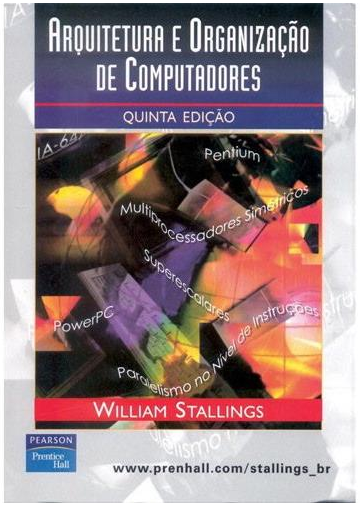
Aula 13 – Aritmética do Computador
Ponto Flutuante

Prof. João Fernando Mari
joaof.mari@ufv.br

Referências

- STALLINGS, W. **Arquitetura e Organização de Computadores**, 8. Ed., Pearson, 2010.
  - **Capitulo 9**



Roteiro

- Números reais
- Exemplo.: Ponto fixo
- Ponto flutuante
- Expoente polarizado
- Normalização
- Exemplo: Ponto flutuante
- Números representáveis
- IEEE 754
- Aritmética de ponto flutuante (+/-)
- Exemplo: Soma e subtração
- Aritmética de ponto flutuante (×/÷)

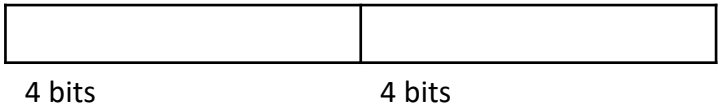
Números reais

- Como representar os números reais no computador?
  - Poderia ser feito em binário puro.
    - $1001.1010 = 2^4 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} = 9{,}625$

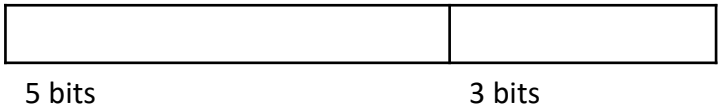
- Onde está o ponto binário?
  - Fixo?
    - Muito limitado em termos de representação.
  - Móvel?
    - Como você determina onde está o ponto?

EXEMPLP: Ponto fixo

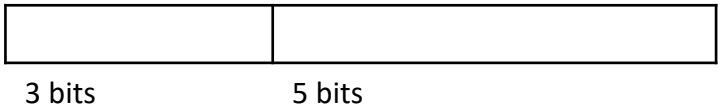
- Suponha palavras de 8 bits:
  - 4 bits para a parte inteira e 4 bits para a parte real



  - Aumentar o intervalo de inteiros, diminui a precisão da parte real

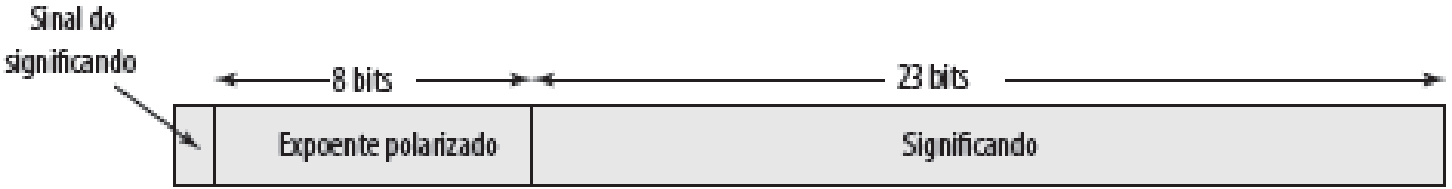


  - Aumentar a precisão da parte real, diminui o intervalo de inteiros



Ponto flutuante

- +/- Significando x $2^{Exponente}$



Obs.: O termo Mantissa, encontrado em muitos livros texto, é considerado obsoleto. Usaremos Significando.

Expoente polarizado

- Expoente está em ***representação polarizada***.
  - Polarização: um valor fixo que é subtraído para obter o expoente.
    - Polarização: $2^{k-1} - 1$ (k é o número de bits do expoente)
    - EXEMPLO: Expoente com 8 bits (Intervalo de 0 a 255)
      - A polarização é $2^7 - 1 = 127$
      - Intervalo do expoente polarizado: -127 a +128.

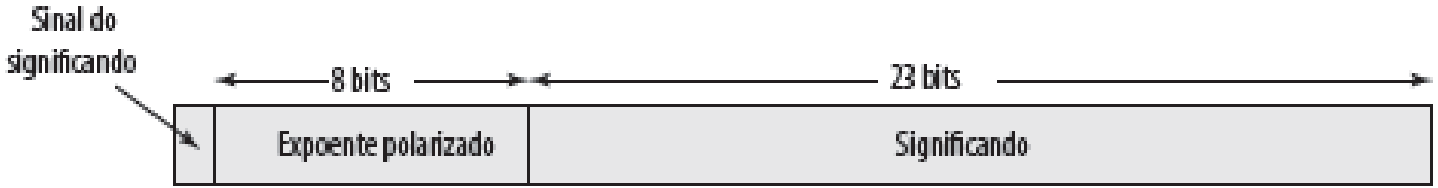
Normalização

- Números em ponto flutuante geralmente são normalizados, ou seja
  - O expoente é ajustado de modo que bit inicial (MSB) da mantissa seja 1.
  - Por ser sempre 1, não é preciso armazená-lo.

  - Ex.: $00100101.001 \times 2^0 = 1.00101001 \times 2^5$

- Obs.: Em notação científica, os números são normalizados para um único dígito antes do ponto decimal:
  - Ex.:
    - $3{,}123 \times 10^3 = 3123{,}0$
    - $3{,}123 \times 10^{-3} = 0{,}003123$

Exemplos de ponto flutuante



(a) Formato

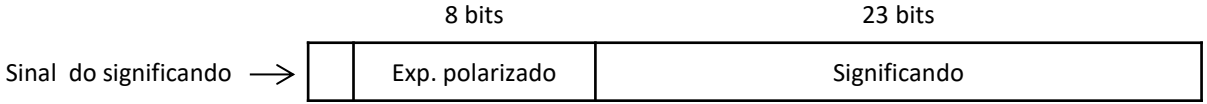
$$
\begin{aligned}
1.1010001 \times 2^{10100} &= 0\ 10010011\ 10100010000000000000000 = 1.6328125 \times 2^{20} \\
-1.1010001 \times 2^{10100} &= 1\ 10010011\ 10100010000000000000000 = -1.6328125 \times 2^{20} \\
1.1010001 \times 2^{-10100} &= 0\ 01101011\ 10100010000000000000000 = 1.6328125 \times 2^{-20} \\
-1.1010001 \times 2^{-10100} &= 1\ 01101011\ 10100010000000000000000 = -1.6328125 \times 2^{-20}
\end{aligned}
$$

(b) Exemplos

Exemplos de ponto flutuante

- Valor em binário:
  - 0 | 10010011 | 10100010000000000000000
- Resolver o expoente polarizado:
  - 147 - 127 = 20
- Incluir o bit 1 mais significativo do significando
  - + | 10100 | 1.10100010000000000000000
- Converte os valores para base decimal:
  - + | 20 | 1.6328125
- Colocar em notação científica:
  - (+/-)significando × $2^{expoente}$
  - + 1.6328125 × 2^{20} = 1.6328125 × 1,048,576 =
  - 1,712,128
- Valor em decimal:
  - + 1,712,128.0

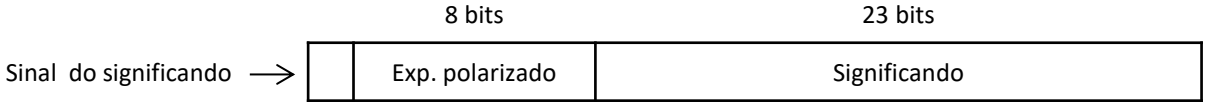
- Valor em decimal:
  - + 1,712,128.0
- Converte para binário (a parte inteira e a parte decimal):
  - + 1 1010 0010 0000 0000 0000. 0
- Colocar em notação cientifica (base 2)
  - + 1 1010 0010 0000 0000 0000. 0 x 2^0
- Mover o ponto até antes do bit 1 mais significativo:
  - + 1. 1010 0010 0000 0000 0000 x 2^{20}
- Tornar o expoente polarizado e remover o 1 mais significativo:
  - 20 + 127 = 147
  - + | 10010011 | 10100010000000000000000
- Valor em binário:
  - 0 | 10010011 | 10100010000000000000000



Exemplos de ponto flutuante (significando negativo)

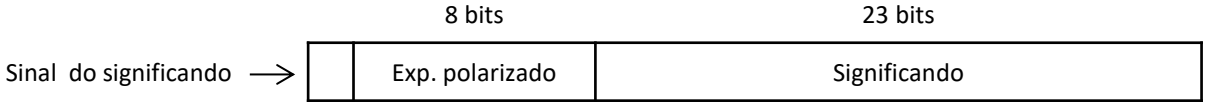
- Valor em binário:
  - 1 | 10010011 | 10100010000000000000000
- Resolver o expoente polarizado:
  - 147 - 127 = 20
- Incluir o bit 1 mais significativo do significando
  - - | 10100 | 1.10100010000000000000000
- Converte os valores para base decimal:
  - - | 20 | 1.6328125
- Colocar em notação científica:
  - (+/-)significando × $2^{expoente}$
  - - 1.6328125 × 2^{20} = 1.6328125 × 1,048,576 =
  - - 1,712,128
- Valor em decimal:
  - - 1,712,128.0

- Valor em decimal:
  - - 1,712,128.0
- Converte para binário (a parte inteira e a parte decimal):
  - - 1 1010 0010 0000 0000 0000. 0
- Colocar em notação cientifica (base 2)
  - - 1 1010 0010 0000 0000 0000. 0 x 2^0
- Mover o ponto até antes do bit 1 mais significativo:
  - - 1. 1010 0010 0000 0000 0000 x 2^{20}
- Tornar o expoente polarizado e remover o 1 mais significativo:
  - 20 + 127 = 147
  - - | 10010011 | 10100010000000000000000
- Valor em binário:
  - 1 | 10010011 | 10100010000000000000000



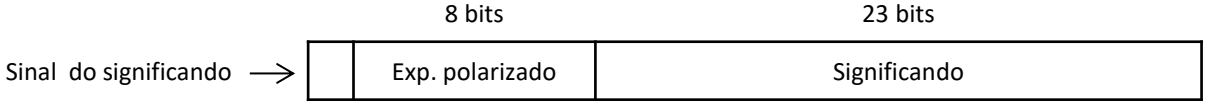
Exemplos de ponto flutuante (expoente negativo)

- Valor em binário:
  - 0 | 01101011| 10100010000000000000000
- Resolver o expoente polarizado:
  - 107 - 127 = -20
- Incluir o bit 1 mais significativo do significando
  - + | -10100 | 1.10100010000000000000000
- Converte os valores para base decimal:
  - + | -20 | 1.6328125
- Colocar em notação científica:
  - (+/-)significando × $2^{expoente}$
  - + 1.6328125 × 2^{-20} =
- Valor em decimal (um número muito pequeno):
  - + 0.000001557171344757080078125



Exemplos de ponto flutuante (com valores reais)

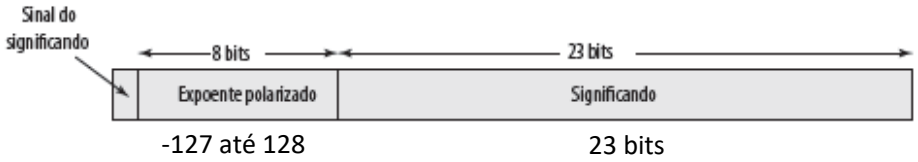
- Valor em decimal:
  - + 20.3
- Converte para binário (a parte inteira e a parte decimal):
  - + 1 0100 . 0100 1100 1100 1100 1100 1100 (...)
- Colocar em notação cientifica (base 2)
  - + 1 0100 . 0100 1100 1100 1100 1100 1100 x 2^0
- Mover o ponto até antes do bit 1 mais significativo:
  - + 1 . 0100 0100 1100 1100 1100 1100 1100 x 2^4
- Tornar o expoente polarizado e remover o 1 mais significativo do significando (manter apenas 23 bits):
  - 4 + 127 = 131
  - + | 1000 0011| 0100 0100 1100 1100 1100 110
- Valor em binário:
  - 0 | 1000 0011 | 0100 0100 1100 1100 1100 110
- Valor em binário:
  - 0 | 1000 0011 | 0100 0100 1100 1100 1100 110
- Resolver o expoente polarizado:
  - 131 - 127 = 4
- Incluir o bit 1 mais significativo do significando
  - + | 100 | 1. 0100 0100 1100 1100 1100 110
- Converte os valores para base decimal:
  - + | 4| 1.268749952316284
- Colocar em notação científica:
  - (+/-)significando × $2^{expoente}$
  - + 1.268749952316284 × 2^4
  - + 1.268749952316284 × 16 =
  - + 20.29999924
- Valor em decimal (arredondando):
  - + 20.3

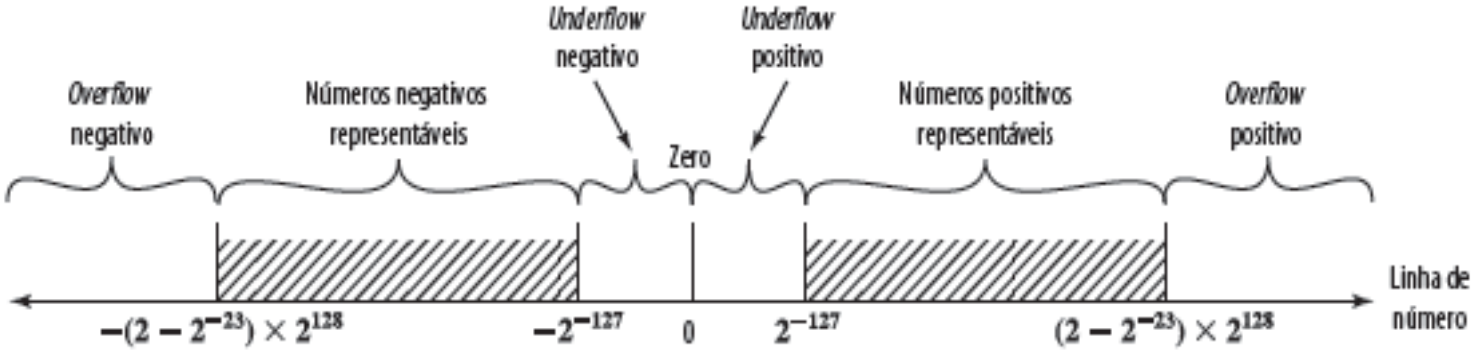


Números representáveis

- Intervalos de números expressos em 32 bits

(a) Inteiros de complemento de dois

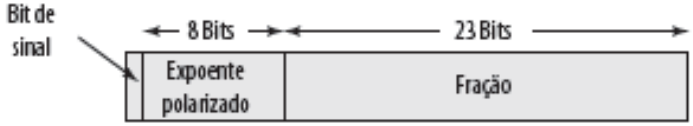




(b) Números de ponto flutuante

IEEE 754

- Padrão para armazenamento de ponto flutuante.
- Padrões de 32 e 64 bits.
- Expoente de 8 e 11 bits, respectivamente.



(a) Formato isolado

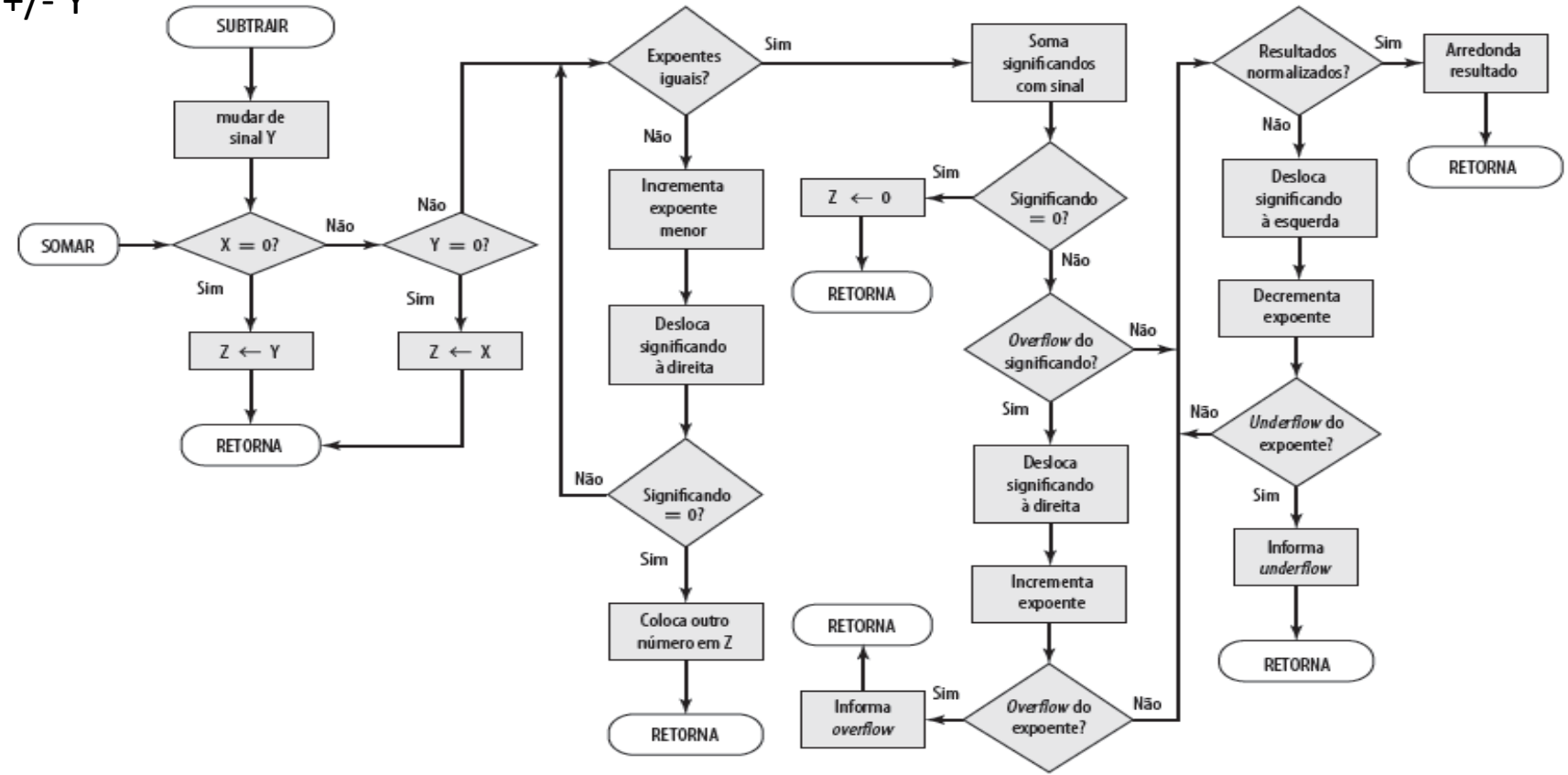
(b) Formato duplo

Aritmética de ponto flutuante (+/-)

- Algoritmo para soma e subtração de números binários em ponto-flutuante:
  - Verifique zero
  - Alinhe significandos (ajustando expoentes)
  - Some ou subtraia significandos
  - Verifique *overflow* ou *underflow*
  - Normalize o resultado
  - Arredonde o resultado

Fluxograma da adição e subtração de ponto flutuante

- Z = X +/- Y



Exemplo

IEEE FP16

Sinal	5 bits: Exp. polarizado	10 bits: Significando
do significando		

20.3

10100.01001100110011 (...) x 2^0

1.01000100110011 x 2^4

4 + 15 = 19

0 | 10011| 0100010011

5.25

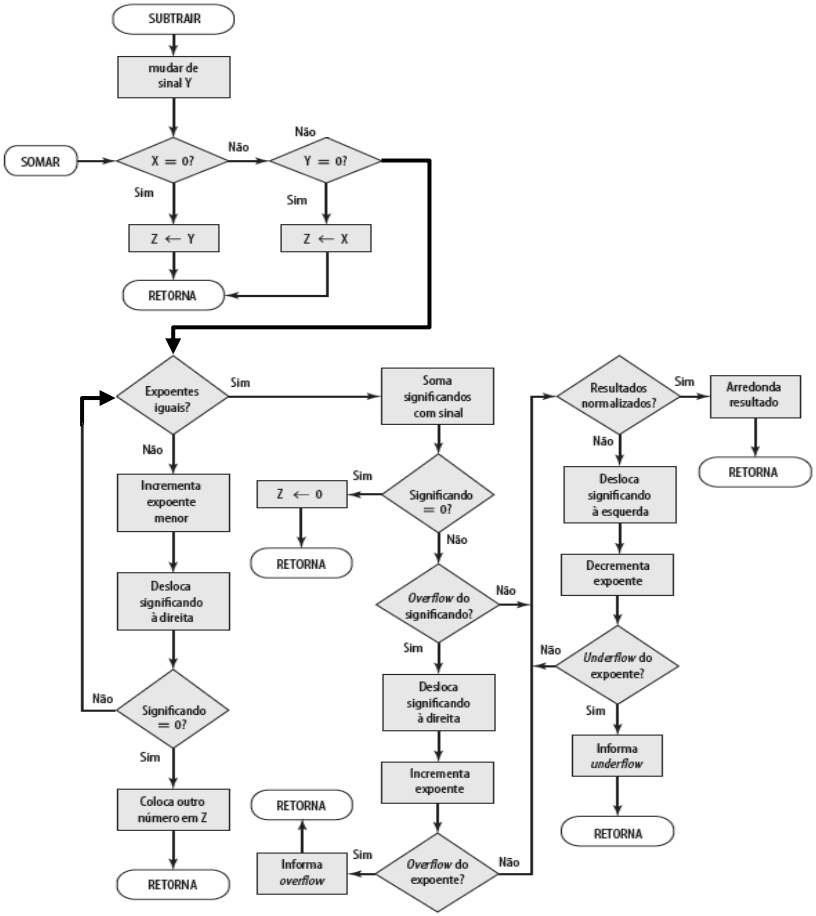
101.01 x 2^0

1.0101 x 2^2

2 + 15 = 17

0 | 10001 | 0101000000

Polarização: k=5, então $2^4 - 1 = 15$



Exemplo

IEEE FP16

Sinal	5 bits: Exp. polarizado	10 bits: Significando

20.3 + 5.25

20.3

0 | 10011| 1.0100010011

(19)

1.0100010011

0.0101010000 +

1.1001100011

0 | 10011 | 1001100011

Polarização: 19 – 15 = 4

1.5966796875×2^4 =

25.546875 = 25.55 (arredondando)

5.25

0 | 10001 | 1.0101000000

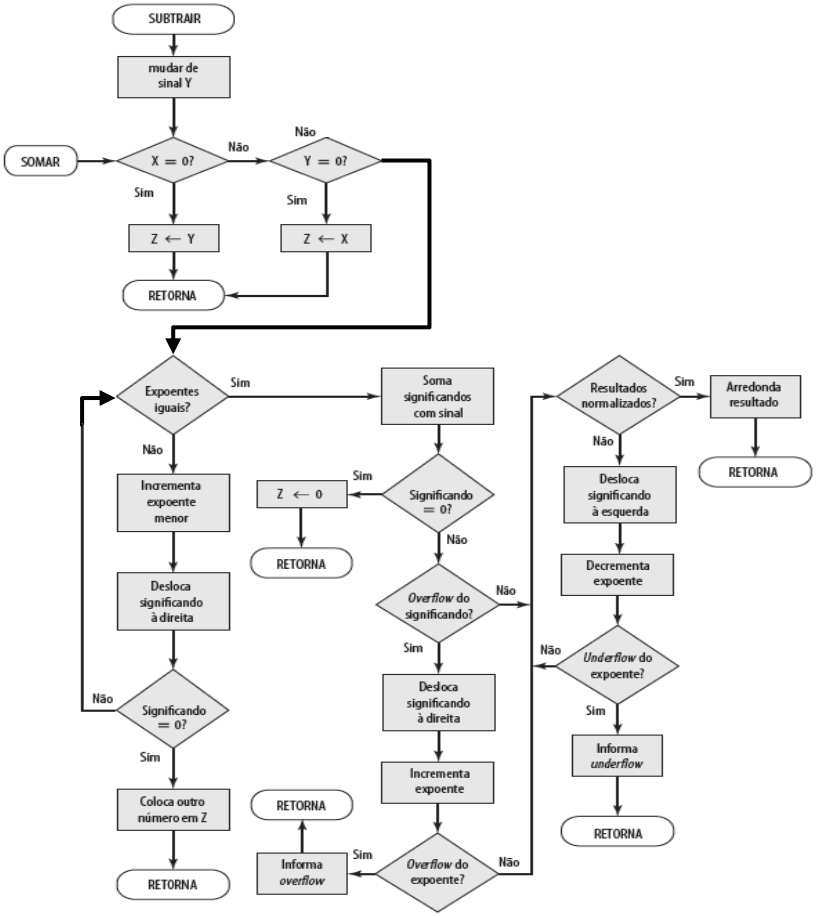
(17) + 1 = 18

0 | 10010 | 0.1010100000 | ~~0~~

(18) + 1 = 19

0 | 10011 | 0.0101010000 | ~~0~~

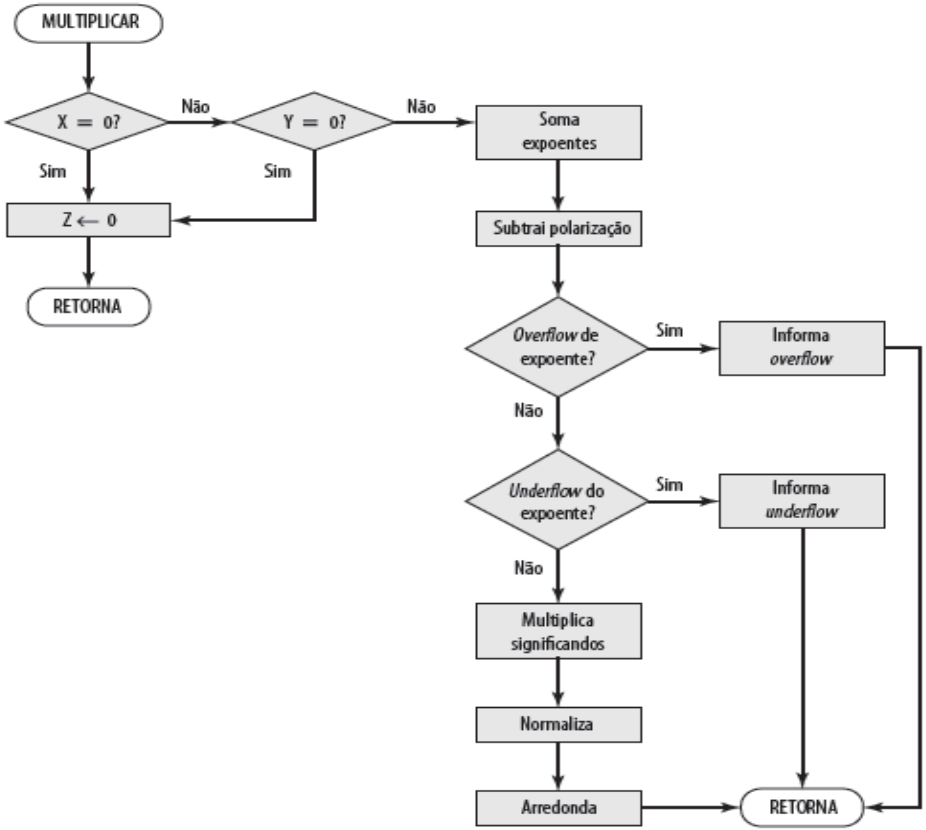
(19)

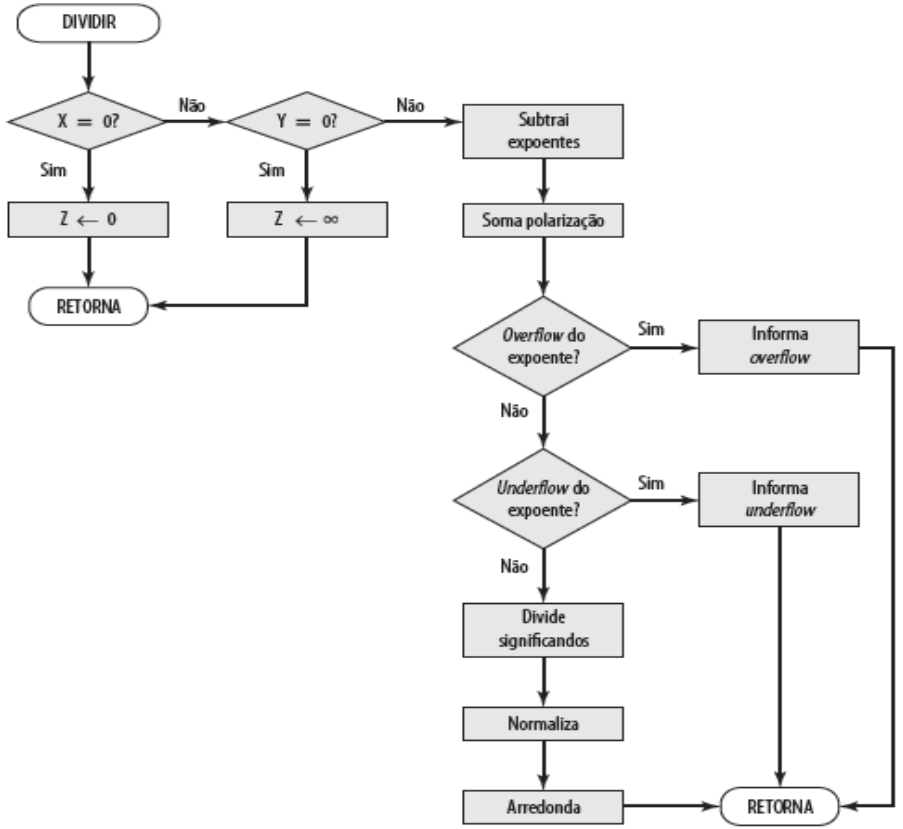


Aritmética de ponto flutuante (x/÷)

- Verifique zero.
- Some/subtraia expoentes.
- Multiplique/divida significandos (observe o sinal).
- Normalize.
- Arredonde.
- Resultados intermediários armazenados em tamanho duplo.

Multiplicação e divisão de ponto flutuante





FIM – Aula 13