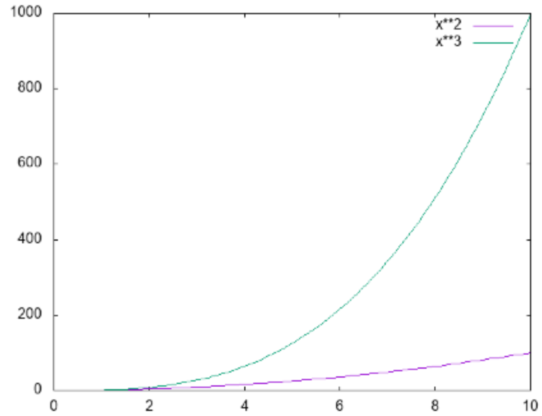
Jesús Jiménez Sánchez 76656119V

Algorítmica: Relación 1

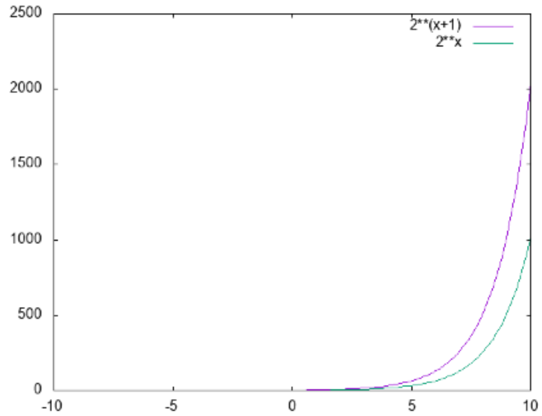
Ejercicio 1

i) Verdadero, n^2 queda por debajo de n^3

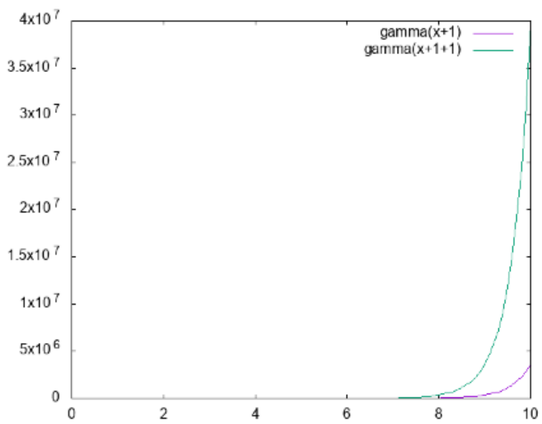
ii) Falso, n^3 por encima de n^2



iii) Falso, 2^{n+1} queda por encima de 2^n

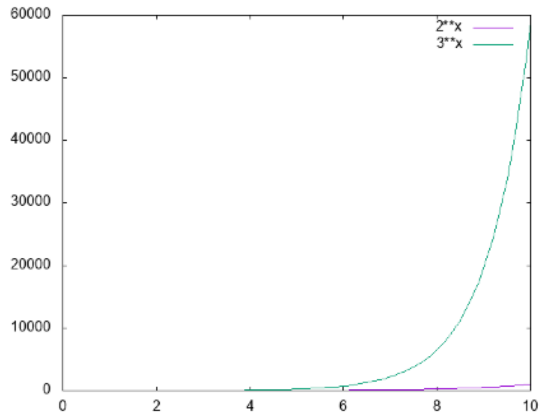


iv) Falso, $(n+1)!$ queda por encima de $n!$



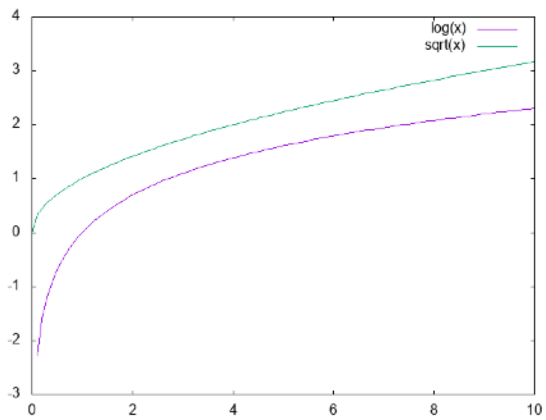
v) Falsa, sea $f(n) = k \cdot n$ donde k es una constante, entonces $2^{kn} = 2^n 2^n 2^n \dots$ k veces. No hay ninguna constante que limite la función por debajo de $m \cdot 2^n$.

vi) Falso, 3^n queda por encima de 2^n



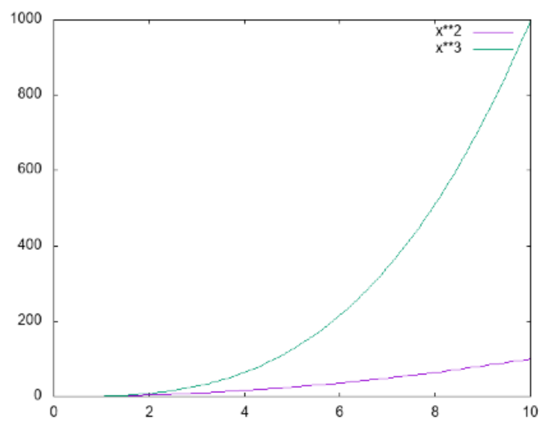
vii) Verdadero, $\log(n)$ queda por debajo de $\sqrt{n}$

viii) Falso, $\sqrt{n}$ queda por encima de $\log(n)$

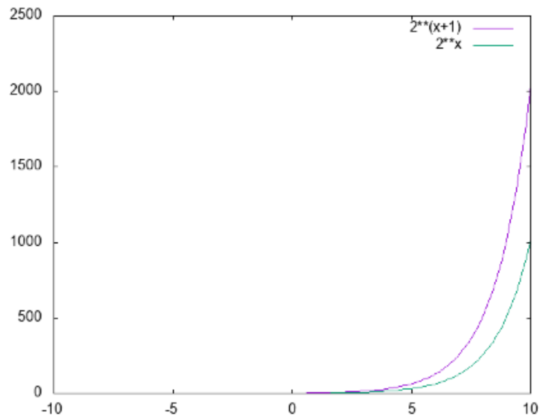


ix) Falso, n^2 queda por debajo de n^3

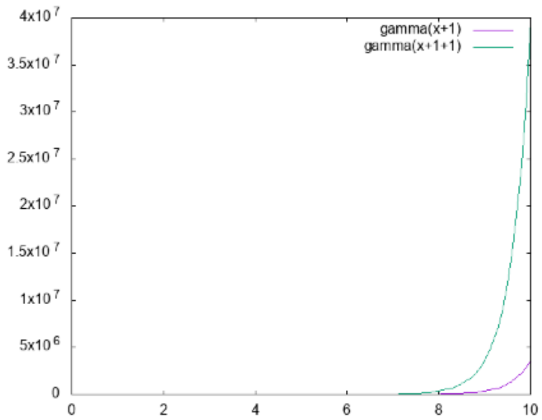
x) Verdadero, n^3 queda por encima de n^2



xi) Verdadero, 2^{n+1} queda por encima de 2^n

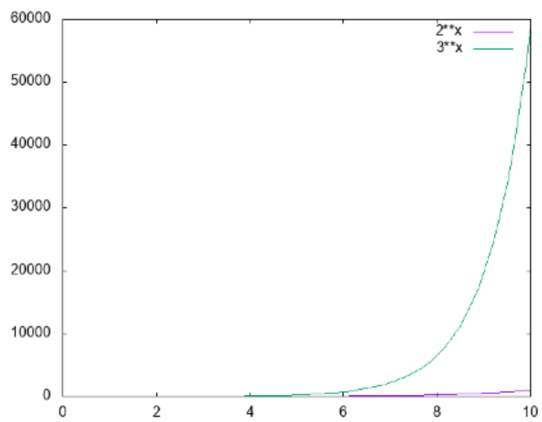


xii) Verdadero, $(n+1)!$ queda por encima de $n!$



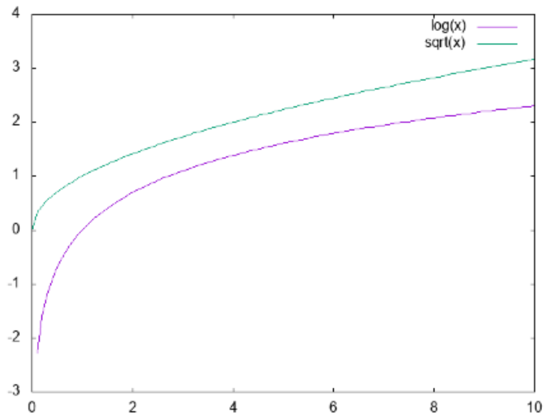
xiii) Es falsa debido a la misma razón que el apartado v)

xiv) Verdadero, 3^n queda por encima de 2^n



xv) Verdadero, $\log(n)$ queda por debajo de $\sqrt{n}$

xvi) Falso, $\sqrt{n}$ queda por encima de $\log(n)$



Ejercicio 2

$$n \cdot \log(n) \subset n^2 \cdot \log(n) \subset n^8$$

$$n \cdot \log(n) \subset n^{1+a} \subset n^2 \cdot \log(n) \subset n^8$$

$$n \cdot \log(n) \subset n^{1+a} \subset (1+a)^n \subset n^2 \cdot \log(n) \subset n^8$$

$$n \cdot \log(n) \subset n^{1+a} \subset (1+a)^n \subset n^2 \cdot \log(n) \subset n^8 \subset \left(n^2 + 8n + \log^3(n)\right)$$

$$n \cdot \log(n) \subset n^{1+a} \subset \frac{n^2}{\log(n)} \subset (1+a)^n \subset n^2 \cdot \log(n) \subset n^8 \subset \left(n^2 + 8n + \log^3(n)\right)$$

$$n \cdot \log(n) \subset n^{1+a} \subset \frac{n^2}{\log(n)} \subset (1+a)^n \subset n^2 \cdot \log(n) \subset 2^n \subset n^8 \subset \left(n^2 + 8n + \log^3(n)\right)$$

Ejercicio 6

a) $T_1 + T_2 \in O(f)$

Es cierta, en este caso se aplica la regla de la suma y se escoge la función más grande de ambas. Como las dos pertenecen a $O(f)$, esta afirmación es correcta.

b) $T_1 - T_2 \in O(f)$

También es cierto, porque si T_2 pertenece a $O(f)$, $-T_2$ seguirá perteneciendo a $O(f)$ porque quedará por debajo de f. Una vez dicho esto, se repite el caso de antes, en el que usábamos la regla de la suma.

c) $T_1/T_2 \in O(1)$

No podemos estar seguros de que pertenezca a $O(1)$ porque no sabemos el valor de T_1 y T_2, solo que pertenecen a $O(f)$, por tanto, no podemos saber si valen lo mismo.

d) $T_1 \in O(T_2)$

De nuevo no podemos estar seguros de que sea cierto.
Si $T_1 > T_2$, la afirmación es falsa.
Si $T_1 < T_2$, la afirmación es cierta.

Ejercicio 8

$$T(n) = 1 + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 + T\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$T(n) - 2T\left(\frac{n}{2}\right) = 2$$

$$n = 2^m$$

$$T(2^m) - 2T(2^{m-1}) = 2$$

$$\left\{b = 1; p(m) = 2; d = 0\right\}$$

$$T(2^m) = x$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$T(2^m) = 2^m c_1 + 1^m c_2$$

$$T(n) = n \cdot c_1 + c_2$$

$T_p(n) \in O(n)$

$T_m(n) = \Omega(1)$ (no entra en el *if*)

$$T(n) = 1 + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = 2 + T\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$n = 2^m$$

$$T(2^m) - T(2^{m-1}) = 2$$

$$\left\{b = 1; p(m) = 2; d = 0\right\}$$

$$T(2^m) = x$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$T(2^m) = 1^m \cdot c_1 + 1^m \cdot m \cdot c_2$$

$$T(n) = c_1 + \log_2(n) c_2$$

$T_{\frac{1}{2}}(n) = \theta(\log_2(n))$ (siempre se va por una sola rama)

Ejercicio 9

$$T(n) = 1 + 1 + 1 + T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 + 1 + 1$$

$$T(n) - 2T\left(\frac{n}{2}\right) = 6$$

$$n = 2^m$$

$$T(2^m) - 2T(2^{m-1}) = 6$$

$$\{b = 1; p(m) = 6; d = 0\}$$

$$T(2^m) = x$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$T(2^m) = 2^m c_1 + 1^m c_2$$

$$T(n) = n \cdot c_1 + c_2$$

$T_p(n) \in O(n)$

$T_m(n) = \Omega(1)$ (solo entra en el primer *if* y lo hace una sola vez)

$$T(n) = 1 + 1 + 1 + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 + T\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$n = 2^m$$

$$T(2^m) - T(2^{m-1}) = 7$$

$$\{b = 1; p(m) = 7; d = 0\}$$

$$T(2^m) = x$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$T(2^m) = 1^m \cdot c_1 + 1^m \cdot m \cdot c_2$$

$$T(n) = c_1 + \log_2(n) c_2$$

$T_{\frac{1}{2}}(n) = \theta(\log_2(n))$ (siempre se va por una sola rama, la otra es nula)

Ejercicio 10

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n < 17 < log(log(n)) < log(n) < \sqrt{n} < \left(\frac{n}{\log(n)}\right) < \log^2(n) < n < \sqrt{n}\log^2(n) < n^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Ejercicio 12

1.

$$T(n) = 1 + 3 + 3 + 6 + 2T\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$T(n) - 2T\left(\frac{n}{2}\right) = 13$$

$$n = 2^m$$

$$T(2^m) - 2T(2^{m-1}) = 13$$

$$\left\{b = 1; p(m) = 13; d = 0\right\}$$

$$T(2^m) = x$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$T(2^m) = 2^m c_1 + 1^m c_2$$

$$T(n) = n \cdot c_1 + c_2$$

2.

$$T_p(n) \in O(n)$$