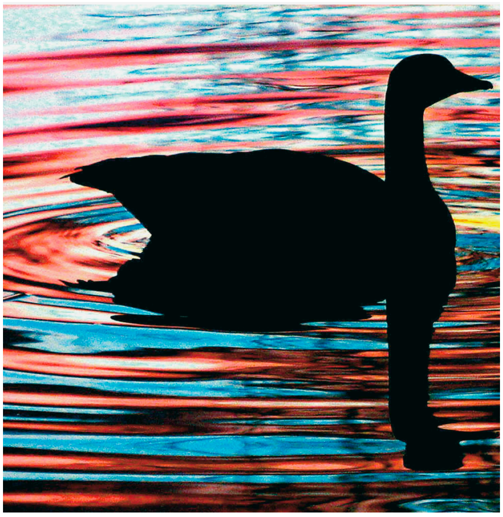
Prácticas de laboratorio
Física I

Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Euskal Herriko Unibertsitatea

Curso 2018-2019




Índice

Introducción.
Cálculo de errores en las medidas 5

Práctica 1.
Péndulo físico 9

Práctica 1.
Ley de Hooke 13

Práctica 2.
Plano inclinado 17

Apéndice
Regresiones lineales 25

Cálculo de errores en las medidas

Introducción

En estas páginas se recogen las conclusiones más importantes correspondientes al cálculo de errores, que pueden utilizarse como referencia para el cálculo de errores que hay que realizar en cada unos de las prácticas descritas en este cuaderno.

Todo valor de una magnitud física determinada experimentalmente se representa simepre de la siguiente forma: $x_m + \Delta x$, y se expresa siempre, también, en las unidades adecuadas. Esto significa que el experimentaodr considera que, con mucha probabilidad, el valor de la magnitud que se está midiendo se encuentra en el ango comprendido entre los valores: $x_m - \Delta x$ y $x_m + \Delta x$, siendo x_m la mejor estimación del valor verdadero de x. Evidentemente, las posibilidades de fallo en la estimación realizada dependen del valor de Δx, cantidad positica que recibe el nombre de *incertidumbre* o *error*. La manera de asignar los valores de x_m y Δx no esúnica, y depende de las suposiciones que se hagan sobre la naturaleza de los errores. Normalemente, se supone que los errores son *aleatorios*, que están *descorrelacionados* con los de otras magnitudes y que siguen una *distribución gaussiana*. Bajo estas suposiciones, existen reglas que permiten çalcular"los errores. Sin embargo, debe tenerse en cuenta siempre que los valores asignados a Δx son ***solamente estimaciones***; esto es, el valor asignado es un *valor aproximado* y que se considera *razonable*. Por ello, en el çálculo de errores"debe intervenir el sentido común a la hora de decidir cuál es el errore en una medida.

Los errores mencionados hasta el momento son **errores absolutos**. El **error relativo** se define como el cociente entre el error absoluto y x_m: $e = \frac{\Delta x}{x_m}$, donde Δx se toma en valor absoluto, de manera que e siempre es positivo. El error relativo representa un índice de la *precisión de la medida*. Como se verá, trabajar con errores relativos tiene sus ventajas, puesto que puede acelerar notablemente el cálculo de los errores relacionados con expresiones complicadas. Además, el error relativo también indica cuál es la mayor contribución al error de una determinada magnitud.

Cifras significativas y errores relativos

Una de las primeras cuestiones a decidir, en lo relativo al cálculo de errores es la "precisión.$^{\text{en}}$ el error, es decir, cuál es el número de ***cifras significativas*** que se deben asignar a un determinado valor. Para tomar una decisón, no se necesita entrar en el cálculo de los errores de los errores, ya que, en general, éstos son tan grandes que basta una regla general: **los errores se deben**

dar normalmente con una cifra significativa; únicamente en casos excepcionales se pueden dar con una cifra y media: la segunda cifra 5 ó 0, o dos cifras.

El concepto de error relativo está íntimamente relacionado con la noción más familiar de cifra significativa. De hecho el número de cifras significativas en una cantidad es un indicador aproximado de su error relativo. Por ejemplo, consideremos los números 510 y 0.51; y supongamos que ambos han sido determinados con dos cifras significativas. Esto significa que según lo que hemos dicho, en nuestra notación, deberían expresarse como 510$\pm$10 y 0.51$\pm$0,01. En ambos casos el error relativo es un 0.2 %. En otras palabras, decir que ambas cantidades han sido determiandas con dos cifras significativas equivale a decir que sus errores relativos son del 2 %. Del mismo modo, tres cifras significativas se correspondería con un error relativo del 0.2 %. Por supuesto, esta aproximación es solo aproximada. Por ejemplo, el número 110 determinado con dos cifras significativas implica que debemos dar la cantidad de la siguiente manera: 110$\pm$10, lo cual supone asignar un error relativo del 9 %. Finalmente, expresar la cantidad 910 con dos cifras significativas supone cometer un error relativo del 1 %. A pesar de todo, las consdiraciones de caracter general que se establecen en la tabla siguiente, pueden ser de gran utilidad para estimar los errores con rapidez en magnitudes que sean funcionalmente dependientes de otras que se miden directamente. Así, la correspondencia entre las cifras significativas y los errores relativos puede resumirse como sigue:

Número de cifras significativas	El error relativo está entre...	**El error relativo es muy probablemente...**
1	9 % – 90 %	20 %
2	0.9 % – 9 %	2 %
3	0.09 % – 0.9 %	0.2 %

Estimación de errores en el caso de medidas directas

Pocos experimentos son tan sencillos que la magnitude final se mida de forma directa (**medidas directas**), sino que, por lo general, se tienen que medir los valores de varias magnitudes primarias y combinar los resultados para obtener el valor de la magnitud requerida (**medidas indirectas**). *Los errores en la medida de la magnitudes primarias determinan el error en el resultado final.* En general, **los errores primarios contribuyen en diferente grado al error final. As, es conveniente concentrar los recursos finitos disponibles de tiempo, aparatos y paciencia en reducir los errores primarios que contribuyen en mayor grado**.

Si al tratar de medir una magnitud por medida directa realizamos varias medidas, con el fin de corregir los errores aleatorios, y los resultados obtenidos son $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se adopta como mejor estimación del **valor verdadero**, antes lo hemos representado como x_m, al valor medio, $\overline{x}$, que vienen dado por la siguiente expresión:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Por otro lado, la mejor estimación del error, apra el valor experimental, obtenido como valor medio del conjunto de n medidas, es el denominado **error cuadrático**:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k^2}{n(n-1)}} \tag{2}$$

donde $\epsilon_k = \overline{x} - x_k$. El error Δx calculado de esta forma es un número que situa en un 68 % la probabilidad de que el valor verdadero se encuantre en el intervalo definido por los valores $\overline{x} - \Delta x$ y $\overline{x} + \Delta x$. La probabilidad será de un 95.4 % entre $\overline{x} \pm 2\Delta x$, y de un 99.7 %, en $\overline{x} \pm 3\Delta x$. **La identificación del error de un valor experimental con elerror cuadrático obtenido de n medidas directas cosecutivas solo es válida en el caso de que el error cuadrático sea mayor que el error instrumental, es decir, que aquel que viene definido por la resolución del aparato de medida. Este error instrumental es la unidad más pequea que el instrumento puede apreciar; se denomina resolución o sensibilidad instrumental**.

Medidas indirectas. Propagación de errores

Suma de errores en cuadratura

En muchos casos, el valor experimental de una magnitud se obtiene, de acuerdo a una determinada expresión matemática, a partir de la medida directa de otras magnitudes de las que depende. Se trata entonces de conocer el error en la magnitud derivada, a partir de los errores de las magnitudes medidas directamente. A este problema se le denomina *propagación de errores*.

Supongamos que la magnitud y viene determinada por la medida de varias magnitudes: $p, q, r, \cdots$, con las que está ligada por la función $y = f(p, q, r, \cdots)$. Entonces, el error en la magnitud final a determinar viene dado por la siguiente expresión:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial p}\Delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial q}\Delta q\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial r}\Delta r\right)^2 + \cdots} \tag{3}$$

$\frac{\partial \overline{f}}{\partial p}, \frac{\partial \overline{f}}{\partial p}, \frac{\partial \overline{f}}{\partial p}, \cdots$ son las derivadas parciales de la función f respecto a cada una de las variables $p, q, r, \cdots$, evaluadas en los valores medios de $p, q, r, \cdots$.

Estimación del límite superior del error

La expresión general anterior puede sustituise, para acelerar cálculos preiminares, por una estimación más pesimista de Δy, la siguiente:

$$(\Delta y)_{\text{máx}} = \left|\frac{\partial \overline{f}}{\partial p}\right|\Delta p + \left|\frac{\partial \overline{f}}{\partial q}\right|\Delta q + \left|\frac{\partial \overline{f}}{\partial r}\right|\Delta r + \cdots \tag{4}$$

De hecho, $\Delta y \leqslant (\Delta y)_{\text{máx}}$, dado que la ecuación anterior requiere que se dé un hecho poco probable dentro de la teoría de Gauss: la ocurrencia simultánea en una medida de $p + \Delta p, q + \Delta q, r\Delta r$ ó de $p - \Delta p, q - \Delta q, r - \Delta r, \cdots$.

Estimación del error en el caso de productos y cocientes. Uso de los errores relativos

Si la funación $y = f(p, q, r, \cdots)$ es del tipo $y =$ constante $\dot{p}^n \dot{q}^m \dot{r}^s \cdots$, donde $m, n, s, \cdots$ son exponentes arbitrarios (enteros, negativos o fraccionarios), las ecuaciones anteriores se convierten en expresiones que relacionan los errores relativos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 &= n^2\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + m^2\left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2 + s^2\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \cdots \\ \frac{(\Delta y)_{\text{máx}}}{|y|} &= n\frac{\Delta p}{|p|} + m\frac{\Delta q}{|q|} + s\frac{\Delta r}{|r|} + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

La ventaja de estas expresiones puede verse con el siguiente ejemplo. Supongamos que se quiere medir la eficiencia de un motor de corriente continua, usándolo para elevar una mas m a una latura h. El trabajo necesario es mgh. La energía suministrada por el motor es VIt; V es voltaje de alimentación; I, la intensidad, y t, el tiempo durante el que trabaja el motor. La eficienci, e, es el cociente netre le trabajo sumistrado por el motor y la energía eléctrica suministrada al mismo: $e = \frac{mgh}{VIt}$. Supongamos que m, h, V e I pueden medirse con un 1 % de precisión, mientras que la precisión en la medida del tiempo es del 5 %. Por supuesto, g se conoce con una precisión mucho mayor que el 1 %. Aplicando la fórmula anterior, se obtendría que el error relativo de e es de un 5 %. Pero lo que es más importante, a partir de dicha fórmula es evidente que la única contribución al error de e está dad por Δt; es decir, que $\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta t}{t}$. En definitiva, una evaluación previa de los errores contribuyentes puede simplificar el cálculo enormemente, reduciendo el número de equivocaciones deraivadas de la complejidad de algunas ecuaciones obtenidas de la fórmula anterior.

Discrepancias. Comparaión entre valores medios y valores aceptados

Se define la **discrepancia** como la diferencia entre dos valores medidos correspondinetes a la misma mahnitud f'isica. La discrepancia puede o no ser significativa. Si dos experimentadores miden la misma resistencia y sus resultados son 40 ± 5 Ω y 42 ± 8 Ω, la dsicrepancia es de 2 Ω es menor que sus errores y, por lo tanto, ambas medidas son consistentes. La discrepancia no es significativa. Pero si las medidas hubieran sido 35 ± 2 Ω y 45 ± 1 Ω, ambas medidas serían claramente inconsistentes y la discrepancia de 10 Ω sería significativa. Esto querrí decir que habría que investigar los datos experimentales para intentar descubrir qué es lo que ha ido mal. En el laboratorio de prácticas, muchas veces se miden cantidades como la velocidad del sonido del aire, la velocidad de la luz, la carga del electrón, etc $\cdots$, que han sido medidas muy precisamente muchas veces, y para las cuales existen valores aceptados y publicados. El valor aceptado, pr supuesto, no es exacto, pero aún así, la precisión de estas constates es muy superior a la que se puede alcanzar en un laboratorio de prácticas. En estos casso los resultados obtenidos serán ciertos si el valor aceptado está dentro del rango de error del valor medido. Así, si un estudiante mide en el laboratorio la velocida del aire y obtiene que vale 329 ± 5 m/s, su resultado es satisfactorio, dado que le valor aceptado es 331 m/s, y, por lo tanto, entra en el rango de su error de medida. Incluso un valor como 325 ± 5 m/s podría ser igualmente aceptable, dado que existe alredeedor de 30 % de probabailidad de que el valor verdadero esté fuera del rango $[320, 333]$ m/s. Discrepancias mayores, como 345 ± 2 m/s, serían inaceptables.

Práctica 1

Péndulo físico

Objetivos

En esta experiencia se investiga la relación existente entre el periodo de las oscilaciones de un péndulo físico, en forma de varilla delgada, y la distancia del eje de oscilación al centro de gravedad del mismo. A partir de estos datos se calcula el valor de la aceleración de la gravedad, g.

Repaso de teoría

- Movimiento armónico simple.
- Momento de inercia.
- Teorema de Steiner.
- Péndulo físico.

Fundamento teórico

Cuando un cuerpo rígido suspendido por un eje O a una distancia, b, de su centro de masas, C, se separa de su posición de equilibrio (ver Figura 1) y se deja libre, efectúa un movimiento de oscilación alrededor del eje, cuya ecuación de movimiento viene dada por:

$$-Mgb\sin(\theta) = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.1}$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje O. Esta expresión, en el caso de pequeñas oscilaciones, toma la forma más sencilla:

$$-Mgb\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.2}$$

que se corresponde a un *movimiento armónico simple* de período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgb}} \tag{1.3}$$

Si llamamos I_0 al momento de inercia del cuerpo por un eje paralelo al eje O que pasa por C, la ecuación anterior se expresa:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + Mb^2}{Mgb}} \tag{1.4}$$

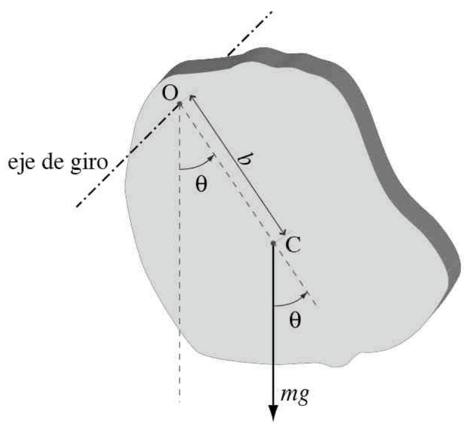


Fig 1

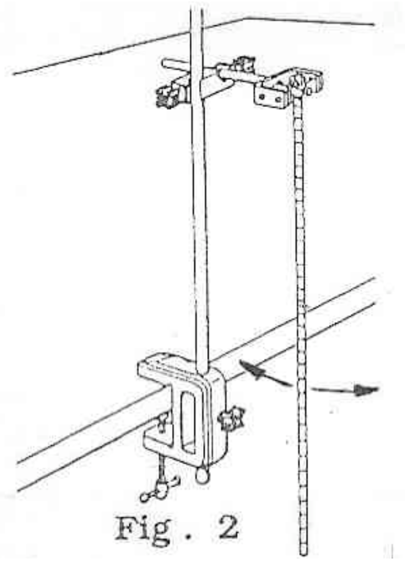


Fig . 2

o bien,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{Mk^2 + Mb^2}{Mgb}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + b^2}{gb}} \tag{1.5}$$

donde k es el llamado radio de giro del cuerpo alrededor del eje que pasa por C y viene dado por:

$$k = \sqrt{\frac{I_0}{M}} \tag{1.6}$$

Descripción del aparato

Como péndulo se emplea una varilla delgada metálica que tiene practicadas, cada centímetro, una serie de ranuras. La ranura central coincide con el centro de masas de la varilla (ver Figura 2). El péndulo puede hacerse oscilar alrededor de una cuchilla metálica de sección triangular, que puede situarse mediante un tornillo de presión sobre cualquiera de las ranuras a lo largo de la varilla.

Método operatorio

1. Haced una tabla como la que se indica, del período T en función de la distancia b entre el punto de oscilación y el centro de masas (en la misma tabla calculad los valores bT^2 y b^2 que serán necesarios más tarde). Para ello, haced oscilar el péndulo alrededor de distintos ejes y determinad el período de oscilación contando cada vez, al menos, 20 oscilaciones. Si se amortigua antes de los 20 periodos, elegid número máximo de oscilaciones, pero mantenedlo para toda la experiencia.

   Notas:

   > La suposición de oscilaciones pequeñas en las expresiones planteadas arriba implica que en todo momento $\sin\theta \approx \theta$. Para ello, basta que el ángulo máximo de la oscilación (la amplitud de oscilación) no sobrepase los 20°.
   >
   > No tomar datos para $b < 6$ cm.

2. La teoría predice un mínimo del periodo (T) para $b = k$, siendo k el radio de giro. Demostrad que, efectivamente, la función $T(b)$ (ecuación (5)) tiene un mínimo cuando $b = k$.

3. Llevad los puntos (b, T) de la tabla anterior a una gráfica para determinar, a partir de la misma, el valor de b para el que T es mínimo.

   Con objeto de estimar adecuadamente el b correspondiente al T mínimo es conveniente tener una alta densidad de puntos (b, T) en los alrededores del mínimo). Este valor de b es igual, según la teoría, al valor del radio de giro (k).

4. Calculad k de forma teórica (ecuación (6)) y comparad dicho valor con el valor de k obtenido de forma experimental en el apartado 3).

5. Representad gráficamente bT^2 en función de b^2. La teoría predice una relación lineal entre ambas magnitudes según la fórmula:

$$bT^2 = 4\pi^2\,\frac{k^2}{g} + 4\pi^2\,\frac{b^2}{g}$$

   - Realizad el correspondiente ajuste por mínimos cuadrados para determinar el radio degiro k y el valor de g.
   - Calculad también los errores Δk y Δg.

6. Comparad los diferentes valores de k obtenidos y comparar el valor de g que se ha determinado con el que aparece en los libros de Física.

Práctica 2

Movimiento armónico simple. Ley de Hooke

Objetivos

En esta práctica se estudia experimentalmente el movimiento periódico de una masa suspendida de un muelle. Se determinará la dependencia entre el período de oscilación y la masa suspendida, obteniéndose el valor de la constante elástica del muelle. Este resultado se comparará con el valor deducido de la ley de Hooke.

Material

- Eje de torsión, con sus accesorios: barra y aro de montajes
- Dinamómetros, Nivel, Regla
- Objetos problema: pesas cilíndricas metálicas, cilindros macizos de madera y cilindro hueco metálico

Repaso de teoría

- Movimiento armónico simple. item Ley de Hooke.

Fundamento teórico

Si una masa suspendida del extremo de un muelle se separa de su posición de equilibrio y se deja libre, realiza un movimiento periódico, debido a que sobre la masa actúa una fuerza que tiende a llevarla a su posición de equilibrio. La fuerza depende de las propiedades elásticas del muelle, que para pequeas oscilaciones, vienen descritas por la ley de Hooke: la aplicación de una fuerza F (en una dimensión) da lugar a una elongación x que es directamente proporcional a dicha fuerza:

$$F = K\,\dot{x} \tag{2.1}$$

Para estudiar el movimiento oscilatorio de una masa suspendida de un muelle elástico ideal, se combinan la segunda ley de Newton y la ley de Hooke. De acuerdo a los resultados teóricos, la aceleración de la masa y el período de las oscilaciones vienen dados por :

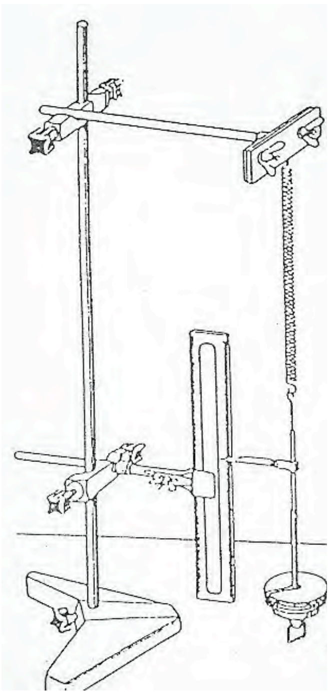
$$a = -\frac{K}{M}x \qquad\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \tag{2.2}$$

Estas ecuaciones no describen exactamente el sistema *muelle-masa* ya que se ha ignorado la masa del muelle. Si la masa del muelle, m, estuviera concentrada en su extremo oscilante, lo único que habría que hacer es añadirla a la masa suspendida de él y poner como masa oscilante $M+m$. Sin embargo, la masa m se encuentra repartida en todo el muelle. La parte inferior del muelle oscila con una amplitud igual a la de la masa suspendida, M, pero la parte superior oscila con una amplitud más pequea. Se puede tener en cuenta este efecto incluyendo una parte (αm) de la masa del muelle en la masa oscilante. Así, en la ecuación (2), la masa total será:

$$M + \alpha m \qquad\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{M+\alpha m}{K}} \tag{2.3}$$

donde α es un número desconocido y menor que 1.

Descripción del aparato



Consta de un resorte vertical en forma de hélice que lleva un soporte en su extremo libre sobre el cual pueden colocarse diferentes masas (ver fig. adjunta). Adosado al resorte hay una escala vertical graduada en milímetros, la cual permite medir el alargamiento del muelle a través de la indicación sobre la escala de una flecha horizontal situada en el extremo libre del muelle.

Método operatorio

1. Determinad la constante K de un muelle, aplicando cargas sistemáticamente y midiendo la elongación que provocan.

   Construid una tabla similar a la que se indica a continuación y llevad los datos obtenidos a una gráfica de pesos frente a elongaciones.

Mg									
x									

   (Cuidado con la unidades!, no mezclar sistemas de unidades diferentes).

   - Calculad la pendiente de la recta resultante, K, así como su error, ΔK, mediante un ajuste por mínimos cuadrados.

2. Suspended una masa del muelle y calculad el período de sus oscilaciones midiendo el tiempo empleado para realizar un número determinado de oscilaciones, 20 por ejemplo. Repetid para todos los posibles valores de la masa (Usad un método sistemático).

Mg									
x									

- Haced una tabla, como la que se indica a continuación, del cuadrado del periodo, T^2, en función de M.

M									
T									
T^2									

- Llevad estos datos a una gráfica.
  Para realizar la gráfica y el ajuste que se menciona abajo utilizar el ordenador.

- Comparad con las predicciones teóricas que indican que debe haber una relación lineal, ya que de la ecuación (3) resulta:

$$\boxed{T^2 = 4\pi^2 \frac{M}{K} + 4\pi^4 \frac{\alpha m}{K}} \tag{2.4}$$

3. Realizar el correspondiente ajuste mediante regresión lineal y, teniendo en cuenta la ecuación (4), determinad la constante del muelle K (y su error) y el valor de la constante αm (y su error: $\Delta(\alpha m)$).

4. Comparar las constantes K obtenidas en los apartados 1) y 3).

   En un resorte uniforme, a partir de consideraciones energéticas, se puede deducir que el valor de α debe ser de $\frac{1}{3}$.

5. Utilizando este valor teórico de α, determinad la masa del muelle y su error a partir del valor experimental de αm.

   ¿Es un valor razonable?
   ¿Es éste un buen método para calcular la masa del muelle?

6. Para determinar mejor si el valor obtenido de la masa del muelle es razonable, se calculará la masa del muelle a partir de su densidad y de su volumen. Para ello se considera que la densidad del hierro es $(8.0\pm0.2)\text{g/cm}^3$ y se determina el volumen del muelle midiendo sus dimensiones con el calibre micrométrico. Comparad con el resultado obtenido al pesar directamente el muelle en la balanza.

7. Comparad los valores de masa del muelle de los apartados 5) y 6).

Ejercicios Previos

1. En el apartado 1, hay que representar gráficamente pesos frente a elongaciones. Utilizando la ecuación 1 y sabiendo que en este caso la fuerza es el peso,
   - ¿cuál será la pendiente de la gráfica?
   - ¿y cuál la ordenada en el origen?
2. Para realizar los apartados 2 y 3 del método operatorio hay que representar gráficamente T^2 en función de M, según la teoría la relación entre ambas magnitudes es lineal (ecuación (4)), pero
   - ¿cuál será la pendiente?
   - ¿y cuál la ordenada en el origen?
3. Determinad explícitamente las expresiones de ΔK y Δm en función de los errores en la pendiente y en la ordenada en el origen del ajuste por mínimos cuadrados que hay que realizar en el apartado 3 del método operatorio.
4. Determinad la fórmula para obtener el volumen de un muelle sabiendo el número de espiras, el diámetro del alambre y el diámetro de cada espira. Determinar también la fórmula para obtener el error en el volumen.

   (Indicación: el volumen del muelle es igual al volumen del alambre del que está hecho el muelle. La forma geométrica de un alambre es un cilindro)

Práctica 3

Medida de magnitudes dínamicas mediante un carril de aire

Objetivos

En esta práctica se mide la constante de fuerza asociada a un muelle mediante dos métodos y se comparan los resultados. Posteriormente se estudia el acoplamiento de las constantes de fuerza de dos muelles según estén dispuestos en serie o en paralelo. Finalmente, se mide la aceleración gravitatoria, utilizando un dispositivo experimental basado en el deslizamiento de un cuerpo en un plano inclinado.

Material

- Balanza de masas
- cronómetro
- coche dinámico
- varias masas acoplables al coche (aproximadamente 5)
- muelles (2)
- carril dinámico
- soporte vertical y cinta métrica.

Repaso de teoría

- Plano inclinado.
- Ley de Hooke.

Fundamento teórico

Determinación de la constante de fuerza de un muelle.

Una masa sujeta a un muelle tiene un perodo de oscilación que viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.1}$$

donde m es la masa que está oscilando y k, la constante del muelle.

Según la ley de Hooke, la fuerza ejercida por un muelle es proporcional a la elongación de este respecto a su longitud de equilibrio. Matemáticamente, dicha fuerza viene dada por la expresión $|F| = |kx|$, donde k es la constante de proporcionalidad (de recuperación del muelle) y x, la elongación del muelle. La constante k puede ser determinada aplicando diferentes fuerzas al muelle ,a fin de obtener un conjunto de elongaciones. Si se representa el módulo de la fuerza frente las x obtenidas, la pendiente de la línea recta resultante es igual a k. Por otra parte, midiendo el perodo de oscilación se puede determinar la constante del muelle a partir de la ecuación (1).

Si una masa se encuentra sujeta a la acción de dos muelles iguales en el mismo sentido, estos pueden estar dispuestos en serie o en paralelo. El conjunto es equivalente a un único muelle con una constante de fuerza que se denomina $k_{efectiva}$. Dependiendo de las maneras en que se combinen los muelles, el valor de la $k_{efectiva}$ estará determinado por una de las siguientes expresiones:

$$k_{efectiva} = k + k = 2k \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{k_{efectiva}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \rightarrow k_{efectiva} = \frac{1}{2}\,k \tag{3.3}$$

En estas fórmulas k hace referencia a la constante de cada muelle por separado (ambos muelles se consideran iguales y, por lo tanto, tienen aproximadamente la misma constante).

Determinación de la aceleración gravitacional.

Si se sitúa el coche sobre un plano inclinado, este rueda hacia abajo por acción de la gravedad. La componente de la gravedad paralela al plano inclinado es $g\sin\theta$. Por tanto, esta es la aceleración que experimentará el carro si se desprecia el rozamiento (ver figura 1).

Para medir la aceleración del coche, se parte de una situación en la cual el coche se encuentra en reposo y se mide el tiempo t que tarda en recorrer cierta distancia d. Entonces, partiendo de la expresión que determina la distancia recorrida por un cuerpo sometido a una aceleración constante, $d = (\frac{1}{2}at^2$, se puede obtener la aceleración del móvil sin más que despejarla de dicha expresión. La ecuación resultante es:

$$a = \frac{2\,d}{t^2} \tag{3.4}$$

Teniendo en cuenta que $a = g\sin\theta$, una representación de la aceleración del coche frente al seno del ángulo correspondiente, para distintas inclinaciones del plano, se debe ajustar a una recta cuya pendiente es la aceleración gravitacional, g.

Método operatorio

1. **Oscilaciones sobre el plano inclinado**

a) Primeramente, medid con la balanza la masa del coche.

b) Se monta el equipo según la figura 2.
Se fija el muelle a un extremo del coche y a un extremo del carril y se inclina éste último.
Es recomendable que el ángulo de inclinación del carril sea grande (que la altura del extremo del carril sea de unos 40 cm).
Verificad que el coche esté correctamente situado en el carril.

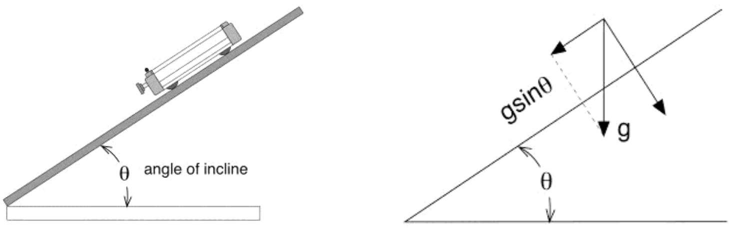


Figura 1

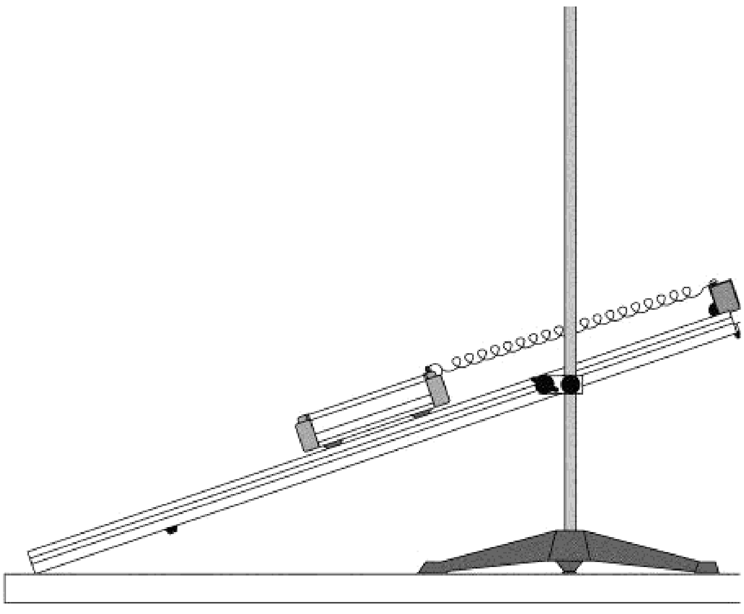


Figura 2

c) Poned a oscilar el muelle, para ello desplazar el coche (sin masa añadida) una cierta distancia hacia arriba por el carril y dejarlo en libertad.
La elección de esta distancia, que sería la amplitud inicial de las oscilaciones, se hace teniendo en cuenta que tiene que ser lo suficientemente grande para que se puedan contar 3 oscilaciones y lo

suficientemente pequea para que al desplazar el coche hacia arriba no se desenganche el muelle.

- Medid el tiempo que invierte en realizar tres ciclos completos.
- Repetid esta medida cinco veces como mínimo.
- Calculad la media del tiempo (y su error) para las cinco medidas y a partir de ese resultado
- obtened el período (y su error) de ese movimiento oscilatorio.
- Expresar los resultados por medio de una tabla similar a la siguiente:

Tabla 2:

(Tiempo para tres oscilaciones)

Medida 1	2	3	4	5	Media	Período

Cuestión:
¿Cambiaría ese período si variamos el ángulo del plano inclinado?

d) Utilizando la ecuación (1), determinad el valor de la constante k y su error.

2. **Muelles en serie y en paralelo**

a) Manteniendo el carril con el mismo ángulo de inclinación que en el apartado anterior, añadid un segundo muelle en SERIE con el primero, según se muestra en la figura 3.

- Como en el apartado c) del punto 1), desplazad el coche del equilibrio una cierta distancia y dejarlo en libertad.
- Medid el tiempo que invierte en realizar tres ciclos completos. Repetir esta medida cinco veces.
- Calcular el período medio.
- Usando el período y la masa del coche, calculad la constante efectiva y su error, asociada al conjunto de los muelles por medio de la ecuación (1).

b) Disponed los dos muelles en PARALELO, como se muestra en la figura 4, y repetid los pasos del apartado anterior.
Utilizando los datos de los apartados anteriores, completad una tabla de la forma:

Tabla 3:

Muelles	Medida 1	2	3	4	5	Media	Período	k±Δk
Uno:								
Serie:								
Paralelo:								

c)
- Comparad la $k_{efectiva}$ de las dos disposiciones de muelles con la constante de fuerza asociada a un sólo muelle (k).
- Comparad con las expresiones (2) y (3) del fundamento teórico y asignar la válida en cada caso.

3. **Aceleración en un plano inclinado**

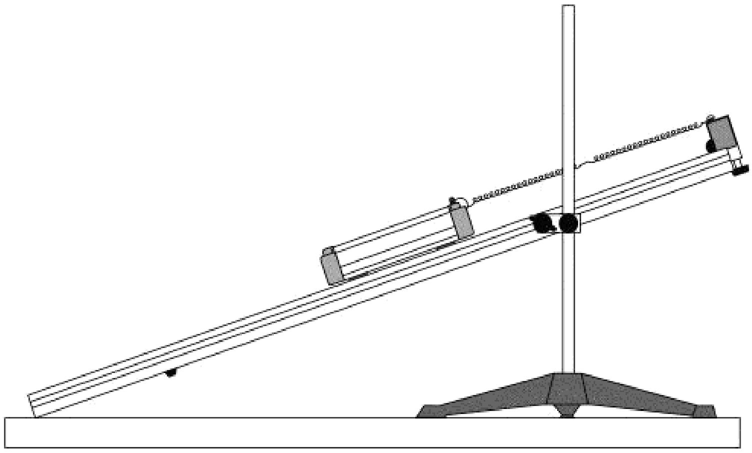


Figura 3

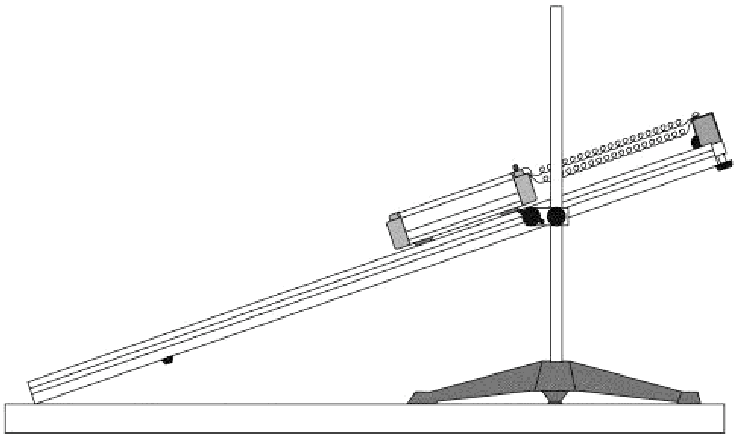


Figura 4

Tabla 3:

Muelles	Medida 1	2	3	4	5	Media	Período	k±Δk
Uno:								
Serie:								
Paralelo:								

a)
- Inclinad el carril de forma que la altura del extremo elevado sea de 10 cm. (figura 5).
- Calcular el valor de $\sin\theta$.
- Para determinar el seno del ángulo de inclinación, $\sin\theta$, medid la longitud del carril y la altura a la que se encuentra el extremo de este en cada caso y utilizad la relación trigonométrica correspondiente.

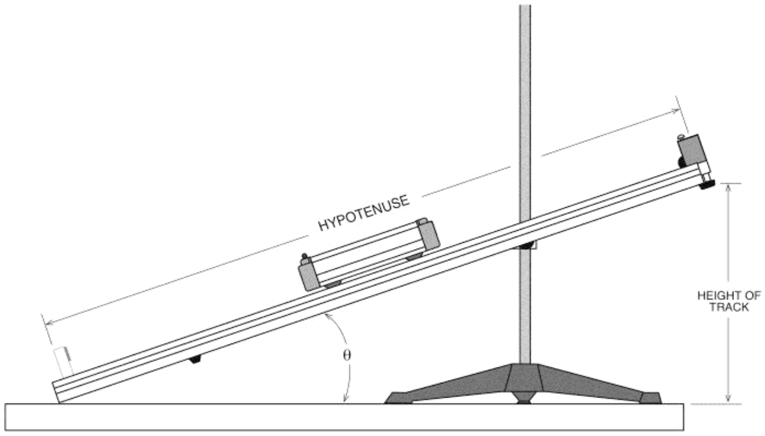


Figura 5

- Colocad el coche sobre el carril y llevadlo hasta el extremo más elevado.
- Anotad la posición inicial desde la que el coche va a comenzar el movimiento.
- Llevad el coche ahora al extremo opuesto, el más bajo, y anotad la posición final del coche. De esta forma, se obtiene la distancia total que va a recorrer el coche desde un extremo del carril al otro (d).

b)
- Dejad el coche en libertad partiendo del reposo y medid con el cronómetro el tiempo invertido en recorrer todo el trayecto. La persona que suelta el coche debera usar el cronómetro.
- Repetid esta medida 4 veces, intercambiándose en la tarea de cronometrar.
- Bajad el extremo del carril 1 cm y repetid las medidas anteriores, determinando en cada caso el valor del $\sin(\theta)$.
- Seguid realizando medidas de este tipo disminuyendo 1 cm la altura del extremo del carril en cada paso hasta un total de 7 ángulos, completando una tabla de tiempos de la forma siguiente:

Tabla 4:

	10cm	9cm	8cm	7cm	6cm	5cm	4cm
Medida 1:							
Medida 2:							
Medida 3:							
Medida 4:							
Media:							

(Se pueden coger otros valores para la altura del extremo del carril, siempre que abarquen aproximadamente un intervalo semejante)

- Calculad el tiempo medio (t) para cada ángulo

- Determinad las aceleraciones correspondientes a cada inclinación, utilizando la fórmula (4).
- Completad una tabla de la forma:

Tabla 5:

Altura (cm)	Aceleración(cm/sg^2)	$sen\theta$

Para los valores de la aceleración, no es necesario determinar el error. Para determinar el número cifras que se ponen, haced una estimación a ojo. Para ello, tened en cuenta el número de cifras que tienen los valores a partir de los cuales se determina la aceleración.

c) Utilizando el ordenador

- representad gráficamente los puntos experimentales obtenidos de la aceleración frente a $\sin\theta$
- haced la correspondiente regresión lineal.
  El valor de la pendiente obtenida debe ser igual a g.
- Comparad el valor de g obtenido con el valor teórico.

Cuestiones:

- Existe un error en las medidas, debido al tiempo de reacción de la persona que cronometra. Explicar como depende con el ángulo de inclinación.
- Si se dobla la masa del coche, cómo se ven afectados los resultados? Hacer una prueba.

Ejercicios Previos

1. Teniendo en cuenta la ecuación (1), determinar explcitamente la expresión de Δk en función de los errores de m y T.

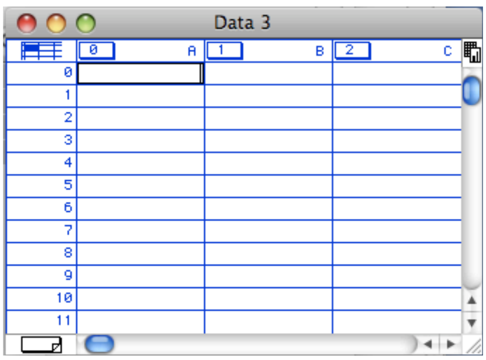
Apéndice 4

Regresiones lineales mediante ordenador

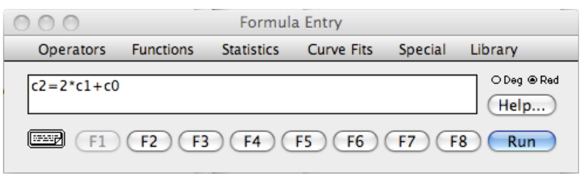
4.0.1. Programa Kaleidagraph

En las siguientes instrucciones se indica cómo realizar una representación grfica, y su correspondiente regresión lineal, de un conjunto de datos (x, y).

- Abre el programa Kaleidagraph
- Introduce los datos en la tabla que aparece en la pantalla.
  Si no aparece ninguna tabla, en el men **File** selecciona **New**

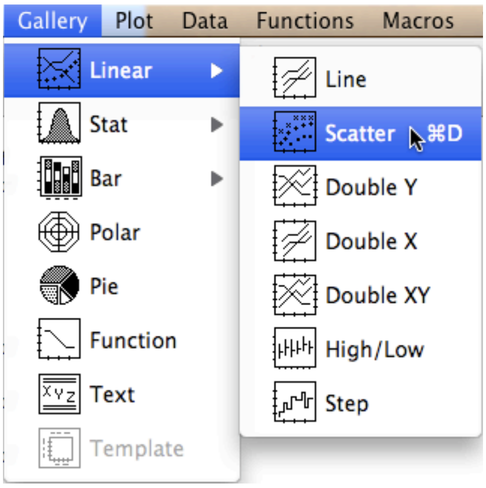


Por ejemplo, se pueden introducir los datos x en la primera columna, y los datos y en la segunda columna.
Si se quiere, se pueden realizar operaciones con los datos de las diferentes columnas.
Para ello, abrir la ventana **Formula Entry** (Men **Windows**).

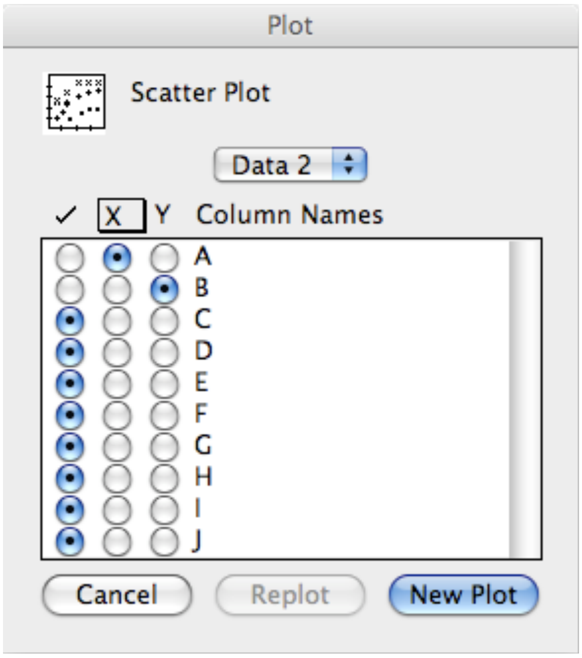


Por ejemplo, si ejecutas C2=2*C1+C0, esta diciendo que en la columna 2 (C2) escriba el resultado de multiplicar por dos la columna 1 (C1) y sumar la columna 0 (C0). (Nótese que la primera columna es la cero).

- Para realizar la gráfica, en el men **Gallery**selecciona **Linear** y luego **Scatter**.



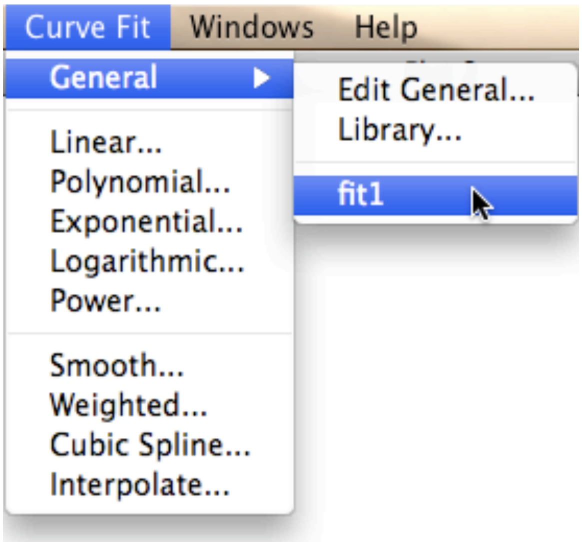
En la ventana que aparece, marca qué columna se quiere que sea el eje X, y cuál el eje Y de la gráfica, y pulsa sobre el botón **New Plot**.



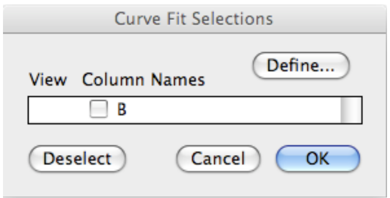
De esta forma, aparece la gráfica deseada.
Las etiquetas del eje X y del eje Y puedes cambiar simplemente haciendo

doble click sobre ellas.
Haciendo doble click sobre los ejes puedes cambiar las escalas.

- Para realizar la regresión lineal, en el menú desplegable **Curve Fit** selecciona **General** y luego **fit1**



En la ventana que aparece, marca la columna que quieras ajustar, y pulsa **OK**.



En la gráfica debería aparecer un cuadro con los datos y la línea del ajuste a una ecuación del tipo $y = m1 + m2 * M0$, donde $m1$ y $m2$ son los parámetros del ajuste, y $M0$, la variable independiente (x).

y = m1 + m2 * M0		
	Value	Error
m1	-0.25869	0.9842
m2	2.1806	0.20949
Chisq	2.3406	NA
R	0.9909	NA

Si el cuadro con los datos no aparece en el menú **Plot**, selecciona **Display Equation**.

- Para imprimir la gráfica, en el menú **File** selecciona **Print Graphics...**, y en la ventana que aparece, pulsa **Print**.

- Por si acaso tuviéras que hacer modificaciones posteriores en la gráfica, conviene guardar una copia.
  Para ello, en el menú **File**, selecciona **Save Graph**.
  Pone el nombre que quieras ,y como destino selecciona la carpeta de prácticas.
  Pulsa **Save**.
  Cuando se guarda la gráfica, también se están guardando los datos, pero si se quiere, éstos también se pueden guardar por separado.
  Para ello, primero pulsa sobre la ventana de datos (para hacerla activa), y luego ve al menú **File** y selecciona **Save Data**.
- Al salir de la aplicación, aparece una ventana que pregunta si queremos guardar ciertos archivos. Pulsar **None**.