

01_determinant

October 1, 2019

0.1 Notas de aula: Álgebra Linear, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

In [2]: %run init.ipynb

1 Função sinal

A função sinal, sgn , tem como domínio listas j_1, j_2, \dots, j_n de números naturais e como imagem $-1, 0, 1$. Para uma lista com n números, por definição temos

$$sgn_n(1, 2, \dots, n) := 1. \quad (1)$$

Se quaisquer pares de índices são iguais, a função sinal é nula

$$sgn_n(j_1, j_2, \dots, j_n) := 0 \text{ se } j_p = j_q \text{ para algum par } (p, q). \quad (2)$$

Se precisamos fazer um número par de trocas entre pares de índices de j_1, j_2, \dots, j_n para obter $1, 2, \dots, n$ então

$$sgn_n(j_1, j_2, \dots, j_n) := +1 \text{ (No. par de permutações)}. \quad (3)$$

Se precisamos fazer um número ímpar de trocas entre pares de índices de j_1, j_2, \dots, j_n para obter $1, 2, \dots, n$ então

$$sgn_n(j_1, j_2, \dots, j_n) := -1 \text{ (No. ímpar de permutações)}. \quad (4)$$

Outra propriedade que define a função sinal é

$$sgn_n(\dots, j_{p-1}, j_p, j_{p+1}, \dots) := (-1)^{n-p} sgn_{n-1}(\dots, j_{p-1}, j_{p+1}, \dots) \quad (5)$$

e relaciona a função sinal aplicada a listas com n e $n - 1$ números. Note que p é a posição onde sacamos o número da lista original.

1.0.1 Antisimetria da função sinal

Em vistas das propriedades acima não é difícil notar que ao trocarmos dois índices quaisquer do argumento da função sinal torcamos o seu sinal, se esta não for nula, i.e.,

$$sgn_n(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots) = -sgn_n(\dots, j_q, \dots, j_p, \dots). \quad (6)$$

Exercício: Considere a função sinal sgn_3 e escreva seus valores aplicados a todas as possibilidades de trios j_1, j_2, j_3 . Por fim diga a que função, que vocês usaram bastante no curso de física, sgn_3 coincide.

Exercício: Escreva o produto vetorial usando sgn_3 .

Problema: Obtenha um algoritmo (não trivial) para retornar a função sinal de uma permutação qualquer, e faça o código para testá-lo. Quem conseguir terá 0.5 pontos a mais na P1. Um caso mais simples desse problema é obter um algoritmo para calcular o determinante (via definição "original" com a função sinal), e fazer um programa para testá-lo. Quem conseguir somente este último terá 0.3 para a P1.

Vizinhos distantes vs primeiros vizinhos Vamos inferir que a função sinal calculada com a restrição de trocas entre primeiros vizinhos é equivalente ao cálculo com troca entre vizinhos distantes. Ou seja, vamos argumentar que $sgn_n(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots) = -sgn_n(\dots, j_q, \dots, j_p, \dots)$ é obtido também quando nos restringimos a trocas entre primeiros vizinhos. Para isso notemos que são precisas $2(q-p)-1$ trocas entre primeiros vizinhos para obter $(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots)$ de $(\dots, j_q, \dots, j_p, \dots)$, ou vice versa. Para isso, usamos um caso particular: $(\dots, 3, 4, 5, 6, \dots) \rightarrow (\dots, 3, 4, 6, 5, \dots) \rightarrow (\dots, 3, 6, 4, 5, \dots) \rightarrow (\dots, 6, 3, 4, 5, \dots)$. Até aqui usamos $q-p = 6-3 = 3$ trocas. Seguindo, $(\dots, 6, 3, 4, 5, \dots) \rightarrow (\dots, 6, 4, 3, 5, \dots) \rightarrow (\dots, 6, 4, 5, 3, \dots)$, ou seja, usamos mais $q-p-1 = 6-3-1 = 2$ trocas. Isso nos dá um total de $2(q-p)-1 = 2(6-3)-1 = 5$ trocas entre primeiros vizinhos. Mas

$$(-1)^{2(q-p)-1} = (-1)^{2(q-p)}(-1)^{-1} = (1)(1/(-1)^1) = -1, \quad (7)$$

que é o resultado que queríamos demonstrar.

Exercício: Faça a verificação análoga usando $(\dots, 4, 5, 6, 7, 8, \dots)$.

2 Determinante

Seja $A = (A_{j,k})$ uma matriz $n \times n$. Aqui consideraremos como campo escalar $A_{j,k} \in \mathbb{C}$. Nesse caso o determinante da matriz A é uma mapa $\det : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\det(A) := \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} sgn(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{1, j_1} A_{2, j_2} \dots A_{n, j_n}. \quad (8)$$

Note que usamos as chamadas **permutações** de n índices, (j_1, j_2, \dots, j_n) , que são sequências com os números *todos diferentes*. Isso porque se houver dois ou mais índices iguais, a função sinal é nula. Claro, se usarmos $\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n}$, o resultado final para o determinante será o mesmo. Outra observação relevante aqui é que o determinante é calculado considerando-se o produto de elementos de matriz de linhas e colunas diferentes, somando ou subtraindo esses produtos para todas as combinações de colunas com base no sinal da permutação correspondente.

OBS: Doravante não uso o sub-índice que indica o número de números no argumento de sgn , a menos que seja realmente necessário.

Exemplo: Para um *escalar*, o determinante é o próprio escalar. Para uma matriz de dimensão 2 teremos

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2)} sgn(j_1, j_2) A_{1, j_1} A_{2, j_2} = sgn(1, 2) A_{1, 1} A_{2, 2} + sgn(2, 1) A_{1, 2} A_{2, 1} = A_{1, 1} A_{2, 2} - A_{1, 2} A_{2, 1}. \quad (9)$$

Exercício: Escreva a expressão geral para o determinante de uma matriz de dimensão 3. **Exercício:** Para $c \in \mathbb{C}$ e $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, mostre que $\det(cA) = c^n \det(A)$.

2.1 Propriedades do determinante

Seja k_1, k_2, \dots, k_n uma lista qualquer de números do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Denotaremos

$$A(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (10)$$

a matriz cuja l -ésima linha é a k_l -ésima linha da matriz A . *Exemplo:* Claro, $A(1, 2, \dots, n) = A$. Um outro exemplo seria

$$A(2, 3, 2) = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Exercício: Escreva a matriz $A(3, 1, 2, 4)$.

Para essas matrizes modificadas, notemos que, em relação a A , substituímos as linhas $1, 2, \dots, n$ pelas k_1, k_2, \dots, k_n . Então o determinante fica

$$\det(A(k_1, k_2, \dots, k_n)) := \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} \dots A_{k_n, j_n}. \quad (12)$$

2.1.1 Efeito da troca de linhas no determinante

Podemos utilizar o determinante escrito como na última equação para verificar que ao trocarmos duas linhas de uma matriz, trocamos o sinal do seu determinante:

$$\det(A(\dots, k_p, \dots, k_q, \dots)) = \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots) \dots A_{k_p, j_p} \dots A_{k_q, j_q} \dots \quad (13)$$

$$= \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots) \dots A_{k_q, j_q} \dots A_{k_p, j_p} \dots \quad (14)$$

$$= \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots)} -\text{sgn}(\dots, j_q, \dots, j_p, \dots) \dots A_{k_q, j_q} \dots A_{k_p, j_p} \dots \quad (15)$$

$$= -\det(A(\dots, k_q, \dots, k_p, \dots)). \quad (16)$$

Exemplo: Considera $A(1, 2) = A$ e $A(2, 1)$. Temos que

$$\det(A(2, 1)) = \sum_{(j_1, j_2)} \text{sgn}(j_1, j_2) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} = \sum_{(j_1, j_2)} \text{sgn}(j_1, j_2) A_{2, j_1} A_{1, j_2} \quad (17)$$

$$= \text{sgn}(1, 2) A_{2,1} A_{1,2} + \text{sgn}(2, 1) A_{2,2} A_{1,1} = A_{2,1} A_{1,2} - A_{2,2} A_{1,1} \quad (18)$$

$$= -\det(A) = -\det(A(1, 2)). \quad (19)$$

Exercício: Verifique que $\det(A(2, 1, 3)) = -\det(A(1, 2, 3))$.

Consequências de $\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)) = -\det(A(\cdots, k_q, \cdots, k_p, \cdots))$:

1. Essa relação implica que

$$\det(A(k_1, k_2, \cdots, k_n)) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \cdots, k_n) \det(A). \quad (20)$$

Para verificar essa afirmação, assumamos que precisamos fazer N permutações de pares índices para obter $1, 2, \cdots, n$ a partir de k_1, k_2, \cdots, k_n . Lembre que trocas de pares de índices trocam o sinal da função sinal, i.e.,

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (-1)^N \operatorname{sgn}(1, 2, \cdots, n) = (-1)^N. \quad (21)$$

Como em cada uma dessas trocas trocamos duas linhas da matriz correspondente, e assim trocamos o sinal do determinante, teremos também que:

$$\det(A(k_1, k_2, \cdots, k_n)) = (-1)^N \det(A(1, 2, \cdots, n)) = (-1)^N \det(A), \quad (22)$$

com o sinal que estabelece a relação entre os determinantes dependendo somente se N é par ou ímpar. Com isso fica verificada nossa afirmação inicial. **Exercício:** Verifique que $\det(A(3, 2, 1)) = \operatorname{sgn}(3, 2, 1) \det(A)$.

2. Outra consequência do resultado anterior é que o determinante de uma matriz com **duas linhas iguais** é igual a zero. Para isso considere que as linhas k_p e k_q da matriz A são iguais. Assim

$$\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)) = \det(A(\cdots, k_q, \cdots, k_p, \cdots)) \quad (23)$$

$$= -\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)), \quad (24)$$

onde a primeira igualdade se deve ao fato das duas matrizes serem iguais e a segunda segue pela troca de linhas. Como para que $x = -x$ devemos ter $x = 0$, está demonstrada nossa segunda afirmação. **Exercício:** Verifique que $\det(A(2, 2, 3)) = 0$.

3. Se uma (ou mais) linha(s) de uma matriz pode ser escrita como uma **combinação linear** de outras de suas linhas, então o determinante dessa matriz é nulo. Na prática, como a troca de linhas só troca o sinal do determinante, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a primeira linha é combinação linear das próximas $r < n$ linhas, i.e., $A_{1,j_1} = \sum_{k=2}^r c_k A_{k,j_1}$ com $c_k \in \mathbb{C}$. Assim

$$\det(A) \propto \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \cdots, j_n) \sum_{k=2}^r c_k A_{k,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{r,j_r} \cdots A_{n,j_n} \quad (25)$$

$$= \sum_{k=2}^r c_k \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \cdots, j_n) A_{k,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{r,j_r} \cdots A_{n,j_n} \quad (26)$$

$$= \sum_{k=2}^r c_k (\det \text{ de uma matriz com duas linhas iguais}) \quad (27)$$

$$= 0. \quad (28)$$

2.2 Forma simétrica para o determinante

Vamos verificar que o determinante de uma matriz A pode ser escrito como

$$\det(A) = \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} \cdots A_{k_n, j_n}. \quad (29)$$

Começamos notando que para qualquer permutação (k_1, k_2, \dots, k_n) teremos

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1. \quad (30)$$

Teremos assim, de $\det(A(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(A)$, que:

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(A(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(A) = \det(A). \quad (31)$$

Seguindo, notamos que existem $n!$ permutações de n símbolos. Um exemplo utilizado com frequência para chegar nesse resultado é aquele de arranjar n bolinhas numeradas em n caixas. Para a primeira caixa temos n possibilidades para qual bolinha colocaremos aí. Um vez feita esta escolha, sobram $n - 1$ possibilidades para a segunda caixa. Seguindo com essa ideia vemos que o número total de arranjos é $n(n - 1)(n - 2) \cdots (2)(1) = n!$.

Dito isto, reescrevemos a equação acima como

$$\det(A) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n!} \det(A) \quad (32)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(A(k_1, k_2, \dots, k_n)) \quad (33)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} \cdots A_{k_n, j_n}, \quad (34)$$

como queríamos demonstrar.

Exercício: Usando a forma simétrica, escreva explicitamente o determinante de uma matriz de dimensão 3.

2.3 Determinante da transposta

A transposta de uma matriz $A = (A_{j,k})$ é denotada e definida por

$$A^T = ((A^T)_{j,k}) := (A_{k,j}). \quad (35)$$

Ou seja, obtemos A^T de A trocando suas linhas por suas colunas. Vamos verificar o importante resultado de que o determinante da transposta de uma matriz qualquer é igual ao seu determinante:

$$\det(A^T) = \det(A). \quad (36)$$

Para verificar esse resultado, usamos a forma simétrica do determinante

$$\det(A^T) = \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (A^T)_{k_1, j_1} (A^T)_{k_2, j_2} \cdots (A^T)_{k_n, j_n} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{j_1, k_1} A_{j_2, k_2} \cdots A_{j_n, k_n} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) A_{j_1, k_1} A_{j_2, k_2} \cdots A_{j_n, k_n} \quad (39)$$

$$= \det(A). \quad (40)$$

Exercício: Mostre que se trocamos duas colunas de uma matriz, trocamos o sinal do seu determinante. **Exercício:** Mostre que se duas (ou mais) colunas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo. **Exercício:** Mostre que se uma (ou mais) colunas de uma matriz é uma combinação linear de outras de suas colunas, então seu determinante é nulo.

2.4 Autovalores da transposta

Autovalores serão discutidos em mais profundidade mais adiante. Aqui basta saber que obtemos os autovalores a de uma matriz A resolvendo a equação característica

$$\det(A - a\mathbb{I}_n) = 0, \quad (41)$$

em que $\mathbb{I}_n = (\delta_{j,k})$ é a matriz identidade $n \times n$. Para a transposta da matrix A teremos que resolver $\det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n) = 0$. Como a transposta da soma de matrizes é a soma das transpostas (**exercício**) e a transposta da matriz identidade é a própria, podemos escrever

$$0 = \det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n) = \det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n^T) = \det((A - \alpha\mathbb{I}_n)^T) = \det(A - \alpha\mathbb{I}_n), \quad (42)$$

o que implica que $\alpha = a$, cqd. Note que na última igualdade usamos o fato de que $\det(X) = \det(X^T)$ pra qualquer matriz X .

Exercício: A *conjugada* de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é denotada $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e é definida por $A^* = ((A^*)_{j,k}) := (A_{j,k}^*)$. Usando as propriedades básicas dos números complexos, Verifique que $\det(A^*) = (\det(A))^*$.

Exercício: A *adjunta* de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é denotada por $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e é definida como sua transposta conjugada, i.e., $A^\dagger = ((A^\dagger)_{j,k}) := (A_{k,j}^*)$. Verifique que os autovalores de A^\dagger são iguais ao complexo conjugado dos autovalores de A .

2.5 Determinante do produto = produto dos determinantes

Vamos verificar que para $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ temos

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \quad (43)$$

Exercício: Verifique que o produto de duas matrizes $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e $Y \in \mathbb{C}^{m \times p}$ é uma matriz $Z \in \mathbb{C}^{n \times p}$ com elementos

$$Z_{j,k} = (XY)_{j,k} = \sum_{l=1}^m X_{j,l} Y_{l,k}. \quad (44)$$

Aplicando esse resultado para nosso caso especial, teremos

$$\det(AB) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (AB)_{1, j_1} (AB)_{2, j_2} \cdots (AB)_{n, j_n} \quad (45)$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) \sum_{k_1} A_{1, k_1} B_{k_1, j_1} \sum_{k_2} A_{2, k_2} B_{k_2, j_2} \cdots \sum_{k_n} A_{n, k_n} B_{k_n, j_n} \quad (46)$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A_{1, k_1} A_{2, k_2} \cdots A_{n, k_n} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) B_{k_1, j_1} B_{k_2, j_2} \cdots B_{k_n, j_n} \quad (47)$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A_{1, k_1} A_{2, k_2} \cdots A_{n, k_n} \det(B(k_1, k_2, \dots, k_n)) \quad (48)$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A_{1, k_1} A_{2, k_2} \cdots A_{n, k_n} \text{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(B) \quad (49)$$

$$= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \text{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) A_{1, k_1} A_{2, k_2} \cdots A_{n, k_n} \det(B) \quad (50)$$

$$= \det(A) \det(B). \quad (51)$$

Exercício: Escreva explicitamente o determinante do produto de duas matrizes de dimensão 2 e verifique que este coincide com o produto de seus determinantes.

2.6 Determinante da soma \neq soma dos determinantes

$$\det(A + B) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (A + B)_{1, j_1} (A + B)_{2, j_2} \cdots (A + B)_{n, j_n} \quad (52)$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (A_{1, j_1} + B_{1, j_1}) (A_{2, j_2} + B_{2, j_2}) \cdots (A_{n, j_n} + B_{n, j_n}) \quad (53)$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{1, j_1} A_{2, j_2} \cdots A_{n, j_n} \quad (54)$$

$$+ \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) B_{1, j_1} B_{2, j_2} \cdots B_{n, j_n} \quad (55)$$

$$+ \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (\text{termos com produtos de A's e B's}) \quad (56)$$

$$= \det(A) + \det(B) + (\text{termo, em geral, não nulo}). \quad (57)$$

Se esse resultado não fosse assim, ele teria uma **implicação** séria sobre os autovalores da soma de matrizes. Considere que $\det(A - a\mathbb{I}) = 0$ e $\det(B - b\mathbb{I}) = 0$. Se $\det(X + Y) = \det(X) + \det(Y)$ teríamos que o autovalor da soma seria a soma dos autovalores, pois

$$0 = \det(A - a\mathbb{I}) + \det(B - b\mathbb{I}) = \det(A - a\mathbb{I} + B - b\mathbb{I}) \quad (58)$$

$$= \det((A + B) - (a + b)\mathbb{I}). \quad (59)$$

Exercício: Encontre um exemplo de matrizes de dimensão 2 tais que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ e outro exemplo para o qual $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

2.7 Expansão em cofatores para o determinante

2.7.1 Lema

Sejam $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrizes que são iguais a menos da k -ésima linha. Essa linha de C é uma combinação linear das linhas correspondentes de A e B , i.e.,

$$C_{k,j_k} = \alpha A_{k,j_k} + \beta B_{k,j_k} \quad (60)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Para estas matrizes, temos

$$\det(C) = \alpha \det(A) + \beta \det(B). \quad (61)$$

Prova No te que concentramos na linha k , mas fazemos aparecer outras linhas que são comuns a todas as matrizes:

$$\det(C) = \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \operatorname{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots C_{p,j_p} \cdots C_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots \quad (62)$$

$$= \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \operatorname{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots C_{p,j_p} \cdots (\alpha A_{k,j_k} + \beta B_{k,j_k}) \cdots C_{q,j_q} \cdots \quad (63)$$

$$= \alpha \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \operatorname{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots C_{p,j_p} \cdots A_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots \quad (64)$$

$$+ \beta \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \operatorname{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots C_{p,j_p} \cdots B_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots \quad (65)$$

$$= \alpha \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \operatorname{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots A_{p,j_p} \cdots A_{k,j_k} \cdots A_{q,j_q} \cdots \quad (66)$$

$$+ \beta \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \operatorname{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots B_{p,j_p} \cdots B_{k,j_k} \cdots B_{q,j_q} \cdots \quad (67)$$

$$= \alpha \det(A) + \beta \det(B). \quad (68)$$

Exercício: Verifique que se A, B, C são matrizes iguais a menos da k -ésima coluna e essa coluna de C é uma combinação linear das linhas correspondentes de A e B , i.e., $C_{j_k,k} = \alpha A_{j_k,k} + \beta B_{j_k,k}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Para estas matrizes, temos $\det(C) = \alpha \det(A) + \beta \det(B)$.

2.7.2 Lema

Seja

$$A = \begin{bmatrix} B & * \\ \mathbf{O} & b \end{bmatrix} \quad (69)$$

uma matriz $n \times n$, onde B é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$, \mathbf{O} é uma matriz linha nula, $1 \times (n-1)$, e $*$ é uma matriz coluna qualquer, $(n-1) \times 1$. Segue que

$$\det(A) = b \det(B). \quad (70)$$

Prova Começamos usando o determinante em sua forma "usual"

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n)} \operatorname{sgn}_n(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n) A_{1,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{n-1,j_{n-1}} A_{n,j_n} \quad (71)$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n)} \operatorname{sgn}_n(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n) B_{1,j_1} B_{2,j_2} \cdots B_{n-1,j_{n-1}} b \delta_{n,j_n} \quad (72)$$

$$= b \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})} \operatorname{sgn}_n(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, n) B_{1,j_1} B_{2,j_2} \cdots B_{n-1,j_{n-1}} \quad (73)$$

$$= b \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})} (-1)^{n-n} \operatorname{sgn}_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) B_{1,j_1} B_{2,j_2} \cdots B_{n-1,j_{n-1}} \quad (74)$$

$$= b \det(B). \quad (75)$$

Exercício: Prove que para $A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{O} \\ * & b \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times n$, com B é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$, \mathbf{O} é uma matriz coluna nula, $(n-1) \times 1$, e $*$ é uma matriz linha qualquer, $1 \times (n-1)$, teremos $\det(A) = b \det(B)$.

Exercício: Utilize o resultado deste último lema para verificar que o determinante de uma matrix triangular superior,

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} & \cdots & T_{1,n} \\ 0 & T_{2,2} & T_{2,3} & \cdots & T_{2,n} \\ 0 & 0 & T_{3,3} & \cdots & T_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (76)$$

é dado pelo produtos dos elementos na diagonal principal:

$$\det(T) = T_{1,1} T_{2,2} T_{3,3} \cdots T_{n,n} =: \prod_{j=1}^n T_{j,j}. \quad (77)$$

2.7.3 Menor de uma matriz

Por definição, o menor $A^{(j,k)} \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é obtido excluindo-se a j -ésima linha e k -ésima coluna de A . *Exemplo:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 17 & 23 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Exercício: Para essa matriz, obtenha o menor $A^{(2,3)}$.

2.7.4 Matriz cofator

Por definição, a matriz cofator $\operatorname{cof}(A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é obtida como segue

$$\operatorname{cof}(A) = (\operatorname{cof}(A)_{j,k}) = \left((-1)^{j+k} \det(A^{(j,k)}) \right). \quad (79)$$

Exemplo: Para a matriz do último exemplo, termos e.g. que

$$\text{cof}(A)_{1,3} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 17 & 19 \end{bmatrix} = (1)(7 * 19 - 11 * 17) = -54. \quad (80)$$

Exercício: Calcule $\text{cof}(A)_{2,1}$.

2.8 Teorema (expansão em cofatores)

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com $n \geq 2$. Podemos escrever o determinante dessa matriz como

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k} = \sum_{j=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}, \quad (81)$$

com a primeira sendo chamada de expansão na linha j e a segunda é denominada expansão na coluna k .

Prova Considera um conjunto de n matrizes $B^{(k)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ que são iguais a A a menos da j -ésima linha, cujos elementos são todos nulos a menos daquele na coluna k , que é igual a $A_{j,k}$. Então, se denotamos a j -ésima linha de A por $\langle A_j |$ e similarmente para a j -ésima linha de $B^{(k)}$, $\langle B_j^{(k)} |$, teremos que

$$\langle A_j | := [A_{j,1} \quad A_{j,2} \quad \cdots \quad A_{j,n}] \quad (82)$$

$$= (1) [A_{j,1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0] + (1) [0 \quad A_{j,2} \quad \cdots \quad 0] + \cdots + (1) [0 \quad 0 \quad \cdots \quad A_{j,n}] \quad (83)$$

$$=: (1) \langle B_j^{(1)} | + (1) \langle B_j^{(2)} | + \cdots + (1) \langle B_j^{(n)} | \quad (84)$$

$$= \sum_{k=1}^n (1) \langle B_j^{(k)} |. \quad (85)$$

Mas, em vistas do penúltimo lema que provamos, teremos que o determinante de A é a combinação linear dos determinantes das matrizes $B^{(k)}$, com todos os coeficientes iguais a um:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n \det(B^{(k)}). \quad (86)$$

Para continuar com a prova faremos uso último lema que provamos. Lembrando, lá tínhamos uma matriz cuja n -ésima linha era nula a menos do elemento na n -ésima coluna. Precisamos colocar todas as matrizes $B^{(k)}$ nessa forma:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} & A_{j-1,k} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} & A_{j+1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} & A_{n,k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} \end{bmatrix}, \quad (89)$$

onde para a primeira passagem fizemos $n - j$ trocas de linhas e para a segunda passagem fizemos $n - k$ trocas de colunas.

Como para cada troca entre linhas ou colunas trocamos o sinal do determinante, teremos

$$\det(B^{(k)}) = (-1)^{n-k}(-1)^{n-j} \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} & A_{j-1,k} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} & A_{j+1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} & A_{n,k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$= (-1)^{2n}(-1)^{-(j+k)} A_{j,k} \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$= \frac{1}{(-1)^{j+k}} A_{j,k} \det(A^{(j,k)}) = (-1)^{j+k} A_{j,k} \det(A^{(j,k)}) = A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}. \quad (92)$$

Com isso concluímos a verificação de que $\det(A) = \sum_{k=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}$.

Exercício: Prove que $\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}$.

Exemplo: Determinante de uma matriz triangular inferior

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,1} & T_{n-1,2} & T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} \quad (93)$$

Expande em cofatores na primeira linha

$$\det(T) = T_{1,1} \text{cof}(T)_{1,1} + \sum_{k=2}^n 0 \text{cof}(T)_{1,k} = T_{1,1} (-1)^{1+1} \det(T^{(1,1)}) \quad (94)$$

$$= T_{1,1} \det \begin{bmatrix} T_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{3,2} & T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,2} & T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,2} & T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} = T_{1,1} T_{2,2} (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$\vdots \quad (96)$$

$$= \prod_{j=1}^n T_{j,j}. \quad (97)$$

2.9 Fórmula para a inversa

A *inversa* de uma matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é denotada por A^{-1} e é definida pelas igualdades:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I}_n, \quad (98)$$

com \mathbb{I}_n sendo a matriz identidade $n \times n$.

2.9.1 Teorema

A^{-1} existe se e somente se $\det(A) \neq 0$. Se $\det(A) \neq 0$, os elementos de matriz da inversa podem ser escritos como:

$$(A^{-1})_{j,k} = \frac{\text{cof}(A)_{k,j}}{\det(A)}. \quad (99)$$

Ou seja, identificamos a inversa de uma matriz A com a transposta da sua matriz de cofatores dividida pelo determinante de A .

Prova Começamos assumindo que a inversa existe. Então teremos que

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \det(A), \quad (100)$$

o que implica que o determinante da matriz A não pode ser nulo, i.e., $\exists A^{-1} \Rightarrow \det(A) \neq 0$.

Agora assumimos que $\det(A) \neq 0$. Usando a expansão em cofatores podemos escrever

$$1 = \frac{\det(A)}{\det(A)} = \frac{\sum_{k=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}}{\det(A)} =: \sum_{k=1}^n A_{j,k} (A^{-1})_{k,j} = (AA^{-1})_{j,j}. \quad (101)$$

Exercício: Use a definição $(A^{-1})_{j,k} := \text{cof}(A)_{k,j} / \det(A)$ e o mesmo tipo de argumento para mostrar que $(A^{-1}A)_{j,j} = 1$.

Para provar que essa definição realmente fornece a inversa, falta ainda verificarmos que $(A^{-1}A)_{j,k} = 0$ se $j \neq k$. Pra isso, vamos encontrar uma matriz cujo determinante possa ser escrito como nessa expressão mas que sabemos ser nulo. Consideremos uma matriz B que é igual a A a menos da coluna k que é igual à coluna l de A (com $k > l$). Olhando para

$$B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & B_{j-1,l-1} & B_{j-1,l} & B_{j-1,l+1} & \cdots & B_{j-1,k-1} & B_{j-1,k} & B_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & B_{j,l-1} & B_{j,l} & B_{j,l+1} & \cdots & B_{j,k-1} & B_{j,k} & B_{j,k+1} & \cdots \\ \cdots & B_{j+1,l-1} & B_{j+1,l} & B_{j+1,l+1} & \cdots & B_{j+1,k-1} & B_{j+1,k} & B_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j,l-1} & A_{j,l} & A_{j,l+1} & \cdots & A_{j,k-1} & A_{j,l} & A_{j,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (103)$$

vemos que os menores

$$B^{(j,k)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (104)$$

e

$$B^{(j,l)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (105)$$

são iguais a menos de $k - l$ trocas de colunas. Como cada troca entre colunas troca o sinal do determinante, teremos a seguinte expansão em cofatores na coluna l de B :

$$0 = \det(B) = \sum_j B_{j,l} \operatorname{cof}(B)_{j,l} = \sum_j B_{j,l} (-1)^{j+l} \det(B^{(j,l)}) \quad (106)$$

$$= \sum_j A_{j,l} (-1)^{j+l} (-1)^{k-l} \det(B^{(j,k)}) = \sum_j A_{j,l} (-1)^{j+k} \det(A^{(j,k)}) = \sum_j A_{j,l} \operatorname{cof}(A)_{j,k} \quad (107)$$

$$= \det(A) \sum_j A_{j,l} \operatorname{cof}(A)_{j,k} / \det(A) = \det(A) \sum_j A_{j,l} (A^{-1})_{k,j} = \det(A) \sum_j (A^{-1})_{k,j} A_{j,l} \quad (108)$$

$$= \det(A) (A^{-1}A)_{k,l}, \quad (109)$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)_{k,l} = 0. \quad (110)$$

Vemos assim que $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, com $(A^{-1})_{j,k} := \operatorname{cof}(A)_{k,j} / \det(A)$, completando assim a prova do teorema.

Exercício: Usando o mesmo tipo de procedimento, verifique que $(AA^{-1})_{k,l} = 0$ para $k \neq l$.

Exemplo Consideremos como exemplo a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, para a qual $\det(A) = -1$. Nesse caso

$$(A^{-1})_{1,1} = \operatorname{cof}(A)_{1,1} / \det(A) = -(-1)^{1+1} \det(A^{1,1}) = -7, \quad (111)$$

$$(A^{-1})_{1,2} = \operatorname{cof}(A)_{2,1} / \det(A) = -(-1)^{2+1} \det(A^{2,1}) = 3, \quad (112)$$

$$(A^{-1})_{2,1} = \operatorname{cof}(A)_{1,2} / \det(A) = -(-1)^{1+2} \det(A^{1,2}) = 5, \quad (113)$$

$$(A^{-1})_{2,2} = \operatorname{cof}(A)_{2,2} / \det(A) = -(-1)^{2+2} \det(A^{2,2}) = -2. \quad (114)$$

Então $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$. Para verificação considera

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Exercício: Usando a relação com a matriz de cofatores, calcule a inversa da matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$.

2.9.2 Inversa do produto

Consideremos duas matrizes quadradas A e B invertíveis. Teremos assim que

$$(AB)^{-1}(AB) = \mathbb{I} \Rightarrow (AB)^{-1}ABB^{-1} = \mathbb{I}B^{-1} \quad (116)$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1}A\mathbb{I}A^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1}\mathbb{I} = B^{-1}A^{-1}. \quad (117)$$

Ou seja,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (118)$$

2.10 Sistemas de equações lineares não homogêneas (SELNH)

Considere um SELNH

$$A|x\rangle = |y\rangle, \quad (119)$$

com $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $|x\rangle, |y\rangle \in \mathbb{C}^n$ com $|y\rangle \neq |\emptyset\rangle$, onde $|\emptyset\rangle$ é o vetor nulo. Determinar a solução desse SELNH é obter $|x\rangle$ dada a matriz de coeficientes A e o vetor de não homogeneidade $|y\rangle$. Um caso especial onde podemos obter essa solução, é quando a matriz de coeficientes possui inversa. Nesse caso

$$|x\rangle = A^{-1}A|x\rangle = A^{-1}|y\rangle. \quad (120)$$

Uma regra mnemônica bem conhecida nesse contexto é a **regra de Kramer**, que é obtida como segue. Considere

$$|x\rangle_j = (A^{-1}|y\rangle)_j = \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{j,k} |y\rangle_k = \sum_{k=1}^n \frac{\text{cof}(A)_{k,j}}{\det(A)} |y\rangle_k = \frac{\sum_{k=1}^n |y\rangle_k (-1)^{k+j} \det(A^{(k,j)})}{\det(A)} \quad (121)$$

$$=: \frac{\sum_{k=1}^n K_{k,j}^{(j)} \text{cof}(K^{(j)})_{k,j}}{\det(A)} = \frac{\det(K^{(j)})}{\det A}, \quad (122)$$

onde definimos as *matrizes de Kramer*:

$$K^{(j)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & K_{k-1,j-1}^{(j)} & K_{k-1,j}^{(j)} & K_{k-1,j+1}^{(j)} & \cdots \\ \cdots & K_{2,j-1}^{(j)} & K_{2,j}^{(j)} & K_{2,j+1}^{(j)} & \cdots \\ \cdots & K_{k+1,j-1}^{(j)} & K_{k+1,j}^{(j)} & K_{k+1,j+1}^{(j)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{k-1,j-1} & A_{k-1,j} & A_{k-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & A_{2,j-1} & A_{2,j} & A_{2,j+1} & \cdots \\ \cdots & A_{k+1,j-1} & A_{k+1,j} & A_{k+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (123)$$

que são obtidas substituindo-se a j -ésima coluna de A por $|y\rangle$.

Exemplo Considere seguinte SELNH:

$$2|x\rangle_1 + 3|x\rangle_2 = 5, \quad (124)$$

$$7|x\rangle_1 + 11|x\rangle_2 = 13. \quad (125)$$

Notemos primeiro que $\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} = 1$. A solução desse SELNH é

$$|x\rangle_1 = \frac{\det(K^{(1)})}{\det(A)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}}{1} = 16, \quad (126)$$

$$|x\rangle_2 = \frac{\det(K^{(2)})}{\det(A)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}}{1} = -9. \quad (127)$$

Verificação: $2(16) + 3(-9) = 5$ e $7(16) + 11(-9) = 13$.

Exercício: Obtenha a solução, via regra de Kramer, de um SELNH especificado pela matrix de

coeficientes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$ e pelo vetor de não homogeneidade $|y\rangle = \begin{bmatrix} 29 \\ 31 \\ 37 \end{bmatrix}$.

2.11 Método de eliminação de Gauss

Esse método é utilizado para colocar uma matriz na forma triangular através de operações que não alteram seu determinante. Note que depois de feito isso, precisamos de somente um produto de n números para calcular o determinante, em lugar dos $n!$ produtos na definição original. Vamos denotar a j -ésima linha de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ por $\langle L_j^A |$. Consideremos que substituímos em uma linha de A a combinação linear dessa linha com uma ou mais das suas outras linhas, i.e.,

$$\langle L_j^A | \rightarrow \langle L_j^A | + c \langle L_l^A | \quad (128)$$

com $c \in \mathbb{C}$. O determinante de A não muda por esse tipo de operação pois

$$\sum_{(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots)} \text{sgn}(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots) \dots A_{j-1, k_{j-1}} (A_{j, k_j} + c A_{l, k_j}) A_{j+1, k_{j+1}} \dots A_{l, k_l} \dots \quad (129)$$

$$= \sum_{(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots)} \text{sgn}(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots) \dots A_{j-1, k_{j-1}} A_{j, k_j} A_{j+1, k_{j+1}} \dots A_{l, k_l} \dots \quad (130)$$

$$+ c \sum_{(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots)} \text{sgn}(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots) \dots A_{j-1, k_{j-1}} A_{l, k_j} A_{j+1, k_{j+1}} \dots A_{l, k_l} \dots \quad (131)$$

$$= \det(A) + (\det \text{ de uma matriz com 2 linhas iguais}) \quad (132)$$

$$= \det(A). \quad (133)$$

2.11.1 Algoritmo

Considera

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & A_{n-1,3} & \dots & A_{n-1,n} \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (134)$$

Vamos deixar essa matriz na forma triangular superior sem mudar seu determinante. Se $A_{1,1} = 0$, verifica se há $A_{j,1} \neq 0$ para algum $j = 2, \dots, n$. Se não há, então $\det(A) = 0$. Se há, troca $|L_1^A\rangle \leftrightarrow |L_j^A\rangle$. Tendo $A_{1,1} \neq 0$, zeramos todos os elementos abaixo de $A_{1,1}$ fazendo as substituições: $|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,1}/A_{1,1})|L_1^A\rangle$ para $j = 2, \dots, n$. Seguindo, para a nova matriz, se $A_{2,2} \neq 0$, zeramos os elementos abaixo de $A_{2,2}$ fazendo $|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,2}/A_{2,2})|L_2^A\rangle$ para $j = 3, \dots, n$. E seguimos assim até $A_{n-1,n-1}$. De forma geral,

$$|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,k}/A_{k,k})|L_k^A\rangle \text{ para } j = k+1, \dots, n. \quad (135)$$

Por fim, o produto dos elementos na diagonal principal nos fornecerão o determinante. Diz que para entender realmente algum cálculo, etc, precisamos programá-lo. Seguindo esse dito, o algoritmo de Gauss está implementado no código Sympy da função `det_gauss`.

```
In [60]: def det_gauss(A):
    n = A.shape[0] # = A.shape[1]
    det = 1
    T = zeros(n,n)
    for k in range(0,n-1):
        if A[k,k] == 0:
            for l in range(k+1,n):
                if A[l,k] != 0:
                    T[n-1,:] = A[k,:]
                    A[k,:] = A[l,:]
                    A[l,:] = T[n-1,:]
                    det *= -1
                    break
        if A[k,k] == 0:
            return 0
        T[k,:] = A[k,:]
        for j in range(k+1,n):
            T[j,:] = A[j,:] - (A[j,k]/A[k,k])*A[k,:]
        A = T
    for j in range(0,n):
        det *= T[j,j]
    return det
```

```
In [66]: #A = Matrix([[2,3],[5,7]])
#A = Matrix([[2,3,5],[7,11,13],[17,19,23]])
a,b,c,d = symbols("a b c d"); A = Matrix([[a,b],[c,d]])
#det(A)
det_gauss(A)
```

Out[66]:

$$a \left(d - \frac{bc}{a} \right)$$

```
In [62]: def triangular(A):
    n = A.shape[0] # = A.shape[1]
    T = zeros(n,n)
    for k in range(0,n-1):
        if A[k,k] == 0:
            for l in range(k+1,n):
                if A[l,k] != 0:
                    T[n-1,:] = A[k,:]
                    A[k,:] = A[l,:]
                    A[l,:] = T[n-1,:]
                    break
```

```

    T[k,:] = A[k,:]
    for j in range(k+1,n):
        T[j,:] = A[j,:] - (A[j,k]/A[k,k])*A[k,:]
    A = T
    return T

```

In [67]: triangular(A)

Out[67]:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

Exercício: Usando o método de Gauss, coloque a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$ na forma triangular e calcule seu determinante. Use os códigos relacionados para verificar seus cálculos.