07_Lorentz

October 30, 2019

0.1 Notas de aula: Teoria de Grupos, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

[1]:
```
%run /Users/jonasmaziero/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb
```

1 O grupo de Lorentz

1.1 Mecânica Newtoniana (MN) e transformações de Galilei (TG)

1.1.1 Procedimentos gerais da mecânica:

- A partir do movimento, de medidas de posição e de tempo, podemos inferir as forças:

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \rightarrow \vec{F}(t) = m\vec{a}(t). \tag{1}$$

- A partir das forças, e condições iniciais, podemos prever o movimento:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'. \tag{2}$$

1.1.2 Descrição do movimento por observadores em movimento relativo

Consideremos dois observadores O e O' em movimento relativo com velocidade constante $\vec{V}$, como ilustrado na figura abaixo.

Postulado da MN: O tempo é absoluto, i.e., o tempo medido por todos os relógios é o mesmo, independente de sua velocidade. Aqui $t = t'$.

Pela soma vetorial obteremos as chamadas *transformações de Galilei*, que relacionam as coordenadas espaço-temporais de uma partícula em diferentes referenciais inerciais (RIs):

$$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}', \tag{3}$$
$$\therefore\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t. \tag{4}$$

OBS: Assumimos *geometria Euclidiana* em todas as discussões desse arquivo.

Não é difícil verificar que a $2^{\underline{a}}$ lei de Newton é invariante por TG:

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} \tag{5}$$
$$= m\frac{d^2(\vec{r} - \vec{V}t)}{dt^2} = m\frac{d(\vec{v} - \vec{V})}{dt} = m(\vec{a} - \vec{0}) = \vec{F}. \tag{6}$$

1.2 Mecânica Einsteiniana (ME) e transformações de Lorentz (TL)

Existiam duas motivações fortes para o desenvolvimento de uma mecânica melhor que a Newtoniana. As eqs. de Maxwell não são invariantes por TG (**verifique**). Ademais o experimento de Michelson e Morley indicou que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os referenciais.

1.2.1 Postulados da teoria da *relatividade restrita*:

P1. RIs devem ser equivalemtes no que concerne as leis físicas. **P2.** A velocidade da luz no vácuo é a mesma, c, quando medida em todos os RIs.

1.2.2 Tranformações de Lorentz "1D"

Esses postulados nos fornecerão relações distintas das TG para as coordenadas de uma partícula em diferentes RIs. Aqui assumiremos movimento relativo entre os RIs em uma única direção, x. Nesse caso as TG ficam

$$x = x' + V_x t' = x' + Vt \;\therefore\; x' = x - Vt, \tag{7}$$
$$y = y' + V_y t' = y' + 0t, \;\therefore\; y' = y, \tag{8}$$
$$z = z' + V_z t' = z' + 0t, \;\therefore\; z' = z. \tag{9}$$

Uma possibilidade para obtermos as tranformações de Lorentz é usar uma *correção relativística* global γ para as TG, i.e., teríamos $y = y'$, $z = z'$ e

$$x' = \gamma(x - Vt). \tag{10}$$

Por P1 teremos

$$x = \gamma(x' + Vt'). \tag{11}$$

OBS. Aqui não assumimos que o tempo é absoluto, como era o caso na mecânica Newtoniana. Manipulando essas equações,

$$x = \gamma(x' + Vt') = \gamma(\gamma(x - Vt) + Vt') = \gamma^2(x - Vt) + \gamma Vt'. \tag{12}$$

Com isso obtemos a seguinte relação entre o tempo medido pelo observador O' com aquele medido por O:

$$t' = \gamma \left(t + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2 V} x \right). \tag{13}$$

Exercício: Verifique que

$$t = \gamma \left(t' - \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2 V} x' \right), \tag{14}$$

que é compatível com P1.

Obtendo γ O que ainda nos falta é obter a correção relativística γ. Pra isso podemos utilizar o seguinte experimento de pensamento. Quando O e O' estão na mesma posição, um pulso esférico de luz é emitido. Por P2 devemos ter

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \tag{15}$$
$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \tag{16}$$

Agora substituímos as coordenadas de um referencial em relação às do outro, manipulamos a equação obtida e exigimos que ela seja equivalente à outra equação. Para R'^2:

$$(\gamma(x - Vt))^2 + y^2 + z^2 = c^2((\gamma(t - (1-\gamma^2)x/\gamma^2 V))^2) \tag{17}$$
$$\therefore \gamma^2 x^2 + \gamma^2 V^2 t^2 - \gamma^2 2xVt + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2 t^2 + c^2\gamma^2(1-\gamma^2)^2 x^2/\gamma^4 V^2 - c^2\gamma^2 2t(1-\gamma^2)x/\gamma^2 V \tag{18}$$
$$\therefore Ax^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2(1 - V^2/c^2)c^2 t^2 + Bxt. \tag{19}$$

Exercício: Obtenha A e B.

Pela equivalência com a eq. para R^2 devemos ter $A = 1$, $B = 0$ e

$$\gamma^2(1 - V^2/c^2) = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma(V). \tag{20}$$

Exercício: Verifique que

$$\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} = -\frac{V^2}{c^2}, \tag{21}$$

e assim

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \text{ e } t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right). \tag{22}$$

1.3 Grupo de Lorentz

Para obter os elementos do grupo de Lorentz, primeiramente representaremos as coordenadas espaço-temporais de uma partícula como vetores coluna (quadrivetores):

$$\rho = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix},\ \rho' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Pode-se verificar que (**exercício**):

$$\rho' = \Lambda(V)\rho \tag{24}$$

com

$$\Lambda(V) = \begin{bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\gamma(V)V/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(V)V/c & 0 & 0 & \gamma(V) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

que serão os elementos do grupo de Lorentz, cuja operação de composição é o produto matricial.

1.3.1 Verificação da estrutura de grupo

Usando o código abaixo, podemos verificar que o elemento identidade é $\Lambda(0) = \mathbb{I}_4$ e que o elemento inverso de $\Lambda(V)$ é $\Lambda(-V)$, i.e., $\Lambda(V)\Lambda(-V) = \Lambda(0)$. Associatividade vem da associatividade do produto matricial. Quanto à composição, temos que

$$\Lambda(V)\Lambda(V') = \begin{bmatrix} \gamma(V)\gamma(V')(1+VV'/c^2) & 0 & 0 & -\gamma(V)\gamma(V')(V+V')/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(V)\gamma(V')(V+V')/c & 0 & 0 & \gamma(V)\gamma(V')(1+VV'/c^2) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Precisamos verificar se $\Lambda(V)\Lambda(V') = \Lambda(V'')$.

[2]:
```
# usa V'=v
L, g, V, c, v = symbols("Lambda gamma V c v")
def g(V): # correção relativística
    return 1/sqrt(1-V**2/c**2)
def L(V): # elementos do grupo de Lorentz
    return Matrix([[g(V),0,0,-g(V)*V/c],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[-g(V)*V/
 ↪c,0,0,g(V)]])
#L(V)
#L(0) # identidade
#simplify(L(V)*L(-V)) # inverso
```

```
L(V)*L(v) # composição
```

[2]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{V v}{c^{2} \sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}} & 0 & 0 & -\frac{V}{c \sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}}-\frac{v}{c \sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V}{c \sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}}-\frac{v}{c \sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}} & 0 & 0 & \frac{V v}{c^{2} \sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}}\end{matrix}\right]$$

Aplicando a composição relativística de velocidades descrita abaixo para os três referenciais como movimentos relativos como na figura

teremos que a velocidade de O'' (a partícula nesse caso) em relação a O será ($u_y = u_z = 0$ aqui e $V'' = u$ e $V' = u'$) (**exercício**):

$$V'' = \frac{V + V'}{1 + VV'/c^2}. \tag{27}$$

[3]:
```
# usa V''=U
def U(V,v):
    return (V+v)/(1+V*v/c**2)
#U(V,v)
#L(U(V,v))
simplify(L(U(V,v))-L(V)*L(v))
```

[3]:

$$\left[\begin{matrix}-\frac{V v}{c^{2} \sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(V+v)^{2}}{c^{2}\left(\frac{V v}{c^{2}}+1\right)^{2}}}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}} \sqrt{-\frac{V^{2}}{c^{2}}+1}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{(V+v)\left(-c^{2} \sqrt{\frac{1}{c^{2}}\left(-V^{2}+c^{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{c^{2}}\left(c^{2}-v^{2}\right)}+\sqrt{\frac{1}{(V v+c^{2})^{2}}\left(-c^{2}(V+v)^{2}+\left(V v+c^{2}\right)^{2}\right)}\left(V v+c^{2}\right)\right)}{c \sqrt{\frac{1}{c^{2}}\left(-V^{2}+c^{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{c^{2}}\left(c^{2}-v^{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{(V v+c^{2})^{2}}\left(-c^{2}(V+v)^{2}+\left(V v+c^{2}\right)^{2}\right)}\left(V v+c^{2}\right)} & 0 & 0 & \cdots\end{matrix}\right]$$

Nesse caso o código não nos ajudou muito. Então verifiquemos "na mão mesmo" que $\Lambda(V'') = \Lambda(V)\Lambda(V')$. Para isso devemos ter que

$$\gamma(V'') = \gamma(V)\gamma(V')(1 + VV'/c^2), \qquad (\star) \tag{28}$$

$$-\gamma(V'')V''/c = -\gamma(V)\gamma(V')(V + V')/c. \qquad (\star\star) \tag{29}$$

Vamos assumir que a Eq. $(\star)$ está correta e obter dela a relação certa para V''. Começamos invertendo $(\star)$ e a elevando ao quadrado:

$$\frac{(1+VV'/c^2)^2}{\gamma(V'')^2} = \frac{1}{\gamma(V)^2\gamma(V')^2} \tag{30}$$
$$\Rightarrow (1+VV'/c^2)^2(1-V''^2/c^2) = (1-V^2/c^2)(1-V'^2/c^2) \tag{31}$$
$$\Rightarrow 1+2VV'/c^2+V^2V'^2/c^4-(V''^2/c^2)(1+VV'/c^2)^2 = 1-V'^2/c^2-V^2/c^2+V^2V'^2/c^4 \tag{32}$$
$$\Rightarrow V'^2+V^2+2VV' = (V+V')^2 = V''^2(1+VV'/c^2)^2 \tag{33}$$
$$\Rightarrow V'' = (V+V')/(1+VV'/c^2), \tag{34}$$

que é a expressão correta.

Exercício: Verifique que a igualdade na Eq. $(\star\star)$ é verdadeira.

Com isso mostramos fechamento para o grupo de Lorentz.

1.3.2 Composição relativística de velocidades

Na mecânica Newtoniana, se uma partícula possui velocidade $\vec{u}(\vec{u}')$ em relação a um referencial inercial $O(O')$ e a velocidade relativa dos referenciais é $\vec{V}=(V,0,0)$, então (**verificar**)

$$\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = (u_x + V, u_y, u_z). \tag{35}$$

Vejamos como fica essa relação no caso relativístico. Considere a figura acima com movimento relativo dos referenciais somente na direção x. A velocidade da partícula em relação a O é:

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) = (u_x(t), u_y(t), u_z(t)). \tag{36}$$

Em relação a O'

$$\vec{u}'(t') = \frac{d\vec{r}'(t')}{dt'} = \left(\frac{dx'(t')}{dt'}, \frac{dy'(t')}{dt'}, \frac{dz'(t')}{dt'}\right) = (u'_x(t'), u'_y(t'), u'_z(t')). \tag{37}$$

Usando $dx' = \gamma(dx - Vdt)$, $dy' = dy$, $dz' = dz$ e $dt' = \gamma(dt - (V/c^2)dx)$ obtemos

$$u'_x = \frac{dx'(t')}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma(dt-(V/c^2)dx)} = \frac{u_x - V}{1 - u_xV/c^2}, \tag{38}$$
$$u'_y = \frac{dy'(t')}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt-(V/c^2)dx)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_xV/c^2)}, \tag{39}$$
$$u'_z = \frac{dz'(t')}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt-(V/c^2)dx)} = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_xV/c^2)}. \tag{40}$$

2 Grupo de Poincaré

2.1 Transformações de Lorentz ”3D”

Considere a figura abaixo:

Vamos decompor os vetores posição em termos de suas componentes paralelas e ortogonais à velocidade relativa $\vec{V}$ entre os referenciais inerciais O e O':

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel \text{ e } \vec{r'} = \vec{r'}_\perp + \vec{r'}_\parallel. \tag{41}$$

Como no caso 1D, aqui as componentes perpendiculares a $\vec{V}$ não são afetadas pelo movimento relativo. Para as componentes paralelas a $\vec{V}$ teremos

$$\vec{r'}_\parallel = \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t), \tag{42}$$

$$\vec{r}_\parallel = \gamma(\vec{r'}_\parallel + \vec{V}t').\text{(por P1)} \tag{43}$$

Substituindo uma equação na outra obteremos

$$\vec{r}_\parallel = \gamma(\gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t) + \vec{V}t') = \gamma^2\vec{r}_\parallel - \gamma^2\vec{V}t + \gamma\vec{V}t', \tag{44}$$

$$\therefore (1-\gamma^2)\vec{V}\cdot\vec{r}_\parallel + \gamma^2\vec{V}\cdot\vec{V}t = \gamma\vec{V}\cdot\vec{V}t', \tag{45}$$

$$\therefore t' = \gamma\left(t - \frac{\gamma^2-1}{\gamma}\frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{V^2}\right). \tag{46}$$

Pelo postulado P1 teremos (**verifique**) $t = \gamma\left(t' + \frac{\gamma^2-1}{\gamma}\frac{\vec{V}\cdot\vec{r'}}{V^2}\right)$.

Para obter γ, usamos o postulado P2 aplicado ao experimento do pulso esférico de luz:

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r_\perp^2 + r_\parallel^2 = c^2t^2 \text{ e } \vec{r'}\cdot\vec{r'} = c^2t'^2. \tag{47}$$

Assim, usando $\vec{V}\cdot\vec{r} = Vr_\parallel$, teremos

$$\vec{r'}\cdot\vec{r'} = [\vec{r}_\perp + \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t)]\cdot[\vec{r}_\perp + \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t)] = r_\perp^2 + 0 + 0 + \gamma^2(r_\parallel^2 - 2\vec{r}_\parallel\cdot\vec{V}t + V^2t^2) \tag{48}$$

$$= c^2t'^2 = c^2\gamma^2\left(t - \frac{\gamma^2-1}{\gamma}\frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{V^2}\right)^2 = c^2\gamma^2\left(t^2 - 2\frac{\gamma^2-1}{\gamma}\frac{r_\parallel}{V}t + \frac{(\gamma^2-1)^2}{\gamma^2}\frac{r_\parallel^2}{V^2}\right). \tag{49}$$

$$\Rightarrow r_\perp^2 + \left(\gamma^2 - \frac{c^2(\gamma^2-1)^2}{V^2}\right)r_\parallel^2 = \left(\gamma^2 - \gamma^2V^2/c^2\right)c^2t^2 + 2c^2\gamma^2\left(-\frac{\gamma^2-1}{\gamma V} + \frac{V}{c^2}\right)r_\parallel t, \tag{50}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - \gamma^2V^2/c^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{51}$$

2.1.1 Boost de Lorentz em 3D

Vamos escrever

$$\vec{R'} = \Lambda(\vec{V})\vec{R} \therefore \begin{bmatrix} \vec{r'} \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r} \\ ct \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Vamos definir $\vec{\beta} := \vec{V}/c$ e lembrar que em $\mathbb{R}^3$ o produto interno é $\vec{x} \cdot \vec{y} := \vec{x}^T \vec{y}$. Assim

$$\vec{r'} = \vec{r'}_\perp + \vec{r'}_\parallel = \vec{r}_\perp + \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t) = \vec{r} - \vec{r}_\parallel + \gamma\vec{r}_\parallel - (V/c)ct \tag{53}$$

$$= \vec{r} + (1-\gamma)\vec{r} \cdot \vec{V}/V - (V/c)ct \tag{54}$$

2.1.2 Composição relativística de velocidades no ”caso 3D”

2.2 Grupo $SO(N)$

[ ]: