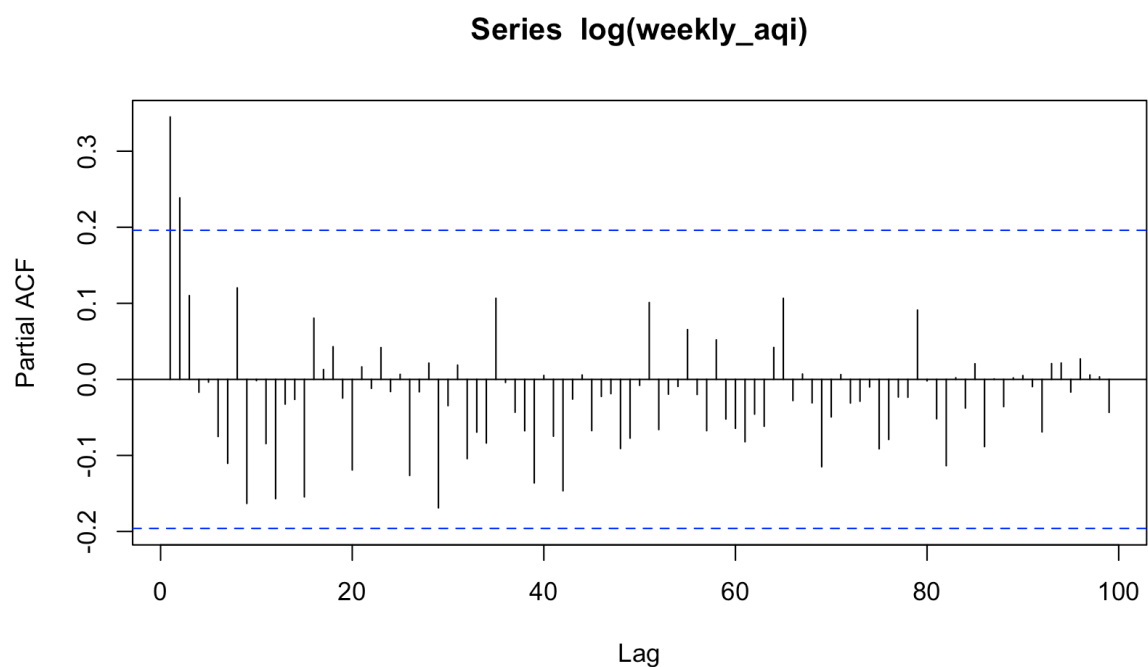
3. 選擇候選模型

透過觀察ACF、PACF及EACF圖，選擇合適的候選模型。



圖四、ACF of $\log(\text{AQI})$

由圖四可發現取log後的AQI有三部顯著，所以我們可以配適MA(3)。



圖五、PACF of $\log(\text{AQI})$

由圖五可發現取log後的AQI有兩步顯著，所以我們可以配適AR(2)。

表三、EACF of $\log(\text{AQI})$

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7
0	x	x	x	o	o	o	o	o
1	x	o	o	o	o	o	o	o
2	x	o	o	o	o	o	o	o
3	x	o	x	o	o	o	o	o
4	x	o	o	o	o	o	o	o
5	o	x	o	x	x	o	o	o
6	x	x	x	x	o	o	o	o
7	x	o	x	x	x	o	o	o

由上表中觀察，選出包含最多0的模型，我們可以配適ARMA(1,1)。

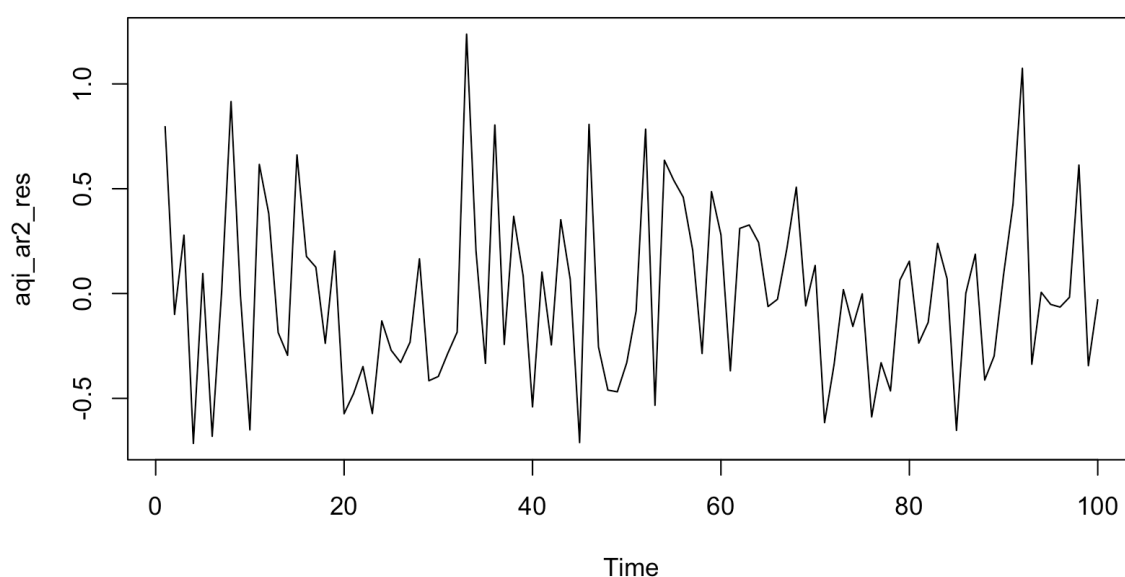
綜合以上三圖的判斷結果，我們將以下三個模型列為候選模型：

- (一) MA(3)
- (二) AR(2)
- (三) ARMA(1, 1)

4. 殘差檢定

接下來對模型做殘差檢定，以AR(2)為例(其餘模型殘差檢定結果整理於下節-比較候選模型)：

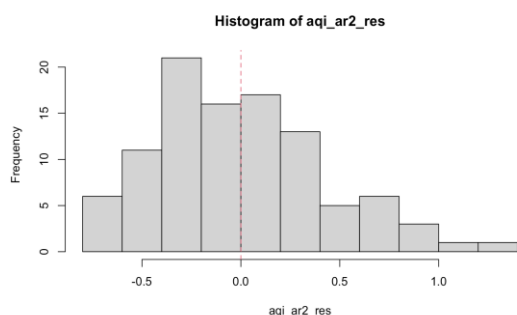
(1)殘差時間序列圖



圖六、殘差時間序列圖

觀察上圖，殘差整體無明顯趨勢，隨時間平均在0附近起伏。

(2)觀察直方圖，進行t-test檢測殘差平均是否為0

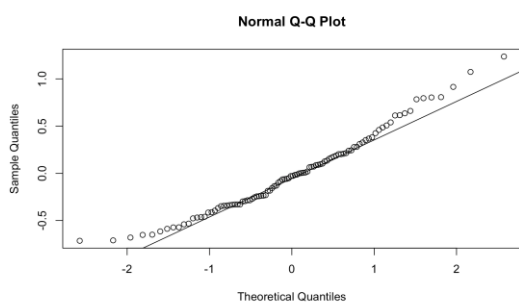


圖七、殘差直方圖

t-test	AR(2)
Ho	殘差平均為0
p-value	0.8773
結論	不拒絕，殘差平均為0

表四、t-test 結果

(3)觀察Q-Q Plot，進行 Shapiro-Wilk test 檢測殘差是否為常態

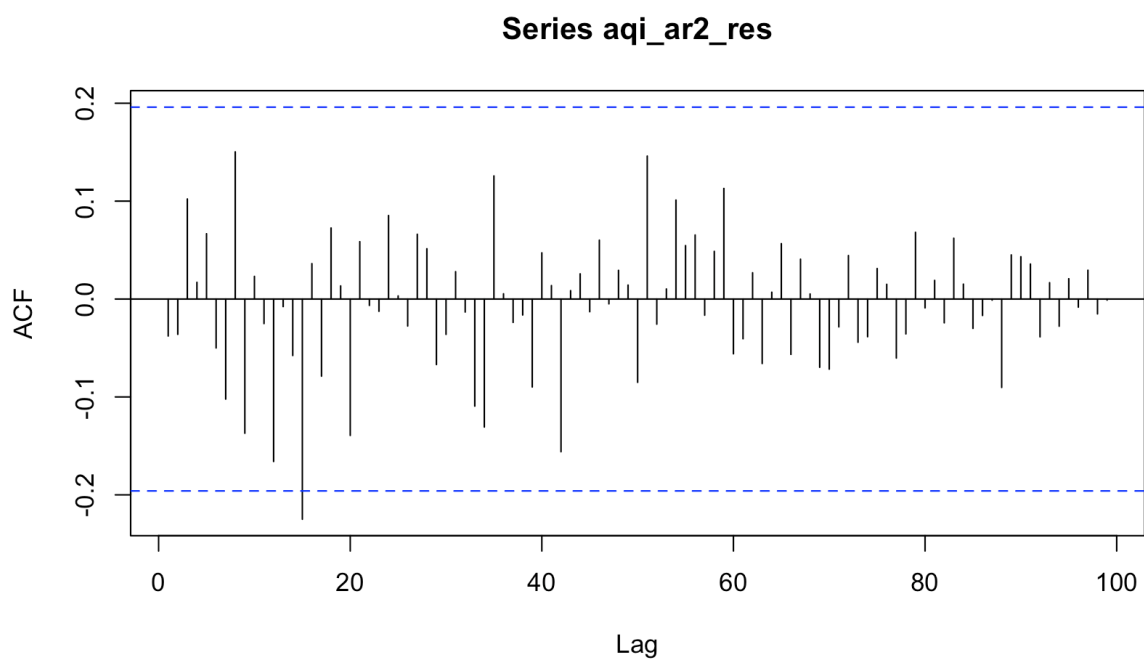


圖八、殘差QQ plot

ShapiroWilk test	AR(2)
Ho	殘差呈常態分配
p-value	0.02246
結論	拒絕，殘差不呈常態分配

表五、Shapiro-Wilk test 結果

(4)觀察ACF圖，對顯著步數進行Ljung-Box test檢測殘差是否無序列相關



圖九、殘差ACF圖

觀察上圖(殘差ACF圖)，第15步顯著，進行Ljung-Box test，結果如下：
第15步 $p - value = 0.2782 > \alpha = 0.05$ ，表示此殘差項無自我相關。

(5) 檢測離群值

將AQI 配適之AR(2)模型進行離群值A0與I0的檢測，並無離群值。

5. 比較候選模型：

將候選模型進行殘差檢定以及AIC的比較：

表六、候選模型比較

模型	殘差檢定			AIC
	t-test	Shapiro-Walk test	ACF是否無關自 我相關 Lung Box test	
	p-value （通過:p>0.05）			
MA(3)	0.9114 (通過)	0.04802 (不通過)	0.1505 無(通過)	120.2406
AR(2)	0.8773 (通過)	0.02246 (不通過)	0.06227 無(通過)	117.0344
ARMA(1,1)	0.8502 (通過)	0.03978 (不通過)	0.06333 無(通過)	117.0457

三個模型MA(3)、AR(2)、ARMA(1,1)都有通過檢定，但AR(2)的AIC最小，所以我們最後選擇AR(2)為最終模型。

6. 最終模型

配適AR(2)模型：

$$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + e_t$$

表七、AR(2)配適參數結果

AR(2)	ϕ_1	ϕ_2	μ
估計值	0.2690	0.2430	3.9179
標準差	0.0979	0.0978	0.0851
是否顯著	是	是	是

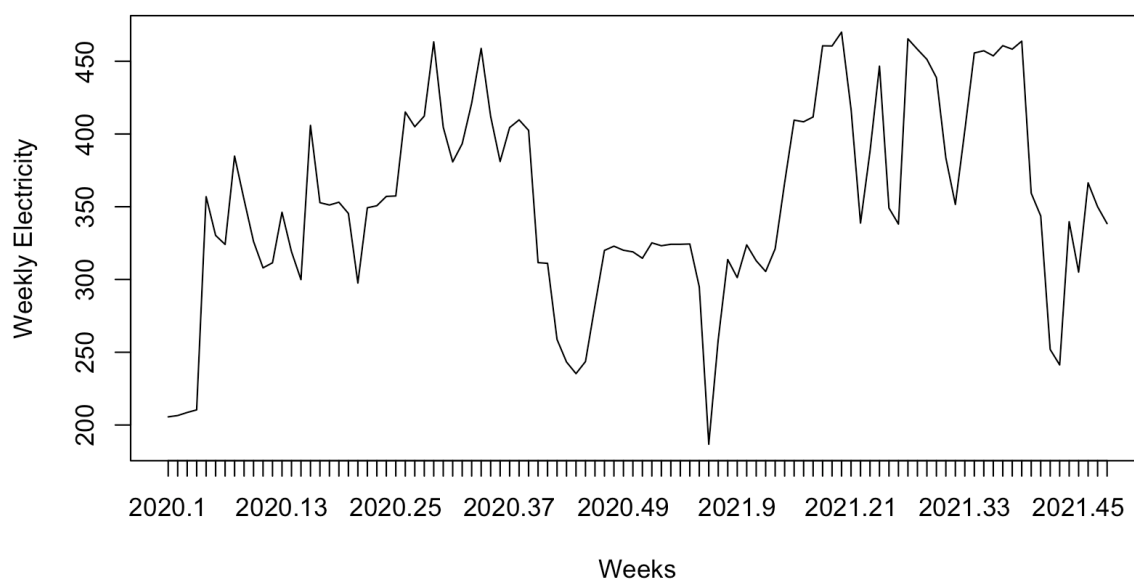
所有估計值顯著加減1.96倍標準誤皆不包含0，以上係數都顯著，可得模型：

$$Y_t - 3.9179 = 0.2690(Y_{t-1} - 3.9179) + 0.2430(Y_{t-2} - 3.9179) + e_t$$

(二)發電量

1. 繪製時間序列圖

首先對發電量的原始資料繪製時間序列圖，並觀察趨勢。



圖十、發電量時間序列圖

2. 確認資料是否平穩

為了確認資料是否需要差分，因此做 Augmented Dickey-Fuller Test (ADF test)及 KPSS Test，以檢定的方式做判斷。

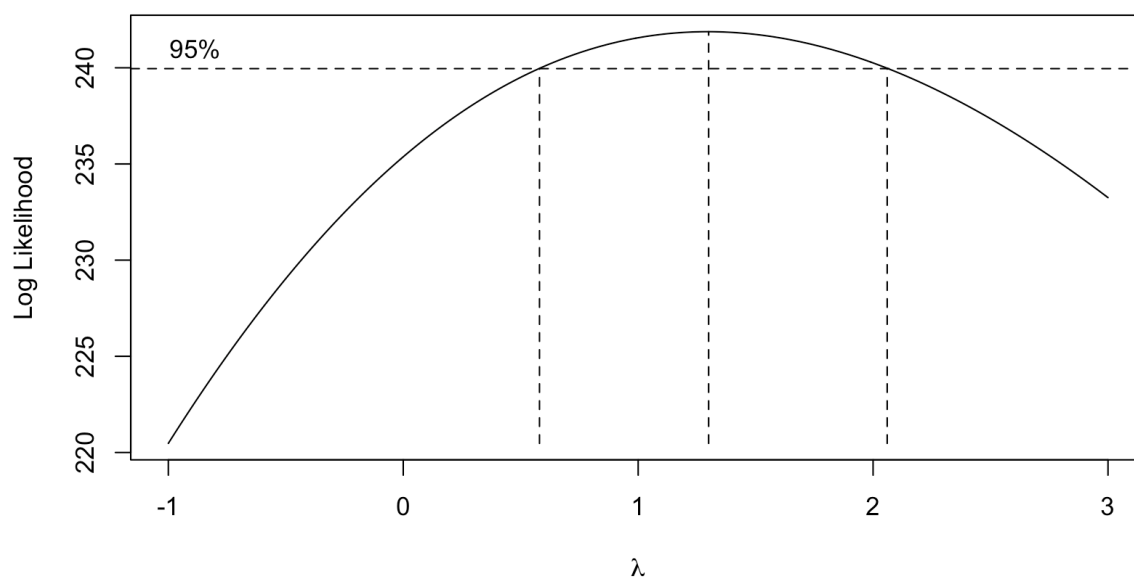
表八、ADF test & KPSS test 結果

	ADF test	KPSS test
虛無假設	時間虛列資料不平穩	時間序列資料不需差分
對立假設	時間序列資料平穩	時間序列資料需差分
顯著水準	0.05	0.05
P值	0.2343	0.1
檢定結果	不拒絕虛無假設	不拒絕虛無假設

上述兩個檢定矛盾，我們接著做Box-Cox檢定。

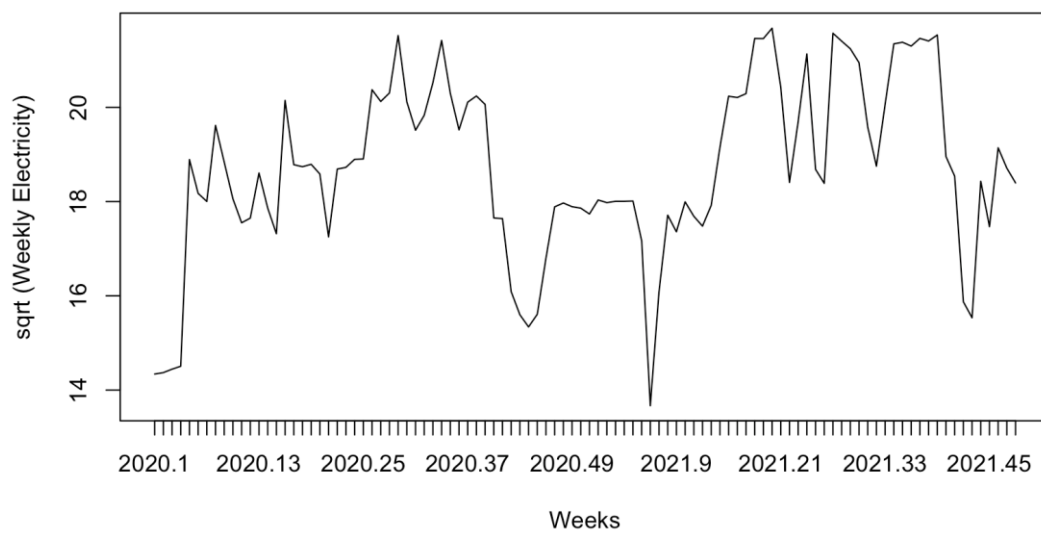
Box-Cox檢定方法與結果如下：

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{if } \lambda = 0 \\ \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{if } \lambda \neq 0 \end{cases}$$



圖十一、Box-Cox 檢定圖

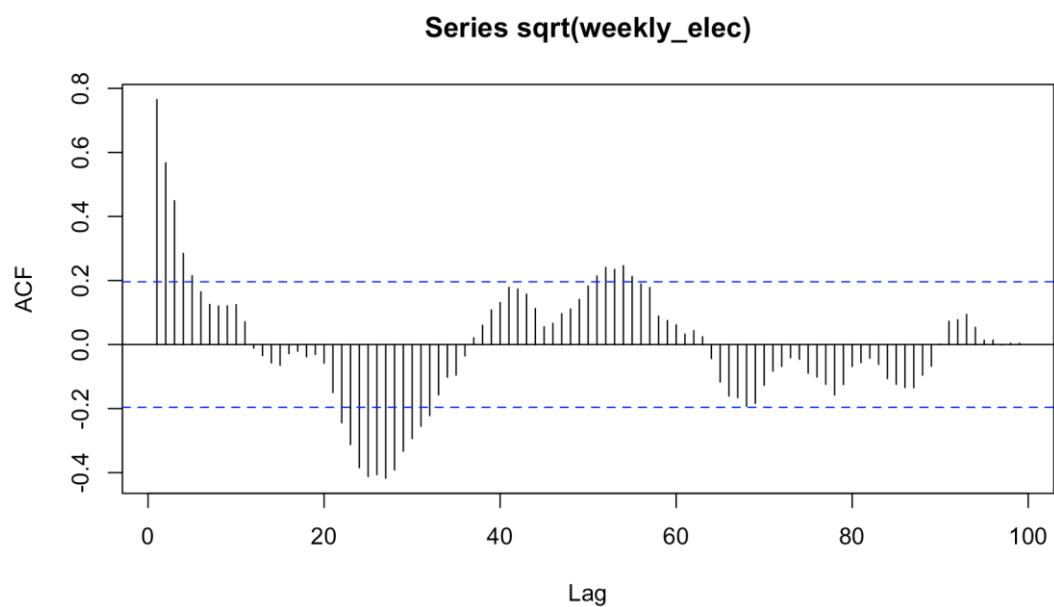
由圖可知95%的信賴區間介於-0.5和2.5之間，所以我們將資料開根號。



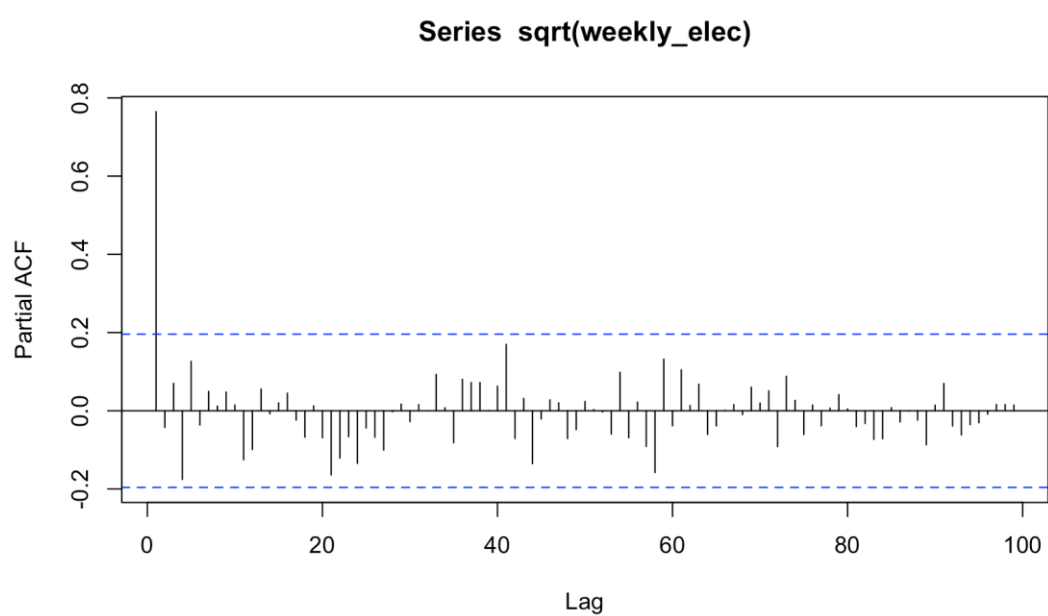
圖十二、發電量開根號後的時間序列圖

3. 選擇候選模型

透過觀察ACF、PACF及EACF圖，選擇合適的候選模型。



圖十三、發電量開根號後的ACF圖



圖十四、發電量開根號後的PACF圖

由圖十四可發現開根號後的發電量有一步顯著，所以我們可以配適AR(1)。

表九、EACF of $\sqrt{\text{Electricity}}$

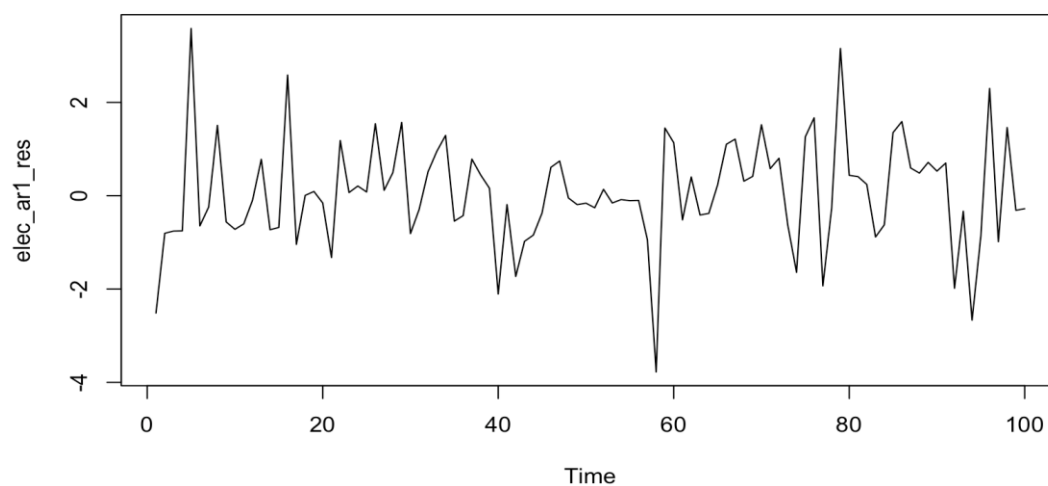
AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7
0	x	x	x	x	x	o	o	o
1	o	o	o	o	o	o	o	o
2	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	o	o	o	o	o	o	o
4	x	o	x	o	o	o	o	o
5	x	o	x	o	o	o	o	o
6	x	x	o	o	o	o	o	o
7	x	x	o	o	o	o	o	o

由上表中觀察，選出包含最多0的模型，我們可以配適AR(1)。

4. 殘差檢定

接下來對模型AR(1)做殘差檢定：

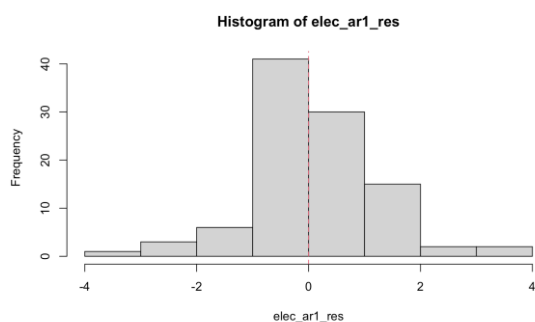
(1) 殘差時間序列圖



圖十五、殘差時間序列圖

觀察上圖(殘差的時間序列圖)，殘差整體無明顯趨勢，隨時間平均在0附近起伏。

(2)觀察直方圖，進行t-test檢測殘差平均是否為0

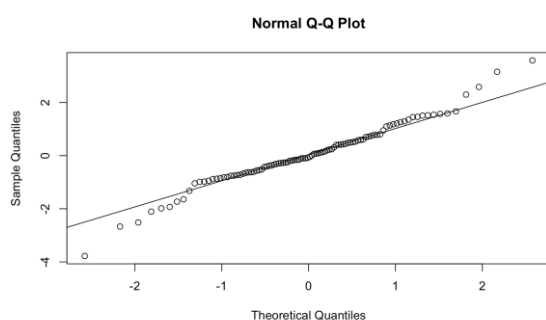


t-test	AR(1)
Ho	殘差平均為0
p-value	0.6642
結論	不拒絕，殘差平均為0

圖十六、殘差平均直方圖

表十、t-test 結果

(3)觀察Q-Q Plot，進行 Shapiro-Wilk test 檢測殘差是否為常態

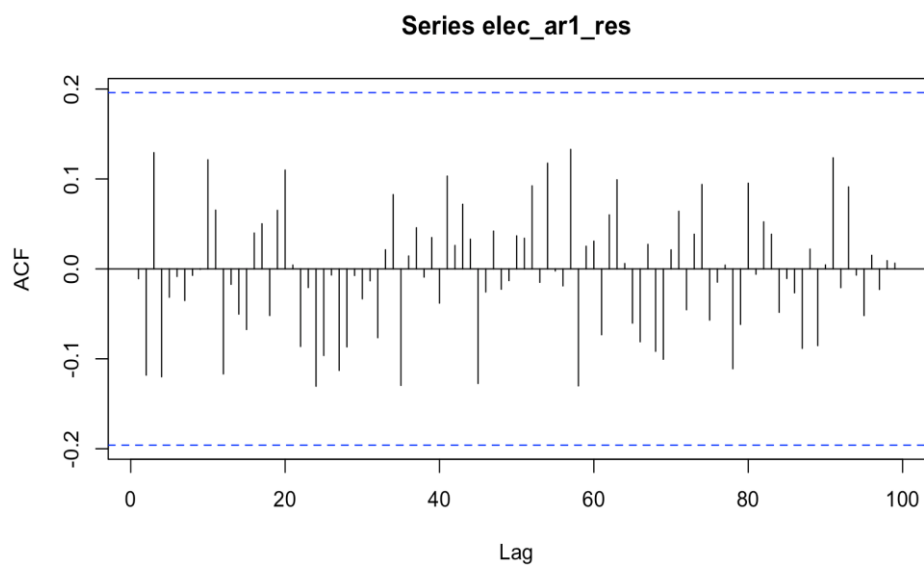


ShapiroWilk test	AR(2)
Ho	殘差呈常態分配
p-value	0.0595
結論	不拒絕，殘差呈常態分配

圖十七、殘差QQ plot

表十一、Shapiro-Wilk test 結果

(4)觀察ACF圖，對顯著步數進行Ljung-Box test檢測殘差是否無序列相關



圖十八、殘差ACF圖

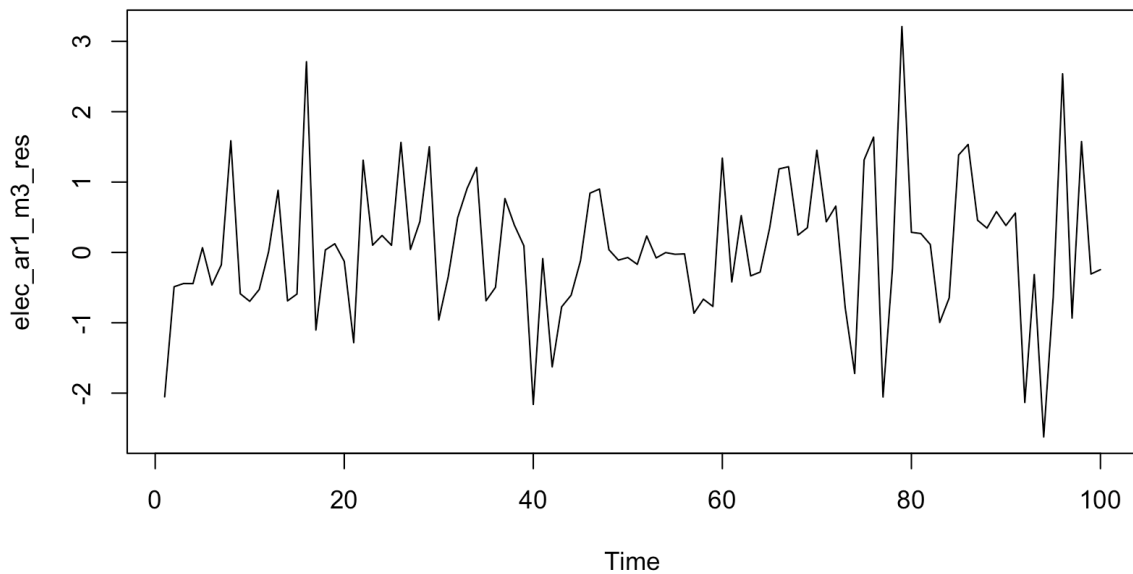
觀察上圖(殘差ACF圖)，無顯著值，無須進行Ljung-Box test。
故發電量選擇AR(1)模型。

(5) 檢測離群值

將發電量配適之AR(1)模型進行離群值A0與I0的檢測，發現在Lag=58有離群值A0，I0出現，由於此離群值發生後，並未長期影響後面期數之發電量，故將此A0考慮進模型進行配適，但未通過常態性檢定，此時檢測已考慮A0之模型的離群值，發現在Lag=5有新離群值I0出現，因此最後決定將原先發電量配適之AR(1)模型，加入A0=Lag 58, I0=Lag 5進行調整，模型設定如下：

將此調整模型進行殘差檢定：

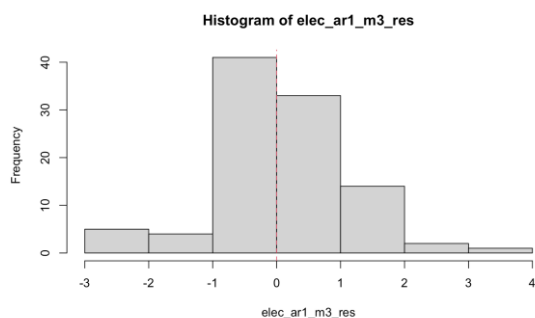
a. 殘差時間序列圖



圖十九、殘差時間序列圖

觀察上圖，殘差整體無明顯趨勢，隨時間平均在0附近起伏。

b. 觀察直方圖，進行t-test檢測殘差平均是否為0

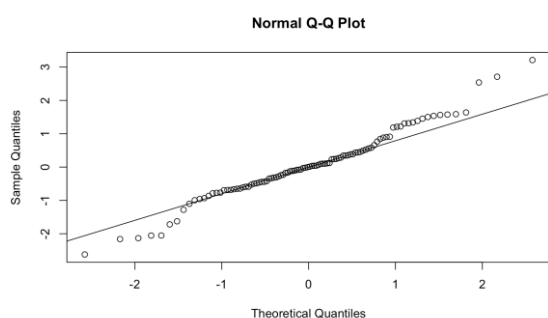


圖二十、殘差直方圖

t-test	AR(1) with AO, IO
Ho	殘差平均為0
p-value	0.5875
結論	不拒絕，殘差平均為0

表十二、AR(1) with AO, IO t-test 結果

c. 觀察Q-Q Plot，進行 Shapiro-Wilk test 檢測殘差是否為常態

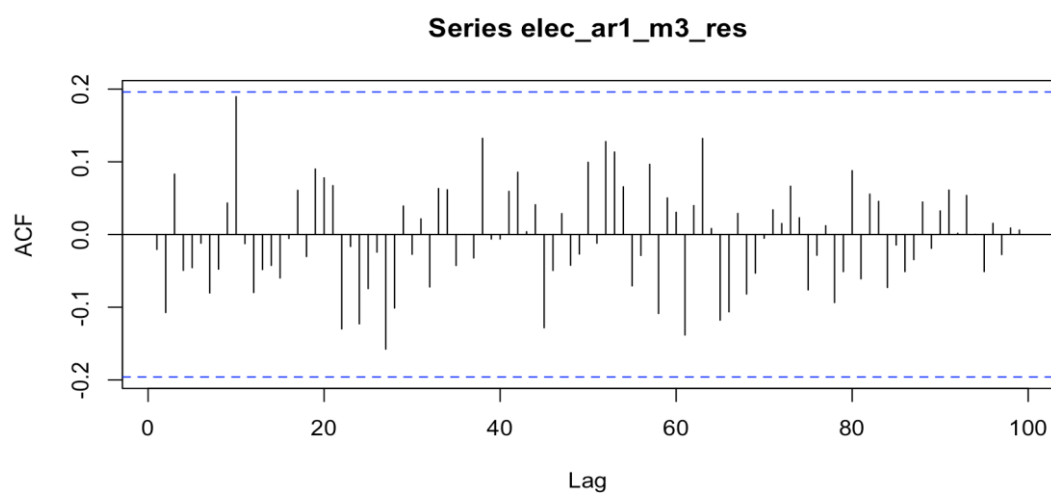


圖二十一、殘差QQ plot

Shapiro-Wilk test	AR(1) with AO, IO
Ho	殘差呈現常態分配
p-value	0.06023
結論	不拒絕，殘差呈現常態分配

表十三、Shapiro-Wilk test 結果

d. 觀察ACF圖，對顯著步數進行Ljung-Box test檢測殘差是否無序列相關



圖二十二、殘差ACF圖

觀察上圖(殘差ACF圖)，並無特定步數呈現顯著情形，表示此殘差項無自我相關。

5. 比較候選模型

將候選模型進行殘差檢定以及AIC的比較：

表十四、比較候選模型

模型	殘差檢定			AIC
	t-test	Shapiro-Walk test	ACF是否無關自 我相關 Lung Box test	
	p-value （通過:p>0.05）			
AR(1)	0.6642 (通過)	0.0595 (通過)	無 (通過)	317.3632
AR(1) with A0	0.6338 (通過)	0.04251 (不通過)	無 (通過)	307.4561
AR(1) with A0 and IO	0.5875 (通過)	0.06023 (通過)	無 (通過)	296.9157

6. 最終模型

配適 AR(1) with A0, I0 模型：

$$Y_t - \mu = \phi_I(Y_{t-1} - \mu) + e_t * + W_A P_t^{(58)}$$

$$e_t * = e_t + W_I P_t^{(5)}$$

表十五、配適 AR(1) with A0, I0 結果

AR(1)with A0、I0	ϕ_I	μ	W_I	W_A
估計值	0.8656	18.4385	3.8233	-2.9787
標準差	0.0568	0.7231	1.0516	0.7706
是否顯著	是	是	是	是

所有估計值顯著加減1.96倍標準誤皆不包含 0，以上係數都顯著，可得模型：

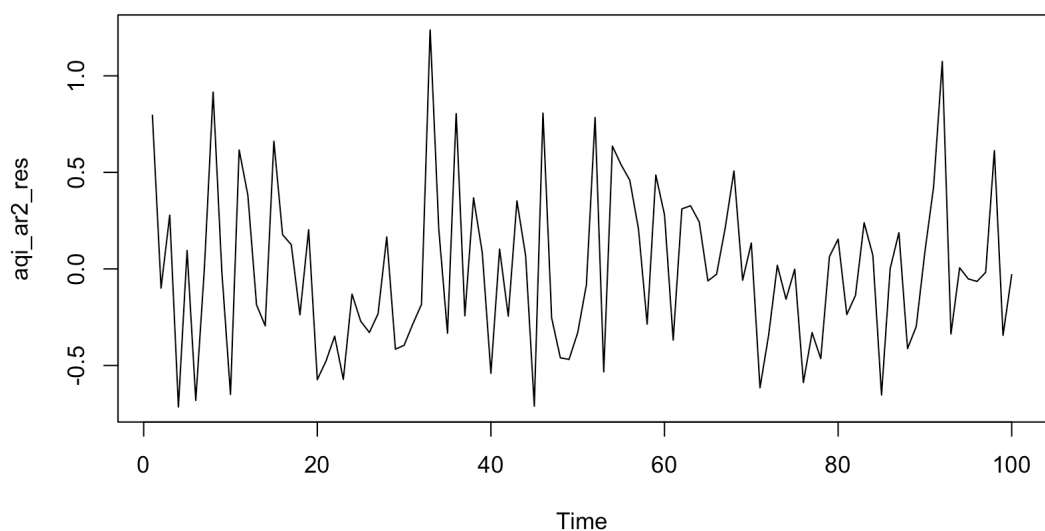
$$\Rightarrow Y_t * - 18.4385 = 0.8656(Y_{t-1} - 18.4385) + e_t * - 2.9787 P_t^{(58)}$$

$$e_t * = e_t + 3.8233 P_t^{(5)}$$

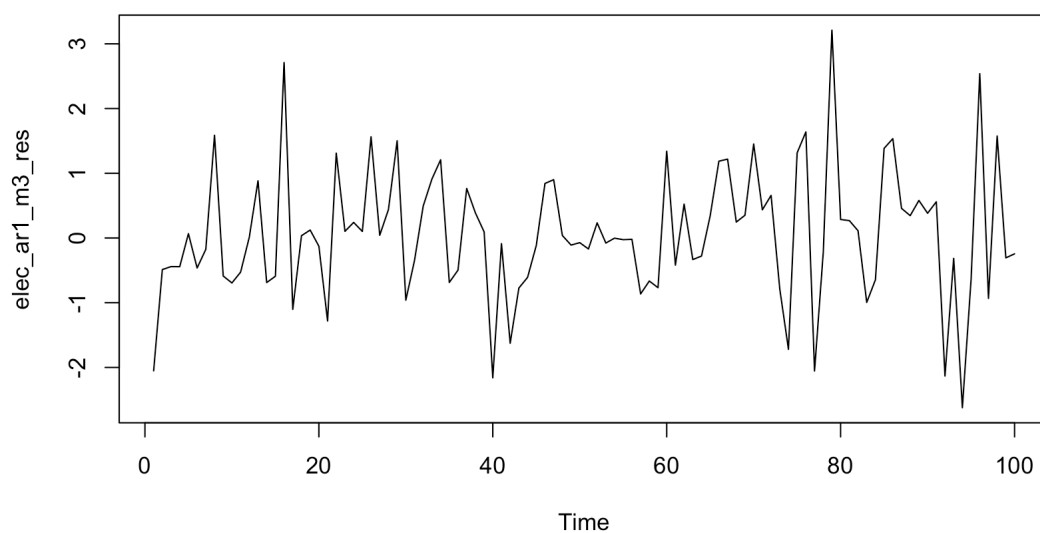
五、 相關性分析

承研究動機所言，我們想探討台中市空污情形是否受發電量多寡之影響，故將於此段落進行兩組時間序列資料之相關性分析。首先，再次將兩組最終模型之殘差時間序列圖繪製如下：

1. 兩模型殘差時間序列圖

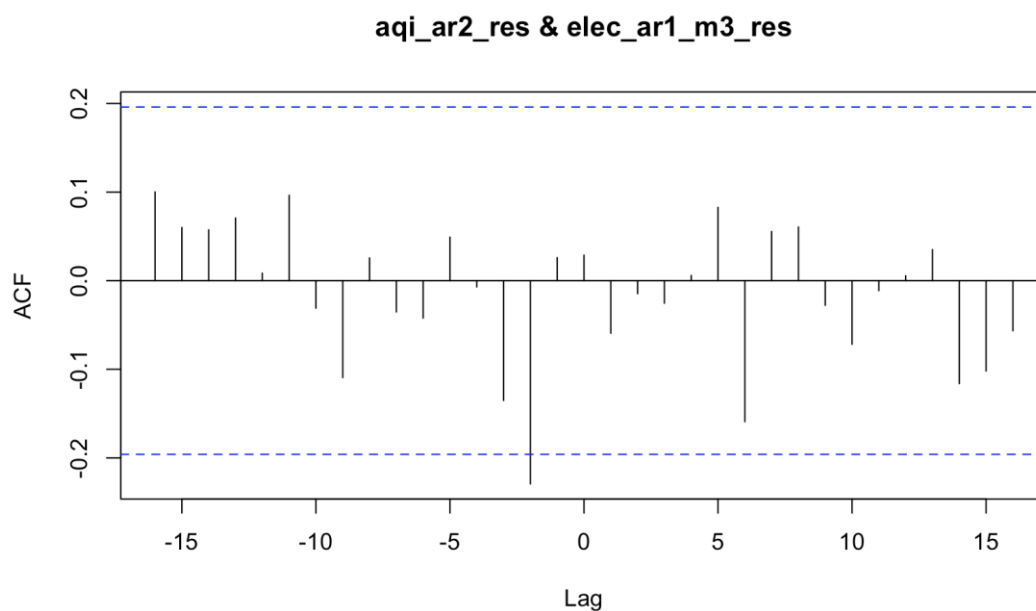


圖二十三、AQI配適AR(2)模型後之殘差時間序列圖



圖二十四、發電量配適AR(1) with A0 and I0模型後之殘差時間序列圖

2. 兩模型殘差 CCF 圖



圖二十五、兩模型殘差 CCF 圖

由上圖觀察，Lag= -2 顯著，因此，初步推測 AQI 影響發電量。

3. 估計候選模型參數

$$e_t^{(electricity)} = \beta_0 + \beta_1 e_{t-2}^{(AQI)} + \eta_t$$

表十六、配適結果

	估計值	標準差	t value	p-value	是否顯著
β_0	0.08111	0.09953	0.815	0.4171	否
β_1	-0.55858	0.23482	-2.379	0.0194	是

因 β_0 不顯著，故去除 β_0 參數，重新配適模型如下：

$$e_t^{(electricity)} = \beta_1 e_{t-2}^{(AQI)} + \eta_t$$

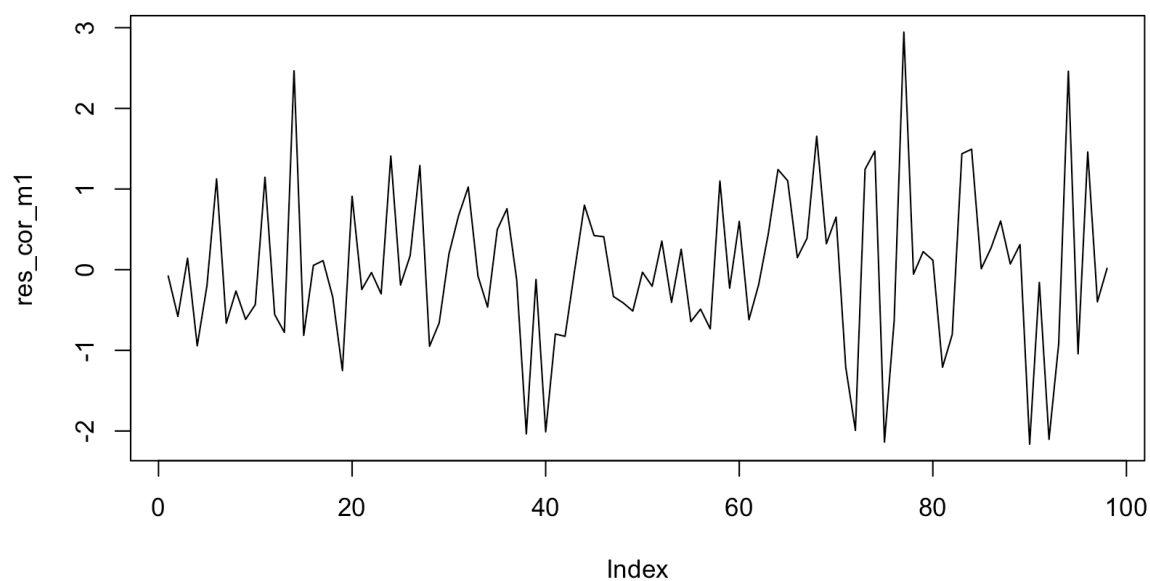
表十七、配適結果

	估計值	標準差	t value	p-value	是否顯著
β_1	-0.5599	0.2344	-2.388	0.0189	是

$$\Rightarrow e_t^{(electricity)} = -0.5599 e_{t-2}^{(AQI)} + \eta_t$$

4. 進行迴歸的殘差檢定

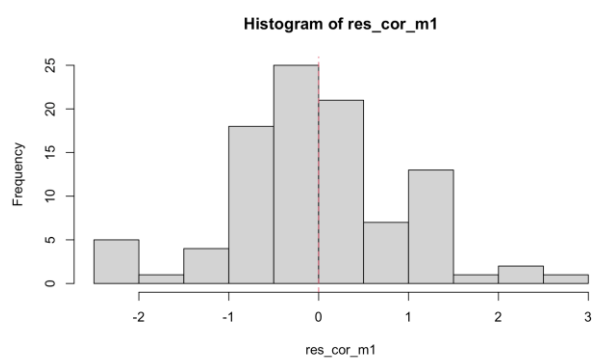
(1) 殘差時間序列圖



圖二十六、殘差時間序列圖

觀察上圖，殘差整體無明顯趨勢，隨時間平均在0附近起伏。

(2) 觀察直方圖，進行t-test檢測殘差平均是否為0

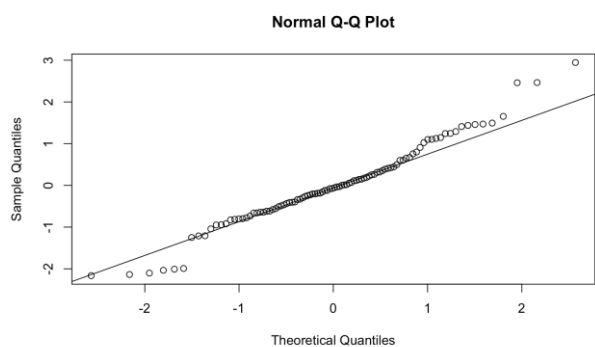


圖二十七、殘差直方圖

t-test	發電量~AQI 模型殘差迴歸
Ho	殘差平均為0
p-value	1
結論	不拒絕，殘差平均為0

表十八、AR(2) t-test 結果

(3)觀察Q-Q Plot，進行 Shapiro-Wilk test 檢測殘差是否為常態

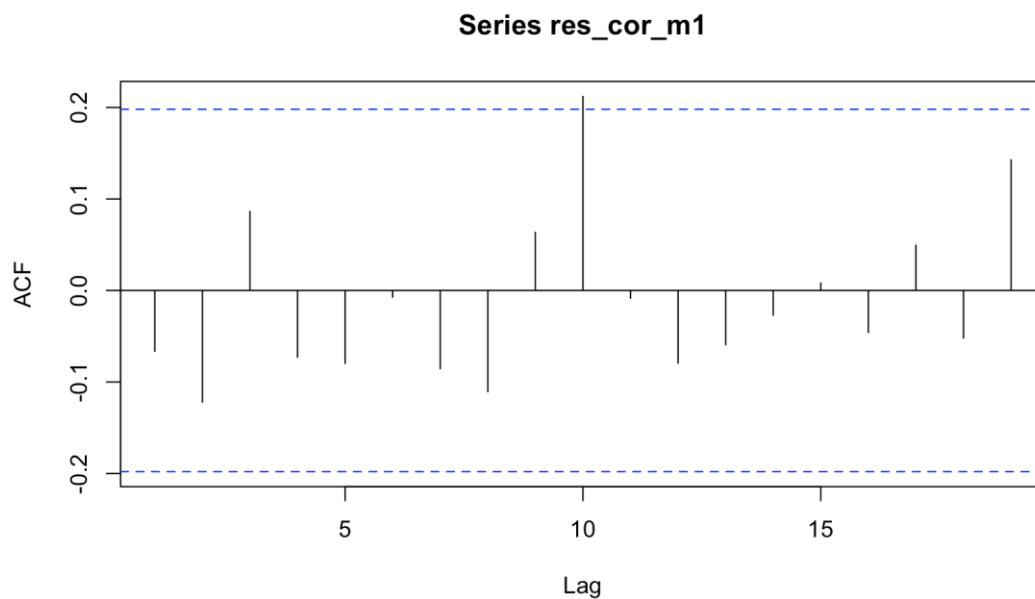


圖二十八、殘差QQ plot

Shapiro-Wilk test	發電量~AQI 模型殘差迴歸
Ho	殘差呈現常態分配
p-value	0.05177
結論	不拒絕，殘差呈現常態分配

表十九、Shapiro-Wilk test 結果

(4)觀察ACF圖，對顯著步數進行Ljung-Box test檢測殘差是否無序列相關



圖二十九、殘差ACF圖

觀察上圖(殘差ACF圖)，第10步顯著，進行Ljung-Box test，結果如下：
第10步 $p - value = 0.317 > \alpha = 0.05$ ，表示此殘差項無自我相關。

5. 最終模型

$$\Rightarrow e_t^{(electricity)} = \beta_1 e_{t-2}^{(AQI)} + \eta_t$$
$$e_t^{(electricity)} = -0.55858 e_{t-2}^{(AQI)} + \eta_t$$

AQI與發電量勉強有關，且兩資料呈現負相關。R-square 為0.05554，說明總變異被解釋的比例只有5%，偏低。

綜上所述，兩資料相差2步且呈現負相關，即在2週的時間，若空汙嚴重，兩週後的發電量低；空汙不嚴重，發電量較高。

六、結論

由此篇研究可以發現，空氣污染會影響發電量，並非我們研究前預期的「降低發電量即可改善空氣污染問題」，但因為R square (0.05554) 的解釋比例偏低，因此，我們推論，因為「忠明」觀測站位於市區，仍有許多其他因素會影響空氣品質（例如：汽機車排氣污染、冷氣排氣污、工業區排氣污染.....等等），有待未來做進一步探討。

七、參考資料

1. 環保署資料開放平台:<https://data.epa.gov.tw/>
2. 政府資料開放平台:<https://data.gov.tw/>
3. 風評：台中紫爆所以中火無關空污？談基本邏輯問題(風傳媒)<https://www.storm.mg/article/2153882>
4. 中火減煤七成 台中空汙為何仍拉警報？(今周刊)
<https://www.bustoday.com.tw/article/category/183027/post/202003180020/>

八、心得

我們小組剛好都是不擅長理論推導與考試的學生，對於期中考筆試感到不小的壓力，但是期中考後透過一次又一次的上機實作、實證資料欣賞，便能更清楚的把實務與理論結合，明白碰到什麼樣的圖形與檢定結果，會有何相對應的解釋，對於時間序列的學習效果提升許多！

而期末實際查找自己感興趣的資料進行分析，更是訓練我們將整學期課程統合的極佳課程設計，不再只是按照題目指示一步一步完成，而是對整份報告有清晰的架構，按照應有的次序進行分析來完善這個研究，受益良多！謝謝老師清晰又用心的教導。

九、加分題

Midterm Problem 4

Let $Y_t \sim \text{ARIMA}(1,1,1)$ model (no intercept) with coefficients ϕ and θ

(c) Evaluate the general form of the variance of l -steps forecast error.

$$(1 - \phi_B)(1 - B)Y_t = (1 - \theta_B)e_t$$

$$\text{let } w_t = (1-B)Y_t \Rightarrow (1-\phi B)w_t = (1-\theta B)e_t \Rightarrow w_t = \frac{1-\theta B}{1-\phi B} e_t$$

$$w_{t+1} = \frac{1-\theta_B}{1-\phi_B} e_{t+1} = \frac{1}{1-\phi_B} (1-\theta_B) e_{t+1}$$

$$= (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots)(1 - \theta B)e_{t+1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \phi^3 B^3 + \dots \\ -\theta B - \theta \phi B^2 - \theta \phi^2 B^3 - \dots \end{bmatrix} e_{t+1}$$

$$= [1 + (\phi - \theta)B + \phi(\phi - \theta)B^2 + \dots + \phi^{l-2}(\phi - \theta)B^{l-1} + \dots] e_{t+l}$$

$$\therefore W_t = (1-B)Y_t \quad \therefore W_{t+1} = (1-B)Y_{t+1}$$

$$\text{then } Y_{t+1} = \frac{1}{1-B} W_{t+1} = (1+B+B^2+\dots) W_{t+1}$$

$$= (1 + B + B^2 + \dots) [1 + (\phi - \theta)B + \phi(\phi - \theta)B^2 + \dots + \phi^{i-2}(\phi - \theta)B^{i-1} + \dots] e_{t+i}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + (\phi - \theta)B + \phi(\phi - \theta)B^2 + \phi^2(\phi - \theta)B^3 + \dots + \phi^{l-2}(\phi - \theta)B^{l-1} \\ + (\phi - \theta)B^2 + \phi(\phi - \theta)B^3 + \dots + \phi^{l-1}(\phi - \theta)B^{l-1} + \dots \\ + B^2 + (\phi - \theta)B^3 + \dots + \phi^l(\phi - \theta)B^{l-1} + \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ end}$$

$$= [1 + (1+\phi-\theta)B + (1+\phi-\theta+\phi(\theta-\theta))B^2 + (1+\phi-\theta+\phi(\theta-\theta)+\phi^2(\theta-\theta))B^3 + \dots + (1+\dots+\phi^i(\theta-\theta)+\phi^{i-1}(\theta-\theta)+\phi^{i-2}(\theta-\theta))B^{i+1} + \dots] e_{tn}$$

\Rightarrow 1-steps forecast error $e_t(1) = Y_{t+1} - \hat{Y}_t(1)$

$$= [1 + (1+\phi-\theta)B + (1+\phi-\theta+\phi(\phi-\theta))B^2 + (1+\phi-\theta+\phi(\phi-\theta)+\phi^2(\phi-\theta))B^3 + \dots + (1+\dots+\phi^l(\phi-\theta)+\phi^{l-1}(\phi-\theta)+\phi^{l-2}(\phi-\theta))B^{l-1}] e_{t+1}$$

$$= \{ 1 + [1 + (\phi - \theta)]B + [1 + (\phi - \theta)(1 + \phi)]B^2 + [1 + (\phi - \theta)(1 + \phi + \phi^2)]B^3 + \dots + [1 + (\phi - \theta)(1 + \phi + \dots + \phi^{l-1} + \phi^{l-2})]B^{l-1} \} e_{t+1}$$

$$= (1 + B + B^2 + \dots + B^{l-1}) e_{t+1} + (\phi - \theta) [1B + (1+\phi)B^2 + (1+\phi+\phi^2)B^3 + \dots + (1+\phi+\phi^2+\dots+\phi^{l-1}+\phi^{l-2})B^{l-1}] e_{t+1}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\theta_{N_2}(2)) = 2\sigma_e^2 + (\phi - \theta)^2 [1 + (1+\phi)^2 + \dots + (1+\phi+\phi^2 + \dots + \phi^{N_2-2})^2] \sigma_e^2$$

Midterm Problem 4

Let $Y_t \sim \text{ARIMA}(1,1,1)$ model (no intercept) with coefficients ϕ and θ

(c) Evaluate the general form of the variance of l -steps forecast error.

$$(1-\phi B)(1-B)Y_t = (1-\theta B)e_t$$

$$\text{let } W_t = (1-B)Y_t \Rightarrow (1-\phi B)W_t = (1-\theta B)e_t \Rightarrow W_t = \frac{1-\theta B}{1-\phi B} e_t$$

$$W_{t+l} = \frac{1-\theta B}{1-\phi B} e_{t+l} = \frac{1}{1-\phi B} (1-\theta B)e_{t+l}$$

$$= (1+\phi B+\phi^2 B^2+\dots)(1-\theta B)e_{t+l}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\phi B+\phi^2 B^2+\phi^3 B^3+\dots \\ -\theta B-\theta\phi B^2-\theta\phi^2 B^3-\dots \end{bmatrix} e_{t+l}$$

$$= [1+(\phi-\theta)B+\phi(\phi-\theta)B^2+\dots+\phi^{l-2}(\phi-\theta)B^{l-1}+\dots] e_{t+l}$$

$$\therefore W_t = (1-B)Y_t \therefore W_{t+l} = (1-B)Y_{t+l}$$

$$\text{then } Y_{t+l} = \frac{1}{1-B} W_{t+l} = (1+B+B^2+\dots)W_{t+l}$$

$$= (1+B+B^2+\dots)[1+(\phi-\theta)B+\phi(\phi-\theta)B^2+\dots+\phi^{l-2}(\phi-\theta)B^{l-1}+\dots] e_{t+l}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(\phi-\theta)B+\phi(\phi-\theta)B^2+\phi^2(\phi-\theta)B^3+\dots+\phi^{l-2}(\phi-\theta)B^{l-1} \\ + B+(\phi-\theta)B^2+\phi(\phi-\theta)B^3+\dots+\phi^{l-1}(\phi-\theta)B^{l-1}+\dots \\ + B^2+(\phi-\theta)B^3+\dots+\phi^l(\phi-\theta)B^{l-1}+\dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{bmatrix} e_{t+l}$$

$$= [1+(1+\phi-\theta)B+(1+\phi-\theta+\phi(\phi-\theta))B^2+(1+\phi-\theta+\phi(\phi-\theta)+\phi^2(\phi-\theta))B^3 \\ +\dots+(1+\dots+\phi^l(\phi-\theta)+\phi^{l-1}(\phi-\theta)+\phi^{l-2}(\phi-\theta))B^{l-1}+\dots] e_{t+l}$$

$$\Rightarrow l\text{-steps forecast error } e_{Y_t}(l) = Y_{t+l} - \hat{Y}_t(l)$$

$$= [1+(1+\phi-\theta)B+(1+\phi-\theta+\phi(\phi-\theta))B^2+(1+\phi-\theta+\phi(\phi-\theta)+\phi^2(\phi-\theta))B^3 \\ +\dots+(1+\dots+\phi^l(\phi-\theta)+\phi^{l-1}(\phi-\theta)+\phi^{l-2}(\phi-\theta))B^{l-1}] e_{t+l}$$

$$= \{ 1+[1+(\phi-\theta)]B+[1+(\phi-\theta)(1+\phi)]B^2+[1+(\phi-\theta)(1+\phi+\phi^2)]B^3 \\ +\dots+[1+(\phi-\theta)(1+\phi+\dots+\phi^{l-1}+\phi^{l-2})]B^{l-1} \} e_{t+l}$$

$$= (1+B+B^2+\dots+B^{l-1})e_{t+l} \\ + (\phi-\theta)[1B+(1+\phi)B^2+(1+\phi+\phi^2)B^3+\dots+(1+\phi+\phi^2+\dots+\phi^{l-1}+\phi^{l-2})B^{l-1}] e_{t+l}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(e_{Y_t}(l)) = l\sigma_e^2 + (\phi-\theta)^2 [1+(1+\phi)^2+\dots+(1+\phi+\phi^2+\dots+\phi^{l-2})^2] \sigma_e^2 \neq$$