03_operators

October 1, 2019

0.1 Notas de aula: Álgebra Linear, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

```
In [47]: %run init.ipynb
```

1 Operadores lineares

Um *operador linear* é qualquer função $A : V \to W$ (leva vetores do espaço vetorial V para o espaço vetorial W) que é linear no seu domínio. Ou seja, para $c_j \in \mathbb{F}$ e $|v_j\rangle \in V$ devemos ter

$$A(\sum_j c_j|v_j\rangle) = \sum_j c_j A(|v_j\rangle). \tag{1}$$

Além disso, exigiremos que se $A, B : V \to W$ são operadores lineares, então $\forall|v\rangle \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ devemos ter

$$(\alpha A + \beta B)(|v\rangle) = \alpha A(|v\rangle) + \beta B(|v\rangle). \tag{2}$$

OBS: Quando $A : V \to V$ dizemos que A está definido em V. *OBS:* Dois operadores lineares particularmente importantes são o operdor identidade, definido por

$$\mathbb{I}_V|v\rangle = |v\rangle, \forall|v\rangle \in V, \tag{3}$$

e o operador nulo, definido por

$$\mathbb{O}_V|v\rangle = |\oslash\rangle, \forall|v\rangle \in V. \tag{4}$$

OBS: Como qualquer vetor $|v\rangle \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de uma certa base $\{|w_j\rangle\}_{j=1}^{\dim V}$, i.e., $|v\rangle = \sum_j c_j|w_j\rangle$ com $c_j \in \mathbb{F}$, se sabemos como um certo operador linear atua em uma base qualquer de V, sabemos como ele atua em todos os vetores de V pois

$$A(|v\rangle) = A\left(\sum_j c_j|w_j\rangle\right) = \sum_j c_j A(|w_j\rangle). \tag{5}$$

1.0.1 Matrizes são operadores lineares

Considere matrizes retangulares $A \in \mathbb{C}^{mxn}$. Não é difícil ver que para $|v\rangle \in \mathbb{C}^n$ e $|v'\rangle \in \mathbb{C}^m$ teremos

$$\begin{bmatrix} |v'\rangle_1 \\ |v'\rangle_2 \\ \vdots \\ |v'\rangle_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |v\rangle_1 \\ |v\rangle_2 \\ \vdots \\ |v\rangle_n \end{bmatrix} \Rightarrow |v'\rangle_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}|v\rangle_k \text{ para } j = 1, \cdots, m \tag{6}$$

ou, equivalentemente, $|v'\rangle = A|v\rangle$. (7)

Ou seja, $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Para verificar linearidade consideremos $|w\rangle, |w_j\rangle \in \mathbb{C}^n$, $c_j \in \mathbb{C}$ e $|w\rangle = \sum_j c_j |w_j\rangle$ e olhemos para

$$\left(A \sum_j c_j |w_j\rangle \right)_k = (A|w\rangle)_k = \sum_l A_{k,l}|w\rangle_l = \sum_l A_{k,l} \sum_j c_j |w_j\rangle_l = \sum_j c_j \sum_l A_{k,l}|w_j\rangle_l = \sum_j c_j (A|w_j\rangle)_k, \tag{8}$$

o que implica que $A\left(\sum_j c_j|w_j\rangle\right) = \sum_j c_j A(|w_j\rangle)$ e portanto que matrizes são operadores lineares.

Ademais, como $(\alpha A + \beta B)_{j,k} = \alpha A_{j,k} + \beta B_{j,k}$, teremos que

$$((\alpha A + \beta B)(|v\rangle))_j = \sum_k (\alpha A + \beta B)_{j,k}|v\rangle_k = \sum_k (\alpha A_{j,k} + \beta B_{j,k})|v\rangle_k = \alpha \sum_k A_{j,k}|v\rangle_k + \beta \sum_k B_{j,k}|v\rangle_k \tag{9}$$

$$= \alpha (A|v\rangle)_j + \beta (B|v\rangle)_j \tag{10}$$

e portanto $(\alpha A + \beta B)(|v\rangle) = \alpha A(|v\rangle) + \beta B(|v\rangle)$.

Os operadores identidade e nulo são identificados, respectivamente, com

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ e } = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

1.0.2 Representação matricial de operadores lineares

Consideremos $A : V \to W$ e duas bases $\{|v_j\rangle\}_{j=1}^{\dim V}$ de V e $\{|w_k\rangle\}_{k=1}^{\dim W}$ de W. Sabemos que A atuando em um vetor de V retorna um vetor de W, i.e., $A(|v_j\rangle) \in W$, que por sua vez pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de qualquer uma das bases de W. Então podemos escrever

$$A(|v_j\rangle) = \sum_{k=1}^{\dim W} A_{k,j}|w_k\rangle, \text{ para } j = 1, \cdots, \dim V, \tag{12}$$

onde os coeficientes da combinação linear, $A_{k,j} \in \mathbb{F}$, fornecem a representação matricial de A:

$$A \doteq \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\dim V} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\dim V} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{\dim W,1} & A_{\dim W,2} & \cdots & A_{\dim W,\dim V} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

OBS: Note que fizemos o mesmo para vetores. Ou seja, se na base $\{|w_k\rangle\}_{k=1}^{\dim W}$ o vetor $|w\rangle \in W$ é escrito como $|w\rangle = \sum_{j=1}^{\dim W} c_j |w_j\rangle$ dizemos que os coeficientes $c_j \in \mathbb{F}$ fornecem a representação matricial de $|w\rangle$ naquela base:

$$|w\rangle \doteq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{\dim W} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Exemplo Considere a base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ e $A : V \to V$ que atua como segue:

$$A(|e_1\rangle) := |e_2\rangle \text{ e } A(|e_2\rangle) := |e_1\rangle. \tag{15}$$

Teremos assim que

$$A(|e_1\rangle) = \sum_{k=1}^{2} A_{k,1}|e_k\rangle = A_{1,1}|e_1\rangle + A_{2,1}|e_2\rangle \text{ e } A(|e_2\rangle) = \sum_{k=1}^{2} A_{k,2}|e_k\rangle = A_{1,2}|e_1\rangle + A_{2,2}|e_k\rangle. \tag{16}$$

Então, comparando a definição com estas últimas relações teremos

$$A \doteq \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Exercício: Considere a base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ e $B : V \to V$ que atua como segue: $B(|e_1\rangle) = (|e_1\rangle + |e_2\rangle)/\sqrt{2}$ e $B(|e_2\rangle) = (|e_1\rangle - |e_2\rangle)/\sqrt{2}$. Forneça a representação matricial de B nesse caso.

Exercício: Forneça a representação matricial dos vetores da base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ na base base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$.

1.0.3 Composição de operadores lineares

Consideremos operadores lineares $A : V \to W$ e $B : W \to X$ e as seguintes bases para estes espaços vetoriais: $\{|v_j\rangle\}_{j=1}^{\dim V} \in V$, $\{|w_j\rangle\}_{j=1}^{\dim W} \in W$ e $\{|x_j\rangle\}_{j=1}^{\dim X} \in X$. Quando atuamos primeiro A e depois B (notação: $B \circ A$) veremos que isso é equivalente a aplicar um único operador linear $C : V \to X$, cuja representação matricial pode ser obtida daquelas de A e de B. Explicitando, para $j = 1, \cdots, \dim V$ temos

$$A(|v_j\rangle) = \sum_{k=1}^{\dim W} A_{k,j}|w_k\rangle. \tag{18}$$

Seguindo,

$$(B\circ A)(|v_j\rangle) \equiv B(A(|v_j\rangle)) = B(\sum_{k=1}^{\dim W} A_{k,j}|w_k\rangle) = \sum_{k=1}^{\dim W} A_{k,j}B(|w_k\rangle) = \sum_{k=1}^{\dim W} A_{k,j}\sum_{l=1}^{\dim X} B_{l,k}|x_l\rangle \quad (19)$$

$$= \sum_{l=1}^{\dim X}\left(\sum_{k=1}^{\dim W} B_{l,k}A_{k,j}\right)|x_l\rangle =: \sum_{l=1}^{\dim X} C_{l,j}|x_l\rangle =: C(|v_j\rangle). \quad (20)$$

Exercício: Forneça a representação matricial para $C = B \circ A$, com A e B sendo os operadores definidos no último exemplo e exercício, respectivamente.

1.1 Autovalores e autovetores

Se a ação de um operador linear $A : V \to V$ não muda a "direção" de um vetor $|a\rangle \in V$, i.e., se

$$A|a\rangle \propto |a\rangle =: \alpha_a|a\rangle, \quad (21)$$

dizemos que $|a\rangle$ é um autovetor de A e α_a é o autovalor A correpondente ao autovetor $|a\rangle$. Note que α_a nos indica quanto o tamanho do autovetor muda e se esse muda ou não de sentido sob a ação de A.

Exercício: Verifique que $||\alpha_a * |a\rangle|| = |\alpha_a| * ||a||$.

Exemplo Considere o operador definido por $A(|e_1\rangle) = |e_2\rangle$ e $A(|e_2\rangle) = |e_1\rangle$. Notamos que para $|a_\pm\rangle = |e_1\rangle \pm |e_2\rangle$ teremos

$$A|a_\pm\rangle = A(|e_1\rangle \pm |e_2\rangle) = A|e_1\rangle \pm A|e_2\rangle = |e_2\rangle \pm |e_1\rangle = \pm(|e_1\rangle \pm |e_2\rangle) = (\pm 1)|a_\pm\rangle = \alpha_\pm|a_\pm\rangle. \quad (22)$$

1.1.1 Equação característica

Vamos reescrever a equação de autovalores e autovetores acima da seguinte forma:

$$A|a\rangle = \alpha_a\mathbb{I}|a\rangle \quad \therefore (A - \alpha_a\mathbb{I})|a\rangle = |\oslash\rangle. \quad (23)$$

Note que se $A - \alpha_a\mathbb{I}$ possuir inversa, então $|a\rangle = |\oslash\rangle$. Para ter uma *solução não trivial* devemos ter a chamada equação secular ou equação característica:

$$\det(A - \alpha_a\mathbb{I}) = \det\begin{bmatrix} A_{1,1} - \alpha_a & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\dim V} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - \alpha_a & \cdots & A_{2,\dim V} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{\dim V,1} & A_{\dim V,2} & \cdots & A_{\dim V,\dim V} - \alpha_a \end{bmatrix} = 0. \quad (24)$$

Para um espaço vetorial de dimenção n, essa equação resulta em um polinômio de ordem n,

$$c_n\alpha_a^n + c_{n-1}\alpha_a^{n-1} + \cdots + c_2\alpha_a^2 + c_1\alpha_a + c_0 = 0, \quad (25)$$

que possui n raízes complexas, que são os autovalores de A.

```
In [15]: a,b,c,d = symbols("a b c d")
         #A = Matrix([[a,b],[c,d]])
         A = Matrix([[0,-1j],[1j,0]])
         #A
         A.eigenvects()
         # Na lista abaixo aparecem (autovalor, multiplicidade, autovetor)
```

Out[15]:

$$\left[\left(-1.0, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix}1.0i\\1.0\end{bmatrix}\right]\right), \quad \left(1.0, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix}-1.0i\\1.0\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

Exemplo: Vamos calcular os autovalores e autovetores da matriz $\sigma_y = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$. Para os autovalores:

$$\det(\sigma_y - \alpha_a \mathbb{I}_2) = \det\begin{bmatrix}-\alpha_a & 1\\1 & -\alpha_a\end{bmatrix} = \alpha_a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_a = \pm 1. \tag{26}$$

Para os autovetores, se $\alpha_a = 1$ teremos

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow y = x = 1 \Rightarrow |\alpha_a = 1\rangle = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}. \tag{27}$$

Para $\alpha_a = -1$ teremos

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow y = -x = 1 \Rightarrow |\alpha_a = 1\rangle = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}. \tag{28}$$

Exercício: Calcule os autovalores e autovetores da matriz $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$.

1.1.2 Adjunto de um operador linear

Seja V um espaço de Hilbert. Então, por definição, para qualquer operador linear $A : V \to V$ existe o operador adjunto a A, denotado por $A^\dagger : V \to V$, tal que

$$(|v\rangle, A|w\rangle) = (A^\dagger|v\rangle, |w\rangle), \forall |v\rangle, |w\rangle \in V. \tag{29}$$

Por conveniência, aqui usamos $(|a\rangle, |b\rangle)$ para o produto interno de $|a\rangle$ e $|b\rangle$.

Vamos verificar que a representação matricial de $A^\dagger$ é dada pela transposta conjugada da representação matricial de A. Para isso vamos considerar uma base ortonormal $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^{\dim V} \in V$ e escrever $|v\rangle = \sum_{j=1}^{\dim V} v_j |b_j\rangle$ e $|w\rangle = \sum_{j=1}^{\dim V} w_j |b_j\rangle$. Assim

$$\begin{aligned}
(|v\rangle, A|w\rangle) &= \Big(\sum_{j=1}^{\dim V} v_j |b_j\rangle, A\sum_{k=1}^{\dim V} w_k|b_k\rangle\Big) = \Big(\sum_{j=1}^{\dim V} v_j|b_j\rangle, \sum_{k=1}^{\dim V} w_k A|b_k\rangle\Big) && (30)\\
&= \sum_{j,k=1}^{\dim V} v_j^* w_k \Big(|b_j\rangle, \sum_{l=1}^{\dim V} A_{l,k}|b_l\rangle\Big) = \sum_{j,k,l=1}^{\dim V} v_j^* w_k A_{l,k}(|b_j\rangle, |b_l\rangle) = \sum_{j,k,l=1}^{\dim V} v_j^* w_k A_{l,k}\delta_{j,l} && (31)\\
&= \sum_{j,k=1}^{\dim V} v_j^* w_k A_{j,k} && (32)
\end{aligned}$$

e

$$(A^\dagger|v\rangle, |w\rangle) = (A^\dagger \sum_{j=1}^{\dim V} v_j|b_j\rangle, \sum_{k=1}^{\dim V} w_k|b_k\rangle) = (\sum_{j=1}^{\dim V} v_j A^\dagger|b_j\rangle, \sum_{k=1}^{\dim V} w_k|b_k\rangle) \tag{33}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\dim V} v_j^* w_k (\sum_{l=1}^{\dim V} (A^\dagger)_{l,j}|b_l\rangle, |b_k\rangle) = \sum_{j,k,l=1}^{\dim V} v_j^* w_k (A^\dagger_{l,j})^*(|b_l\rangle, |b_k\rangle) = \sum_{j,k,l=1}^{\dim V} v_j^* w_k (A^\dagger_{l,j})^* \delta_{l,k} \tag{34}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\dim V} v_j^* w_k (A^\dagger_{k,j})^*. \tag{35}$$

Ou seja,

$$(|v\rangle, A|w\rangle) = (A^\dagger|v\rangle, |w\rangle) \Rightarrow (A^\dagger)_{j,k} = A^*_{k,j} \tag{36}$$

para a representação matricial desses operadores em uma base ortonormal.
Exercício: Verique que $(A^\dagger)^\dagger = A$.
Exercício: Verifique que se c é um escalar então $(cA)^\dagger = c^* A^\dagger$.
Exercício: Verifique que para $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, temos $(A \circ B)^\dagger = B^\dagger \circ A^\dagger$.

1.2 Projetores

Seja $\{|w_j\rangle\}_{j=1}^{\dim W}$ uma base ortonormal de W. O *projetor no subespaço* W é um operador $P_W : V \to W$ definido por

$$P_W(|v\rangle) := \sum_{j=1}^{\dim W} \langle w_j|v\rangle |w_j\rangle, \tag{37}$$

com $|v\rangle \in V$.
Exemplo: Para $\mathbb{C}^n$ temos $\langle v|w\rangle = |v\rangle^\dagger |w\rangle$. Nesse caso usamos

$$|v\rangle^\dagger = \langle v| \tag{38}$$

para qualquer vetor. Assim, teremos $P_W(|v\rangle) = \sum_{j=1}^{\dim W} |w_j\rangle |w_j\rangle^\dagger |v\rangle = (\sum_{j=1}^{\dim W} |w_j\rangle\langle w_j|)|v\rangle$. Por conseguinte, para este espaço vetorial, teremos

$$P_W = \sum_{j=1}^{\dim W} |w_j\rangle\langle w_j|. \tag{39}$$

Exercício: Escreva explicitamento o projetor em um subespaço do espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \big(\mathbb{C}^{nxn}, \langle A|B\rangle_{hs} = Tr(A^\dagger B)\big)$.

OBS: P_W atua como $\mathbb{I}_W$ nos vetores de W. Consideremos um vetor qualquer $|w\rangle \in W$ decomposto na base ortonormal $\{|w_j\rangle\}_{j=1}^{\dim W}$ como (veja as notas sobre vetores): $|w\rangle = \sum_{j=1}^{\dim W} \langle w_j|w\rangle |w_j\rangle$. É facil ver assim que

$$P_W(|w\rangle) := \sum_{j=1}^{\dim W} \langle w_j|v\rangle |w_j\rangle = |w\rangle = \mathbb{I}_W(|w\rangle). \tag{40}$$

Sempre que $P_W = \mathbb{I}_W$ dizemos que a base usada para definir o projetor é uma *base completa*.

Verificação: $P_W : V \to W$. Consideremos uma base ortonormal para o espaço vetorial $V \supseteq W$: $\{\{|w_j\rangle\}_{j=1}^{\dim W}, \{|w_k^{\perp}\rangle\}_{k=\dim W+1}^{\dim V}\}$. Assim, para um vetor qualquer $|v\rangle \in V$ teremos

$$|v\rangle = \sum_{j=1}^{\dim W} \langle w_j|v\rangle|w_j\rangle + \sum_{k=\dim W+1}^{\dim V} \langle w_k^{\perp}|v\rangle|w_k^{\perp}\rangle. \tag{41}$$

Então

$$P_W(|v\rangle) = \sum_{l=1}^{\dim W} \langle w_l|v\rangle|w_l\rangle = \sum_{l=1}^{\dim W}\sum_{j=1}^{\dim W} \langle w_j|v\rangle\langle w_l|w_j\rangle|w_l\rangle + \sum_{l=1}^{\dim W}\sum_{k=\dim W+1}^{\dim V} \langle w_k^{\perp}|v\rangle\langle w_l|w_k^{\perp}\rangle|w_l\rangle \tag{42}$$

$$= \sum_{l=1}^{\dim W}\sum_{j=1}^{\dim W} \langle w_j|v\rangle\delta_{l,j}|w_l\rangle + \sum_{l=1}^{\dim W}\sum_{k=\dim W+1}^{\dim V} \langle w_k^{\perp}|v\rangle 0|w_l\rangle = \sum_{l=1}^{\dim W} \langle w_l|v\rangle|w_l\rangle \in W. \tag{43}$$

Exercício: Verifique que qualquer projetor tem a propriedade de idempotência, i.e., $P_W \circ P_W = P_W$. **Exercício:** Verifique que um projetor possui somente dois autovalores, 0 ou 1. Discorra sobre quais são os "autovetores" correspondentes. **Exercício:** Verifique que se $P_W(|v\rangle) = \sum_{l=1}^{\dim W}\langle w_l|v\rangle|w_l\rangle$ e $P_X(|v\rangle) = \sum_{l=1}^{\dim X}\langle x_l|v\rangle|x_l\rangle$ com $\langle x_j|w_k\rangle = 0\ \forall j,k$, então

$$P_W \circ P_X = P_X \circ P_W = \mathbb{O}_V. \tag{44}$$

1.2.1 Adjunto de projetores

Vamos verificar que o operador adjunto de um projetor é ele mesmo. Considera $\forall |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$

$$(P_W^{\dagger}|a\rangle, |b\rangle) = (|a\rangle, P_w(|b\rangle)) = (|a\rangle, \sum_j \langle w_j|b\rangle|w_j\rangle) = \sum_j \langle w_j|b\rangle(|a\rangle, |w_j\rangle) = \sum_j \langle w_j|b\rangle\langle w_j|a\rangle^* \tag{45}$$

$$= \sum_j \langle w_j|a\rangle^*(|w_j\rangle, |b\rangle) = (\sum_j \langle w_j|a\rangle|w_j\rangle, |b\rangle) = (P_W|a\rangle, |b\rangle). \tag{46}$$

Exercício: Verifique essa propriedade explicitamente considerando os projetores de $\mathbb{C}^n$.

1.2.2 Complemento ortonormal

O complemento ortonormal de um projetor P_W no subespaço $W \subseteq V$ é definido como o projetor $P_{W^{\perp}}$ tal que

$$P_W + P_{W^{\perp}} = \mathbb{I}_V. \tag{47}$$

Para esses projetores, teremos

$$P_W \circ P_{W^{\perp}}(|v\rangle) = P_W \circ (\mathbb{I}_V - P_W)(|v\rangle) = P_W \circ \mathbb{I}_V(|v\rangle) - P_W \circ P_W(|v\rangle) = P_W(|v\rangle) - P_W(|v\rangle) \tag{48}$$

$$= \mathbb{O}_V(|v\rangle). \tag{49}$$

Exercício: Para $\mathbb{C}^3$, considere o projetor $P_1 = |1\rangle\langle 1|$ com $|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Forneça dois complementos ortonormais para P_1?

```
In [36]: # Retorna o projetor em um vetor de C^n
         def proj(ket):
             return ket*Dagger(ket)
```

```
In [41]: v = Matrix([[0],[1]])
         proj(v)
```

```
Out[41]:
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Operadores normais

Um operador A definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito normal se

$$A \circ A^{\dagger} = A^{\dagger} \circ A. \tag{50}$$

3 Teorema da decomposição espectral

Existe uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ constituída por autovetores do operador linear $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se e somente se este for normal.

3.1 Prova

Vamos começar assumindo a existência de uma base ortonormal $\{|a\rangle\} \in \mathcal{H}$ de autovetores de A, i.e., $A|a\rangle := \alpha_a|a\rangle$ (note que aqui usamos a também para os autovalores). Consideremos o *projetor unidimensional* aplicado a um vetor qualquer $|v\rangle \in \mathcal{H}$:

$$P_a(|v\rangle) = \langle a|v\rangle|a\rangle. \tag{51}$$

Ademais, podemos escrever $|v\rangle = \sum_a \langle a|v\rangle|a\rangle$. Assim

$$A(|v\rangle) = A(\sum_a \langle a|v\rangle|a\rangle) = \sum_a \langle a|v\rangle A(|a\rangle) = \sum_a \langle a|v\rangle\alpha_a(|a\rangle) = \sum_a \alpha_a\langle a|v\rangle(|a\rangle) = \sum_a \alpha_a P_a(|v\rangle). \tag{52}$$

Essa é a chamada *decomposição espectral*:

$$A = \sum_a \alpha_a P_a. \tag{53}$$

Notemos que como $\forall|v\rangle \in \mathcal{H}$ podemos escrever $|v\rangle = \sum_a \langle a|v\rangle|a\rangle$, teremos que

$$(\sum_a P_a)(|v\rangle) = \sum_a P_a(|v\rangle) = \sum_a \langle a|v\rangle|a\rangle = |v\rangle = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}|v\rangle. \tag{54}$$

Portanto, nesse caso,

$$\sum_a P_a = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}. \tag{55}$$

Exercício: Assumindo que existe uma base ortonormal $\{|a\rangle\} \in \mathcal{H}$ tal que $A^\dagger|a\rangle := \alpha_a^*|a\rangle$, verifique que podemos escrever a decomposição espectral $A^\dagger = \sum_a \alpha_a^* P_a$.

Com isso podemos escrever

$$A \circ A^\dagger(|v\rangle) = (\sum_a \alpha_a P_a) \circ (\sum_{a'} \alpha_a'^* P_{a'})(|v\rangle) = (\sum_a \alpha_a P_a) \circ (\sum_{a'} \alpha_{a'}^* P_{a'}(|v\rangle)) = \sum_{a,a'} \alpha_a \alpha_{a'}^* P_a(P_{a'}(|v\rangle)) \tag{56}$$

$$= \sum_{a,a'} \alpha_a \alpha_{a'}^* (P_a \circ P_{a'})(|v\rangle) = \sum_{a,a'} \alpha_a \alpha_{a'}^* (\delta_{\alpha_a,\alpha_{a'}} P_a)(|v\rangle) = \sum_a |\alpha_a|^2 P_a(|v\rangle). \tag{57}$$

Exercício: Verifique que $(A^\dagger \circ A)(|v\rangle) = \sum_a |\alpha_a|^2 P_a(|v\rangle)$.

Por conseguinte,

$$\exists\{|a\rangle\} \mid A = \sum_a \alpha_a P_a \text{ com } P_a P_{a'} = \delta_{\alpha_a,\alpha_{a'}} P_a \text{ e } \sum_a P_a = \mathbb{I}_\mathcal{H} \Rightarrow A \circ A^\dagger = A^\dagger \circ A. \tag{58}$$

Passemos para a segunda parte da prova, onde assumimos que A é normal, i.e. que $A \circ A^\dagger = A^\dagger \circ A$, e mostramos que existe uma base ortonormal que o diagonaliza. Começamos considerando o autovalor α_a de A e o projetor P_a no subespaço $\mathcal{H}_a$ de $\mathcal{H}$ gerado pelos autovetores de A correspondentes ao autovalor α_a. Seja $P_{a^\perp}$ o complemento ortonormal de P_a. Segue assim que

$$A = \mathbb{I}_\mathcal{H} \circ A \circ \mathbb{I}_\mathcal{H} = (P_a + P_{a^\perp}) \circ A \circ (P_a + P_{a^\perp}) \tag{59}$$

$$= P_a \circ A \circ P_a + P_a \circ A \circ P_{a^\perp} + P_{a^\perp} \circ A \circ P_a + P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}. \tag{60}$$

Agora, $\forall|v\rangle \in \mathcal{H}$,

$$(A \circ P_a)(|v\rangle) = A(P_a(|v\rangle)) = A\left(\sum_a \langle a|v\rangle |a\rangle\right) = \sum_a \langle a|v\rangle A(|a\rangle) = \sum_a \langle a|v\rangle \alpha_a |a\rangle \tag{61}$$

$$= \sum_a \alpha_a \langle a|v\rangle |a\rangle = \alpha_a P_a(|v\rangle). \tag{62}$$

Exercício: Verifique que $A^\dagger \circ P_a = \alpha_a^* P_a$.

Assim

$$P_a \circ A \circ P_a = P_a \circ \alpha_a P_a = \alpha_a P_a \circ P_a = \alpha_a P_a, \tag{63}$$

$$P_{a^\perp} \circ A \circ P_a = P_{a^\perp} \circ \alpha_a P_a = \alpha_a P_{a^\perp} \circ P_a = \mathbb{O}_\mathcal{H}. \tag{64}$$

Com isso teremos que

$$(P_a \circ A \circ P_{a^\perp})^\dagger = P_{a^\perp}^\dagger \circ A^\dagger \circ P_a^\dagger = P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ P_a = P_{a^\perp} \circ \alpha_a^* P_a = \alpha_a^* P_{a^\perp} \circ P_a = \alpha_a^* \mathbb{O}_\mathcal{H} = \mathbb{O}_\mathcal{H}. \tag{65}$$

Juntando esses resultados obtemos

$$A = \alpha_a P_a + \mathbb{O}_\mathcal{H} + \mathbb{O}_\mathcal{H} + P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp} = \alpha_a P_a + P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}. \tag{66}$$

Seguindo, verifiquemos que o operador $\tilde{A} := P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}$ também é normal se A é normal

$$
\begin{aligned}
&(P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp})^\dagger \circ (P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}) && (67)\\
&= P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ P_{a^\perp} \circ P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp} = P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp} && (68)\\
&= P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ (_{\mathcal{H}} + P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}) = P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ (P_a \circ A \circ P_{a^\perp} + P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}) && (69)\\
&= P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ ((P_a + P_{a^\perp}) \circ A \circ P_{a^\perp}) = P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \circ A \circ P_{a^\perp}) = P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ A \circ P_{a^\perp} && (70)\\
&= P_{a^\perp} \circ A \circ A^\dagger \circ P_{a^\perp} = P_{a^\perp} \circ A \circ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \circ A^\dagger \circ P_{a^\perp} = P_{a^\perp} \circ A \circ (P_a + P_{a^\perp}) \circ A^\dagger \circ P_{a^\perp} && (71)\\
&= (P_{a^\perp} \circ A \circ P_a + P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}) \circ A^\dagger \circ P_{a^\perp} = (\mathbb{O}_{\mathcal{H}} + P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}) \circ A^\dagger \circ P_{a^\perp} && (72)\\
&= (P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}) \circ (P_{a^\perp} \circ A^\dagger \circ P_{a^\perp}) = (P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp}) \circ (P_{a^\perp} \circ A \circ P_{a^\perp})^\dagger. && (73)
\end{aligned}
$$

Assim, se repetimos o procedimento feito inicialmete para A no caso de $\tilde{A}$ teremos

$$A = \alpha_a P_a + \alpha_{\tilde{a}} P_{\tilde{a}} + P_{\tilde{a}^\perp} \circ \tilde{A} \circ P_{\tilde{a}^\perp}, \tag{74}$$

com $P_{\tilde{\tilde{a}}} := P_{\tilde{a}^\perp} \circ \tilde{A} \circ P_{\tilde{a}^\perp}$ sendo também um operador normal. Então, se repetimos esse processo até completarmos o espaço, i.e., até que $P_a + P_{\tilde{a}} + P_{\tilde{\tilde{a}}} + \cdots = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$, teremos obtido a decomposição espectral de A. Com isso completamos a prova do teorema

$$A \circ A^\dagger = A^\dagger \circ A \Rightarrow \exists \{P_a\} \mid \sum_a P_a = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}, P_a P_{a'} = \delta_{\alpha_a, \alpha_{a'}} P_a \text{ e } A = \sum_a \alpha_a P_a. \tag{75}$$

Exercício: Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é normal e obtenha sua decomposição espectral.

3.2 Autovetores da adjunta

Para uma matriz normal, pela decomposição espectral $A = \sum_a \alpha_a P_a$ teremos que

$$A^\dagger = \left(\sum_a \alpha_a P_a \right)^\dagger = \sum_a \alpha_a^* P_a^\dagger = \sum_a \alpha_a^* P_a. \tag{76}$$

Portanto os autovetores de A e de $A^\dagger$ são os mesmos. No entanto, isso não é necessariamente o caso para operadores que não são normais. Como exemplo considere a matriz $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Veja os autovalores e autovetores dessa matriz e de sua adjunta mostrados abaixo.

In [43]:
```
A = Matrix([[1j, 0],[1,-1]])
A
A.eigenvects()
```

Out[43]:

$$\left[\left(-1.0, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \right] \right), \quad \left(1.0i, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix} 1.0 + 1.0i \\ 1.0 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

```
In [45]: # Adjunta
         Ad = Dagger(A)
         Ad.eigenvects()
```

Out[45]:

$$\left[\left(-1.0, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix} -0.5 - 0.5i \\ 1.0 \end{bmatrix} \right] \right), \quad \left(-1.0i, \quad 1, \quad \left[\begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

```
In [46]: # Verificação de que A não é normal
         A*Ad-Ad*A
```

Out[46]:

$$\begin{bmatrix} -1.0 & 1 + 1.0i \\ 1 - 1.0i & 1 \end{bmatrix}$$

4 Operadores Hermitianos

Esses são os operadores usados em Mecânica Quântica para descrever quantidades observáveis experimentalmente. Um operador linear $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dito Hermitiano se seu adjunto for ele próprio, i.e.,

$$A^\dagger = A. \tag{77}$$

OBS: Se um operador linear $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é Hermitiano, ele também é normal e por conseguinte possui uma decomposição espectral em uma base ortonormal. Então, se $A|a\rangle = a|a\rangle$ e $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ com $a \neq a'$, devemos ter $\langle a|a'\rangle = 0$, i.e., os autovetores correspondentes são ortogonais.

4.1 Teorema

Operdores Hermitianos possuem autovalores reais e seus autovetores correspondentes a autovalores diferentes são ortogonais.

4.1.1 Prova

Considera um par qualquer de autovalores de A, i.e., considera $A|a\rangle = a|a\rangle$ e $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$. Temos assim que

$$(|a'\rangle, A|a\rangle) = (|a'\rangle, a|a\rangle) = a(|a'\rangle, |a\rangle) \tag{78}$$
$$(A^\dagger|a'\rangle, |a\rangle) = (A|a'\rangle, |a\rangle) = (a'|a'\rangle, |a\rangle) = a'^*(|a'\rangle, |a\rangle). \tag{79}$$

Portanto

$$(a - a'^*)\langle a'|a\rangle = 0. \tag{80}$$

Vemos assim que se $a = a'$, como $\langle a|a\rangle \neq 0$, devemos ter $a - a^* = 0 \Rightarrow \Im(a) = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$. \

Exercício: Verivique que a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ é Hermitiana. Obtenha seus autovalores e autovetores e verifique que estes estão de acordo com o último teorema.

Exercício: Operadores **anti-Hermitianos** são definidos por $A^\dagger = -A$. Mostre que esses operadores possuem uma decomposição espectral e que os autovalores desse tipo de operador são números imaginários puros e que seus autovetores correspondentes a autovalores diferentes são ortogonais.

4.1.2 Valor médio

Em Mecânica Quântica, em algumas situações, o valor médio de um operador linear A é escrito como:

$$\langle A \rangle_\psi := \langle \psi | A | \psi \rangle, \tag{81}$$

com $|\psi\rangle$ sendo um vetor do espaço no qual A atua.

4.1.3 Teorema

O valor médio de um operador Hermitiano é um número real: $A = A^\dagger \Rightarrow \langle A \rangle_\psi \in \mathbb{R}$. #### Prova Consideramos $A = A^\dagger = \sum_j a_j P_j$, com os projetores 1D definidos como usual ($P_j|v\rangle = \langle a_j|v\rangle|a_j\rangle$) e $a_j \in \mathbb{R}$. Vamos expandir o vetor qualquer $|\psi\rangle$ na base de autovetores de A: $|\psi\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle$. Como isso vem que

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle &= \sum_j c_j^* \langle a_j | \sum_k a_k P_k \sum_l c_l |a_l\rangle && (82)\\
&= \sum_{j,k,l} c_j^* c_l a_k \langle a_j | P_k | a_l \rangle = \sum_{j,k,l} c_j^* c_l a_k \langle a_j | \langle a_k | a_l \rangle | a_k \rangle && (83)\\
&= \sum_j |c_j|^2 a_j \in \mathbb{R}. && (84)
\end{aligned}$$

4.2 Comutador e anti-comutador

O comutador entre dois operadores lineares $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operado em $\mathcal{H}$ deinido por

$$[A, B] := A \circ B - B \circ A. \tag{85}$$

A importância desse operador é que se $[A, B] =$, então a ordem com que esses operadores são aplicados não faz diferença. Caso contrário, obteremos diferentes vetores mudando a ordem de aplicação dos operadores.

Vemos assim que poderíamos ter definido *operadores normais* como sendo aqueles operadores que comutam com seu adjunto:

$$[A, A^\dagger] = \mathbb{O}. \tag{86}$$

Exercício: Verifique que para $X, Y, Z : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ temos

$$\begin{aligned}
[X, Y + Z] &= [X, Y] + [X, Z], && (87)\\
[X + Y, Z] &= [X, Z] + [Y, Z], && (88)\\
[X, Y \circ Z] &= Y \circ [X, Z] + [X, Y] \circ Z, && (89)\\
[X \circ Y, Z] &= X \circ [Y, Z] + [X, Z] \circ Y. && (90)
\end{aligned}$$

A matriz identidade 2x2 e as matrizes de Pauli são definidas por:

$$\mathbb{I}_2 \equiv \sigma_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_x \equiv \sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y \equiv \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z \equiv \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{91}$$

Exercício: Verifique que para as matrizes de Pauli teremos (use o código abaixo para facilitar a resolução desses três exercícios)

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{j,k}\sigma_0 + sgn(j,k,l)i\sigma_l, \ \ j,k = 1,2,3. \tag{92}$$

Exercício: verifique que as matrizes de Pauli satisfazem a relação de comutação a seguir:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = sgn(j,k,l)2i\sigma_l, \ \ j,k = 1,2,3. \tag{93}$$

O anti-comutador entre dois operadores lineares $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador linear definido como

$$\{A, B\} := A \circ B + B \circ A. \tag{94}$$

Exercício: Verifique que as matrizes de Pauli anti-comutam:

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} := \mathbb{O}_{\mathbb{C}^2}, \ \ \forall j \neq k \text{ e } j,k = 1,2,3. \tag{95}$$

```
In [53]: def comm(A,B):
             return A*B-B*A
```

```
In [54]: def acomm(A,B):
             return A*B+B*A
```

```
In [55]: def pauli(j):
             if j == 0:
                 return Matrix([[1,0],[0,1]])
             elif j == 1:
                 return Matrix([[0,1],[1,0]])
             elif j == 2:
                 return Matrix([[0,-1j],[1j,0]])
             elif j == 3:
                 return Matrix([[1,0],[0,-1]])
```

```
In [56]: comm(pauli(1),pauli(2))
```

Out[56]:

$$\begin{bmatrix} 2.0i & 0 \\ 0 & -2.0i \end{bmatrix}$$

```
In [57]: acomm(pauli(1),pauli(2))
```

Out[57]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
In [58]: A = Symbol("A", commutative = False)
         B = Symbol("B", commutative = False)
         comm(A,B)
```

Out[58]:

$$AB - BA$$

5 Teorema (diagonalização simultânea)

Dois operadores lineares Hermitianos $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ compartilham a mesma base de autovetores se e somente se comutarem, i.e.,

$$A = \sum_j a_j P_j \text{ e } B = \sum_j b_j P_j \Leftrightarrow [A, B] = _{\mathcal{H}}. \tag{96}$$

5.1 Prova

Começamos assumindo que A e B são diagonalizados na mesma base ortonormal. Assim

$$[A, B] = \left[\sum_j a_j P_j, \sum_k b_k P_k\right] = \sum_{j,k} a_j b_k [P_j, P_k] \tag{97}$$

$$= \sum_{j,k} a_j b_k (P_j \circ P_k - P_k \circ P_j) = \sum_{j,k} a_j b_k (\delta_{j,k} P_j - \delta_{k,j} P_k) \tag{98}$$

$$= \sum_j a_j b_j (P_j - P_j) = _{\mathcal{H}}. \tag{99}$$

Seguindo, assumimos que $A \circ B = B \circ A$. Assim, considerando que a decomposição espectral de A é $A = \sum_j a_j P_j$, teremos

$$A \circ B \circ P_j = B \circ A \circ P_j = B \circ A \circ P_j = B \circ a_j P_j = a_j B \circ P_j. \tag{100}$$

Para que essa relação seja verdaderia, B deve levar vetores do subespaço gerado pelos autovetores de A correspondentes ao autovalor a_j em vetores desse mesmo subespaço. Mas se isso ocorre, como B é Herminiano, deve existir uma base ortonormal desse subespaço que é constituída por autovetores de B. E isso implica que existe uma base comum de autovetores de A e B, completando assim a prova do teorema.

Uma maneira mais fácil de entender esta última parte da prova é a seguinte. Considera a eq. de autovalores e autovetores: $A|a_j^{(k)}\rangle = a_j|a_j^{(k)}\rangle$ com $k = 1, \cdots, \dim \mathcal{H}_j$. Note que $\mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{H}$ é o subespaço gerado pelo autovetores de A correspondentes ao autovalor a_j. Agora,

$$A(B|a_j^{(k)}\rangle) = (A \circ B)(|a_j^{(k)}\rangle) = (B \circ A)(|a_j^{(k)}\rangle) = B(A(|a_j^{(k)}\rangle)) = B(a_j(|a_j^{(k)}\rangle)) \tag{101}$$

$$= a_j(B|a_j^{(k)}\rangle). \tag{102}$$

Ou seja $B|a_j^{(k)}\rangle$ também é autovetor de A com autovalor a_j. Portanto $B|a_j^{(k)}\rangle \in \mathcal{H}_j$. Como B é Hermitiano, existe uma base de $\mathcal{H}_j$ que o diagonaliza, e que também diagonaliza A.

Exercício: Para $A|a_j^{(k)}\rangle = a_j|a_j^{(k)}\rangle$, verifique que se $|v\rangle = \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{H}_k} c_k|a_j^{(k)}\rangle$ então $A|v\rangle = a_j|v\rangle$, com $c_k \in \mathbb{F}$. Ou seja, qualquer combinação linear dos autovetores de um operador linear também é um autovetor desse operador, correspondente ao mesmo autovalor.

Exercício: Determine se σ_x e σ_y compartilham ou não a mesma base de autovetores. Obtenha essas bases.

6 Operadores unitários

São utilizados para descrever a dinâmica de sistemas quânticos. Um operador (ou matriz) $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dito unitário se

$$A^\dagger \circ A = A \circ A^\dagger = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}. \tag{103}$$

Ou seja, o adjunto de um operador unitário é igual a sua inversa: $A^\dagger = A^{-1}$.

Exercício: Verifique que se A for uma matriz unitária então $\det(A) = \pm 1$. **Exercício:** Verifique que o adjunto de uma matriz unitária é uma matriz unitária. **Exercício:** Verifique que o produto de duas matrizes unitárias é uma matriz unitária.

Algumas outras propriedades importantes de operadores unitários são as seguintes: 1. Operadores unitários preservam o produto interno. Ou seja, para $\forall |v\rangle, |w\rangle \in \mathcal{H}$ teremos

$$(A|v\rangle, A|w\rangle) = (A^\dagger \circ A|v\rangle, |w\rangle) = (\mathbb{I}_{\mathcal{H}}|v\rangle, |w\rangle) = (|v\rangle, |w\rangle). \tag{104}$$

Exercício: Seja $|\psi\rangle$ um vetor qualquer de $\mathcal{H}$ e $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador unitário, verifique que $|||\psi\rangle|| = ||U|\psi\rangle||$

2. Os autovalores de um operador unitário são números complexos com módulo igual a 1: Considera $A|a\rangle = a|a\rangle$. Teremos

$$(A|a\rangle, A|a\rangle) = (a|a\rangle, a|a\rangle) = a^* a(|a\rangle, |a\rangle) = |a|^2\langle a|a\rangle \tag{105}$$

$$(A^\dagger \circ A|a\rangle, |a\rangle) = (\mathbb{I}_{\mathcal{H}}|a\rangle, |a\rangle) = \langle a|a\rangle. \tag{106}$$

   Portando $|a| = 1$ e os autovalores da matriz unitária devem ter a forma $a = e^{i\theta_a}$. **Exercício:** Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ é unitária, calcule seus autovalores e os coloque na forma polar.

3. O conjunto de vetores linha de uma matriz unitária $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ é um conjunto ortonormal:

$$\langle L_j^A|L_k^A\rangle = |L_j^A\rangle^\dagger L_k^A\rangle = \begin{bmatrix} A_{j,1}^* & A_{j,2}^* & \cdots & A_{j,n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{k,1} \\ A_{k,2} \\ \vdots \\ A_{k,n} \end{bmatrix} \tag{107}$$

$$= A_{j,1}^* A_{k,1} + A_{j,2}^* A_{k,2} + \cdots + A_{j,n}^* A_{k,n} = \sum_{l=1}^{n} A_{k,l}(A^\dagger)_{l,j} = (AA^\dagger)_{k,j} = (\mathbb{I}_n)_{k,j} \tag{108}$$

$$= \delta_{k,j}. \tag{109}$$

   Exercício: Faça a verificação análoga para o conjunto de vetores coluna de uma matriz unitária.

Exercício: Se lhes é fornecida uma matriz A cujos vetores coluna formam uma base LI, qual procedimento podemos utilizar para obter uma matriz unitária a partir de A.

Exercício: Verifique que se $\{|\alpha_j\rangle\}$ e $\{|\beta_j\rangle\}$ são bases ortonormais de $\mathbb{C}^n$, então $U := \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j\rangle\langle\beta_j|$ é uma matriz unitária.

6.1 Função traço (propriedades)

O traço de um operador linear $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, com $d = \dim \mathcal{H}$, é a soma dos elementos na diagonal principal da matriz correspondente. Se a representação matricial é feita na base $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^{d}$, então

$$Tr(A) = \sum_{j=1}^{d} A_{j,j} \equiv \sum_{j=1}^{d} \langle bj|A|b_j\rangle. \tag{110}$$

Algumas propriedades importantes do traço são: 1. Propriedade cíclica: $Tr(AB) = Tr(BA)$ Para quaisquer duas matrizes $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ e $B \in \mathbb{C}^{nxm}$ teremos

$$Tr(AB) = \sum_{j=1}^{m} (AB)_{j,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n}^{n} A_{j,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_{k,j}A_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = Tr(BA). \tag{111}$$

2. Invariância por transformação de similaridade Ou seja, para U unitária (ou ortogonal) teremos $Tr(UAU^\dagger) = Tr(A)$:

$$Tr(UAU^\dagger) = Tr(U^\dagger UA) = Tr(\mathbb{I}A) = Tr(A). \tag{112}$$

Exercício: Considere operadores lineares $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ e verifique que $\langle A|B\rangle_{hs} = \langle UAU^\dagger|UBU^\dagger\rangle_{hs}$.

3. Invariância por escolha da base Ou seja, se $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^{d}$ e $\{|a_j\rangle\}_{j=1}^{d}$ são duas bases ortonormais do espaço vetorial considerado, então $Tr(A) = \sum_{j=1}^{d}\langle bj|A|b_j\rangle = \sum_{j=1}^{d}\langle a_j|A|a_j\rangle$. Para fazer essa prova escrevemos $|a_j\rangle = \sum_{k=1}^{d}\langle b_k|a_j\rangle|b_k\rangle$:

$$\sum_{j=1}^{d}\langle a_j|A|a_j\rangle = \sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d}\langle b_k|a_j\rangle|b_k\rangle\right)^\dagger A \sum_{l=1}^{d}\langle b_l|a_j\rangle|b_l\rangle = \sum_{j,k,l=1}^{d}\langle b_l|a_j\rangle\langle b_k|a_j\rangle^*\langle b_k|A|b_l\rangle \tag{113}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{d}\langle b_l|(\sum_{j=1}^{d}|a_j\rangle\langle a_j|)|b_k\rangle\langle b_k|A|b_l\rangle = \sum_{k,l=1}^{d}\langle b_l|\mathbb{I}|b_k\rangle\langle b_k|A|b_l\rangle = \sum_{k,l=1}^{d}\delta_{l,k}\langle b_k|A|b_l\rangle \tag{114}$$

$$= \sum_{k=1}^{d}\langle b_k|A|b_k\rangle. \tag{115}$$

4. Traço do produto externo Vamos mostrar que para quaisquer dois vetores $|\eta\rangle, |\xi\rangle$ teremos $Tr(|\eta\rangle\langle\xi|) = \langle\xi|\eta\rangle$. Para isso usamos a invariância do traço por mudança de base para escolher uma base ortonormal que contenha um desses vetores. Por exemplo, usemos a base $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^{d}$ com $|b_1\rangle = |\eta\rangle$. Assim

$$Tr(|\eta\rangle\langle\xi|) = \sum_{j=1}^{d}\langle bj|\eta\rangle\langle\xi|b_j\rangle = \sum_{j=1}^{d}\langle bj|b_1\rangle\langle\xi|b_j\rangle = \sum_{j=1}^{d}\delta_{j,1}\langle\xi|b_j\rangle = \langle\xi|b_1\rangle = \langle\xi|\eta\rangle. \tag{116}$$

7 Operadores positivos

Um operador linear $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dito positivo (positivo semidefinido, formalmente) se

$$\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0, \forall|\psi\rangle \in \mathcal{H}. \tag{117}$$

Quando essa condição é satisfeita, usamos a notação $A \geq_{\mathcal{H}}$.

Alguns resultados relevantes relacionados: * Se o operador A for positivo e normal, seus **autovalores** são não negativos pois

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_a aP_a|\psi\rangle = \sum_a a\langle\psi|P_a|\psi\rangle = \sum_a a\langle\psi|\langle a|\psi\rangle|a\rangle \tag{118}$$

$$= \sum_a a|\langle a|\psi\rangle|^2 \geq 0. \tag{119}$$

E para garantir a não negatividade do "sanduíche", devemos ter $a \geq 0, \forall a$.

-

7.0.1 Teorema:

Se um operador linear é positivo semidefinido ($A \geq_{\mathcal{H}}$), então ele é **Hermitiano** ($A = A^\dagger$). #### Prova: Primeiro notemos que podemos escrever qualquer operador linear A como:

$$A = B + iC, \tag{120}$$

com $B = B^\dagger$ e $C = C^\dagger$. Uma possibilidade para esses operadores Hermitianos é:

$$B = (A + A^\dagger)/2 \text{ e } C = (A - A^\dagger)/2i. \tag{121}$$

Exercício: Verifique que esses operadores são de fato Hermitianos e que quando subsituídos na expressão acima retornam A, como esperado. Como $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle A\rangle_\psi \geq 0$ teremos

$$\langle A\rangle_\psi = \langle B\rangle_\psi + i\langle C\rangle_\psi \geq 0, \tag{122}$$

que implica que $\langle C\rangle_\psi$ deve ser um número imaginário puro. Mas como $C = C^\dagger$, sabemos que $\langle C\rangle_\psi$ é real. A única maneira de satisfazer essas duas condições é com $\langle C\rangle_\psi = 0$. Mas assim vem que $\langle(A - A^\dagger)\rangle_\psi = 0$, que será satisfeita para um $|\psi\rangle$ qualquer somente de $A = A^\dagger$, completando assim a prova do teorema.

- Para um operador linear qualquer $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, temos que $A := B^\dagger \circ B$ é um operador positivo pois

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = (|\psi\rangle, |A|\psi\rangle) = (|\psi\rangle, B^\dagger \circ B|\psi\rangle) = (B|\psi\rangle, B|\psi\rangle) \tag{123}$$

$$\equiv (|\phi\rangle, |\phi\rangle) \geq 0. \tag{124}$$

Exercício: Da mesma forma, verifique que $B \circ B^\dagger \geq_{\mathcal{H}}$.

- Para $X, Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, ao escrevermos $X \geq Y$ queremos dizer que $A := X - Y \geq {}_{\mathcal{H}}$. Vamos verificar que $X \geq Y \Rightarrow \langle X \rangle_\psi \geq \langle Y \rangle_\psi$. Teremos

$$\langle (X - Y) \rangle_\psi = \langle \psi | (X - Y) | \psi \rangle \geq 0 \tag{125}$$
$$= \langle \psi | X | \psi \rangle - \langle \psi | Y | \psi \rangle = \langle X \rangle_\psi - \langle Y \rangle_\psi. \tag{126}$$

  Portanto $\langle X \rangle_\psi - \langle Y \rangle_\psi \geq 0 \Rightarrow \langle X \rangle_\psi \geq \langle Y \rangle_\psi$.

- Qualquer menor principal de uma matriz Hermitiana positiva semidefinida também é positivo semidefinido. Em particular $A \geq \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{j,j} & A_{j,k} \\ A_{k,j} & A_{k,k} \end{bmatrix} \geq \mathbb{O} \forall j, k$. Os interessados podem encontrar a prova em [R.A. Horn e C.R. Johnson, Matrix Analysis (Cambridge University Press, 2013)].

Exercício: Verificar que se J é uma matriz positiva e U é uma matriz unitária, então $UJU^\dagger$ também é uma matriz positiva.