

Análisis de SLIDs con MATLAB

I. Brittez, J. Gómez Tantarelli

Análisis de sistemas y señales

Facultad de Ingeniería, UNLP, La Plata, Argentina.

Resumen—A continuación, se presentará el análisis realizado a diversas señales en el marco de la realización de la Práctica Utilitaria número 1 de la Cátedra de Análisis de Sistemas y Señales de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata.

I. INTRODUCCIÓN

El presente informe pretende interiorizarse en el estudio de ciertos sistemas lineales e invariantes en el desplazamiento (SLIDs) y su efecto, en el dominio del tiempo y de la frecuencia, de su respectiva señal de entrada.

En la primera parte estudiaremos en profundidad cuatro sistemas particulares, especificando las herramientas matemáticas utilizadas y la información que éstas nos brindan.

Por último, en la segunda parte, analizaremos el efecto de un sistema sobre una señal de audio y el diseño de un SLID como filtro.

II. MARCO TEÓRICO

II-A. Señales y sistemas

Matemáticamente podemos pensar a las señales como funciones de variable independiente, que pueden representar la evolución de cualquier fenómeno físico. Por otro lado los sistemas responden a señales produciendo otras.

Las señales pueden definirse en tiempo continuo o discreto dependiendo el fenómeno a representar, adoptamos la convención de representar a las señales continuas con variable independiente 't' (tiempo) encerrada entre paréntesis $x(t)$ y a las discretas con variable independiente 'n' (instante) entre corchetes $x[n]$.

II-B. SLID:

Los sistemas pueden contar con diversas propiedades, en este trabajo nos concentraremos en los SLID, es decir los sistemas lineales e invariantes al desplazamiento (o tiempo SLIT, en variable continua).

II-B.1. Invariancia al desplazamiento: Decimos que un sistema es invariante al desplazamiento (I.D.) si un corrimiento temporal en la señal de entrada ocasiona uno de igual magnitud en la de salida. Sean x_1, y_1, x_2, y_2 señales de entrada y salida de un sistema S_1 tal que:

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] \quad (1)$$

$$x_2[n] = x_1[n - n_0] \rightarrow y_2[n] \quad (2)$$

$$S_1 \text{ es I.D.} \iff y_2[n] = y_1[n - n_0] \quad (3)$$

II-B.2. Linealidad: Para que un sistema pueda ser llamado lineal debe satisfacer las propiedades de homogeneidad y aditividad, es decir:

- Sean $x_1[n] \rightarrow y_1[n], x_2[n] = a \cdot x_1[n]$, con $a \in \mathbb{R}$ decimos que el sistema es homogéneo si se cumple:

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = a \cdot y_1[n] \quad (4)$$

- Sea $x_1[n] \rightarrow y_1[n], x_2[n] \rightarrow y_2[n], x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$, llamamos sistema aditivo si se cumple:

$$x_3[n] \rightarrow y_3[n] = y_1[n] + y_2[n] \quad (5)$$

II-C. Respuesta impulsional

La respuesta al impulso es una característica fundamental de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Representa la forma en que el sistema responde a estímulos instantáneos y nos brinda información sobre su comportamiento general. Matemáticamente, representamos la respuesta al impulso de un SLIT como $h(t)$, y obtenemos su expresión evaluando la ecuación del sistema con una función delta. Una vez obtenida, podemos calcular la salida de cualquier señal convolucionando la entrada con la respuesta al impulso del sistema.

Sea $x[n]$ nuestra señal de entrada, S nuestro sistema a analizar, e $y[n] = S\{x(\cdot)\}[n]$ la salida, definimos:

$$h[n] = S\{\delta(\cdot)\}[n] \quad (6)$$

$$y[n] = S\{x(\cdot)\}[n] = \{x * h\}[n] \quad (7)$$

II-D. Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de un sistema $H(f)$ es el resultado de transformar la respuesta impulsional al dominio de la frecuencia mediante una transformada de Fourier. Ésta nos da una descripción de cómo el sistema amplifica o atenúa diferentes componentes de frecuencia de una señal de entrada; puede ser real o compleja por lo que usualmente se analiza el módulo y la fase de la misma para visualizar el efecto del sistema sobre las señales. Se puede demostrar que al transformar una convolución entre dos señales se obtiene el producto de las transformadas en frecuencia, esto permite definir fácilmente la salida a cualquier sistema en términos de frecuencia.

Sean $x(t), y(t), h(t)$ la señal de entrada, salida y respuesta impulsional de un sistema respectivamente y $X(f), Y(f), H(f)$, sus pares transformados por Fourier, reemplazando en la ecuación (7):

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad (8)$$

III. RESPUESTA A SLID

En esta sección, nos centraremos en el análisis de una señal discreta de entrada y exploraremos el comportamiento y la respuesta de cuatro sistemas lineales invariantes al desplazamiento.

III-A. Señal de entrada

Mediante la función conocida *senal.m*, definimos nuestra señal de entrada graficada a continuación:

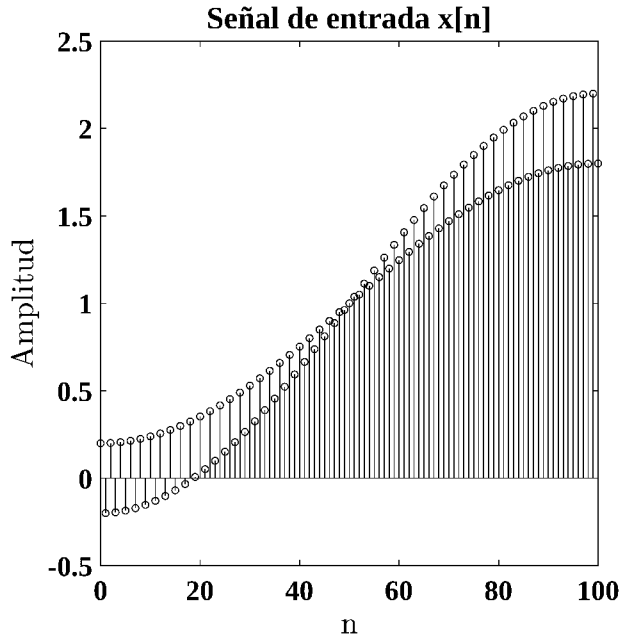


Fig. 1. Señal de entrada generada por la función *senal.m*

Obtuvimos una función creciente con una forma acampanada similar a la de un seno en el primer cuarto de su período. Se puede observar una oscilación superpuesta a la tendencia creciente, la cual se acentúa en los extremos de la gráfica. En el centro, esta oscilación tiene una amplitud prácticamente nula.

Posteriormente, realizamos la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) de la señal con el objetivo de identificar las componentes de frecuencia presentes en nuestra función de entrada. La parte real de la transformada presenta una forma similar a la de una función *sinc*. Inspeccionando el modulo, se aprecia un contenido notable de baja frecuencia y pequeñas perturbaciones de alta frecuencia. Estas últimas podrían estar asociadas a la oscilación superpuesta. Ver Figura 1.

A continuación, se muestra la gráfica de la TFTD de la señal de entrada:

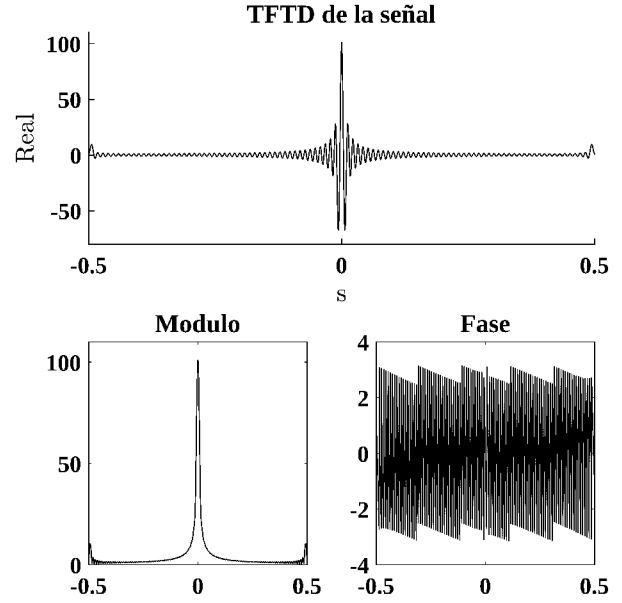


Fig. 2. TFTD de la señal de entrada, modulo y fase.

III-B. Estudio de sistemas

Es importante saber qué tratamiento se le hace los sistemas para poder analizarlos en profundidad. Debido a que el tratamiento es el mismo para todos los sistemas, a continuación se explican los pasos seguidos y luego se presentarán las particularidades y resultados obtenidos para cada SLID analizado.

Cabe aclarar que en los siguientes cuatro sistemas, se utiliza la misma señal de entrada, $x[n]$, ya presentada.

1. Partimos de la ecuación en diferencias de cada uno de los i -ésimos SLIDs.
2. Analíticamente obtenemos la respuesta impulsional del sistema S_i , $h_i[n]$ como se detalla en la ecuación (6).
3. Calculamos la respuesta en frecuencia del sistema $H_i(e^{j2\pi \cdot s})$ siguiendo un razonamiento similar al de la sección II-D con las particularidades del tiempo discreto.
4. Evaluamos al sistema con la señal de entrada $x[n]$ para obtener la señal de salida $y_i[n]$.
5. Calculamos la TFTD de la señal de salida, $Y_i(e^{j2\pi \cdot s})$.
6. Finalmente en *MATLAB*, diseñamos las siguientes funciones para verificar los resultados analíticos de forma numérica:

- a) Una función que representa la ecuación en diferencias del sistema, que al evaluarla con una función $\delta[n]$ nos proporciona la respuesta impulsional. Al hacerlo con la función $x[n]$, obtenemos la respuesta $y_i[n]$.
- b) Una función que permite calcular la TFTD de una señal (ver anexo I-A).

Una vez obtenida toda la información de los sistemas, procedemos a graficar y a analizar cada caso puntualmente.

III-B.1. Sistema 1: El primer sistema a analizar se encuentra definido por la siguiente ecuación:

$$y_1[n] = \frac{1}{2} \cdot x[n] + \frac{1}{2} \cdot x[n-1] \quad (9)$$

En primer lugar evaluamos el sistema con la señal de entrada y la graficamos como se puede observar en la Fig.3. Este sistema se encarga de filtrar la oscilación superpuesta de $x[n]$. Su salida cuenta con dos valores atípicos (en relación a la tendencia creciente) en los instantes inicial y final.

La señal de entrada toma valores para los primeros 100 enteros, en cambio la respuesta queda definida en 101 instantes debido a la componente de desplazamiento del filtro. No toma mas valores dado que la respuesta impulsional es finita (FIR).

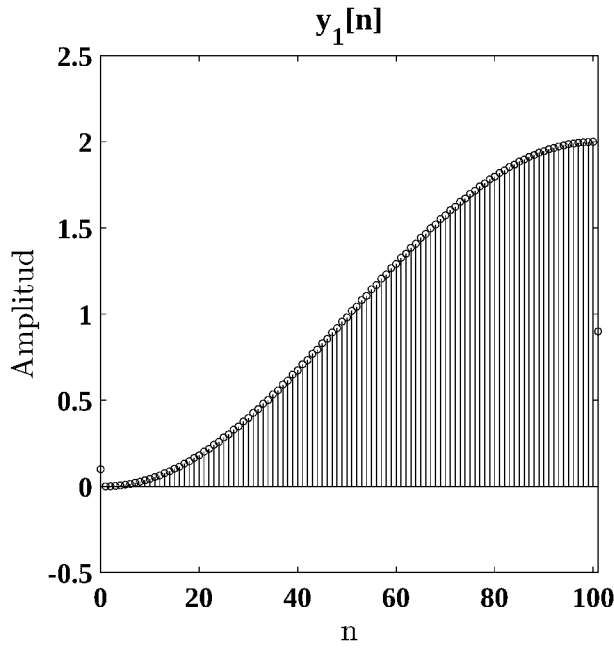


Fig. 3. Respuesta del sistema S_1 a la señal de entrada $x[n]$

Luego retomamos el análisis detallado en la sección II-D obteniendo las siguientes expresiones:

$$h_1[n] = \frac{1}{2} \cdot \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-1] \quad (10)$$

$$H_1(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{-j2\pi s}) \quad (11)$$

$$Y_1(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi s}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{-j2\pi s}) \quad (12)$$

En la Fig.4, podemos observar la respuesta impulsional del sistema, se identifican dos impulsos de amplitud $\frac{1}{2}$ en los primeros dos valores de la variable independiente n . Este sistema suma dos copias de la señal de entrada desplazándola en una unidad y atenuando por un factor de un medio cada copia, contrarrestando las oscilaciones superpuestas en la tendencia creciente de la señal de entrada.

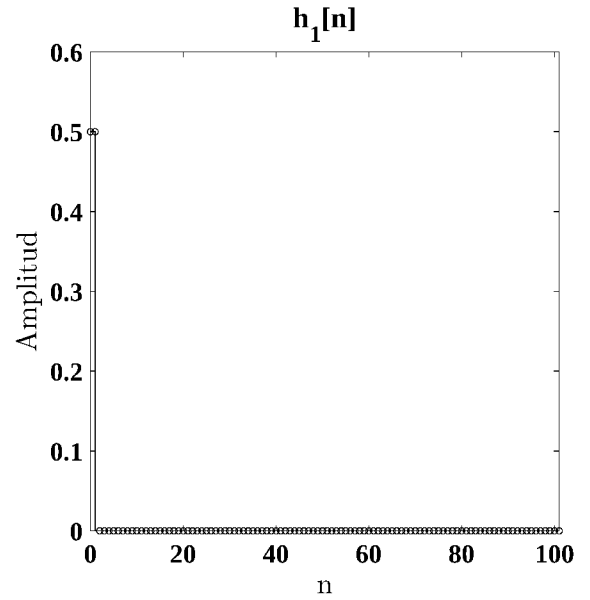


Fig. 4. Respuesta impulsional $h_1[n]$ del sistema S_1

Al analizar la respuesta en frecuencia del sistema, podemos ver que se comporta como un pasa-bajos, sin embargo posee una tolerancia a las frecuencias medias destacable. Con lo analizado es de esperar que la señal procesada pierda las pequeñas perturbaciones de alta frecuencia que posea, esto se puede verificar analizando la Fig.6

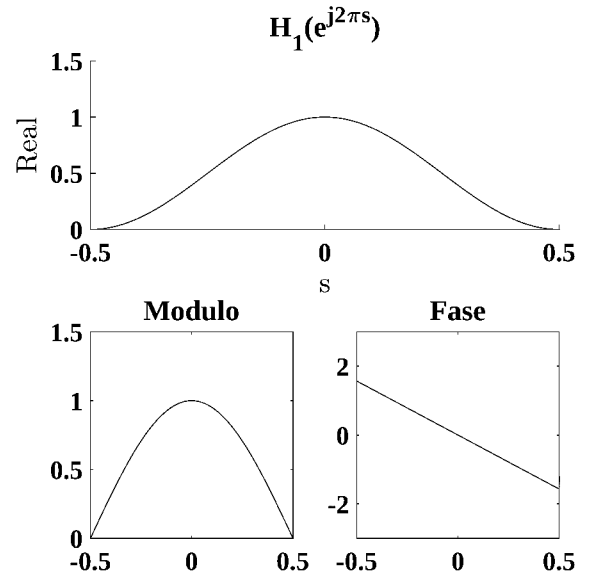


Fig. 5. TFTD de la respuesta impulsional del S_1 .

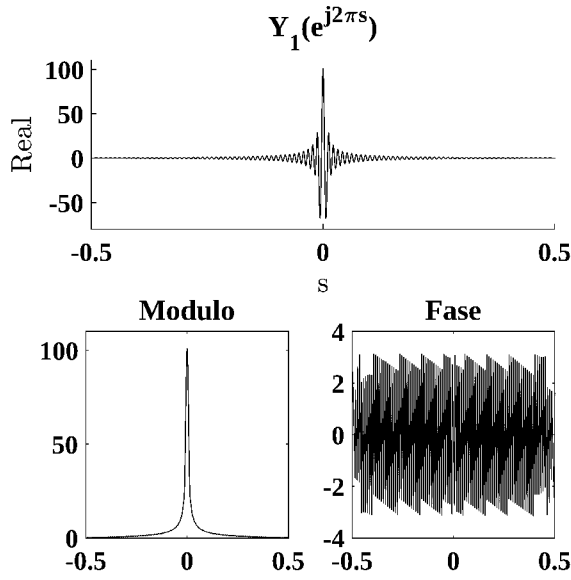


Fig. 6. TFTD de la señal de salida $y_1[n]$

III-B.2. Sistema 2: Este sistema esta definido matemáticamente de la siguiente forma:

$$y_2[n] = \frac{1}{2} \cdot x[n] - \frac{1}{2} \cdot x[n-1] \quad (13)$$

Por lo tanto, su respuesta impulsional y la transformada de ésta son:

$$h_2[n] = \frac{1}{2} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n-1] \quad (14)$$

$$H_2(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-j2\pi s}) \quad (15)$$

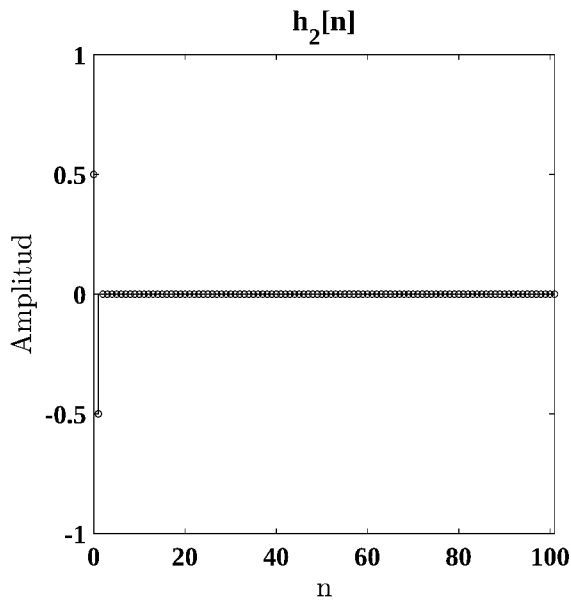


Fig. 7. Respuesta impulsional $h_2[n]$

La salida de este sistema, gráficamente, puede verse en la Figura 8.

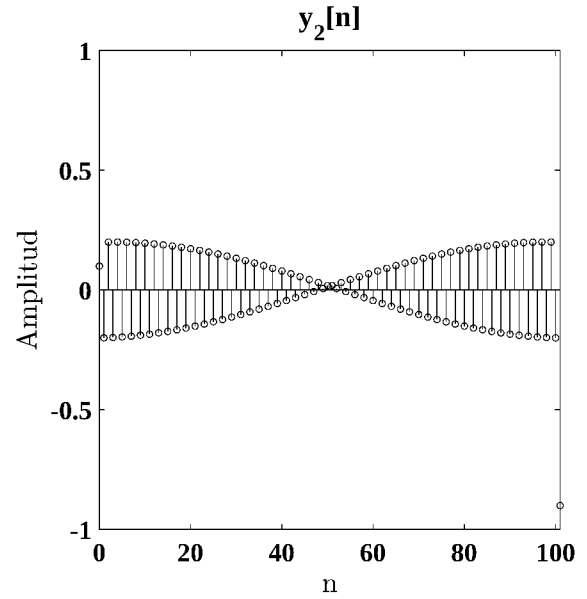


Fig. 8. Salida del sistema 2

El signo opuesto de las deltas en $h_2[n]$ consigue que los valores centrales de $y_2[n]$ se atenúen notoriamente. Esto se debe a que en este rango $x[n]$ no varía tanto en amplitud, en comparación con los instantes de los extremos de la Figura.

La salida del sistema no es más que la mitad de la diferencia entre la señal de entrada y la señal de entrada desplazada en una unidad.

Analizamos la TFTD de la respuesta impulsional ($H_2(e^{j2\pi s})$):

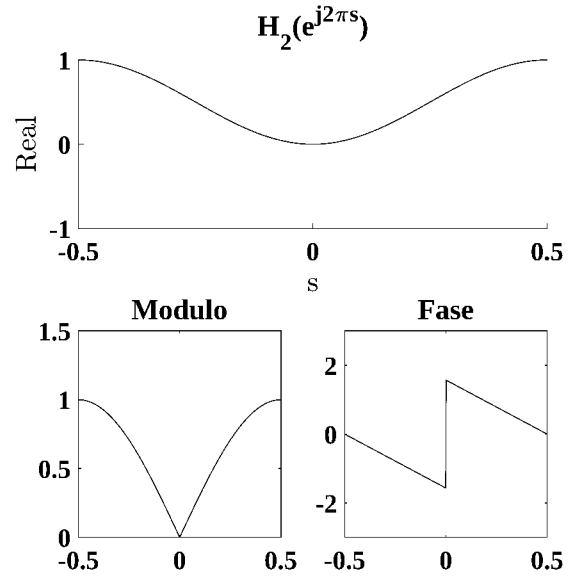


Fig. 9. TFTD de $h_2[n]$

Es evidente su comportamiento como filtro pasa-altos. Al

igual que en el sistema anterior, esta función no presenta cambios bruscos de tendencia.

El efecto que tendrá en la TFTD de la salida será conservar las frecuencias más altas y atenuar progresivamente las más bajas. Recordando la Figura 2, el modulo de $X(e^{j \cdot 2\pi \cdot s})$ toma sus valores máximos en frecuencias cercanas a cero. Podemos inferir que la señal de salida transformada que obtendremos con este sistema, será de baja amplitud (en comparación con $X(e^{j \cdot 2\pi \cdot s})$); obteniendo sus valores máximos en las frecuencias mayores.

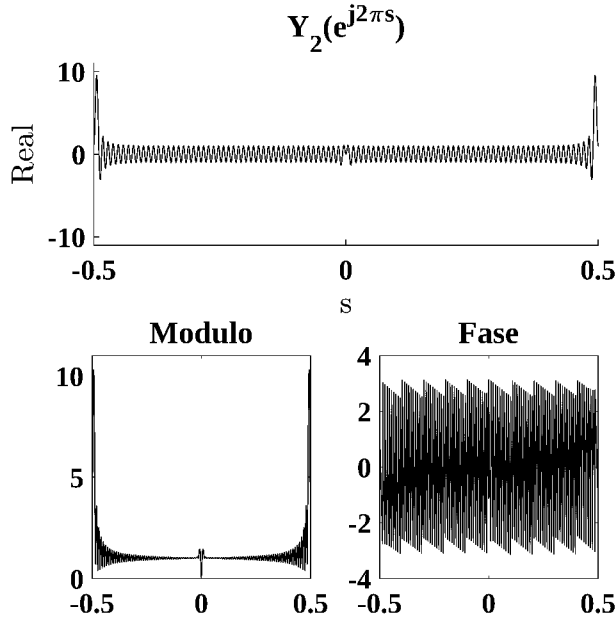


Fig. 10. Señal de salida de S_2 transformada, $Y_2(e^{j2\pi s})$.

Esta figura permite apreciar de mejor manera los picos de alta frecuencia, analizados en la Figura 2 (y filtrados en S_1).

III-B.3. Sistema 3: El sistema S_3 a diferencia de los dos anteriores es un sistema con respuesta impulsional infinita. Matemáticamente está definido por:

$$y_3[n] = \frac{1}{4} \cdot x[n] + \frac{1}{4} \cdot x[n-1] + \frac{1}{2} \cdot y_3[n-1] \quad (16)$$

Aseguramos que la respuesta imupulsional es infinita dado que la señal de salida queda definida por si misma desplazada. Al evaluar con un impulso unitario obtenemos:

$$h_3[n] = \frac{1}{4} \cdot \delta[n] + \frac{1}{4} \cdot \delta[n-1] + \frac{1}{2} \cdot h_3[n-1] \quad (17)$$

Para encontrar una expresión de $h_3[n]$ que no involucre una replica desplazada, evaluamos la expresión punto a punto. Teniendo en cuenta que la Delta de Kronecker toma un único valor no nulo en $n = 0$, podemos asegurar que $h[n] = 0, \forall n < 0$:

$$\begin{aligned} h_3[0] &= \frac{1}{4} \cdot \delta[0] + \frac{1}{4} \cdot \delta[-1] + \frac{1}{2} \cdot h_3[-1] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \delta[0] = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} h_3[1] &= \frac{1}{4} \cdot \delta[1] + \frac{1}{4} \cdot \delta[0] + \frac{1}{2} \cdot h_3[0] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \delta[0] + \frac{1}{2} \cdot h_3[0] \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} h_3[2] &= \frac{1}{4} \cdot \delta[2] + \frac{1}{4} \cdot \delta[1] + \frac{1}{2} \cdot h_3[1] \\ &= \frac{1}{2} \cdot h_3[1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} \end{aligned} \quad (20)$$

$$h_3[3] = \frac{1}{2} \cdot h_3[2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{16} \quad (21)$$

$$h_3[n] = \frac{1}{4} \cdot \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{16} \cdot u[n-1] \quad (22)$$

Al transformar analíticamente la respuesta impulsional conseguimos la expresión:

$$H_3(e^{j2\pi s}) = \frac{\frac{1}{4} \cdot (1 + e^{-j2\pi s})}{1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\pi s}} \quad (23)$$

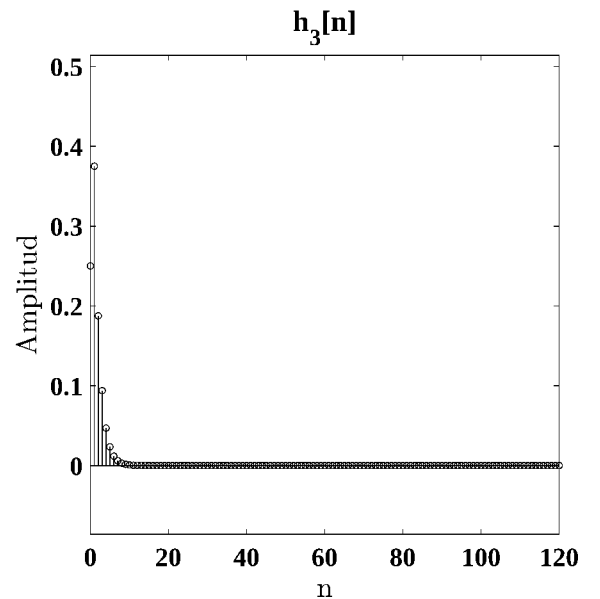


Fig. 11. Respuesta impulsional del sistema 3 (IIR).

El hecho de que el sistema sea de respuesta impulsional infinita (IIR) y nuestra señal de entrada este definida en los primeros 100 enteros positivos, implica que la señal de salida tomará valores para los infinitos enteros positivos. Es por esto que a diferencia de los sistemas S_1 y S_2 , graficamos la función extendiéndonos en el eje n hasta el punto en el que

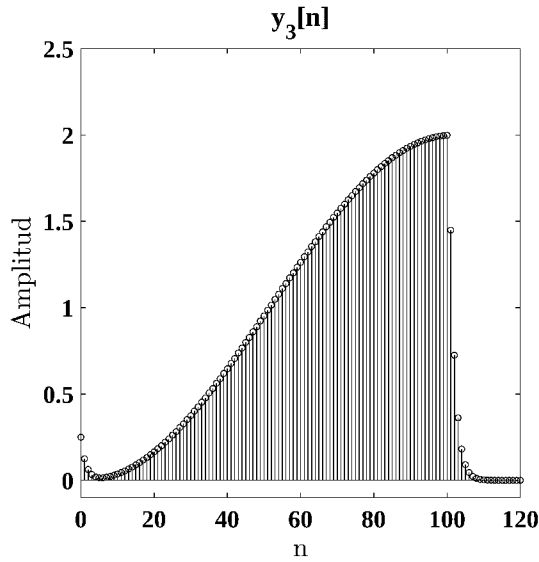


Fig. 12. Respuesta al sistema S_3

la variación sea despreciable. Para $n = 120$, los valores de la señal se encuentran en el orden de 10^{-5} .

En la Fig.11 podemos observar la gráfica de la respuesta impulsional del S_3 . Y en la Fig.12 la señal procesada por el sistema. El efecto de la IIR se ve inmediatamente, ahora nuestra señal desciende hasta el cero en lugar de cortarse de manera abrupta, luego el adelanto positivo de x en la ecuación en diferencias realiza un filtrado de la oscilación similar a lo visto en el S_1 .

Es por esto que en las figuras Fig.13 y Fig.14 no debería sorprendernos la similitud con el S_1 en las transformadas $Y_3(e^{j2\pi s})$ y $H_3(e^{j2\pi s})$ exceptuando por el descenso suavizado en el final producido por el sistema IIR. Nuevamente se filtran las frecuencias altas y se arriba a conclusiones similares con el modulo y parte real de $Y_1(e^{j2\pi s})$.

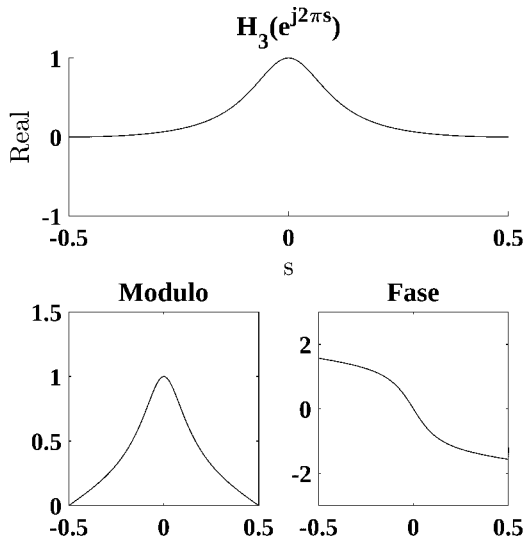


Fig. 13. Grafica de la respuesta en frecuencia del sistema S_3

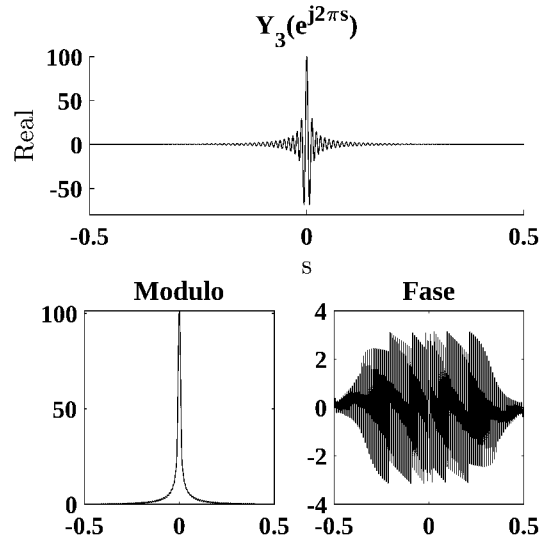


Fig. 14. TFTD de la señal x procesada por el sistema S_3

III-B.4. Sistema 4: Se define a S_4 mediante la siguiente ecuación:

$$y_4[n] = \frac{1}{4} \cdot x[n] - \frac{1}{4} \cdot x[n-1] - \frac{1}{2} \cdot y_4[n-1] \quad (24)$$

Nuevamente, debido a la recursividad de la función, estamos en presencia de una IIR. Utilizando el mismo razonamiento que en S_3 , obtenemos y graficamos $h_4[n]$ y $H_4(e^{j2\pi s})$.

$$h_4[n] = \frac{1}{4} \cdot \delta[n] + (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{8} \cdot u[n-1] \quad (25)$$

$$H_4(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{8} \cdot (e^{-j2\pi(s-\frac{1}{2})})}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\pi(s-\frac{1}{2})}} \quad (26)$$

Tanto matemáticamente como gráficamente se aprecia la

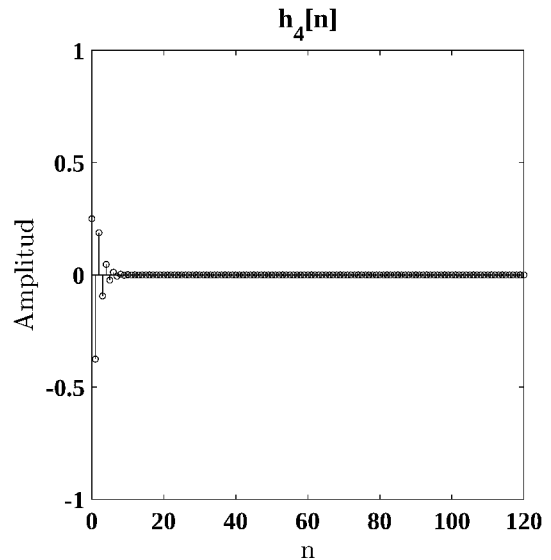


Fig. 15. Respuesta impulsional infinita $h_4[n]$, evaluada en 120 valores.

disminución en amplitud de la señal a mayores valores de

n (a excepción de $n = 2$, en el que se cumple que $h_4[1] < h_4[2]$). También es notable la alternancia en signo.

La salida que genera S_4 es:

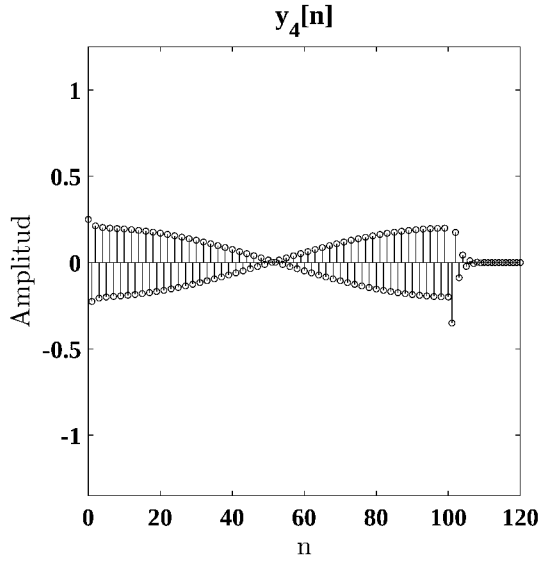


Fig. 16. $y_4[n]$ evaluada en 120 valores.

A excepción de los últimos veinte valores de $y_4[n]$, la función es muy similar a la obtenida con S_2 . Consecuentemente, podemos pensar que su respuesta en frecuencia también será similar a $Y_2(e^{j2\pi s})$. La situación es análoga a la estudiada entre S_1 y S_3 .

Para corroborar esto, analizamos $H_4(e^{j2\pi s})$ en la Figura 17.

En relación a los valores de $n > 101$, las señales $x[n]$ y $x[n-1]$ no toman valores; por lo tanto, la amplitud de $y_4[n]$ decrece progresivamente (aún alternando en signo).

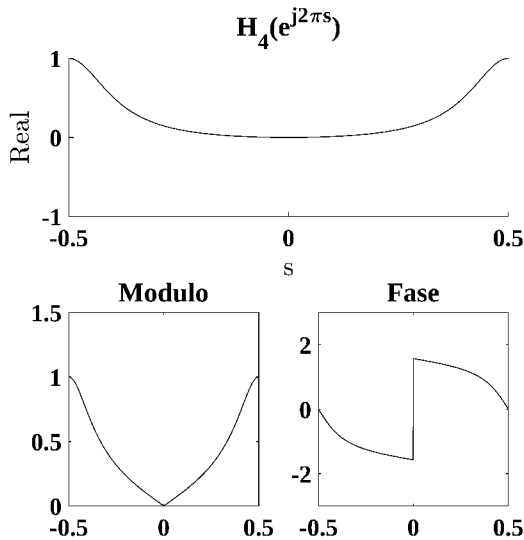


Fig. 17. TFTD de $h_4[n]$ (evaluada en 120 valores).

Al igual que en S_2 la respuesta impulsional en frecuencia es un filtro pasa-altos y, lógicamente, $Y_4(e^{j2\pi s})$ también

se asemejará a $Y_2(e^{j2\pi s})$. Sin embargo, se observa que el módulo de $H_4(e^{j2\pi s})$ aumenta más pronunciadamente para frecuencias altas, en comparación con $H_2(e^{j2\pi s})$, que lo hace más gradualmente. Esto significa que S_4 es un mejor pasa-altos que S_2 , ya que atenúa más a los valores de frecuencias medias.

Otra forma equivalente de analizarlo es observando a la fase de $H_4(e^{j2\pi s})$. Considerando que el gráfico se encuentra en el eje *Real* sabemos que se cumple:

$$\text{Re} \{ e^{j2\pi s} \} = \cos(2\pi s) \quad (27)$$

Comparando la fase de $H_4(e^{j2\pi s})$ con la de $H_2(e^{j2\pi s})$ en las Figuras 9 y 17, respectivamente, se aprecia la suavidad con la que evoluciona la de S_4 . Esta evolución gradual se traduce en amplitudes menores de $H_4(e^{j2\pi s})$ para frecuencias medias.

Es decir, la evolución constante que tiene la fase de $H_2(e^{j2\pi s})$ significa una evolución gradual en $H_2(e^{j2\pi s})$ y, por el contrario, la evolución gradual de la fase en $H_4(e^{j2\pi s})$ repercute como un cambio de amplitud más abrupto de $H_4(e^{j2\pi s})$ para las frecuencias que tienden a $s = \pm 0.5$. Por ende, concluimos que $H_4(e^{j2\pi s})$ es un filtro pasa-altos más preciso.

Puede realizarse un análisis análogo para el S_1 y S_3 en donde también se observa una evolución de la fase más gradual en la transformada de la respuesta impulsional del sistema recursivo ($H_3(e^{j2\pi s})$) en comparación con $H_1(e^{j2\pi s})$. De igual manera, el filtro pasa-bajos es más eficaz debido al cambio más abrupto en el módulo de $H_3(e^{j2\pi s})$ para frecuencias bajas.

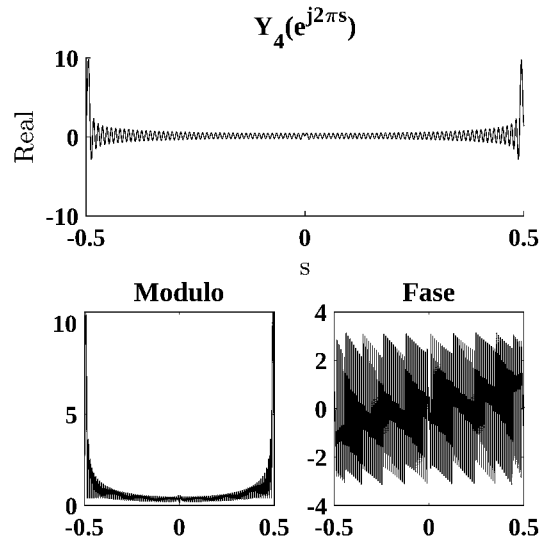


Fig. 18. TTFD de $y_4[n]$.

La Figura 18 muestra un resultado consistente con lo analizado. En ella se puede notar la amplitud menor que toman las frecuencias bajas y medias en relación a las de $Y_2(e^{j2\pi s})$ (comparar con Figura 10).

IV. ANÁLISIS DE AUDIO

En la siguiente sección, estudiaremos la salida de audio de un sistema particular. Mediante el análisis de la respuesta impulsional y el audio proporcionado, podremos deducir la ecuación en diferencias que define dicho sistema, así como obtener la salida de audio asociada a éste. Por último estudiaremos el filtrado realizado sobre el audio y el razonamiento detrás del diseño del mismo.

IV-A. Estudio del audio

A partir de la función `'hcanald.m'` obtenemos la respuesta impulsional del sistema que le será aplicada a la señal de audio.

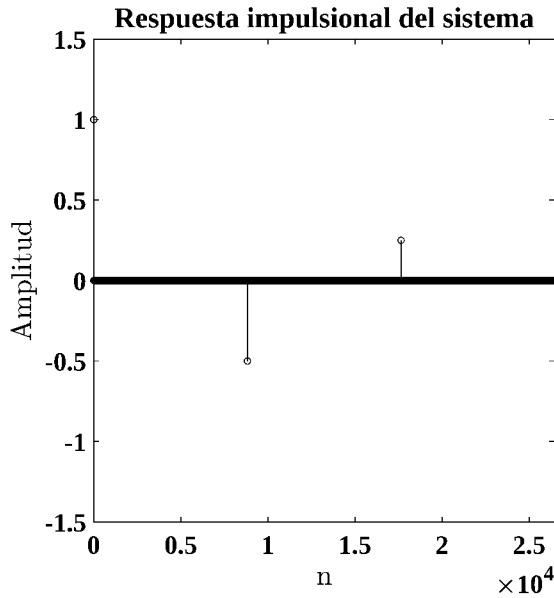


Fig. 19. Respuesta impulsional del sistema

Dado a que la respuesta impulsional es del tipo FIR $h[n]$ tiene modulo integrable, por lo tanto el sistema es estable. Analizando la respuesta deducimos la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema.

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2} \cdot x[n - 8.820] + \frac{1}{4} \cdot x[n - 17.640] \quad (28)$$

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 8.820] + \frac{1}{4} \cdot \delta[n - 17.640] \quad (29)$$

Podemos adelantarnos al comportamiento de salida que obtendremos. Los valores no nulos en el eje de las abscisas (en 8.820 y en 17.640) nos indican que ocurrirá una repetición de la señal de audio en esos puntos con menor amplitud, a los que llamaremos ecos.

La Figura 20 permite la comparación del audio de entrada y de salida.

Como fue mencionado, se generaron dos ecos en los puntos donde la respuesta impulsional toma valores distintos de cero. Respecto al primer eco, la señal no solo se repite con menor magnitud, sino también se ve distorsionada por el

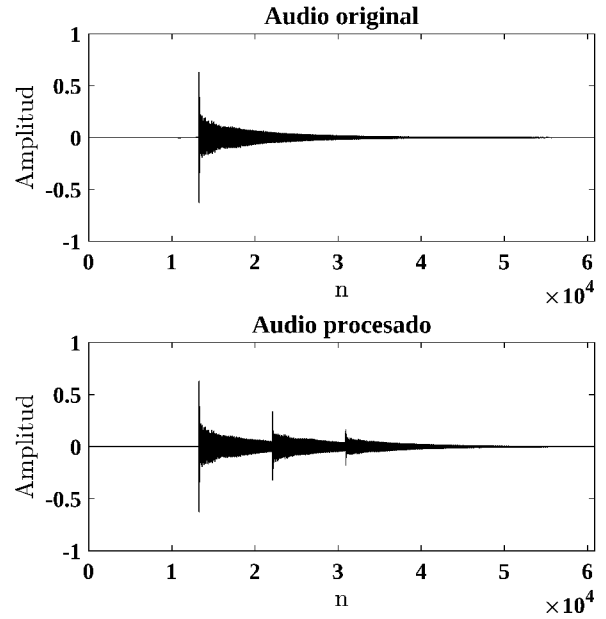


Fig. 20. Audio de entrada (superior) y audio de salida (inferior).

signo negativo de $h[8820]$. Sin embargo, a efectos prácticos esta distorsión no es perceptible debido a la naturaleza del audio (aunque puede notarse si se reconstruye la señal con una frecuencia de muestreo menor).

A simple vista también se puede apreciar el menor volumen que tienen ambas repeticiones, consistentes con lo analizado en la Figura 19.

IV-B. Filtrado

Un filtro de audio como el que utilizaremos no es más que otro SLID. El objetivo del filtro será, en nuestro caso, eliminar los ecos generados por el sistema previo. Es decir, pretende recuperar la señal de entrada original.

Para diseñar un filtro debemos elegir la ecuación en diferencias que rige su comportamiento. De manera genérica, estudiaremos la salida del audio ante un SLID con dos ramas de retardo y ante otra, con tres ramas de retardo.

Por último, elegiremos los coeficientes más adecuados para ambos casos.

IV-B.1. Filtro con dos ramas de retardo: Estos tienen la siguiente forma:

$$f_2[n] = x[n] + U \cdot x[n - n_1] + V \cdot x[n - n_2] \quad (30)$$

Recordemos que la entrada del filtro es la salida del sistema (y_1) (ver ecuación 28).

En donde $x[n]$ es la señal original y sus desplazamientos son sus ecos. Por lo tanto, del filtrado resulta:

$$\begin{aligned}
y_{f2}[n] = & x[n] - \frac{1}{2} \cdot x[n - 8.820] + \frac{1}{4} \cdot x[n - 17.640] \\
& + U \cdot x[n - n_1] - \frac{U}{2} \cdot x[n - 8.820 - n_1] \\
& + \frac{U}{4} \cdot x[n - 17.640 - n_1] \\
& + V \cdot x[n - n_2] - \frac{V}{2} \cdot x[n - 8.820 - n_2] \\
& + \frac{V}{4} \cdot x[n - 17.640 - n_2]
\end{aligned} \quad (31)$$

Corresponde ahora elegir correctamente los coeficientes con el fin de atenuar las replicas de la mejor manera posible. Con el objetivo de eliminar el eco de mayor amplitud, elegimos $U = \frac{1}{2}$ y $n_1 = 8.820$; lo cual resulta en:

$$\begin{aligned}
y_{f2}[n] = & x[n] + \frac{1}{8} \cdot x[n - 26.460] + V \cdot x[n - n_2] \\
& - \frac{V}{2} \cdot x[n - 8.820 - n_2] \\
& + \frac{V}{4} \cdot x[n - 17.640 - n_2]
\end{aligned} \quad (32)$$

Nuevamente, intentando eliminar el eco de mayor amplitud generado, consideramos: $V = -1/8$ y $n_2 = 26.460$.

De esta forma, el filtro de dos ramas queda definido de la siguiente forma:

$$f_2[n] = x[n] + \frac{1}{2} \cdot x[n - 8.820] - \frac{1}{8} \cdot x[n - 26.460] \quad (33)$$

Cuya respuesta impulsional es apreciable en la siguiente imagen.

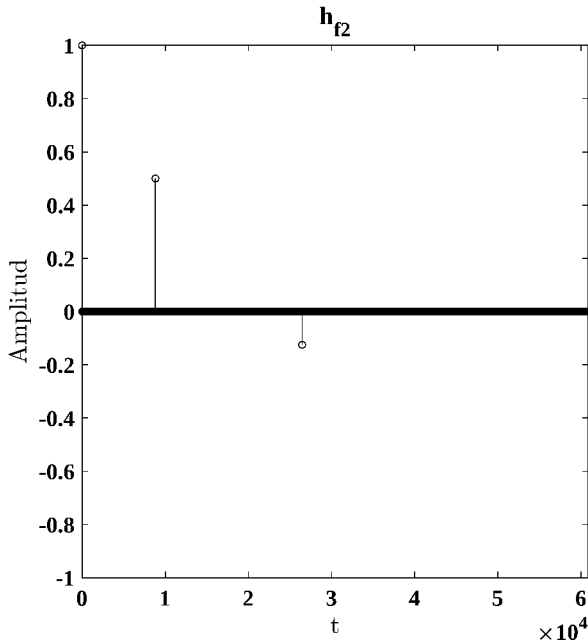


Fig. 21. Respuesta impulsional del filtro de dos ramas.

Del analisis del filtro puede notarse que el segundo término de la ecuación que lo define es igual que el de la señal de

audio pero con signo opuesto. Su segunda rama, en cambio, no coincide con el segundo de los ecos.

Finalmente la salida del filtrado de dos ramas es:

$$y_{f2}[n] = x[n] + \frac{1}{16}x[n - 35.280] - \frac{1}{32}x[n - 44.100] \quad (34)$$

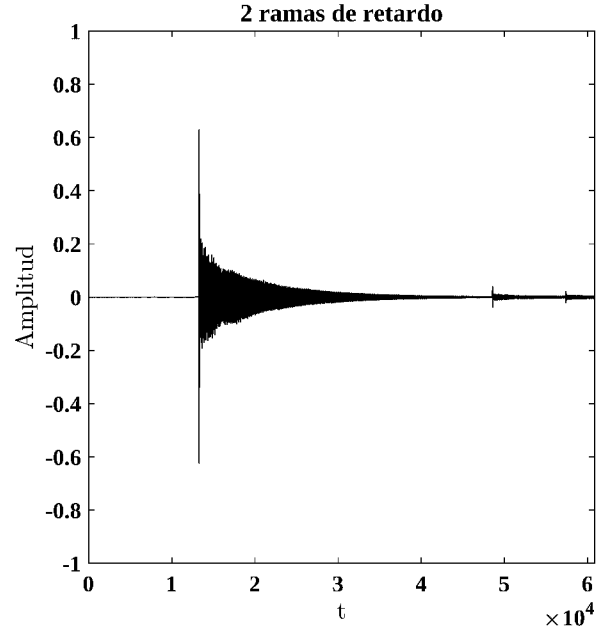


Fig. 22. Salida del filtro de dos ramas de retardo

De la salida conseguida, concluimos que el filtrado fue eficaz ya que se consiguió, no solo atenuar las repeticiones, sino también desplazarlas en el tiempo. Sin embargo, aún existen dos ecos apreciables indeseados a la salida del mismo.

IV-B.2. Filtro con tres ramas de retardo: Aprovechando el resultado anterior y la propiedad de linealidad de los SLIDs, agregamos una nueva rama de retardo genérica.

$$\begin{aligned}
f_3[n] = & x[n] + \frac{1}{2} \cdot x[n - 8.820] + \frac{-1}{8} \cdot x[n - 26.460] \\
& + W \cdot x[n - n_3]
\end{aligned} \quad (35)$$

Este nuevo filtro tendrá una respuesta con el formato siguiente:

$$\begin{aligned}
y_{f3}[n] = & x[n] + \frac{1}{16} \cdot x[n - 35.280] - \frac{1}{32} \cdot x[n - 44.100] \\
& + W \cdot x[n - n_3] - \frac{W}{2} \cdot x[n - 8.820 - n_3] \\
& + \frac{W}{4} \cdot x[n - 17.640 - n_3]
\end{aligned} \quad (36)$$

De manera análoga a lo resuelto en las ecuaciones 31 y 32, definimos: $W = \frac{-1}{16}$ y $n_3 = 35.280$ y obtenemos el resultado final.

Por lo tanto el filtro de tres ramas y su salida son:

$$f_3[n] = x[n] + \frac{1}{2} \cdot x[n - 8.820] - \frac{1}{8} \cdot x[n - 26.460] - \frac{1}{16} \cdot x[n - 35.280] \quad (37)$$

$$y_{f3}[n] = x[n] + \frac{1}{64} \cdot x[n - 52.920] \quad (38)$$

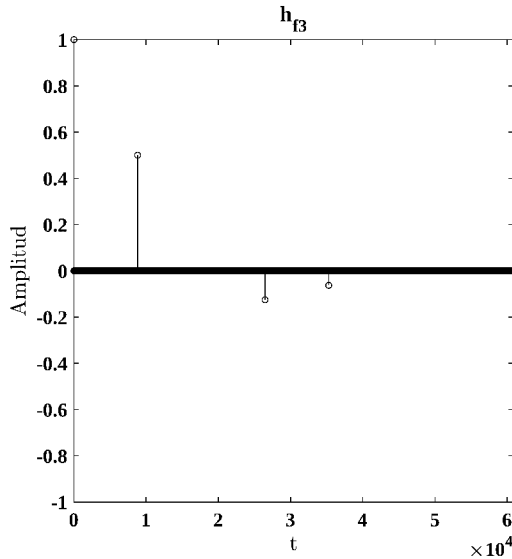


Fig. 23. Respuesta impulsional del filtro de tres ramas.

De $h_{f3}[n]$, la respuesta impulsional de $f_3[n]$, puede verse la similitud con la Fig. 21 con el agregado del efecto de la tercer rama de retardo.

En la siguiente imagen se observa la salida de audio de este filtro. Comparar con Fig. 22 y 20.

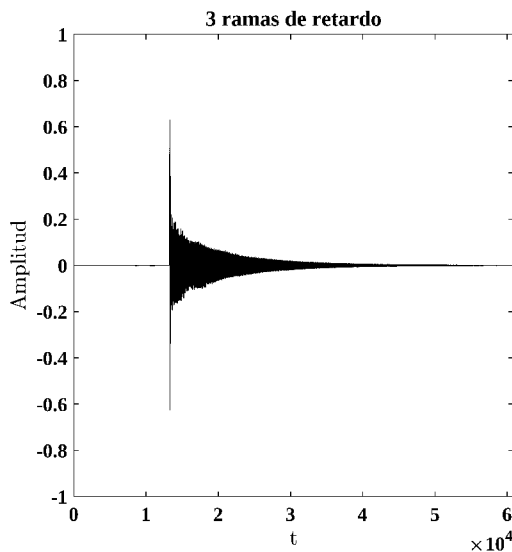


Fig. 24. Salida del filtro de tres ramas de retardo

Este resultado nos muestra una fuerte ventaja frente al sistema previo diseñado. Obtenemos una única repetición, de menor amplitud y más desplazada en comparación.

A efectos prácticos, es decir, escuchando a la señal filtrada y observando la Figura 24, el eco generado no se percibe. Se concluye que el filtro construido fue correctamente diseñado y cumple con su objetivo.

I. ANEXOS

I-A. TFTD.m

```
function [X, s] = TFTD(x,n)
    ds = 0.001; s = [-2:ds:2];
    X = zeros(size(s));
    for i = 1:length(s)
        X(i)=sum(x.*exp(-1i*2*pi*s(i)*n));
    end
end;
```