

VILNIAUS UNIVERSITETAS
FIZIKOS FAKULTETAS
TEORINĖS FIZIKOS IR ASTRONOMIJOS INSTITUTAS

Justas Kvedaravičius

**ERDVINĖ ĮVAIROVĖ KONKURUOJANČIOS DINAMIKOS IZINGO
MODELYJE**

MAGISTRO STUDIJŲ MOKSLO TIRIAMASIS DARBAS

Teorinės fizikos ir astrofizikos studijų programa

Studentas

Justas Kvedaravičius

Darbo vadovas

dr. Aleksejus Kononovičius

Instituto atstovas

prof. dr. Egidijus Anisimovas

Vilnius 2023

Turinys

1	Ivadas	2
2	Literatūros apžvalga	3
2.1	Izingo modelis.....	3
2.2	Metropolio ir Kawasaki dinamikos Izingo modelyje	4
2.3	Konkuruojanti dinamika Izingo modelyje	6
3	Tyrimo metodika	9
3.1	Įvairovės indeksas	9
3.2	Minkovskio fraktalinė dimensija	12
4	Tyrimo rezultatai	14
4.1	Energijos ir tvarkos parametru kitimas konkuruojančios dinamikos Izingo modelyje	14
4.2	Erdvinės įvairovės matų verčių kitimas konkuruojančios dinamikos Izingo modelyje	16
5	Išvados	19
	Literatūros sąrašas	20

1 Ivadas

Socialinių sistemų dinamikos tyrinėjimas panaudojant statistinės fizikos tyrimų metodus suformavo tarpdisciplininę tyrimų sritį - sociofiziką. Šioje srityje įprastai sutinkami tyrimai siekia atsakyti į klausimą kaip socialinės sistemos agentų tarpusavio sąveikos sukuria tvarkingas būsenas ar atveda sistemą į atsitiktines konfigūracijas [1]. Fizikoje toks klausimas sutinkamas tyrinėjant Izingo modelį.

Izingo modelio paradigma yra glaidžiai susieta su nuomonių dinamikos principu tyrimu. Sukininiame modelyje binarines sukinio vertes galima interpretuoti kaip teigiamą ar neigiamą pasirinkimą debatuojamu klausimu ar išreiškiamu balsu prie balsadėžių. Galų gale dviejų verčių sukiniai tėra atskiras Potts modelio atvejis, kuriame galima turėti q sukinijų verčių. Kita vertus, įprastą Izingo modelio sukinijų sąveiką pakeitus kitokia galima gauti rinkėjo modelį ar daugybę jo variacijų [1, 2].

Įvairūs sukinijų sąveikos mechanizmai dažniausiai nagrinėjami laikinės evoliucijos požiūriu bandant išsiaiškinti į kokias konfigūracijas (pvz., konsensuso ar poliarizacijos) sistema nusistovi. Tačiau to nepakanka siekiant palyginti modelių rezultatus su empiriniais ar eksperimentiniais duomenimis. Vienas iš pirmųjų erdvėskumo savybę į nuomonių dinamiką įveda SIRM (angl. *social influence and recurrent mobility*) modelis [3]. Modelis daro prielaidą, jog nuomonę keisti galima bent dviejose skirtingose vietovėse - namuose ir darbo aplinkoje. Šią idėja [4] autorius išplečia pasiūlydamas erdvinį rinkėjo modelį, kuriame įgyvendinamas erdvinis agentų judėjimas.

Nuomonių dinamikos modelių palyginamumui su empiriniais duomenimis reikalinga formuluoti modelį pasižyminti laikine ir erdvine dinamikomis. Artimas tokio modelio pavyzdys fizikoje yra konkuruojančios dinamikos Izingo modelis. **Šio darbo tikslas** - ištirti erdvinės įvairovės savybes konkuruojančios Kawasaki ir Metropolio dinamikos atveju. Pagrindiniai tiriamoji darbo uždaviniai:

1. Atliekti skaitmeninę konkuruojančios Kawasaki ir Metropolio dinamikos analizę dvimačiaiame Izingo modelyje.
2. Ieškoti alternatyvių įvairovės indekso apibrėžimų ir palyginti jų rezultatus.

2 Literatūros apžvalga

2.1 Izingo modelis

Izingo modelis yra modelinė sistema kokybiškai paaiškinanti feromagnetizmo reiškinį. Modelio konsepcija nesudėtinga - tai yra sukinių, galinčių įgyti dvi vertes, gardelė d dimensijose. Nustatant, kad sukinių vertės gali būti lygios $s_i = \pm 1$, galima apibrėžti sistemos Hamiltonianą:

$$H = -J \sum_{\{i,j\}} s_i s_j, \quad (1)$$

čia sumavimas vyksta per artimiausią kaimynų rinkinį. Dydis J šiuo atveju yra sukinių sąveikos energijos konstanta ir jos ženklas nulemia ar sukinių sąveika yra feromagnetinė, ar antiferomagnetinė.

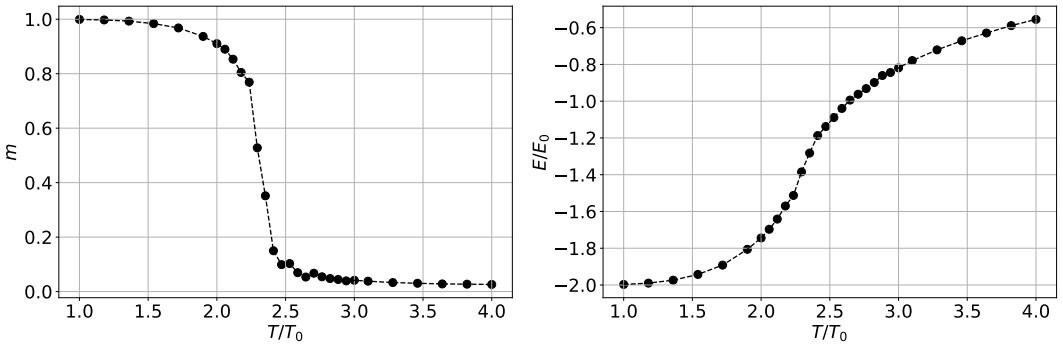
Izingo modelis kaip ir dauguma sukininių sistemų pasižymi trijų tipų dinamikomis - superkritine, subkritine ir kritine [5]. Superkritine dinamika modelis pasižymi aukštesnėje nei kritinės temperatūros srityje $T > T_C$ ir sistema būna nuostovioje netvarkingoje konfigūracijoje. Subkritinė dinamika vyksta esant $T < T_C$ ir yra kokybiškai panaši į tvarkingą sistemos būseną nulinėje temperatūroje. O tuo tarpu kritinė dinamika pasireiškia tik vienoje temperatūroje $T = T_C$. Feromagnetinėms medžiagoms kritinės temperatūros taškas žinomas Kiuri temperatūros pavadinimu.

Kritinės temperatūros taške sistemoje pasireiškia skalės invariantiškumas [6]. Sistemos tvarkos parametru vertės, pavyzdžiui, vidutinė magnetizacija, šioje srityje kinta kaip laipsninės funkcijos:

$$m = \frac{M}{N} \propto (T_C - T)^\gamma, \quad (2)$$

čia m žymi sistemos sukinio vidutinę magnetizaciją, M žymi absoliučią magnetizaciją, N yra sukiniių skaičius, T_C yra kritinio taško temperatūros vertė, o γ yra kritinė eksponentė. Grafiškai tai pavaizduota 1 paveiksle. Skalės invariantiškumas reiškia tai, jog pakeitus sistemos mastelių (stebėjimo skyra) tvarkos parametru vertės nepakinta.

Kritiniame taške esant skalės invariantiškumui susiformuoja įvairių dydžių domenai, priešingai negu $T \neq T_C$ atvejais. Superkritiniu atveju susidaro vienas didelis domenas, o subkritiniu atveju dideli domenai nesusiformuoja dėl triukšmingo sukiniių verčių kitimo. Dažnai norint įvertinti susidarančių domenų dydį skaičiuojama koreliacijos funkcija [5–7]. Ši funkcija įvertina sukiniių verčių tarpusavio priklausomybę, o tai iš esmės yra statistinis domenų dydžio įvertinimas.



1 pav. Izingo modelio vidutinės magnetizacijos m (kairėje) ir energijos E/E_0 (dešinėje) verčių priklausomybė nuo temperatūros T/T_0 . Šiuo atveju $T_0 = J/k_B$, kur J yra sąveikos energija, o k_B yra Boltzmanno konstanta. Izingo modeliui pagal Metropolio interpretaciją kritinis taškas atitinka $T_C = 2.269T_0$.

2.2 Metropolio ir Kawasaki dinamikos Izingo modelyje

Izingo modelio evoliuciją galima apskaičiuoti atliekant Monte Carlo skaitinį eksperimentą. Siekiant gauti sistemos būsenų pasiskirstymą atitinkančią Boltzmanno dėsnį (šiuo atveju dėl to, kad sistema yra šiluminė), būtina nustatyti ergodiškumo ir detalaus balanso sąlygas [7]. Ergodiškumo sąlyga nurodo, jog bet kuri sistemos konfigūracija turi būti pasiekiamā per baigtinį Monte Carlo žingsnių skaičių. Detalus balansas yra sistemos būvimo pusiausvyroje sąlyga:

$$p_\mu P(\mu \rightarrow \nu) = p_\nu P(\nu \rightarrow \mu), \quad (3)$$

kur μ, ν žymi dvi skirtinges būsenas, p tų būsenų tikimybę, o P žymi šuolių tarp nurodytų būsenų tikimybes. Tai taip pat galima interpretuoti kaip tikimybės srovių būsenų erdvėje tvermės dėsnį [5]. Kadangi sistemos modeliavimui aktualu įvertinti šuolių tarp būsenų tikimybes, laikykime jas susidedančias iš sukinio parinkimo (angl. *selection*) g ir šuolio priėmimo (angl. *acceptance*) A tikimybių:

$$P(\mu \rightarrow \nu) = g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu). \quad (4)$$

Metropolio algoritme perėjimas iš vienos būsenos į kitą atliekamas taip: su tikimybe g pasirenkamas gardelės sukinys ir įvertinama jo sąveikos energiją su artimiausiais kaimyniniais sukiniais. Jeigu sukinio vertės pakeitimais sumažintų sistemos energija, toks žingsnis visuomet priimamas. Kitu atveju pokytis priimamas su perėjimo tikimybe proporcinga Boltzmanno skirstiniui [7]:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \begin{cases} e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} & \text{jeigu } E_\nu - E_\mu > 0, \\ 1 & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \quad (5)$$

Metropolio algoritmo atveju yra parinktos efektyviausios šuolio tarp būsenų priėmimo tiki-

mybės vertės skaitmeninei simuliacijai. Dažnai literatūroje analiziniam nagrinėjimui naudojamos Glauber šuolių tarp būsenų priėmimo tikimybės vertės [5, 6, 8]:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{\beta(E_\nu - E_\mu)}{2} \right). \quad (6)$$

Ši išraiška gaunama iš detalaus balanso lygties (3) i ją įstačius Boltzmanno tikimybės būti atitinkamose μ ir per vienu žingsniu skirtinę ν būsenas [5]. Eksponentinė šios išraiškos forma yra tokia:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}}{1 + e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}}. \quad (7)$$

Abiem pavienio sukinio apvertimo (angl. *single-spin-flip*) dinamikos atvejais sukinio pasirinkimo tikimybę galima nustatyti nepriklausomą nuo konfigūracijos. Tokiu atveju kiekvienam gardelės sukinui parinkimo tikimybė lygi:

$$g(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{N}, \quad (8)$$

kur N žymi sukinį skaičių gardelėje. Tokiu atveju (4) lygtį įstačius į (3) lygties detalaus balanso sąlyga šuolių tarp būsenų tikimybių santykis priklausys tik nuo (5) ir (6) lygčių išraiškų.

Kawasaki dinamika aprašo kitokio tipo Izingo modelį. Priešingai negu iki šiol nagrinėtas sukinio vertę keičiantis sąveikos mechanizmas, Kawasaki dinamika skirta modeliuoti kitokio tipo reiškinius, pavyzdžiui, stiklines (angl. *glassy*) sistemas arba gardelėje esančias dujas (angl. *lattice gas*) [7]. Pagrindinis tokų sistemų skirtumas nuo Izingo pagal Glauber ar Metropolio interpretacija yra išliekantis pastovus dalelių skaičius (jei dalelė sukinys - magnetizacija). Sukiniai nekeičia savo verčių, bet priešingų verčių sukiniai susikeičia vietomis.

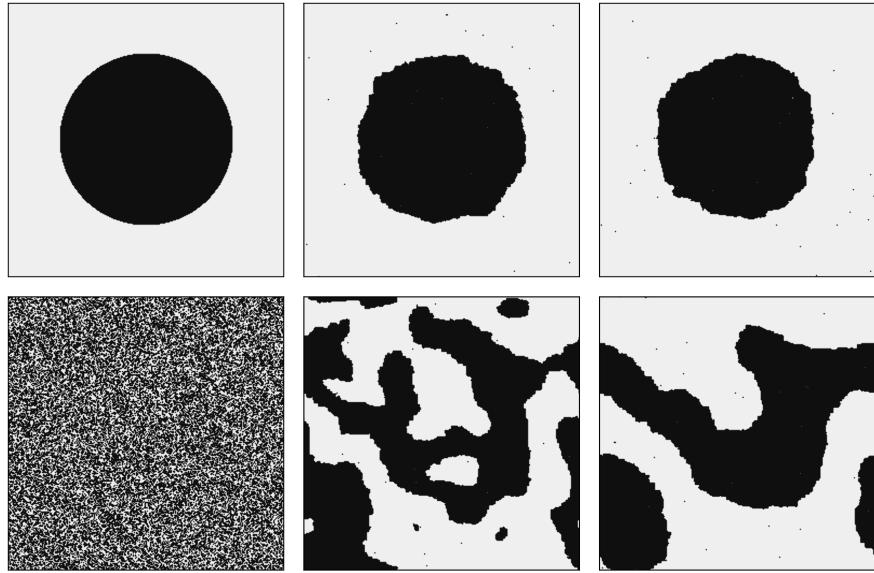
Panašiai kaip Glauber dinamikos atveju, šiai dinamikai galima sukonstruoti šuolių tarp būsenų tikimybes pagal (6) lygties formą, tačiau su papildomu nariu leidžiančiu sąveiką tik tarp skirtinges vertes turinčių sukinį [5]. Vienmačiu atveju:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{2} \left(1 - (s_{i-2}s_{i-1} + s_is_{i+1}) \cdot \tanh \frac{\beta(E_\nu - E_\mu)}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}(1 - s_{i-1}s_i), \quad (9)$$

kur s_i ir s_{i+1} žymi du kaimyninius sukinius, tarp kurių vyksta sąveika. Ieškant modeliavimui patogią Metropolio tipo šuolių tarp būsenų išraišką, galima naudoti (5) lygtįje žinomas išraiškas.

Paprasčiausiu atveju Kawasaki dinamika gali vykti tarp dviejų kaimyninių sukinų. Tačiau tokio difuzinio proceso modeliavimas pakankamai lėtas, tad kitas būdas yra kiekvieno Monte Carlo žingsnio metu pasirinkti bet kuriuos du skirtinges verčių sukinius ir pagal tas pačias šuolių tarp būsenų priėmimo tikimybes įvykdinti apkeitimą. Sukinių pasirinkimo tikimybės tokiu atveju išlieka identiškos šuoliui į ir iš būsenos, tad ergodiškumo sąlyga lieka išpildyta [7].

Kawasaki interpretacijoje magnetizacija, kaip ir temperatūra, laikoma modelio parametru.



2 pav. Izingo modelio pagal Metropolio interpretaciją konfigūracijos laiko t momentais 1, 256 ir 1024 (atitinkamai 1, 2 ir 3 stulpeliai). Gardelės dydis 256×256 , vienas laiko momentas lygus 256^2 įvykių, per kuriuos gali pasikeisti vieno sukinio vertė. Pirmoje eilutėje pavaizduota Izingo modelio pradinės lašo būsenos optimizacija link minimalios energijos. Antroje eilutėje pavaizduota evoliucija nuo atsitiktinės konfigūracijos. Sistemos temperatūra $T = T_0$. Čia $T_0 = J/k_B$, J yra sąveikos energija, o k_B yra Boltmano konstanta.

Todėl ši interpretacija dar yra vadinama pastovaus tvarkos parametru (angl. *conserved-order-parameter*) Izingo modeliu.

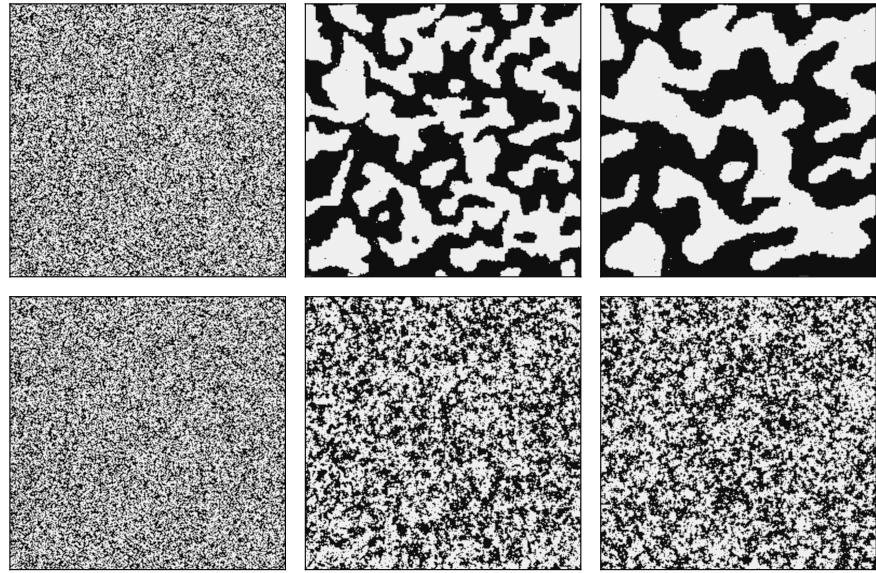
2.3 Konkuruojanti dinamika Izingo modelyje

Praeitame skyriuje nagrinėtos Metropolio ir (lokali) Kawasaki dinamikos Izingo modelyje apsiribojo sąveika tarp artimiausių sukiniių gardelėje. Izingo modelio dinamika pasikeičia išskaitant sukinio sąveiką su antrais artimiausiais kaimynais gardelėje. Tokios sistemos Hamiltonianas yra papildomas sąveikos nariu:

$$H = -J_1 \sum_{\{i,j\}} s_i s_j - J_2 \sum_{\{i,k\}} s_i s_k, \quad (10)$$

kur J_1 žymi sąveikos energiją tarp artimiausių sukiniių, o J_2 tarp antrų artimiausių sukiniių. Sumavimas atitinkamai vyksta tarp pirmos arba antros eilės artimiausių kaimynų.

Jeigu (10) lygtijoje sąveika tarp abiejų eilių kaimynų išlieka feromagnetinė, modelio dinamika yra kokybiškai panaši į (2.2) skyriuje aprašytą, t.y. pasižymi perejimu iš feromagnetinės būsenos į paramagnetinę didėjant temperatūrai. Kitais atvejais, bent vienai iš sąveikų esant antiferomagnetinei, sistemos dinamika kinta ir galimi skirtinį konfigūracijų energijų minimumai, atskirti laisvosios energijos barjerais [9]. Tokios sistemos stabilių ir metastabilių būsenų skaičius didėja ištraukiant sukinijų sąveikas su vis didesnių eilių kaimynais.



3 pav. Izingo modelio pagal Kawasaki interpretaciją konfigūracijos laiko momentais $t = 1, 256$ ir 1024 (atitinkamai 1, 2 ir 3 stulpeliai). Pirmoje eilėje konfigūracijos, kai temperatūra $T = T_0$ ir $T = 3T_0$ antroje eilėje. Čia $T_0 = J/k_B$, J yra sąveikos energija, o k_B yra Boltzmanno konstanta.

Šiame modelyje konkuruojant dinamika vis dar yra vieno - Glauber ar Metropolio - tipo. Tikslėsnis jos pavadinimas gali būti konkuruojančios sąveikos Izingo modeliu. Siekiant i modelį įvesti Kawasaki tipo dinamiką tokis formalizmas nepatogus, taigi dažniau sutinkamas konkuruojančių dinamikų būdas. Šiuo būdu pasirenkama tikimybė p , su kuria sistemos gardelė atnaujinama pagal vieną (pavyzdžiui, Metropolio) dinamiką, ir tikimybė $1 - p$, su kuria gardelė atnaujinama pagal antrają dinamiką. Tikimybės p ir dinamikų tipų pasirinkimas iš esmės nulemia modelio fazinę erdvę ir pusiausvyrumą [10–13].

Taip sudarytų dviejų konkuruojančių dinamikų varomos sistemos evoliucija gali būti nagrinėjama pagrindine kinetine lygtimi:

$$\frac{d}{dt}S(\nu, t) = \sum_{\mu'} (S(\mu', t)P_t(\mu' \rightarrow \nu) - S(\nu, t)P_t(\nu \rightarrow \mu')), \quad (11)$$

kur $S(\nu, t)$ žymi tikimybę laiko momentu t sistemą rasti konfigūracijoje ν , o $P_t(\mu' \rightarrow \nu)$ žymi šuolių iš būsenos μ' į būseną ν tikimybę per laiko vienetą. Šioje lygyje sumavimas yra per visas galimas sistemos būsenas. Dydis P_t susideda iš dviejų pasirinktų konkuruojančių dinamikų:

$$P_t(\nu \rightarrow \mu') = pP_{t,A}(\nu \rightarrow \mu') + (1 - p)P_{t,B}(\nu \rightarrow \mu'), \quad (12)$$

čia A ir B gali žymėti tokio pačio tipo dinamikas, pavyzdžiui, Glauber ir Glauber, [10] arba skirtingo tipo, Glauber ir Kawasaki [11–13]. Pasinaudojant (11) ir (12) lygčių sąlygomis galima porų aproksimavimo (angl. *pair approximation*) metodu ivertinti magnetizacijos ir koreliacijos funkcijų laikines priklausomybes [10, 11].

Konkuruojančios dinamikos modelio savybės yra nulemiamos (12) lygtje apibrėžtų šuolių tarp būsenų tikimybių greičių $P_{t,A}$ ir $P_{t,B}$ išraiškomis. Vieną iš šių dydžių galima nustatyti tokį, kuris atitiktų pasirinktą dinamiką prie begalinės temperatūros. Iš esmės tai vieną iš procesų paverčia energijos šaltiniu, o pati sistema su šiuo šaltiniu veikia kaip su begalinės šiluminės talpos termostatu. Begalinės temperatūros Kawasaki dinamikos atveju šis procesas įneša energiją į sistemą ir nekeičia tvarkos parametru (magnetizacijos).

Tokios nepusiausvyros feromagnetinės sistemos fazinė erdvė pasikeičia priklausomai nuo to ar energiją įnešančio proceso šuolio tarp būsenų tikimybės priklauso nuo tikimybės p . Šiemis dydžiams esant priklausomiems, kritinio sistemos temperatūros taško vertė yra priklausoma nuo dinamikos pasirinkimo tikimybės p [12]. Atitinkamai nuo šios tikimybės vertės kritiniame taške vyksta pirmos arba antros eilės fazinis virsmas.

Platesnis šios fazinės erdvės ištyrimas antiferomagnetinės ir feromagnetinės sukinių sąveikos modeliams yra atliktas [11] autoriu darbe. Šiame tyryme įvedamas santykis tarp tikimybių pasirinkti Glauber ar Kawasaki žingsį, kurį čia žymėsime R , o jo matematinė forma:

$$R = \frac{1-p}{p}, \quad (13)$$

kur p žymi tikimybę pasirinkti Metropolio žingsnį. Feromagnetinio Izingo modelio fazinė erdvė pagal T ir R vaizduoja slenkantį kritinės temperatūros tašką bei nykstančią feromagnetinę sritį. Kai R vertė šiek tiek didesnė už 1 ($p > 0.5$), feromagnetinę sritį pakeičia paramagnetinė sistemos būsena. Kita vertus R reikšmei esant lygiai 2 ($p \approx 0.33$) sistemos konfigūracija visoms temperatūros vertėms pavirsta antiferomagnetine.

Antiferomagnetinio konkuruojančios dinamikos Izingo modelio fazinė erdvė kinta panašiai, tačiau būsenas skiriančios kreivės skiriasi kokybiškai. Esant labai mažoms R vertėms antiferomagnetinės būsenos sritis išnyksta ir modelis yra paramagnetinėje būsenoje.

Sistemos konfigūraciją apibūdinančios būsenos priklausomybė nuo p kartu reiškia, jog šis dydis nulemia ir sukinių koreliaciją. Panašus rezultatas gaunamas nagrinėjant Izingo modelio pagrindinę kinetinę lygtį kvantiniame aprašyme ir iškaitant tolimąją sukinių sąveiką [13]. Šiuo atveju tai reiškia, jog sukinių sąveika neatmetama ir tolimesniems nei tik tarp artimiausiųjų kaimynų. Tokio uždavinio sprendimu gaunama, jog koreliacijos funkcija ir tvarkos parametras (magnetizacija) priklauso nuo p . Šis rezultatas gautas dydžiams T ir p esant nepriklausomiems.

3 Tyrimo metodika

3.1 Įvairovės indeksas

Izingo modelio erdvinės konfigūracijos priklauso nuo sukinių sąveikos energijos J ir temperatūros T . Atitinkamai šios būsenos vadinamos paramagnetine, feromagnetine arba antiferomagnetine. Feromagnitinėje būsenoje susidaro vienas domenas, kuris sudarytas iš $s = \pm 1$ sukinių daugumos. Esant didesnės temperatūros vertėms pasireiškia paramagnetizmas ir konfigūracija panašėja į atsitiktinę, o antiferomagnitinės sukinių sąveikos atveju gaunama konfigūracija primena šachmatų lentą. Visi trys atvejai yra pavaizduoti 4 paveiksle.

Konkuruojančios dinamikos atveju pakinta sistemos fazinės erdvės paveikslas, taigi susidaro įvardintos trys, arba jų tarpinės, erdvinės konfigūracijos. Joms aptikti toliau sukonstruojame kiekybinį dydį, įvairovės indeksą, kuris gali nusakyti šias būsenas.

Įvairovės indekso skaičiavimo procedūra paremta sukinių verčių santykinio standartinio nuokrypio apskaičiavimu esant skirtiniems gardelės masteliams. Tai padaroma iš pirminės gardelės suformuojant naujają su pasirinkta mažesne skyra. Kiekviename, įskaitant ir originalųjį, masteliuose apskaičiavus sukinių verčių standartinį nuokrypi, jis sunormuojamas į originaliojo mastelio vertę ir suformuojama standartinių nuokrypių priklausomybės nuo mastelio kreivė. Ši kreivė vėliau bus panaudojama gauti įvairovės indekso vertei.

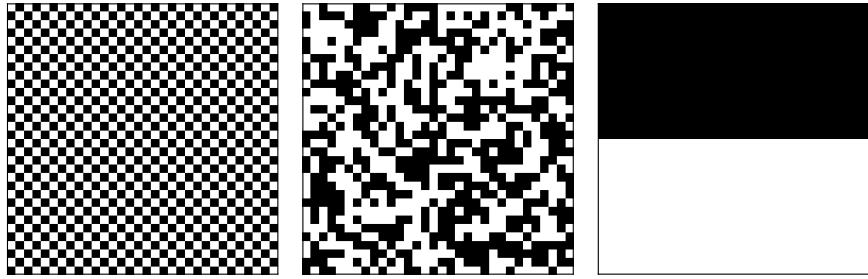
Norint užtikrinti, kad taip sudaroma kreivė būtų unikali, reikia plėciau aptarti kaip sudaromas naujas gardelės mastelis. Pavyzdžiu, esant iš 128×128 sukinių sudarytai kvadratinei gardelei dvigubai sumažinus skyrą gaunama iš 64×64 sukinių sudaryta gardelė. Naujos gardelės sukinių vertė yra atitinkamai keturių gretimų sukinių vidutinė vertė. Šiuo atveju ji nebūtinai lygi ± 1 . Kiekvienas naujas mastelis suformuojamas iš originaliojo, kai jo skyra sumažinama h kartų. Ši vertė apribojama tokia nelygybe:

$$h \leq \log_2 N_x, \quad (14)$$

čia N_x yra kraštinėje esančių sukinių skaičius, o h privalo būti sveikas skaičius.

Bendru atveju santykinio standartinio nuokrypio kreivės atskiriems 4 paveiksle esantiems atvejams įgyja unikalią formą ir yra pavaizduotos 5 paveiksle. Esant dviem atskirtoms skirtingu sukinių grupėms standartinio nuokrypio vertės nesikeičia prie skirtingu mastelių (atveju kai $m = 0$). Esant antiferomagnitinėi konfigūracijai standartinis nuokrypis visiems naujiems masteliams pavirsta nuliniu, taigi gaunama kreivė, kuri įgyja vienetinę vertę tik viename, pradinio mastelio, taške.

Kiek įdomesnis yra atsitiktinio išsimaišymo atvejis. Kadangi naujame mastelyje suformuoto sukinių vertė X yra mažesnių x_i sukinių (kurie laikome tarpusavyje nepriklausomais) vidutinė



4 pav. Įvairovės indekso vertes atitinkančių būsenų konfigūracijos sukiniinėse sistemose. Kairioji $I = -1$ atitinka tvarkingą išsimaišymą (antiferomagnetinę būseną), vidurinioji $I = 0$ atitinka atsitiktinę konfigūraciją (paramagnetinę būseną), o dešinioji konfigūracija $I = 1$ atitinka feromagnetinę būseną.

vertė:

$$X = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i, \quad (15)$$

čia K yra sukinių sujungtų į vieną skaičius, galima parodyti, jog X standartinis nuokrypis bus lygus:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]} = \frac{\sigma_{x_i}}{\sqrt{K}}. \quad (16)$$

Kiekvieno naujojo mastelio santykinis standartinis nuokrypis bus proporcingas originaliajam pagal $K^{-1/2}$, arba h^{-1} pagal (14) lygtį, dėsnį.

Taigi pasirinkus, jog atitinkamai 4 paveiksle esantiems atvejams norime gauti indekso vertes lygias -1 , 0 ir 1 , galime panaudoti 5 paveiksle esančias kreives kaip atskaitos kreives. Šiuo požiūriu įvairovės indekso apskaičiavimo procedūra panaši į grafinį Gini koeficiente įvertinimą [14].

Tarkime gardelės konfigūracijoje turime atsitiktinės konfigūracijos atvejį, t.y. $\sigma(h) = 1/\sqrt{h}$. Šiuo atveju gaukime indekso vertę lygią 0 . Tuomet skaičiuojant integralą (plotą po atsitiktinio modelio $\sigma(h)$ priklausomybe) gaunama tokia funkcinė priklausomybė:

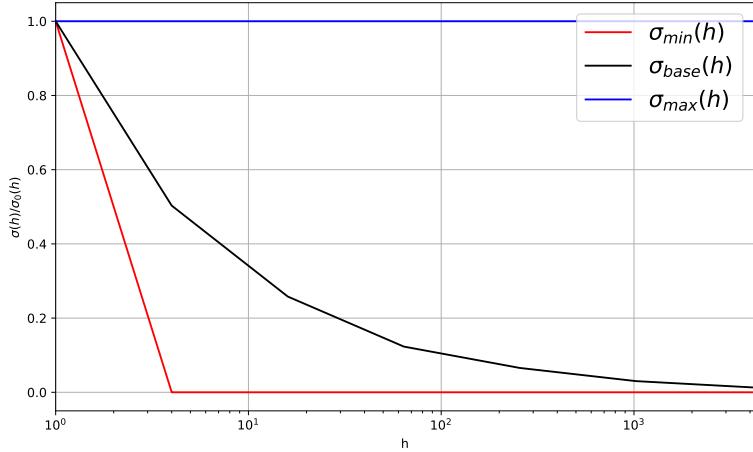
$$A_{base} = \int_1^{h_{max}} \sigma(h) dh = \int_1^{h_{max}} \frac{1}{\sqrt{h}} dh = 2 \left(\sqrt{h_{max}} - 1 \right). \quad (17)$$

čia $\sigma(h)$ žymi santykinio standartinio nuokrypio kreivę pagal 5 paveikslą, o h_{max} atitinka stambausiame mastelyje į vieną erdvinį vienetą apjungtų sukinių skaičių. Norint atsitikinio modelio atveju gauti indekso vertę lygią 0 , reikia ją skaičiuoti taip:

$$I = A_{data} - A_{base}, \quad (18)$$

kur A_{data} žymi nagrinėjamų duomenų atvejį su unikaliu pagal duomenis santykinio standartinio nuokrypio vertės kitimu $\sigma(h)$:

$$A_{data} = \int_1^{h_{max}} \sigma(h) dh. \quad (19)$$



5 pav. Skirtingas įvairovės indekso I vertes atitinkančių santykinio standartinio nuokrypio kreivės. Dydis $\sigma(h)/\sigma_0(h)$ žymi standartinio nuokrypio santykinę vertę pagal smulkiausio mastelio vertę. Pavaizduotos priklausomybės gautos iš kvadaratinės gardelės, kurios dimensijos - 128x128. Mastelio mažinimo verčių h skalė logaritminė.

Toliau įvertinkime feromagnetinės būsenos atvejį, kuomet skirtingi sukiniai yra visiškai atskirti į nepriklausomus domenus. Šiam atvejui parenkame įvairovės indekso vertę lygią 1. Plotas po 5 paveikslėlės atitinkama kreive:

$$A_{max} = \int_1^{h_{max}} \sigma(h) dh = \int_1^{h_{max}} 1 dh = h_{max} - 1. \quad (20)$$

Tam, jog būtų gautas norimas dydis, reikalinga šią lygtį skaičiuoti tuo pačiu principu kaip ir atsitiktinio modelio atveju bei sunormuoti:

$$I = \frac{A_{data} - A_{base}}{A_{max} - A_{base}}. \quad (21)$$

Priešingu, antiferomagnetinės būsenos, atveju parenkame indekso vertę lygią -1. Bandant pasiekti šį rezultatą svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad plotai po kreivėmis fero- ir antiferomagnetiniams atvejams nėra simetriški atsitiktinės konfigūracijos atžvilgiu. Kitaip tariant:

$$A_{max} - A_{base} \neq A_{base} - A_{min}. \quad (22)$$

A_{min} žymi integralo vertę tvarkingo išsimaišymo atveju:

$$A_{min} = \int_1^{h_{max}} \sigma(h) dh = \int_1^{h_{max}} \delta(1-h) dh. \quad (23)$$

Analiziškai pagal 5 paveikslėlė matoma kreivė šio integralo vertė bus lygi 0, tačiau realiu atveju

gausime mažą teigiamą skaičių.

Taigi indekso vertės normavimas priklausys nuo to kaip turima kreivė A_{data} lyginasi su atsitiktinio modelio kreive A_{base} . Tuomet įvairovės indekso apskaičiavimo formulė:

$$I = \begin{cases} \frac{A_{data} - A_{base}}{A_{max} - A_{base}} & \text{jeigu } A_{data} > A_{base}, \\ \frac{A_{data} - A_{base}}{A_{base} - A_{min}} & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \quad (24)$$

3.2 Minkovskio fraktilinė dimensija

Izingo modelio kritinės temperatūros srityje pasireiškiantis skalės invariantišumas lemia įvairaus dydžio ir formų sukinių domenų susiformavimą [6]. To pasekoje sistemos tvarkos parametrai kritinėje srityje kinta kaip laipsninės funkcijos (angl. *power-law scaling*), pavyzdžiui, kaip (2) išraiškoje. Iš tiesų tokio tipo mastelinis proporcingumas (angl. *scaling*) yra panašus į fundamentalią dimensijos savybę užrašyta (25) lygtje [15]. Kritinės temperatūros srityje susiformuojantys sukinių domenai pasižymi fraktilinei geometrijai būdingomis savybėmis ir jiems galima apskaičiuoti fraktilinę dimensiją [16, 17].

Vienas paprasčiausių skaitinių metodų nustatyti fraktilinę dimensiją yra angliskai vadintinas *box-counting* algoritmas. Šiuo algoritmu nustatoma Minkovskio-Buligando dimensijos vertė. Jos apskaičiavimas paremtas prielaida, jog erdinį rinkinį F galima pamatuoti mato M vienetais (pavyzdžiui, dėžutėmis ar kubeliais), kurių geometrinis dydis (ilgis) δ :

$$M_\delta(F) \propto c\delta^{-d}, \quad (25)$$

kur c žymi proporcingumo konstantą, o d yra dimensija. Topologinės erdvės atveju dimensija d atitinka sveiką skaičių. Tokio tipo proporcingumą logaritmavus:

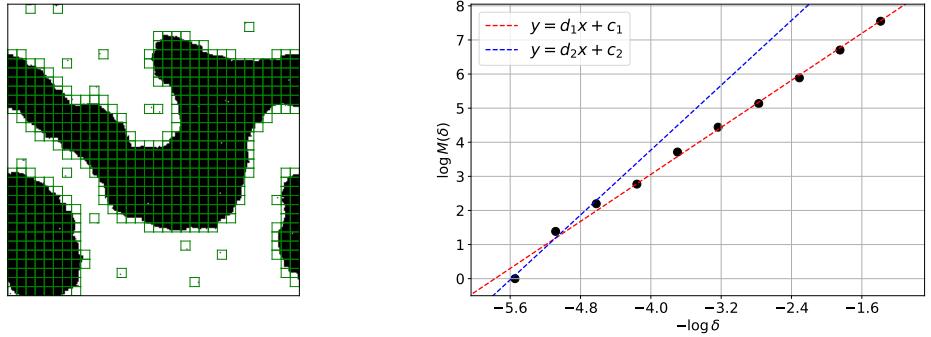
$$\log M_\delta(F) \propto \log c - d \log \delta. \quad (26)$$

Riboje δ artėjant link nulio, (26) proporcijos abiejų pusiu skirtumui taip pat mažėjant, t.y. egzistuojant ribai:

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (27)$$

Taip apibrėžiama dimensija d gali būti bet koks racionalus skaičius. Tokio fraktilinės dimensijos apibrėžimo pranašumas yra lengvas jos skaitinis apskaičiavimas. Dimensija gali būti tiesiogiai apskaičiuojama iš logaritminių ašių grafiko kaip parodyta 6 paveiksle. Kartu du būdingiausi (27) lygtje esančio apibrėžimo trūkumai - taip gaunama vertė nėra vienareikšmiška ir praktikoje dydis δ visuomet turi baigtinę (didesnę už 0) vertę [15].

Iš tiesų *box-counting* metodu gaunama dimensija gali skirtis priklausomai nuo δ verčių.



6 pav. *Box-counting* metodo dėžučių pritaikymas kai $\delta = 8$ (kairėje) ir grafikas (dešinėje) tos pačios gardelės fraktalinei dimensijai d nustatyti pagal (27) lygtį. Kvadratinė gardelė susideda iš 256^2 . Iš grafiko matyti, jog gaunamas skirtingas proporcijumo koeficientas s aproksimuojant tiese pasirinktinai dideliems (y_2) ar mažiems (y_1) δ .

Todėl atitinkamai yra apibrėžiamos viršutinė ir apatinė dimensijos:

$$\begin{cases} \overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}, \\ \underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}. \end{cases} \quad (28)$$

Šioje lygtijoje \dim_B žymi viršutinę arba apatinę Minkovskio fraktalinę dimensiją. Skirtingos dimensijos vertės gaunamos dėl to, jog nebūtinai egzistuoja tikra tiesinė aproksimacija. Pavyzdžiui, 6 paveiksle galima matyti, jog galima gauti skirtinges kreivius proporcijumo koeficientus pasirenkant tik pirmus tris arba tik tris paskutinius taškus. Tai yra susiję su struktūros (fraktales) savybe turėti nevienodas mastelinio proporcijumo (angl. *scaling*) savybes skirtiniams δ verčių intervalams.

Dėžučių δ verčių pasirinkimo įtaka dimensijos F vertei yra nepageidaujamas rezultatas. Todėl Izingo modelio atveju yra racionalu šias dėžutes parinkti pagal susidarančių domenų savybes. Pavyzdžiui, viršutinę δ verčių riba nustatyti pagal koreliacijos funkcijos ξ vertes [17]. Be to gardelės dydis taip pat turės reikšmės gaunamam rezultatui. Šiuo atveju skaičiuojant fraktalinę dimensiją δ vertės varijuos nuo vieną gardelės sukinij talpinančios dėžutės iki talpinančios keturis.

4 Tyrimo rezultatai

4.1 Energijos ir tvarkos parametru kitimas konkuruojančios dinamikos Izingo modelyje

Konkuruojanti Izingo dinamika buvo modeliuota Monte Carlo eksperimentu panaudojant Metropolio ir Kawasaki interpretacijas. Kvadratinės gardelės, sudarytos iš 64×64 sukinių, nusistovėjimui buvo atlikta 10^5 žingsnių. Viename žingsnyje kiekvienas gardelės sukinys buvo pasirenkamas vidutiniškai po vieną kartą (t.y. kiekviename žingsnyje buvo atliekami 64^2 Metropolio arba Kawasaki žingsniai). Sistemai nusistovėjus buvo įvertinti sistemos būseną ir erdvinį pasiskirstymą nusakantys dydžiai. Energijos, vidutinės magnetizacijos, įvairovės indekso ir fraktalinės dimensijos verčių vidurkiams įvertinti atlikta 100 gardelės žingsnių.

Konkuruojanti dinamika buvo įgyvendinta pasinaudojant 2.3 skyriuje aprašytu p dydžiu, nusakančiu tikimybę įvykti žingsniui pagal Metropolio dinamiką. Atitinkamai su tikimybe $1 - p$ buvo atliekamas globalus Kawasaki dinamikos žingsnis. Modelio būsenoms buvo parinktos keturios Metropolio ir Kawasaki dinamikų temperatūrų kombinacijos. Trim atvejais Metropolio dinamikos temperatūra buvo varijuojama ir apskaičiuota priklausomybė nuo jos esant pastovioms Kawasaki žingsnių temperatūroms. Ketvirtuoju atveju Kawasaki ir Metropolio temperatūros buvo lygios. Pastovios Kawasaki temperatūros vertės buvo lygios nulinei, kritinės temperatūros vertei bei begalinei. Kritinė vertė apytiksliai lygi:

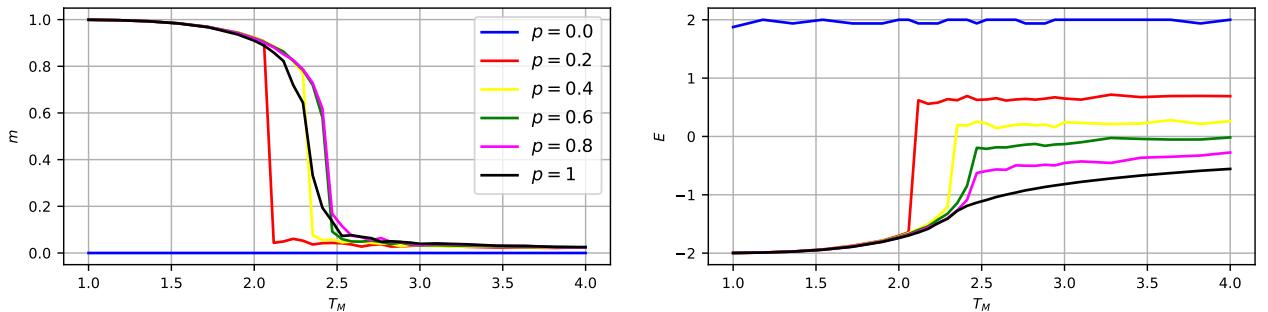
$$T_C = \frac{2J}{k_b \log(1 + \sqrt{2})} \approx \frac{2.269J}{k_B}. \quad (29)$$

Visų konkuruojančių dinamikų vidutinės magnetizacijos ir energijos priklausomybės nuo Metropolio dinamikos temperatūros T_M pateiktos 7 paveiksle.

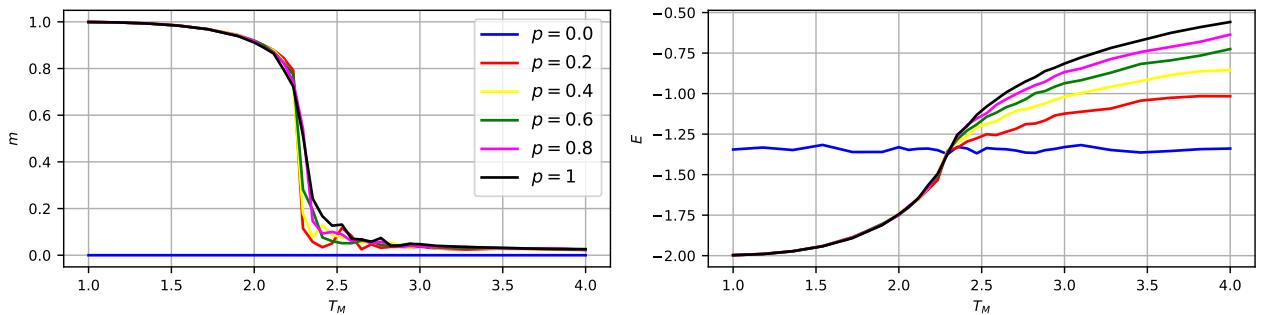
Siekiant atkartoti nepusiausvyrojo Izingo modelio rezultatus [11, 12] buvo apskaičiuotos begalinės temperatūros Kawasaki dinamikos konkurencija su Metropolio dinamikos temperatūroms. Be to buvo įvesta papildoma Kawasaki sąlyga, jog būtų priimami tik energiją didinantys žingsniai [11]. Gautos vidutinės energijos ir magnetizacijos kreivės kokybiškai sutampa su kitų autorų rezultatais ir parodo pakitusią kritinės temperatūros vertę [12] (žr. 7 pav. 1 eilutę). Kartu ir vidutinės energijos vertės srityje $T > T_C$ konkuruojančiai dinamikai yra padidėjusios per konstantą dėl Kawasaki žingsnių energijos įnašo į sistemą. Šio įnašo poveikis priklauso nuo tikimybės $1 - p$ įvykti Kawasaki žingsniui.

Kawasaki dinamikos temperatūrai esant kritinei konkuruojančios dinamikos rezultatai panašesni į tipinę Metropolio interpretacijos dinamiką (žr. 7 pav. 2 eilutę). Žesmesnėms nei kritinė temperatūros vertė vidutinė energija ir magnetizacija atitinka pusiausvyros Metropolio dinamikos atvejį. Paramagnetinėje Metropolio dinamikos srityje Kawasaki šuoliai mažina sistemos energiją ir ji yra mažesnė negu veikiant tiktais Metropolio dinamikai.

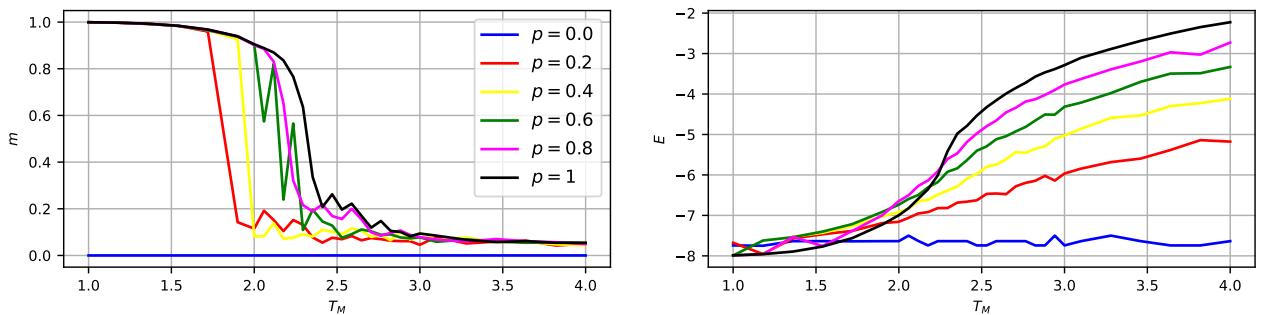
Begalinės temperatūros Kawasaki dinamika



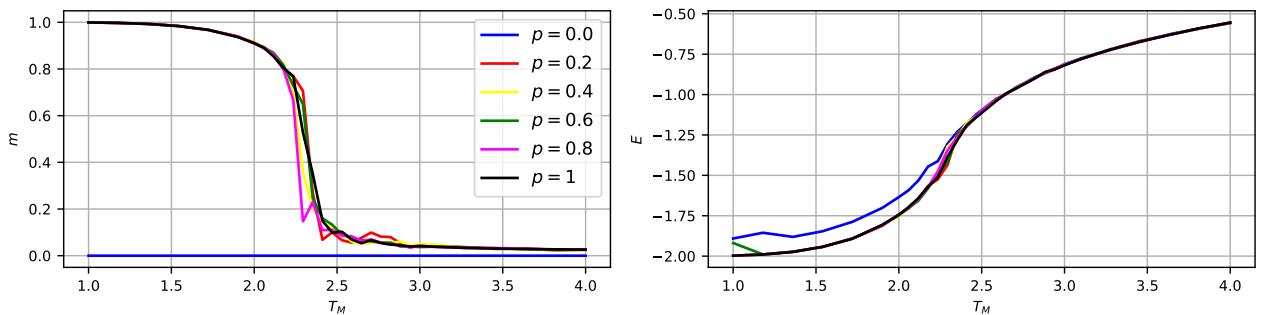
Kritinės temperatūros Kawasaki dinamika



Nulinės temperatūros Kawasaki dinamika



Kawasaki temperatūra lygi Metropolio temperatūrai



7 pav. Konkuruojančios dinamikos Izingo modelio vidutinės energijos E ir magnetizacijos m verčių priklausomybės nuo Metropolio dinamikos temperatūros. T_K žymi Kawasaki dinamikos temperatūra, T_M žymi Metropolio dinamikos temperatūra, p žymi tikimybę konkuruojančioje dinamikoje įvykti žingsniui pagal Metropolio interpretaciją.

Panašūs kokybiniai rezultatai $T > T_C$ Metropolio srityje gaunami Kawasaki temperatūrai esant lygiai nuliui (žr. 7 pav. 3 eilutę). Šioje srityje Kawasaki mažina sistemos energiją ženkliau negu kritinės Kawasaki temperatūros atveju. Kita vertus tokios dinamikos poveikis jau matyti ir feromagnetinę būseną atitinkančios temperatūroms. Nulinės Kawasaki temperatūros atveju gardelėje formuojasi sąstingio situacija, metastabili būsena [5]. Kawasaki atveju yra formuojamos priešingų sukinių juostos, kurios atskiria sukinius nuo pagrindinio domeno ir taip mažina sistemos energiją.

Galų gale Metropolio ir Kawasaki temperatūroms sutampant, konkuruojančios dinamikos sistemos būseną nusakančios vertės yra identiškos įprastinei Metropolio situacijai. Iš esmės tai yra panašu į pusiausvyros sistemos stabilią būseną.

4.2 Erdvinės įvairovės matų verčių kitimas konkuruojančios dinamikos Izingo modelyje

Tokiomis pačiomis Monte Carlo eksperimento sąlygomis kaip įvardyta 4.1 skyriuje buvo apskaičiuoti ir tyrimo metodikoje nurodyti dydžiai - įvairovės indeksas bei fraktalinė dimensija. Erdvinę įvairovę nusakančiais dydžiais buvo įvertinta sistemos konfigūracija ir būsena. Kitas svarbus aspektas yra šių erdvinės įvairovės dydžių kokybinis tarpusavio palyginimas, kadangi jų abiejų įvertinimo procedūra yra glaudžiai susieta su sistemos mastelio keitimu.

Fraktalinės dimensijos vertė visų skaičiavimų metu buvo įvertinama daugumą sudarantiems sukiniams. T.y. priklausomai nuo vidutinės sistemos magnetizacijos vertės. Be to, bendru atveju pagal kraštutinių dėžučių ilgių intervalo pasirinkimo atvejais gaunami skirtinės rezultatai. Fraktalinės dimensijos verčių priklausomybė nuo Metropolio dinamikos temperatūros kokybiškai skiriiasi $T > T_C$ srityje.

Fraktalinės dimensijos vertės feromagnetinėje srityje Izingo modeliui pagal Metropolio interpretaciją yra artimos dvejetui. Rezultato galima tikėtis, kadangi šioje srityje yra susiformavęs vienintelis domenas, o savo dimensija jis primena dvimatę topologinę dimensiją. Kita vertus abiejų fraktalinių dimensijų atvejais galima pastebeti verčių sumažėjimas kritinės temperatūros srityje. Tai gali būti susiję su skalės invariantiškumo sąlygotu klasterių fraktališkumu [16].

Iš esmės *box-counting* metode pasirinktas dėžučių intervalas nulemia fraktalinės dimensijos vertes šiluminio triukšmingumo srityje, t.y. $T > T_C$. Kadangi koreliacijos nuotolio vertė šioje srityje yra eksponentiškai mažėjanti ir nenulinė, formuojasi ypač maži domenai, kuriuos mažų dėžučių dydžio parinkimas užfiksuoja. Kita vertus didelių dėžučių atvejui vėl artėjama prie dvimatės dimensijos.

Keturiams skirtiniams konkuruojančios dinamikos atvejams įvairovės indekso ir Minkovskio fraktalinės dimensijos priklausomybes nuo Metropolio dinamikos temperatūros galima matyti 8 paveiksle. Šiame paveiksle fraktalinės dimensijos vertės gautos su mažesniais dėžučių ilgiais δ , siekiančiais iki 4 tarpų tarp sukinių ilgio. Apatinė δ riba atitinka 1 sukinių talpinančią

dėžutę.

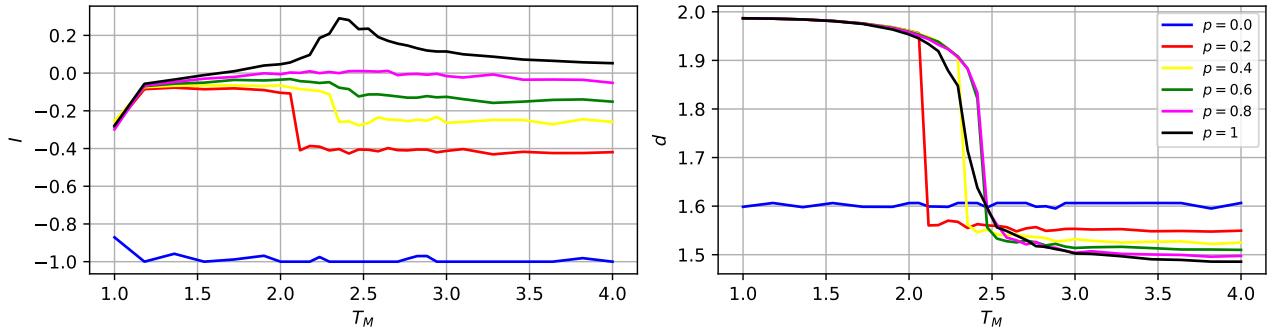
Modeliuojant literatūroje sutikta konkuruojančios dinamikos versiją, kuomet Kawasaki dinamika veikia kaip energiją įnešantis mechanizmas, gautos įvairovės indekso vertės atitinka [11] rezultatus (žr. 8 pav. 1 eilutę). Priklausomai nuo p vertės sistema yra paramagnetinėje arba antiferomagnetinėje būsenoje. Tačiau skirtumas tarp šių rezultatų yra tas, kad būsenos pakitimas vyksta nepakitusioje kritinės temperatūros srityje.

Kawasaki temperatūrai esant lygiai kritinei temperatūrai gaunama didžiausia įvairovės indekso vertė (žr. 8 pav. 2 eilutę). Metropolio interpretacijos atveju didžiausia įvairovės indekso vertė gaunama kritinės temperatūros taške. Vertinant pagal šio indekso vertes galima teigti, jog modelio gardelėje formuojasi labiau atskirti domenai ir susimaišymas mažėja.

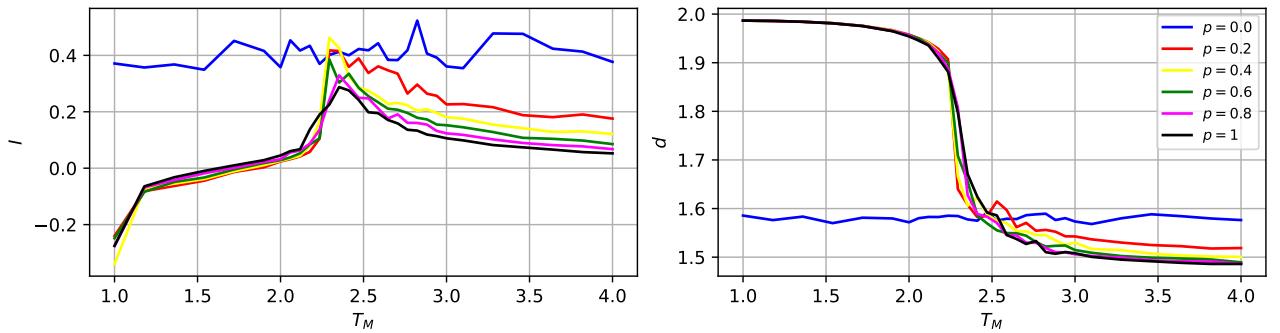
Jeigu Kawasaki temperatūra yra nustatyta lygi nulinei, galima pastebeti išaugusias įvairovės indekso vertes feromagnetinėje Metropolio dinamikos srityje ($T < T_C$) (žr. 8 pav. 3 eilutę). Kadangi žinoma, jog įvairovės indeksas geriausiai fiksuoja kritinės temperatūros srityje būdinga domenų atskyrimą, o ne vieno domeno susiformavimą, galima teigti, jog panaši struktūra susidaro ir žemų temperatūrų srityje. Kawasaki sąveika šioje srityje pasireiškia fazijų atskyrimo veikimu [7]. Tokioje būsenoje domenai yra atskirti, tačiau pasižymi dideliu salyčio perimetru. Natūralu, jog grynam Kawasaki dinamikos atvejui šioje srityje įvairovės indekso vertės didžiausios.

Be to, šiam Kawasaki dinamikos temperatūros atvejui gaunama kitokia fraktalinės dimensijos verčių dinamika. Iki šiolei stebėtas dimensijos verčių sumažėjimas kritinėje srityje pasireiškia jau anksčiau - žemų temperatūrų srityje. Tas pats efektas matosi ir aukštesnėms temperatūroms, kur fraktalinės dimensijos vertės lėčiau slopsta. Kritinėje temperatūroje susiformuojančios struktūros išplinta iš žemų ir dalį aukštesnių temperatūrų sritis.

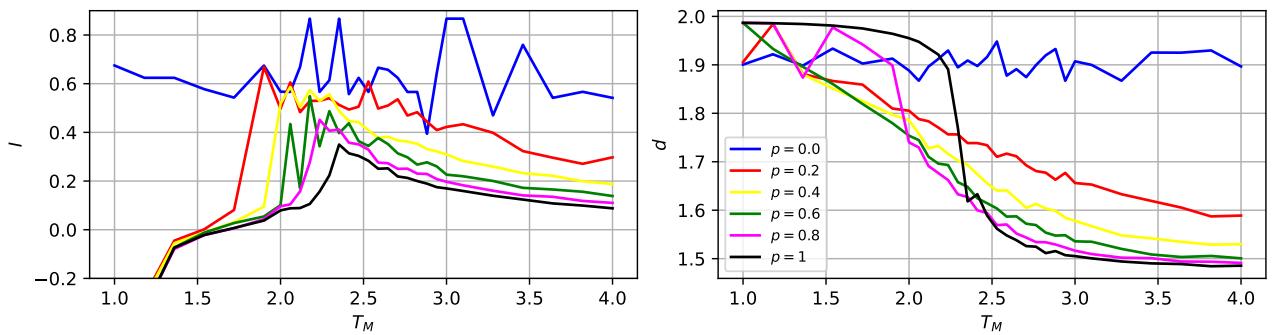
Begalinės temperatūros Kawasaki dinamika



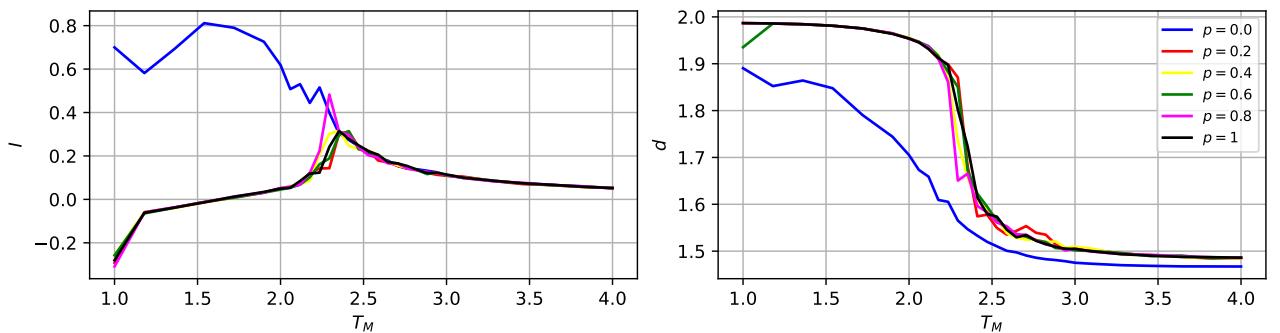
Kritinės temperatūros Kawasaki dinamika



Nulinės temperatūros Kawasaki dinamika



Kawasaki temperatūra lygi Metropolio temperatūrai



8 pav. Konkuruojančios dinamikos Izingo modelio įvairovės indekso I ir fraktalinės dimensijos d verčių priklausomybės nuo Metropolio dinamikos temperatūros. T_K žymi Kawasaki dinamikos temperatūra, T_M žymi Metropolio dinamikos temperatūra, p žymi tikimybę konkuruojančioje dinamikoje įvykti žingsniui pagal Metropolio interpretaciją.

5 Išvados

1. Konkuruojanti dinamika su kritine (nuline arba begaline) Kawasaki temperatūra pakeičia Izingo modelio konfigūracijas skirtingoms temperatūroms. Gauti pakitusios kritinės temperatūros taško ir atsirandančios antiferomagnetinės būsenos rezultatai sutampa su kitų autorių rezultatais [11, 12].
2. Mažo mastelio skalės fraktalinė dimensija konkuruojančios dinamikos Izingo modelyje priklauso nuo temperatūros kaip sistemos įmagnetėjimas. Priešingai negu įvairovės indekso atveju, fraktalinė dimensija yra kokybiškai panaši skirtinę erdvinę įvairovę nusakančios antiferomagnetinėms ir feromagnetinėms būsenoms.

Literatūros sąrašas

- [1] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, Statistical physics of social dynamics, Rev. Mod. Phys. **81**, 591–646 (2009), <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.81.591>
- [2] D. Stauffer, A biased review of sociophysics, Journal of Statistical Physics **151** (2012), <http://dx.doi.org/10.1007/s10955-012-0604-9>
- [3] J. Fernández-Gracia, K. Suchecki, J. J. Ramasco, M. Miguel, V. Eguíluz, Is the voter model a model for voters?, Physical Review Letters **112**, 158701 (2014), <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.158701>
- [4] A. Kononovicius, Compartmental voter model, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2019**, 103402 (2019), <http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/ab409b>
- [5] P. Krapivsky, S. Redner, E. Ben-Naim, A kinetic view of statistical physics, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010 349 (2010), <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511780516>
- [6] B. K. C. Parongama Sen, *Sociophysics: An Introduction* (Oxford university Press, 2014)
- [7] M. E. J. Newman, G. T. Barkema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics* (Clarendon Press, Oxford, 1999)
- [8] H. Jang, M. Grimson, T. Woolf, Stochastic dynamics and the dynamic phase transition in thin ferromagnetic films, Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics **70**, 047101 (2004), <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.70.047101>
- [9] D. Landau, K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulation in Statistical Physics* (Cambridge University Press, 2005), <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511994944>
- [10] T. Tome, M. J. de Oliveira, M. A. Santos, Non-equilibrium ising model with competing glauber dynamics, Journal of Physics A: Mathematical and General **24**(15), 3677 (1991), <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/24/15/033>
- [11] W. Figueiredo, B. Grandi, Competing spin dynamics in ising systems, Brazilian Journal of Physics **30** (2000), <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332000000100006>
- [12] J. Gonzalez-Miranda, P. Garrido, J. Marro, J. Lebowitz, Nonequilibrium phase diagram of ising model with competing dynamics, Physical Review Letters **59** (1987), <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.1934>
- [13] S. Artz, S. Trimper, Competing glauber and kawasaki dynamics, International Journal of Modern Physics B **23** (1998), <http://dx.doi.org/10.1142/S0217979298001393>

- [14] F. Cowell, *Measurement of inequality* (2000), 87–166, [http://dx.doi.org/10.1016/S1574-0056\(00\)80005-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1574-0056(00)80005-6)
- [15] *Alternative Definitions of Dimension* (John Wiley Sons, Ltd, 2003), chapter 3, 39–58, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/0470013850.ch3>, <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1002/0470013850.ch3>
- [16] W. Janke, A. Schakel, Fractal structure of spin clusters and domain walls in the two-dimensional ising model, *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* **71**, 036703 (2005), <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.71.036703>
- [17] E. Agliari, R. Burioni, D. Cassi, A. Vezzani, Fractal geometry of ising magnetic patterns: Signatures of criticality and diffusive dynamics, *European Physical Journal B* **49** (2008), <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2006-00025-1>