

Aula 05 – Métodos de Minimização e Mapas de Karnaugh

Prof. João Fernando Mari

joaof.mari@ufv.br

Roteiro

- Mapas de Karnaugh
- EXEMPLO: Mapa de Karnaugh a partir da Tabela Verdade
- Simplificação de Funções Booleanas
- EXEMPLO: Incrementador BCD
- EXERCÍCIO: Comparador de 2 bits (Aula 03)
- Referências

Mapas de Karnaugh

- **Mapa de Karnaugh**

- Permite representar de forma conveniente uma função booleana.
 - Número **pequeno** de variáveis. Até 4 ou 6.
- Ferramenta de auxílio à **simplificação** (minimização) de **funções booleanas**.
- O mapa consiste em uma matriz de posições:
 - **Posição** → As possíveis combinações de valores de n variáveis binárias.
 - As posições deve ser listas na ordem: **00, 01, 11, 10**.

- **EXEMPLO:**

- Mapa de Karnaugh para representar uma função booleana de 3 variáveis:
 - $F(A,B,C) = A'BC' + A'BC + ABC'$

		BC			
		00	01	11	10
A	0			1	1
	1				1

(b) $F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C}$

Mapas de Karnaugh

Funções booleanas:

1 variável

$$F = A'$$

2 variáveis

$$F = AB' + A'B$$

3 variáveis

$$F = A'BC' + A'BC + ABC'$$

4 variáveis

$$F = A'B'CD + AB'C'D + ABC'D'$$

Mapas de Karnaugh:

A	
0	1

AB			
00	01	11	10

	BC			
	00	01	11	10
0				
1				

	CD			
	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Mapas de Karnaugh

Funções booleanas:

1 variável

$$F = A'$$

2 variáveis

$$F = AB' + A'B$$

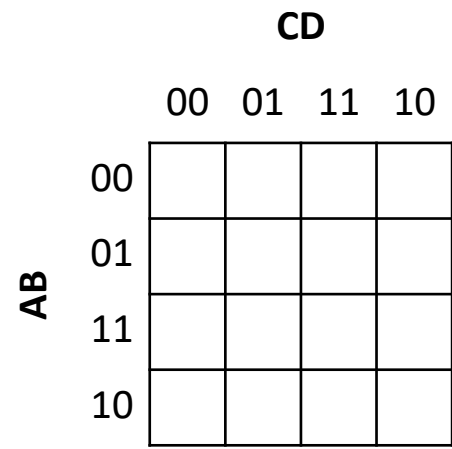
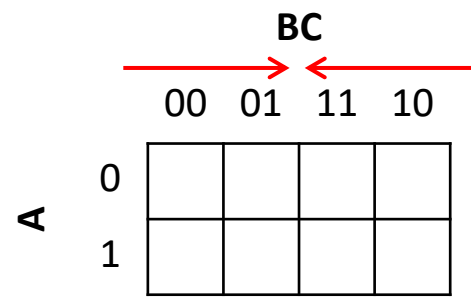
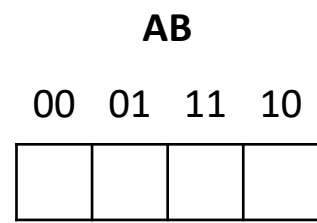
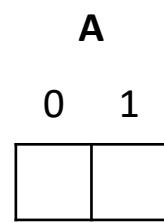
3 variáveis

$$F = A'BC' + A'BC + ABC'$$

4 variáveis

$$F = A'B'CD + AB'C'D + ABC'D'$$

Mapas de Karnaugh:



Mapas de Karnaugh

- Como o mapa de Karnaugh pode representar uma função booleana?
 - Cada posição corresponde a um produto da expressão na forma de **soma de produtos (mintermos)**.
 - 1 corresponde ao valor da variável
 - 0 corresponde ao valor da variável negada (NOT)

$F = A'$

A	
0	1
1	

$F = AB' + A'B$

AB			
00	01	11	10
	1		1

$F = A'BC' + A'BC + ABC'$

A	BC			
	00	01	11	10
0			1	1
1				1

$F = A'B'CD + AB'C'D + ABC'D'$

AB	CD			
	00	01	11	10
00			1	
01				
11	1			
10		1		

EXEMPLO: Mapa de Karnaugh a partir da Tabela Verdade

- Converter uma expressão booleana para um mapa:
 - Escrever a expressão em uma forma canônica:
 - Mintermos (soma de produtos) ou Maxitermos (produto de somas).
 - Escolheremos Mintermos .

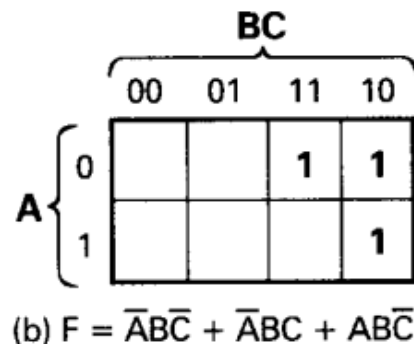
Tabela Verdade					
L	A	B	C	F	Mintermos
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	1	
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	0	

EXEMPLO: Mapa de Karnaugh a partir da Tabela Verdade

- Converter uma expressão booleana para um mapa:
 - Escrever a expressão em uma forma canônica:
 - Mintermos (soma de produtos) ou Maxitermos (produto de somas).
 - Escolheremos Mintermos .

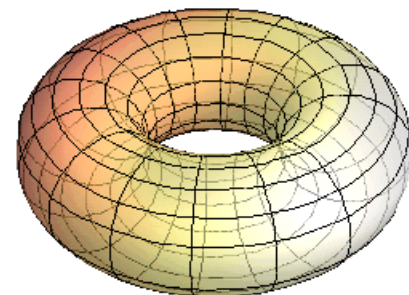
Tabela Verdade					
L	A	B	C	F	Mintermos
0	0	0	0	0	$A'B'C'$
1	0	0	1	0	$A'B'C$
2	0	1	0	1	$A'BC'$
3	0	1	1	1	$A'BC$
4	1	0	0	0	$AB'C'$
5	1	0	1	0	$AB'C$
6	1	1	0	1	ABC'
7	1	1	1	0	ABC

$$F(A,B,C) = A'BC' + A'BC + ABC'$$



Simplificação de Funções Booleanas

- A partir do Mapa de Karnaugh é possível escrever uma expressão equivalente mais simples.
 - Quaisquer posições adjacentes diferem em apenas uma variável.
 - Podemos agrupar 2, 4, 8, ou até 16 posições adjacentes (potencia de 2).
 - O conceito de adjacência inclui um giro em torno das extremidades do mapa.
 - Toróide.**
 - Se duas posições adjacentes possuem valor 1:
 - Podemos combinar os dois termos, eliminando a variável que difere.



		BC			
		00	01	11	10
A	0			1	1
	1				1

(b) $F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC$

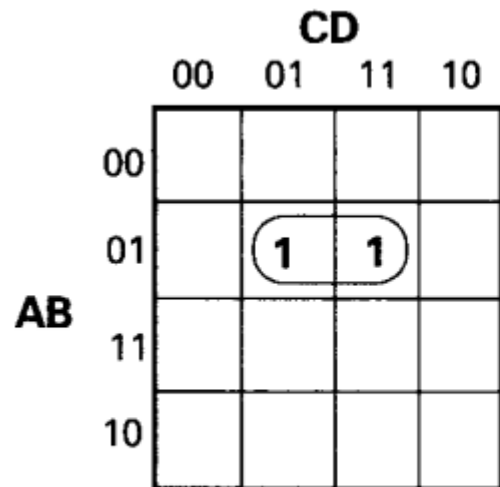
$\rightarrow A'BC' + A'BC = \mathbf{A'B}$

$\rightarrow A'BC' + ABC' = \mathbf{BC'}$

$$F = A'BC' + A'BC + ABC' = \mathbf{A'B + BC'}$$

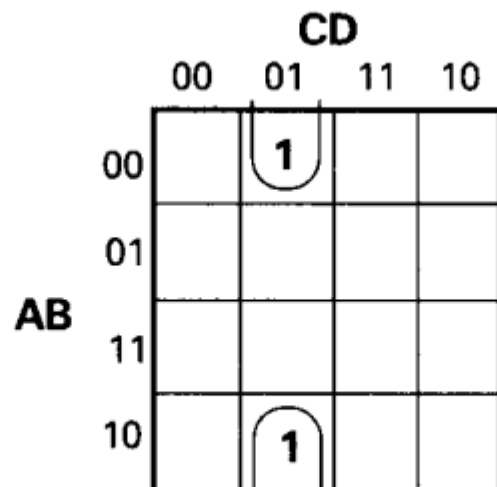
Simplificação de Funções Booleanas

- 2 posições adjacentes em um Mapa de Karnaugh



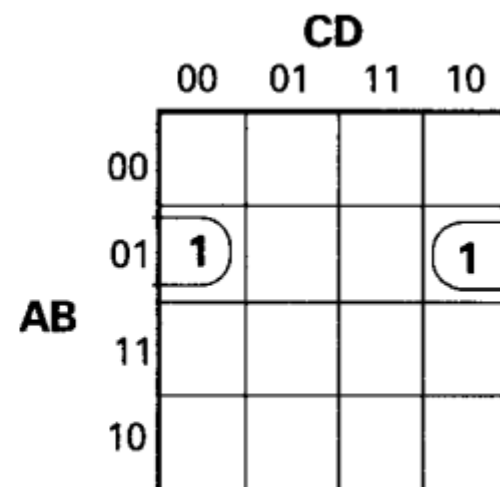
(a) $\bar{A}BD$

$$F = A'BC'D + A'BCD$$



(b) $\bar{B}CD$

$$F = A'B'C'D + AB'C'D$$

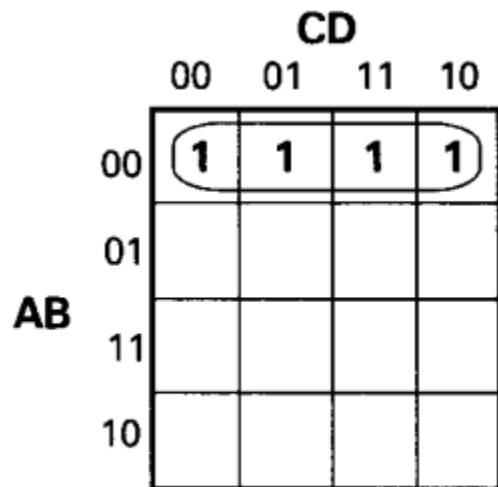


(c) $\bar{A}BD$

$$F = A'BC'D' + A'BCD'$$

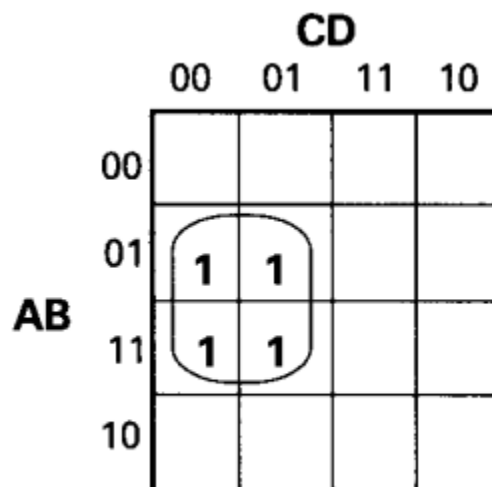
Mapa de Karnaugh – Simplificação de Funções Booleanas

- 4 posições adjacentes em um Mapa de Karnaugh



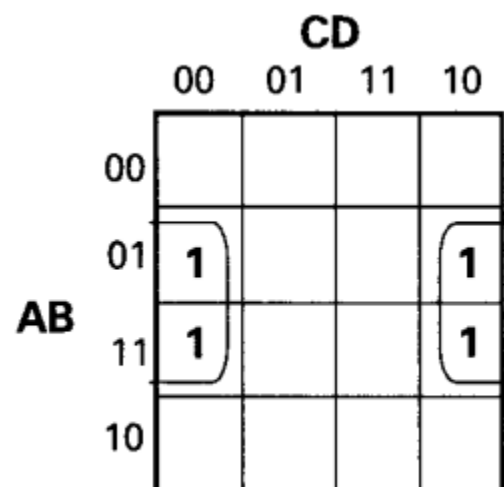
(d) $\overline{A}B$

$$F = A'B'C'D' + A'B'C'D + A'B'CD + A'B'CD'$$



(e) $B\overline{C}$

$$F = A'BC'D' + A'BC'D + ABC'D' + ABC'D$$

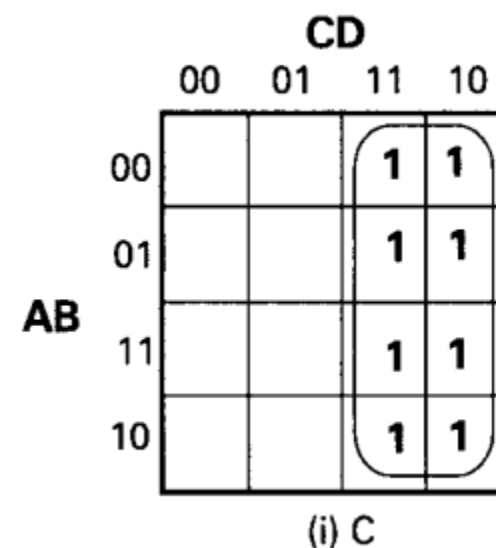
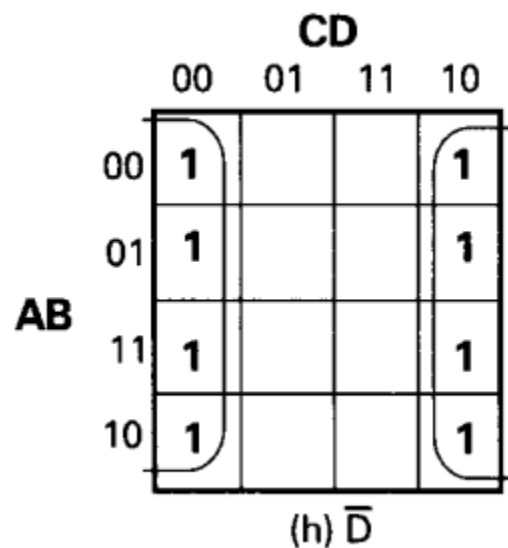
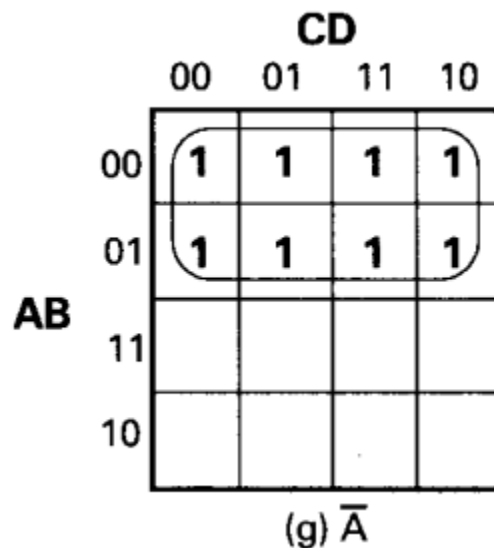


(f) $B\overline{D}$

$$F = A'BC'D' + A'BC'D + ABC'D' + ABCD'$$

Simplificação de Funções Booleanas

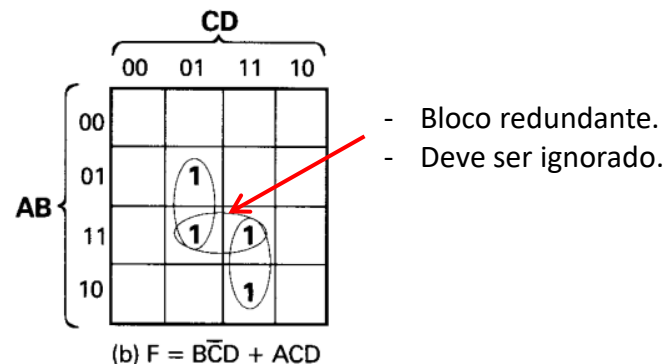
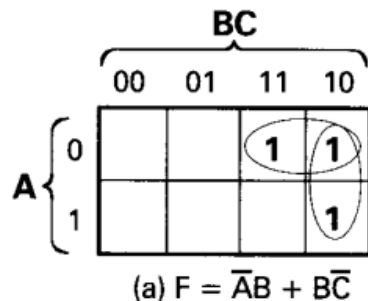
- 8 posições adjacentes em um Mapa de Karnaugh



Simplificação de Funções Booleanas

- As regras para a simplificação:
 - Selecione o maior bloco possível (com 1, 2, 4 ou 8 posições) composto exclusivamente por posições marcadas (valor 1).
 - Contorne esses blocos.
 - Continue selecionando blocos de posições marcadas, que sejam tão grandes quanto possível.
 - Contorne os blocos.
 - Até que todas as posições marcadas estejam incluídas em pelo menos 1 contorno.
 - O número de blocos contornados deve ser o menor possível.
 - Uma posição pode pertencer a mais de 1 contorno diferente.

Exemplos:



Simplificação de Funções Booleanas

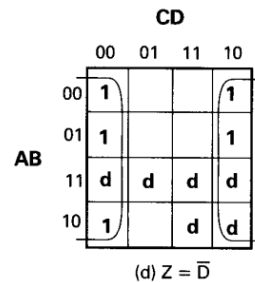
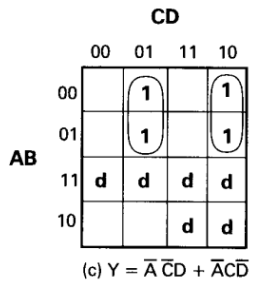
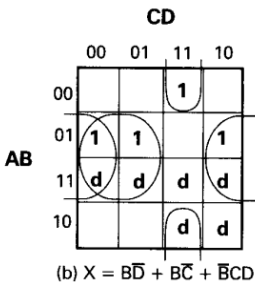
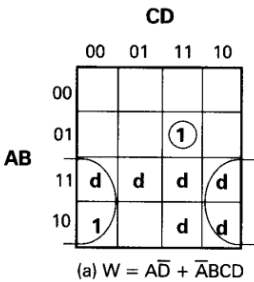
- Em alguns casos certas combinações de valores de variáveis nunca ocorrem.
 - Portanto nunca ocorre uma saída correspondente.
 - São denominados casos “negligenciáveis”
 - *Don't care.*
 - Utilizamos a letra “d” na posição correspondente.
 - Para a simplificação, cada “d” pode ser tratado como 1 ou como 0.
 - Escolhemos o valor que resulta na expressão mais simples.

EXEMPLO: Incrementador BCD

- Gerar uma função booleana para um circuito que soma 1 a um número BCD. A operação é modulo 10 ($9+1 = 0$).
- Note que das possíveis entradas, 6 produzem resultado “negligenciáveis”
 - Não correspondem a dígito BCD valido. São marcados com “d”.

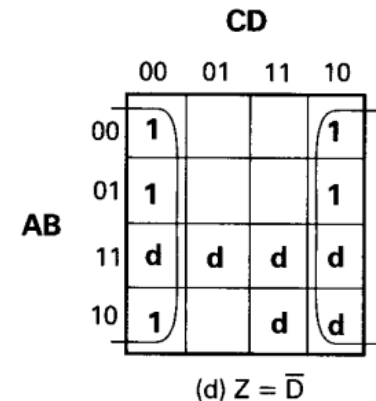
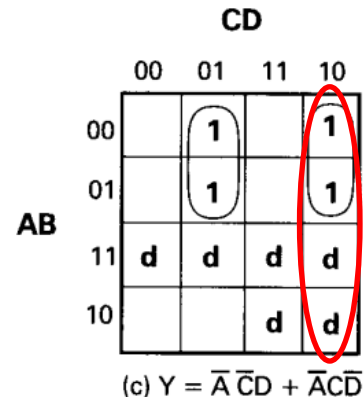
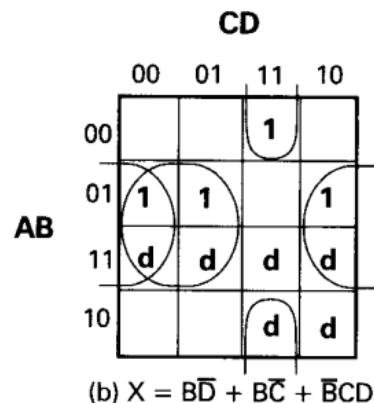
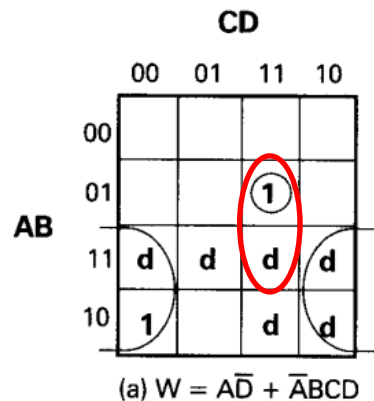
EXEMPLO: Incrementador BCD

L	Entrada					BCD(A,B,C,D)					F(A,B,C,D) = BCD(A,B,C,D) + 1				
	A	B	C	D	Decimal	W	X	Y	Z	Decimal	W	X	Y	Z	Decimal
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	2
2	0	0	1	0	2	0	0	1	0	2	0	0	1	1	3
3	0	0	1	1	3	0	0	1	1	3	0	1	0	0	4
4	0	1	0	0	4	0	1	0	0	4	0	1	0	1	5
5	0	1	0	1	5	0	1	0	1	5	0	1	1	0	6
6	0	1	1	0	6	0	1	1	0	6	0	1	1	1	7
7	0	1	1	1	7	0	1	1	1	7	1	0	0	0	8
8	1	0	0	0	8	1	0	0	0	8	1	0	0	1	9
9	1	0	0	1	9	1	0	0	1	9	0	0	0	0	0
10	1	0	1	0	Casos Negligenciáveis	d	d	d	d	Casos Negligenciáveis	d	d	d	d	Casos Negligenciáveis
11	1	0	1	1		d	d	d	d		d	d	d	d	
12	1	1	0	0		d	d	d	d		d	d	d	d	
13	1	1	0	1		d	d	d	d		d	d	d	d	
14	1	1	1	0		d	d	d	d		d	d	d	d	
15	1	1	1	1		d	d	d	d		d	d	d	d	

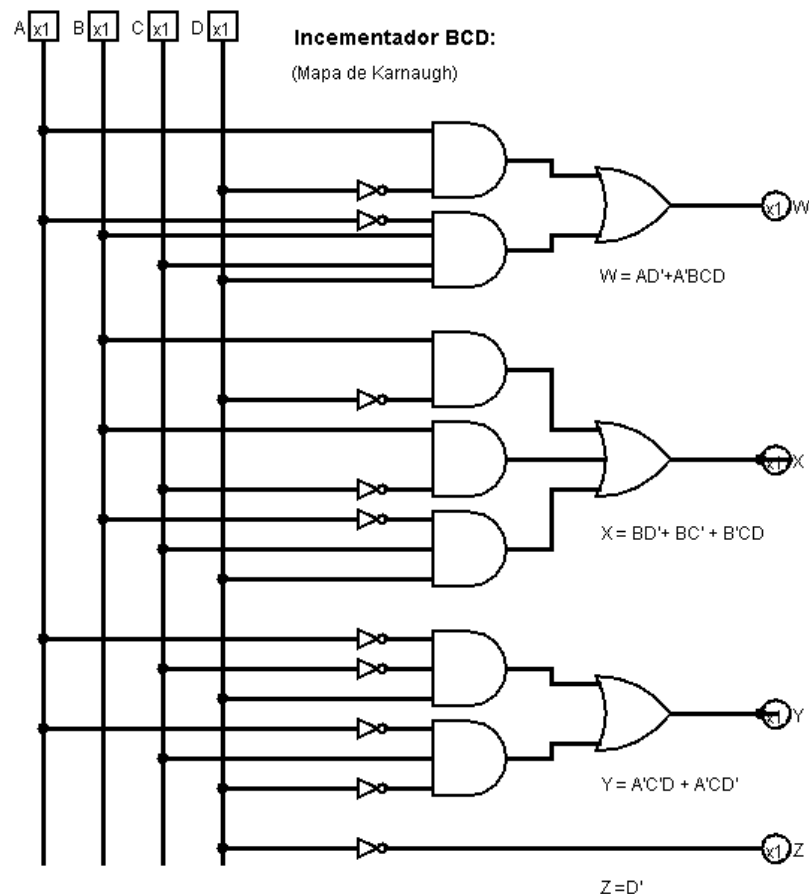


EXEMPLO: Incrementador BCD (Mapas de Karnaugh)

- Os blocos em vermelho mostram grupos que poderiam ser expandidos ainda mais escolhendo valores adequados para as posições com “d”.
- Resultando é uma simplificação maior das expressões.

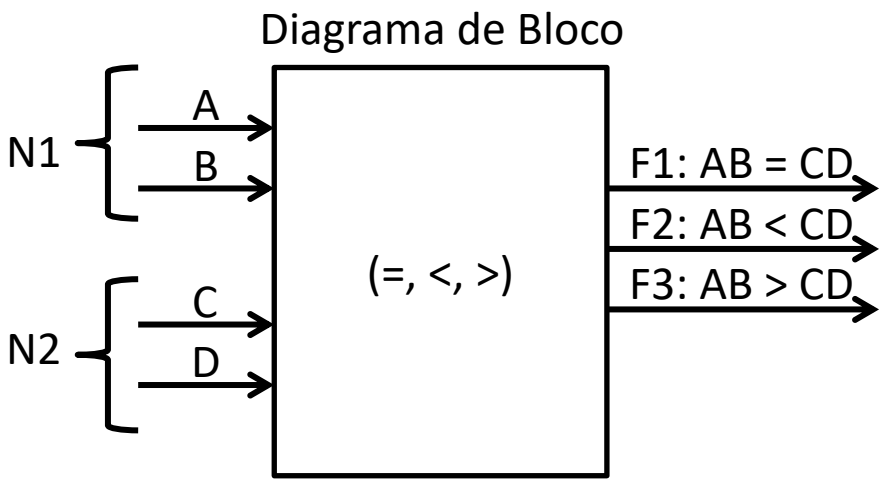


EXEMPLO: Incrementador BCD



EXERCÍCIO: Comparador de 2 bits (Aula 03)

- Coloque as funções F1, F2 e F3 na forma padrão de mintermos (soma de produtos).
- Represente as funções F1, F2 e F3 utilizando Mapas de karnaugh.
- Simplifique a funções booleanas.
- Represente graficamente o circuito resultante.



L	A	B	C	D	F1	F2	F3	Mintermos
0	0	0	0	0	1	0	0	A'B'C'D'
1	0	0	0	1	0	1	0	A'B'C'D
2	0	0	1	0	0	1	0	A'B'CD'
3	0	0	1	1	0	1	0	A'B'CD
4	0	1	0	0	0	0	1	A'BC'D'
5	0	1	0	1	1	0	0	A'BC'D
6	0	1	1	0	0	1	0	A'BCD'
7	0	1	1	1	0	1	0	A'BCD
8	1	0	0	0	0	0	1	AB'C'D'
9	1	0	0	1	0	0	1	AB'C'D
10	1	0	1	0	1	0	0	AB'CD'
11	1	0	1	1	0	1	0	AB'CD
12	1	1	0	0	0	0	1	ABC'D'
13	1	1	0	1	0	0	1	ABC'D
14	1	1	1	0	0	0	1	ABCD'
15	1	1	1	1	1	0	0	ABCD

Referências

- **STALLINGS, W. Arquitetura e Organização de Computadores, 5. Ed., Pearson, 2010.**
 - Apêndice A

