Cálculo de errores en las medidas

Introducción

En estas páginas se recogen las conclusiones más importantes correspondientes al cálculo de errores, que pueden utilizarse como referencia para el cálculo de errores que hay que realizar en cada unos de las prácticas descritas en este cuaderno.

Todo valor de una magnitud física determinada experimentalmente se representa simepre de la siguiente forma: $x_m + \Delta x$, y se expresa siempre, también, en las unidades adecuadas. Esto significa que el experimentaodr considera que, con mucha probabilidad, el valor de la magnitud que se está midiendo se encuentra en el ango comprendido entre los valores: $x_m - \Delta x$ y $x_m + \Delta x$, siendo x_m la mejor estimación del valor verdadero de x. Evidentemente, las posibilidades de fallo en la estimación realizada dependen del valor de Δx, cantidad positica que recibe el nombre de *incertidumbre* o *error*. La manera de asignar los valores de x_m y Δx no esúnica, y depende de las suposiciones que se hagan sobre la naturaleza de los errores. Normalemente, se supone que los errores son *aleatorios*, que están *descorrelacionados* con los de otras magnitudes y que siguen una *distribución gaussiana*. Bajo estas suposiciones, existen reglas que permiten çalcular"los errores. Sin embargo, debe tenerse en cuenta siempre que los valores asignados a Δx son ***solamente estimaciones***; esto es, el valor asignado es un *valor aproximado* y que se considera *razonable*. Por ello, en el çálculo de errores"debe intervenir el sentido común a la hora de decidir cuál es el errore en una medida.

Los errores mencionados hasta el momento son **errores absolutos**. El **error relativo** se define como el cociente entre el error absoluto y x_m: $e = \frac{\Delta x}{x_m}$, donde Δx se toma en valor absoluto, de manera que e siempre es positivo. El error relativo representa un índice de la *precisión de la medida*. Como se verá, trabajar con errores relativos tiene sus ventajas, puesto que puede acelerar notablemente el cálculo de los errores relacionados con expresiones complicadas. Además, el error relativo también indica cuál es la mayor contribución al error de una determinada magnitud.

Cifras significativas y errores relativos

Una de las primeras cuestiones a decidir, en lo relativo al cálculo de errores es la "precisión.en el error, es decir, cuál es el número de ***cifras significativas*** que se deben asignar a un determinado valor. Para tomar una decisón, no se necesita entrar en el cálculo de los errores de los errores, ya que, en general, éstos son tan grandes que basta una regla general: **los errores se deben**

dar normalmente con una cifra significativa; únicamente en casos excepcionales se pueden dar con una cifra y media: la segunda cifra 5 ó 0, o dos cifras.

El concepto de error relativo está íntimamente relacionado con la noción más familiar de cifra significativa. De hecho el número de cifras significativas en una cantidad es un indicador aproximado de su error relativo. Por ejemplo, consideremos los números 510 y 0.51; y supongamos que ambos han sido determinados con dos cifras significativas. Esto significa que según lo que hemos dicho, en nuestra notación, deberían expresarse como 510±10 y 0.51±0,01. En ambos casos el error relativo es un 0.2 %. En otras palabras, decir que ambas cantidades han sido determiandas con dos cifras significativas equivale a decir que sus errores relativos son del 2 %. Del mismo modo, tres cifras significativas se correspondería con un error relativo del 0.2 %. Por supuesto, esta aproximación es solo aproximada. Por ejemplo, el número 110 determinado con dos cifras significativas implica que debemos dar la cantidad de la siguiente manera: 110±10, lo cual supone asignar un error relativo del 9 %. Finalmente, expresar la cantidad 910 con dos cifras significativas supone cometer un error relativo del 1 %. A pesar de todo, las consdiraciones de caracter general que se establecen en la tabla siguiente, pueden ser de gran utilidad para estimar los errores con rapidez en magnitudes que sean funcionalmente dependientes de otras que se miden directamente. Así, la correspondencia entre las cifras significativas y los errores relativos puede resumirse como sigue:

Número de cifras significativas	El error relativo está entre...	**El error relativo es muy probablemente...**
1	9 % – 90 %	20 %
2	0.9 % – 9 %	2 %
3	0.09 % – 0.9 %	0.2 %

Estimación de errores en el caso de medidas directas

Pocos experimentos son tan sencillos que la magnitude final se mida de forma directa (**medidas directas**), sino que, por lo general, se tienen que medir los valores de varias magnitudes primarias y combinar los resultados para obtener el valor de la magnitud requerida (**medidas indirectas**). *Los errores en la medida de la magnitudes primarias determinan el error en el resultado final.* En general, **los errores primarios contribuyen en diferente grado al error final. As, es conveniente concentrar los recursos finitos disponibles de tiempo, aparatos y paciencia en reducir los errores primarios que contribuyen en mayor grado**.

Si al tratar de medir una magnitud por medida directa realizamos varias medidas, con el fin de corregir los errores aleatorios, y los resultados obtenidos son $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se adopta como mejor estimación del **valor verdadero**, antes lo hemos representado como x_m, al valor medio, $\overline{x}$, que vienen dado por la siguiente expresión:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Por otro lado, la mejor estimación del error, apra el valor experimental, obtenido como valor medio del conjunto de n medidas, es el denominado **error cuadrático**:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k^2}{n(n-1)}} \tag{2}$$

donde $\epsilon_k = \overline{x} - x_k$. El error Δx calculado de esta forma es un número que situa en un 68 % la probabilidad de que el valor verdadero se encuantre en el intervalo definido por los valores $\overline{x} - \Delta x$ y $\overline{x} + \Delta x$. La probabilidad será de un 95.4 % entre $\overline{x} \pm 2\Delta x$, y de un 99.7 %, en $\overline{x} \pm 3\Delta x$. **La identificación del error de un valor experimental con elerror cuadrático obtenido de n medidas directas cosecutivas solo es válida en el caso de que el error cuadrático sea mayor que el error instrumental, es decir, que aquel que viene definido por la resolución del aparato de medida. Este error instrumental es la unidad más pequea que el instrumento puede apreciar; se denomina resolución o sensibilidad instrumental**.

Medidas indirectas. Propagación de errores

Suma de errores en cuadratura

En muchos casos, el valor experimental de una magnitud se obtiene, de acuerdo a una determinada expresión matemática, a partir de la medida directa de otras magnitudes de las que depende. Se trata entonces de conocer el error en la magnitud derivada, a partir de los errores de las magnitudes medidas directamente. A este problema se le denomina *propagación de errores*.

Supongamos que la magnitud y viene determinada por la medida de varias magnitudes: $p, q, r, \cdots$, con las que está ligada por la función $y = f(p, q, r, \cdots)$. Entonces, el error en la magnitud final a determinar viene dado por la siguiente expresión:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial p} \Delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial q} \Delta q\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial r} \Delta r\right)^2 + \cdots} \tag{3}$$

$\frac{\partial \overline{f}}{\partial p}, \frac{\partial \overline{f}}{\partial p}, \frac{\partial \overline{f}}{\partial p}, \cdots$ son las derivadas parciales de la función f respecto a cada una de las variables $p, q, r, \cdots$, evaluadas en los valores medios de $p, q, r, \cdots$.

Estimación del límite superior del error

La expresión general anterior puede sustituise, para acelerar cálculos preiminares, por una estimación más pesimista de Δy, la siguiente:

$$(\Delta y)_{\text{máx}} = \left|\frac{\partial \overline{f}}{\partial p}\right| \Delta p + \left|\frac{\partial \overline{f}}{\partial q}\right| \Delta q + \left|\frac{\partial \overline{f}}{\partial r}\right| \Delta r + \cdots \tag{4}$$

De hecho, $\Delta y \leqslant (\Delta y)_{\text{máx}}$, dado que la ecuación anterior requiere que se dé un hecho poco probable dentro de la teoría de Gauss: la ocurrencia simultánea en una medida de $p + \Delta p, q + \Delta q, r\Delta r$ ó de $p - \Delta p, q - \Delta q, r - \Delta r, \cdots$.

Estimación del error en el caso de productos y cocientes. Uso de los errores relativos

Si la funación $y = f(p, q, r, \cdots)$ es del tipo $y =$ constante $\dot{p}^n \dot{q}^m \dot{r}^s \cdots$, donde $m, n, s, \cdots$ son exponentes arbitrarios (enteros, negativos o fraccionarios), las ecuaciones anteriores se convierten en expresiones que relacionan los errores relativos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 &= n^2\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + m^2\left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2 + s^2\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \cdots \\ \frac{(\Delta y)_{\text{máx}}}{|y|} &= n\frac{\Delta p}{|p|} + m\frac{\Delta q}{|q|} + s\frac{\Delta r}{|r|} + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

La ventaja de estas expresiones puede verse con el siguiente ejemplo. Supongamos que se quiere medir la eficiencia de un motor de corriente continua, usándolo para elevar una mas m a una latura h. El trabajo necesario es mgh. La energía suministrada por el motor es VIt; V es voltaje de alimentación; I, la intensidad, y t, el tiempo durante el que trabaja el motor. La eficienci, e, es el cociente netre le trabajo sumistrado por el motor y la energía eléctrica suministrada al mismo: $e = \frac{mgh}{VIt}$. Supongamos que m, h, V e I pueden medirse con un 1 % de precisión, mientras que la precisión en la medida del tiempo es del 5 %. Por supuesto, g se conoce con una precisión mucho mayor que el 1 %. Aplicando la fórmula anterior, se obtendría que el error relativo de e es de un 5 %. Pero lo que es más importante, a partir de dicha fórmula es evidente que la única contribución al error de e está dad por Δt; es decir, que $\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta t}{t}$. En definitiva, una evaluación previa de los errores contribuyentes puede simplificar el cálculo enormemente, reduciendo el número de equivocaciones deraivadas de la complejidad de algunas ecuaciones obtenidas de la fórmula anterior.

Discrepancias. Comparaión entre valores medios y valores aceptados

Se define la **discrepancia** como la diferencia entre dos valores medidos correspondinetes a la misma mahnitud f'isica. La discrepancia puede o no ser significativa. Si dos experimentadores miden la misma resistencia y sus resultados son 40 ± 5 Ω y 42 ± 8 Ω, la dsicrepancia es de 2 Ω es menor que sus errores y, por lo tanto, ambas medidas son consistentes. La discrepancia no es significativa. Pero si las medidas hubieran sido 35 ± 2 Ω y 45 ± 1 Ω, ambas medidas serían claramente inconsistentes y la discrepancia de 10 Ω sería significativa. Esto querrí decir que habría que investigar los datos experimentales para intentar descubrir qué es lo que ha ido mal. En el laboratorio de prácticas, muchas veces se miden cantidades como la velocidad del sonido del aire, la velocidad de la luz, la carga del electrón, etc $\cdots$, que han sido medidas muy precisamente muchas veces, y para las cuales existen valores aceptados y publicados. El valor aceptado, pr supuesto, no es exacto, pero aún así, la precisión de estas constates es muy superior a la que se puede alcanzar en un laboratorio de prácticas. En estos casso los resultados obtenidos serán ciertos si el valor aceptado está dentro del rango de error del valor medido. Así, si un estudiante mide en el laboratorio la velocida del aire y obtiene que vale 329 ± 5 m/s, su resultado es satisfactorio, dado que le valor aceptado es 331 m/s, y, por lo tanto, entra en el rango de su error de medida. Incluso un valor como 325 ± 5 m/s podría ser igualmente aceptable, dado que existe alredeedor de 30 % de probabailidad de que el valor verdadero esté fuera del rango $[320, 333]$ m/s. Discrepancias mayores, como 345 ± 2 m/s, serían inaceptables.