Inhaltsverzeichnis

1 Zufallsvariablen in Banachräumen

TODO: Einleitung

1.1 Borelmengen in metrischen Räumen

Für einen metrischen Raum (X, d) bezeichne im Folgenden $\mathcal{B}(X)$ die Borel-σ-algebra in X. Zudem werden für $x \in X$ und $r > 0$ durch $B(x, r)$ bzw. $\overline{B}(x, r)$ die offene bzw. abgeschlossene Kugel um x mit Radius r bezeichnet.

1.1 Proposition
Sei (X, d) ein separabler metrischer Raum. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}) = \sigma(\{\bar{B}(x, r) : x \in X, r > 0\}).$$

Beweis.
Setze

$$\mathcal{A}_1 := \sigma(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}),$$
$$\mathcal{A}_2 := \sigma(\{\overline{B}(x, r) : x \in X, r > 0\}).$$

Nach Definition gilt $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B}(X)$. Zu zeigen ist also nur die Inklusion $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}_1$. Sei dazu $U \subseteq X$ offen und $x \in U$. Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subseteq X$. Definiere

$$R := \{(y, r) : y \in U \cap D, r > 0, r \in \mathbb{Q}, B(y, r) \subseteq U\}.$$

Dann ist R abzählbar und da D dicht in X liegt gilt $U = \bigcup_{(y,r)\in R} B(y, r)$. Also gilt $U \in \mathcal{A}_1$ und da $\mathcal{B}(X)$ von den offenen Teilmengen von X erzeugt wird folgt die Behauptung. $\square$

1.2 Proposition
Für $i \in \mathbb{N}$ sei (X_i, d_i) ein separabler metrischer Raum. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X_1 \times X_2 \times ...) = \otimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(X_i)$$

Beweis.
Setze $X := \times_{k\in\mathbb{N}} X_k$ und bezeichne $p_k : X \to X_k$ die Projektion auf die k-te Komponente. Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{E} : = \{\cap_{k\in K} p_k^{-1}(O) | \forall k \in K : O_k \subseteq X_k \text{ offen}, K \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich}\}.$$

Offensichtlich gilt $\otimes_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(X_k) = \sigma(\mathcal{E})$. Ferner ist X ein separabler metrischer Raum und $\mathcal{E}$ eine Basis der Produkttopologie auf X, [2][3.7]. Also lässt sich jede offene Menge $O \subset X$ als abzählbare Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{E}$ darstellen. Dies impliziert $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{E}) = \otimes_{k\in N} \mathcal{B}(X_k)$. $\square$

1.2 Borelmaße auf metrischen Räumen

Bis auf weiteres sei (X, d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-algebra $\mathcal{B}(X)$. Im Folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit Maßen auf $\mathcal{B}(X)$, welche teilweise auch als *Borel-Maße* bezeichnet werden. Die Bezeichnung wird in der Literatur allerdings nicht einheitlich verwendet.

1.3 Definition
Ein Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$ heißt *regulär* , falls

$$\forall B \in \mathcal{B}(X): \quad \mu(B) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq B, C \text{ abgeschlossen}\}$$
$$= \inf\{\mu(O) : B \subseteq O, O \text{ offen}\}.$$

1.4 Proposition
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(X)$. Dann ist μ regulär.

Beweis.
TODO

1.5 Definition
Ein Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$ heißt *straff*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ gibt mit

$$\mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

1.6 Korollar
Sei μ ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(X)$. Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{B}(X): \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}.$$

Beweis.
Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der Straffheit von μ existiert eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq X$ mit $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, und da μ nach Proposition 1.4 regulär ist gibt es eine abgeschlossene Menge $C \subseteq A$ mit $\mu(C) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist die Menge $K_\varepsilon \cap C$ wiederum kompakt und es gilt

$$\mu(A) \geq \mu(K_\varepsilon \cap C) > \mu(C) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu(A) - \varepsilon.$$

□

1.7 Bemerkung
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$ mit der Eigenschaft

$$\forall A \in \mathcal{B}(X): \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}.$$

wird auch als *Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß* oder *Radon-Maß* bezeichnet.

1.8 Proposition
Sei (X, d) ein vollständiger separabler metrischer Raum. Dann ist jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$ straff.

Wir verwenden zum Beweis der Proposition die folgende Charakterisierung kompakter Teilmengen metrischer Räume. Ein Beweis findet sich etwa in [1].

1.9 Lemma
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $K \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

(i) K ist vollständig,

(ii) K ist total-beschränkt, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_1, ..., x_n \in K: \; K \subseteq \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

Beweis.
TODO Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{x_1, x_2, ...\}$ von X. Also gilt insbesondere für $q \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_i, 2^{-q}) = X.$$

Wegen der σ-Stetigkeit von μ existiert also ein $N_q \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(\cup_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q}) \geq 1 - \varepsilon 2^{-q}.$$

Setze nun

$$K := \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q}).$$

Dann ist K als Schnitt abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen, und da X vollständig ist, folgt daraus bereits die Vollständigkeit von K. Ferner ist K total-beschränkt, denn zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $q \in \mathbb{N}$ mit $2^{-q} < \varepsilon$ und $K \subseteq \cup_{i=1}^{N_q} B(x_i, 2^{-q}) \subseteq \cup_{i=1}^{N_q} B(x_i, \varepsilon)$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \mu(K) = 1 - \mu(\cup_{q \in \mathbb{N}} \cap_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q})^c) &\geq 1 - \sum_{q=1}^{\infty} \mu(\cap_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q})^c) \\ &\geq 1 - \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-q} = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist μ straff. □

1.10 Proposition
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(X)$. Dann sind äquivalent

(i) μ ist straff.

(ii) Es gibt eine separable Teilmenge $E \subseteq X$ mit $\mu(E) = 1$.

Beweis.
zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $K_n \subseteq X$ kompakt mit $\mu(K_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$, o.E. gelte $K_n \subseteq K_{n+1}$. Es folgt

$$\mu\big(\cup_{n=1}^{\infty} K_n\big) = \lim_{n \to \infty} \mu\big(K_{n+1}\big) = 1.$$

Da kompakte Teilmengen metrischer Räume insbesondere separabel sind, ist $E := \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ als abzählbare Vereinigung separabler Mengen ebenso separabel.
zu (ii) $\Rightarrow$ (i): Analog zum Beweis von Proposition 1.8. □

1.3 Meßbare Vektorräume

1.11 Definition
Sei X ein Vektorraum und $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra auf X. Das Tupel $(X, \mathcal{C})$ heißt *messbarer Vektorraum*, falls

(a) Die Abbildung

$$+ : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}$-messbar, und

(b) die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}$-messbar.

1.12 Bemerkung
Sei $(X, \mathcal{C})$ ein messbarer Vektorraum. Dann gilt

(i) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f_\alpha : X \to X, x \mapsto \alpha x$ $\mathcal{C}/\mathcal{C}$-messbar.

(ii) Für alle $y \in X$ ist die Abbildung $g_y : X \to X, x \mapsto x + y$ $\mathcal{C}/\mathcal{C}$-messbar.

Beweis.
Man beachte, dass für beliebige messbare Räume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, Mengen $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\omega_1 \in \Omega_1$

$$A(\omega_1) = \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\} \in \mathcal{A}_2$$

gilt. □

1.13 Proposition
Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist $(X, \mathcal{B}(X))$ ein messbarer Vektorraum.

Beweis.
Nach Proposition 1.2 gilt $\mathcal{B}(X \times X) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times X) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(X)$. Ferner sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} + : X \times X \to X, &\quad (x, y) \mapsto x + y, \\ \cdot : \mathbb{R} \times X \to X, &\quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x \end{aligned}$$

stetig bzgl. der jeweiligen Produkttopologien und somit insbesondere $\mathcal{B}(X \times X)/\mathcal{B}(X)$- bzw. $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times X)/\mathcal{B}(X)$-messbar. □

1.14 Beispiel
Für $d \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ein messbarer Vektorraum.

Im Folgenden sei $(X, ||\cdot||)$ ein Banachraum und $(X', ||\cdot||_{op})$ der zugehörige Dualraum.

1.15 Proposition
Sei $\emptyset \neq \Gamma \subseteq X'$. Dann ist $(X, \sigma(\Gamma))$ ein messbarer Vektorraum.

Beweis.
TODO

1.16 Proposition
Sei X ein separabler Banachraum. Dann gilt $\sigma(X') = \mathcal{B}(X)$.

1.4 Zufallsvariablen mit Werten in Banachräumen

TODO

1.5 Charakteristische Funktionale

TODO

2 Symmetrische Zufallsvariablen und Lévys Ungleichung

Bezeichne $L_0(E)$ den Vektorraum der E-wertigen-Zufallsvariablen.

2.1 Definition
Eine E-wertige Zufallsvariable X heißt *symmetrisch*, falls $-X$ die selbe Verteilung hat wie X, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{B}(E) : P(\{X \in A\}) = P(\{-X \in A\}).$$

2.2 Definition
Eine Folge $X_1, X_2, ...$ von E-wertigen Zufallsvariablen heißt *symmetrisch*, falls $(\varepsilon_1 X_1, \varepsilon_2 X_2, ...)$ für jede Wahl von $\varepsilon_i = \pm 1$ die gleiche Verteilung hat wie $(X_1, X_2, ...)$.

2.3 Bemerkung
Sind $X_1, X_2, ...$ unabhängige E-wertige Zufallsvariablen, sodass X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ symmetrisch ist, dann ist $(X_1, X_2, ...)$ symmetrisch.

2.4 Satz (Lévy's maximal inequality)
Seien $X_1, ..., X_N \in L_0(E)$ unabhängige und symmetrische Zufallsvariablen und setze

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Dann gilt für alle $t > 0$

$$P\big(\{\max_{1 \leq n \leq N} ||S_n|| > t\}\big) \leq 2P\big(\{||S_N|| > t\}\big), \tag{2.1}$$

$$P\big(\{\max_{1 \leq n \leq N} ||X_n|| > t\}\big) \leq 2P\big(\{||S_N|| > t\}\big). \tag{2.2}$$

Literaturverzeichnis

[1] AMANN, H. ; ESCHER, J.: *Analysis I*. Birkhäuser, Basel, 2006

[2] QUERENBURG, B.v.: *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 2001