Inoffizielles Skript

Brückenkurs Mathematik

im Wintersemester 2018/2019

author	Jonas Köppl, Maximilian Reif, N.N.
last change	18. Oktober 2018
github	`https://github.com/jonaskoeppl/brueckenkurs`

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in das mathematische Arbeiten

1.1 Ziele und Inhalt

Im Vergleich mit vielen anderen Studiengängen, selbst mit den naturwissenschaftlichen, hat das Mathematikstudium eine höhere Abbruchrate, und viele Studenten geben bereits während oder nach dem ersten Semester auf. Ein Hauptgrund für diese hohe Abbruchquote ist, dass sich die Art und Weise wie Mathematik an der Universität betrieben wird, grundlegend von dem unterscheidet, was man aus der Schule gewohnt ist. Ziel des Brückenkurses ist es also, die Studierenden auf eine möglichst schonende Art auf ihr erstes Semester vorzubereiten und sie schon einmal mit der Hochschulmathematik vertraut zu machen. Zu den Inhalten zählen neben einer Einführung in die Aussagenlogik auch die naive Mengenlehre und elementare Zahlentheorie. Diese bilden eine gute Grundlage um anhand von Beispielen verschiedene Beweistechniken kennenzulernen und mit Übungsaufgaben zu vertiefen.

1.2 Schwierigkeiten beim Studienbeginn

Auch aus eigener Erfahrung wissen wir, dass die folgenden beiden Punkte zu Problemen im ersten Semester führen:

1. **Die scheinbare Einfachheit des zu Beginn gelehrten Stoffes**. Der in den Vorlesungen zu Beginn vorgetragene Stoff erscheint den meisten bereits aus der Schule bekannt und leicht verständlich. Dies verführt dazu, sich auf seinem Schulwissen auszuruhen und den Zeitpunkt zu verpassen, ab dem man sich spätestens richtig reinhängen sollte. Desweiteren sieht der Stoff zu Beginn zwar leicht aus, doch es geht auch nicht primär darum, was behandelt wird, sondern wie es behandelt wird. Dies dient dazu, elementare Beweistechniken anhand relativ einfacherer Beispiele kennenzulernen, und sich langsam an komplexere Sachverhalte heranzutasten.

2. **Der hohe Abstraktionsgrad**. Während die Mathematik in der Schule oft aus algorithmischem Lösen von standardisierten Problemen bestand, ist an der Universität auch die Kreativität und Abstraktionsfähigkeit der Studierenden gefragt. Die wahre Entwicklung des Stoffes erfolgt nicht durch illustrative Beispiele, sondern innerhalb abstrakter Strukturen, die durch möglichst wenig Attribute definiert werden, und zwischen denen nach und nach Querbeziehungen hergestellt werden. Ein häufiger Fehler ist es, dass den Beweisen, in denen die Zusammenhänge aufgedeckt werden, nicht genug Bedeutung zugemessen wird. Dies führt zu einem mangelhaften Verständnis des Stoffes und somit später zu Frustration, da dieses Verständnis eine Grundvoraussetzung für Vorlesungen in höheren Semestern ist.

Doch dies soll nicht zur Abschreckung dienen, sondern eher als Motivation zur Bearbeitung der Übungsaufgaben und auch als kleine Warnung davor, sich in den ersten Wochen und Monaten auf den schulischen Lorbeeren auszuruhen.

1.3 Mathematisches Denken

Unter mathematischem Denken verstehen wir eine kreative aber auch strukturierte Arbeitsweise, die insbesondere auf das Lösen (selbst-)gestellter Probleme abzielt. Die Lösungen dieser Probleme werden (nach mühseliger Arbeit) in Form von *Beweisen* festgehalten, um sicherzustellen, dass auch andere Mathematiker

die genutzten logischen Schlussfolgerungen und Schritte nachvollziehen können. Oftmals ist der Beweis eines Satzes von größerer Bedeutung als das eigentliche Resultat. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn man für den Beweis eines Satzes eine neue Beweistechnik entwickelt hat, die sich auch in anderen Situationen gewinnbringend einsetzen lässt. Wie auch die meisten anderen Wissenschaften lebt die moderne Mathematik von Kollaboration. Oftmals kommt man erst im Gespräch mit anderen auf die richtige Idee, um ein Problem zu lösen und auch das gegenseitige Erklären des aktuellen Stoffes trägt viel zum Verständnis bei.
Um uns ein wenig aufzuwärmen, uns gegenseitig kennenzulernen und ein wenig das logische Denken zu schulen, gibt es nun auf den Übungsblättern ein paar einführende Rätsel.

Kapitel 2

Logische Grundlagen

Bevor wir uns mit Beweisen beschäftigen können, müssen zunächst die dafür notwendigen logischen Grundlagen erarbeitet werden. Hierzu benötigen wir eingangs ein paar Definitionen.

2.1 Definition
Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist. Dabei ist es nicht erforderlich, sagen zu können, *ob* die Aussage wahr oder falsch ist.

Am besten veranschaulichen wir uns das mit einem Beispiel und einer Übungsaufgabe.

2.2 Beispiel

(i) Es regnet. (Zeit- und ortsabhängig wahr oder falsch.)

(ii) 11 ist durch 5 teilbar. (Falsch.)

(iii) Es gibt unendlich viele Primzahlen. (Wahr, Beweis folgt.)

(iv) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Unbewiesen, Stand 17.10.18.)

Wir interessieren uns vor allem für mathematische Aussagen und deren Wahrheitsgehalt. Zunächst benötigen wir jedoch noch Möglichkeiten, um mehrere Aussagen *logisch zu verknüpfen*.

2.3 Definition
Wenn P und Q Aussagen sind, dann heißt $P \wedge Q$ die *Konjunktion* von P und Q. Der Wahrheitswert von $P \wedge Q$ ist definiert durch die Wahrheitswerte von P und Q mittels folgender *Wahrheitstafel*:

P	Q	$P \wedge Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Das heißt $P \wedge Q$ ist genau dann wahr, wenn P und Q beide wahr sind und sonst falsch.

2.4 Beispiel

(i) $(\sqrt{2}$ ist irrational$) \wedge (\sqrt{2} > 0)$ (Wahr.)

(ii) $(2 + 2 = 4) \wedge (3 + 2 = 7)$ (Falsch.)

2.5 Definition

Wenn P und Q Aussagen sind, so heißt $P \vee Q$ die *Disjunktion* von P und Q. Die definierende Wahrheitstafel ist gegeben durch:

P	Q	$P \vee Q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Das heißt $P \vee Q$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Teilaussagen wahr ist.

2.6 Beispiel

(i) $(\sqrt{2}$ ist irrational$) \vee (\sqrt{2} > 0)$ (Wahr.)

(ii) $(2 + 2 = 4) \vee (3 + 2 = 7)$ (Wahr.)

2.7 Bemerkung

Im Gegensatz zur Umgangssprache ist mit dem mathematischen oder stets das *inklusive oder* gemeint. Möchte man das *exklusive oder* verwenden, so nutzt man den Ausdruck „entweder … oder…“.

2.8 Definition

Wenn P eine Aussage ist, dann heißt $\neg P$ die *Negation* von P. Definierende Wahrheitstafel:

P	$\neg P$
w	f
f	w

2.9 Definition
Wenn P und Q zwei Aussagen sind, so heißt $P \Rightarrow Q$ (sprich: wenn P, dann Q) die *Implikation* von Q durch P. Definierende Wahrheitstafel:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

2.10 Beispiel

(i) Wenn $3 > 2$, dann teilt 5 die Zahl 10. (Wahr.)

(ii) Wenn $2 > 3$, dann ist die Erde eine Scheibe. (Wahr.)

2.11 Definition
Wenn P und Q Aussagen sind, so heißt die Verknüpfung $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ die *Äquivalenz* von P und Q. Abkürzend schreibt man auch $P \iff Q$. Die definierende Wahrheitstafel ist:

P	Q	$P \iff Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Um all diese neuen Definitionen, und vor allem die Verwendung von Wahrheitstafeln, einzuüben, lohnt es sich, einige der zugehörigen Übungsaufgaben zu lösen. Ferner sollten Sie versuchen, sich mit selbstständig erstellten Beispielen besser mit dem Stoff vertraut zu machen.

Kapitel 3

Mengen und Elemente

3.1 Mengen und Teilmengen

Im Folgenden geben wir eine kurze Einführung in die sogenannte *naive Mengenlehre*. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre ist möglich, wird aber hier nicht durchgeführt. Wer sich für eine Axiomatisierung interessiert, dem empfehlen wir die Vorlesung „Mathematische Logik“bei Prof. Dr. Kaiser. Diese bietet sich aufgrund des hohen Abstraktionsgrades allerdings eher für spätere Semester an und ist deshalb inzwischen nur noch im Master anrechenbar.

3.1 Definition
Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die in einer Menge zusammengefassten Objekte werden auch als *Elemente* von M bezeichnet.

3.2 Bemerkung
Um besser über Mengen und ihre Elemente sprechen zu können, brauchen wir noch ein wenig Notation.

(i) Ist x ein Element von M, so schreiben wir $x \in M$.

(ii) Ist x kein Element von M, so schreiben wir $x \notin M$.

3.3 Beispiel
In diesem Beispiel lernen wir einige Mengen und gängige Bezeichnungen kennen, damit wir uns später Schreibarbeit sparen können.

(i) Die Menge der *natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(ii) Die Menge der *natürlichen Zahlen* inklusive der 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(iii) $M = \{\text{rot, gelb, blau}\}$.

(iv) Die Menge aller Geraden und Dreiecke der Ebene.

(v) Die Menge aller Polynome $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

(vi) Die leere Menge $\emptyset$. Sie enthält keine Elemente.

3.4 Definition
Seien X, Y Mengen. Die Menge X heißt *Teilmenge* von Y (und Y heißt *Obermenge* von X), falls jedes Element von X auch ein Element von Y ist. In Zeichen: $X \subseteq Y$. Für die Negation von $X \subseteq Y$ wird $X \nsubseteq Y$ geschrieben.

3.5 Beispiel

(i) Die Menge $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$.

(ii) Es gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

3.6 Definition
Sei X eine Menge, so bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X. $\mathcal{P}(X)$ heißt die *Potenzmenge* von X.

3.7 Beispiel
Betrachte die Menge $X = \{1, 2\}$. Dann gilt:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

3.2 Prädikate und Erzeugung von Teilmengen

Betrachte zunächst die folgenden beiden Sätze:

(i) Für jede natürliche Zahl x gilt $x \geq 1$.

(ii) x ist kleiner als 5.

Dann ist (i) eine (wahre) Aussage, während man von (ii) nicht sagen kann, ob es wahr oder falsch ist. Also ist (ii) keine Aussage. Setzt man in (ii) für x eine beliebige natürliche Zahl ein, so erhält man aber eine Aussage. Im Satz (i) kommt x als *gebundene* Variable vor, im Satz (ii) als *freie* bzw. *ungebundene Variable*.

3.8 Definition
Sätze (hier im umgangssprachlichen Sinn), in denen eine freie Variable x vorkommt und die nach Ersetzen dieser Variablen x durch ein mathematisches Objekt zu einer Aussage werden, heißen *Prädikate* (= Eigenschaften) von x. Sie werden beispielsweise mit $P(x)$ bezeichnet.

3.9 Bemerkung
Ein Prädikat $P(x)$ ist nicht zu verwechseln mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Letztere hat als Argument immer eine Menge.

Einige oft verwendete Prädikate erhalten eigene Symbole.

3.10 Definition
Sei X eine Menge und $P(x)$ ein Prädikat.

1. Die Aussage „Für alle $x \in X$ gilt $P(x)$“wird abgekürzt durch:
$$\forall x \in X\colon\ P(x).$$
Das Symbol $\forall$ wird auch als *Allquantor* bezeichnet.

2. Die Aussage „Es gibt ein $x \in X$, für das $P(x)$ gilt“wird abgekürzt durch:
$$\exists x \in X\colon\ P(x).$$
Das Symbol $\exists$ wird auch als *Existenzquantor* bezeichnet.

3. Die Aussage „Es gibt genau ein $x \in X$, für das $P(x)$ gilt“wird abgekürzt durch:
$$\exists! x \in X\colon\ P(x).$$
oder
$$\exists_1 x \in X\colon\ P(x).$$

3.11 Bemerkung
Es gilt:

$$[\neg(\forall x \in X\colon\ P(x))] \iff [\exists x \in X\colon\ \neg P(x)].$$
$$[\neg(\exists x \in X\colon\ P(x))] \iff [\forall x \in X\colon\ \neg P(x)].$$

3.12 Definition
Sei X eine Menge und $P(x)$ ein Prädikat. Dann bezeichne

$$\{x \in X \mid \; P(x)\}$$

diejenige Teilmenge von X, die aus allen Elementen von X besteht, für die $P(x)$ wahr ist. Diese Darstellung einer Menge heißt auch *intensional*. Das bloße Aufzählen der beinhalteten Elemente wird als *extensional* bezeichnet.

3.13 Beispiel

(i) $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ n ist gerade}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

(ii) $\{n \in \mathbb{Z} \mid \text{ n ist ungerade}\} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$.

Die Beschreibung auf der linken Seite ist jeweils die intensionale Schreibweise, während auf der rechten Seite die extensionale Mengenschreibweise verwendet wird.

Mit Hilfe der gerade eingeführten Notation können wir nun elementare Mengenoperationen definieren.

3.14 Definition
Seien X, Y zwei Mengen.

(i) $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ heißt *Vereinigung* von X und Y.

(ii) $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ heißt *Durchschnitt* von X und Y.

(iii) $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$ heißt *relatives Komplement* von Y in X.

(iv) Ist $Y \subset X$, so heißt $X \setminus Y$ das *Komplement* von Y bzgl. X und wird mit Y^c bezeichnet.

3.15 Definition
Durchschnitte und Vereinigungen von Mengen lassen sich auf beliebig viele Mengen verallgemeinern. Sei dazu I eine Menge und für alle $i \in I$ sei A_i eine Menge.

1. Die Menge $\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : \; x \in A_i\}$ heißt die Vereinigung der Mengen A_i, $i \in I$.

2. Falls $I \neq \emptyset$ heißt die Menge $\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I : \; x \in A_i\}$ der Durchschnitt der Mengen A_i, $i \in I$.

3.16 Bemerkung

(i) Schreibweise für $I = \mathbb{N}$: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ bzw. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(ii) Schreibweise für $I = \{1, ..., n\}$: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ bzw. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Kapitel 4

Aufbau mathematischer Theorien

In diesem Abschnitt sprechen wir über den allgemeinen Aufbau einer mathematischen Theorie bzw. eines mathematischen Textes. Anhand zahlentheoretischer Beispiele werden zudem erste Beweistechniken eingeübt.

4.1 Definitionen

Jeder von euch kennt bereits eine Vielzahl von Definitionen. Nicht nur aus den vorherigen Kapiteln sondern auch aus der Schule. Was ist ein Dreieck, Parallelogramm oder Quadrat? Was meint man mit rechtwinklig? Was ist ein größter gemeinsamer Teiler? Ziel einer mathematischen Definition ist es, einen Begriff durch *invariante* Merkmale so zu beschreiben, dass man für jedes vorliegende mathematische Objekt *eindeutig* entscheiden kann, ob dieses Objekt der Definition genügt oder nicht.

4.1 Definition
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Die Zahl a heißt *Teiler* von b und b heißt *Vielfaches* von a, wenn es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = a \cdot c$. Man schreibt dann $a \mid b$. Die Negation ist $a \nmid b$.

4.2 Definition
Sei $n \in \mathbb{Z}$.

1. Die Zahl n heißt *gerade*, falls $2 \mid n$.

2. Falls n nicht gerade ist, so heißt n *ungerade*.

4.3 Definition
Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt *Primzahl*, falls $p > 1$ ist und 1 und p die einzigen natürlichen Zahlen sind die p teilen. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist, heißt *zusammengesetzt*.

Eine mathematische Definition sollte stets folgende Eigenschaften haben:

- **Eindeutigkeit**: Man kann eindeutig entscheiden, ob ein mathematisches Objekt die Definition erfüllt oder nicht.
- **Minimalität**: Es werden nur so viele Eigenschaften benutzt, wie für den Begriff unbedingt notwendig sind. Insbesondere bedeutet das, dass sich keine der Eigenschaften aus den restlichen Eigenschaften ableiten lässt.

4.2 Sätze und Beweise

Unter einem mathematischen Satz (Lemma, Korollar, etc.) verstehen wir eine nicht-triviale mathematische Aussage, für die ein gültiger Beweis vorliegt.

4.4 Bemerkung
Zur Begriffsklärung:

(i) **Satz, Theorem**: Dies ist das typische Resultat einer Theorie.

(ii) **Hauptsatz**: So wird ein besonders wichtiger Satz in einem Teilgebiet der Mathematik genannt, beispielsweise der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis.

(iii) **Lemma**: Diese Bezeichnung wird in verschiedenen Zusammenhängen verwendet. Zum einen bezeichnet es ein kleines, meist technisches Resultat, einen *Hilfssatz*, der zum Beweis eines wichtigen Satzes verwendet wird. Zum anderen handelt es sich dabei um besonders wichtige *Schlüsselgedanken*, die in vielen Situationen nützlich sind. Solche Lemmata werden dann auch häufig mit dem Namen ihres Erfinders bezeichnet (z.B. Lemma von Pratt, Lemma von Urysohn, Lemma von Zorn, etc.).

(iv) **Proposition**: Dies ist die lateinische Bezeichnung für Satz und wir manchmal synonym verwendet, meist aber um ein Resultat zu bezeichnen, dessen Wichtigkeit zwischen der eines Hilfssatzes und der eines Theorems liegt.

(v) **Korollar**: Dies ist die Bezeichnung für einen Satz, der aus einem anderen Satz durch triviale oder sehr einfache Schlussweise folgt. Manchmal ist es aber auch ein Spezialfall eines vorhergehenden Satzes, dem besondere Aufmerksamkeit gebührt.

4.2.1 Direkter Beweis

Der direkte Beweis beweist eine Aussage durch schrittweises Folgen von Aussagen auf Basis der gegebenen Voraussetzung. Sei dazu V die Voraussetzung und B die zu zeigende Behauptung. Unsere Aufgabe ist es also nun, geeignete Aussagen $A_1, A_2, ..., A_n$ zu finden, sodass schließlich gilt:

$$(V \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge ... \wedge (A_n \Rightarrow B)$$

Ist uns dies gelungen, so haben wir gezeigt, dass aus der Voraussetzung V stets auch die Behauptung B folgt. Am besten veranschaulichen wir uns dies anhand eines einfachen Beispiels aus der Zahlentheorie.

4.5 Proposition
Sei $a \in \mathbb{Z}$ gerade. Dann ist auch $a^2 = a \cdot a$ gerade.

Beweis:
Sei $a \in \mathbb{Z}$ gerade. Nach Definition existiert dann $c \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2 \cdot c$. Somit folgt:

$$a^2 = a \cdot a = 2c \cdot 2c = 2(2c^2).$$

Wegen $2c^2 \in \mathbb{Z}$ ist also auch a^2 gerade. $\square$

Allgemeiner lassen sich die folgenden Regeln zeigen:

4.6 Satz
(i) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a \mid 0, \quad 1 \mid a, \quad -1 \mid a, \quad a \mid a, \quad -a \mid a, \quad a \mid -a.$$

(ii) Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(a \mid b \ \wedge \ b \mid c) \Rightarrow a \mid c.$$

(iii) Seien $a, b_1, ..., b_n \in \mathbb{Z}$. Gilt $a \mid b_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$, so gilt für alle $x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}$:

$$a \mid x_1 b_1 + ... + x_n b_n.$$

(iv) Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(a \mid c \ \wedge \ b \mid d) \Rightarrow ab \mid dc.$$

Beweis: (Zur Übung)

4.2.2 Indirekter Beweis

Eine weitere oft verwendete Beweistechnik ist die des *Indirekten Beweis*. Diese beruht auf der folgenden logischen Äquivalenz: Seien V und B zwei Aussagen, dann gilt:

$$(V \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg V).$$

Diese Beweistechnik bietet sich in einigen Fällen an, da die rechte Implikation manchmal einfacher zu zeigen ist als die linke. Zusammengefasst ergibt sich das folgende Schema um eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ zu zeigen:

1. Wir nehmen a n es gelte $\neg B$ (und bringen dies auch zum Ausdruck, sodass auch der Leser oder Korrektor sieht, was wir vorhaben).

2. Aus der Aussage $\neg B$ und anderen uns zur Verfügung stehenden Definitionen und Sätzen leiten wir $\neg V$ ab.

3. Wegen der oben beschrieben Äquivalenz gilt dann auch $V \Rightarrow B$.

Diese Vorgehensweise werden wir nun verwenden um den folgenden Satz zu beweisen.
4.7 Satz
Sei $n \in \mathbb{Z}$, sodass n^2 gerade ist. Dann ist auch n gerade.

Beweis:
Sei also $n \in \mathbb{Z}$ ungerade. Wir zeigen nun, dass dann auch das Quadrat von n ungerade ist. Da n ungerade ist existiert $c \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2c + 1$. Somit erhalten wir durch Anwendung der ersten binomischen Formel:

$$n^2 = (2c + 1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = 2(2c^2 + 2c) + 1.$$

Also ist n^2 ungerade und die Behauptung gezeigt. $\square$

Für diese Beweistechnik ist es sehr wichtig, dass man sich darüber im Klaren ist, wie die Negation einer Aussage lautet. Daher wollen wir dies mit ein paar Beispielen vertiefen.

4.2.3 Widerspruchsbeweis

Der *Widerspruchsbeweis* (auch bekannt als *Reductio ad absurdum*) basiert auf der logischen Äquivalenz:

$$(V \Rightarrow B) \iff \neg(V \wedge \neg B)$$

Ein Beweis per Widerspruch verläuft also nach dem folgenden Schema:

1. Wir bringen zum Ausdruck, dass der Beweis per Widerspruch erfolgen soll. Meist schreibt man einfach: „Widerspruchsannahme: $\neg B$". Auch hier ist es wichtig, dass man die Negation der Aussage B richtig formuliert.

2. Aus den Aussagen V und $\neg B$ leiten wir nun eine Aussage ab, von der wir bereits wissen, dass sie falsch ist.

3. Um zu zeigen, dass dies der gewünschte Widerspruch ist markieren wir die Stelle durch einen Blitz oder durch das Wort „Widerspruch".

Da diese Beweistechnik einem nicht direkt einleuchtend erscheint, werden wir uns ein paar Beispiele dazu anschauen.

4.8 Lemma

(i) Ist $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so gilt für jeden Teiler a von b: $1 \leq |a| \leq |b|$.

(ii) Die einzigen Teiler von 1 sind 1 und -1.

(iii) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a \mid b \;\wedge\; b \mid a \iff b = a \text{ oder } b = -a.$$

Beweis:
zu (i):
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ und gelte $a \mid b$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $b = n \cdot a$ und somit gilt auch $n \neq 0$. Die erste Ungleichung ist wegen $b \neq 0$ klar. Angenommen

es gilt $|a| > |b|$. Dann folgt unter Verwendung elementarer Rechenregeln für die Betragsfunktion:

$$|b| = |na| = |n||a| \geq |a| > |b|$$

Widerspruch. Also gilt $1 \leq |a| \leq |b|$.
zu (ii), (iii): [Zur Übung]. □

4.9 Lemma
Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $a > 1$. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, ..., p_r$, sodass:

$$a = p_1 \cdot ... \cdot p_r \tag{4.1}$$

Die Zerlegung (4.1) wird auch als die *Primfaktorzerlegung* von a bezeichnet.

Beweis:
Angenommen die Behauptung des Lemmas ist falsch. Dann gibt es insbesondere eine kleinste natürliche Zahl a mit $a > 1$, für die keine derartige Zerlegung existiert. Zunächst einmal halten wir fest, dass dann a keine Primzahl sein kann, denn sonst wäre a ja trivialerweise ein Produkt von Primzahlen. Also gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N} \setminus \{1, a\}$ mit $b \mid a$. Daher existiert nach Definition $c \in \mathbb{N}$ mit $a = b \cdot c$. Nach Lemma 4.8 gilt ferner: $b < a$ und $c < a$. Da a die kleinste natürliche Zahl ist, die keine derartige Zerlegung besitzt lassen sich b und c in Primfaktoren zerlegen:

$$b = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$$
$$c = p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_k$$

Somit folgt

$$a = bc = p_1 \ldots p_s p_{s+1} \ldots p_k$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Also besitzt jede natürliche Zahl eine Primfaktorzerlegung. □

Auf Basis dieses Lemmas können wir nun den folgenden, auf Euklid zurückgehenden Satz beweisen. Auch diesen werden wir per Widerspruch beweisen.

4.10 Satz
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis:
Die Negation von *unendlich viele* ist *endlich viele*. Also nehmen wir an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Sei also

$$P = \{p_1, \dots, p_n\}$$

die Menge aller Primzahlen. Setze nun

$$a = p_1 \dots p_n + 1$$

Dann gilt offensichtlich $a > 1$. Nach Lemma 4.10 lässt sich a also in Primfaktoren zerlegen. Es gilt also $p_i \mid a$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Wegen $p_i \mid p_1...p_n$ gilt nach Satz 4.6: $p_i \mid a - p_1...p_n = 1$. Also $p_i \mid 1$. Dies liefert $p_i = 1$. Im Widerspruch dazu, dass p_i eine Primzahl ist. □

Ein weiteres klassisches Resultat, welches man per Widerspruch beweist, ist folgender Satz, den wir schon zuvor als Beispiel gesehen haben.

4.11 Satz
Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. Das heißt falls $q \in \mathbb{Q}$, dann gilt $q \neq \sqrt{2}$.

Beweis:
Angenommen $\sqrt{2}$ ist rational. Dann existieren $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Ferner seien p und q teilerfremd. Es gilt also insbesondere:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Somit folgt durch Umstellen:

$$p^2 = 2q^2.$$

Also ist p^2 eine gerade Zahl. Nach Satz 4.7 ist damit auch p gerade, folglich existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p = 2n$. Dies liefert wiederum:

$$2q^2 = p^2 = (2n)^2 = 4n^2.$$

Also gilt insbesondere $q^2 = 2n^2$. Daher ist auch q durch zwei teilbar. Im Widerspruch dazu, dass p und q teilerfremd sind. Somit kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein und die Behauptung ist gezeigt. □

4.2.4 Allgemeine Tipps für Beweise

Für nahezu jeden Studienanfänger ist es eine der größten Hürden in den ersten Wochen und Monaten des Studiums, seine eigenen Gedanken sinnvoll und nachvollziehbar zu Papier zu bringen. Dies führt bei vielen zu Frustration, da die Gedankengänge an sich oftmals in die richtige Richtung gehen, aber nicht in mathematisch korrekter Weise formuliert werden, was meist zu Punktabzügen führt. Im Folgenden geben wir einige Tipps, die beim Aufschreiben eines Beweises bzw. beim Bearbeiten von Übungsaufgaben helfen können.

Voraussetzungen (Setting):
Der erste Schritt eines jeden Beweises ist es, die Voraussetzungen klar und deutlich aufzuschreiben. Es ist oftmals sinnvoll, die einzelnen Teilaussagen des Settings durchzunummerieren.

Skizze:
Manchmal kann es durchaus hilfreich sein, sich eine Skizze von einem Sachverhalt zu machen. Dies dient dazu, ein besseres Verständnis des Problems zu erhalten. Ist das Problem geometrischer Natur so kann man sich auch die Beweisidee in die Skizze einzeichnen. Dies dient jedoch lediglich zur Veranschaulichung und ist auf keinen Fall ein Beweis.

Fallunterscheidung:
Bevor mit dem eigentlichen Beweis begonnen wird kann man sich fragen, ob man das Problem in zwei Teilprobleme aufteilen sollte, die beide einfacher wären, als das große Problem auf einmal zu lösen. Auch Spezialfälle können per Fallunterscheidung ausgegliedert werden.

OBdA / OE:
OBdA ist die Abkürzung von *Ohne Beschränkung der Allgemeintheit* und OE steht für *Ohne Einschränkung*. Dies wird verwendet, wenn eigentlich eine Fallunterscheidung angewendet werden müsste, jedoch alle anderen Fälle einfach aus dem behandelten Fall gefolgert werden können. Dieses Mittel sollte auf jeden Fall mit Bedacht eingesetzt werden.

Gegenbeispiele:
Gegenbeispiele sind das Mittel der Wahl, um eine falsche Aussage zu widerlegen.

Verwendung von Symbolen:
Symbole im Text erhöhen zwar oft dessen Präzision und machen den Text an sich kürzer, allerdings sollte man zur besseren Lesbarkeit ein paar Regeln beachten.

1. Ein Satz sollte nicht mit einem Symbol beginnen.
2. Zwei mathematische Symbole sollten im Fließtext stets durch mindestens ein Wort getrennt werden.
3. Mathematische Symbole sollten nicht als Abkürzung für Worte im Text verwendet werden.

Lesbarkeit und Übersichtlichkeit:
Ein einfacher aber sehr effektiver Weg einen Beweis zu verbessern besteht darin, euren Beweis übersichtlich zu strukturieren und vor allem leserlich zu schreiben. Insbesondere kann der Korrektor so euren Gedankengang deutlich besser nachvollziehen, wodurch ihr ein besseres Feedback erhaltet.

Kapitel 5

Relationen und Abbildungen

Ziel dieses Kapitels ist es, den Begriff der Abbildung (oder Funktion) mathematisch präzise zu fassen. Da eine Funktion ein Spezialfall einer Relation ist, werden wir uns zuerst einmal mit Relationen im Allgemeinen befassen.

5.1 Relationen

5.1 Definition
Seien A, B zwei Mengen. Dann ist das *kartesische Produkt* von A und B definiert durch:

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

5.2 Definition
Seien A, B zwei Mengen und $A \times B$ das kartesische Produkt von A und B. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt dann auch eine (zweistellige) *Relation* (zwischen X und Y). Gilt $X = Y$ so spricht man auch von einer Relation *auf* X. Anstatt von $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy.

5.3 Beispiel
Die folgenden Mengen sind Relationen:

(i) $R_1 := \{(a, b) | a \neq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(ii) $R_2 := \{(a, b) | a | b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(iii) $R_3 := \{(a, b) | a \leq b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Eine Relation kann verschiedene Eigenschaften haben:

5.4 Definition
Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Relation. R heißt

(i) *reflexiv*, falls: $\forall x \in X\colon\ (x,x) \in R$,

(ii) *symmetrisch*, falls: $\forall x, y \in X\colon\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$,

(iii) *antisymmetrisch*, falls: $\forall x, y \in X\colon\ (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$,

(iv) *transitiv*, falls: $\forall x, y, z \in X\colon\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$.

5.5 Beispiel
Die bereits aus der Schule bekannte Relation $\leq$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, aber nicht symmetrisch.

5.6 Definition
Eine Relation R auf einer Menge X wird als *Äquivalenzrelation* bezeichnet, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

5.7 Definition
Eine Relation R auf einer Menge X wird als *partielle Ordnung* bezeichnet, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

5.8 Proposition
Sei X eine Menge. Dann ist durch

$$R := \{(A,B) |\ A \subseteq B\}$$

eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(X)$ definiert.

Beweis: (Zur Übung)

5.9 Proposition
Sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann ist durch

$$R_m := \{(a,b) |\ m \text{ teilt } (b-a)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Beweis: (Zur Übung)

5.2 Abbildungen

5.10 Definition
Seien A, B nichtleere Mengen und R eine Relation zwischen A und B. R heißt

(i) *linkstotal*, falls: $\forall a \in A\ \exists b \in B\colon\ (a, b) \in R$.

(ii) *rechtseindeutig*, falls: $\forall a \in A \forall b, c \in B\colon\ (a, b) \in R \wedge (a, c) \in R \Rightarrow b = c$.

Eine linkstotale und rechtseindeutige Relation wird als *Abbildung* oder auch als *Funktion* bezeichnet.

5.11 Bemerkung
Wenn man die Begriffe der Linkstotalität und der Rechtseindeutigkeit zusammenfasst erhält man

$$\forall a \in A\ \exists! b \in B\colon\ (a, b) \in R.$$

Dies wird in der Literatur vereinzelt auch als *Funktionseigenschaft* bezeichnet.

5.12 Bemerkung
Funktionen können natürlich mit der für Relationen kennengelernten Notation aufgeschrieben werden, allerdings hat sich in der heutigen Zeit die folgende Notation für eine Funktion f von A nach B durchgesetzt:

$$f\colon\ A \to B, \quad x \mapsto f(x)$$

Hierbei ist es wichtig anzumerken, dass jede Funktionsdefinition aus zwei Bausteinen besteht:

1. Angabe von Definitions- und Wertebereich,

2. Angabe der Abbildungsvorschrift.

5.13 Beispiel

(i) $f\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2$.

(ii) Sei X eine nichtleere Menge. Dann heißt die Abbildung

$$id_X\colon\ X \to X,\ x \mapsto x$$

die *Identität* auf X.

(iii) Nur durch $x \mapsto x^2$ ist keine Funktion definiert, da Definitions- und Wertebereich nicht spezifiziert sind.

Oftmals ist es notwendig, Funktionen auf spezielle Eigenschaften zu untersuchen. Einige dieser Eigenschaften, die Ihnen im Laufe des Studiums noch häufiger begegnen, werden im Folgenden vorgestellt.

5.14 Definition
Seien A, B nichtleere Mengen. Eine Abbildung $f\colon\ A \to B$ heißt

(i) *injektiv*, falls:

$$\forall a_1, a_2 \in A\colon\ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2,$$

(ii) *surjektiv*, falls:

$$\forall b \in B\ \exists a \in A\colon\ f(a) = b,$$

(iii) *bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv ist.

5.15 Beispiel
Betrachte die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2.$$

Dann ist f nicht injektiv, denn es gilt: $f(-5) = 25 = f(5)$ und $-5 \neq 5$. Zudem ist f auch nicht surjektiv, denn es gilt $f(x) = x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

5.3 Bild und Urbild

5.16 Definition
Seien X, Y nichtleere Mengen und sei $f\colon\ X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Sei $A \subseteq X$. Dann heißt $f(A) := \{y \in Y | \exists x \in A\colon\ f(x) = y\}$ das *Bild* von A unter f.

(ii) Sei $B \subseteq Y$. Dann heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}$ das *Urbild* von B unter f.

5.17 Beispiel
Betrachte die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x,$$

Sowie die Mengen $A = [0,2]$ und $B = \{1,3,8,9\}$.
Dann gilt:

$$f(A) = [-2,0],$$
$$f^{-1}(A) = \{-1,-3,-8,-9\}.$$

5.18 Satz
Seien X, Y nichtleere Mengen, $f\colon\ X \to Y$ eine Abbildung, I eine Menge. Weiter seien A, B sowie A_i, $i \in I$, Teilmengen von X. Dann gilt:

1. $f(A) = \emptyset \iff A = \emptyset$,
2. $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$,
3. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,
4. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, wobei im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Beweis: (Zur Übung)

5.19 Satz
Seien X, Y nichtleere Mengen, $f\colon\ X \to Y$ eine Abbildung. Weiter seien I eine Menge sowie A, B und A_i, $i \in I$, Teilmengen von Y. Dann gilt:

(i) $f^{-1}(A) = \emptyset \iff A \cap f(X) = \emptyset$,

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$,

(iii) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$,

(iv) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$,

(v) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Beweis: (Zur Übung)