Notas de aula: Mecânica Quântica, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

In [1]:
```
%run init.ipynb
```

Teoria de grupos

Grupo

Um conjunto de objetos $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_{|G|}\}$ forma um grupo sob a operação de composição $*$ se:

- A composição de quaisquer dois elementos do cojunto é um elemento do conjunto (**fechamento**):
$$g_j * g_k \in G, \forall g_j, g_k \in G.$$
- A composição de elementos do grupo é associativa (**associatividade**):
$$g_j * (g_k * g_l) = (g_j * g_k) * g_l, \forall g_j, g_k, g_l \in G.$$
- Existe o **elemento identidade** e tal que
$$g_j * e = e * g_j = g_j, \forall g_j \in G.$$
- Para qualquer elemento $g_j \in G$ existe o **elemento inverso** $g_j^{-1} \in G$ tal que
$$g_j * g_j^{-1} = g_j^{-1} * g_j = e.$$

OBS: A **ordem** de um grupo $(G, *)$, denotada por $|G|$, é igual ao número de seus elementos distintos.

Exercício: Verifique que para quaisquer dois elementos g_j, g_k de um grupo $(G, *)$,
$$(g_j * g_k)^{-1} = g_k^{-1} * g_j^{-1}.$$

OBS: Grupos comutativos, i.e., grupos tais que
$$g_j * g_k = g_k * g_j \ \forall g_j, g_k \in G,$$
são chamados de grupos Abelianos.

Exemplo: Grupo de Pauli

Sejam

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

as matrizes de Pauli e $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz identidade. Podemos verificar que o conjunto

$$G_p = \{\sigma_0, -\sigma_0, i\sigma_0, -i\sigma_0, \sigma_1, -\sigma_1, i\sigma_1, -i\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_2, i\sigma_2, -i\sigma_2, \sigma_3, -\sigma_3, i\sigma_3, -i\sigma_3\}$$

forma um grupo sob a operação de multiplicação matricial. Nesse caso $e = \sigma_0$ e a verificação do fechamento está mostrada na **tabela de composição** abaixo. Associatividade vem da associatividade do produto matricial. Para os elementos inversos obtemos (lembre, $\sigma_j\sigma_k = \delta_{j,k}\sigma_0 + sgn(j,k,l)i\sigma_l$)

$$G_p^{-1} = \{\sigma_0, -\sigma_0, -i\sigma_0, i\sigma_0, \sigma_1, -\sigma_1, -i\sigma_1, i\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_2, -i\sigma_2, i\sigma_2, \sigma_3, -\sigma_3, -i\sigma_3, i\sigma_3\}.$$

Tabela de composição:

$$TC = \begin{bmatrix} g_1 * g_1 & g_1 * g_2 & g_1 * g_3 & \cdots \\ g_2 * g_1 & g_2 * g_2 & g_2 * g_3 & \cdots \\ g_3 * g_1 & g_3 * g_2 & g_3 * g_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_0 & -\sigma_0 & i\sigma_0 & -i\sigma_0 & \sigma_1 & -\sigma_1 & i\sigma_1 & -i\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_2 & i\sigma_2 & -i\sigma_2 & \sigma_3 & -\sigma_3 \\ -\sigma_0 & \sigma_0 & -i\sigma_0 & i\sigma_0 & -\sigma_1 & \sigma_1 & -i\sigma_1 & i\sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_2 & -i\sigma_2 & i\sigma_2 & -\sigma_3 & \sigma_3 \\ i\sigma_0 & -i\sigma_0 & -\sigma_0 & \sigma_0 & i\sigma_1 & -i\sigma_1 & -\sigma_1 & \sigma_1 & i\sigma_2 & -i\sigma_2 & -\sigma_2 & \sigma_2 & i\sigma_3 & -i\sigma_3 \\ -i\sigma_0 & i\sigma_0 & \sigma_0 & -\sigma_0 & -i\sigma_1 & i\sigma_1 & \sigma_1 & -\sigma_1 & -i\sigma_2 & i\sigma_2 & \sigma_2 & -\sigma_2 & -i\sigma_3 & i\sigma_3 \\ \sigma_1 & -\sigma_1 & i\sigma_1 & -i\sigma_1 & \sigma_0 & -\sigma_0 & i\sigma_0 & -i\sigma_0 & i\sigma_3 & -i\sigma_3 & -\sigma_3 & \sigma_3 & -i\sigma_2 & i\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_1 & -i\sigma_1 & i\sigma_1 & -\sigma_0 & \sigma_0 & -i\sigma_0 & i\sigma_0 & -i\sigma_3 & i\sigma_3 & \sigma_3 & -\sigma_3 & i\sigma_2 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_1 & -i\sigma_1 & -\sigma_1 & \sigma_1 & i\sigma_0 & -i\sigma_0 & -\sigma_0 & \sigma_0 & -\sigma_3 & \sigma_3 & -i\sigma_3 & i\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_2 \\ -i\sigma_1 & i\sigma_1 & \sigma_1 & -\sigma_1 & -i\sigma_0 & i\sigma_0 & \sigma_0 & -\sigma_0 & \sigma_3 & -\sigma_3 & i\sigma_3 & -i\sigma_3 & -\sigma_2 & \sigma_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

In [2]:
```
s0,s1,s2,s3,Gp = symbols('sigma_0 sigma_1 sigma_2 sigma_3 G_p') # define os símbolos a serem usados
s0 = Matrix([[1,0],[0,1]]);  s1 = Matrix([[0,1],[1,0]]);  s2 = Matrix([[0,-1j],[1j,0]]);  s3 = Matrix([[1,0],[0,-1]])
Gp = [s0,-s0,1j*s0,-1j*s0,s1,-s1,1j*s1,-1j*s1,s2,-s2,1j*s2,-1j*s2,s3,-s3,1j*s3,-1j*s3] # lista para o grupo
TC = [Matrix([[0,0],[0,0]])]*16  # inicialização da lista com 16 elementos
j = 0
for k in range(0,16):
    TC[k] = Gp[j]*Gp[k]
TC
```

Out[2]:

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0i & 0 \\ 0 & 1.0i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1.0i & 0 \\ 0 & -1.0i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1.0i \\ 1.0i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1.0i \\ -1.0i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -1.0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1.0i & 0 \\ 0 & 1.0i \end{bmatrix}\right]$$

Teorema do rearranjamento

Seja $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_{|G|}\}$ um grupo sob a operação $*$. Para um elemento qualquer $g_j \in G$ teremos
$$g_j * G := \{g_j * g_1, g_j * g_2, \cdots, g_j * g_{|G|}\} \equiv G.$$
OBS: O símbolo $\equiv$ é usado para denotar que dois conjuntos são formados pelos mesmos elementos, indiferentemente da ordem com que estão arranjados.

Prova

Primeiro, notemos que todos os elementos do conjunto $\{g_j * g_k\}_{k=1}^{|G|}$ estão em G. Então, se verificarmos que não há repetição de elementos naquele conjunto, teremos que ele deve ser igual a G. Vamos provar isso por contradição. Consideremos dois elementos diferentes $g_k, g_l \in G$ (i.e. $g_k \neq g_l$). Se $g_j * g_k = g_j * g_l$, pela existência do elemento inverso, teremos
$$g_j^{-1} * g_j * g_k = g_j^{-1} * g_j * g_l$$
$$\Rightarrow e * g_k = e * g_l \Rightarrow g_k = g_l,$$
o que contradiz nossa suposição inicial. Portanto, se $g_k \neq g_l$ devemos ter $g_j * g_k \neq g_j * g_l$, concluindo assim a prova do teorema.

Exemplos de implementação desse teorema podem ser vistos na abela de composição acima.

Exercício: Prove esse teorema cosiderando composição pela direita.

Subgrupo

Seja $(G, *)$ um grupo. Se um subconjunto H de G forma um grupo sob a mesma operação $*$, então dizemos que H é um subgrupo de G.

OBS: Para verificar se um certo H é um subgrupo de G, alguns requerimentos são satisfeitos automaticamente (elemento identidade e associatividade).

Subgrupos triviais e próprios

Os conjuntos $\{e\}$ e $\{G\}$ são, obviamente subgrupos de G, mas são ditos subgrupos *triviais*. Um subgrupo $H \subset G$ e $H \supset e$ é dito um subgrupo *próprio*.

Como **exemplos**, podemos considerar os seguintes subgrupos do grupo de Pauli (**verifique**):
$$\begin{aligned}
H_1 &:= \{\sigma_0\}, \\
H_2 &:= \{\sigma_0, \sigma_1\}, \\
H_3 &:= \{\sigma_0, -\sigma_0, \sigma_1, -\sigma_1\}, \\
H_4 &:= G_p = \{\sigma_0, -\sigma_0, i\sigma_0, -i\sigma_0, \sigma_1, -\sigma_1, i\sigma_1, -i\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_2, i\sigma_2, -i\sigma_2, \sigma_3, -\sigma_3, i\sigma_3, -i\sigma_3\}.
\end{aligned}$$

Exercício: Forneça mais exemplos de subgrupos do grupo de Pauli.

Cosets

Se H é um subgrupo de G, então para um certo $g_j \in G$ o conjunto

$$\begin{aligned} g_j * H = g_j * \{h_1, h_2, \cdots, h_{|H|}\} \\ := \{g_j * h_1, g_j * h_2, \cdots, g_j * h_{|H|}\} \end{aligned}$$

é denominado coset à esquerda de H em G por g_j. A definição análoga segue para cosets à direita de H em G.

OBS: Os elementos de um coset são todos distintos e estão em G.
Se $g_j \in H$ então $g_j * H \equiv H$.
Ademais, note que cosets não necessariamente formam grupos.

Um **exemplo** de coset do subgrupo H_3 acima é:

$$\begin{aligned} \sigma_3 * H_3 &\equiv \{\sigma_3 * \sigma_0, \sigma_3 * (-\sigma_0), \sigma_3 * \sigma_1, \sigma_3 * (-\sigma_1)\} \\ &\equiv \{\sigma_3, -\sigma_3, sgn(3,1,2)i\sigma_2, sgn(3,1,2)i\sigma_2\} \\ &\equiv \{\sigma_3, -\sigma_3, i\sigma_2, -i\sigma_2\}, \end{aligned}$$

que, obviamente, não é um grupo.

Exercício: Forneça mais exemplos de cosets de subgrupos próprios do grupo de Pauli.

Teorema de Lagrange

A ordem de um subgrupo divide a ordem de grupo, i.e., $|G|/|H| \in \mathbb{N}_{>0}$.
Um enunciado equivalente, mas com mais pistas para a prova, é que se H é um subgrupo de G, então pode-se escolher apropriadamente elementos $g_j, g_k, \cdots \in G$ tais que

$$G = H \cup (g_j * H) \cup (g_k * H) \cup \cdots,$$

onde $\cup$ denota a união de dois subconjuntos ($A \cup B$ é o conjunto formado por todos os elementos que estão em A *ou* em B).

Prova

No caso não trivial $H \subset G$, começamos considerando um elemento $g_j \in G$ que não está em H ($g_j \notin H$). Provemos por contradição que $H \cap (g_j * H) \equiv \emptyset$, em que $\emptyset$ é o conjunto vazio e $\cap$ é a interseção entre dois conjuntos ($A \cap B$ é o conjunto formado por todos os elementos que estão em A e em B). Se $g_j * H$ e H possuem algum elemento em comum, então existem l e m tais que

$$\begin{aligned} & g_j * h_l = h_m \Rightarrow g_j * h_l * h_l^{-1} = h_m * h_l^{-1} \\ & \Rightarrow g_j * e = g_j = h_m * h_l^{-1} \in H \\ & \Rightarrow g_j \in H, \end{aligned}$$

pois $h_k^{-1} \in H$. Mas esse resultado contradiz o que assumimos inicialmente, i.e., que $g_j \notin H$. Portanto H e $g_j * H$ não podem compartilhar nenhum elemento, ou seja, $H \cap (g_j * H) \equiv \emptyset$ se $g_j \notin H$. Com isso vemos que

$$G \supseteq H \cup (g_j * H).$$

Agora, se $G \supset H \cup (g_j * H)$, consideremos um coset $g_k * H$ obtido usando um outro elemento $g_k \in G$ tal que $g_k \notin H$ e $g_k \notin g_j * H$. Já mostramos que $g_k \cdot H \cap H \equiv \emptyset$. Vamos mostrar, por contradição, que $(g_j * H) \cap (g_k * H) \equiv \emptyset$. Se $g_j * H$ e $g_k * H$ possuem algum elemento em comum, então existem l, m e n tais que

$$\begin{aligned} & g_j * h_l = g_k * h_m \Rightarrow g_j * h_l h_m^{-1} = g_k * h_m * h_m^{-1} \\ & \Rightarrow g_k * e = g_j * h_n \Rightarrow g_k = g_j * h_n \in g_j * H \\ & \Rightarrow g_k \in g_j * H, \end{aligned}$$

que contradiz nossa suposição inicial. Portanto $g_j * H$ e $g_k * H$ não compartilham nenhum elemento se $g_k \notin g_j * H$. Com isso vem que

$$G \supseteq H \cup (g_j * H) \cup (g_k * H).$$

Se $G \supset H \cup (g_j * H) \cup (g_k * H)$ seguimos com a mesma ideia, até completar G. Como o número de elementos dos cosets $g_j * H$ é $|H|\ \forall j$, deve existir algum $r \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $|G| = r|H|$, completando assim a prova do teorema.

Exemplo de implementação do teorema de Lagrange
Usemos os exemplos acima. Para o subgrupo $H_3 = \{\sigma_0, -\sigma_0, \sigma_1, -\sigma_1\}$ temos $\sigma_3 * H_3 = \{\sigma_3, -\sigma_3, i\sigma_2, -i\sigma_2\}$. Ademais (**verifique**) $\sigma_2 * H_3 = \{\sigma_2, -\sigma_2, -i\sigma_3, i\sigma_3\}$ e $i\sigma_1 * H_3 = \{i\sigma_1, -i\sigma_1, i\sigma_0, -i\sigma_0\}$. Por conseguinte
$$G_p \equiv H_3 \cup (\sigma_3 * H_3) \cup (\sigma_2 * H_3) \cup (i\sigma_1 * H_3).$$

Exercício: Forneça outra decomposição do grupo de Pauli em termos de cosets de algum de seus subgrupos.

OBS: Note que para os subgrupos indentificados acima, temos as seguintes razões entre as ordens:
$$\frac{|G_p|}{|H_1|} = \frac{16}{1} = 16, \frac{|G_p|}{|H_2|} = \frac{16}{2} = 8, \frac{|G_p|}{|H_3|} = \frac{16}{4} = 4, \frac{|G_p|}{|H_4|} = \frac{16}{16} = 1.$$

Elementos conjugados

Dois elementos g_j e g_k de um grupo $(G, *)$ são ditos conjugados se existir um elemento $g_l \in G$ tal que
$$g_j = g_l * g_k * g_l^{-1}.$$

Exercício: Verifique que nesse caso $g_k = g_l^{-1} * g_j * g_l$.

Classe conjugada

A classe conjugada de um elemento g_j de um grupo $(G, *)$ é o conjunto de todos os elementos desse grupo que são equivalentes a g_j:
$$G_{g_j} := \{g_m * g_j * g_m^{-1}\}_{m=1}^{|G|}.$$

Com o código abaixo podemos obter facilmente as classes conjugadas para o grupo de Pauli. Por **exemplo**
$$G_{\sigma_1} = \{\sigma_1, -\sigma_1\}.$$

OBS: Note que o elemento sob consideração sempre está em sua classe conjugada, pois $e * g_j * e = g_j$.

In [3]:
```
Gpi = [s0,-s0,-1j*s0,1j*s0,s1,-s1,-1j*s1,1j*s1,s2,-s2,-1j*s2,1j*s2,s3,-s3,-1j*s
3,1j*s3] # elementos inversos
GpGpi = [Matrix([[0,0],[0,0]])]*16 # inicialização
for k in range(0,16): # verifica os inversos
    GpGpi[k] = Gp[k]*Gpi[k]
Ggj = [Matrix([[0,0],[0,0]])]*16 # inicialização
j = 5
for k in range(0,16):
    Ggj[k] = Gp[k]*Gp[j]*Gpi[k]
#GpGpi
Ggj
```

Out[3]:
$$\left[\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1.0 \\ -1.0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1.0 \\ -1.0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right.$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Teorema

Considere dois elementos g_j e g_k do grupo $(G,*)$. Se esses elementos são conjugados, então suas classes conjugadas são iguais.

Prova

Assumimos que $g_k = g_l * g_j * g_l^{-1}$ para algum $g_l \in G$. Então

$$\begin{aligned} G_{g_k} &= \{g_m * g_k * g_m^{-1}\}_{m=1}^{|G|} \\ &= \{g_m * g_l * g_j * g_l^{-1} * g_m^{-1}\}_{m=1}^{|G|} \\ &= \{(g_m * g_l) * g_j * (g_m * g_l)^{-1}\}_{m=1}^{|G|} \\ &= \{g_n * g_j * g_n^{-1}\}_{n=1}^{|G|} \\ &= G_{g_j}. \end{aligned}$$

Na passagem da 3ª pra 4ª linha usamos o teorema do rearranjamento.

OBS: Note que esse teorema implica que as classes conjugadas de todos os elementos dentro de uma certa classe conjugada é a própria.

Exercício: Com o código acima podemos verificar que $G_{-\sigma_1} = G_{\sigma_1}$. Forneça outro exemplo onde esse teorema se verifique.

Decompondo um grupo em termos de classes conjugadas

Começamos notando que a classe conjugada do elemento identidade é ele mesmo:

$$\begin{aligned} G_e &= \{g_m * e * g_m^{-1}\}_{m=1}^{|G|} \\ &= \{g_m * g_m^{-1}\}_{m=1}^{|G|} = \{e\}_{m=1}^{|G|} \\ &= e. \end{aligned}$$

OBS: A classe conjugada de qualquer elemento proporcinal a e é composta somente por aquele elemento.
Agora, se $G \supset G_e$ escolhemos $g_j \in G$ com $g_j \neq e$. Como e não está em G_{g_j} vemos que

$$G \supseteq G_e \cup G_{g_j}.$$

Se $G \supset G_e \cup G_{g_j}$ consideramos $g_k \neq e$ com $g_k \notin G_{g_j}$. Como $G_{g_j} \cap G_{g_k} \equiv \emptyset$ teremos

$$G \supseteq G_e \cup G_{g_j} \cup G_{g_k}.$$

Se $G \supset G_e \cup G_{g_j} \cup G_{g_k}$, continuamos com o mesmo baile até que:

$$G \equiv G_e \cup G_{g_j} \cup G_{g_k} \cup \cdots .$$

OBS: Note que o número de elementos das diferentes classes pode ser diferente (em contraste com os cosets).

Exemplo: Consideremos a decomposição do grupo de Pauli em termos de classes conjugadas. Com o código acima verificamos que $G_{\sigma_j} = \{\sigma_j, -\sigma_j\}$ e $G_{i\sigma_j} = \{i\sigma_j, -i\sigma_j\}$ para $j = 1, 2, 3$. Com isso vemos que

$$G_p \equiv G_{\sigma_0} \cup G_{-\sigma_0} \cup G_{i\sigma_0} \cup G_{-i\sigma_0} \cup G_{\sigma_1} \cup G_{i\sigma_1} \cup G_{\sigma_2} \cup G_{i\sigma_2} \cup G_{\sigma_3} \cup G_{i\sigma_3}.$$

Exercício: Forneça outra decomposição do grupo de Pauli em termos de classes conjugadas.

Subgrupo invariante

Seja H um subgrupo do grupo G tal que

$$g_j * H * g_j^{-1} \equiv H \; \forall g_j \in G.$$

Dizemos nesse caso que H é um subgrupo invariante de G.

OBS: Note que não exigimos que $g_j * h_k * g_j^{-1} = h_k \; \forall h_k \in H$, exigimos somente que os dois conjuntos contenham os mesmos elementos, independente da ordem com que estão arranjados:

$$\{g_j * h_1 * g_j^{-1}, \cdots, g_j * h_{|H|} * g_j^{-1}\} \equiv \{h_1, \cdots, h_{|H|}\}.$$

Outra maneira para caracterizarmos um subgrupo invariante é mostrando que este, visto como um único objeto, comuta com todos elementos de G (**exercício**):

$$g_j * H \equiv H * g_j.$$

Exemplo de subgrupo invariante
Com as contas que fizemos ao discutir classes conjugadas, inferimos, por exemplo, que $H_2 = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ não é um subgrupo invariante pois e.g. $\sigma_2 * H_2 = \{\sigma_2, -i\sigma_3\}$ e $H_2 * \sigma_2 = \{\sigma_2, i\sigma_3\}$.
No entanto, $H_3 = \{\sigma_0, -\sigma_0, \sigma_1, -\sigma_1\}$ é um subgrupo invariante pois (**exercício**): $(\pm\sigma_j) * H_3 \equiv H_3 * (\pm\sigma_j)$ para $j = 2, 3$ e $(\pm i\sigma_j) * H_3 \equiv H_3 * (\pm i\sigma_j)$ para $j = 0, 1, 2, 3$.

Exercício: Forneça outro exemplo de subgrupo invariante do grupo de Pauli.

Teorema

Um subgrupo invariante contem todos os elementos de uma certa classe conjugada ou nenhum.

Prova

Se um certo elemento de uma classe conjugada G_{g_j} pertence a um subgrupo invariante H, então existem k e l tais que

$$g_k * g_j * g_k^{-1} = h_l.$$

Vamos considerar

$$\begin{aligned}\{g_m * g_k * g_j * g_k^{-1} * g_m^{-1}\}_{m=1}^{|G|} &= \{g_m * h_l * g_m^{-1}\}_{m=1}^{|G|} \\ := \{g_n * g_j * g_n^{-1}\}_{n=1}^{|G|} &= G_{gj}.\end{aligned}$$

Como H é um subgrupo invariante de G, teremos que todos os elementos $g_m * h_l * g_m^{-1} \in H$. Portanto

$$G_{g_j} \subseteq H.$$

Exemplo: Vemos que $G_{\sigma_1} \subset H_3$ e e.g. para $G_{\sigma_2} = \{\sigma_2, -\sigma_2\}$ temos $G_{\sigma_2} \cap H_3 \equiv \emptyset$.
Exercício: Forneça exemplos similares, mas diferentes, a este, considerando outro subgrupo.

Composição de subconjuntos

Sejam $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_M\}$ dois subconjuntos de um grupo $(G, *)$. Definimos a composição desses subconjuntos como

$$A * B := (a_1 * B) \cup (a_2 * B) \cup \cdots \cup (a_N * B),$$

e já vimos a definição de composição de um elemento de G com um subconjunto de G: e.g. $a_j * B := \{a_j * b_1, \cdots, a_j * b_M\}$. Na sequência provaremos alguns resultados que serão úteis para a discussão do grupo fator, que é o grupo formado por cosets de um subgrupo invariante.

Proposição

Se $H = \{h_1, \cdots, h_{|H|}\}$ é um subgrupo de G, então $H * H \equiv H$.

Verificação

Usando o teorema do rearranjamento,
$$\begin{aligned} H * H &= (h_1 * H) \cup (h_2 * H) \cup \cdots \cup (h_{|H|} * H) \\ &\equiv H \cup H \cup \cdots \cup H \\ &\equiv H. \end{aligned}$$

Proposição

Sejam $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_M\}$ subconjuntos e c um elemento qualquer de um grupo G. Segue que
$$(c * A) * B \equiv c * (A * B).$$

Verificação

$$\begin{aligned} (c * A) * B &= \{c * a_1, \cdots, c * a_N\} * B \\ &= ((c * a_1) * B) \cup \cdots \cup ((c * a_N) * B) \\ &= \{(c * a_1) * b_1, \cdots, (c * a_1) * b_M\} \cup \cdots \cup \{(c * a_N) * b_1, \cdots, (c * a_N) * b_M\} \\ &= \{c * (a_1 * b_1), \cdots, c * (a_1 * b_M))\} \cup \cdots \cup \{c * (a_N * b_1), \cdots, c * (a_N * b_M))\} \\ &= c * \{a_1 * b_1, \cdots, a_1 * b_M\} \cup \cdots \cup c * \{a_N * b_1, \cdots, a_N * b_M\} \\ &\equiv c * (\{a_1 * b_1, \cdots, a_1 * b_M\} \cup \cdots \cup \{a_N * b_1, \cdots, a_N * b_M\}) \\ &= c * (a_1 * \{b_1, \cdots, b_M\} \cup \cdots \cup a_N * \{b_1, \cdots, b_M\}) \\ &= c * (\{a_1, \cdots, a_N\} * \{b_1, \cdots, b_M\}) \\ &= c * (A * B). \end{aligned}$$

Exercício: Verifique que $(A * c) * B = A * (c * B)$.

Proposição

Para G um grupo e para quaisquer $c, d \in G$ e $A, B \subset G$, segue que
$$(c * A) * (d * B) = c * (A * d) * B.$$

Verificação

Pela proposição anterior, e associatividade, vem que
$$\begin{aligned} (c * A) * (d * B) &= c * (A * (d * B)) \\ &= c * (\{a_1, \cdots, a_N\} * \{d * b_1, \cdots, d * b_M\}) \\ &= c * (a_1 * \{d * b_1, \cdots, d * b_M\} \cup \cdots \cup a_N * \{d * b_1, \cdots, d * b_M\}) \\ &= c * (\{(a_1 * d) * b_1, \cdots, (a_1 * d) * b_M\} \cup \cdots \cup \{(a_N * d) * b_1, \cdots, (a_N * d) * b_M\}) \\ &= c * ((a_1 * d) * \{b_1, \cdots, b_M\} \cup \cdots \cup (a_N * d) * \{b_1, \cdots, b_M\}) \\ &= c * ((a_1 * d) * B \cup \cdots \cup (a_N * d) * B) \\ &= c * (\{a_1 * d, \cdots, a_N * d\} * B) \\ &= c * (\{a_1, \cdots, a_N\} * d) * B \\ &= c * (A * d) * B. \end{aligned}$$

Teorema (grupo fator)

Segundo a operação de composição de sub-conjuntos de um grupo G, os cosets de um subgrupo invariante H de G formam um grupo, que é denominado grupo fator e denotado por

$$G/H := \{g_1 * H, \cdots, g_{|G|} * H\}.$$

Prova

Para H um subgrupo invariante do grupo G teremos:

- A composição de dois cosets de H é um coset de H:
$$\begin{aligned}(g_j * H) * (g_k * H) &= g_j * (H * g_k) * H \\ &= g_j * (g_k * H) * H = g_j * (g_k * (H * H)) \\ &= (g_j * g_k) * H = g_l * H.\end{aligned}$$
- A composição de cosets é associativa:
$$\begin{aligned}&((g_j * H) * (g_k * H)) * (g_l * H) = (g_j * (H * g_k) * H) * (g_l * H) = (g_j * g_k * H * H) * (g_l * H) \\ &= (g_m * H) * (g_l * H) = g_m * (H * (g_l * H)) = g_m * ((H * g_l) * H) = (g_j * g_k) * ((H * g_l) * H) \\ &= g_j * (g_k * H * g_l * H) = g_j * (H * g_k * g_l * H) = g_j * ((H * g_n) * H) \\ &= g_j * ((g_n * H) * H) = g_j * ((g_k * g_l * H) * H) = g_j * (g_k * H * g_l * H)\end{aligned}$$
- H age como o elementos identidade quando composto com seus cosets:
$$\begin{aligned}(g_j * H) * H &= g_j * (H * H) \\ &= g_j * H.\end{aligned}$$
- $g_j^{-1} * H$ é o elemento inverso de $g_j * H$:
$$\begin{aligned}(g_j^{-1} * H) * (g_j * H) &= g_j^{-1} * (H * g_j) * H \\ &= g_j^{-1} * (g_j * H) * H = (g_j^{-1} * g_j) * (H * H) \\ &= e * H = H.\end{aligned}$$

Exemplo: Consideremos o grupo fator do subgrupo invariante $H_3 = \{\sigma_0, -\sigma_0, \sigma_1, -\sigma_1\}$. Com o código abaixo obtemos os elementos do grupo fator G/H_3:

$$\begin{aligned}G/H_3 &= \{H_3, H_3, i * H_3, i * H_3, H_3, H_3, i * H_3, i * H_3, C_1, C_1, C_2, C_2, C_2, C_2, C_1, C_1\} \\ &= \{H_3, iH_3, C_1, C_2\},\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}C_1 &= \{\sigma_2, -\sigma_2, i\sigma_3, -i\sigma_3\}, \\ C_2 &= \{i\sigma_2, -i\sigma_2, \sigma_3, -\sigma_3\}.\end{aligned}$$

Exercício: Obtenha o grupo fator de outro subgrupo invariante do grupo de Pauli.

In [4]:
```
H3 = [s0,-s0,s1,-s1]
j = 15
H3j = [Gp[j]*H3[0],Gp[j]*H3[1],Gp[j]*H3[2],Gp[j]*H3[3]]
H3j
```

Out[4]:

$$\left[\begin{bmatrix}-1.0i & 0 \\ 0 & 1.0i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.0i & 0 \\ 0 & -1.0i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1.0i \\ 1.0i & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1.0i \\ -1.0i & 0\end{bmatrix}\right]$$

Isomorfismo

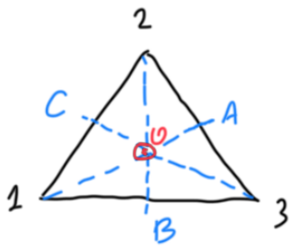
Um mapa (função ou correspondência) entre dois grupos G e G' é dito isomórfico se para todos os pares $g_j, g_k \in G$ e $g_j', g_k' \in G'$ com correspondência um pra um

$$g_j \mapsto g_j' \text{ e } g_k \mapsto g_k',$$

temos que a composição é preservada, i.e.,

$$g_j * g_k \mapsto g_j' * g_k'.$$

Exemplo: Consideremos o grupo de simetria de um *triângulo equilátero*, que já vimos ser um grupo.



Denotemos R_θ^X uma rotação em torno de X por um ângulo θ (usa a "regra da mão direita"). Denotemos por $(1, 2, 3)$ a disposição atual do triângulo. Então

$$\begin{aligned} & R_0^O(1,2,3) = (1,2,3), \\ & R_{3\pi/4}^O(1,2,3) = (2,3,1), \\ & R_{-3\pi/4}^O(1,2,3) = (3,2,1), \\ & R_\pi^A(1,j,k) = (1,k,j), \\ & R_\pi^B(j,2,k) = (k,2,j), \\ & R_\pi^C(j,k,3) = (k,j,3). \end{aligned}$$

Tabela de composição das transformações de simetria do triângulo **arrumar**:

$$\begin{bmatrix} & R_0^O & R_{3\pi/4}^O & R_{-3\pi/4}^O & R_\pi^A & R_\pi^B & R_\pi^C \\ R_0^O & R_0^O & R_{3\pi/4}^O & R_{-3\pi/4}^O & R_\pi^A & R_\pi^B & R_\pi^C \\ R_{3\pi/4}^O & R_{3\pi/4}^O & R_{-3\pi/4}^O & R_0^O & R_\pi^B & R_\pi^C & R_\pi^A \\ R_{-3\pi/4}^O & R_{-3\pi/4}^O & R_0^O & R_{3\pi/4}^O & R_\pi^C & R_\pi^A & R_\pi^B \\ R_\pi^A & R_\pi^A & R_\pi^C & R_\pi^B & R_0^O & R_{-3\pi/4}^O & R_{3\pi/4}^O \\ R_\pi^B & R_\pi^B & R_\pi^A & R_\pi^C & R_{-3\pi/4}^O & R_0^O & R_{3\pi/4}^O \\ R_\pi^C & R_\pi^C & R_\pi^B & R_\pi^A & R_{-3\pi/4}^O & R_{3\pi/4}^O & R_0^O \end{bmatrix}$$

Exercício: Verifique essa tabela.

A maneira como escrevemos as tranformações de simetria e disposições do triângulo acima indicam um correspondência isomórfica entre esse grupo e o grupo de permutações de três índices, denotado por S_3 . Nesse caso os elementos são denotados por

$$P_{jkl}.$$

A ação desses elementos é a seguinte. Quando atuamos P_{jkl} em um trio de índices (m, n, o), m vai pra posição j, n pra posição k e o para a posição l. Por exemplo $P_{123}(m, n, o) = (m, n, o)$ e $P_{321}(m, n, o) = (o, n, m)$. Podemos identificar o isomorfismo:

$$\begin{aligned}
P_{123} &\mapsto R_0^O, \\
P_{132} &\mapsto R_\pi^A, \\
P_{213} &\mapsto R_\pi^C, \\
P_{231} &\mapsto R_\pi^B, \\
P_{312} &\mapsto R_{3\pi/4}^O, \\
P_{321} &\mapsto R_{-3\pi/4}^O.
\end{aligned}$$

Exercício: Construa a tabela de composição de S_3 , compondo permutações.

Homomorfismo

Um mapa entre dois grupos G e G' é dito homomórfico se para $\{g_m^{(j)}\}_{m=1}^{N_j}, \{g_n^{(k)}\}_{n=1}^{N_k} \in G$ e $g'_j, g'_k \in G'$ com correspondência vários pra um

$$g_m^{(j)} \mapsto g'_j \text{ e } g_n^{(k)} \mapsto g'_k,$$

temos que a composição é preservada, i.e.,

$$g_m^{(j)} * g_n^{(k)} \mapsto g'_j * g'_k \ \forall m, n.$$

Exemplo: Os números complexos não nulos, $G = \mathbb{C}_{\neq 0}$, e os números reais não nulos, $G' = \mathbb{R}_{\neq 0}$, formam grupos sob multiplicação. Podemos definir um mapa ∞ pra um entre esses dois grupos como segue. Para $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ definimos

$$z \mapsto |z| = \sqrt{z^* z} \in \mathbb{R}_{\neq 0}.$$

Usando as propriedades da multiplicação de números complexos vemos prontamente que esse mapa preserva composição, i.e., para $w \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ teremos

$$\begin{aligned}
z * w \mapsto |z| * |w| &= \sqrt{z^* z}\sqrt{w^* w} = \sqrt{z^* z w^* w} \\
&= \sqrt{(zw)^*(zw)} = |z * w|.
\end{aligned}$$

Exercício: Verifique o homomorfismo 2 pra 1 entre $SU(2)$ e $SO(3)$.

Algumas consequências da correspondência homomórfica

- O elemento identidade de G é mapeado no elemento identidade de G'
$$\begin{aligned} &g_m^{(j)} * e = g_m^{(j)} \forall m, j \\ &\Rightarrow (g_m^{(j)} * e)' = (g_m^{(j)})' * (e)' = g_j' * (e)' = g_j' = g_j' * e' \forall j \\ &\Rightarrow e \mapsto e'. \end{aligned}$$
- Se $g_m^{(j)} \mapsto g_j'$ então $(g_m^{(j)})^{-1} \mapsto (g_j')^{-1}$
$$\begin{aligned} &g_m^{(j)} * (g_m^{(j)})^{-1} = e \\ &\Rightarrow (g_m^{(j)} * (g_m^{(j)})^{-1})' = (g_m^{(j)})' * ((g_m^{(j)})^{-1})' = (e)' \\ &\Rightarrow g_j' * ((g_m^{(j)})^{-1})' = e' \Rightarrow (g_j')^{-1} * g_j' * ((g_m^{(j)})^{-1})' = (g_j')^{-1} * e' \\ &\Rightarrow ((g_m^{(j)})^{-1})' = (g_j')^{-1}. \end{aligned}$$
- O conjunto de elementos de G mapeados em e', que denotamos por $H_{e'}$, é um subgrupo invariante de G
Usando a notação $g_0' = e'$ teremos composição
$$(g_m^{(0)} * g_n^{(0)})' = g_0' * g_0' = e' * e' = e'.$$
Associatividade vem daquela de G. Ademais $e \mapsto e'$ e $(g_m^{(0)})^{-1} \mapsto (g_{(0)}')^{-1} = e'$. Portanto $H_{e'}$ é um subgrupo de G. Verificamos invariância por
$$\begin{aligned} &(g_n^{(k)} * g_n^{(0)} * (g_n^{(k)})^{-1})' = (g_n^{(k)})' * (g_n^{(0)})' * ((g_n^{(k)})^{-1})' = g_k' * e' * (g_k')^{-1} \\ &= g_k' * (g_k')^{-1} = e', \forall n, k. \end{aligned}$$
- G' é isomórfico ao grupo fator $G/H_{e'} = \{g_1 * H_{e'}, \cdots, g_{|G|} * H_{e'}\}$
Aqui a verificação é feita notando-se que $\forall n, k$
$$(g_n^{(k)} * H_{e'})' = (g_n^{(k)})' * (H_{e'})' = g_k' * \{e'\} = g_k'.$$

Representações de um grupo

A representação linear de um grupo G é um homomorfismo entre este grupo e o grupo de operadores lineares inversíveis $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Como A é isomórfico ao grupo de matrizes inversíveis que representam esses operadores lineares numa base $\{|\psi\rangle\}$, podemos nos referir a essas representações de forma indiferente;
$$G \mapsto A \text{ ou } G \mapsto A_\psi.$$

Equivalência entre representações

Se operadores lineares das representações lineares $G \mapsto A = \{A_j\}$ e $G \mapsto B = \{B_j\}$, com $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, são relacionados através de uma transformação de similaridade
$$A_j = C * B_j * C^{-1},$$
onde $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. A equivalência é vista olhando para as tabelas de composição
$$\begin{aligned} A_j * A_k &= C * B_j * C^{-1} * C * B_k * C^{-1} = C * B_j * \mathbb{I} * B_k * C^{-1} = C * B_j * B_k * C^{-1} \\ &= C * B_l * C^{-1} = A_l. \end{aligned}$$

Teorema (representações unitárias)

Qualquer representação linear de um grupo finito é equivalente a uma representação unitária $G \mapsto U = \{U_j\}$, com $U_j * U_j^{-1} = \mathbb{I}$.

Prova

voltaremos

O grupo de Lorentz

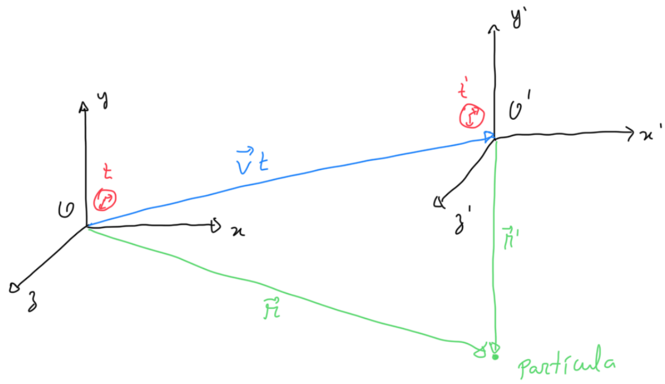
Mecânica Newtoniana e transformações de Galilei

Procedimentos gerais da mecânica:

- A partir do movimento, de medidas de posição, podemos inferir as forças:
$$\vec{r}(t) \to \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \to \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \to \vec{F}(t) = m\vec{a}(t).$$
- A partir das forças, e condições iniciais, podemos prever o movimento:
$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} \to \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' \to \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'.$$

Descrição do movimento por observadores em movimento relativo

Consideremos dois observadores O e O' em movimento relativo com velocidade constante $\vec{V}$, como ilustrado na figura abaixo.



Postulado: O tempo é absoluto, i.e., o tempo medido por todos os relógios é o mesmo, independente de sua velocidade. Aqui $t = t'$.

Pela soma vetorial obteremos as chamadas *transformações de Galilei* (TG), que relacionam as coordenadas espaço-temporais de uma partícula em diferentes referenciais inerciais (RIs):
$$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}' \;\; \therefore \;\; \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t.$$

Não é difícil verificar que a 2ª lei de Newton é invariante por TG:
$$\begin{aligned} \vec{F}' &= m\vec{a}' = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} \\ &= m\frac{d^2(\vec{r} - \vec{V}t)}{dt^2} = m\frac{d(\vec{v} - \vec{V})}{dt} = m(\vec{a} - \vec{0}) = \vec{F}. \end{aligned}$$

Mecânica Einsteiniana e transformações de Lorentz

Existiam duas motivações fortes para o desenvolvimento de uma mecânica melhor que a Newtoniana. As eqs. de Maxwell não são invariantes por TG. Ademais o experimento de Michelson e Morley indicou que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os referenciais.

Postulados da teoria da *relatividade restrita*:
P1. RIs devem ser equivalemtes no que concerne as leis físicas.
P2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma, c, quando medida em todos os RIs.

Tranformações de Lorentz

Esses postulados nos fornecerão relações distintas das TG para as coordenadas de uma partícula em diferentes RIs. Aqui assumiremos movimento relativo entre os RIs em uma única direção, x. Nesse caso as TG ficam

$$\begin{aligned} x &= x' + V_x t' = x' + Vt \ \therefore\ x' = x - Vt, \\ y &= y' + V_y t' = y' + 0t,\ \therefore\ y' = y, \\ z &= z' + V_z t' = z' + 0t,\ \therefore\ z' = z. \end{aligned}$$

Uma possibilidade para obtermos as tranformações de Lorentz é usar uma correção relativística global γ para as TG, i.e., teríamos $y = y'$, $z = z'$ e

$$x' = \gamma(x - Vt).$$

Por P1 teremos

$$x = \gamma(x' + Vt').$$

OBS. Aqui não assumimos que o tempo é absoluto, como era o caso na mecânica Newtoniana.
Manipulando essas equações,

$$x = \gamma(x' + Vt') = \gamma(\gamma(x - Vt) + Vt') = \gamma^2(x - Vt) + \gamma V t'.$$

Com isso obtemos a seguinte relação entre o tempo medido pelo observador O' com aquele medido por O:

$$t' = \gamma\left(t + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2 V}x\right).$$

Exercício: Verifique que

$$t = \gamma\left(t' - \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2 V}x'\right),$$

que é compatível com P1.

O que ainda nos falta é obter a correção relativística γ. Pra isso podemos utilizar o seguinte experimento de pensamento. Quando O e O' estão na mesma posição, um pulso esférico de luz é emitido. Por P2 devemos ter

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \\ R'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \end{aligned}$$

Agora substituimos as coordenadas de um referencial em relação às do outro, manipulamos a eq. e exigimos que ela seja equivalente à outra. Para R'^2

$$\begin{aligned} &(\gamma(x - Vt))^2 + y^2 + z^2 = c^2((\gamma(t - (1-\gamma^2)x/\gamma^2 V))^2) \\ &\therefore \gamma^2 x^2 + \gamma^2 V^2 t^2 - \gamma^2 2xVt + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2 t^2 + c^2\gamma^2(1-\gamma^2)^2 x^2/\gamma^4 V^2 - c^2\gamma^2 2t(1-\gamma^2)x/\gamma^2 V) \\ &\therefore Ax^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2(1 - V^2/c^2)c^2 t^2 + Bxt. \end{aligned}$$

Exercício: Obtenha A e B.

Pela equivalência com a eq. para R^2 devemos ter $A = 1, B = 0$ e

$$\gamma^2(1 - V^2/c^2) = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma(V).$$

Exercício: Verifique que

$$\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} = -\frac{V^2}{c^2},$$

e assim

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \text{ e } t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right).$$

Grupo de Lorentz

Para obter os elementos do grupo de Lorentz, primeiramente representaremos as coordenadas espaço-temporais de uma partícula como vetores coluna (quadrivetores):

$$\rho = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix}, \rho' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar que

$$\rho' = \Lambda(V)\rho$$

com

$$\Lambda(V) = \begin{bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\gamma(V)V/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(V)V/c & 0 & 0 & \gamma(V) \end{bmatrix},$$

que serão os elementos do grupo de Lorentz, cuja operação de composição é o produto matricial.

Verificação da estrutura de grupo

Usando o código abaixo, podemos verificar que o elemento identidade é $\Lambda(0) = \mathbb{I}_4$ e que o elemento inverso de $\Lambda(V)$ é $\Lambda(-V)$, i.e., $\Lambda(V)\Lambda(-V) = \Lambda(0)$. Associatividade vem da associatividade do produto matricial. Quanto à composição, temos que

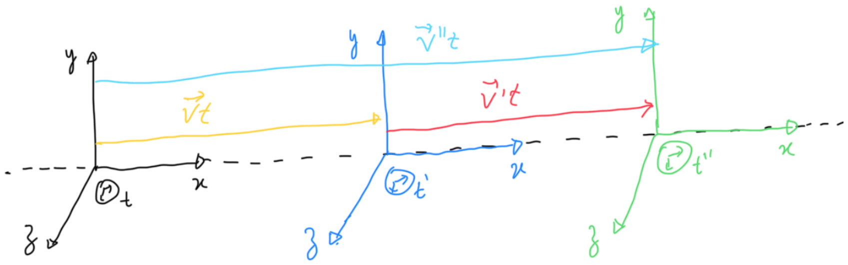
$$\Lambda(V)\Lambda(V') = \begin{bmatrix} \gamma(V)\gamma(V')(1 + VV'/c^2) & 0 & 0 & -\gamma(V)\gamma(V')(V + V')/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(V)\gamma(V')(V + V')/c & 0 & 0 & \gamma(V)\gamma(V')(1 + VV'/c^2) \end{bmatrix}.$$

In [5]:
```
# usa V'=v
L, g, V, c, v = symbols("Lambda gamma V c v")
def g(V): # correção relativística
    return 1/sqrt(1-V**2/c**2)
def L(V): # elementos do grupo de Lorentz
    return Matrix([[g(V),0,0,-g(V)*V/c],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[-g(V)*V/c,0,0,g
(V)]])
#L(V)
#L(0) # identidade
#simplify(L(V)*L(-V)) # inverso
L(V)*L(v) # composição
```

Out[5]:

$$\begin{bmatrix} \frac{Vv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} & 0 & 0 & -\frac{V}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} - \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} - \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} & 0 & 0 & \frac{Vv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} \end{bmatrix}$$

Aplicando a composição relativística de velocidades descrita abaixo para os três referenciais como movimentos relativos como na seguinte figura



,

teremos que a velocidade de O'' (a partícula nesse caso) em relação a O será ($u_y = u_z = 0$ aqui e $V'' = u$ e $V' = u'$) (**exercício**):

$$V'' = \frac{V + V'}{1 + VV'/c^2}.$$

In [6]:
```
# usa V''=U
def U(V,v):
    return (V+v)/(1+V*v/c**2)
#U(V,v)
#L(U(V,v))
simplify(L(U(V,v))-L(V)*L(v))
```

Out[6]:

$$\left[\begin{matrix} -\frac{Vv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(V+v)^2}{c^2\left(\frac{Vv}{c^2}+1\right)^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} & 0 & 0 & \frac{(V+v)\left(-c^2\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(-V^2+c^2\right)}\cdots\right.}{c\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(-V^2+c^2\right)}\sqrt{\cdots}} \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \frac{(V+v)\left(-c^2\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(-V^2+c^2\right)}\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(c^2-v^2\right)}+\sqrt{\frac{1}{(Vv+c^2)^2}\left(-c^2(V+v)^2+\left(Vv+c^2\right)^2\right)}\left(Vv+c^2\right)\right)}{c\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(-V^2+c^2\right)}\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(c^2-v^2\right)}\sqrt{\frac{1}{(Vv+c^2)^2}\left(-c^2(V+v)^2+\left(Vv+c^2\right)^2\right)}\left(Vv+c^2\right)} & 0 & 0 & -\frac{Vv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\cdots}} \end{matrix}\right]$$

Nesse caso o código não nos ajudou muito. Então verifiquemos na mão que $\Lambda(V'') = \Lambda(V)\Lambda(V')$. Para isso devemos ter que

$$\gamma(V'') = \gamma(V)\gamma(V')(1 + VV'/c^2),$$
$$-\gamma(V'')V''/c = -\gamma(V)\gamma(V')(V + V')/c.$$

Começamos invertendo a primeira eq. e a elevando ao quadrado:

$$\frac{(1 + VV'/c^2)^2}{\gamma(V'')^2} = \frac{1}{\gamma(V)^2\gamma(V')^2}$$
$$\Rightarrow (1 + VV'/c^2)^2(1 - V''^2/c^2) = (1 - V^2/c^2)(1 - V'^2/c^2)$$
$$\Rightarrow 1 + 2VV'/c^2 + V^2V'^2/c^4 - (V''^2/c^2)(1 + VV'/c^2)^2 = 1 - V'^2/c^2 - V^2/c^2 + V^2V'^2/c^4$$
$$\Rightarrow V'^2 + V^2 + 2VV' = (V + V')^2 = V''^2(1 + VV'/c^2)^2$$
$$\Rightarrow V'' = (V + V')/(1 + VV'/c^2),$$

que é a expressão correta.

Exercício: Verifique a segunda eq.

Com isso mostramos fechamento para o grupo de Lorentz.

Composição relativística de velocidades

Na mecânica Newtoniana, se uma partícula possui velocidade $\vec{u}(\vec{u}')$ em relação a um referencial inercial $O(O')$ e a velocidade relativa dos referenciais é $\vec{V} = (V, 0, 0)$, então

$$\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = (u_x + V, u_y, u_z).$$

Vejamos como fica essa relação no caso relaivístico. Considere a figura acima com movimento relativo dos referenciais somente na direção x. A velocidade da partícula em relação a O é:

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) = (u_x(t), u_y(t), u_z(t)).$$

Em relação a O'

$$\vec{u}'(t') = \frac{d\vec{r}'(t')}{dt'} = \left(\frac{dx'(t')}{dt'}, \frac{dy'(t')}{dt'}, \frac{dz'(t')}{dt'}\right) = (u'_x(t'), u'_y(t'), u'_z(t')).$$

Usando $dx' = \gamma(dx - Vdt)$, $dy' = dy$, $dz' = dz$ e $dt' = \gamma(dt - (V/c^2)dx)$ obtemos

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{dx'(t')}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma(dt - (V/c^2)dx)} = \frac{u_x - V}{1 - u_x V/c^2}, \\
u'_y &= \frac{dy'(t')}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - (V/c^2)dx)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x V/c^2)}, \\
u'_z &= \frac{dz'(t')}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - (V/c^2)dx)} = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x V/c^2)}.
\end{aligned}$$

Grupos de Lie

O grupo de Lorentz é um exemplo de grupo contínuo, cujos elementos são parametrizados por números reais (ou complexos). Grupos de Lie são grupos contínuos tais que os parâmetros que determinam o elemento composto são funções analíticas dos parâmetros que determinam os elementos sendo compostos. Nesses casos podemos descrever todo o grupo "olhando" para elementos infinitesimalmente próximos ao elemento identidade.

Exemplo: $SO(2)$

Esse grupo contínuo é formado pelas matrizes de rotação em $\mathbb{R}^2$, i.e., matrizes ortogonais ($OO^T = O^T O = \sigma_0$) com determinante igual a um (para garantir permanência no sistema de coordenadas destrógiro). Os Elementos desse grupo podem ser parametrizados e escritos como segue (**exercício**):

$$\begin{aligned}
O_\phi &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\
&= \sigma_0 \cos\phi + i\sigma_2 \sin\phi \\
&= e^{i\sigma_2\phi}.
\end{aligned}$$

Aqui é direto ver que $O_\phi O_{\phi'} = O_{\phi+\phi'}$ pois, pela comutatividade, $e^{i\sigma_2\phi} e^{i\sigma_2\phi'} = e^{i\sigma_2(\phi+\phi')}$. Claro, para rotações infinitesimais $O_{\phi\to 0} \approx \sigma_0 + i\phi\sigma_2$.

Exemplo: $SU(2)$

Esse grupo contínuo é formado pelas matrizes de rotação em $\mathbb{C}^2$, i.e., matrizes ortogonais ($UU^\dagger = U^\dagger U = \sigma_0$) com determinante igual a um (para garantir permanência no sistema de coordenadas destrógiro). Qualquer matriz desse tipo pode ser escrita como

$$U_{\alpha,\theta,\hat{n}} = e^{i\alpha} R_{\hat{n}}(\theta),$$

com

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\theta} = \sigma_0 \cos\theta + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\theta.$$

Aqui entra a transformação infinitesimal ($\epsilon \to 0$) fica:

$$\begin{aligned} R_{\hat{n}}(\epsilon) &= e^{i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\epsilon} \\ &= \sigma_0 + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\epsilon + O(\epsilon^2) \\ &\approx \sigma_0 + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\epsilon. \end{aligned}$$

Geradores do grupo de Lie

Os exemplos acima indicam uma representação infinitesimal geral ($\epsilon \to 0$):

$$R(\epsilon) = e^{i\epsilon S} \approx e + i\epsilon S,$$

em que as transformações infinitesimais ϵS são os ditos *geradores* do grupo de Lie.

Algumas observações:

- Elemento inverso
$$R^{-1}(\epsilon) = e^{-i\epsilon S} \approx e - i\epsilon S.$$
- Se R é unitário, S é Hermitiano:
$$R^\dagger(\epsilon)R(\epsilon) = e \approx e + i\epsilon(S - S^\dagger).$$
- Se R é normal e $\det(R) = 1$, então $Tr(S) = 0$:
$$\det(R(\epsilon)) = \det(e^{i\epsilon S}) = e^{i\epsilon Tr(S)}.$$
- Transformação finita é obtida de ($\varepsilon = N\epsilon = \epsilon + \cdots + \epsilon$ para $N \to \infty$):
$$R(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} (e + i(\varepsilon/N)S)^N = e^{i\varepsilon S}.$$
- Geradores a partir das transformações finitas:
$$S = -i\left[\frac{dR}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon\to 0}.$$
  Por exemplo,
$$-i\left[\frac{dO_\phi}{d\phi}\right]_{\phi\to 0} = -i\lim_{\phi\to 0}\begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi \\ -\cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} = \sigma_2.$$
  Exercício: Obtenha o gerador do grupo de Lorentz.

Álgebra de Lie

Notemos que o produto de duas transformações de Lie é equivalente a uma outra transformação infinitesimal com gerador dado pela soma dos geradores:

$$\begin{aligned} R(\epsilon) * R'(\epsilon) &\approx (e + i\epsilon S) * (e + i\epsilon S') \\ &\approx e + i\epsilon(S + S') \\ &=: e + i\epsilon S'' \\ &\equiv R''(\epsilon). \end{aligned}$$

Note, como a soma $+$ de dois geradores é um gerador, temos uma estrutura parecida com aquela de um espaço vetorial, temos a primeira estrutura de grupo de uma álgebra de Lie. A outra estrutura de de multiplicação dada pelos comutadores

$$[S_j, S_k] = c^l_{j,k} S_l,$$

em que $c^l_{j,k}$ são as chamadas constantes de estrutura do grupo de Lie.

$SO(3)$

Consideremos as matrizes de rotação em torno de três eixos ortogonais de $\mathbb{R}^3$ (**exercício**):

$$R_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix},$$
$$R_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix},$$
$$R_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para esses elementos de $SO(3)$, os geradores são obtidos de

$$S_1 = -i\left[\frac{dR_1}{d\phi}\right]_{\phi\to 0} = -i\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \\ 0 & -\cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix}_{\phi\to 0} = -i\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix},$$
$$S_2 = -i\left[\frac{dR_2}{d\phi}\right]_{\phi\to 0} = -i\begin{bmatrix} -\sin\phi & 0 & -\cos\phi \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi \end{bmatrix}_{\phi\to 0} = -i\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$S_3 = -i\left[\frac{dR_3}{d\phi}\right]_{\phi\to 0} = -i\begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\phi\to 0} = -i\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In [22]:
```
s1,s2,s2 = symbols('S_1 S_2 S_3')
s1 = Matrix([[0,0,0],[0,0,-1j],[0,1j,0]])
s2 = Matrix([[0,0,1j],[0,0,0],[-1j,0,0]])
s3 = Matrix([[0,-1j,0],[1j,0,0],[0,0,0]])
def comm(x,y):
    return x*y-y*x
comm(s1,s2)
```

Out[22]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com o código acima, pode-se verificar que as constantes de estrutura para esses geradores são dadas como segue:

$$[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl}S_l.$$

Relação de comutação para as componentes do mometo angular

Em MQ, na base de posição, o momento angular é $\vec{L} = \vec{r}\text{x}\vec{p}$ com $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Podemos escrever, por exemplo,

$$\begin{aligned}
L_1 &= (\vec{r}\text{x}\vec{p})_1 = \sum_{k,l}\epsilon_{1kl}r_k p_l = \hbar(-ir_2\partial_3 + ir_3\partial_2) \\
&= \hbar \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \\
&= \hbar\vec{r}^T S_1 \vec{\nabla}.
\end{aligned}$$

Pode-se verificar, da mesma forma, que (**exercício**):

$$L_j = \hbar\vec{r}^T S_j \vec{\nabla} \text{ para } j = 2, 3.$$

Usando

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\vec{r}^T) &= \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 r_1 & \partial_1 r_2 & \partial_1 r_3 \\ \partial_2 r_1 & \partial_2 r_2 & \partial_2 r_3 \\ \partial_3 r_1 & \partial_3 r_2 & \partial_3 r_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3.
\end{aligned}$$

obtemos as relações gerais de comutação entre as componentes do momento angular (em MQ):

$$\begin{aligned}
[L_j, L_k] &= L_j L_k - L_k L_j = \hbar\vec{r}^T S_j \vec{\nabla}\hbar\vec{r}^T S_k \vec{\nabla} - \hbar\vec{r}^T S_k \vec{\nabla}\hbar\vec{r}^T S_j \vec{\nabla} \\
&= \hbar^2\vec{r}^T S_j(\vec{\nabla}\vec{r}^T)S_k\vec{\nabla} - \hbar^2\vec{r}^T S_k(\vec{\nabla}\vec{r}^T)S_j\vec{\nabla} \\
&= \hbar^2\vec{r}^T S_j\mathbb{I}_3 S_k\vec{\nabla} - \hbar^2\vec{r}^T S_k\mathbb{I}_3 S_j\vec{\nabla} \\
&= \hbar^2\vec{r}^T(S_j S_k - S_k S_j)\vec{\nabla} = i\epsilon_{jkl}\hbar^2\vec{r}^T S_l\vec{\nabla} \\
&= i\hbar\epsilon_{jkl}L_l.
\end{aligned}$$

$\{L_j\}$ como geradores do grupo de Lie $SO(3)$

Considere uma rotação do vetor posição de uma partícula em $\mathbb{R}^3$:
$$\vec{r}\,' = R\vec{r}.$$
A transformação equivalente no espaço das funções de onda pode ser esrita como
$$R(\psi(\vec{r})) = \psi'(\vec{r}) =: \psi(\vec{r}\,').$$
Para uma rotação infinitesimal em torno de z:
$$R_3(\delta\phi)\psi(\vec{r}) = \psi(R_3(\delta\phi)\vec{r}) = \psi(\vec{r}\,').$$
Agora,
$$\vec{r}\,' \approx (\mathbb{I} + i\delta\phi S_3)\vec{r} = \vec{r} + i\delta\phi \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \delta\phi r_2 \\ r_2 - \delta\phi r_1 \\ r_3 \end{bmatrix}.$$
Assim, usando expansão em série de Taylor,
$$\begin{aligned} R_3(\delta\phi)\psi(r_1, r_2, r_3) &= \psi(r_1 + \delta\phi r_2, r_2 - \delta\phi r_1, r_3) \\ &= \psi(r_1, r_2, r_3) + \delta\phi r_2 \partial_1 \psi(r_1, r_2, r_3) - \delta\phi r_1 \partial_2 \psi(r_1, r_2, r_3) \\ &= \psi(r_1, r_2, r_3) - (i/\hbar)\delta\phi(i\hbar r_2 \partial_1 - i\hbar r_1 \partial_2)\psi(r_1, r_2, r_3) \\ &= \psi(r_1, r_2, r_3) - (i/\hbar)\delta\phi L_3 \psi(r_1, r_2, r_3). \end{aligned}$$
Ou seja,
$$R_3(\delta\phi)\psi = \psi - i(L_3/\hbar)\psi.$$
Seguindo, trocamos ψ por $R_3(\phi)\psi$:
$$\begin{aligned} & R_3(\delta\phi)R_3(\phi)\psi - R_3(\phi)\psi = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi)\psi \\ & \therefore R_3(\phi + \delta\phi)\psi - R_3(\phi)\psi = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi)\psi \\ & \therefore \frac{R_3(\phi + \delta\phi) - R_3(\phi)}{\delta\phi} = \frac{dR_3(\phi)}{d\phi} = -i(L_3/\hbar)R_3(\phi) \\ & \therefore R_3(\phi) = e^{-iL_3\phi/\hbar}. \end{aligned}$$

Exercício: Faça a verificação análoga para R_1 e R_2.

Geradores e quebra de degenerescência

Consideremos a equação característica para o Hamiltoniano de algum sistema físico:
$$H|E\rangle = E|E\rangle.$$
Vamos supor que H é invariante por transformações de similaridade através dos elementos R de um certo grupo G:
$$RHR^{-1} = H \therefore RH = HR \therefore [H, R] = \mathbb{0}.$$
Agora, aplicamos R na equação de autovalores e autovetores
$$RH|E\rangle = RE|E\rangle \Rightarrow H(R|E\rangle) = E(R|E\rangle).$$
Ou seja, se H comutado com os elementos $R \in G$, então $R|E\rangle$ também são autovetores de H correspondentes ao mesmo autovalor E. Por isso dizemos que os autovetores $R|E\rangle$ são degenerados.

Consideremos agora que G é um grupo de Lie, i.e., $R = e^{i\epsilon S}$. Se usarmos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,
$$\begin{aligned} H = RHR^{-1} &= e^{i\epsilon S} H e^{-i\epsilon S} \\ &= H + i\epsilon[S, H] - \epsilon^2[S, [S, H]] + \cdots, \end{aligned}$$
vemos que, como $\epsilon \to 0$, devemos ter
$$[S, H] = \mathbb{0}.$$
Ou seja, se H é invariante sob a ação dos elementos de um grupo de Lie, então H comuta com os geradores desse grupo. E isso implica que H e S possuem a mesma base de autovetores. Com isso, podemos quebrar a degenerescência (identificar diferentes autovetores) de H através dos autovalores de S.