

# 01\_determinant

August 29, 2019

```
In [59]: import platform
         if platform.system() == 'Linux':
             %run '/home/jonas/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb'
         else:
             %run '/Users/jonasmaziero/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb'
```

## 1 Função sinal

A função sinal,  $sgn$ , tem como domínio listas  $j_1, j_2, \dots, j_n$  de números naturais e como imagem  $-1, 0, 1$ . Para uma lista com  $n$  números, por definição temos

$$sgn_n(1, 2, \dots, n) := 1. \quad (1)$$

Se quaisquer pares de índices são iguais, a função sinal é nula

$$sgn_n(j_1, j_2, \dots, j_n) := 0 \text{ se } j_p = j_q \text{ para algum par } (p, q). \quad (2)$$

Se precisamos fazer um número par de trocas entre pares de índices de  $j_1, j_2, \dots, j_n$  para obter  $1, 2, \dots, n$  então

$$sgn_n(j_1, j_2, \dots, j_n) := +1 \text{ (No. par de permutações)}. \quad (3)$$

Se precisamos fazer um número ímpar de trocas entre pares de índices de  $j_1, j_2, \dots, j_n$  para obter  $1, 2, \dots, n$  então

$$sgn_n(j_1, j_2, \dots, j_n) := -1 \text{ (No. ímpar de permutações)}. \quad (4)$$

Outra propriedade que define a função sinal é

$$sgn_n(\dots, j_{p-1}, j_p, j_{p+1}, \dots) := (-1)^{n-p} sgn_{n-1}(\dots, j_{p-1}, j_{p+1}, \dots) \quad (5)$$

e relaciona a função sinal aplicada a listas com  $n$  e  $n - 1$  números. Note que  $p$  é a posição onde sacamos o número da lista original.

### 1.0.1 Antisimetria da função sinal

Em vistas das propriedades acima não é difícil notar que ao trocarmos dois índices quaisquer do argumento da função sinal torcamos o seu sinal, se esta não for nula, i.e.,

$$sgn_n(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots) = -sgn_n(\dots, j_q, \dots, j_p, \dots). \quad (6)$$

**Exercício:** Considere a função sinal  $sgn_3$  e escreva seus valores aplicados a todas as possibilidades de trios  $j_1, j_2, j_3$ . Por fim diga a que função, que vocês usaram bastante no curso de física,  $sgn_3$  coincide.

**Exercício:** Escreva o produto vetorial usando  $sgn_3$ .

**Problema:** Obtenha um algoritmo (não trivial) para retornar a função sinal de uma permutação qualquer, e faça o código para testá-lo. Quem conseguir terá 0.5 pontos a mais na P1. Um caso mais simples desse problema é obter um algoritmo para calcular o determinante (via definição "original" com a função sinal), e fazer um programa para testá-lo. Quem conseguir somente este último terá 0.3 para a P1.

**Vizinhos distantes vs primeiros vizinhos** Vamos inferir que a função sinal calculada com a restrição de trocas entre primeiros vizinhos é equivalente ao cálculo com troca entre vizinhos distantes. Ou seja, vamos argumentar que  $sgn_n(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots) = -sgn_n(\dots, j_q, \dots, j_p, \dots)$  é obtido também quando nos restringimos a trocas entre primeiros vizinhos. Para isso notemos que são precisas  $2(q-p)-1$  trocas entre primeiros vizinhos para obter  $(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots)$  de  $(\dots, j_q, \dots, j_p, \dots)$ , ou vice versa. Para isso, usamos um caso particular:  $(\dots, 3, 4, 5, 6, \dots) \rightarrow (\dots, 3, 4, 6, 5, \dots) \rightarrow (\dots, 3, 6, 4, 5, \dots) \rightarrow (\dots, 6, 3, 4, 5, \dots)$ . Até aqui usamos  $q-p = 6-3 = 3$  trocas. Seguindo,  $(\dots, 6, 3, 4, 5, \dots) \rightarrow (\dots, 6, 4, 3, 5, \dots) \rightarrow (\dots, 6, 4, 5, 3, \dots)$ , ou seja, usamos mais  $q-p-1 = 6-3-1 = 2$  trocas. Isso nos dá um total de  $2(q-p)-1 = 2(6-3)-1 = 5$  trocas entre primeiros vizinhos. Mas

$$(-1)^{2(q-p)-1} = (-1)^{2(q-p)}(-1)^{-1} = (1)(1/(-1)^1) = -1, \quad (7)$$

que é o resultado que queríamos demonstrar.

**Exercício:** Faça a verificação análoga usando  $(\dots, 4, 5, 6, 7, 8, \dots)$ .

## 2 Determinante

Seja  $A = (A_{j,k})$  uma matriz  $n \times n$ . Aqui consideraremos como campo escalar  $A_{j,k} \in \mathbb{C}$ . Nesse caso o determinante da matriz  $A$  é uma mapa  $\det : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\det(A) := \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} sgn(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{1, j_1} A_{2, j_2} \dots A_{n, j_n}. \quad (8)$$

Note que usamos as chamadas **permutações** de  $n$  índices,  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ , que são sequências com os números *todos diferentes*. Isso porque se houver dois ou mais índices iguais, a função sinal é nula. Claro, se usarmos  $\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ , o resultado final para o determinante será o mesmo. Outra observação relevante aqui é que o determinante é calculado considerando-se o produto de elementos de matriz de linhas e colunas diferentes, somando ou subtraindo esses produtos para todas as combinações de colunas com base no sinal da permutação correspondente.

**OBS:** Doravante não uso o sub-índice que indica o número de números no argumento de  $sgn$ , a menos que seja realmente necessário.

*Exemplo:* Para um *escalar*, o determinante é o próprio escalar. Para uma matriz de dimensão 2 teremos

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2)} sgn(j_1, j_2) A_{1, j_1} A_{2, j_2} = sgn(1, 2) A_{1, 1} A_{2, 2} + sgn(2, 1) A_{1, 2} A_{2, 1} = A_{1, 1} A_{2, 2} - A_{1, 2} A_{2, 1}. \quad (9)$$

**Exercício:** Escreva a expressão geral para o determinante de uma matriz de dimensão 3. **Exercício:** Para  $c \in \mathbb{C}$  e  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , mostre que  $\det(cA) = c^n \det(A)$ .

## 2.1 Propriedades do determinante

Seja  $k_1, k_2, \dots, k_n$  uma lista qualquer de números do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Denotaremos

$$A(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (10)$$

a matriz cuja  $l$ -ésima linha é a  $k_l$ -ésima linha da matriz  $A$ . *Exemplo:* Claro,  $A(1, 2, \dots, n) = A$ . Um outro exemplo seria

$$A(2, 3, 2) = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

**Exercício:** Escreva a matriz  $A(3, 1, 2, 4)$ .

Para essas matrizes modificadas, notemos que, em relação a  $A$ , substituímos as linhas  $1, 2, \dots, n$  pelas  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Então o determinante fica

$$\det(A(k_1, k_2, \dots, k_n)) := \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} \dots A_{k_n, j_n}. \quad (12)$$

### 2.1.1 Efeito da troca de linhas no determinante

Podemos utilizar o determinante escrito como na última equação para verificar que ao trocarmos duas linhas de uma matriz, trocamos o sinal do seu determinante:

$$\det(A(\dots, k_p, \dots, k_q, \dots)) = \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots) \dots A_{k_p, j_p} \dots A_{k_q, j_q} \dots \quad (13)$$

$$= \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots) \dots A_{k_q, j_q} \dots A_{k_p, j_p} \dots \quad (14)$$

$$= \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_q, \dots)} -\text{sgn}(\dots, j_q, \dots, j_p, \dots) \dots A_{k_q, j_q} \dots A_{k_p, j_p} \dots \quad (15)$$

$$= -\det(A(\dots, k_q, \dots, k_p, \dots)). \quad (16)$$

*Exemplo:* Considera  $A(1, 2) = A$  e  $A(2, 1)$ . Temos que

$$\det(A(2, 1)) = \sum_{(j_1, j_2)} \text{sgn}(j_1, j_2) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} = \sum_{(j_1, j_2)} \text{sgn}(j_1, j_2) A_{2, j_1} A_{1, j_2} \quad (17)$$

$$= \text{sgn}(1, 2) A_{2,1} A_{1,2} + \text{sgn}(2, 1) A_{2,2} A_{1,1} = A_{2,1} A_{1,2} - A_{2,2} A_{1,1} \quad (18)$$

$$= -\det(A) = -\det(A(1, 2)). \quad (19)$$

**Exercício:** Verifique que  $\det(A(2, 1, 3)) = -\det(A(1, 2, 3))$ .

**Consequências de  $\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)) = -\det(A(\cdots, k_q, \cdots, k_p, \cdots))$ :**

1. Essa relação implica que

$$\det(A(k_1, k_2, \cdots, k_n)) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \cdots, k_n) \det(A). \quad (20)$$

Para verificar essa afirmação, assuma que precisamos fazer  $N$  permutações de pares índices para obter  $1, 2, \cdots, n$  a partir de  $k_1, k_2, \cdots, k_n$ . Lembre que trocas de pares de índices trocam o sinal da função sinal, i.e.,

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (-1)^N \operatorname{sgn}(1, 2, \cdots, n) = (-1)^N. \quad (21)$$

Como em cada uma dessas trocas trocamos duas linhas da matriz correspondente, e assim trocamos o sinal do determinante, teremos também que:

$$\det(A(k_1, k_2, \cdots, k_n)) = (-1)^N \det(A(1, 2, \cdots, n)) = (-1)^N \det(A), \quad (22)$$

com o sinal que estabelece a relação entre os determinantes dependendo somente se  $N$  é par ou ímpar. Com isso fica verificada nossa afirmação inicial. **Exercício:** Verifique que  $\det(A(3, 2, 1)) = \operatorname{sgn}(3, 2, 1) \det(A)$ .

2. Outra consequência do resultado anterior é que o determinante de uma matriz com **duas linhas iguais** é igual a zero. Para isso considere que as linhas  $k_p$  e  $k_q$  da matriz  $A$  são iguais. Assim

$$\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)) = \det(A(\cdots, k_q, \cdots, k_p, \cdots)) \quad (23)$$

$$= -\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)), \quad (24)$$

onde a primeira igualdade se deve ao fato das duas matrizes serem iguais e a segunda segue pela troca de linhas. Como para que  $x = -x$  devemos ter  $x = 0$ , está demonstrada nossa segunda afirmação. **Exercício:** Verifique que  $\det(A(2, 2, 3)) = 0$ .

3. Se uma (ou mais) linha(s) de uma matriz pode ser escrita como uma **combinação linear** de outras de suas linhas, então o determinante dessa matriz é nulo. Na prática, como a troca de linhas só troca o sinal do determinante, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a primeira linha é combinação linear das próximas  $r < n$  linhas, i.e.,  $A_{1,j_1} = \sum_{k=2}^r c_k A_{k,j_1}$  com  $c_k \in \mathbb{C}$ . Assim

$$\det(A) \propto \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \cdots, j_n) \sum_{k=2}^r c_k A_{k,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{r,j_r} \cdots A_{n,j_n} \quad (25)$$

$$= \sum_{k=2}^r c_k \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \cdots, j_n) A_{k,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{r,j_r} \cdots A_{n,j_n} \quad (26)$$

$$= \sum_{k=2}^r c_k (\det \text{ de uma matriz com duas linhas iguais}) \quad (27)$$

$$= 0. \quad (28)$$

## 2.2 Forma simétrica para o determinante

Vamos verificar que o determinante de uma matriz  $A$  pode ser escrito como

$$\det(A) = \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} \dots A_{k_n, j_n}. \quad (29)$$

Começamos notando que para qualquer permutação  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  teremos

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1. \quad (30)$$

Teremos assim, de  $\det(A(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(A)$ , que:

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(A(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(A) = \det(A). \quad (31)$$

Seguindo, notamos que existem  $n!$  permutações de  $n$  símbolos. Um exemplo utilizado com frequência para chegar nesse resultado é aquele de arranjar  $n$  bolinhas numeradas em  $n$  caixas. Para a primeira caixa temos  $n$  possibilidades para qual bolinha colocaremos aí. Um vez feita esta escolha, sobram  $n - 1$  possibilidades para a segunda caixa. Seguindo com essa ideia vemos que o número total de arranjos é  $n(n - 1)(n - 2) \dots (2)(1) = n!$ .

Dito isto, reescrevemos a equação acima como

$$\det(A) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n!} \det(A) \quad (32)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(A(k_1, k_2, \dots, k_n)) \quad (33)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} \dots A_{k_n, j_n}, \quad (34)$$

como queríamos demonstrar.

**Exercício:** Usando a forma simétrica, escreva explicitamente o determinante de uma matriz de dimensão 3.

## 2.3 Determinante da transposta

A transposta de uma matriz  $A = (A_{j,k})$  é denotada e definida por

$$A^T = ((A^T)_{j,k}) := (A_{k,j}). \quad (35)$$

Ou seja, obtemos  $A^T$  de  $A$  trocando suas linhas por suas colunas. Vamos verificar o importante resultado de que o determinante da transposta de uma matriz qualquer é igual ao seu determinante:

$$\det(A^T) = \det(A). \quad (36)$$

Para verificar esse resultado, usamos a forma simétrica do determinante

$$\det(A^T) = \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (A^T)_{k_1, j_1} (A^T)_{k_2, j_2} \cdots (A^T)_{k_n, j_n} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{j_1, k_1} A_{j_2, k_2} \cdots A_{j_n, k_n} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) A_{j_1, k_1} A_{j_2, k_2} \cdots A_{j_n, k_n} \quad (39)$$

$$= \det(A). \quad (40)$$

**Exercício:** Mostre que se trocamos duas colunas de uma matriz, trocamos o sinal do seu determinante. **Exercício:** Mostre que se duas (ou mais) colunas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo. **Exercício:** Mostre que se uma (ou mais) colunas de uma matriz é uma combinação linear de outras de suas colunas, então seu determinante é nulo.

## 2.4 Autovalores da transposta

Autovalores serão discutidos em mais profundidade mais adiante. Aqui basta saber que obtemos os autovalores  $a$  de uma matriz  $A$  resolvendo a equação característica

$$\det(A - a\mathbb{I}_n) = 0, \quad (41)$$

em que  $\mathbb{I}_n = (\delta_{j,k})$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Para a transposta da matrix  $A$  teremos que resolver  $\det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n) = 0$ . Como a transposta da soma de matrizes é a soma das transpostas (**exercício**) e a transposta da matriz identidade é a própria, podemos escrever

$$0 = \det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n) = \det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n^T) = \det((A - \alpha\mathbb{I}_n)^T) = \det(A - \alpha\mathbb{I}_n), \quad (42)$$

o que implica que  $\alpha = a$ , cqd. Note que na última igualdade usamos o fato de que  $\det(X) = \det(X^T)$  pra qualquer matriz  $X$ .

**Exercício:** A *conjugada* de uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é denotada  $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e é definida por  $A^* = ((A^*)_{j,k}) := (A_{j,k}^*)$ . Usando as propriedades básicas dos números complexos, Verifique que  $\det(A^*) = (\det(A))^*$ .

**Exercício:** A *adjunta* de uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é denotada por  $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e é definida como sua transposta conjugada, i.e.,  $A^\dagger = ((A^\dagger)_{j,k}) := (A_{k,j}^*)$ . Verifique que os autovalores de  $A^\dagger$  são iguais ao complexo conjugado dos autovalores de  $A$ .

## 2.5 Determinante do produto = produto dos determinantes

Vamos verificar que para  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  temos

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \quad (43)$$

**Exercício:** Verifique que o produto de duas matrizes  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  e  $Y \in \mathbb{C}^{m \times p}$  é uma matriz  $Z \in \mathbb{C}^{n \times p}$  com elementos

$$Z_{j,k} = (XY)_{j,k} = \sum_{l=1}^m X_{j,l} Y_{l,k}. \quad (44)$$

Aplicando esse resultado para nosso caso especial, teremos

$$\det(AB) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (AB)_{1, j_1} (AB)_{2, j_2} \cdots (AB)_{n, j_n} \quad (45)$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) \sum_{k_1} A_{1, k_1} B_{k_1, j_1} \sum_{k_2} A_{2, k_2} B_{k_2, j_2} \cdots \sum_{k_n} A_{n, k_n} B_{k_n, j_n} \quad (46)$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A_{1, k_1} A_{2, k_2} \cdots A_{n, k_n} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) B_{k_1, j_1} B_{k_2, j_2} \cdots B_{k_n, j_n} \quad (47)$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A_{1, k_1} A_{2, k_2} \cdots A_{n, k_n} \det(B(k_1, k_2, \dots, k_n)) \quad (48)$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A_{1, k_1} A_{2, k_2} \cdots A_{n, k_n} \text{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \det(B) \quad (49)$$

$$= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \text{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) A_{1, k_1} A_{2, k_2} \cdots A_{n, k_n} \det(B) \quad (50)$$

$$= \det(A) \det(B). \quad (51)$$

**Exercício:** Escreva explicitamente o determinante do produto de duas matrizes de dimensão 2 e verifique que este coincide com o produto de seus determinantes.

## 2.6 Determinante da soma $\neq$ soma dos determinantes

$$\det(A + B) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (A + B)_{1, j_1} (A + B)_{2, j_2} \cdots (A + B)_{n, j_n} \quad (52)$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (A_{1, j_1} + B_{1, j_1}) (A_{2, j_2} + B_{2, j_2}) \cdots (A_{n, j_n} + B_{n, j_n}) \quad (53)$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{1, j_1} A_{2, j_2} \cdots A_{n, j_n} \quad (54)$$

$$+ \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) B_{1, j_1} B_{2, j_2} \cdots B_{n, j_n} \quad (55)$$

$$+ \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) (\text{termos com produtos de A's e B's}) \quad (56)$$

$$= \det(A) + \det(B) + (\text{termo, em geral, não nulo}). \quad (57)$$

Se esse resultado não fosse assim, ele teria uma **implicação** séria sobre os autovalores da soma de matrizes. Considere que  $\det(A - a\mathbb{I}) = 0$  e  $\det(B - b\mathbb{I}) = 0$ . Se  $\det(X + Y) = \det(X) + \det(Y)$  teríamos que o autovalor da soma seria a soma dos autovalores, pois

$$0 = \det(A - a\mathbb{I}) + \det(B - b\mathbb{I}) = \det(A - a\mathbb{I} + B - b\mathbb{I}) \quad (58)$$

$$= \det((A + B) - (a + b)\mathbb{I}). \quad (59)$$

**Exercício:** Encontre um exemplo de matrizes de dimensão 2 tais que  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$  e outro exemplo para o qual  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

## 2.7 Expansão em cofatores para o determinante

### 2.7.1 Lema

Sejam  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$  matrizes que são iguais a menos da  $k$ -ésima linha. Essa linha de  $C$  é uma combinação linear das linhas correspondentes de  $A$  e  $B$ , i.e.,

$$C_{k,j_k} = \alpha A_{k,j_k} + \beta B_{k,j_k} \quad (60)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Para estas matrizes, temos

$$\det(C) = \alpha \det(A) + \beta \det(B). \quad (61)$$

**Prova** No te que concentramos na linha  $k$ , mas fazemos aparecer outras linhas que são comuns a todas as matrizes:

$$\det(C) = \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots C_{p,j_p} \cdots C_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots \quad (62)$$

$$= \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots C_{p,j_p} \cdots (\alpha A_{k,j_k} + \beta B_{k,j_k}) \cdots C_{q,j_q} \cdots \quad (63)$$

$$= \alpha \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots C_{p,j_p} \cdots A_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots \quad (64)$$

$$+ \beta \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots C_{p,j_p} \cdots B_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots \quad (65)$$

$$= \alpha \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots A_{p,j_p} \cdots A_{k,j_k} \cdots A_{q,j_q} \cdots \quad (66)$$

$$+ \beta \sum_{(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots)} \text{sgn}(\dots, j_p, \dots, j_k, \dots, j_q, \dots) \cdots B_{p,j_p} \cdots B_{k,j_k} \cdots B_{q,j_q} \cdots \quad (67)$$

$$= \alpha \det(A) + \beta \det(B). \quad (68)$$

**Exercício:** Verifique que se  $A, B, C$  são matrizes iguais a menos da  $k$ -ésima coluna e essa coluna de  $C$  é uma combinação linear das linhas correspondentes de  $A$  e  $B$ , i.e.,  $C_{j_k,k} = \alpha A_{j_k,k} + \beta B_{j_k,k}$  com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Para estas matrizes, temos  $\det(C) = \alpha \det(A) + \beta \det(B)$ .

### 2.7.2 Lema

Seja

$$A = \begin{bmatrix} B & * \\ \mathbf{O} & b \end{bmatrix} \quad (69)$$

uma matriz  $n \times n$ , onde  $B$  é uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$ ,  $\mathbf{O}$  é uma matriz linha nula,  $1 \times (n-1)$ , e  $*$  é uma matriz coluna qualquer,  $(n-1) \times 1$ . Segue que

$$\det(A) = b \det(B). \quad (70)$$



**Prova** Começamos usando o determinante em sua forma "usual"

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n)} \text{sgn}_n(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n) A_{1,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{n-1,j_{n-1}} A_{n,j_n} \quad (71)$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n)} \text{sgn}_n(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n) B_{1,j_1} B_{2,j_2} \cdots B_{n-1,j_{n-1}} b \delta_{n,j_n} \quad (72)$$

$$= b \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})} \text{sgn}_n(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, n) B_{1,j_1} B_{2,j_2} \cdots B_{n-1,j_{n-1}} \quad (73)$$

$$= b \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})} (-1)^{n-n} \text{sgn}_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) B_{1,j_1} B_{2,j_2} \cdots B_{n-1,j_{n-1}} \quad (74)$$

$$= b \det(B). \quad (75)$$

**Exercício:** Prove que para  $A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{O} \\ * & b \end{bmatrix}$  uma matriz  $n \times n$ , com  $B$  é uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$ ,  $\mathbf{O}$  é uma matriz coluna nula,  $(n-1) \times 1$ , e  $*$  é uma matriz linha qualquer,  $1 \times (n-1)$ , teremos  $\det(A) = b \det(B)$ .

**Exercício:** Utilize o resultado deste último lema para verificar que o determinante de uma matrix triangular superior,

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} & \cdots & T_{1,n} \\ 0 & T_{2,2} & T_{2,3} & \cdots & T_{2,n} \\ 0 & 0 & T_{3,3} & \cdots & T_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (76)$$

é dado pelo produtos dos elementos na diagonal principal:

$$\det(T) = T_{1,1} T_{2,2} T_{3,3} \cdots T_{n,n} =: \prod_{j=1}^n T_{j,j}. \quad (77)$$

### 2.7.3 Menor de uma matriz

Por definição, o menor  $A^{(j,k)} \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$  de uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é obtido excluindo-se a  $j$ -ésima linha e  $k$ -ésima coluna de  $A$ . *Exemplo:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 17 & 23 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

**Exercício:** Para essa matriz, obtenha o menor  $A^{(2,3)}$ .

### 2.7.4 Matriz cofator

Por definição, a matriz cofator  $\text{cof}(A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  de uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é obtida como segue

$$\text{cof}(A) = (\text{cof}(A)_{j,k}) = \left( (-1)^{j+k} \det(A^{(j,k)}) \right). \quad (79)$$

*Exemplo:* Para a matriz do último exemplo, termos e.g. que

$$\text{cof}(A)_{1,3} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 17 & 19 \end{bmatrix} = (1)(7 * 19 - 11 * 17) = -54. \quad (80)$$

**Exercício:** Calcule  $\text{cof}(A)_{2,1}$ .

## 2.8 Teorema (expansão em cofatores)

Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  com  $n \geq 2$ . Podemos escrever o determinante dessa matriz como

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k} = \sum_{j=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}, \quad (81)$$

com a primeira sendo chamada de expansão na linha  $j$  e a segunda é denominada expansão na coluna  $k$ .

**Prova** Considera um conjunto de  $n$  matrizes  $B^{(k)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  que são iguais a  $A$  a menos da  $j$ -ésima linha, cujos elementos são todos nulos a menos daquele na coluna  $k$ , que é igual a  $A_{j,k}$ . Então, se denotamos a  $j$ -ésima linha de  $A$  por  $\langle A_j |$  e similarmente para a  $j$ -ésima linha de  $B^{(k)}$ ,  $\langle B_j^{(k)} |$ , teremos que

$$\langle A_j | := [A_{j,1} \quad A_{j,2} \quad \cdots \quad A_{j,n}] \quad (82)$$

$$= (1) [A_{j,1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0] + (1) [0 \quad A_{j,2} \quad \cdots \quad 0] + \cdots + (1) [0 \quad 0 \quad \cdots \quad A_{j,n}] \quad (83)$$

$$=: (1) \langle B_j^{(1)} | + (1) \langle B_j^{(2)} | + \cdots + (1) \langle B_j^{(n)} | \quad (84)$$

$$= \sum_{k=1}^n (1) \langle B_j^{(k)} |. \quad (85)$$

Mas, em vistas do penúltimo lema que provamos, teremos que o determinante de  $A$  é a combinação linear dos determinantes das matrizes  $B^{(k)}$ , com todos os coeficientes iguais a um:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n \det(B^{(k)}). \quad (86)$$

Para continuar com a prova faremos uso último lema que provamos. Lembrando, lá tínhamos uma matriz cuja  $n$ -ésima linha era nula a menos do elemento na  $n$ -ésima coluna. Precisamos colocar todas as matrizes  $B^{(k)}$  nessa forma:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} & A_{j-1,k} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} & A_{j+1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} & A_{n,k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} \end{bmatrix}, \quad (89)$$

onde para a primeira passagem fizemos  $n - j$  trocas de linhas e para a segunda passagem fizemos  $n - k$  trocas de colunas.

Como para cada troca entre linhas ou colunas trocamos o sinal do determinante, teremos

$$\det(B^{(k)}) = (-1)^{n-k}(-1)^{n-j} \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} & A_{j-1,k} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} & A_{j+1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} & A_{n,k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$= (-1)^{2n}(-1)^{-(j+k)} A_{j,k} \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$= \frac{1}{(-1)^{j+k}} A_{j,k} \det(A^{(j,k)}) = (-1)^{j+k} A_{j,k} \det(A^{(j,k)}) = A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}. \quad (92)$$

Com isso concluímos a verificação de que  $\det(A) = \sum_{k=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}$ .

**Exercício:** Prove que  $\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}$ .

*Exemplo:* Determinante de uma matriz triangular inferior

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,1} & T_{n-1,2} & T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} \quad (93)$$

Expande em cofatores na primeira linha

$$\det(T) = T_{1,1} \text{cof}(T)_{1,1} + \sum_{k=2}^n 0 \text{cof}(T)_{1,k} = T_{1,1} (-1)^{1+1} \det(T^{(1,1)}) \quad (94)$$

$$= T_{1,1} \det \begin{bmatrix} T_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{3,2} & T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,2} & T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,2} & T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} = T_{1,1} T_{2,2} (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$\vdots \quad (96)$$

$$= \prod_{j=1}^n T_{j,j}. \quad (97)$$

## 2.9 Fórmula para a inversa

A *inversa* de uma matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é denotada por  $A^{-1}$  e é definida pelas igualdades:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I}_n, \quad (98)$$

com  $\mathbb{I}_n$  sendo a matriz identidade  $n \times n$ .

### 2.9.1 Teorema

$A^{-1}$  existe se e somente se  $\det(A) \neq 0$ . Se  $\det(A) \neq 0$ , os elementos de matriz da inversa podem ser escritos como:

$$(A^{-1})_{j,k} = \frac{\text{cof}(A)_{k,j}}{\det(A)}. \quad (99)$$

Ou seja, identificamos a inversa de uma matriz  $A$  com a transposta da sua matriz de cofatores dividida pelo determinante de  $A$ .

**Prova** Começamos assumindo que a inversa existe. Então teremos que

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \det(A), \quad (100)$$

o que implica que o determinante da matriz  $A$  não pode ser nulo, i.e.,  $\exists A^{-1} \Rightarrow \det(A) \neq 0$ .

Agora assumimos que  $\det(A) \neq 0$ . Usando a expansão em cofatores podemos escrever

$$1 = \frac{\det(A)}{\det(A)} = \frac{\sum_{k=1}^n A_{j,k} \text{cof}(A)_{j,k}}{\det(A)} =: \sum_{k=1}^n A_{j,k} (A^{-1})_{k,j} = (AA^{-1})_{j,j}. \quad (101)$$

**Exercício:** Use a definição  $(A^{-1})_{j,k} := \text{cof}(A)_{k,j} / \det(A)$  e o mesmo tipo de argumento para mostrar que  $(A^{-1}A)_{j,j} = 1$ .

Para provar que essa definição realmente fornece a inversa, falta ainda verificarmos que  $(A^{-1}A)_{j,k} = 0$  se  $j \neq k$ . Pra isso, vamos encontrar uma matriz cujo determinante possa ser escrito como nessa expressão mas que sabemos ser nulo. Consideremos uma matriz  $B$  que é igual a  $A$  a menos da coluna  $k$  que é igual à coluna  $l$  de  $A$  (com  $k > l$ ). Olhando para

$$B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & B_{j-1,l-1} & B_{j-1,l} & B_{j-1,l+1} & \cdots & B_{j-1,k-1} & B_{j-1,k} & B_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & B_{j,l-1} & B_{j,l} & B_{j,l+1} & \cdots & B_{j,k-1} & B_{j,k} & B_{j,k+1} & \cdots \\ \cdots & B_{j+1,l-1} & B_{j+1,l} & B_{j+1,l+1} & \cdots & B_{j+1,k-1} & B_{j+1,k} & B_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j,l-1} & A_{j,l} & A_{j,l+1} & \cdots & A_{j,k-1} & A_{j,l} & A_{j,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (103)$$

vemos que os menores

$$B^{(j,k)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (104)$$

e

$$B^{(j,l)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (105)$$

são iguais a menos de  $k - l$  trocas de colunas. Como cada troca entre colunas troca o sinal do determinante, teremos a seguinte expansão em cofatores na coluna  $l$  de  $B$ :

$$0 = \det(B) = \sum_j B_{j,l} \text{cof}(B)_{j,l} = \sum_j B_{j,l} (-1)^{j+l} \det(B^{(j,l)}) \quad (106)$$

$$= \sum_j A_{j,l} (-1)^{j+l} (-1)^{k-l} \det(B^{(j,k)}) = \sum_j A_{j,l} (-1)^{j+k} \det(A^{(j,k)}) = \sum_j A_{j,l} \text{cof}(A)_{j,k} \quad (107)$$

$$= \det(A) \sum_j A_{j,l} \text{cof}(A)_{j,k} / \det(A) = \det(A) \sum_j A_{j,l} (A^{-1})_{k,j} = \det(A) \sum_j (A^{-1})_{k,j} A_{j,l} \quad (108)$$

$$= \det(A) (A^{-1}A)_{k,l}, \quad (109)$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)_{k,l} = 0. \quad (110)$$

Vemos assim que  $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ , com  $(A^{-1})_{j,k} := \text{cof}(A)_{k,j} / \det(A)$ , completando assim a prova do teorema.

**Exercício:** Usando o mesmo tipo de procedimento, verifique que  $(AA^{-1})_{k,l} = 0$  para  $k \neq l$ .

**Exemplo** Consideremos como exemplo a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ , para a qual  $\det(A) = -1$ . Nesse caso

$$(A^{-1})_{1,1} = \text{cof}(A)_{1,1} / \det(A) = -(-1)^{1+1} \det(A^{1,1}) = -7, \quad (111)$$

$$(A^{-1})_{1,2} = \text{cof}(A)_{2,1} / \det(A) = -(-1)^{2+1} \det(A^{2,1}) = 3, \quad (112)$$

$$(A^{-1})_{2,1} = \text{cof}(A)_{1,2} / \det(A) = -(-1)^{1+2} \det(A^{1,2}) = 5, \quad (113)$$

$$(A^{-1})_{2,2} = \text{cof}(A)_{2,2} / \det(A) = -(-1)^{2+2} \det(A^{2,2}) = -2. \quad (114)$$

Então  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ . Para verificação considera

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

**Exercício:** Usando a relação com a matriz de cofatores, calcule a inversa da matriz:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$ .

## 2.10 Sistemas de equações lineares não homogêneas (SELNH)

Considere um SELNH

$$A|x\rangle = |y\rangle, \quad (116)$$

com  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $|x\rangle, |y\rangle \in \mathbb{C}^n$  com  $|y\rangle \neq |\emptyset\rangle$ , onde  $|\emptyset\rangle$  é o vetor nulo. Determinar a solução desse SELNH é obter  $|x\rangle$  dada a matriz de coeficientes  $A$  e o vetor de não homogeneidade  $|y\rangle$ . Um caso especial onde podemos obter essa solução, é quando a matriz de coeficientes possui inversa. Nesse caso

$$|x\rangle = A^{-1}A|x\rangle = A^{-1}|y\rangle. \quad (117)$$

Uma regra mnemônica bem conhecida nesse contexto é a **regra de Kramer**, que é obtida como segue. Considere

$$|x\rangle_j = (A^{-1}|y\rangle)_j = \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{j,k} |y\rangle_k = \sum_{k=1}^n \frac{\text{cof}(A)_{k,j}}{\det(A)} |y\rangle_k = \frac{\sum_{k=1}^n |y\rangle_k (-1)^{k+j} \det(A^{(k,j)})}{\det(A)} \quad (118)$$

$$=: \frac{\sum_{k=1}^n K_{k,j}^{(j)} \text{cof}(K^{(j)})_{k,j}}{\det(A)} = \frac{\det(K^{(j)})}{\det A}, \quad (119)$$

onde definimos as *matrizes de Kramer*:

$$K^{(j)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & K_{k-1,j-1}^{(j)} & K_{k-1,j}^{(j)} & K_{k-1,j+1}^{(j)} & \cdots \\ \cdots & K_{2,j-1}^{(j)} & K_{2,j}^{(j)} & K_{2,j+1}^{(j)} & \cdots \\ \cdots & K_{k+1,j-1}^{(j)} & K_{k+1,j}^{(j)} & K_{k+1,j+1}^{(j)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{k-1,j-1} & A_{k-1,j} & A_{k-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & A_{2,j-1} & A_{2,j} & A_{2,j+1} & \cdots \\ \cdots & A_{k+1,j-1} & A_{k+1,j} & A_{k+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (120)$$

que são obtidas substituindo-se a  $j$ -ésima coluna de  $A$  por  $|y\rangle$ .

**Exemplo** Considere seguinte SELNH:

$$2|x\rangle_1 + 3|x\rangle_2 = 5, \quad (121)$$

$$7|x\rangle_1 + 11|x\rangle_2 = 13. \quad (122)$$

Notemos primeiro que  $\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} = 1$ . A solução desse SELNH é

$$|x\rangle_1 = \frac{\det(K^{(1)})}{\det(A)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}}{1} = 16, \quad (123)$$

$$|x\rangle_2 = \frac{\det(K^{(2)})}{\det(A)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}}{1} = -9. \quad (124)$$

Verificação:  $2(16) + 3(-9) = 5$  e  $7(16) + 11(-9) = 13$ .

**Exercício:** Obtenha a solução, via regra de Kramer, de um SELNH especificado pela matrix de coeficientes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$  e pelo vetor de não homogeneidade  $|y\rangle = \begin{bmatrix} 29 \\ 31 \\ 37 \end{bmatrix}$ .

## 2.11 Método de eliminação de Gauss

Esse método é utilizado para colocar uma matriz na forma triangular através de operações que não alteram seu determinante. Note que depois de feito isso, precisamos de somente um produto

de  $n$  números para calcular o determinante, em lugar dos  $n!$  produtos na definição original. Vamos denotar a  $j$ -ésima linha de uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  por  $\langle L_j^A |$ . Consideremos que substituímos em uma linha de  $A$  a combinação linear dessa linha com uma ou mais das suas outras linhas, i.e.,

$$\langle L_j^A | \rightarrow \langle L_j^A | + c \langle L_l^A | \quad (125)$$

com  $c \in \mathbb{C}$ . O determinante de  $A$  não muda por esse tipo de operação pois

$$\sum_{(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots)} \text{sgn}(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots) \dots A_{j-1, k_{j-1}} (A_{j, k_j} + c A_{l, k_j}) A_{j+1, k_{j+1}} \dots A_{l, k_l} \dots \quad (126)$$

$$= \sum_{(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots)} \text{sgn}(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots) \dots A_{j-1, k_{j-1}} A_{j, k_j} A_{j+1, k_{j+1}} \dots A_{l, k_l} \dots \quad (127)$$

$$+ c \sum_{(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots)} \text{sgn}(\dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_l, \dots) \dots A_{j-1, k_{j-1}} A_{l, k_j} A_{j+1, k_{j+1}} \dots A_{l, k_l} \dots \quad (128)$$

$$= \det(A) + (\det \text{ de uma matriz com 2 linhas iguais}) \quad (129)$$

$$= \det(A). \quad (130)$$

### 2.11.1 Algoritmo

Considera

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & A_{n-1,3} & \dots & A_{n-1,n} \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (131)$$

Vamos deixar essa matriz na forma triangular superior sem mudar seu determinante. Se  $A_{1,1} = 0$ , verifica se há  $A_{j,1} \neq 0$  para algum  $j = 2, \dots, n$ . Se não há, então  $\det(A) = 0$ . Se há, troca  $|L_1^A\rangle \leftrightarrow |L_j^A\rangle$ . Tendo  $A_{1,1} \neq 0$ , zeramos todos os elementos abaixo de  $A_{1,1}$  fazendo as substituições:  $|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,1}/A_{1,1})|L_1^A\rangle$  para  $j = 2, \dots, n$ . Seguindo, para a nova matriz, se  $A_{2,2} \neq 0$ , zeramos os elementos abaixo de  $A_{2,2}$  fazendo  $|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,2}/A_{2,2})|L_2^A\rangle$  para  $j = 3, \dots, n$ . E seguimos assim até  $A_{n-1,n-1}$ . De forma geral,

$$|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,k}/A_{k,k})|L_k^A\rangle \text{ para } j = k+1, \dots, n. \quad (132)$$

Por fim, o produto dos elementos na diagonal principal nos fornecerão o determinante. Diz que para entender realmente algum cálculo, etc, precisamos programá-lo. Seguindo esse dito, o algoritmo de Gauss está implementado no código Sympy da função `det_gauss`.

```
In [60]: def det_gauss(A):
          n = A.shape[0] # = A.shape[1]
          det = 1
          T = zeros(n,n)
          for k in range(0,n-1):
```



```

    if A[k,k] == 0:
        for l in range(k+1,n):
            if A[l,k] != 0:
                T[n-1,:] = A[k,:]
                A[k,:] = A[l,:]
                A[l,:] = T[n-1,:]
                det *= -1
                break
    if A[k,k] == 0:
        return 0
    T[k,:] = A[k,:]
    for j in range(k+1,n):
        T[j,:] = A[j,:] - (A[j,k]/A[k,k])*A[k,:]
    A = T
    for j in range(0,n):
        det *= T[j,j]
    return det

```

```

In [66]: #A = Matrix([[2,3],[5,7]])
#A = Matrix([[2,3,5],[7,11,13],[17,19,23]])
a,b,c,d = symbols("a b c d"); A = Matrix([[a,b],[c,d]])
#det(A)
det_gauss(A)

```

Out[66]:

$$a \left( d - \frac{bc}{a} \right)$$

```

In [62]: def triangular(A):
    n = A.shape[0] # = A.shape[1]
    T = zeros(n,n)
    for k in range(0,n-1):
        if A[k,k] == 0:
            for l in range(k+1,n):
                if A[l,k] != 0:
                    T[n-1,:] = A[k,:]
                    A[k,:] = A[l,:]
                    A[l,:] = T[n-1,:]
                    break
        T[k,:] = A[k,:]
        for j in range(k+1,n):
            T[j,:] = A[j,:] - (A[j,k]/A[k,k])*A[k,:]
        A = T
    return T

```

```

In [67]: triangular(A)

```

Out[67]:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

**Exercício:** Usando o método de Gauss, coloque a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$  na forma triangular e calcule seu determinante. Use os códigos relacionados para verificar seus cálculos.