09_Lie

November 7, 2019

0.1 Notas de aula: Teoria de Grupos, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

[2]:
```
%run /Users/jonasmaziero/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb
```

0.2 Grupos de Lie

O grupo de Lorentz é um exemplo de grupo contínuo, cujos elementos são parametrizados por números reais (ou complexos). Grupos de Lie são grupos contínuos tais que os parâmetros que determinam o elemento composto são funções analíticas dos parâmetros que determinam os elementos sendo compostos. Nesses casos podemos descrever todo o grupo "olhando" para elementos infinitesimalmente próximos ao elemento identidade.

Exemplo: $SO(2)$ Esse grupo contínuo é formado pelas matrizes de rotação em $\mathbb{R}^2$, i.e., matrizes ortogonais ($OO^T = O^TO = \sigma_0$) com determinante igual a um (para garantir permanência no sistema de coordenadas destrógiro). Os Elementos desse grupo podem ser parametrizados e escritos como segue (**exercício**):

$$O_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \sigma_0\cos\phi + i\sigma_2\sin\phi = e^{i\sigma_2\phi}. \tag{1}$$

Aqui é direto ver que $O_\phi O_{\phi'} = O_{\phi+\phi'}$ pois, pela comutatividade, $e^{i\sigma_2\phi}e^{i\sigma_2\phi'} = e^{i\sigma_2(\phi+\phi')}$. Claro, para rotações infinitesimais $O_{\phi\rightarrow 0} \approx \sigma_0 + i\phi\sigma_2$.

Exemplo: $SU(2)$ Esse grupo contínuo é formado pelas matrizes de rotação em $\mathbb{C}^2$, i.e., matrizes ortogonais ($UU^\dagger = U^\dagger U = \sigma_0$) com determinante igual a um (para garantir permanência no sistema de coordenadas destrógiro). Qualquer matriz desse tipo pode ser escrita como

$$U_{\alpha,\theta,\hat{n}} = e^{i\alpha}R_{\hat{n}}(\theta), \tag{2}$$

com

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\theta} = \sigma_0\cos\theta + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\theta. \tag{3}$$

Aqui a transformação infinitesimal ($\epsilon \to 0$) fica:

$$
\begin{aligned}
R_{\hat{n}}(\epsilon) &= e^{i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\epsilon} = \sigma_0 + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\epsilon + O(\epsilon^2) && (4)\\
&\approx \sigma_0 + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\epsilon. && (5)
\end{aligned}
$$

0.2.1 Geradores do grupo de Lie

Os exemplos acima indicam uma representação infinitesimal geral ($\epsilon \to 0$):

$$R(\epsilon) = e^{i\epsilon S} \approx e + i\epsilon S, \tag{6}$$

em que as transformações S são os ditos *geradores* do grupo de Lie.

Algumas observações: * Elemento inverso

$$R^{-1}(\epsilon) = e^{-i\epsilon S} \approx e - i\epsilon S. \tag{7}$$

- Se R é unitário, S é Hermitiano:

$$R^{\dagger}(\epsilon)R(\epsilon) = e \approx e + i\epsilon(S - S^{\dagger}). \tag{8}$$

- Se R é normal e $\det(R) = 1$, então $Tr(S) = 0$:

$$\det(R(\epsilon)) = \det(e^{i\epsilon S}) = e^{i\epsilon Tr(S)}. \tag{9}$$

- Transformação finita é obtida de ($\varepsilon = N\epsilon = \epsilon + \cdots + \epsilon$ para $N \to \infty$):

$$R(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} (e + i(\varepsilon/N)S)^N = e^{i\varepsilon S}. \tag{10}$$

- Geradores a partir das transformações finitas:

$$S = -i \left[\frac{dR}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon\to 0}. \tag{11}$$

  Por exemplo,

$$-i\left[\frac{dO_\phi}{d\phi}\right]_{\phi\to 0} = -i\lim_{\phi\to 0}\begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi \\ -\cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} = \sigma_2. \tag{12}$$

  Exercício: Obtenha o gerador do grupo de Lorentz.

0.2.2 Álgebra de Lie

Notemos que o produto de duas transformações de Lie é equivalente a uma outra transformação infinitesimal com gerador dado pela soma dos geradores:

$$R(\epsilon) * R'(\epsilon) \approx (e + i\epsilon S) * (e + i\epsilon S') \approx e + i\epsilon(S + S') \tag{13}$$
$$=: e + i\epsilon S'' \equiv R''(\epsilon). \tag{14}$$

Note, como a soma + de dois geradores é um gerador, temos uma estrutura parecida com aquela de um espaço vetorial, que é a primeira estrutura de grupo de uma álgebra de Lie. A outra estrutura, de multiplicação, é dada pelos comutadores:

$$[S_j, S_k] = c^l_{j,k} S_l, \tag{15}$$

em que $c^l_{j,k}$ são as chamadas constantes de estrutura do grupo de Lie.

0.3 $SO(3)$

Consideremos as matrizes de rotação em torno de três eixos ortogonais de $\mathbb{R}^3$ (**exercício**):

$$R_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \tag{16}$$
$$R_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \tag{17}$$
$$R_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Para esses elementos de $SO(3)$, os geradores são obtidos de

$$S_1 = -i \left[\frac{dR_1}{d\phi}\right]_{\phi\to 0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \\ 0 & -\cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix}_{\phi\to 0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$
$$S_2 = -i \left[\frac{dR_2}{d\phi}\right]_{\phi\to 0} = -i \begin{bmatrix} -\sin\phi & 0 & -\cos\phi \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi \end{bmatrix}_{\phi\to 0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$
$$S_3 = -i \left[\frac{dR_3}{d\phi}\right]_{\phi\to 0} = -i \begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\phi\to 0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$
$$\tag{22}$$

[3]:
```
s1,s2,s2 = symbols('S_1 S_2 S_3')
s1 = Matrix([[0,0,0],[0,0,-1j],[0,1j,0]])
s2 = Matrix([[0,0,1j],[0,0,0],[-1j,0,0]])
s3 = Matrix([[0,-1j,0],[1j,0,0],[0,0,0]])
def comm(x,y):
    return x*y-y*x
comm(s1,s2)
```

[3]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com o código acima, pode-se verificar que as constantes de estrutura para esses geradores são dadas como segue:

$$[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl} S_l. \tag{23}$$

0.3.1 Relação de comutação para as componentes do mometo angular

Em MQ, na base de posição, o momento angular é $\vec{L} = \vec{r} \text{x} \vec{p}$ com $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Podemos escrever, por exemplo,

$$L_1 = (\vec{r} \text{x} \vec{p})_1 = \sum_{k,l} \epsilon_{1kl} r_k p_l = \hbar(-ir_2\partial_3 + ir_3\partial_2) \tag{24}$$

$$= \hbar \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$= \hbar \vec{r}^T S_1 \vec{\nabla}. \tag{26}$$

Pode-se verificar, da mesma forma, que (**exercício**):

$$L_j = \hbar \vec{r}^T S_j \vec{\nabla} \text{ para } j = 2, 3. \tag{27}$$

Usando

$$\vec{\nabla}(\vec{r}^T) = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 r_1 & \partial_1 r_2 & \partial_1 r_3 \\ \partial_2 r_1 & \partial_2 r_2 & \partial_2 r_3 \\ \partial_3 r_1 & \partial_3 r_2 & \partial_3 r_3 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3, \tag{29}$$

obtemos as relações gerais de comutação entre as componentes do momento angular (em MQ):

$$
\begin{aligned}
[L_j, L_k] &= L_jL_k - L_kL_j = \hbar\vec{r}^T S_j\vec{\nabla}\hbar\vec{r}^T S_k\vec{\nabla} - \hbar\vec{r}^T S_k\vec{\nabla}\hbar\vec{r}^T S_j\vec{\nabla} && (30)\\
&= \hbar^2\vec{r}^T S_j(\vec{\nabla}\vec{r}^T)S_k\vec{\nabla} - \hbar^2\vec{r}^T S_k(\vec{\nabla}\vec{r}^T)S_j\vec{\nabla} && (31)\\
&= \hbar^2\vec{r}^T S_j\mathbb{I}_3 S_k\vec{\nabla} - \hbar^2\vec{r}^T S_k\mathbb{I}_3 S_j\vec{\nabla} && (32)\\
&= \hbar^2\vec{r}^T(S_jS_k - S_kS_j)\vec{\nabla} = i\epsilon_{jkl}\hbar^2\vec{r}^T S_l\vec{\nabla} && (33)\\
&= i\hbar\epsilon_{jkl}L_l. && (34)
\end{aligned}
$$

0.3.2 $\{L_j\}$ como geradores do grupo de Lie $SO(3)$

Considere uma rotação do vetor posição de uma partícula em $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r}' = R\vec{r}. \tag{35}$$

A transformação equivalente no espaço das funções de onda pode ser esrita como

$$R(\psi(\vec{r})) = \psi'(\vec{r}) =: \psi(\vec{r}'). \tag{36}$$

Para uma rotação infinitesimal em torno de z:

$$R_3(\delta\phi)\psi(\vec{r}) = \psi(R_3(\delta\phi)\vec{r}) = \psi(\vec{r}'). \tag{37}$$

Agora,

$$\vec{r}' \approx (\mathbb{I} + i\delta\phi S_3)\vec{r} = \vec{r} + i\delta\phi \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \delta\phi r_2 \\ r_2 - \delta\phi r_1 \\ r_3 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Assim, usando expansão em série de Taylor,

$$
\begin{aligned}
R_3(\delta\phi)\psi(r_1, r_2, r_3) &= \psi(r_1 + \delta\phi r_2, r_2 - \delta\phi r_1, r_3) && (39)\\
&= \psi(r_1, r_2, r_3) + \delta\phi r_2\partial_1\psi(r_1, r_2, r_3) - \delta\phi r_1\partial_2\psi(r_1, r_2, r_3) && (40)\\
&= \psi(r_1, r_2, r_3) - (i/\hbar)\delta\phi(i\hbar r_2\partial_1 - i\hbar r_1\partial_2)\psi(r_1, r_2, r_3) && (41)\\
&= \psi(r_1, r_2, r_3) - (i/\hbar)\delta\phi L_3\psi(r_1, r_2, r_3). && (42)
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$R_3(\delta\phi)\psi = \psi - i(L_3/\hbar)\psi. \tag{43}$$

Seguindo, trocamos ψ por $R_3(\phi)\psi$:

$$R_3(\delta\phi)R_3(\phi)\psi - R_3(\phi)\psi = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi)\psi \tag{44}$$
$$\therefore R_3(\phi+\delta\phi)\psi - R_3(\phi)\psi = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi)\psi \tag{45}$$
$$\therefore \frac{R_3(\phi+\delta\phi) - R_3(\phi)}{\delta\phi} = \frac{dR_3(\phi)}{d\phi} = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi) \tag{46}$$
$$\therefore R_3(\phi) = e^{-iL_3\phi/\hbar}. \tag{47}$$

Exercício: Faça a verificação análoga para R_1 e R_2.

0.3.3 Geradores e quebra de degenerescência

Consideremos a equação característica para o Hamiltoniano de algum sistema físico:

$$H|E\rangle = E|E\rangle. \tag{48}$$

Vamos supor que H é invariante por transformações de similaridade através dos elementos R de um certo grupo G:

$$RHR^{-1} = H \therefore RH = HR \therefore [H, R] = \nvdash. \tag{49}$$

Agora, aplicamos R na equação de autovalores e autovetores

$$RH|E\rangle = RE|E\rangle \Rightarrow H(R|E\rangle) = E(R|E\rangle). \tag{50}$$

Ou seja, se H comuta com os elementos $R \in G$, então $R|E\rangle$ também são autovetores de H correspondentes ao mesmo autovalor E. Por isso dizemos que os autovetores $R|E\rangle$ são degenerados.

Consideremos agora que G é um grupo de Lie, i.e., $R = e^{i\epsilon S}$. Se usarmos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$H = RHR^{-1} = e^{i\epsilon S}He^{-i\epsilon S} \tag{51}$$
$$= H + i\epsilon[S, H] - \epsilon^2[S, [S, H]] + \cdots, \tag{52}$$

vemos que, como $\epsilon \to 0$, devemos ter

$$[S, H] = \nvdash. \tag{53}$$

Ou seja, se H é invariante sob a ação dos elementos de um grupo de Lie, então H comuta com os geradores desse grupo, e vice-versa. E isso implica que H e S possuem a mesma base de autovetores. Com isso, podemos quebrar a degenerescência (identificar diferentes autovetores) de H através dos autovalores de S.

```
[ ]:
```