09_U_O_Sp

November 11, 2019

0.1 Notas de aula: Teoria de Grupos, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

[48]:
```
%run /Users/jonasmaziero/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb
```

1 $GL(n,\mathbb{C})$, $U(n)$, $U(1)$ e $SU(n)$

As matrizes nxn sobre o campo escalar $\mathbb{F}$ com determinante diferente de zero formam um grupo sob a operação de produto matricial, chamado de *grupo linear geral* e denotado por $GL(n,\mathbb{F})$. Para verificar essa afirmação, lembramos que $\det(AB)=\det(A)\det(B)\neq 0$ se A e B possuem inversa.

As matrizes unitárias nxn, matrizes cuja adjunta é igual à inversa ($U^\dagger = U^{-1}$) também formam um grupo sob a operação de produto matricial. Esse grupo é chamado de *grupo unitário* e é denotado por $U(n)$, e é um subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$. Aqui também verificamos prontamente a estrutura de grupo pois se $A,B\in U(n)$ então $AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger = A\mathbb{I}_n A^\dagger = AA^\dagger = \mathbb{I}_n$.

A operação de multiplicação por uma fase $e^{i\phi}$ também forma um grupo, chamado de *grupo circular* (pois é formado pelo círculo de números complexos com módulo igual a um) e denotado por $U(1)$.

Se $A\in U(n)$ e $A|a\rangle = a|a\rangle$ então $|a|=1 \therefore a=e^{i\phi}$. Como para $B\in U(n)$ temos

$$\det(A)=\det(BAB^\dagger)=\det(diag(e^{i\phi_1},\cdots,e^{i\phi_n}))=\Pi_{j=1}^n e^{i\phi_j}=e^{i\sum_{j=1}^n\phi_j}=:e^{i\phi}. \tag{1}$$

As matrizes unitárias nxn com determinante igual a um (i.e., $\phi=0$) também formam um grupo, chamado *grupo unitário especial* e denotado por $SU(n)$, que é um subgrupo de $U(n)$. Para verificar composição notamos que $\det(AB)=\det(A)\det(B)=(1)(1)=1$ se $A,B\in SU(n)$.

1.1 $U(3)$ como composição de $U(2)$

Considera um elemento qualquer $U\in U(3)$ escrito, na base padrão $\{|e_1\rangle,|e_2\rangle,|e_3\rangle\}$, como:

$$U=\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Vamos construir $U_1,U_2,U_3\in SU(2)$ tais que $U_3U_2U_1U=\mathbb{I}_3$, i.e.,

$$U = U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger. \tag{3}$$

Se $b=0$ faz $U_1 = \mathbb{I}_3$ senão faz

$$U_1 = \begin{bmatrix} a^*/s & b^*/s & 0 \\ b/s & -a/s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

com $s := \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.

[8]:
```python
a,b,c,d,e,f,g,h,i = symbols("a,b,c,d,e,f,g,h,i")
U = Matrix([[a,d,g],[b,e,h],[c,f,i]])
s = sqrt(abs(a)**2+abs(b)**2)
U1 = Matrix([[conjugate(a)/s,conjugate(b)/s,0],[b/s,-a/s,0],[0,0,1]])
# verificação que U1 é unitária (verificado!)
U1*Dagger(U1), Dagger(U1)*U1
```

[8]:

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{a\overline{a}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{b\overline{b}}{|a|^2+|b|^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\overline{a}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{b\overline{b}}{|a|^2+|b|^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{a\overline{a}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{b\overline{b}}{|a|^2+|b|^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\overline{a}}{|a|^2+|b|^2} + \frac{b\overline{b}}{|a|^2+|b|^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

[16]:
```python
U1*U
```

[16]:

$$\begin{bmatrix} \frac{a\overline{a}}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} + \frac{b\overline{b}}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & \frac{d\overline{a}}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} + \frac{e\overline{b}}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & \frac{g\overline{a}}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} + \frac{h\overline{b}}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} \\ 0 & -\frac{ae}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} + \frac{bd}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & -\frac{ah}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} + \frac{bg}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Definimos assim

$$U_1 U =: \begin{bmatrix} a' & d' & g' \\ 0 & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Seguindo, se $c' = c = 0$ faz $U_2 = \mathbb{I}_3$ senão faz

$$U_2 = \begin{bmatrix} a'^*/s' & 0 & c'^*/s' \\ 0 & 1 & 0 \\ c'/s' & 0 & -a'/s' \end{bmatrix}, \tag{6}$$

com $s' := \sqrt{|a'|^2 + |c'|^2}$.

[9]:
```python
al,bl,cl,dl,el,fl,gl,hl,il,sl = symbols("a',b',c',d',e',f',g',h',i',s'")
U1U = Matrix([[al,dl,gl],[0,el,hl],[c,f,i]])
#U1U
sl = sqrt(abs(al)**2+abs(cl)**2)
U2 = Matrix([[conjugate(al)/sl,0,conjugate(cl)/sl],[0,1,0],[cl/sl,0,-al/sl]])
#U2
# verificação que U2 é unitária (verificado!)
U2*Dagger(U2), Dagger(U2)*U2
```

[9]:

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{a'\overline{a'}}{|a'|^2+|c'|^2}+\frac{c'\overline{c'}}{|a'|^2+|c'|^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a'\overline{a'}}{|a'|^2+|c'|^2}+\frac{c'\overline{c'}}{|a'|^2+|c'|^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{a'\overline{a'}}{|a'|^2+|c'|^2}+\frac{c'\overline{c'}}{|a'|^2+|c'|^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a'\overline{a'}}{|a'|^2+|c'|^2}+\frac{c'\overline{c'}}{|a'|^2+|c'|^2} \end{bmatrix}\right)$$

[28]:
```python
U2*U1U
```

[28]:

$$\begin{bmatrix} \frac{a'\overline{a'}}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}}+\frac{c\overline{c}}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}} & \frac{d'\overline{a'}}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}}+\frac{f\overline{c}}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}} & \frac{g'\overline{a'}}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}}+\frac{i\overline{c}}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}} \\ 0 & e' & h' \\ 0 & -\frac{a'f}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}}+\frac{cd'}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}} & -\frac{a'i}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}}+\frac{cg'}{\sqrt{|a'|^2+|c|^2}} \end{bmatrix}$$

Definimos assim

$$U_2U_1U =: \begin{bmatrix} a'' & d'' & g'' \\ 0 & e'' & h'' \\ 0 & f'' & i'' \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Essa matriz é unitária pois $(U_2U_1U)^\dagger U_2U_1U = U^\dagger U_1^\dagger U_2^\dagger U_2U_1U = \mathbb{I}_3$. Portanto seus vetores linha e vetores coluna devem ter norma igual a um. Isso implica que $a'' = 1$ e que consequentemente $d'' = g'' = 0$. Por conseguinte

$$U_2U_1U =: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e'' & h'' \\ 0 & f'' & i'' \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Por fim definimos

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e''^* & f''^* \\ 0 & h''^* & i''^* \end{bmatrix}. \tag{9}$$

[10]:
```python
ell,fll,hll,ill = symbols("e'',f'',h'',i''")
U3 =␣
↪Matrix([[1,0,0],[0,conjugate(ell),conjugate(fll)],[0,conjugate(hll),conjugate(ill)]])
```

```
#U3
# verificação que U3 é unitária (verificado!)
U3*Dagger(U3), Dagger(U3)*U3
```

[10]:

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & e''\overline{e''}+f''\overline{f''} & h''\overline{e''}+i''\overline{f''}\\0 & e''\overline{h''}+f''\overline{i''} & h''\overline{h''}+i''\overline{i''}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & e''\overline{e''}+h''\overline{h''} & e''\overline{f''}+h''\overline{i''}\\0 & f''\overline{e''}+i''\overline{h''} & f''\overline{f''}+i''\overline{i''}\end{bmatrix}\right)$$

Vemos que U_3 é unitária pois pela unitariedade de U_2U_1U teremos

$$\vec{L}_2\cdot\vec{L}_2 = 1 \Rightarrow |e''|^2+|f''|^2 = 1, \tag{10}$$
$$\vec{L}_2\cdot\vec{L}_3 = 0 \Rightarrow e''^*h''+f''^*i'' = 0, \tag{11}$$
$$\vec{L}_3\cdot\vec{L}_2 = 0 \Rightarrow h''^*e''+i''^*f'' = 0, \tag{12}$$
$$\vec{L}_3\cdot\vec{L}_3 = 1 \Rightarrow |h''|^2+|i''|^2 = 1. \tag{13}$$

[36]:
```
U2U1U = Matrix([[1,0,0],[0,ell,hll],[0,fll,ill]])
#U2U1U
U3*U2U1U
```

[36]:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & e''\overline{e''}+f''\overline{f''} & h''\overline{e''}+i''\overline{f''}\\0 & e''\overline{h''}+f''\overline{i''} & h''\overline{h''}+i''\overline{i''}\end{bmatrix}$$

Vemos assim que $U_3U_2U_1U = \mathbb{I}_3$, também pela unitariedade de U_2U_1U. A função abaixo returna $\{U_j\}_{j=1}^3$ uma vez fornecido U.

[40]:
```
def u3Fu2(U):
    '''Returs U1d, U2d, U3d such that U = U1d*U2d*U3d'''
    s = sqrt(abs(U[0,0])**2+abs(U[1,0])**2)
    if U[1,0] == 0:
        U1d = Matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])
    else:
        U1d = Matrix([[U[0,0]/s,conjugate(U[1,0])/s,0],[U[1,0]/
↪s,-conjugate(U[0,0])/s,0],[0,0,1]])
    sl = sqrt(abs(U[0,0])**2+abs(U[1,0])**2+abs(U[2,0])**2)
    if U[2,0] == 0:
        U2d = Matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])
    else:
       U2d = Matrix([[s/sl,0,conjugate(U[2,0])/sl],[0,1,0],[U[2,0]/sl,0,-s/sl]])
    ell = (U[1,0]*U[0,1]-U[0,0]*U[1,1])/s
    hll = (U[1,0]*U[0,2]-U[0,0]*U[1,2])/s
    dl = (U[0,1]*conjugate(U[0,0])+U[1,1]*conjugate(U[1,0]))/s
    fll = (U[2,0]*dl-s*U[2,1])/sl
```

```python
    gl = (U[0,2]*conjugate(U[0,0])+U[1,2]*conjugate(U[0,1]))/sl
    ill = (U[2,0]*gl-s*U[2,2])/sl
    U3d = Matrix([[1,0,0],[0,ell,hll],[0,fll,ill]])
    return U1d, U2d, U3d
```

[41]:
```python
U = (1/sqrt(2))*Matrix([[1,1,0],[1,-1,0],[0,0,sqrt(2)]])
#U*Dagger(U) # U é unitária!
U1d, U2d, U3d = u3Fu2(U)
U1d*U2d*U3d
```

[41]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2 $O(n)$ e $SO(n)$

As matrizes ortogonais nxn, cuja transposta é igual à inversa ($O^T = O^{-1}$), formam um grupo sob multiplicação, que é chamado de *grupo ortogonal* e é denotado por $O(n)$. Verificamos a estrutura de grupo notando que

$$AB(AB)^T = ABB^TA^T = A\mathbb{I}_nA^T = AA^T = \mathbb{I}_n \text{ se } A, B \in O(n). \tag{14}$$

Para $A \in O(n)$ temos $\det(A) = \pm 1$. As matrizes ortogonais com determinante igual a um também formam um grupo, chamado de *grupo ortogonal especial* e denotado por $SO(n)$.

2.1 Ângulos de Euler

Começaremos obtendo três elementos particularmente importantes de O_3, que são as rotações em torno das três coordenadas x, y, z. Aqui usaremos a perspectiva passiva, na qual é o referencial quem gira (na perspectiva ativa o vetor que gira).

Para rotações do referencial em torno da direção z positiva, temos as seguintes relações entre os versores:

$$\hat{i}' = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta, \tag{15}$$
$$\hat{j}' = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta, \tag{16}$$
$$\hat{k}' = k. \tag{17}$$

Com isso, vem que

$$
\begin{aligned}
\vec{r'} &= x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' && (18)\\
&= x'(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta) + y'(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta) + z'\hat{k}' && (19)\\
&= (x'\cos\theta - y'\sin\theta)\hat{i} + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)\hat{j} + z'\hat{k}' && (20)\\
&= \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. && (21)
\end{aligned}
$$

Na forma matricial, esta equação fica escrita como segue:

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \therefore \vec{r} = R_z(\theta)\vec{r'}. \tag{22}
$$

[66]:
```
t = symbols("theta")
def Rz(t):
    return Matrix([[cos(t),-sin(t),0],[sin(t),cos(t),0],[0,0,1]])
```

[84]:
```
Rz(t), simplify(Rz(t)*Rz(t).T), simplify(Rz(t).T*Rz(t)), simplify(det(Rz(t)))
```

[84]:

$$
\left(\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 1 \right)
$$

Como visto usando o código acima, $R_z(\theta) \in SO(3)$. Assim $\vec{r'} = R_z(\theta)^T\vec{r}$.

Para rotações do referencial em torno da direção y positiva, temos as seguintes relações entre os versores:

$$
\begin{aligned}
\hat{i}' &= \hat{i}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta, && (23)\\
\hat{j}' &= \hat{j}, && (24)\\
\hat{k}' &= \hat{i}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta. && (25)
\end{aligned}
$$

Com isso, vem que

$$
\begin{aligned}
\vec{r'} &= x'(\hat{i}\cos\theta - \hat{k}\sin\theta) + y'\hat{j}' + z'(\hat{i}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta) && (26)\\
&= (x'\cos\theta + z'\sin\theta)\hat{i} + y'\hat{j}' + (-x'\sin\theta + z'\cos\theta)\hat{k}' = \vec{r}. && (27)
\end{aligned}
$$

Na forma matricial, esta equação fica escrita como segue:

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \therefore \vec{r} = R_y(\theta)\vec{r'}. \tag{28}
$$

[72]:
```
def Ry(t):
    return Matrix([[cos(t),0,sin(t)],[0,1,0],[-sin(t),0,cos(t)]])
```

[83]:
```
Ry(t), simplify(Ry(t)*Ry(t).T), simplify(Ry(t).T*Ry(t)), simplify(det(Ry(t)))
```

[83]:

$$\left(\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 1 \right)$$

Como visto usando esse código, $R_y(\theta) \in SO(3)$. Portanto $\vec{r'} = R_y(\theta)^T \vec{r}$.

Já para rotações do referencial em torno da direção x positiva, temos as seguintes relações entre os versores:

$$\hat{i}' = \hat{i}, \tag{29}$$
$$\hat{j}' = \hat{j}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta, \tag{30}$$
$$\hat{k}' = -\hat{j}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta. \tag{31}$$

Com isso, vem que

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= x'\hat{i}' + y'(\hat{j}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta) + z'(-\hat{j}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta) && (32) \\ &= x'\hat{i}' + (y'\cos\theta - z'\sin\theta)\hat{j} + (y'\sin\theta + z'\cos\theta)\hat{k}' = \vec{r}. && (33) \end{aligned}$$

Na forma matricial, esta equação fica escrita como segue:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \therefore \vec{r} = R_x(\theta)\vec{r'}. \tag{34}$$

[78]:
```
def Rx(t):
    return Matrix([[1,0,0],[0,cos(t),-sin(t)],[0,sin(t),cos(t)]])
```

[82]:
```
Rx(t), simplify(Rx(t)*Rx(t).T), simplify(Rx(t).T*Rx(t)),simplify(det(Rx(t)))
```

[82]:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 1 \right)$$

Exercício: Obtenha as três matrizes de rotação correpondentes a partir do ponto de vista ativo.

2.2 Rotações de Euler

Vimos que qualquer elemento de $U(n)$ pode ser decomposto em termos de elementos de $U(2)$. O mesmo vale para $SO(n)$ e $SO(2)$. A decomposição via rotações de Euler é frequentemente usada. Nessa decomposição, fazemos: * Uma rotação por um ângulo ϕ em torno do eixo z, que será implementada através da matriz de rotação $R_z(\phi)$. * Uma rotação por um ângulo $\theta\in[0,\pi]$ em torno de x', que é implementada por $R_{x'}(\theta)$. * Uma rotação por um ângulo ψ em torno do eixo z', que implementamos usando $R_{z'}(\psi)$.

A matriz de rotação obtida via essa composição está mostrada abaixo.

[94]:
```
f, p = symbols("phi psi")
Re = Rz(p)*Rx(t)*Rz(f)
simplify(Re)
```

[94]:

$$\begin{bmatrix}-\sin(\phi)\sin(\psi)\cos(\theta)+\cos(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\phi)\cos(\psi)-\sin(\psi)\cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\psi)\sin(\theta)\\ \sin(\phi)\cos(\psi)\cos(\theta)+\sin(\psi)\cos(\phi) & -\sin(\phi)\sin(\psi)+\cos(\phi)\cos(\psi)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\psi)\\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

Exercício: Dada uma matriz qualquer $A\in SO(3)$, escreva os ângulos ϕ,θ,ψ em termos dos elementos de matriz de A.

[ ]:
```
def euler_angles(A):
    tt = asin(A[2,2])
```

3 Correspondência homomórfica 2 pra 1 entre $SU(2)$ e $SO(3)$

Qualquer matriz complexa 2x2, Hermitiana e de traço nulo pode ser escrita em termos das matrizes de Pauli:

$$A=\begin{bmatrix} z & x-iy\\ x+iy & -z\end{bmatrix}=x\sigma_x+y\sigma_y+z\sigma_z. \tag{35}$$

Considera $U\in U(2)$ e faz a transformação de similaridade: $A'=UAU^\dagger$. Como $A'^\dagger=(UAU^\dagger)^\dagger=UA^\dagger U^\dagger=UAU^\dagger=A'$ e $Tr(A')=Tr(UA^\dagger U^\dagger)=Tr(A)=0$, podemos escrever

$$A'=\begin{bmatrix} z' & x'-iy'\\ x'+iy' & -z'\end{bmatrix}=x'\sigma_x+y'\sigma_y+z'\sigma_z. \tag{36}$$

Como $\det(A')=\det(UAU^\dagger)=\det(A)$, temos uma indicação da correspondência entre $U(2)$ e $O(3)$ por

$$\det(A) = -z^2 - (x-iy)(x+iy) = -z^2 - x^2 - y^2 = -r^2, \tag{37}$$
$$\det(A') = -z'^2 - (x'-iy')(x'+iy') = -z'^2 - x'^2 - y'^2 = -r'^2. \tag{38}$$

Exercício: Verifique que se $U \in U(2)$ podemos escrever

$$U = \begin{bmatrix} e^{i\xi}\cos\eta & e^{i\zeta}\sin\eta \\ -e^{-i\zeta}\sin\eta & e^{-i\xi}\cos\eta \end{bmatrix} =: U(\xi,\eta,\zeta), \tag{39}$$

com $\zeta, \xi, \eta \in \mathbb{R}$.

Continuando, vamos considerar $U(\xi, \eta = 0, \zeta) = \begin{bmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{bmatrix} =: U_3 = U_3(\xi)$.

[89]:
```
c, e, z = symbols("xi eta zeta",real=True)
U3 = Matrix([[exp(1j*c),0],[0,exp(-1j*c)]])
x, y, z = symbols("x y z")
A = Matrix([[z,x-1j*y],[x+1j*y,-z]])
A, U3, U3*A*Dagger(U3) # = A'
```

[89]:

$$\left(\begin{bmatrix} z & x - 1.0iy \\ x + 1.0iy & -z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{1.0i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-1.0i\xi} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z & (x - 1.0iy)\,e^{2.0i\xi} \\ (x + 1.0iy)\,e^{-2.0i\xi} & -z \end{bmatrix}\right)$$

Ou seja

$$A' = U_3 A U_3^\dagger \tag{40}$$
$$= (x\cos(2\xi) + y\sin(2\xi))\sigma_x + (-x\sin(2\xi) + y\cos(2\xi))\sigma_y + z\sigma_z \tag{41}$$
$$= x'\sigma_x + y'\sigma_y + z'\sigma_z. \tag{42}$$

Essa mesma relação é obtida usando

$$\vec{r'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_z(-2\xi)\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos(2\xi) & \sin(2\xi) & 0 \\ -\sin(2\xi) & \cos(2\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Portanto $U_3 \in U(2)$ é equivalente a $R_z \in O_3$. *OBS:* Aqui a matriz de rotação R_z é aquela obtida girando o referancial.

Seguindo, consideremos $U(\xi = 0, \eta, \zeta = 0) = \begin{bmatrix} \cos\eta & \sin\eta \\ -\sin\eta & \cos\eta \end{bmatrix} =: U_2$.

[87]:
```
U2 = Matrix([[cos(e),sin(e)],[-sin(e),cos(e)]])
U2, simplify(U2*A*Dagger(U2)) # = A'
```

[87]:

$$\left(\begin{bmatrix}\cos(\eta) & \sin(\eta)\\ -\sin(\eta) & \cos(\eta)\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}x\sin(2\eta)+z\cos(2\eta) & 1.0x\cos(2\eta)-1.0iy-1.0z\sin(2\eta)\\ 1.0x\cos(2\eta)+1.0iy-1.0z\sin(2\eta) & -x\sin(2\eta)-z\cos(2\eta)\end{bmatrix}\right)$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned} A' &= U_2 A U_2^\dagger && (44)\\ &= (x\cos(2\eta)-z\sin(2\eta))\sigma_x + y\sigma_y + (x\sin(2\eta)+z\cos(2\eta))\sigma_z && (45)\\ &= x'\sigma_x + y'\sigma_y + z'\sigma_z. && (46)\end{aligned}$$

Essa transformação entre $\vec{r'}$ e $\vec{r}$ é a mesma dada pela matriz de rotação:

$$R_y(-2\eta) = \begin{bmatrix}\cos(2\eta) & 0 & -\sin(2\eta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(2\eta) & 0 & \cos(2\eta)\end{bmatrix}. \tag{47}$$

Ou seja, $U_2 \in U(2)$ é equivalente a $R_y \in O_3$.

Por fim, consideremos $U(\xi=0,\eta,\zeta=\pi/2) = \begin{bmatrix}\cos\eta & i\sin\eta\\ i\sin\eta & \cos\eta\end{bmatrix} =: U_1$.

[88]:
```
U1 = Matrix([[cos(e),1j*sin(e)],[1j*sin(e),cos(e)]])
U1, simplify(U1*A*Dagger(U1)) # = A'
```

[88]:

$$\left(\begin{bmatrix}\cos(\eta) & 1.0i\sin(\eta)\\ 1.0i\sin(\eta) & \cos(\eta)\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1.0y\sin(2\eta)+1.0z\cos(2\eta) & 1.0x-1.0iy\cos(2\eta)-1.0iz\sin(2\eta)\\ 1.0x+1.0iy\cos(2\eta)+1.0iz\sin(2\eta) & 1.0y\sin(2\eta)-1.0z\cos(2\eta)\end{bmatrix}\right)$$

Assim

$$\begin{aligned} A' &= U_1 A U_1^\dagger && (48)\\ &= x\sigma_x + (y\cos(2\eta)+z\sin(2\eta))\sigma_y + (-y\sin(2\eta)+z\cos(2\eta))\sigma_z && (49)\\ &= x'\sigma_x + y'\sigma_y + z'\sigma_z. && (50)\end{aligned}$$

Essa transformação entre $\vec{r'}$ e $\vec{r}$ é a mesma dada pela matriz de rotação:

$$R_x(-2\eta) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(2\eta) & \sin(2\eta)\\ 0 & -\sin(2\eta) & \cos(2\eta)\end{bmatrix}. \tag{51}$$

Ou seja, $U_1 \in U(2)$ é equivalente a $R_x \in O_3$.

Agora analisamos o homomorfismo. Usamos U_3 e R_z. Para $n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\cos(2\xi + n2\pi) = \cos(2\xi)\cos(n2\pi) - \sin(2\xi)\sin(n2\pi) = \cos(2\xi), \tag{52}$$
$$\sin(2\xi + n2\pi) = \sin(2\xi)\cos(n2\pi) + \cos(2\xi)\sin(n2\pi) = \sin(2\xi), \tag{53}$$
$$\cos((2\xi + n2\pi)/2) = \cos(\xi)\cos(n\pi) - \sin(\xi)\sin(n\pi) = (-1)^n\cos(\xi), \tag{54}$$
$$\sin((2\xi + n2\pi)/2) = \sin(\xi)\cos(n\pi) + \cos(\xi)\sin(n\pi) = (-1)^n\sin(\xi). \tag{55}$$

Com isso vemos que $R_z(2\xi + n2\pi) = R_z(2\xi)$ e que $U_3((2\xi + n2\pi)/2) = (-1)^n U_3(\xi)$. Vemos assim que um mesmo elemento de $O(3)$ é mapeado em dois elementos de $U(2)$ ($\pm U_3$). Portanto a correspondência $U_2 \mapsto O_3$ é homomórfica 2 pra 1.

4 Grupo simplético

Matrizes simpléticas são matrizes A de dimensão $2n\text{x}2n$ com determinante diferente de zero que satisfazem a igualdade

$$A^T\Omega A = \Omega \text{ para } \Omega = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathbb{O}_n \end{bmatrix}. \tag{56}$$

Se A e B são matrizes simpléticas, então

$$(AB)^T\Omega AB = B^T A^T \Omega AB = B^T\Omega B = \Omega. \tag{57}$$

Por conseguinte, matrizes simpléticas formam um grupo sob multiplicação matricial chamado de grupo simplético e denotado por $Sp(2n,\mathbb{F})$, com $\mathbb{F}$ sendo o campo escalar sobre o qual as matrizes simpléticas estão definidas.

Alguns exemplos são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sp(2,\mathbb{R}), \quad \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta & \sinh\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\theta & -\sinh\theta \\ 0 & 0 & -\sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \in Sp(4,\mathbb{R}). \tag{58}$$

[29]:
```
def Omeg(n): # retorna a matriz Omega definida acima
    O = zeros(2*n,2*n)
    O[0:n,n:2*n] = id(n)
    O[n:2*n,0:n] = -id(n)
    return O
```

[90]:
```
A1 = Matrix([[1,1],[0,1]])
Omeg(1), A1, A1.T*Omeg(1)*A1
```

[90]:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

[91]:
```
t = symbols("theta")
A2 =␣
↪Matrix([[cosh(t),sinh(t),0,sinh(t)],[sinh(t),cosh(t),sinh(t),0],[0,0,cosh(t),-sinh(t)],[0,0

Omeg(2), A2, simplify(A2.T*Omeg(2)*A2)
```

[91]:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) & 0 & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ 0 & 0 & -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

[ ]: