

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zufallsvariablen in Banachräumen</b>	<b>2</b>
1.1	Borelmengen in metrischen Räumen . . . . .	2
1.2	Borelmaße auf metrischen Räumen . . . . .	2
1.3	Meßbare Vektorräume . . . . .	4
1.4	Zufallsvariablen mit Werten in Banachräumen . . . . .	5
1.5	Charakteristische Funktionale . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Konvergenzarten</b>	<b>6</b>
2.1	Fast-sichere Konvergenz . . . . .	6
2.2	Stochastische Konvergenz . . . . .	6
2.3	Verteilungskonvergenz . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Maximal-Ungleichungen und Konvergenz zufälliger Reihen</b>	<b>7</b>
3.1	Maximal-Ungleichungen . . . . .	7
3.2	Der Satz von Itô-Nisio . . . . .	8
3.3	Das Kontraktions-Prinzip . . . . .	8
3.4	Beschränktheit und der Satz von Hoffman-Jorgensen-Kwapień . . . . .	8

# 1 Zufallsvariablen in Banachräumen

TODO: Einleitung

## 1.1 Borelmengen in metrischen Räumen

Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  bezeichne im Folgenden  $\mathcal{B}(X)$  die Borel- $\sigma$ -algebra in  $X$ . Zudem werden für  $x \in X$  und  $r > 0$  mit  $B(x, r)$  bzw.  $\overline{B}(x, r)$  die offene bzw. abgeschlossene Kugel um  $x$  mit Radius  $r$  bezeichnet.

### 1.1 Proposition

Sei  $(X, d)$  ein separabler metrischer Raum. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}) = \sigma(\{\overline{B}(x, r) : x \in X, r > 0\}).$$

**Beweis.**

Setze

$$\mathcal{A}_1 := \sigma(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}),$$

$$\mathcal{A}_2 := \sigma(\{\overline{B}(x, r) : x \in X, r > 0\}).$$

Nach Definition gilt  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B}(X)$ . Zu zeigen ist also nur die Inklusion  $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}_1$ . Sei dazu  $U \subseteq X$  offen und  $x \in U$ . Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare dichte Teilmenge  $D \subseteq X$ . Definiere

$$R := \{(y, r) : y \in U \cap D, r > 0, r \in \mathbb{Q}, B(y, r) \subseteq U\}.$$

Dann ist  $R$  abzählbar und da  $D$  dicht in  $X$  liegt gilt  $U = \bigcup_{(y, r) \in R} B(y, r)$ . Also gilt  $U \in \mathcal{A}_1$  und da  $\mathcal{B}(X)$  von den offenen Teilmengen von  $X$  erzeugt wird folgt die Behauptung.  $\square$

### 1.2 Proposition

Für  $i \in \mathbb{N}$  sei  $(X_i, d_i)$  ein separabler metrischer Raum. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X_1 \times X_2 \times \dots) = \otimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(X_i)$$

**Beweis.**

Setze  $X := \times_{k \in \mathbb{N}} X_k$  und bezeichne  $p_k : X \rightarrow X_k$  die Projektion auf die  $k$ -te Komponente. Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{E} := \left\{ \bigcap_{k \in K} p_k^{-1}(O) \mid \forall k \in K : O_k \subseteq X_k \text{ offen, } K \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich} \right\}.$$

Offensichtlich gilt  $\otimes_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(X_k) = \sigma(\mathcal{E})$ . Ferner ist  $X$  ein separabler metrischer Raum und  $\mathcal{E}$  eine Basis der Produkttopologie auf  $X$ , vgl. [2][3.7]. Also lässt sich jede offene Menge  $O \subset X$  als abzählbare Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{E}$  darstellen. Dies impliziert  $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{E}) = \otimes_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(X_k)$ .  $\square$

## 1.2 Borelmaße auf metrischen Räumen

Bis auf weiteres sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum mit Borel- $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(X)$ . Im Folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit Maßen auf  $\mathcal{B}(X)$ , welche teilweise auch als *Borel-Maße* bezeichnet werden. Die Bezeichnung wird in der Literatur allerdings nicht einheitlich verwendet.

### 1.3 Definition

Ein Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(X)$  heißt *regulär*, falls

$$\begin{aligned}\forall B \in \mathcal{B}(X) : \quad \mu(B) &= \sup\{\mu(C) : C \subseteq B, C \text{ abgeschlossen}\} \\ &= \inf\{\mu(O) : B \subseteq O, O \text{ offen}\}.\end{aligned}$$

### 1.4 Proposition

Sei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(X)$ . Dann ist  $\mu$  regulär.

**Beweis.**

**TODO**

### 1.5 Definition

Ein Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(X)$  heißt *straff*, falls es für alle  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K \subseteq X$  gibt mit

$$\mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

### 1.6 Korollar

Sei  $\mu$  ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(X)$ . Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{B}(X) : \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}.$$

**Beweis.**

Sei  $A \in \mathcal{B}(X)$  und  $\varepsilon > 0$ . Wegen der Straffheit von  $\mu$  existiert eine kompakte Menge  $K_\varepsilon \subseteq X$  mit  $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ , und da  $\mu$  nach Proposition 1.4 regulär ist gibt es eine abgeschlossene Menge  $C \subseteq A$  mit  $\mu(C) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann ist die Menge  $K_\varepsilon \cap C$  wiederum kompakt und es gilt

$$\mu(A) \geq \mu(K_\varepsilon \cap C) > \mu(C) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu(A) - \varepsilon.$$

□

### 1.7 Bemerkung

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(X)$  mit der Eigenschaft

$$\forall A \in \mathcal{B}(X) : \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}.$$

wird auch als *Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß* oder *Radon-Maß* bezeichnet.

### 1.8 Proposition

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger separabler metrischer Raum. Dann ist jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(X)$  straff.

Wir verwenden zum Beweis der Proposition die folgende Charakterisierung kompakter Teilmengen metrischer Räume. Ein Beweis findet sich etwa in [1].

### 1.9 Lemma

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $K \subseteq X$  ist genau dann kompakt, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $K$  ist vollständig,
- (ii)  $K$  ist total-beschränkt, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_n \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

**Beweis.**

**TODO** Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare dichte Teilmenge  $D = \{x_1, x_2, \dots\}$  von  $X$ . Also gilt insbesondere für  $q \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_i, 2^{-q}) = X.$$

Wegen der  $\sigma$ -Stetigkeit von  $\mu$  existiert also ein  $N_q \in \mathbb{N}$  mit

$$\mu(\cup_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q}) \geq 1 - \varepsilon 2^{-q}.$$

Setze nun

$$K := \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q}).$$

Dann ist  $K$  als Schnitt abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen, und da  $X$  vollständig ist, folgt daraus bereits die Vollständigkeit von  $K$ . Ferner ist  $K$  total-beschränkt, denn zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $q \in \mathbb{N}$  mit  $2^{-q} < \varepsilon$  und  $K \subseteq \cup_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q}) \subseteq \cup_{i=1}^{N_q} B(x_i, \varepsilon)$ . Zudem gilt

$$\begin{aligned} \mu(K) &= 1 - \mu(\cup_{q \in \mathbb{N}} \cap_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q})^c) \geq 1 - \sum_{q=1}^{\infty} \mu(\cap_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q})^c) \\ &\geq 1 - \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-q} = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist  $\mu$  straff. □

### 1.10 Proposition

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(X)$ . Dann sind äquivalent

- (i)  $\mu$  ist straff.
- (ii) Es gibt eine separable Teilmenge  $E \subseteq X$  mit  $\mu(E) = 1$ .

#### Beweis.

zu (i)  $\Rightarrow$  (ii): Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert  $K_n \subseteq X$  kompakt mit  $\mu(K_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$ , o.E. gelte  $K_n \subseteq K_{n+1}$ . Es folgt

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(K_{n+1}) = 1.$$

Da kompakte Teilmengen metrischer Räume insbesondere separabel sind, ist  $E := \cup_{n=1}^{\infty} K_n$  als abzählbare Vereinigung separabler Mengen ebenso separabel.

zu (ii)  $\Rightarrow$  (i): Analog zum Beweis von Proposition 1.8. □

## 1.3 Meßbare Vektorräume

### 1.11 Definition

Sei  $X$  ein Vektorraum und  $\mathcal{C}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Das Tupel  $(X, \mathcal{C})$  heißt *meßbarer Vektorraum*, falls

- (a) Die Abbildung

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

ist  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C} / \mathcal{C}$ -meßbar, und

- (b) die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

ist  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{C} / \mathcal{C}$ -meßbar.

### 1.12 Bemerkung

Sei  $(X, \mathcal{C})$  ein meßbarer Vektorraum. Dann gilt

(i) Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung

$$f_\alpha : X \rightarrow X, x \mapsto \alpha x$$

$\mathcal{C}/\mathcal{C}$ -messbar.

(ii) Für alle  $y \in X$  ist die Abbildung

$$g_y : X \rightarrow X, x \mapsto x + y$$

$\mathcal{C}/\mathcal{C}$ -messbar.

**Beweis.**

Man beachte, dass für beliebige messbare Räume  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ , Mengen  $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  und  $\omega_1 \in \Omega_1$

$$A(\omega_1) = \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\} \in \mathcal{A}_2$$

gilt. □

### 1.13 Proposition

Sei  $X$  ein separabler Banachraum. Dann ist  $(X, \mathcal{B}(X))$  ein messbarer Vektorraum.

**Beweis.**

Nach Proposition 1.2 gilt  $\mathcal{B}(X \times X) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$  und  $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times X) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(X)$ . Ferner sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X, & (x, y) &\mapsto x + y, \\ \cdot : \mathbb{R} \times X &\rightarrow X, & (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

stetig bzgl. der jeweiligen Produkttopologien und somit insbesondere  $\mathcal{B}(X \times X)/\mathcal{B}(X)$ - bzw.  $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times X)/\mathcal{B}(X)$ -messbar. □

### 1.14 Beispiel

Für  $d \in \mathbb{N}$  ist  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  ein messbarer Vektorraum.

Im Folgenden sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und  $(X', \|\cdot\|_{op})$  der zugehörige Dualraum.

### 1.15 Proposition

Sei  $\emptyset \neq \Gamma \subseteq X'$ . Dann ist  $(X, \sigma(\Gamma))$  ein messbarer Vektorraum.

**Beweis.**

TODO

### 1.16 Proposition

Sei  $X$  ein separabler Banachraum. Dann gilt  $\sigma(X') = \mathcal{B}(X)$ .

## 1.4 Zufallsvariablen mit Werten in Banachräumen

TODO

## 1.5 Charakteristische Funktionale

TODO

## **2 Konvergenzarten**

### **2.1 Fast-sichere Konvergenz**

### **2.2 Stochastische Konvergenz**

### **2.3 Verteilungskonvergenz**

### 3 Maximal-Ungleichungen und Konvergenz zufälliger Reihen

Bezeichne  $L_0(E)$  den Vektorraum der  $E$ -wertigen-Zufallsvariablen.

#### 3.1 Maximal-Ungleichungen

##### 3.1 Definition

Eine  $E$ -wertige Zufallsvariable  $X$  heißt *symmetrisch*, falls  $-X$  die selbe Verteilung hat wie  $X$ , d.h.

$$\forall A \in \mathcal{B}(E) : P(\{X \in A\}) = P(\{-X \in A\}).$$

##### 3.2 Definition

Eine Folge  $X_1, X_2, \dots$  von  $E$ -wertigen Zufallsvariablen heißt *symmetrisch*, falls  $(\varepsilon_1 X_1, \varepsilon_2 X_2, \dots)$  für jede Wahl von  $\varepsilon_i = \pm 1$  die gleiche Verteilung hat wie  $(X_1, X_2, \dots)$ .

##### 3.3 Bemerkung

Sind  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige  $E$ -wertige Zufallsvariablen, sodass  $X_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  symmetrisch ist, dann ist  $(X_1, X_2, \dots)$  symmetrisch.

##### 3.4 Satz (Lévy's Maximal-Ungleichung)

Seien  $X_1, \dots, X_N \in L_0(E)$  unabhängige und symmetrische Zufallsvariablen und setze

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Dann gilt für alle  $t > 0$

$$P(\{\max_{1 \leq n \leq N} \|S_n\| > t\}) \leq 2P(\{\|S_N\| > t\}), \quad (3.1)$$

$$P(\{\max_{1 \leq n \leq N} \|X_n\| > t\}) \leq 2P(\{\|S_N\| > t\}). \quad (3.2)$$

**Beweis.**

**TODO**

Für nicht-symmetrische Zufallsvariablen erhalten wir mit einer ähnlichen Beweismethode die folgende auf Ottaviani und Skorohod zurückgehende Maximal-Ungleichung.

##### 3.5 Satz (Maximal-Ungleichung von Ottaviani-Skorohod)

Seien  $X_1, \dots, X_N$  unabhängige  $E$ -wertige Zufallsvariablen,  $N \in \mathbb{N}$ . Setze

$$S_k := \sum_{i=1}^k X_i, \quad k = 1, \dots, N.$$

Dann gilt für alle  $s, t > 0$

$$P(\{\max_{1 \leq k \leq N} \|S_k\| > s + t\}) \leq \frac{P(\{\|S_N\| > t\})}{1 - \max_{1 \leq k \leq N} P(\{\|S_N - S_k\| > s\})}. \quad (3.3)$$

**Beweis.**

**TODO**

**3.2 Der Satz von Itô-Nisio**

**3.3 Das Kontraktions-Prinzip**

**3.4 Beschränktheit und der Satz von Hoffman-Jorgensen-Kwapień**



# Literaturverzeichnis

- [1] AMANN, H. ; ESCHER, J.: *Analysis I*. Birkhäuser, Basel, 2006
- [2] QUERENBURG, B.v.: *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 2001