# 自动推导离散谱问题中 V 的 Maple 实现

JMx

2021 年 11 月 1 日

这里我们记录一下使用 Maple 自动推导离散谱问题的时间部分的 V 的形式。

我们以 4 阶谱问题为例。给定空间谱问题 $U(n,\lambda)=(U_{ij})_{4\times 4}$ (这里我们限定 $U$ 中的同一位势不重复出现)，我们设 $V(n,\lambda)=(V_{ij})_{4\times 4}$，则静态零曲率方程

$$S = V^{+}U - UV = 0 \tag{1}$$

是包含 16 个未知量的线性方程。我们的目的是构造恰当的 $V$ 的形式，使得静态零曲率方程满足下面两个条件：

- (C1): 如果 $\dfrac{\partial U_{ij}}{\partial n} \neq 0$，则 $S_{ij}$ 形如 $A+\lambda^k B=0$，其中 $A$ $B$ 与谱参数 $\lambda$ 无关，且 $U_{ij}$ 中位势的系数为 $\lambda$ 的 0 次或者 $k$ 次幂。
- (C2): 如果 $\dfrac{\partial U_{ij}}{\partial n} = 0$，则 $S_{ij}$ 形如 $\lambda^k A=0$，其中 $A$ 与谱参数 $\lambda$ 无关。

接下来我们给出 Maple 实现的思想和步骤。下面我们只针对 $\dfrac{\partial U_{ij}}{\partial n}=0$ 所对应的 $S$ 的若干个方程 (记为 $S_0$) 进行操作。我们分为两个步骤：

- 第一步: 减少未知量的个数。对于 $eq \in S_0$，如果某个变量可以用其它变量表示出来，则讲 $S$ 中所有该变量替换。此时，方程数和未知量个数都减少一个。重复该操作，直到不存在某个变量可以用其它变量表示。此时 $S_0$ 剩余的式子仍记为 $S_0$。
- 第二步: 平衡 $\lambda$。对于 $eq \in S_0$，如果 $\lambda$ 的最大最小次幂不等，则为了满足 (C2)，我们将最低次幂的系数中的未知量替换为 $\lambda^k$ 乘以这些未知量，使得该式达到平衡。因此我们需要找到这些未知量，然后对 $S$ 整体进行替换。重复上述操作。

一般而言 $S_0$ 满足 (C2)，相应的 $S-S_0$ 就满足 (C1)。对于不能满足 (C2) 或者满足 (C2) 但不满足 (C1) 的问题，我们无法给出 $V$ 的形式。

下面我们对程序中的函数做一些说明。

- size: 返回向量，集合或者列表的长度。
- format-szce: 消去 (C2) 中的 $\lambda^k$。

- cancel-var: 返回某个未知量用其它未知量表示的表达式。
- reduce-szce: 将上面的结果代入 $S$，减少方程个数。
- find-V: 返回需要乘以 $\lambda^k$ 的未知量。
- balance-lambda: 将上面结果代入 $S$，平衡 $\lambda$。
- check: 检查 $S$ 是否满足 (C1) 和 (C2)。

基于此，我们也可以随机生成 $U$，看是否可以找到满足 (C1) 和 (C2) 的 $V$。我们也用程序实现了这一想法，这里我们不再描述。这一方法很容易推广到连续谱问题，这里也不在给出。

我们将程序放在Github 代码库，这里不在附上。