

# 07\_\_Lorentz

October 29, 2019

## 0.1 Notas de aula: Teoria de Grupos, Autor: Jonas Maziero, Departamento de Física, UFSM

```
[1]: %run /Users/jonasmaziero/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb
```

## 1 O grupo de Lorentz

### 1.1 Mecânica Newtoniana e transformações de Galilei

#### 1.1.1 Procedimentos gerais da mecânica:

- A partir do movimento, de medidas de posição, podemos inferir as forças:

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \rightarrow \vec{F}(t) = m\vec{a}(t). \quad (1)$$

- A partir das forças, e condições iniciais, podemos prever o movimento:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt' \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'. \quad (2)$$

#### 1.1.2 Descrição do movimento por observadores em movimento relativo

Consideremos dois observadores  $O$  e  $O'$  em movimento relativo com velocidade constante  $\vec{V}$ , como ilustrado na figura abaixo.

**Postulado:** O tempo é absoluto, i.e., o tempo medido por todos os relógios é o mesmo, independente de sua velocidade. Aqui  $t = t'$ .

Pela soma vetorial obteremos as chamadas *transformações de Galilei* (TG), que relacionam as coordenadas espaço-temporais de uma partícula em diferentes referenciais inerciais (RIs):

$$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}' \quad \therefore \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t. \quad (3)$$

Não é difícil verificar que a 2ª lei de Newton é invariante por TG:

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} \quad (4)$$

$$= m \frac{d^2(\vec{r} - \vec{V}t)}{dt^2} = m \frac{d(\vec{v} - \vec{V})}{dt} = m(\vec{a} - \vec{0}) = \vec{F}. \quad (5)$$

## 1.2 Mecânica Einsteiniana e transformações de Lorentz

Existiam duas motivações fortes para o desenvolvimento de uma mecânica melhor que a Newtoniana. As eqs. de Maxwell não são invariantes por TG (**verifique**). Ademais o experimento de Michelson e Morley indicou que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os referenciais.

Postulados da teoria da *relatividade restrita*: **P1.** RIs devem ser equivalentes no que concerne as leis físicas. **P2.** A velocidade da luz no vácuo é a mesma,  $c$ , quando medida em todos os RIs.

### 1.2.1 Transformações de Lorentz

Esses postulados nos fornecerão relações distintas das TG para as coordenadas de uma partícula em diferentes RIs. Aqui assumiremos movimento relativo entre os RIs em uma única direção,  $x$ . Nesse caso as TG ficam

$$x = x' + V_x t' = x' + Vt \quad \therefore \quad x' = x - Vt, \quad (6)$$

$$y = y' + V_y t' = y' + 0t, \quad \therefore \quad y' = y, \quad (7)$$

$$z = z' + V_z t' = z' + 0t, \quad \therefore \quad z' = z. \quad (8)$$

Uma possibilidade para obtermos as transformações de Lorentz é usar uma *correção relativística* global  $\gamma$  para as TG, i.e., teríamos  $y = y'$ ,  $z = z'$  e

$$x' = \gamma(x - Vt). \quad (9)$$

Por P1 teremos

$$x = \gamma(x' + Vt'). \quad (10)$$

*OBS.* Aqui não assumimos que o tempo é absoluto, como era o caso na mecânica Newtoniana. Manipulando essas equações,

$$x = \gamma(x' + Vt') = \gamma(\gamma(x - Vt) + Vt') = \gamma^2(x - Vt) + \gamma Vt'. \quad (11)$$

Com isso obtemos a seguinte relação entre o tempo medido pelo observador  $O'$  com aquele medido por  $O$ :

$$t' = \gamma \left( t + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 V} x \right). \quad (12)$$

**Exercício:** Verifique que

$$t = \gamma \left( t' - \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 V} x' \right), \quad (13)$$

que é compatível com P1.

O que ainda nos falta é obter a correção relativística  $\gamma$ . Para isso podemos utilizar o seguinte experimento de pensamento. Quando  $O$  e  $O'$  estão na mesma posição, um pulso esférico de luz é emitido. Por P2 devemos ter

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (14)$$

$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (15)$$

Agora substituímos as coordenadas de um referencial em relação às do outro, manipulamos a eq. e exigimos que ela seja equivalente à outra. Para  $R'^2$

$$(\gamma(x - Vt))^2 + y^2 + z^2 = c^2((\gamma(t - (1 - \gamma^2)x/\gamma^2 V))^2) \quad (16)$$

$$\therefore \gamma^2 x^2 + \gamma^2 V^2 t^2 - \gamma^2 2xVt + y^2 + z^2 = c^2 \gamma^2 t^2 + c^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2)^2 x^2 / \gamma^4 V^2 - c^2 \gamma^2 2t(1 - \gamma^2)x / \gamma^2 V \quad (17)$$

$$\therefore Ax^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2(1 - V^2/c^2)c^2 t^2 + Bxt. \quad (18)$$

**Exercício:** Obtenha  $A$  e  $B$ .

Pela equivalência com a eq. para  $R^2$  devemos ter  $A = 1$ ,  $B = 0$  e

$$\gamma^2(1 - V^2/c^2) = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma(V). \quad (19)$$

**Exercício:** Verifique que

$$\frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} = -\frac{V^2}{c^2}, \quad (20)$$

e assim

$$t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \text{ e } t = \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right). \quad (21)$$

### 1.3 Grupo de Lorentz

Para obter os elementos do grupo de Lorentz, primeiramente representaremos as coordenadas espaço-temporais de uma partícula como vetores coluna (quadrivetores):

$$\rho = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix}, \rho' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Pode-se verificar que

$$\rho' = \Lambda(V)\rho \quad (23)$$

com

$$\Lambda(V) = \begin{bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\gamma(V)V/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(V)V/c & 0 & 0 & \gamma(V) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

que serão os elementos do grupo de Lorentz, cuja operação de composição é o produto matricial.

#### 1.3.1 Verificação da estrutura de grupo

Usando o código abaixo, podemos verificar que o elemento identidade é  $\Lambda(0) = \mathbb{I}_4$  e que o elemento inverso de  $\Lambda(V)$  é  $\Lambda(-V)$ , i.e.,  $\Lambda(V)\Lambda(-V) = \Lambda(0)$ . Associatividade vem da associatividade do produto matricial. Quanto à composição, temos que

$$\Lambda(V)\Lambda(V') = \begin{bmatrix} \gamma(V)\gamma(V')(1 + VV'/c^2) & 0 & 0 & -\gamma(V)\gamma(V')(V + V')/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(V)\gamma(V')(V + V')/c & 0 & 0 & \gamma(V)\gamma(V')(1 + VV'/c^2) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

```
[2]: # usa V'=v
L, g, V, c, v = symbols("Lambda gamma V c v")
def g(V): # correção relativística
    return 1/sqrt(1-V**2/c**2)
def L(V): # elementos do grupo de Lorentz
    return Matrix([[g(V), 0, 0, -g(V)*V/c], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [-g(V)*V/
↪ c, 0, 0, g(V)]])
#L(V)
#L(0) # identidade
#simplify(L(V)*L(-V)) # inverso
L(V)*L(v) # composição
```

[2]:

$$\begin{bmatrix} \frac{Vv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} & 0 & 0 & -\frac{V}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} - \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} - \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} & 0 & 0 & \frac{Vv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} \end{bmatrix}$$

Aplicando a composição relativística de velocidades descrita abaixo para os três referenciais como movimentos relativos como na seguinte figura

,

teremos que a velocidade de  $O''$  (a partícula nesse caso) em relação a  $O$  será ( $u_y = u_z = 0$  aqui e  $V'' = u$  e  $V' = u'$ ) (exercício):

$$V'' = \frac{V + V'}{1 + VV'/c^2}. \quad (26)$$

```
[3]: # usa V''=U
def U(V,v):
    return (V+v)/(1+V*v/c**2)
#U(V,v)
#L(U(V,v))
simplify(L(U(V,v))-L(V)*L(v))
```

[3]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{Vv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(V+v)^2}{c^2(\frac{Vv}{c^2}+1)}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} & 0 & 0 & \frac{(V+v)\left(-c^2\sqrt{\frac{1}{c^2}(-V^2+c^2)}\sqrt{\frac{1}{c^2}(c^2-v^2)}\right)}{c\sqrt{\frac{1}{c^2}(-V^2+c^2)}\sqrt{\frac{1}{c^2}(c^2-v^2)}\sqrt{\frac{1}{(Vv+c^2)^2}(-c^2(V+v)^2+(Vv+c^2)^2)(Vv+c^2)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(V+v)\left(-c^2\sqrt{\frac{1}{c^2}(-V^2+c^2)}\sqrt{\frac{1}{c^2}(c^2-v^2)}+\sqrt{\frac{1}{(Vv+c^2)^2}(-c^2(V+v)^2+(Vv+c^2)^2)(Vv+c^2)}\right)}{c\sqrt{\frac{1}{c^2}(-V^2+c^2)}\sqrt{\frac{1}{c^2}(c^2-v^2)}\sqrt{\frac{1}{(Vv+c^2)^2}(-c^2(V+v)^2+(Vv+c^2)^2)(Vv+c^2)}} & 0 & 0 & -\frac{Vv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\frac{V^2}{c^2}+1}} \end{bmatrix}$$

Nesse caso o código não nos ajudou muito. Então verifiquemos na mão que  $\Lambda(V'') = \Lambda(V)\Lambda(V')$ . Para isso devemos ter que

$$\gamma(V'') = \gamma(V)\gamma(V')(1 + VV'/c^2), \quad (27)$$

$$-\gamma(V'')V''/c = -\gamma(V)\gamma(V')(V + V')/c. \quad (28)$$

Começamos invertendo a primeira eq. e a elevando ao quadrado:

$$\frac{(1 + VV'/c^2)^2}{\gamma(V'')^2} = \frac{1}{\gamma(V)^2\gamma(V')^2} \quad (29)$$

$$\Rightarrow (1 + VV'/c^2)^2(1 - V''^2/c^2) = (1 - V^2/c^2)(1 - V'^2/c^2) \quad (30)$$

$$\Rightarrow 1 + 2VV'/c^2 + V^2V'^2/c^4 - (V''^2/c^2)(1 + VV'/c^2)^2 = 1 - V'^2/c^2 - V^2/c^2 + V^2V'^2/c^4 \quad (31)$$

$$\Rightarrow V'^2 + V^2 + 2VV' = (V + V')^2 = V''^2(1 + VV'/c^2)^2 \quad (32)$$

$$\Rightarrow V'' = (V + V')/(1 + VV'/c^2), \quad (33)$$

que é a expressão correta.

**Exercício:** Verifique a segunda eq.

Com isso mostramos fechamento para o grupo de Lorentz.

### 1.3.2 Composição relativística de velocidades

Na mecânica Newtoniana, se uma partícula possui velocidade  $\vec{u}(\vec{u}')$  em relação a um referencial inercial  $O(O')$  e a velocidade relativa dos referenciais é  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ , então

$$\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = (u_x + V, u_y, u_z). \quad (34)$$

Vejamos como fica essa relação no caso relativístico. Considere a figura acima com movimento relativo dos referenciais somente na direção  $x$ . A velocidade da partícula em relação a  $O$  é:

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left( \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) = (u_x(t), u_y(t), u_z(t)). \quad (35)$$

Em relação a  $O'$

$$\vec{u}'(t') = \frac{d\vec{r}'(t')}{dt'} = \left( \frac{dx'(t')}{dt'}, \frac{dy'(t')}{dt'}, \frac{dz'(t')}{dt'} \right) = (u'_x(t'), u'_y(t'), u'_z(t')). \quad (36)$$

Usando  $dx' = \gamma(dx - Vdt)$ ,  $dy' = dy$ ,  $dz' = dz$  e  $dt' = \gamma(dt - (V/c^2)dx)$  obtemos

$$u'_x = \frac{dx'(t')}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma(dt - (V/c^2)dx)} = \frac{u_x - V}{1 - u_x V/c^2}, \quad (37)$$

$$u'_y = \frac{dy'(t')}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - (V/c^2)dx)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x V/c^2)}, \quad (38)$$

$$u'_z = \frac{dz'(t')}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - (V/c^2)dx)} = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x V/c^2)}. \quad (39)$$

## 2 Grupo de Poincaré

[ ]: