05_composite

October 1, 2019

0.1 Notas de aula: Álgebra Linear, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

```
In [56]: %run init.ipynb
         %run 03_operators.ipynb
         from scipy.linalg import polar, lapack
         import mpmath
```

1 Espaços compostos

Para a descrição de sistemas constituídos por "muitas partículas", precisaremos do conceito de espaços compostos. Considere dois espaços de Hilbert $\mathcal{H}_a$ e $\mathcal{H}_b$ com bases respectivas $\{|a_j\rangle\}_{j=1}^{\dim\mathcal{H}_a}$ e $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^{\dim\mathcal{H}_b}$. A composição dos dois espaços nos fornece um espaço de Hilbert "maior" denotado por

$$\mathcal{H}_{ab} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b. \tag{1}$$

Uma base para o espaço composto pode ser obtida através do produto tensorial (ou produto de Kronecker ou produto direto) dos vetores das bases individuais:

$$|c_{jk}\rangle := |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle, \tag{2}$$

para $j = 1, \cdots, \dim\mathcal{H}_a$ e $k = 1, \cdots, \dim\mathcal{H}_b$.

1.0.1 Produto tensorial

O produto tensorial de duas matrizes $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ e $B \in \mathbb{C}^{pxq}$ é uma matriz $mpxnq$ definida como:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,d_a} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,d_a} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{d_a,1} & A_{d_a,2} & \cdots & A_{d_a,d_a} \end{bmatrix} \otimes B := \begin{bmatrix} A_{1,1}B & A_{1,2}B & \cdots & A_{1,d_a}B \\ A_{2,1}B & A_{2,2}B & \cdots & A_{2,d_a}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{d_a,1}B & A_{d_a,2}B & \cdots & A_{d_a,d_a}B \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Exemplo: Consideremos

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} & A_{1,2} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \\ A_{2,1} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} & A_{2,2} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} & A_{1,1}B_{1,2} & A_{1,2}B_{1,1} & A_{1,2}B_{1,2} \\ A_{1,1}B_{2,1} & A_{1,1}B_{2,2} & A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} & A_{2,1}B_{1,2} & A_{2,2}B_{1,1} & A_{2,2}B_{1,2} \\ A_{2,1}B_{2,1} & A_{2,1}B_{2,2} & A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,2}B_{2,2} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Exercício: Calcule o produto tensorial $\sigma_x \otimes \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

```
In [57]: A11,A12,A21,A22,B11,B12,B21,B22 = symbols("A_11 A_12 A_21 A_22 B_11 B_12 B_21 B_22")
         A = Matrix([[A11,A12],[A21,A22]])
         B = Matrix([[B11,B12],[B21,B22]])
         tp(A,B)
```

Out[57]:

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.0.2 Propriedade importante de produto tensorial

Vamos começar verificando que para quaisquer matrizes A, B, C, D, com dimensões apropriadas para que as multiplicações matriciais envolvidas possam ser realizadas, teremos $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$. Faremos a verificação explícita

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{bmatrix} A_{1,1}B & A_{1,2}B & \cdots \\ A_{2,1}B & A_{2,2}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,1}D & C_{1,2}D & \cdots \\ C_{2,1}D & C_{2,2}D & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{1,1}BC_{1,1}D + A_{1,2}BC_{2,1}D + \cdots) & (A_{1,1}BC_{1,2}D + A_{1,2}BC_{2,2}D + \cdots) & \cdots \\ (A_{2,1}BC_{1,1}D + A_{2,2}BC_{2,1}D + \cdots) & (A_{2,1}BC_{1,2}D + A_{2,2}BC_{2,2}D + \cdots) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{1,1}C_{1,1} + A_{1,2}C_{2,1} + \cdots)BD & (A_{1,1}C_{1,2} + A_{1,2}C_{2,2} + \cdots)BD & \cdots \\ (A_{2,1}C_{1,1} + A_{2,2}C_{2,1} + \cdots)BD & (A_{2,1}C_{1,2} + A_{2,2}C_{2,2} + \cdots)BD & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{1,1}C_{1,1} + A_{1,2}C_{2,1} + \cdots) & (A_{1,1}C_{1,2} + A_{1,2}C_{2,2} + \cdots) & \cdots \\ (A_{2,1}C_{1,1} + A_{2,2}C_{2,1} + \cdots) & (A_{2,1}C_{1,2} + A_{2,2}C_{2,2} + \cdots) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \otimes BD \tag{9}$$

$$= AC \otimes BD. \tag{10}$$