Inhaltsverzeichnis

1 Maßtheoretische Vorbereitungen

Bevor wir uns im späteren Verlauf der Arbeit mit zufälligen Reihen in Banachräumen beschäftigen können benötigen wir ein paar maßtheoretische Vorbereitungen. Wir beginnen mit einigen grundlegenden Eigenschaften Borelscher σ-Algebren und darauf definierten Wahrscheinlichkeitsmaßen. Später gehen wir kurz auf messbare Vektorräume ein und führen dann den Begriff der Zufallsvariable mit Werten in einem Banachraum ein. Da die zusätzliche algebraische Struktur eines Banachraums für unsere Betrachtung zunächst nicht von Bedeutung ist, werden wir uns in den ersten Abschnitten mit dem allgemeineren Fall eines (vollständigen) metrischen Raumes beschäftigen.

1.1 Borelmengen in metrischen Räumen

Für einen metrischen Raum (X, d) bezeichne im Folgenden $\mathcal{B}(X)$ die Borelsche σ-Algebra in X. Zudem wird für $x \in X$ und $r > 0$ mit $B(x, r)$ bzw. $\overline{B}(x, r)$ die offene bzw. abgeschlossene Kugel um x mit Radius r bezeichnet.

1.1 Proposition
Sei (X, d) ein separabler metrischer Raum. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}) = \sigma(\{\overline{B}(x, r) : x \in X, r > 0\}).$$

Beweis
Setze

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &:= \sigma(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}), \\
\mathcal{A}_2 &:= \sigma(\{\overline{B}(x, r) : x \in X, r > 0\}).
\end{aligned}$$

Man sieht leicht ein, dass $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B}(X)$. Zu zeigen bleibt somit nur die Inklusion $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}_1$. Sei dazu $U \subseteq X$ offen und $x \in U$. Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subseteq X$. Setze

$$R := \{(y, r) : y \in U \cap D,\ r \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty),\ B(y, r) \subseteq U\}.$$

Dann ist R abzählbar und da D dicht in X liegt gilt $U = \bigcup_{(y,r)\in R} B(y, r)$. Also folgt $U \in \mathcal{A}_1$ und da $\mathcal{B}(X)$ von den offenen Teilmengen von X erzeugt wird ist die Behauptung gezeigt. □

1.2 Proposition
Für $i \in \mathbb{N}$ sei (X_i, d_i) ein separabler metrischer Raum. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X_1 \times X_2 \times ...) = \otimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(X_i)$$

Beweis
Setze $X := \times_{k\in\mathbb{N}} X_k$ und bezeichne mit $p_k : X \to X_k$ die Projektion auf die k-te Komponente. Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{E} := \{\bigcap_{k\in K} p_k^{-1}(O) | \forall k \in K : O_k \subseteq X_k \text{ offen}, K \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich}\}.$$

Wie man leicht verifiziert gilt $\otimes_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(X_k) = \sigma(\mathcal{E})$. Ferner ist X ein separabler metrisierbarer Raum und $\mathcal{E}$ eine Basis der Produkttopologie auf X, vgl. [Que01][3.7]. Also lässt sich jede offene Menge $O \subset X$ als abzählbare Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{E}$ darstellen. Dies impliziert

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{E}) = \otimes_{k\in N} \mathcal{B}(X_k).$$

□

1.2 Borelmaße auf metrischen Räumen

Im Folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit Wahrscheinlichkeitsmaßen auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines metrischen Raums (X,d), welche teilweise auch als *Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaße* bezeichnet werden. Zunächst interessieren wir uns hierbei für Regularitätseigenschaften solcher Maße, welche uns die spätere Arbeit erleichtern werden. Im zweiten Teil dieses Abschnitts untersuchen wir Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und den Begriff der schwachen Konvergenz.

Notation und Konventionen
Bis auf weiteres sei (X,d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-algebra $\mathcal{B}(X)$. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ sei $\mathring{A}$ das *Innere*, $\overline{A}$ der *Abschluss* und

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

der *Rand der Menge*. Setze ferner

$$C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und beschränkt}\}.$$

1.3 Definition
Ein Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$ heißt *regulär* , falls

$$\begin{aligned}\forall B \in \mathcal{B}(X): \quad \mu(B) &= \sup\{\mu(C) : C \subseteq B,\ C \text{ abgeschlossen}\}\\ &= \inf\{\mu(O) : B \subseteq O,\ O \text{ offen}\}.\end{aligned}$$

1.4 Proposition
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(X)$. Dann ist μ regulär.

Beweis
Wir verwenden zum Beweis das Good-Set-Principle. Setze dazu

$$\mathcal{R} := \big\{A \in \mathcal{B}(X) : \mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq A,\ C \text{ abgeschlossen}\} = \inf\{\mu(O) : A \subseteq O,\ O \text{ offen}\}\big\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra ist. Offensichtlich gilt $\emptyset \in \mathcal{R}$. Sei nun $A \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren eine offene Menge O und eine abgeschlossene Menge C mit $C \subseteq A \subseteq O$ und

$$\mu(0) - \varepsilon < \mu(A) < \mu(C) + \varepsilon.$$

Es gilt also $O^c \subseteq A^c \subseteq C^c$ und

$$\mu(C^c) - \varepsilon = 1 - \mu(C) - \varepsilon < 1 - \mu(A) = \mu(A^c) = 1 - \mu(A) < 1 - \mu(O) + \varepsilon = \mu(O^c) + \varepsilon.$$

Da O^c abgeschlossen ist und C^c offen ist, folgt $A^c \in \mathcal{R}$.
Seien nun $A_1, A_2, ... \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon > 0$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren dann eine offene Menge O_n und eine abgeschlossene Menge C_n mit $C_n \subseteq A_n \subseteq O_n$ und

$$\mu(O_n) - 2^{-n}\varepsilon < \mu(A_n) < \mu(C_n) + 2^{n+1}\varepsilon.$$

Es gilt also

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

und

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\\ &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus A_n) < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon. \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Wegen

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} C_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(\cup_{n=1}^{k} C_n),$$

existiert zudem ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} C_n) - \mu(\cup_{n=1}^{k} C_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Menge $C := \cup_{n=1}^{k} C_n$ ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen und nach Konstruktion in $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ enthalten. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \mu(C) &< \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus C_n)) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus C_n) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt war folgt aus (1.1) und (1.2), dass $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Folglich ist $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ alle abgeschlossenen Mengen enthält. Sei also $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen. Die Bedingung

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq A, C \text{ abgeschlossen } \}$$

folgt direkt aus der Monotonie von μ. Um die zweite Bedingung zu zeigen setze für $n \in \mathbb{N}$

$$O_n := \big\{x \in X : \inf_{y\in A} d(x,y) < \frac{1}{n}\big\}.$$

Dann ist O_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen und es gilt $O_1 \supseteq O_2 \supseteq ...$, sowie $\cap_{n=1}^{\infty} O_n = A$, da A abgeschlossen ist. Mit der σ-Stetigkeit von μ folgt letztendlich

$$\mu(A) \leq \inf\{\mu(O) : A \subseteq O, O \text{ offen}\} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(O_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(O_n) = \mu(A).$$

Da die abgeschlossenen Mengen $\mathcal{B}(X)$ erzeugen gilt $\mathcal{R} = \mathcal{B}(X)$ und folglich ist μ regulär. □

1.5 Definition
Ein Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$ heißt *straff*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ gibt mit

$$\mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

1.6 Korollar
Sei μ ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(X)$. Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{B}(X): \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Beweis
Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der Straffheit von μ existiert eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq X$ mit $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, und da μ nach Proposition 1.4 regulär ist gibt es eine abgeschlossene Menge $C \subseteq A$ mit $\mu(C) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Die Menge $K_\varepsilon \cap C$ ist wiederum kompakt und es gilt

$$\mu(A) \geq \mu(K_\varepsilon \cap C) > \mu(C) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu(A) - \varepsilon.$$

□

1.7 Bemerkung
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$ mit der Eigenschaft

$$\forall A \in \mathcal{B}(X): \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

wird auch als *Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß* oder *Radon-Maß* bezeichnet.

1.8 Proposition
Sei (X,d) ein vollständiger separabler metrischer Raum. Dann ist jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$ straff.

Wir verwenden zum Beweis der Proposition die folgende Charakterisierung kompakter Teilmengen metrischer Räume. Der Beweis wird mittels der in metrischen Räumen geltenden Äquivalenz von Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit geführt und findet sich etwa in [AE06][Theorem 3.10].

1.9 Lemma
Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Menge $K \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt

(a) K ist vollständig,

(b) K ist total-beschränkt, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1, ..., x_n \in K:\ K \subseteq \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{x_1, x_2, ...\}$ von X. Also gilt insbesondere für $q \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}(x_i, 2^{-q}) = X.$$

Wegen der σ-Stetigkeit von μ existiert also ein $N_q \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q})\big) \geq 1 - \varepsilon 2^{-q}.$$

Setze nun

$$K := \bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q}).$$

Dann ist K als Schnitt abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen, und da X vollständig ist, folgt daraus bereits die Vollständigkeit von K. Ferner ist K total-beschränkt, denn zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $q \in \mathbb{N}$ mit $2^{-q} < \varepsilon$ und $K \subseteq \cup_{i=1}^{N_q} B(x_i, 2^{-q}) \subseteq \cup_{i=1}^{N_q} B(x_i, \varepsilon)$. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\mu(K) = 1 - \mu\big(\bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q})^c\big) &\geq 1 - \sum_{q=1}^{\infty} \mu\big(\bigcap_{i=1}^{N_q} \overline{B}(x_i, 2^{-q})^c\big) \\
&\geq 1 - \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-q} = 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist μ straff. $\square$

1.10 Proposition
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(X)$. Dann sind äquivalent

(i) μ ist straff.

(ii) Es gibt eine separable Teilmenge $E \subseteq X$ mit $\mu(E) = 1$.

Beweis
zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $K_n \subseteq X$ kompakt mit $\mu(K_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$, o.E. gelte $K_n \subseteq K_{n+1}$. Es folgt

$$\mu\big(\cup_{n=1}^{\infty} K_n \big) = \lim_{n \to \infty} \mu\big(K_n\big) = 1.$$

Da kompakte Teilmengen metrischer Räume insbesondere separabel sind, ist $E := \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ als abzählbare Vereinigung separabler Mengen ebenso separabel.
zu (ii) $\Rightarrow$ (i): Analog zum Beweis von Proposition 1.8. $\square$

Insgesamt haben wir also gezeigt

1.11 Satz
Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf der Borelschen σ-Algebra eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) sind äquivalent

(i) μ ist straff.

(ii) Es gibt eine separable Menge $E \subseteq X$ mit $\mu(E) = 1$.

(iii) μ ist ein Radon-Maß, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{B}(X): \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Nachdem wir uns nun ausgiebig mit den Eigenschaften einzelner Maße beschäftigt haben, möchten wir uns jetzt mit Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und deren Konvergenz beschäftigen.

1.12 Definition
Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{B}(X)$ heißt *schwach konvergent* gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$, falls

$$\forall f \in C_b(X): \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu.$$

Bezeichnung: $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Um die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf metrischen Räumen zu beschreiben gibt es zahlreiche äquivalente Formulierungen. Ein paar davon werden im folgenden Satz, der meist als *Portmanteau Theorem* bezeichnet wird, zusammengefasst. Die Charakterisierungen (*ii*) und (*iii*) werden sich im weiteren Verlauf der Arbeit als besonders nützlich erweisen.

1.13 Satz (Portmanteau-Theorem)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $\mu, \mu_1, \mu_2, ...$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(X)$. Dann sind äquivalent

(i) $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen μ.

(ii) Für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq X$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \mu(A).$$

(iii) Für alle offenen Teilmengen $B \subseteq X$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A).$$

(iv) Für alle Borelmengen $C \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(\partial C) = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(C) = \mu(C).$$

Beweis
zu $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $\varepsilon > 0$. Da die Aussage für $A = \emptyset$ trivialerweise erfüllt ist können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $A \neq \emptyset$. Für $m \in \mathbb{N}$ setze

$$U_m := \{x \in X : d(x, A) < \frac{1}{m}\}.$$

Dann sind die Mengen U_m offen und es für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $A \subseteq U_m$. Da A abgeschlossen ist erhalten wir zudem $A = \cap_{m\in\mathbb{N}} U_m$. Aufgrund der σ-Stetigkeit von μ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(U_k) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Betrachte nun die Abbildung

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{1 - kd(x, A), 0\}.$$

Offensichtlich ist f beschränkt und nach der umgekehrten Dreiecksungleichung auch stetig. Wegen $1_A \leq f \leq 1_{U_k}$ erhalten wir zusammen mit der Voraussetzung

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu \leq \mu(U_k) \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

Da diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt ist folgt die Behauptung.
zu $(ii) \iff (iii)$: Folgt unmittelbar durch Komplementbildung.
zu $(iii) \Rightarrow (iv)$: Sei $C \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(\partial C) = 0$. Dann gilt insbesondere $\mu(\overline{C}) = \mu(\mathring{C}))$. Da (iii) auch (ii) impliziert erhalten wir somit

$$\mu(C) = \mu(\mathring{C})) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(C) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \leq \mu(\overline{C}) = \mu(C).$$

zu $(iv) \Rightarrow (i)$: Sei $f \in C_b(X)$ beschränkt durch $M > 0$. Wegen der Linearität des Integrals können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $f \geq 0$. Wegen der Stetigkeit von f erhalten wir zunächst für alle $t > 0$

$$\partial\{f > t\} \subseteq \{f = t\}.$$

Da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gibt es eine abzählbare Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus C : \quad \mu(\{f = t\}) = 0.$$

Also gilt für alle $t \in \mathbb{R} \setminus C$ nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{f > t\}) = \mu(\{f > t\})$$

Mit dem Satz von Cavalieri, vgl. [GS77][1.8.20], erhalten wir schließlich per dominierter Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^M \mu_n(\{f > t\}) d\lambda(t) = \int_0^M \mu(\{f > t\}) d\lambda(t) = \int_X f d\mu.$$

□

1.3 Die Prokhorov Metrik

Nachdem wir im letzten Abschnitt damit begonnen haben Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf schwache Konvergenz zu untersuchen wollen wir im Folgenden ein weiteres wichtiges Hilfsmittel für dieses Unterfangen besprechen. Zunächst einmal sei dafür an den Begriff der relativen Kompaktheit erinnert.

1.14 Definition
Eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) heißt *relativ kompakt*, falls ihr Abschluss $\overline{A}$ kompakt ist.

Mittels der Teilfolgencharakterisierung von kompakten Teilmengen metrischer Räume erhält man unmittelbar

1.15 Proposition
Eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X,d) ist genau dann relativ kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A eine in $\overline{A}$ konvergente Teilfolge enthält.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum konvergiert also genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind

(i) Die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist relativ kompakt und

(ii) alle konvergenten Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben den selben Grenzwert.

Ziel dieses Abschnitts ist es daher zunächst eine adäquate Metrik zu konstruieren, die die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen beschreibt. Anschließend wollen wir den Begriff der relativen Kompaktheit bzgl. dieser Metrik charakterisieren.

Für einen metrischen Raum (X,d) bezeichne $\mathcal{M}(X)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ und für eine Menge $B \in \mathcal{B}(X)$ definiere für $\varepsilon > 0$

$$B^\varepsilon = \begin{cases} \{x \in X : \inf_{y\in B} d(x,y) < \varepsilon\}, & \text{falls } B \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachte nun die Abbildung

$$\rho : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \to [0,\infty),$$

definiert durch

$$(\mu,\nu) \mapsto \inf\{\alpha > 0 | \forall B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) \leq \nu(B^\alpha) + \alpha \ \wedge \ \nu(B) \leq \mu(B^\alpha) + \alpha\}.$$

1.16 Proposition

(i) Die Abbildung ρ ist wohldefiniert und eine Metrik auf $\mathcal{M}(X)$.

(ii) Für $\alpha > 0$ und $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ gilt

$$(\forall B \in \mathcal{B}(X) : \ \mu(B) \leq \nu(B^\alpha) + \alpha) \Rightarrow (\forall B \in \mathcal{B}(X) : \ \nu(B) \leq \mu(B^\alpha) + \alpha).$$

(iii) Für $\mu, \mu_1, \mu_2, ... \in \mathcal{M}(X)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\mu_n, \mu) = 0 \ \Rightarrow \ \mu_n \rightharpoonup \mu$$

Beweis
zu (i): Die Menge ist nicht leer, da die Bedingung für alle $\alpha \geq 1$ erfüllt ist. Offensichtlich gilt ferner $\rho(\mu,\nu) \geq 0$ und $\rho(\mu,\nu) = \rho(\nu,\mu)$. Wegen $B \subseteq B^\alpha$ für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ und $\alpha > 0$ gilt

$$\forall B \in \mathcal{B} \ \forall \alpha > 0 : \quad \mu(A) \leq \mu(A^\alpha) + \alpha.$$

Also gilt $\rho(\mu,\mu) = 0$. Gilt andererseits $\rho(\mu,\nu) = 0$, so existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_n \downarrow 0$ und

$$\forall B \in \mathcal{B} \ \forall n \in \mathbb{N} : \quad \mu(A) \leq \nu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n \quad \wedge \nu(A) \leq \mu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n.$$

Insbesondere gilt für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$, dass $A^{\alpha_n} \downarrow A$ und daher

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n \geq \nu(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \nu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n \geq \mu(\alpha).$$

Da die abgeschlossenen Mengen ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(X)$ sind folgt somit $\mu = \nu$.
zur Dreiecksungleichung: Seien $\mu, \nu, \eta \in \mathcal{M}(X)$ und $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{B}(X) : \quad & \mu(A) \leq \eta(A^\alpha) + \alpha \quad \wedge \quad \eta(A) \leq \mu(A^\alpha) + \alpha, \\ & \nu(A) \leq \eta(A^\beta) + \beta \quad \wedge \quad \eta(A) \leq \nu(A^\beta) + \beta. \end{aligned}$$

Dann gilt für $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \eta(A^\alpha) + \alpha \leq \nu((A^\alpha)^\beta) + \alpha + \beta, \\ \nu(A) &\leq \eta(A^\beta) + \beta \leq \mu((A^\alpha)^\beta) + \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Nach der Dreiecksungleichung für d gilt $(A^\alpha)^\beta \subseteq A^{\alpha+\beta}$ und $(A^\beta)^\alpha \subseteq A^{\alpha+\beta}$. Also ergibt sich mit obigem $\rho(\mu,\nu) \leq \alpha + \beta$. Bilden der Infima auf der rechten Seite liefert

$$\rho(\mu,\nu) \leq \rho(\mu,\eta) + \rho(\eta,\nu).$$

zu (ii): Sei $\alpha > 0$ mit

$$\forall B \in \mathcal{B}(X): \ \mu(B) \leq \nu(B^\alpha) + \alpha.$$

Für zwei Mengen $A, B \in \mathcal{B}(X)$ gilt nach Definition $A \subseteq (B^\alpha)^c$ genau dann, wenn $B \subseteq (A^\alpha)^c$. Zu $B \in \mathcal{B}(X)$ setze also $A := (A^\alpha)^c$ und erhalte

$$\mu(B^\alpha) = 1 - \mu(A) \geq 1 - \nu(A^\alpha) - \alpha = \nu((A^\alpha)^c) - \alpha \geq \nu(B) - \alpha.$$

zu (iii): Wegen $\rho(\mu_n,\mu) \to 0$ existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_n \downarrow 0$ und

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall B \in \mathcal{B}(X): \quad \mu_n(B) \leq \mu(B^{\alpha_n}) + \alpha_n.$$

Sei nun $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt $A^{\alpha_n} \downarrow A$ und folglich

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \mu(A^{\alpha_n}) = \mu(A).$$

Nach dem Portmanteau-Theorem gilt also $\mu_n \rightharpoonup \mu$. □

Falls der zugrunde liegende metrische Raum separabel ist, so gilt auch die Umkehrung von (ii). Zum Beweis dieser Tatsache benötigen wir zunächst das folgende technische Lemma.

1.17 Lemma
Sei X ein separabler metrischer Raum und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(X)$. Dann existiert für alle $\delta > 0$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\delta)$ mit

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \ \text{ und } \ \mu(\partial B(x_n,r_n)) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis
Sei $D = \{x_1, x_2, ...\} \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X und $x_n \in D$. Setze

$$S(x_n, r) = \{y \in X : d(x_n, y) = r\}.$$

Dann gilt $\partial B(x_n, r) \subseteq S(x_n, r)$ und für gegebenes $\delta > 0$ ist die Mengenfamilie

$$\mathcal{S}_n := \{S(x_n, r) : \frac{\delta}{2} < r < \delta\}$$

disjunkt und überabzählbar. Da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist enthält $\mathcal{S}_n$ aber höchstens abzählbar viele Mengen S mit $\mu(S) > 0$. Also existiert insbesondere ein $r_n \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ mit $\mu(S(x_n, r_n)) = 0$. Da D dicht in X ist gilt

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n)$$

und folglich erfüllen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die geforderten Bedingungen. □

1.18 Satz
Sei (X,d) ein separabler metrischer Raum. Dann gilt für $\mu, \mu_1, \mu_2, ... \in \mathcal{M}(X)$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\mu_n, \mu) = 0 \iff \mu_n \rightharpoonup \mu$$

Beweis
zu $\Rightarrow$: Siehe Proposition 1.16(iii).
zu $\Leftarrow$: Wir zeigen

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \quad \forall B \in \mathcal{B} : \ \mu(B) \leq \mu_n(B^\varepsilon) + \varepsilon.$$

Daraus folgt nach Proposition 1.16(ii) die Behauptung. Sei $\delta := \frac{\varepsilon}{4} > 0$. Dann existiert nach vorherigem Lemma eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (B(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ offener Kugeln mit Radius $r_n < \frac{\delta}{2}$ und $\mu(\partial B_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Ferner existiert $k \in N$ mit

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \geq 1 - \delta.$$

Betrachte nun das endliche Mengensystem

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcup_{j\in J} B_j : J \subseteq \{1, .., k\} \right\}.$$

Dann gilt für alle $A \in \mathcal{C}$

$$\partial A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \partial B_i,$$

also $\mu(\partial A) = 0$. Nach dem Portmanteau-Theorem gilt also $\mu_n(A) \to \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{C}$. Da $\mathcal{C}$ endlich ist existiert daher $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N\ \forall A \in \mathcal{A} : \quad |\mu(A) - \mu_n(A)| < \delta. \tag{1.3}$$

Insbesondere gilt also

$$\forall n \geq N : \quad \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) - \delta \geq 1 - 2\delta.$$

Zu $B \in \mathcal{B}$ betrachte die Menge

$$A := \bigcup_{j\in J} B_j,$$

wobei $J := \{j \in \{1, ..k\} : B_j \cap B \neq 0\}$. Dann ergibt sich unter Verwendung von $A \subseteq B^\delta \subseteq B^\varepsilon$ und (1.1) für alle $n \geq N$

$$\mu(B) \leq \mu(A) + \mu\left((\cup_{i=1}^{k} B_i)^c\right) \leq \mu(A) + 2\delta \leq \mu_n + 3\delta \leq \mu_n(B^\varepsilon) + \varepsilon.$$

□

Nachdem wir nun eine passende Metrik gefunden haben, um die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen in $\mathcal{M}(X)$ zu beschreiben wollen wir noch kurz auf ein Resultat von Prokhorov eingehen, welches uns eine äußerst nützliche Charakterisierung der relativ kompakten Teilmengen von $(\mathcal{M}(X), \rho)$ liefert. Dazu benötigen wir die folgende

1.19 Definition
Eine Familie $M \subseteq \mathcal{M}(X)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen heißt *gleichmäßig straff*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ gibt mit

$$\forall \mu \in M : \mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Mittels des Begriffs der gleichmäßigen Straffheit lässt sich die relative Kompaktheit von Teilmengen von $\mathcal{M}(X)$ für einen vollständigen und separablen metrischen Raum X wie folgt charakterisieren. Ein Beweis findet sich etwa in [Par67][Theorem 6.7].

1.20 Satz (Satz von Prokhorov)
Sei (X, d) ein vollständiger separabler metrischer Raum und $M \subseteq \mathcal{M}(X)$. Dann sind äquivalent

(i) M ist relativ kompakt,

(ii) M ist gleichmäßig straff.

Um die schwache Konvergenz einer Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu zeigen ist es in einem vollständigen und separablen metrischen Raum also ausreichend die folgenden beiden Bedingungen zu prüfen

(a) $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichmäßig straff und

(b) jede konvergente Teilfolge von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den selben Grenzwert.

1.21 Bemerkung
In [LQ18] findet sich ein alternativer Zugang zur Prokhorov-Metrik. Hier wird die Metrik auf $\mathcal{M}(X)$ nicht wie hier über die Mengen aus $\mathcal{B}(X)$ definiert, sondern über Funktionen $f \in C_b(\mathbb{R})$. Es wird dort gezeigt, dass es für einen vollständigen und separablen metrischen Raum (X, d) eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Einheitskugel von $C_b(\mathbb{R})$ gibt, sodass durch

$$(\mu, \nu) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f_n d\nu \right|, \quad \mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$$

eine Metrik definiert ist, die die schwache Konvergenz charakterisiert.

1.4 Flache Konzentrierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Für unsere spätere Betrachtung von Zufallsvariablen mit Werten in Banachräumen lohnt es sich hier noch eine weitere Charakterisierung der relativen Kompaktheit von Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu diskutieren. Der Begriff der *flachen Konzentrierung* von Wahrscheinlichkeitsmaßen wurde zuerst von A.D. de Acosta betrachtet, vgl. [dA70]. Die Darstellung hier orientiert sich an [VTC87].

Im Folgenden sei $(E, ||\cdot||)$ ein separabler Banachraum und $(E', ||\cdot||_{op})$ der zugehörige Dualraum. Der metrische Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(E)$ werde mit $(\mathcal{M}(E), \rho)$ bezeichnet, wobei ρ die Prokhorov-Metrik ist. Für eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq E$ setze

$$A^\varepsilon := \{x \in E : \inf_{y \in A} ||x - y|| < \varepsilon\}.$$

Ferner sei daran erinnert, dass jeder endlich dimensionale Untervektorraum $S \subseteq E$ abgeschlossen ist und eine Menge $A \subseteq S$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere besitzt jede beschränkte Folge in S eine konvergente Teilfolge.

1.22 Definition
Eine Familie $M \subseteq \mathcal{M}(E)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{B}(E)$ heißt *flach konzentriert*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ einen endlichdimensionalen Untervektorraum $S \subseteq E$ gibt mit

$$\forall \mu \in M : \quad \mu(S^\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

1.23 Lemma
Eine Teilmenge A von E ist genau dann relativ kompakt, wenn A beschränkt ist und es für alle $\varepsilon > 0$ einen endlichdimensionalen Untervektorraum $S \subseteq E$ gibt mit

$$A \subseteq S^\varepsilon$$

Beweis
zu $\Rightarrow$: Sei $A \subseteq E$ relativ kompakt. Dann ist $\overline{A}$ kompakt und folglich beschränkt, woraus wir direkt die Beschränktheit von A erhalten. Ferner ist $\overline{A}$ separabel, also existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_1, x_2, ...\} \subseteq A$. Für $\varepsilon > 0$ ist daher $(B(x_n, \varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $\overline{A}$. Wegen der Kompaktheit existiert $I \subseteq \mathbb{N}$ endlich mit

$$\overline{A} \subseteq \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon).$$

Sei also S der von $\{x_i : i \in I\}$ erzeugte endlich dimensionale Untervektorraum von E. Dann gilt

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon) \subseteq S^\varepsilon.$$

zu $\Leftarrow$: Wir zeigen, dass jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt, der Grenzwert der Teilfolge muss hierbei nicht in A liegen. Sei dazu $(x_n^{(0)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A, $\varepsilon > 0$ und $S \subseteq E$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum mit $A \subseteq S^\varepsilon$. Dann existiert insbesondere eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in S mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad d(x_n^{(0)}, y_n) \leq 2\varepsilon.$$

Aus der Beschränktheit von $(x_n^{(0)})_{n \in \mathbb{N}}$ erhalten wir direkt die Beschränktheit von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und da S endlichdimensional ist existiert eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Es gilt also für $k, m \geq N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$||x_{n_k}^{(0)} - x_{n_m}^{(0)}|| \leq ||x_{n_k}^{(0)} - y_{n_k}|| + ||y_{n_k} - y_{n_m}|| + ||x_{n_m}^{(0)} - y_{n_m}|| \leq 5\varepsilon.$$

Durch Entfernen endlich vieler Folgenglieder können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\forall k, m \in \mathbb{N} : \quad ||x_{n_k}^{(0)} - x_{n_m}^{(0)}|| \leq 5\varepsilon.$$

Durch obiges Verfahren können wir für $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_N = \frac{1}{N}$ induktiv eine Teilfolge $(x_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ von

$(x_n^{(N-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ gewinnen mit

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: \quad ||x_n^{(N)} - x_m^{(N)}|| \leq \frac{5}{N}.$$

Durch bilden der Diagonalfolge $(x_N^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ erhalten wir somit eine Teilfolge der Ausgangsfolge $(x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ die eine Cauchy-Folge ist und daher in E konvergiert. □

1.24 Lemma
Sei $S \subseteq E$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum und $f_1, ..., f_n \in E'$ Funktionale mit

$$\forall x, y \in S\ \exists k \in \{1, ..., n\}: \quad f_k(x) \neq f_k(y). \tag{1.4}$$

Dann ist die Menge

$$B := \overline{S^\varepsilon} \cap \{x \in E : |f_1(x)| \leq r_1, ..., |f_n(x)| \leq r_n\}$$

für alle $\varepsilon, r_1, ..., r_n \in (0, \infty)$ beschränkt.

Beweis
Wegen (1.4) definiert

$$p(x) := \max_{1\leq k\leq n} |f_k(x)|, \quad x \in S,$$

eine Norm auf S. Da S endlichdimensional ist, ist diese insbesondere äquivalent zur Einschränkung von $||\cdot||$ auf S. Angenommen die Menge B ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B mit

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = \infty.$$

Wegen der Normäquivalenz existiert folglich ein $k \in \{1, ..., n\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} |f_k(x_n)| = \infty.$$

Im Widerspruch zur Definition von B. □

1.25 Bemerkung
Man sagt eine Familie von Abbildungen mit der Eigenschaft (1.4) *trenne die Punkte von S*. Die Existenz der Funktionale $f_1, ..., f_n$ wird durch den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach sichergestellt.

1.26 Satz (Satz von de Acosta)
Eine Menge $M \subseteq \mathcal{M}(E)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist genau dann relativ kompakt in $(\mathcal{M}(E), \rho)$ wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind

(a) Für alle $f \in E'$ ist $\{\mu^f : \mu \in M\} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R})$ relativ kompakt,

(b) M ist flach konzentriert.

Beweis
zu $\Rightarrow$: Sei $M \subseteq \mathcal{M}(E)$ relativ kompakt. Nach dem Satz von Prokhorov ist M dann insbesondere gleichmäßig straff. Also existiert zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq E$ mit

$$\forall \mu \in M: \quad \mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Aus der Stetigkeit von $f \in E'$ erhalten wir somit direkt die gleichmäßige Straffheit von $\{\mu^f : \mu \in M\}$. Erneutes anwenden des Satzes von Prokhorov liefert (a). Da K insbesondere relativ kompakt ist liefert Lemma 1.22 einen endlichdimensionalen Untervektorraum $S \subseteq E$ mit $K \subseteq S^\varepsilon$. Somit gilt

$$\forall \mu \in M: \quad \mu(S^\varepsilon) \geq \mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Folglich ist M flach konzentriert.
zu $\Leftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein endlich dimensionaler Untervektorraum $S_{n,\varepsilon} \subseteq E$ mit

$$\forall \mu \in M: \quad \mu(S_{n,\varepsilon}^{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Seien nun $f_1^{(n)}, ..., f_{k_n}^{(n)} \in E'$ mit

$$\forall x, y \in S_{n,\varepsilon} : \quad x \neq y \Rightarrow \ \exists j \in \{1, ..., k_n\} : \quad f_j(x) \neq f_j(y).$$

Nach Voraussetzung (a) können wir zudem $r_1^{(n)}, ..., r_{k_n}^{(n)} \in (0, \infty)$ so wählen, dass

$$\inf_{\mu \in M} \mu^{f_i}\big([-r_i, r_i]\big) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{k_n 2^{n+1}}, \quad i = 1, ..., k_n,$$

Setze ferner

$$F_{n,\varepsilon} := \overline{\big(S_{n,\varepsilon}^{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}\big)}$$

Dann ist die Menge

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(F_{n,\varepsilon} \cap \{x \in E : \ \left|f_1^{(n)}\right| \leq r_1^{(n)}, ..., \left|f_{k_n}^{(n)}\right| \leq r_{k_n}^{(n)}\}\big)$$

nach Lemma 1.23 beschränkt und als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$K \subseteq F_{n,\varepsilon} \subseteq S_{n,\varepsilon}^{\frac{\varepsilon}{2^n}}.$$

Also ist K nach Lemma 1.22 kompakt. Für $\mu \in M$ gilt schließlich

$$\begin{aligned}
\mu(K^c) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_{n,\varepsilon}) + \sum_{i=1}^{k_n} \mu^{f_i^{(n)}}\big([-r_i^{(n)}, r_i^{(n)}]^c\big) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_{n,\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist M gleichmäßig straff und somit nach dem Satz von Prokhorov relativ kompakt. □

1.27 Korollar
Eine Menge $M \subseteq \mathcal{M}(E)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn M flach konzentriert ist und für alle $\varepsilon > 0$ eine beschränkte Menge $L \subseteq E$ existiert mit

$$\forall \mu \in M : \quad \mu(L) \geq 1 - \varepsilon.$$

Beweis
Die Richtung $\Rightarrow$ ist klar und für $\Leftarrow$ reicht es anzumerken, dass beschränkte Mengen durch lineare Abbildungen auf beschränkte Mengen abgebildet werden. Nach dem Satz von Heine-Borel sind beschränkte Teilmengen der reellen Zahlen aber insbesondere relativ kompakt. □

1.5 Meßbare Vektorräume

Bislang haben wir uns fast ausschließlich mit dem Zusammenspiel von Maßen und den topologischen Eigenschaften der zugrunde liegenden Räume beschäftigt. In Banachräumen steht uns aber auch die algebraische Struktur eines Vektorraums zur Verfügung, allerdings ist per se nicht klar, ob die algebraischen Operationen mit der messbaren Struktur kompatibel, also messbar, sind. Dies werden wir im Folgenden untersuchen und im für uns interessanten Fall eines separablen Banachraums positiv beantworten.

1.28 Definition
Sei X ein Vektorraum und $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra auf X. Das Tupel $(X, \mathcal{C})$ heißt *messbarer Vektorraum*, falls

(a) Die Abbildung

$$+ : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}$-messbar, und

(b) die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}$-messbar.

1.29 Bemerkung
Sei $(X, \mathcal{C})$ ein messbarer Vektorraum. Dann gilt

(i) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$f_\alpha : X \to X, \quad x \mapsto \alpha x$$

$\mathcal{C}/\mathcal{C}$-messbar.

(ii) Für alle $y \in X$ ist die Abbildung

$$g_y : X \to X, \quad x \mapsto x + y$$

$\mathcal{C}/\mathcal{C}$-messbar.

Beweis
Man beachte, dass für beliebige messbare Räume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, Mengen $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\omega_1 \in \Omega_1$

$$A(\omega_1) = \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\} \in \mathcal{A}_2$$

gilt. $\square$

Da die Komposition messbarer Abbildungen wiederum messbar ist erhält man unmittelbar

1.30 Proposition
Sei $(X, \mathcal{C})$ ein messbarer Vektorraum und $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Sind $X, Y : \Omega \to X$ zwei $\mathcal{A}/\mathcal{C}$-messbare Abbildungen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha X + \beta Y$ $\mathcal{A}/\mathcal{C}$-messbar.

Bislang wissen wir noch nicht einmal, ob es überhaupt nicht-triviale Beispiele messbarer Vektorräume gibt. Das wollen wir nun ändern.

1.31 Proposition
Sei E ein separabler Banachraum. Dann ist $(E, \mathcal{B}(E))$ ein messbarer Vektorraum.

Beweis
Nach Proposition 1.2 gilt $\mathcal{B}(X \times X) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times X) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(X)$. Ferner sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} + &: X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y, \\ \cdot &: \mathbb{R} \times X \to X, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x \end{aligned}$$

stetig bzgl. der jeweiligen Produkttopologien und somit insbesondere $\mathcal{B}(X \times X)/\mathcal{B}(X)$- bzw. $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times X)/\mathcal{B}(X)$-messbar. $\square$

1.32 Beispiel
Für $d \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ein messbarer Vektorraum.

Im Folgenden bezeichne $(X', ||\cdot||_{op})$ den Dualraum eines normierten Vektorraums $(X, ||\cdot||)$.

1.33 Proposition
Sei $\emptyset \neq \Gamma \subseteq X'$. Dann ist $(X, \sigma(\Gamma))$ ein messbarer Vektorraum.

Beweis
zur Addition: Es genügt zu zeigen, dass

$$\forall f \in \Gamma : g : X \times X \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x+y) \text{ ist messbar.}$$

Sei dazu $f \in \Gamma$. Es gilt wegen der Linearität von f für $(x,y) \in X \times X$

$$f(x+y) = (f(x) + f(y)).$$

Weiter ist die Abbildung

$$h : X \times X \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x) + f(y)$$

als Komposition messbarer Funktionen messbar, da $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nach Beispiel 1.31 ein messbarer Vektorraum ist. Die Messbarkeit der Skalarmultiplikation zeigt man analog. □

1.34 Proposition
Sei E ein separabler Banachraum. Dann gilt $\sigma(E') = \mathcal{B}(E)$.

Beweis
Da alle $f \in E'$ stetig sind gilt offensichtlich $\sigma(E') \subseteq \mathcal{B}(E)$. Wegen der Separabilität von E wird $\mathcal{B}(E)$ von den abgeschlossenen Kugeln erzeugt und da $(E, \sigma(E'))$ nach Proposition 1.33 ein messbarer Vektorraum ist genügt es nach Bemerkung 1.29 zu zeigen, dass $\overline{B}(0,1)$ in $\sigma(E')$ enthalten ist. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E' mit

$$\forall x \in E : \quad ||x|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|\,.$$

Es gilt also

$$\overline{B}(0,1) = \{x \in E : ||x|| \leq 1\} = \{x \in E : \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : |f_n(x)| \leq 1\} \in \sigma(E').$$

□

1.35 Bemerkung
Setze

$$\mathcal{C}(E) := \{\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(A) :\ n \in \mathbb{N},\ f_1, ..., f_n \in E',\ A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Wie man leicht zeigt ist $\mathcal{C}(E)$ schnittstabil und es gilt $\sigma(E') = \sigma(\mathcal{C}(E))$. Diese Darstellung wird sich im späteren Verlauf noch als hilfreich erweisen.

1.6 Zufallsvariablen mit Werten in Banachräumen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum und E ein Banachraum mit Norm $||\cdot||$.

1.36 Definition
Eine Abbildung $X : \Omega \to E$ heißt *(Radon-)Zufallsvariable* oder auch *E-wertige Zufallsvariable*, falls

(a) X ist $\mathcal{A}/\mathcal{B}(E)$-messbar und

(b) es existiert ein separabler Untervektorraum $E_0 \subseteq E$ mit $P(\{X \in E_0\}) = 1$.

1.37 Bemerkung
Nach Abschnitt 1.2 sind für eine $\mathcal{A}/\mathcal{B}(X)$-messbare Abbildung $X : \Omega \to E$ äquivalent

(i) Es existiert ein separabler Untervektorraum $E_0 \subseteq E$ mit $P(\{X \in E_0\}) = 1$,

(ii) P^X ist ein Radon-Maß auf $\mathcal{B}(X)$,

(iii) P^X ist straff.

Hiermit erklärt sich auch die in [LT91] verwendete Bezeichnung Radon-Zufallsvariable.

Bezeichne $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$ den Raum der E-wertigen Radon-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und sei $L_0(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$ der Raum der Äquivalenzklassen bezüglich fast sicherer Gleichheit. Falls klar ist welcher Wahrscheinlichkeitsraum gemeint ist, so schreiben wir auch $\mathcal{L}_0(E)$ bzw. $L_0(E)$.

1.38 Proposition
Für alle $X, Y \in \mathcal{L}_0(E)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{L}_0(E)$.

Beweis
Da $\mathcal{A}$ vollständig ist und X, Y fast sicher Werte in einem separablen Unterraum von E annehmen, sei E ohne Beschränkung der Allgemeinheit separabel. Nach Proposition 1.30 ist dann $(E, \mathcal{B}(E))$ ein messbarer Vektorraum und die Behauptung folgt nun aus Proposition 1.29. □

Wie auch im skalaren Fall lassen sich Radon-Zufallsvariablen durch sogenannte *einfache Zufallsvariablen* approximieren.

1.39 Definition
Eine Abbildung $X : \Omega \to E$ von der Form

$$X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} x_i$$

mit $x_1, ..., x_n \in E$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ heißt *einfache Zufallsvariable*. Offensichtlich gilt $X \in \mathcal{L}_0(E)$.

1.40 Proposition
Sei $X \in \mathcal{L}_0(E)$ und $Y : \Omega \to E$ eine Abbildung.

(i) Es existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ und

$$||X_n(\omega)|| \leq 2||X(\omega)||$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $\omega \in \Omega$.

(ii) Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}_0(E)$ sodass eine Menge Ω^* existiert mit

$$\forall \omega \in \Omega^* : \quad \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega).$$

Dann gilt $Y \in \mathcal{L}_0(E)$.

Beweis
Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{A}$ und da das lineare Erzeugnis abzählbar vieler separabler Unterräume wieder ein separabler Unterraum ist können wir erneut ohne Einschränkung annehmen, dass E selbst bereits separabel ist.
zu (i): Sei $\{x_1, x_2, ...\} \subseteq E$ eine dichte Teilmenge. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Abbildung

$$T_n : \Omega \to \mathbb{N}, \quad \omega \mapsto \inf\{k \leq n : ||X(\omega) - x_k|| = \min_{1\leq l\leq n} ||X(\omega) - x_l||\}.$$

Aus der Messbarkeit von X und der Stetigkeit von $||\cdot - x||$ für $x \in E$ folgt direkt die Messbarkeit von T_n, da für alle $i, j \in \{1, .., n\}$ die Menge $\{||X - x_i|| < ||X - x_j||\}$ messbar ist. Setze nun

$$X_n := \sum_{k=1}^{n} 1_{\{T_n = k\}} x_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Zufallsvariablen und es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$

$$||X(\omega) - X_n(\omega)|| = \min_{1\leq k\leq n} ||X(\omega) - x_k||.$$

Da $\{x_1, x_2, ...\}$ dicht in E liegt folgt

$$\lim_{n\to\infty} X(\omega) - X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \min_{1\leq k\leq n} ||X(\omega) - x_k|| = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||X(\omega) - x_n|| = 0.$$

zu (ii): Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{A}$ können wir annehmen, dass $X_n(\omega) \to Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Wir zeigen, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq E$ das Urbild $Y^{-1}(A)$ in $\mathcal{A}$ liegt. Da $\mathcal{B}(E)$ von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird folgt daraus die Behauptung. Für $\emptyset \neq A \subseteq E$ abgeschlossen betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die offene, also auch messbare, Menge

$$A_k := \{x \in E : \inf_{y \in A} ||x - y|| < \frac{1}{k}\}.$$

Dann gilt wie man leicht prüft

$$\{Y \in A\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \to \infty} \{X_n \in A_k\} \in \mathcal{A}.$$

□

2 Konvergenzarten

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein Banachraum.

2.1 Fast sichere und stochastische Konvergenz

In diesem Abschnitt wollen wir kurz auf die beiden Konzepte der fast sicheren und der stochastischen Konvergenz von Zufallsvariablen eingehen, die uns schon aus dem skalaren Fall bekannt sind. Aufgrund der Vollständigkeit von E lassen sich die Beweise in diesem Abschnitt wie im skalaren Fall durchführen, daher werden wir hier nur kurz die für den weiteren Verlauf wichtigen Ergebnisse zusammenfassen. Die Beweise für den skalaren Fall findet man beispielsweise in [GS77].

2.1 Definition
Seien $X, X_1, X_2, ...$ E-wertige Zufallsvariablen. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert fast sicher* gegen X, falls

$$P\left(\left\{\lim_{n\to\infty} ||X_n - X|| = 0\right\}\right)$$

Notation: $X_n \xrightarrow{f.s.} X$.

Analog zum Spezialfall $E = \mathbb{R}^d$ zeigt man für Folgen von Zufallsvariablen mit Werten in einem allgemeinen Banachraum E die fast sichere Eindeutigkeit des fast sicheren Grenzwerts.

2.2 Proposition
Für $X, Y, X_1, X_2, ... \in \mathcal{L}_0(E)$ gilt

(i) $(X_n \xrightarrow{f.s.} X \wedge X_n \xrightarrow{f.s.} Y) \Rightarrow X = Y$ fast sicher.

(ii) $(X_n \xrightarrow{f.s.} X \wedge X = Y$ fast sicher$) \Rightarrow X_n \xrightarrow{f.s.} Y$.

(iii) $(X_n \xrightarrow{f.s.} X \wedge f : E \to \mathbb{R}$ stetig$) \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{f.s.} f(X)$.

Ferner lassen sich auch die folgenden beiden Konvergenzkriterien vollkommen problemlos in das allgemeinere Setting übertragen.

2.3 Satz
Seien $X, X_1, X_2, ... \in \mathcal{L}_0(E)$. Dann gilt

$$X_n \xrightarrow{f.s.} X \iff \forall \varepsilon > 0 \lim_{N\to\infty} P\left(\left\{\sup_{n\geq N} ||X_n - X|| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

2.4 Satz (Cauchy-Kriterium für fast sichere Konvergenz)
Für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}_0(E)$ existiert genau dann eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}_0(E)$ mit $X_n \xrightarrow{f.s.} X$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{N\to\infty} P\left(\left\{\sup_{n\geq N} ||X_n - X_N|| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Wie im skalaren Fall betrachtet man neben dem Begriff der fast sicheren Konvergenz auch den der *stochastischen Konvergenz*

2.5 Definition
Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von E-wertigen Zufallsvariablen *konvergiert stochastisch* gegen eine Zufallsvariable X falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\{||X_n - X|| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Man erhält unmittelbar die folgende Charakterisierung.

2.6 Satz (Teilfolgenkriterium)
Seien $X, X_1, X_2, ... \in \mathcal{L}_0(E)$. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann stochastisch gegen X, wenn jede Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(n_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ besitzt, sodass $X_{n_{k_l}} \xrightarrow{f.s.} X$.

2.7 Korollar
Für Zufallsvariablen $X, Y, X_1, X_2, ... \in \mathcal{L}_0(E)$ und eine stetige Abbildung $f : E \to \mathbb{R}$ gilt

(i) $X_n \xrightarrow{f.s.} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{st} X$,

(ii) $(X_n \xrightarrow{st} X \wedge X_n \xrightarrow{st} Y) \Rightarrow X = Y$ fast sicher.

(iii) $(X_n \xrightarrow{st} X \wedge X = Y$ fast sicher$) \Rightarrow X_n \xrightarrow{st} Y$.

(iv) $(X_n \xrightarrow{st} X \wedge f : E \to \mathbb{R}$ stetig$) \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{st} f(X)$.

Wie auch bei der fast sicheren Konvergenz lassen sich die beiden folgenden Charakterisierungen komplett analog zum skalaren Fall beweisen.

2.8 Satz
Seien $X, X_1, X_2, ... \in \mathcal{L}_0(E)$. Dann gilt

$$X_n \xrightarrow{st} X \iff \forall \varepsilon > 0 \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} P(\{||X_n - X|| > \varepsilon\}) = 0.$$

2.9 Satz (Cauchy-Kriterium für stochastische Konvergenz)
Für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}_0(E)$ existiert genau dann eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}_0(E)$ mit $X_n \xrightarrow{st} X$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} P(\{||X_n - X_N|| > \varepsilon\}) = 0.$$

2.2 Konvergenz in Verteilung und charakteristische Funktionale

2.10 Definition
Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von E-wertigen Zufallsvariablen *konvergiert in Verteilung* gegen eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}_0(E)$, falls die Folge $(P^{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungen schwach gegen P^X konvergiert.
Bezeichnung: $X_n \xrightarrow{w} X$.

Da die Verteilungskonvergenz lediglich von den Verteilungen der beteiligten Zufallsvariablen abhängt, erhalten wir unmittelbar die folgenden Charakterisierungen aus Abschnitt 1.2.

2.11 Proposition
Es sind äquivalent

(i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X.

(ii) Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq E$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\}) \leq P(\{X \in A\}).$$

(iii) Für alle offenen Mengen $O \subseteq E$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} P(\{X_n \in O\}) \geq P(\{X \in O\}).$$

(iv) Für alle Mengen $C \in \mathcal{B}(X)$ mit $P(\{X \in \partial C\}) = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X_n \in C\}) = P(\{X \in C\}).$$

Falls E separabel ist können wir ferner auf die Prokhorov-Metrik und die Sätze von de Acosta und Prokhorov zurückgreifen. Wie im Fall $\mathbb{R}^d$ wertiger Zufallsvariablen zeigt man ferner

2.12 Proposition
Seien $X, X_1, X_2, ... \in \mathcal{L}_0(E)$ mit $X_n \xrightarrow{st} X$. Dann gilt insbesondere $X_n \xrightarrow{w} X$.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von Verteilungskonvergenz sind die sogenannten *charakteristischen Funktionale.* Sie sind eine Verallgemeinerung der aus dem skalaren Fall bekannten charakteristischen Funktionen.

2.13 Definition
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(E)$. Das *charakteristische Funktional* $\widehat{\mu}$ von μ ist definiert durch

$$\widehat{\mu} : E' \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_E e^{if(x)} \mu(dx).$$

Wegen der Stetigkeit von $e^{i\cdot}$ und $\left|e^{ix}\right| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\widehat{\mu}$ wohldefiniert. Für eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}_0(E)$ bezeichne $\widehat{\mu_X}$ das charakteristische Funktional der Verteilung von X. In diesem Fall lässt sich die Abbildung auch schreiben als

$$f \mapsto \mathbb{E}(e^{if(X)}), \quad f \in E'.$$

2.14 Bemerkung
Im Fall $E = \mathbb{R}^d$ lässt sich E' auf kanonische Weise mit $\mathbb{R}^d$ identifizieren, daher lassen sich die charakteristischen Funktionale hier in der Form

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle} \mu(dx)$$

schreiben. Nach dem Darstellungssatz von Riesz ist dies auch für allgemeine Hilberträume E möglich.

2.15 Proposition
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(E)$. Dann ist $\widehat{\mu} : E' \to \mathbb{C}$ stetig bzgl. der Norm $||\cdot||_{op}$.

Beweis
Sei $f \in E'$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E' mit $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_{op} = 0$. Dann konvergiert $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere punktweise gegen l und mit dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}(f_n) = \int_E \lim_{n\to\infty} e^{if_n(x)} \mu(dx) = \int_E e^{if(x)} \mu(dx) = \widehat{\mu}(f).$$

□

Wie schon im skalaren Fall dienen die charakteristischen Funktionale als nützliches Hilfsmittel zur Untersuchung von Wahrscheinlichkeitsmaßen und schwacher Konvergenz. Es sei daran erinnert, dass nach Proposition 1.34 für einen separablen Banachraum E die beiden σ-Algebren $\mathcal{B}(E)$ und $\sigma(E')$ übereinstimmen. Ferner ist

$$\mathcal{C}(E) := \{\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A) : \ n \in \mathbb{N}, \ f_1, ..., f_n \in E', \ A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

ein schnitt-stabiler Erzeuger von $\sigma(E')$.

2.16 Satz (Eindeutigkeitssatz)
Sei E ein separabler Banachraum und seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(E)$ mit $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$. Dann gilt $\mu = \nu$.

Beweis
Bemerke zunächst, dass für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$, $d \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d$ und $f_1, ..., f_d \in E'$ gilt

$$\widehat{\mu}(\sum_{j=1}^d t_j f_j) = \int_E e^{i\sum_{j=1}^d t_j f_j(x)} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,\xi\rangle} \mu^T(d\xi) = \widehat{\mu^T}(t),$$

wobei

$$T : E \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto (f_1(x), ..., f_d(x))^T.$$

Nach Voraussetzung folgt also $\widehat{\mu^T} = \widehat{\nu^T}$ und aus **APPENDIX** folgt $\mu^T = \nu^T$. Es gilt somit

$$\forall d \in \mathbb{N}\ \forall f_1, ..., f_d \in E'\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) :\ \mu((f_1, ..f_d)^{-1}(A)) = \nu((f_1, ..f_d)^{-1}(A)).$$

Also stimmen μ und ν insbesondere auf dem schnittstabilen Erzeuger $\mathcal{C}(E)$ von $\mathcal{B}(E)$ und somit auf ganz $\mathcal{B}(E)$ überein. □

2.17 Satz
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}_0(E)$ und $X \in \mathcal{L}_0(E)$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in Verteilung gegen X, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind

(a) $(\widehat{\mu_{X_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $\widehat{\mu_X}$ und

(b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig straff.

Beweis
zu $\Rightarrow$: Für $n \in \mathbb{N}$ sei μ_n die Verteilung von X_n und μ die Verteilung von X. Da die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung schwach gegen μ konvergiert, ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere relativ kompakt in $(\mathcal{M}(E), \rho)$, und nach dem Satz von Prokhorov gleichmäßig straff. Ferner ist für $l \in E'$ die Abbildung

$$g_l : E \to \mathbb{C},\ x \mapsto e^{il(x)}$$

beschränkt und stetig. Durch Zerlegung in Real und Imaginärteil liefern dadurch die Linearität des Integrals und die Definition der schwachen Konvergenz die puntkweise Konvergenz der charakteristischen Funktionale.
zu $\Leftarrow$: Nach Voraussetzung ist $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt. Es genügt also zu zeigen, dass jede konvergente Teilfolge von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen μ konvergiert. Sei dazu $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge und $\nu \in \mathcal{M}(E)$ mit $\mu_{n_k} \rightharpoonup \nu$. Nach Voraussetzung und der Hinrichtung gilt also

$$\forall l \in E' :\ \widehat{\mu}(l) = \lim_{k\to\infty} \widehat{\mu_{n_k}}(l) = \widehat{\nu}(l).$$

Der Eindeutigkeitssatz liefert nun $\mu = \nu$ und somit die Behauptung. □

2.18 Bemerkung
Im endlich dimensionalen Fall muss die gleichmäßige Straffheit von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht zusätzlich gefordert werden, vgl. [GS77][Theorem 8.7.5, S.357].

Bevor wir uns im Folgenden Kapitel mit der Konvergenz zufälliger Reihen in Banachräumen beschäftigen, halten wir noch zwei für den späteren Beweis des Satzes von Itô-Nisio nützliche Ergebnisse fest, die sich mit unserem bisher gesammelten Wissen über charakteristische Funktionale leicht beweisen lassen.

2.19 Proposition
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{L}_0(E)$ und $X, Y \in \mathcal{L}_0(E)$ mit $X_n \xrightarrow{st} X$, sowie $Y_n \xrightarrow{st} Y$. Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ X_n und Y_n unabhängig sind, so sind auch X, Y unabhängig.

Beweis
Wegen des Teilfolgenkriteriums für stochastische Konvergenz können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ und $Y_n \xrightarrow{f.s.} Y$. Betrachte die $(E \times E)$-wertigen Zufallsvariablen $Z_n := (X_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, und $Z := (X, Y)$. Identifiziere $(E \times E)^* = E^* \times E^*$ und erhalte mittels dominierter Konvergenz und dem Satz von Fubini für $(f_1, f_2) \in E^* \times E^*$.

$$\begin{aligned}\widehat{P^Z}(f_1, f_2) = \mathbb{E}(e^{i(f_1(X)+f_2(Y))}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{i(f_1(X_n)+f_2(Y_n))}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{if_1(X_n)})\mathbb{E}(e^{if_2(Y_n)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{if_1(X)})\mathbb{E}(e^{if_2(Y)}) \\ &= \widehat{P^X}(f_1)\widehat{P^Y}(P)(f_2) = \widehat{P^X \times P^Y}(f_1, f_2).\end{aligned}$$

Der Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionale liefert unmittelbar $P^X \times P^Y = P^{(X,Y)}$. Also sind X, Y unabhängig. $\square$

Sei 0_E das neutrale Element der Addition in E und δ_0 die Einpunktverteilung auf 0_E, d.h.

$$\delta_0(A) = 1_A(0), \quad A \in \mathcal{B}(E).$$

2.20 Proposition
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(E)$. Falls ein $r > 0$ existiert mit

$$\forall f \in E' : \ ||f||_{op} \leq r \ \Rightarrow \ \widehat{\mu}(f) = 1,$$

so gilt $\mu = \delta_0$.

Beweis
Wähle $f \in E'$ beliebig aber fest und betrachte die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ t \mapsto \widehat{\mu}(tf).$$

Dann ist ϕ die charakteristische Funktion von μ^f und nach Voraussetzung gilt $\phi(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq \frac{r}{||f||_{op}}$. Weiter gilt für $s, t \in \mathbb{R}$

$$|\phi(t) - \phi(s)| = \left| \int_E e^{isf(x)}(e^{i(t-s)f(x)} - 1)\mu(dx) \right| \leq \int_E \left| e^{isf(x)}(e^{i(t-s)f(x)} - 1) \right| \mu(dx).$$

Per Hölder-Ungleichung und der Definition des Absolutbetrags erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_E \left| e^{isf(x)}(e^{i(t-s)f(x)} - 1) \right| \mu(dx) &\leq \left(\int_E \left| e^{isf(x)}(e^{i(t-s)f(x)} - 1) \right|^2 \mu(dx) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2 - \phi(t-s) - \overline{\phi(t-s)}} \\ &\leq \sqrt{2\,|1 - \phi(t-s)|},\end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq \sqrt{2\,|1 - \phi(t-s)|}.$$

Also muss ϕ konstant sein mit $\phi(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da f beliebig gewählt war erhalten wir

$$\forall f \in E' : \quad \widehat{\mu}(f) = 1 = \int_E e^{if(x)}\delta_0(dx) = \widehat{\delta_0}(f).$$

Der Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionale liefert nun $\mu = \delta_0$. $\square$

3 Maximal-Ungleichungen und Konvergenz zufälliger Reihen

Im Folgenden sei E ein separabler Banachraum.

3.1 Maximalungleichungen

3.1 Definition
Eine E-wertige Zufallsvariable X heißt *symmetrisch*, falls $-X$ die selbe Verteilung besitzt wie X, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{B}(E) : P(\{X \in A\}) = P(\{-X \in A\}).$$

3.2 Bemerkung
Nach dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionale ist eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}_0(E)$ genau dann symmetrisch, wenn

$$\forall f \in E' : \quad \widehat{P^X}(f) = \widehat{P^{-X}}(f).$$

3.3 Definition
Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von E-wertigen Zufallsvariablen heißt *symmetrisch*, falls $(\varepsilon_1 X_1, \varepsilon_2 X_2, ...)$ für jede Wahl von $\varepsilon_i = \pm 1$ die gleiche Verteilung hat wie $(X_1, X_2, ...)$.

3.4 Bemerkung
Sind $X_1, X_2, ...$ unabhängige E-wertige Zufallsvariablen, sodass X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ symmetrisch ist, dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ symmetrisch.

3.5 Satz (Lévys Maximal-Ungleichung)
Seien $X_1, ..., X_N \in \mathcal{L}_0(E)$ unabhängige und symmetrische Zufallsvariablen und setze

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Dann gilt für alle $t > 0$

$$P\big(\{\max_{1\leq n\leq N} ||S_n|| > t\}\big) \leq 2P\big(\{||S_N|| > t\}\big), \tag{3.1}$$

$$P\big(\{\max_{1\leq n\leq N} ||X_n|| > t\}\big) \leq 2P\big(\{||S_N|| > t\}\big). \tag{3.2}$$

Beweis
zu (3.1): Setze

$$T_1(\omega) := \inf\{k \leq N : ||S_k|| > t\} \in [0, \infty], \quad \omega \in \Omega.$$

Dann ist T_1 messbar, da für jedes $i = 1, ..., N$ die Menge $\{||S_i|| \leq t\}$ messbar ist. Wir zeigen zunächst

$$\{T_1 = n\} \subseteq \{||S_N|| > t,\ T_1 = n\} \cup \{||2S_n - S_N|| > t,\ T_1 = n\}, \quad n \in \{1, ..., N\}, \tag{3.3}$$

$$P\left(\{||S_N|| > t,\ T_1 = n\}\right) = P\left(\{||2S_n - S_N|| > t,\ T_1 = n\}\right), \quad n \in \{1, ..., N\}. \tag{3.4}$$

zu (3.3): Für $\omega \in \Omega$ mit $T_1(\omega) = n$ und $||S_N|| \leq t$ liefert die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$||2S_n - S_N|| \geq 2||S_n|| - ||S_N|| > 2t - t = t.$$

zu (3.4): Setze $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_n = 1$ und $\varepsilon_{n+1} = ... = \varepsilon_N = -1$, sowie

$$S'_j := \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i X_i.$$

Dann gilt $S_j = S'_j$ für alle $j \leq n$ und

$$2S_n - S_N = 2\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{N} X_I = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=n+1}^{N} X_i = S'_N.$$

Wegen der Symmetrie von $X_1, ..., X_N$ sind $(S_1, ..., S_N)$ und $(S'_1, ..., S'_N)$ identisch verteilt. Also ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\{||S_N|| > t, T_1 = n\}) &= P(\{||S_1|| \leq t, ..., ||S_{n-1}|| \leq t, ||S_n|| > t, ||S_N|| > t\}) \\ &= P\left(\{||S'_1|| \leq t, ..., ||S'_{n-1}|| \leq t, ||S'_n|| > t, ||S'_N|| > t\}\right) \\ &= P(\{||2S_n - S_N|| > t, T_1 = n\}). \end{aligned}$$

Wir erhalten also mit (3.3) und (3.4)

$$P(\{T_1 = n\}) \leq 2P(\{||S_N|| > t,\ T_1 = n\}).$$

Woraus wir schließlich (3.1) folgern

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\max_{1 \leq n \leq N} ||S_n|| > t\right\}\right) &\leq \sum_{n=1}^{N} P(\{T_1 = n\}) \leq \sum_{n=1}^{N} 2P(\{||S_N|| > t,\ T_1 = n\}) \\ &= 2P(\{||S_N|| > t,\ T_1 \leq N\}) \leq 2P(\{||S_N|| > t\}). \end{aligned}$$

zu (3.2): Setze

$$T_2(\omega) := \inf\{k \leq N : ||X_k(\omega)|| > t\} \in [0, \infty], \quad \omega \in \Omega.$$

Analog zum Beweis von (3.3) und (3.4) zeigt man

$$\begin{aligned} \{T_2 = n\} &\subseteq \{||S_N|| > t, T_2 = n\} \cup \{||2X_n - S_N|| > t, T_2 = n\}, \quad n \in \{1, ..., N\}, \\ P(\{||S_N|| > t, T_2 = n\}) &= P(\{||2X_n - S_N||, T_2 = n\}), \quad n \in \{1, ..., N\}. \end{aligned}$$

unter der Verwendung der Symmetrie von $X_1, ..., X_N$ und folgert daraus schließlich

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\max_{1 \leq n \leq N} ||X_n|| > t\right\}\right) &= \sum_{n=1}^{N} P(\{T_2 = n\}) \leq \sum_{n=1}^{N} 2P(\{||S_N|| > t, T = n\}) \\ &= 2P(\{||S_N|| > t, T_2 \leq N\}) \leq 2P(\{||S_N|| > t\}). \end{aligned}$$

□

3.6 Korollar
Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und symmetrischer E-wertiger Zufallsvariablen. Falls $S_n \xrightarrow{w} S$ für $S \in \mathcal{L}_0(E)$, dann gilt für λ-fast-alle $t \in \mathbb{R}$

$$P\left(\left\{\sup_{n \in \mathbb{N}} ||S_n|| > t\right\}\right) \leq 2P(\{||S|| > t\}).$$

Beweis
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Lévys Maximalungleichung

$$P\left(\left\{\max_{1 \leq k \leq n} ||S_k|| > t\right\}\right) \leq 2P(\{||S_n|| > t\}).$$

Und wegen $||S_n|| \xrightarrow{w} ||S||$ folgt für alle $t \in \mathbb{R}$, in denen die Verteilungsfunktion $F_{||S||}$ von $||S||$

stetig ist

$$P\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}||S_n|| > t\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\max_{1\le k\le n}||S_k|| > t\right\}\right) \le 2\lim_{n\to\infty} P\left(\{||S_n|| > t\}\right) = 2P\left(\{||S|| > t\}\right).$$

□

Für nicht-symmetrische Zufallsvariablen erhalten wir mit einer ähnlichen Beweismethode die folgende auf Giuseppe Ottaviani und Anatoli Skorohod zurückgehende Maximal-Ungleichung, vgl. [LT91][Lemma 6.2].

3.7 Satz (Maximal-Ungleichung von Ottaviani-Skorohod)
Seien $X_1, ..., X_N$ unabhängige E-wertige Zufallsvariablen, $N \in \mathbb{N}$. Setze

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i, \quad k = 1, ..., N.$$

Dann gilt für alle $s, t > 0$

$$P(\{\max_{1\le k\le N}||S_k|| > s+t\}) \le \frac{P(\{||S_N|| > t\})}{1 - \max_{1\le k\le N} P(\{||S_N - S_k|| > s\})} . \tag{3.5}$$

Beweis
Setze

$$T(\omega) := \inf\{k \le N : ||S_k(\omega)|| > s+t\} \in [0,\infty], \quad \omega \in \Omega.$$

Dann ist T messbar und $\{T = k\}$ hängt nur von $X_1, ..., X_k$ ab. Weiter gilt

$$\sum_{k=1}^{N} P\left(\{T = k\}\right) = P\left(\left\{\max_{1\le k\le N}||S_k|| > s+t\right\}\right).$$

Für $\omega \in \Omega$ mit $T(\omega) = k$ und $||S_N(\omega) - S_k(\omega)|| \le s$ gilt zudem $||S_N(\omega)|| > t$, denn mit der umgekehrten Dreiecksungleichung erhält man

$$s \ge ||S_N - S_k|| \ge |||S_N|| - ||S_k||| > (s+t) - ||S_N||.$$

Die Unabhängigkeit von $X_1, ..., X_N$ liefert schließlich

$$\begin{aligned} P\left(\{||S_N|| > t\}\right) &\ge \sum_{k=1}^{N} P\left(\{T = k, ||S_N|| > t\}\right) \\ &\ge \sum_{k=1}^{N} P\left(\{T = k, ||S_N - S_k|| \le s\}\right) \\ &\ge \min_{1\le k\le N} P\left(\{||S_N - S_k|| \le s\}\right) \sum_{k=1}^{N} P\left(\{T = k\}\right). \end{aligned}$$

Umstellen und beachten von

$$\min_{1\le k\le N} P\left(\{||S_N - S_k|| \le s\}\right) = 1 - \max_{1\le k\le N} P\left(\{||S_N - s_k|| > s\}\right)$$

liefert nun die Behauptung. □

3.2 Der Satz von Itô-Nisio

Wir wollen nun damit beginnen die bisher erarbeitete Technik zur Untersuchung der Konvergenz zufälliger Reihen in Banachräumen anzuwenden. Die vorliegenden Beweise orientieren sich an [IN68], [LT91], [LQ18] und [HvNVW17].

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen in $\mathcal{L}_0(E)$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \mu_n := P^{S_n}.$$

3.8 Satz (Itô-Nisio)
Es sind äquivalent

(i) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher,

(ii) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch,

(iii) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung.

Beweis
Die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ wurden bereits in Kapitel 2 gezeigt, es genügt also $(ii) \Rightarrow (i)$ und $(iii) \Rightarrow (ii)$ zu zeigen.
zu $(ii) \Rightarrow (i)$: Fall A: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist X_n symmetrisch verteilt.
Für $n, N \in \mathbb{N}$ mit $n < N$ setze

$$\begin{aligned} Y_{n,N} &:= \max_{n<k\leq N} ||S_k - S_n||, \\ Y_n &:= \lim_{N\to\infty} Y_{n,N} = \sup_{k>n} ||S_k - S_n||. \end{aligned}$$

Seien $\varepsilon, t > 0$. Mit dem Cauchy-Kriterium für stochastische Konvergenz und Lévys Maximal-Ungleichung erhalten wir für $N > n \geq n_0 := n_0(\varepsilon, t) \in \mathbb{N}$

$$P(\{Y_{n,N} > t\}) \leq 2P(\{||S_N - S_n|| > t\}) \leq \varepsilon.$$

Es folgt somit

$$P(\{Y_n > t\}) = \lim_{n\to\infty} P(\{Y_{n,N} > t\}) \leq \varepsilon$$

für $n \geq n_0$. Also gilt $Y_n \xrightarrow{st} 0$, nach dem Cauchy-Kriterium für fast sichere Konvergenz folgt daraus die fast sichere Konvergenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Fall B: Allgemeiner Fall.
Wir verwenden für diesen Fall die Beweistechnik der Symmetrisierung. Betrachte hierzu den Produktraum $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, P \times P)$. Für eine Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bezeichne

$$\overline{X}(\omega_1, \omega_2) := X(\omega_1) - X(\omega_2), \quad (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega$$

die Symmetrisierung von X. Wie man mittels der charakteristischen Funktionale von $\overline{X}$ und $-\overline{X}$ leicht einsieht ist $\overline{X}$ tatsächlich symmetrisch. Sei nun S eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $S_n \xrightarrow{st} S$. Dann folgt direkt $\overline{S_n} \xrightarrow{st} \overline{S}$, denn für $\varepsilon > 0$ gilt nach Konstruktion

$$(P \times P)(\{||\overline{S_n} - \overline{S}|| > \varepsilon\}) \leq 2P(\{||S_n - S|| > \frac{\varepsilon}{2}\}).$$

Nach Fall A gilt also insbesondere $\overline{S_n} \xrightarrow{f.s.} \overline{S}$. Daher existiert eine Menge $\Omega^* \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ mit $(P \times P)(\Omega^*) = 1$ und

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega^* : \quad \overline{S_n}(\omega_1, \omega_2) \text{ konvergiert.}$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$0 = \int_{\Omega\times\Omega} 1 - 1_{\Omega^*} d(P \times P) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} 1 - 1_{\Omega^*(\omega_2)}(\omega_1) dP(\omega_1) dP(\omega_2).$$

wobei $\Omega^*(\omega_2) = \{\omega_1 \in \Omega : \; (\omega_1, \omega_2) \in \Omega^*\}$. Somit existiert ein $\omega_2 \in \Omega$ mit $P(\Omega^*(\omega_2)) = 1$ und es gilt

$$\forall \omega_1 \in \Omega^*(\omega_2) : \quad S_n(\omega_1) - S_n(\omega_2) \text{ konvergiert.}$$

Setze nun $x_n := S_n(\omega_2)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Zufallsvariable L auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $S_n - x_n \xrightarrow{f.s.} L$. Nach Voraussetzung erhalten wir also

$$x_n \xrightarrow{st} S - L$$

wobei wir x_n für $n \in \mathbb{N}$ als konstante Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ auffassen. Folglich existiert ein $x \in E$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

und insgesamt erhalten wir $S_n \xrightarrow{f.s.} L + x$.
zu $(iii) \Rightarrow (ii)$: Für $1 \leq m < n$ bezeichne

$$\mu_{m,n} := P^{S_n - S_m}$$

die Verteilung von $S_n - S_m$. Da $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ konvergiert ist die Menge $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt in $(\mathcal{M}(E), \rho)$ und somit nach dem Satz von Prokhorov gleichmäßig straff. Folglich existiert zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K \subseteq E$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \mu_n(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit von

$$(x, y) \mapsto x - y, \quad (x, y) \in E \times E$$

ist die Menge $\tilde{K} := \{x - y : x, y \in K\}$ wiederum kompakt, also insbesondere messbar, und es gilt

$$\mu_{m,n}(\tilde{K}) \geq P(\{S_n \in K, \; S_m \in K\}) \geq 1 - P(\{S_n \in K^c\}) - P(\{S_m \in K^c\}) \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Somit ist auch $\{\mu_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$ gleichmäßig straff und daher relativ kompakt in $(\mathcal{M}(E), \rho)$. Wir zeigen nun

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n > m \geq N : \quad P\left(\{||S_n - S_m|| < \varepsilon\}\right) = \mu_{m,n}(B(0, \varepsilon)) > 1 - \varepsilon. \tag{3.6}$$

Mit dem Cauchy-Kriterium folgt daraus die stochastische Konvergenz der Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Angenommen (3.6) ist nicht erfüllt, dann gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} : \; \exists n(N) > m(N) \geq N : \mu_{m(N),n(N)}(B(0, \varepsilon)) \leq 1 - \varepsilon.$$

Da $\{\mu_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$ relativ kompakt ist existiert insbesondere eine Teilfolge von $(\mu_{m(N),n(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ die schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\mathcal{B}(E)$ konvergiert. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass bereits $\mu_{m(N),n(N)} \rightharpoonup \nu$ gilt. Da $B(0, \varepsilon)$ offen ist liefert das Portmanteau-Theorem

$$\nu(B(0, \varepsilon)) \leq \liminf_{N\to\infty} \mu_{m(N),n(N)}(B(0, \varepsilon)) \leq 1 - \varepsilon. \tag{3.7}$$

Andererseits gilt für $z \in E'$ wegen der Unabhängigkeit von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_{n(N)}} = \mathbb{E}(e^{iz(S_{n(N)})}) &= \mathbb{E}(e^{iz(S_{m(N)})} e^{iz(S_{n(N)} - S_{m(N)})}) \\
&= \mathbb{E}(e^{iz(S_{m(N)})}) \mathbb{E}(e^{iz(S_{n(N)} - S_{m(N)})}) \\
&= \widehat{\mu_{m(N}}(z) \widehat{\mu_{m(N),n(N)}}(z).
\end{aligned}$$

Mit Grenzübergang $N \to \infty$ folgt daraus wegen $\mu_N \rightharpoonup \mu$ und $\mu_{m(N),n(N)} \rightharpoonup \nu$

$$\forall z \in E' : \quad \widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}(z)\widehat{\nu}(z)$$

Wegen der Stetigkeit von $\widehat{\mu}$ und $\widehat{\mu}(0_{E'}) = 1$ existiert ein $r > 0$ mit

$$\widehat{\mu}(z) \neq 0, \quad \text{für alle } z \in E' \text{ mit } ||z||_{op} \leq r.$$

Also muss

$$\widehat{\nu}(z) = 1, \quad \text{für alle } z \in E' \text{ mit } ||z||_{op} \leq r.$$

gelten. Mit Proposition 2.19 folgt nun $\nu = \delta_0$. Im Widerspruch zu (3.7). Es gilt folglich (3.6) und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert demnach stochastisch. $\square$

3.9 Bemerkung
Mittels der Maximal-Ungleichung von Ottaviani-Skorohod ist auch ein direkter Beweis der Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ möglich. Betrachte hierzu etwa die Ereignisse

$$A_N := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{\sup_{n>m} ||S_n - S_m|| > \frac{1}{N}\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $A := (\cup_{N=1}^{\infty} A_N)^c$ das Ereignis, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und man zeigt

$$\forall N \in \mathbb{N}: \quad P(A_N) = 0.$$

Ein Beweis mit dieser Vorgehensweise für den skalaren Fall findet sich etwa [Bau02][Theorem 14.2, S.109]. Der allgemeine Fall funktioniert vollkommen analog. $\lozenge$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ symmetrisch verteilt sind, lässt sich der Satz von Itô-Nisio auf drei noch schwächere Annahmen als die Verteilungskonvergenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erweitern. Für den Beweis dient uns unter anderem der folgende Satz.

3.10 Satz
Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig straff. Dann existiert eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E sodass $(S_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert.

Beweis
Betrachte den Produktraum $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, P \times P)$ und definiere

$$\widetilde{X}_n : \Omega \times \Omega \to E, \ (\omega_1, \omega_2) \mapsto X_n(\omega_1),$$
$$\widetilde{Y}_n : \Omega \times \Omega \to E, \ (\omega_1, \omega_2) \mapsto X_n(\omega_2),$$

sowie

$$\widetilde{S}_n := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i, \quad \widetilde{T}_n := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Y}_n, \quad U_n := \widetilde{S}_n - \widetilde{T}_n, \quad \mu_{U_n} := (P \times P)^{U_n}.$$

Nach Konstruktion sind $\widetilde{S}_n$,$\widetilde{T}_n$ und S_n identisch verteilt. Wir zeigen zunächst, dass $(\mu_{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig straff ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ Dann existiert nach Voraussetzung eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq E$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mu_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildung

$$E \times E \to E, \ (x, y) \mapsto x - y$$

ist auch die Menge $K := \{x - y : x, y \in K_\varepsilon\}$ kompakt und somit insbesondere messbar. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\mu_{U_n}(K) = P\left(\left\{\widetilde{S}_n - \widetilde{T}_n \in K\right\}\right) &\geq P\left(\left\{\widetilde{S}_n \in K_\varepsilon, \widetilde{T}_n \in \varepsilon\right\}\right) \\
&\geq 1 - P\left(\left\{\widetilde{S}_n \notin K_\varepsilon\right\}\right) - P\left(\left\{\widetilde{T}_n \notin K_\varepsilon\right\}\right) \\
&= 1 - 2\mu_n(K_\varepsilon^c) \\
&\geq 1 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist $(\mu_{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ straff. Als nächstes zeigen wir, dass $(\widehat{\mu_{U_n}}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $f \in E'$ konvergiert. Sei dazu $f \in E'$ beliebig aber fest. Die Unabhängigkeit von $(\widetilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liefert direkt die Unabhängigkeit von $(\widetilde{X}_n - \widetilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und nach Konstruktion sind Y_n und X_n identisch verteilt. Es gilt somit

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_{U_n}}(f) = E(e^{if(U_n)}) &= \mathbb{E}\big(\prod_{j=1}^{n}(e^{if(\widetilde{X}_j-\widetilde{Y}_j)})\big)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}(e^{if(\widetilde{X}_j-\widetilde{Y}_j)}) = \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}(e^{if(\widetilde{X}_j)})\mathbb{E}(e^{-if(\widetilde{Y}_j)}) = \prod_{j=1}^{n}\left|\mathbb{E}(e^{if(\widetilde{X}_j)})\right|^2\end{aligned}$$

Wegen $0 \le \left|\mathbb{E}(e^{if(\widetilde{X}_j)})\right| \le 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt daraus die Konvergenz von $(\widehat{\mu_{U_n}}(f))_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Satz 2.19 konvergiert $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also in Verteilung und somit nach dem Satz von Itô-Nisio insbesondere fast sicher. Daher existiert eine Menge $\Omega^* \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ mit $(P\times P)(\Omega^*) = 1$ und

$$\forall(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^*: \quad U_n(\omega_1,\omega_2) = S_n(\omega_1) - S_n(\omega_2) \text{ konvergiert.}$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir wie im Beweis des Satzes von Itô-Nisio ein $\omega' \in \Omega$, sodass $S_n - S_n(\omega')$ fast sicher konvergiert. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $c_n := S_n(\omega')$, $n \in \mathbb{N}$, erfüllt nun die gewünschte Eigenschaft. □

3.11 Satz (Satz von Itô-Nisio für symmetrische Folgen)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und symmetrischer Zufallsvariablen in $\mathcal{L}_0(E)$. Dann sind äquivalent

(i) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher,

(ii) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch,

(iii) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung,

(iv) $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig straff,

(v) Es gibt eine Zufallsvariable $S \in \mathcal{L}_0(E)$, sodass

$$\forall f \in E': \quad f(S_n) \xrightarrow{st} f(S),$$

(vi) Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(E)$, sodass

$$\forall f \in E': \quad \lim_{n\to\infty}\widehat{\mu_n}(f) = \widehat{\mu}(f).$$

Beweis
Die Äquivalenz $(i) \iff (ii) \iff (iii)$ wurde bereits im allgemeinen Fall nicht-symmetrischer Zufallsvariablen gezeigt und die Implikationen $(iii) \Rightarrow (iv)$, $(i) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$ sind klar. Wir zeigen noch $(vi) \Rightarrow (iv)$ und $(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.
zu $(iv) \Rightarrow (i)$: Nach Satz 3.8 existiert eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E, sodass $(S_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert. Setze nun $P^X := P^{(X_1,X_2,\ldots)}$ und $P^{-X} := P^{(-X_1,-X_2,\ldots)}$. Wegen der Unabhängigkeit und Symmetrie von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir direkt $P^X = P^{-X}$. Weiter gilt für $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}&P\left(\left\{\sup_{n\ge N}||(S_n - c_n) - (S_N - c_N)|| > \varepsilon\right\}\right)\\ &= P^X(\{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}: \sup_{n\ge N}||y_n + y_{n-1} + \ldots + y_{N+1} + (c_n - c_N)|| > \varepsilon\})\\ &= P^{-X}(\{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}: \sup_{n\ge N}||y_n + y_{n-1} + \ldots + y_{N+1} + (c_n - c_N)|| > \varepsilon\})\\ &= P\left(\left\{\sup_{n\ge N}||(-S_n - c_n) - (-S_N - c_N)|| > \varepsilon\right\}\right).\end{aligned}$$

Also konvergiert wegen dem Cauchy-Kriterium für fast sichere Konvergenz auch $(-S_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher. Daraus folgt die fast sichere Konvergenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$S_n = \frac{1}{2}((S_n - c_n) - (-S_n - c_n)).$$

zu $(v) \Rightarrow (iv)$: Wegen der Unabhängigkeit von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind für alle $f \in E'$ und $m \geq n$ die Zufallsvariablen $f(S_m - S_n)$ und $f(S_n)$ unabhängig. Nach Proposition 2.18 sind also $f(S - S_n)$ und $f(S_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängig. Zusammen mit der Symmetrie von S_n ergibt sich deshalb für $f \in E'$

$$\begin{aligned}\widehat{P^S}(f) = \mathbb{E}(e^{if(S)}) &= \mathbb{E}(e^{if(S-S_n)})\mathbb{E}(e^{if(S_n)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{if(S-S_n)})\mathbb{E}(e^{if(-S_n)}) = \mathbb{E}(e^{if(S-2S_n)}) = \widehat{P^{S-2S_n}}(f).\end{aligned}$$

Folglich sind S und $S - 2S_n$ nach dem Eindeutigkeitssatz für alle $n \in \mathbb{N}$ identisch verteilt. Da P^S straff ist existiert zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq E'$ mit $P(\{S \in K\}) \geq 1 - \varepsilon$. Aus Stetigkeitsgründen ist auch die Menge $L := \{\frac{1}{2}(x - y) : x, y \in K\}$ kompakt und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(\{S_n \in L\}) \geq P(\{S \in K,\ S - 2S_n \in K\}) \geq 1 - P(\{S \notin K\}) - P(\{S - 2S_n \notin K\}) \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Somit ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig straff.
zu $(vi) \Rightarrow (iv)$: Sei $f \in E'$ beliebig aber fest. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned}\varphi_n &: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \int_E e^{itf(x)}\mu_n(dx) = \widehat{\mu_n}(tf), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \varphi &: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \int_E e^{itf(x)}\mu(dx) = \widehat{\mu}(tf).\end{aligned}$$

Dann ist φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ die charakteristische Funktion von μ_n^f und φ die charakteristische Funktion von μ^f. Nach Voraussetzung konvergiert $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen φ und nach dem Stetigkeitssatz von Lévy, vgl. [GS77][Satz 8.7.5, S.357], gilt somit $\mu_n^f \rightharpoonup \mu^f$. Für festes $f \in E'$ ist $\{\mu_n^f : n \in \mathbb{N}\}$ also insbesondere relativ kompakt. Nach dem Satz von de Acosta genügt es folglich zu zeigen, dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ flach konzentriert ist. Da $\{\mu\}$ flach konzentriert ist genügt es dafür zu zeigen, dass für jeden endlich dimensionalen Untervektorraum $F \subseteq E$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mu_n(\{x \in E : \inf_{y\in F} ||x - y|| > \varepsilon\}) \leq 2\mu(\{x \in E : \inf_{y\in F} ||x - y|| > \varepsilon\}).$$

Sei also $F \subseteq E$ ein endlich dimensionaler Untervektorraum und $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E' mit

$$\forall x \in E : \quad d(x, F) := \inf_{y\in F} ||x - y|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Sei zunächst $m \in \mathbb{N}$ festgewählt. Mittels charakteristischer Funktionen prüft man leicht, dass $\mu_n^{(f_1,...,f_m)} \rightharpoonup \mu^{(f_1,...,f_m)}$. Wegen der Linearität von $f_1, ..., f_m$ können wir Satz 3.8 auf die Folge $(T_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}} := ((f_1, ..., f_m)\circ S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden und erhalten eine $\mathbb{R}^m$-wertige Zufallsvariable $T^{(m)}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $T_n^{(m)} \xrightarrow{st} T^{(m)}$. Insbesondere gilt also $T_n^{(m)} \xrightarrow{w} T^{(m)}$ und somit $P^{T^{(m)}} = \mu^{(f_1,...,f_m)}$. Ferner erhält die Linearität von $f_1, ..., f_m$ die Symmetrie und mit der Lévy Ungleichung für Grenzwerte in Verteilung, angewendet auf $(T_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$, erhalten wir im Banachraum $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_\infty)$

$$\begin{aligned}P\left(\left\{\max_{1\leq i\leq m} |f_i(S_n)| > \varepsilon\right\}\right) &= P\left(\left\{||T_n^{(m)}||_\infty > \varepsilon\right\}\right) \\ &\leq 2P\left(\left\{||T^{(m)}||_\infty > \varepsilon\right\}\right) = 2\mu\big(\{x \in E : \max_{1\leq i\leq m} |f_i(x)| > \varepsilon\}\big).\end{aligned}$$

Mit der σ-Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen folgt schließlich

$$\begin{aligned}\mu_n(\{x \in E : \inf_{y \in F} ||x-y|| > \varepsilon\}) = P\left(\{d(S_n, F) > \varepsilon\}\right) &= \lim_{m\to\infty} P\left(\left\{\max_{1\le i\le m} |f_i(S_n)| > \varepsilon\right\}\right) \\ &\le \lim_{m\to\infty} 2\mu(\{x \in E : \max_{1\le i\le m} |f_i(x)| > \varepsilon\}) \\ &= 2\mu(\{x \in E : \inf_{y\in F} ||x-y|| > \varepsilon\}).\end{aligned}$$

□

3.12 Bemerkung
Auf die Annahme der Symmetrie in Satz 3.11 kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden. Sei etwa E ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach dem Darstellungsatz von Riesz können wir den Dualraum E' mit E identifizieren. Setze nun

$$X_1(\omega) = e_1, \quad X_n(\omega) = e_n - e_{n-1},\ n \ge 2, \quad \omega \in \Omega.$$

Dann gilt offensichtlich $S_n = e_n$ und da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von E ist gilt für alle $z \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \langle z, S_n\rangle = 0 = \langle z, S\rangle,$$

wobei $S(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Wegen $||S_n|| = ||e_n|| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber weder fast-sicher noch stochastisch gegen S. ◊

Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty)$ kennt man aus der reellen Analysis die Äquivalenz

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert.} \iff \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.}$$

Mit Hilfe des Satzes von Itô-Nisio können wir nun ein ähnliches Resultat für symmetrische Zufallsvariablen formulieren.

3.13 Definition
Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}_0(E)$ heißt *stochastisch beschränkt*, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R > 0 : \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} P\left(\{||X_n|| > R\}\right) < \varepsilon.$$

3.14 Korollar
Sei $d \in \mathbb{N}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge $\mathbb{R}^d$-wertiger symmetrischer Zufallsvariablen. Dann sind äquivalent

(i) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher.

(ii) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist stochastisch beschränkt.

Beweis
$(i) \Rightarrow (ii)$ ist klar. Aus (ii) erhalten wir unmittelbar

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R > 0 : \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} P\left(\left\{S_n \in \overline{B}(0,R)\right\}\right) \ge 1 - \varepsilon.$$

Da abgeschlossene und beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ nach dem Satz von Heine-Borel kompakt sind folgt daraus die gleichmäßige Straffheit von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach dem Satz von Itô-Nisio für symmetrische Zufallsvariablen konvergiert $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also fast sicher. □

Literaturverzeichnis

[AE06] H. Amann and J. Escher. *Analysis I.* Birkhäuser, Basel, 2006.

[Bau02] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2002.

[dA70] A. D. de Acosta. Existence and convergence of probability measures in banach spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 152(1):273–298, November 1970.

[GS77] P. Gänssler and W. Stute. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Verlag, Berlin, 1977.

[HvNVW17] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis. *Analysis in Banach Spaces Volume II: Probabilistic Methods and Operator Theory.* Springer-Verlag, Cham, 2017.

[IN68] K. Itô and M. Nisio. On the convergence of sums of independent banach space valued random variables. *Osaka Journal of Mathematics*, 5(1):35–48, 1968.

[LQ18] D. Li and H. Queffélec. *Introduction to Banach Spaces: Analysis and Probability Volume 1.* Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

[LT91] M. Ledoux and M. Talagrand. *Probability in Banach Spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Par67] K.R. Parthasarathy. *Probability Measures on Metric Spaces.* Academic Press, New York – London, 1967.

[Que01] B.v. Querenburg. *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[VTC87] N. Vakhania, V. Tarieladze, and S. Chobanyan. *Probability Distributions on Banach Spaces.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.