

10_Lie

November 11, 2019

0.1 Notas de aula: Teoria de Grupos, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

[2]: `%run /Users/jonasmaziero/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb`

0.2 Grupos de Lie

O grupo de Lorentz é um exemplo de grupo contínuo, cujos elementos são parametrizados por números reais (ou complexos). Grupos de Lie são grupos contínuos tais que os parâmetros que determinam o elemento composto são funções analíticas dos parâmetros que determinam os elementos sendo compostos. Nesses casos podemos descrever todo o grupo "olhando" para elementos infinitesimalmente próximos ao elemento identidade.

Exemplo: $SO(2)$ Esse grupo contínuo é formado pelas matrizes de rotação em \mathbb{R}^2 , i.e., matrizes ortogonais ($OO^T = O^TO = \sigma_0$) com determinante igual a um (para garantir permanência no sistema de coordenadas destrógiro). Os Elementos desse grupo podem ser parametrizados e escritos como segue (**exercício**):

$$O_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \sigma_0 \cos \phi + i\sigma_2 \sin \phi = e^{i\sigma_2 \phi}. \quad (1)$$

Aqui é direto ver que $O_\phi O_{\phi'} = O_{\phi+\phi'}$ pois, pela comutatividade, $e^{i\sigma_2 \phi} e^{i\sigma_2 \phi'} = e^{i\sigma_2 (\phi+\phi')}$. Claro, para rotações infinitesimais $O_{\phi \rightarrow 0} \approx \sigma_0 + i\phi \sigma_2$.

Exemplo: $SU(2)$ Esse grupo contínuo é formado pelas matrizes de rotação em \mathbb{C}^2 , i.e., matrizes ortogonais ($UU^\dagger = U^\dagger U = \sigma_0$) com determinante igual a um (para garantir permanência no sistema de coordenadas destrógiro). Qualquer matriz desse tipo pode ser escrita como

$$U_{\alpha, \theta, \hat{n}} = e^{i\alpha} R_{\hat{n}}(\theta), \quad (2)$$

com

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \theta} = \sigma_0 \cos \theta + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \theta. \quad (3)$$

Aqui a transformação infinitesimal ($\epsilon \rightarrow 0$) fica:

$$R_{\hat{n}}(\epsilon) = e^{i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \epsilon} = \sigma_0 + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (4)$$

$$\approx \sigma_0 + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \epsilon. \quad (5)$$

0.2.1 Geradores do grupo de Lie

Os exemplos acima indicam uma representação infinitesimal geral ($\epsilon \rightarrow 0$):

$$R(\epsilon) = e^{i\epsilon S} \approx e + i\epsilon S, \quad (6)$$

em que as transformações S são os ditos *geradores* do grupo de Lie.

Algumas observações: * Elemento inverso

$$R^{-1}(\epsilon) = e^{-i\epsilon S} \approx e - i\epsilon S. \quad (7)$$

- Se R é unitário, S é Hermitiano:

$$R^\dagger(\epsilon)R(\epsilon) = e \approx e + i\epsilon(S - S^\dagger). \quad (8)$$

- Se R é normal e $\det(R) = 1$, então $\text{Tr}(S) = 0$:

$$\det(R(\epsilon)) = \det(e^{i\epsilon S}) = e^{i\epsilon \text{Tr}(S)}. \quad (9)$$

- Transformação finita é obtida de ($\epsilon = N\epsilon = \epsilon + \dots + \epsilon$ para $N \rightarrow \infty$):

$$R(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} (e + i(\epsilon/N)S)^N = e^{i\epsilon S}. \quad (10)$$

- Geradores a partir das transformações finitas:

$$S = -i \left[\frac{dR}{d\epsilon} \right]_{\epsilon \rightarrow 0}. \quad (11)$$

Por exemplo,

$$-i \left[\frac{dO_\phi}{d\phi} \right]_{\phi \rightarrow 0} = -i \lim_{\phi \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ -\cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix} = \sigma_2. \quad (12)$$

Exercício: Obtenha o gerador do grupo de Lorentz.

0.2.2 Álgebra de Lie

Notemos que o produto de duas transformações de Lie é equivalente a uma outra transformação infinitesimal com gerador dado pela soma dos geradores:

$$R(\epsilon) * R'(\epsilon) \approx (e + i\epsilon S) * (e + i\epsilon S') \approx e + i\epsilon(S + S') \quad (13)$$

$$=: e + i\epsilon S'' \equiv R''(\epsilon). \quad (14)$$

Note, como a soma + de dois geradores é um gerador, temos uma estrutura parecida com aquela de um espaço vetorial, que é a primeira estrutura de grupo de uma álgebra de Lie. A outra estrutura, de multiplicação, é dada pelos comutadores:

$$[S_j, S_k] = c_{j,k}^l S_l, \quad (15)$$

em que $c_{j,k}^l$ são as chamadas constantes de estrutura do grupo de Lie.

0.3 $SO(3)$

Consideremos as matrizes de rotação em torno de três eixos ortogonais de \mathbb{R}^3 (**exercício**):

$$R_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$R_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$R_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Para esses elementos de $SO(3)$, os geradores são obtidos de

$$S_1 = -i \left[\frac{dR_1}{d\phi} \right]_{\phi \rightarrow 0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \\ 0 & -\cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix}_{\phi \rightarrow 0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$S_2 = -i \left[\frac{dR_2}{d\phi} \right]_{\phi \rightarrow 0} = -i \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi & 0 & -\sin \phi \end{bmatrix}_{\phi \rightarrow 0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$S_3 = -i \left[\frac{dR_3}{d\phi} \right]_{\phi \rightarrow 0} = -i \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\phi \rightarrow 0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

$$(22)$$

```
[3]: s1,s2,s3 = symbols('S_1 S_2 S_3')
s1 = Matrix([[0,0,0],[0,0,-1j],[0,1j,0]])
s2 = Matrix([[0,0,1j],[0,0,0],[-1j,0,0]])
s3 = Matrix([[0,-1j,0],[1j,0,0],[0,0,0]])
def comm(x,y):
    return x*y-y*x
comm(s1,s2)
```

[3]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com o código acima, pode-se verificar que as constantes de estrutura para esses geradores são dadas como segue:

$$[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl}S_l. \quad (23)$$

0.3.1 Relação de comutação para as componentes do momento angular

Em MQ, na base de posição, o momento angular é $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ com $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Podemos escrever, por exemplo,

$$L_1 = (\vec{r} \times \vec{p})_1 = \sum_{k,l} \epsilon_{1kl} r_k p_l = \hbar(-ir_2\partial_3 + ir_3\partial_2) \quad (24)$$

$$= \hbar \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$= \hbar \vec{r}^T S_1 \vec{\nabla}. \quad (26)$$

Pode-se verificar, da mesma forma, que (exercício):

$$L_j = \hbar \vec{r}^T S_j \vec{\nabla} \text{ para } j = 2, 3. \quad (27)$$

Usando

$$\vec{\nabla}(\vec{r}^T) = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 r_1 & \partial_1 r_2 & \partial_1 r_3 \\ \partial_2 r_1 & \partial_2 r_2 & \partial_2 r_3 \\ \partial_3 r_1 & \partial_3 r_2 & \partial_3 r_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3, \quad (29)$$

obtemos as relações gerais de comutação entre as componentes do momento angular (em MQ):

$$[L_j, L_k] = L_j L_k - L_k L_j = \hbar \vec{r}^T S_j \vec{\nabla} \hbar \vec{r}^T S_k \vec{\nabla} - \hbar \vec{r}^T S_k \vec{\nabla} \hbar \vec{r}^T S_j \vec{\nabla} \quad (30)$$

$$= \hbar^2 \vec{r}^T S_j (\vec{\nabla} \vec{r}^T) S_k \vec{\nabla} - \hbar^2 \vec{r}^T S_k (\vec{\nabla} \vec{r}^T) S_j \vec{\nabla} \quad (31)$$

$$= \hbar^2 \vec{r}^T S_j \mathbb{I}_3 S_k \vec{\nabla} - \hbar^2 \vec{r}^T S_k \mathbb{I}_3 S_j \vec{\nabla} \quad (32)$$

$$= \hbar^2 \vec{r}^T (S_j S_k - S_k S_j) \vec{\nabla} = i \epsilon_{jkl} \hbar^2 \vec{r}^T S_l \vec{\nabla} \quad (33)$$

$$= i \hbar \epsilon_{jkl} L_l. \quad (34)$$

0.3.2 $\{L_j\}$ como geradores do grupo de Lie $SO(3)$

Considere uma rotação do vetor posição de uma partícula em \mathbb{R}^3 :

$$\vec{r}' = R \vec{r}. \quad (35)$$

A transformação equivalente no espaço das funções de onda pode ser escrita como

$$R(\psi(\vec{r})) = \psi'(\vec{r}) =: \psi(\vec{r}'). \quad (36)$$

Para uma rotação infinitesimal em torno de z :

$$R_3(\delta\phi)\psi(\vec{r}) = \psi(R_3(\delta\phi)\vec{r}) = \psi(\vec{r}'). \quad (37)$$

Agora,

$$\vec{r}' \approx (\mathbb{I} + i\delta\phi S_3)\vec{r} = \vec{r} + i\delta\phi \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \delta\phi r_2 \\ r_2 - \delta\phi r_1 \\ r_3 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Assim, usando expansão em série de Taylor,

$$R_3(\delta\phi)\psi(r_1, r_2, r_3) = \psi(r_1 + \delta\phi r_2, r_2 - \delta\phi r_1, r_3) \quad (39)$$

$$= \psi(r_1, r_2, r_3) + \delta\phi r_2 \partial_1 \psi(r_1, r_2, r_3) - \delta\phi r_1 \partial_2 \psi(r_1, r_2, r_3) \quad (40)$$

$$= \psi(r_1, r_2, r_3) - (i/\hbar) \delta\phi (i\hbar r_2 \partial_1 - i\hbar r_1 \partial_2) \psi(r_1, r_2, r_3) \quad (41)$$

$$= \psi(r_1, r_2, r_3) - (i/\hbar) \delta\phi L_3 \psi(r_1, r_2, r_3). \quad (42)$$

Ou seja,

$$R_3(\delta\phi)\psi = \psi - i(L_3/\hbar)\psi. \quad (43)$$

Seguindo, trocamos ψ por $R_3(\phi)\psi$:

$$R_3(\delta\phi)R_3(\phi)\psi - R_3(\phi)\psi = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi)\psi \quad (44)$$

$$\therefore R_3(\phi + \delta\phi)\psi - R_3(\phi)\psi = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi)\psi \quad (45)$$

$$\therefore \frac{R_3(\phi + \delta\phi) - R_3(\phi)}{\delta\phi} = \frac{dR_3(\phi)}{d\phi} = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi) \quad (46)$$

$$\therefore R_3(\phi) = e^{-iL_3\phi/\hbar}. \quad (47)$$

Exercício: Faça a verificação análoga para R_1 e R_2 .

0.3.3 Geradores e quebra de degenerescência

Consideremos a equação característica para o Hamiltoniano de algum sistema físico:

$$H|E\rangle = E|E\rangle. \quad (48)$$

Vamos supor que H é invariante por transformações de similaridade através dos elementos R de um certo grupo G :

$$RHR^{-1} = H \therefore RH = HR \therefore [H, R] = 0. \quad (49)$$

Agora, aplicamos R na equação de autovalores e autovetores

$$RH|E\rangle = RE|E\rangle \Rightarrow H(R|E\rangle) = E(R|E\rangle). \quad (50)$$

Ou seja, se H comuta com os elementos $R \in G$, então $R|E\rangle$ também são autovetores de H correspondentes ao mesmo autovalor E . Por isso dizemos que os autovetores $R|E\rangle$ são degenerados.

Consideremos agora que G é um grupo de Lie, i.e., $R = e^{i\epsilon S}$. Se usarmos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$H = RHR^{-1} = e^{i\epsilon S}He^{-i\epsilon S} \quad (51)$$

$$= H + i\epsilon[S, H] - \epsilon^2[S, [S, H]] + \dots, \quad (52)$$

vemos que, como $\epsilon \rightarrow 0$, devemos ter

$$[S, H] = 0. \quad (53)$$

Ou seja, se H é invariante sob a ação dos elementos de um grupo de Lie, então H comuta com os geradores desse grupo, e vice-versa. E isso implica que H e S possuem a mesma base de autovetores. Com isso, podemos quebrar a degenerescência (identificar diferentes autovetores) de H através dos autovalores de S .

[]: