Методы оптимизации Сравнение моделей Марковица и Блэка-Литтермана в оптимизации инвестиционного портфеля

Спицын Николай
ФПМИ

МФТИ

19 ноября 2022 г.

Математические основы модели Марковица

Марковиц, 1952. Mean-variance analysis/MPT (modern portfolio theory)

- N ценных бумаг
- r_{it} - ожидаемая доходность за доллар, инвестированный в i-ю бумагу, в t
- d_{it} - ставка, по которой окупается i-я бумага в отношение с настоящим в t
- X_i - доля, инвестированная в i-ю бумагу

Математические основы модели Марковица

Марковиц, 1952. Mean-variance analysis/MPT (modern portfolio theory)

- N ценных бумаг
- r_{it} - ожидаемая доходность за доллар, инвестированный в i-ю бумагу, в t
- d_{it} - ставка, по которой окупается i-я бумага в отношение с настоящим в t
- X_i - доля, инвестированная в i-ю бумагу

Расчёт R

$R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} d_{it} r_{it} X_i = \sum_{i=1}^{N} X_i (\sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it}) = \sum_{i=1}^{N} X_i R_i$,
причём R_i независимо с X_i, $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$

V и E на диаграмме

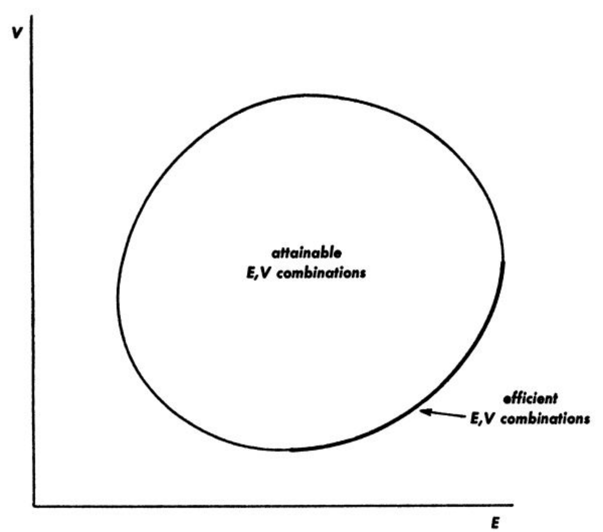
R_i и R считаем случайными величинами
Мат ожидания у R_i: μ_i

Ковариация между R_i и R_j

$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, т.е. произведение их корреляции на их стандартные отклонения

Отсюда дисперсия взвешенной суммы: $V(R) = \Sigma_{i=1}^{N}\Sigma_{j=1}^{N}\sigma_{ij}X_iX_j$
Мат ожидание: $E = \Sigma_{i=1}^{N}X_i\mu_i$
Зная (μ_i, σ_{ij}) мы можем строить графики

V-E диаграмма



Модель Блэка-Литтермана

Блэк и Литтерман (БЛ далее), 1990

- N ценных бумаг
- Пусть их доходность (returns) распределена нормально: $X \sim N(\mu, \Sigma)$
- Σ оценивается через экспоненциальное сглаживание (exponential smoothing)

Модель Блэка-Литтермана

Блэк и Литтерман (БЛ далее), 1990

- N ценных бумаг
- Пусть их доходность (returns) распределена нормально: $X \sim N(\mu, \Sigma)$
- Σ оценивается через экспоненциальное сглаживание (exponential smoothing)

Как оценить μ?

Не можем знать μ точно; приходится моделировать как случайную величину, чья дисперсия отражает возможную ошибку: $\mu \sim N(\pi, \tau\Sigma)$, где π - лучшая оценка μ, а $\tau\Sigma$ отражает возможную ошибку.

Поиск π

Чтобы получить π, БЛ сформулировали следующее:

- Инвесторы максимизируют mean-variance trade-off: $w(Y) = \mathbb{E}(Y) - \frac{\lambda}{2}\mathbb{V}$

Поиск π

Чтобы получить π, БЛ сформулировали следующее:

- Инвесторы максимизируют mean-variance trade-off: $w(Y) = \mathbb{E}(Y) - \frac{\lambda}{2}\mathbb{V}$
- Предположим, что нет ошибки оценки: $\tau = 0$

Поиск π

Чтобы получить π, БЛ сформулировали следующее:

- Инвесторы максимизируют mean-variance trade-off: $w(Y) = \mathbb{E}(Y) - \frac{\lambda}{2}\mathbb{V}$
- Предположим, что нет ошибки оценки: $\tau = 0$
- Если оптимизация без условий, то получаем $w_\lambda = argmax_w\{w'\pi - \lambda w'\Sigma w\}$, получаем $\pi = 2\overline{\lambda}\Sigma\widetilde{w}$
- Наш датасет не играет особой роли в оценке π: это *shrinkage approach* к оценке рисков

Views: корректируем модель

View - некоторое предположение о состоянии рынка, которое может не согласовываться с моделью. Например, менеджер может сказать, что ценная бумага 3 поведёт себя лучше, чем ценная бумага 2, и тогда нужно будет наложить условие $X_3 - X_2 \geqslant 0$
Другой пример: волатильность четвёртой бумаги оценивается в 2-3 раза выше, чем у модели: $4\Sigma_{44} \leqslant Var\{_4\} \leqslant 9\Sigma_{44}$

Views: корректируем модель

View - некоторое предположение о состоянии рынка, которое может не согласовываться с моделью. Например, менеджер может сказать, что ценная бумага 3 поведёт себя лучше, чем ценная бумага 2, и тогда нужно будет наложить условие $X_3 - X_2 \geqslant 0$
Другой пример: волатильность четвёртой бумаги оценивается в 2-3 раза выше, чем у модели: $4\Sigma_{44} \leqslant Var\{_4\} \leqslant 9\Sigma_{44}$

Views в нашей модели

K views - это матрица $K \times N$ матрица P, чей k-й ряд отражает веса каждой ожидаемой доходности в отношении нашего вида. Чтобы отразить нашу неуверенность в точности, получим $P_\mu \sim N(v, \Omega)$, мета-параметры v и Ω - оценка и неуверенность в ней.

Оценим v и Ω

- Если у нас только качественные views, то обычно считают набор v в рамках волатильности: $v_k = (P\pi)_k + \eta_k\sqrt{(P\Sigma P')_{k,k}}$, причём $\eta_k \in \{-\beta, -\alpha, \alpha, \beta\}$, которые категоризируют наши взгляды как "очень пессимистичные, пессимистичные, оптимистичные, очень оптимистичные"соответственно.

Оценим v и Ω

- Если у нас только качественные views, то обычно считают набор v в рамках волатильности: $v_k = (P\pi)_k + \eta_k \sqrt{(P\Sigma P')_{k,k}}$, причём $\eta_k \in \{-\beta, -\alpha, \alpha, \beta\}$, которые категоризируют наши взгляды как "очень пессимистичные, пессимистичные, оптимистичные, очень оптимистичные"соответственно.

- Обычно $\alpha = 1, \beta = 2$

Оценим v и Ω

- Если у нас только качественные views, то обычно считают набор v в рамках волатильности: $v_k = (P\pi)_k + \eta_k\sqrt{(P\Sigma P')_{k,k}}$, причём $\eta_k \in \{-\beta, -\alpha, \alpha, \beta\}$, которые категоризируют наши взгляды как "очень пессимистичные, пессимистичные, оптимистичные, очень оптимистичные"соответственно.

- Обычно $\alpha = 1, \beta = 2$

- $\Omega = \frac{1}{c} P\Sigma P'$, где $c \in (0; \infty)$ отражает наш уровень уверенности в наших взглядах. (Meucci, 2005)
- Чтобы убрать порядки и величины, можно дополнить: $\Omega = \frac{1}{c} diag(u) P\Sigma P' diag(u)$, $u \in (0, \infty)^K$

Какой теперь μ с учётом наших взглядов?

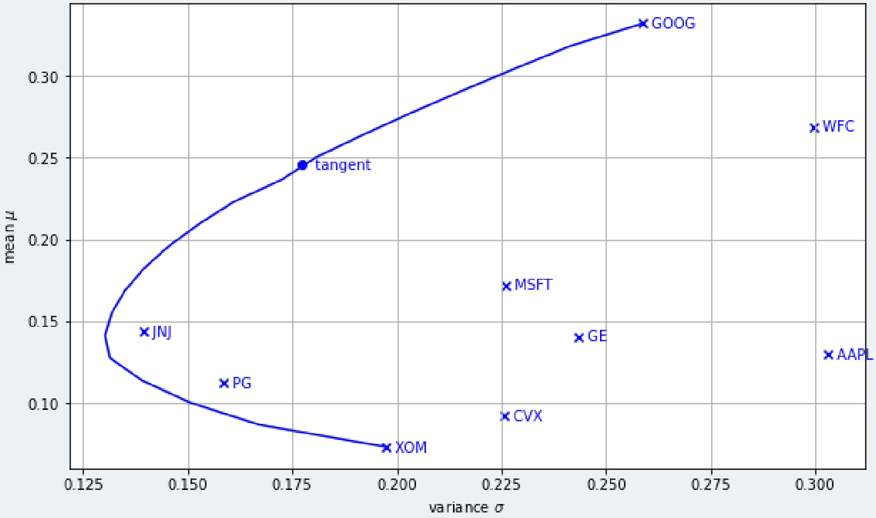
- (Можно вывести через формулы Байеса): $\mu|_V; \Omega \sim N(\mu_{BL}, \Sigma^{\mu}_{BL})$
- Строго говоря, $\mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}v)$
  $\Sigma^{\mu}_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}$

Какой теперь μ с учётом наших взглядов?

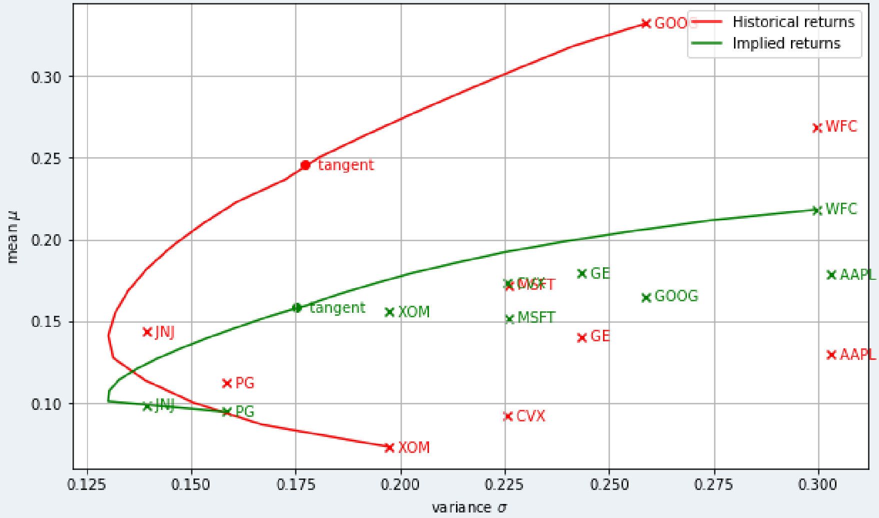
- (Можно вывести через формулы Байеса): $\mu|_V; \Omega \sim N(\mu_{BL}, \Sigma^{\mu}_{BL})$
- Строго говоря, $\mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}v)$
  $\Sigma^{\mu}_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}$

- Эквивалентные формулы с более простыми вычислениями:
  $\mu_{BL} = \pi + \tau\Sigma P'(\tau P\Sigma P' + \Omega)^{-1}(v - P\pi)$
  $\Sigma^{\mu}_{BL} = (1+\tau)\Sigma - \tau^2\Sigma P'(\tau P\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Sigma$

Mean-Variance через модель Марковица



Блэк-Литтерман vs Марковиц



Блэк-Литтерман + views (adjusted weights)