01_determinant

August 20, 2019

```
In [3]: import platform
        if platform.system() == 'Linux':
            %run '/home/jonas/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb'
        else:
            %run '/Users/jonasmaziero/Dropbox/GitHub/algebra_linear/init.ipynb'
```

1 Função sinal

A função sinal, sgn, tem como domínio listas $j_1, j_2, \cdots, j_n$ de números naturais e como imagem $-1, 0, 1$. Para uma lista com n números, por definição temos

$$sgn_n(1, 2, \cdots, n) := 1. \tag{1}$$

Se quaisquer pares de índices são iguais, a função sinal é nula

$$sgn_n(j_1, j_2, \cdots, j_n) := 0 \text{ se } j_p = j_q \text{ para algum par } (p, q). \tag{2}$$

Se precisamos fazer um número par de trocas entre pares de índices de $j_1, j_2, \cdots, j_n$ para obter $1, 2, \cdots, n$ então

$$sgn_n(j_1, j_2, \cdots, j_n) := +1 \text{ (No. par de permutações)} . \tag{3}$$

Se precisamos fazer um número ímpar de trocas entre pares de índices de $j_1, j_2, \cdots, j_n$ para obter $1, 2, \cdots, n$ então

$$sgn_n(j_1, j_2, \cdots, j_n) := -1 \text{ (No. ímpar de permutações)} . \tag{4}$$

Outra propriedade que define a função sinal é

$$sgn_n(\cdots, j_{p-1}, j_p, j_{p+1}, \cdots) := (-1)^{n-p} sgn_{n-1}(\cdots, j_{p-1}, j_{p+1}, \cdots) \tag{5}$$

e relaciona a função sinal aplicada a listas com n e $n-1$ números. Note que p é a posição onde sacamos o número da lista original.

1.0.1 Antisimetria da função sinal

Em vistas das propriedades acima não é difícil notar que ao trocarmos dois índices quaisquer do argumento da função sinal torcamos o seu sinal, se esta não for nula, i.e.,

$$sgn_n(\cdots, j_p, \cdots, j_q, \cdots) = -sgn_n(\cdots, j_q, \cdots, j_p, \cdots). \tag{6}$$

Exercício: Considere a função sinal sgn_3 e escreva seus valores aplicados a todas as possibilidades de trios j_1, j_2, j_3. Por fim diga a que função, que vocês usaram bastante no curso de física, sgn_3 coincide.

Exercício: Escreva o produto vetorial usando sgn_3.

Problema: Obtenha um algoritmo (não trivial) para retornar a função sinal de uma permutação qualquer, e faça o código para testá-lo. Quem conseguir terá 0.5 pontos a mais na P1. Um caso mais simples desse problema é obter um algoritmo para calcular o determinante (via definição "original" com a função sinal), e fazer um programa para testá-lo. Quem conseguir somente este último terá 0.3 para a P1.

1.0.2 Vizinhos distantes vs primeiros vizinhos

Vamos inferir que a função sinal calculada com a restrição de trocas entre primeiros vizinhos é equivalente ao cálculo com troca entre vizinhos distantes. Ou seja, vamos argumentar que $sgn_n(\cdots, j_p, \cdots, j_q, \cdots) = -sgn_n(\cdots, j_q, \cdots, j_p, \cdots)$ é obtido também quando nos restringimos a trocas entre primeiros vizinhos. Para isso notemos que são precisas $2(q-p)-1$ trocas entre primeiros vizinhos para obter $(\cdots, j_p, \cdots, j_q, \cdots)$ de $(\cdots, j_q, \cdots, j_p, \cdots)$, ou vice versa. Para isso, usamos um caso particular: $(\cdots, 3, 4, 5, 6, \cdots) \to (\cdots, 3, 4, 6, 5, \cdots) \to (\cdots, 3, 6, 4, 5, \cdots) \to (\cdots, 6, 3, 4, 5, \cdots)$. Até aqui usamos $q - p = 6 - 3 = 3$ trocas. Seguindo, $(\cdots, 6, 3, 4, 5, \cdots) \to (\cdots, 6, 4, 3, 5, \cdots) \to (\cdots, 6, 4, 5, 3, \cdots)$, ou seja, usamos mais $q - p - 1 = 6 - 3 - 1 = 2$ trocas. Isso nos dá um total de $2(q-p) - 1 = 2(6-3) - 1 = 5$ trocas entre primeiros vizinhos. Mas

$$(-1)^{2(q-p)-1} = (-1)^{2(q-p)}(-1)^{-1} = (1)(1/(-1)^1) = -1, \tag{7}$$

que é o resultado que queríamos demonstrar.

Exercício: Faça a verificação análoga usando $(\cdots, 4, 5, 6, 7, 8, \cdots)$.

2 Determinante

Seja $A = (A_{j,k})$ uma matriz nxn. Aqui consideraremos como campo escalar $A_{j,k} \in \mathbb{C}$. Nesse caso o determinante da matriz A é uma mapa $\det : \mathbb{C}^{nxn} \to \mathbb{C}$ definido por

$$\det(A) := \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} sgn(j_1, j_2, \cdots, j_n) A_{1,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{n,j_n}. \tag{8}$$

Note que usamos as chamadas **permutações** de n índices, $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$, que são sequências com os números *todos diferentes*. Isso porque se houver dois ou mais índices iguais, a função sinal é nula. Claro, se usarmos $\sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n}$, o resultado final para o determinante será o mesmo. Outra observação relevante aqui é que o determinante é calculado considerando-se o produto de elementos de matriz de linhas e colunas diferentes, somando ou subtraindo esses produtos para todas as combinações de colunas com base no sinal da permutação correspondente.

OBS: Doravante não uso o sub-índice que indica o número de números no argumento de sgn, a menos que seja realmente necessário.

Exemplo: Para um *escalar*, o determinante é o próprio escalar. Para uma matriz de dimensão 2 teremos

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2)} sgn(j_1, j_2) A_{1j_1} A_{2j_2} = sgn(1,2) A_{1,1} A_{2,2} + sgn(2,1) A_{1,2} A_{2,1} = A_{1,1} A_{2,2} - A_{1,2} A_{2,1}. \tag{9}$$

Exercício: Escreva a expressão geral para o determinante de uma matriz de dimensão 3. **Exercício:** Para $c \in \mathbb{C}$ e $A \in \mathbb{C}^{nxn}$, mostre que $\det(cA) = c^n \det(A)$.

2.1 Propriedades do determinante

Seja $k_1, k_2, \cdots, k_n$ uma lista qualquer de números do conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$. Denotaremos

$$A(k_1, k_2, \cdots, k_n) \tag{10}$$

a matriz cuja l-ésima linha é a k_l-ésima linha da matriz A. *Exemplo:* Claro, $A(1, 2, \cdots, n) = A$. Um outro exemplo seria

$$A(2,3,2) = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Exercício: Escreva a matriz $A(3, 1, 2, 4)$.

Para essas matrizes modificadas, notemos que, em relação a A, substituímos as linhas $1, 2, \cdots, n$ pelas $k_1, k_2, \cdots, k_n$. Então o determinante fica

$$\det(A(k_1, k_2, \cdots, k_n)) := \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} sgn(j_1, j_2, \cdots, j_n) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} \cdots A_{k_n, j_n}. \tag{12}$$

2.1.1 Efeito da troca de linhas no determinante

Podemos utilizar o determinante escrito como na última equação para verificar que ao trocarmos duas linhas de uma matriz, trocaremos o sinal do seu determinante:

$$\begin{aligned}
\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)) &= \sum_{(\cdots, j_p, \cdots, j_q, \cdots)} sgn(\cdots, j_p, \cdots, j_q, \cdots) \cdots A_{k_p, j_p} \cdots A_{k_q, j_q} \cdots && (13) \\
&= \sum_{(\cdots, j_p, \cdots, j_q, \cdots)} sgn(\cdots, j_p, \cdots, j_q, \cdots) \cdots A_{k_q, j_q} \cdots A_{k_p, j_p} \cdots && (14) \\
&= \sum_{(\cdots, j_p, \cdots, j_q, \cdots)} -sgn(\cdots, j_q, \cdots, j_p, \cdots) \cdots A_{k_q, j_q} \cdots A_{k_p, j_p} \cdots && (15) \\
&= -\det(A(\cdots, k_q, \cdots, k_p, \cdots)). && (16)
\end{aligned}$$

Exemplo: Considera $A(1, 2) = A$ e $A(2, 1)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\det(A(2,1)) &= \sum_{(j_1, j_2)} sgn(j_1, j_2) A_{k_1, j_1} A_{k_2, j_2} = \sum_{(j_1, j_2)} sgn(j_1, j_2) A_{2, j_1} A_{1, j_2} && (17) \\
&= sgn(1,2) A_{2,1} A_{1,2} + sgn(2,1) A_{2,2} A_{1,1} = A_{2,1} A_{1,2} - A_{2,2} A_{1,1} && (18) \\
&= -\det(A) = -\det(A(1,2)). && (19)
\end{aligned}$$

Exercício: Verifique que $\det(A(2, 1, 3)) = -\det(A(1, 2, 3))$.

Consequências de $\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)) = -\det(A(\cdots, k_q, \cdots, k_p, \cdots))$**:**

1. Essa relação implica que

$$\det(A(k_1, k_2, \cdots, k_n)) = sgn(k_1, k_2, \cdots, k_n) \det(A). \tag{20}$$

   Para verificar essa afirmação, assuma que precisamos fazer N permutações de pares índices para obter $1, 2, \cdots, n$ a partir de $k_1, k_2, \cdots, k_n$. Lembre que trocas de pares de índices trocam o sinal da função sinal, i.e.,

$$sgn(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (-1)^N sgn(1, 2, \cdots, n) = (-1)^N. \tag{21}$$

   Como em cada uma dessas trocas trocamos duas linhas da matriz correspondente, e assim trocamos o sinal do determinante, teremos também que:

$$\det(A(k_1, k_2, \cdots, k_n)) = (-1)^N \det(A(1, 2, \cdots, n)) = (-1)^N \det(A), \tag{22}$$

   com o sinal que estabelece a relação entre os determinantes dependendo somente se N é par ou ímpar. Com isso fica verificada nossa afirmação inicial. **Exercício:** Verifique que $\det(A(3, 2, 1)) = sgn(3, 2, 1) \det(A)$.

2. Outra consequência do resultado anterior é que o determinante de uma matriz com **duas linhas iguais** é igual a zero. Para isso considere que as linhas k_p e k_q da matriz A são iguais. Assim

$$\begin{aligned} \det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)) &= \det(A(\cdots, k_q, \cdots, k_p, \cdots)) && (23) \\ &= -\det(A(\cdots, k_p, \cdots, k_q, \cdots)), && (24) \end{aligned}$$

   onde a primeira igualdade se deve ao fato das duas matrizes serem iguais e a segunda segue pela troca de linhas. Como para que $x = -x$ devemos ter $x = 0$, está demonstrada nossa segunda afirmação. **Exercício:** Verifique que $\det(A(2, 2, 3)) = 0$.

3. Se uma (ou mais) linha(s) de uma matriz pode ser escrita como uma **combinação linear** de outras de suas linhas, então o determinante dessa matriz é nulo. Na prática, como a troca de linhas só troca o sinal do determinante, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a primeira linha é combinação linear das próximas $r < n$ linhas, i.e., $A_{1,j_1} = \sum_{k=2}^{r} c_k A_{k,j_1}$ com $c_k \in \mathbb{C}$. Assim

$$\begin{aligned} \det(A) &\propto \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} sgn(j_1, j_2, \cdots, j_n) \sum_{k=2}^{r} c_k A_{k,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{r,j_r} \cdots A_{n,j_n} && (25) \\ &= \sum_{k=2}^{r} c_k \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} sgn(j_1, j_2, \cdots, j_n) A_{k,j_1} A_{2,j_2} \cdots A_{r,j_r} \cdots A_{n,j_n} && (26) \\ &= \sum_{k=2}^{r} c_k (\det \text{ de uma matriz com duas linhas iguais}) && (27) \\ &= 0. && (28) \end{aligned}$$

2.2 Forma simétrica para o determinante

Vamos verificar que o determinante de uma matriz A pode ser escrito como

$$\det(A) = \frac{1}{n!} \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n) sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n) A_{k_1,j_1} A_{k_2,j_2} \cdots A_{k_n,j_n}. \tag{29}$$

Começamos notando que para qualquer permutação $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ teremos

$$sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n) sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n) = 1. \tag{30}$$

Teremos assim, de $\det(A(k_1,k_2,\cdots,k_n)) = sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)\det(A)$, que:

$$sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)\det(A(k_1,k_2,\cdots,k_n)) = sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n) sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)\det(A) = \det(A). \tag{31}$$

Seguindo, notamos que existem $n!$ permutações de n símbolos. Um exemplo utilizado com frequência para chegar nesse resultado é aquele de arranjar n bolinhas numeradas em n caixas. Para a primeira caixa temos n possibilidades para qual bolinha colocaremos aí. Um vez feita esta escolha, sobram $n-1$ possibilidades para a segunda caixa. Seguindo com essa ideia vemos que o número total de arranjos é $n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$.

Dito isto, reescrevemos a equação acima como

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n!} \det(A) && (32)\\
&= \frac{1}{n!} \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)\det(A(k_1,k_2,\cdots,k_n)) && (33)\\
&= \frac{1}{n!} \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n) \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n) A_{k_1,j_1} A_{k_2,j_2} \cdots A_{k_n,j_n}, && (34)
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Exercício: Usando a forma simétrica, escreva explicitamente o determinante de uma matriz de dimensão 3.

2.3 Determinante da transposta

A transposta de uma matriz $A = (A_{j,k})$ é denotada e definida por

$$A^T = ((A^T)_{j,k}) := (A_{k,j}). \tag{35}$$

Ou seja, obtemos A^T de A trocando suas linhas por suas colunas. Vamos verificar o importante resultado de que o determinante da transposta de uma matriz qualquer é igual ao seu determinante:

$$\det(A^T) = \det(A). \tag{36}$$

Para verificar esse resultado, usamos a forma simétrica do determinante

$$\det(A^T) = \frac{1}{n!}\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)(A^T)_{k_1,j_1}(A^T)_{k_2,j_2}\cdots(A^T)_{k_n,j_n} \tag{37}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)A_{j_1,k_1}A_{j_2,k_2}\cdots A_{j_n,k_n} \tag{38}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)A_{j_1,k_1}A_{j_2,k_2}\cdots A_{j_n,k_n} \tag{39}$$

$$= \det(A). \tag{40}$$

Exercício: Mostre que se trocamos duas colunas de uma matriz, trocamos o sinal do seu determinante. **Exercício:** Mostre que se duas (ou mais) colunas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo. **Exercício:** Mostre que se uma (ou mais) colunas de uma matriz é uma combinação linear de outras de suas colunas, então seu determinante é nulo.

2.4 Autovalores da transposta

Autovalores serão discutidos em mais profundidade mais adiante. Aqui basta saber que obtemos os autovalores a de uma matriz A resolvendo a equação característica

$$\det(A - a\mathbb{I}_n) = 0, \tag{41}$$

em que $\mathbb{I}_n = (\delta_{j,k})$ é a matriz identidade nxn. Para a transposta da matrix A teremos que resolver $\det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n) = 0$. Como a transposta da soma de matrizes é a soma das transpostas (**exercício**) e a transposta da matriz identidade é a própria, podemos escrever

$$0 = \det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n) = \det(A^T - \alpha\mathbb{I}_n^T) = \det((A - \alpha\mathbb{I}_n)^T) = \det(A - \alpha\mathbb{I}_n), \tag{42}$$

o que implica que $\alpha = a$, cqd. Note que na última igualdade usamos o fato de que $\det(X) = \det(X^T)$ pra qualquer matriz X.

Exercício: A *conjugada* de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ é denotada $A^* \in \mathbb{C}^{nxn}$ e é definida por $A^* = ((A^*)_{j,k}) := (A^*_{j,k})$. Usando as propriedades básicas dos números complexos, Verifique que $\det(A^*) = (\det(A))^*$.

Exercício: A *adjunta* de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ é denotada por $A^\dagger \in \mathbb{C}^{nxn}$ e é definida como sua transposta conjugada, i.e., $A^\dagger = ((A^\dagger)_{j,k}) := (A^*_{k,j})$. Verifique que os autovalores de $A^\dagger$ são iguais ao complexo conjugado dos autovalores de A.

2.5 Determinante do produto = produto dos determinantes

Vamos verifivar que para $A, B \in \mathbb{C}^{nxn}$ temos

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{43}$$

Exercício: Verifique que o produto de duas matrizes $X \in \mathbb{C}^{nxm}$ e $Y \in \mathbb{C}^{mxp}$ é uma matriz $Z \in \mathbb{C}^{nxp}$ com elementos

$$Z_{j,k} = (XY)_{j,k} = \sum_{l=1}^{m} X_{j,l}Y_{l,k}. \tag{44}$$

Aplicando esse resultado para nosso caso especial, teremos

$$\det(AB) = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)(AB)_{1,j_1}(AB)_{2,j_2}\cdots(AB)_{n,j_n} \tag{45}$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)\sum_{k_1} A_{1,k_1}B_{k_1,j_1}\sum_{k_2} A_{2,k_2}B_{k_2,j_2}\cdots\sum_{k_n} A_{n,k_n}B_{k_n,j_n} \tag{46}$$

$$= \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} A_{1,k_1}A_{2,k_2}\cdots A_{n,k_n}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)B_{k_1,j_1}B_{k_2,j_2}\cdots B_{k_n,j_n} \tag{47}$$

$$= \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} A_{1,k_1}A_{2,k_2}\cdots A_{n,k_n}\det(B(k_1,k_2,\cdots,k_n)) \tag{48}$$

$$= \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} A_{1,k_1}A_{2,k_2}\cdots A_{n,k_n} sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)\det(B) \tag{49}$$

$$= \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} sgn(k_1,k_2,\cdots,k_n)A_{1,k_1}A_{2,k_2}\cdots A_{n,k_n}\det(B) \tag{50}$$

$$= \det(A)\det(B). \tag{51}$$

Exercício: Escreva explicitamente o determinante do produto de duas matrizes de dimensão 2 e verifique que este coincide com o produto de seus determinantes.

2.6 Determinante da soma $\neq$ soma dos determinantes

$$\det(A+B) = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)(A+B)_{1,j_1}(A+B)_{2,j_2}\cdots(A+B)_{n,j_n} \tag{52}$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)(A_{1,j_1}+B_{1,j_1})(A_{2,j_2}+B_{2,j_2})\cdots(A_{n,j_n}+B_{n,j_n}) \tag{53}$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)A_{1,j_1}A_{2,j_2}\cdots A_{n,j_n} \tag{54}$$

$$+ \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)B_{1,j_1}B_{2,j_2}\cdots B_{n,j_n} \tag{55}$$

$$+ \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)(\text{termos com produtos de A's e B's}) \tag{56}$$

$$= \det(A)+\det(B)+(\text{termo, em geral, não nulo}). \tag{57}$$

Se esse resultado não fosse assim, ele teria uma **implicação** séria sobre os autovalores da soma de matrizes. Considere que $\det(A-a\mathbb{I})=0$ e $\det(B-b\mathbb{I})=0$. Se $\det(X+Y)=\det(X)+\det(Y)$ teríamos que o autovalor da soma seria a soma dos autovalores, pois

$$0 = \det(A-a\mathbb{I})+\det(B-b\mathbb{I}) = \det(A-a\mathbb{I}+B-b\mathbb{I}) \tag{58}$$

$$= \det((A+B)-(a+b)\mathbb{I}). \tag{59}$$

Exercício: Encontre um exemplo de matrizes de dimensão 2 tais que $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$ e outro exemplo para o qual $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$.

2.7 Expansão em cofatores para o determinante

2.7.1 Lema

Sejam $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\text{x}n}$ matrizes que são iguais a menos da k-ésima linha. Essa linha de C é uma combinação linear das linhas correspondentes de A e B, i.e.,

$$C_{k,j_k} = \alpha A_{k,j_k} + \beta B_{k,j_k} \tag{60}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Para estas matrizes, temos

$$\det(C) = \alpha \det(A) + \beta \det(B). \tag{61}$$

Prova No te que concentramos na linha k, mas fazemos aparecer outras linhas que são comuns a todas as matrizes:

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \sum_{(\cdots,j_p,\cdots,j_k,\cdots,j_q,\cdots)} sgn(\cdots, j_p, \cdots, j_k, \cdots, j_q, \cdots) \cdots C_{p,j_p} \cdots C_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots && (62)\\
&= \sum_{(\cdots,j_p,\cdots,j_k,\cdots,j_q,\cdots)} sgn(\cdots, j_p, \cdots, j_k, \cdots, j_q, \cdots) \cdots C_{p,j_p} \cdots (\alpha A_{k,j_k} + \beta B_{k,j_k}) \cdots C_{q,j_q} \cdots && (63)\\
&= \alpha \sum_{(\cdots,j_p,\cdots,j_k,\cdots,j_q,\cdots)} sgn(\cdots, j_p, \cdots, j_k, \cdots, j_q, \cdots) \cdots C_{p,j_p} \cdots A_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots && (64)\\
&+ \beta \sum_{(\cdots,j_p,\cdots,j_k,\cdots,j_q,\cdots)} sgn(\cdots, j_p, \cdots, j_k, \cdots, j_q, \cdots) \cdots C_{p,j_p} \cdots B_{k,j_k} \cdots C_{q,j_q} \cdots && (65)\\
&= \alpha \sum_{(\cdots,j_p,\cdots,j_k,\cdots,j_q,\cdots)} sgn(\cdots, j_p, \cdots, j_k, \cdots, j_q, \cdots) \cdots A_{p,j_p} \cdots A_{k,j_k} \cdots A_{q,j_q} \cdots && (66)\\
&+ \beta \sum_{(\cdots,j_p,\cdots,j_k,\cdots,j_q,\cdots)} sgn(\cdots, j_p, \cdots, j_k, \cdots, j_q, \cdots) \cdots B_{p,j_p} \cdots B_{k,j_k} \cdots B_{q,j_q} \cdots && (67)\\
&= \alpha \det(A) + \beta \det(B). && (68)
\end{aligned}$$

Exercício: Verifique que se A, B, C são matrizes iguais a menos da k-ésima coluna e essa coluna de C é uma combinação linear das linhas correspondentes de A e B, i.e., $C_{j_k,k} = \alpha A_{j_k,k} + \beta B_{j_k,k}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Para estas matrizes, temos $\det(C) = \alpha \det(A) + \beta \det(B)$.

2.7.2 Lema

Seja

$$A = \begin{bmatrix} B & * \\ \mathbb{O} & b \end{bmatrix} \tag{69}$$

uma matriz $n\text{x}n$, onde B é uma matriz $(n-1)\text{x}(n-1)$, $\mathbb{O}$ é uma matriz linha nula, $1\text{x}(n-1)$, e $*$ é uma matriz coluna qualquer, $(n-1)\text{x}1$. Segue que

$$\det(A) = b \det(B). \tag{70}$$

Prova Começamos usando o determinante em sua forma "usual"

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},j_n)} sgn_n(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},j_n) A_{1,j_1}A_{2,j_2}\cdots A_{n-1,j_{n-1}}A_{n,j_n} && (71)\\
&= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},j_n)} sgn_n(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},j_n) B_{1,j_1}B_{2,j_2}\cdots B_{n-1,j_{n-1}} b\delta_{n,j_n} && (72)\\
&= b\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}} sgn_n(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},n) B_{1,j_1}B_{2,j_2}\cdots B_{n-1,j_{n-1}} && (73)\\
&= b\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}} (-1)^{n-n} sgn_{n-1}(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}) B_{1,j_1}B_{2,j_2}\cdots B_{n-1,j_{n-1}} && (74)\\
&= b\det(B). && (75)
\end{aligned}
$$

Exercício: Prove que para $A = \begin{bmatrix} B & \mathbb{O} \\ * & b \end{bmatrix}$ uma matriz nxn, com B é uma matriz $(n-1)$x$(n-1)$, $\mathbb{O}$ é uma matriz coluna nula, $(n-1)$x1, e $*$ é uma matriz linha qualquer, 1x$(n-1)$), teremos $\det(A) = b\det(B)$.

Exercício: Utilize o resultado deste último lema para verificar que o determinante de uma matrix triangular superior,

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} & \cdots & T_{1,n} \\ 0 & T_{2,2} & T_{2,3} & \cdots & T_{2,n} \\ 0 & 0 & T_{3,3} & \cdots & T_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix}, \tag{76}$$

é dado pelo produtos dos elementos na diagonal principal:

$$\det(T) = T_{1,1}T_{2,2}T_{3,3}\cdots T_{n,n} =: \Pi_{j=1}^{n} T_{j,j}. \tag{77}$$

2.7.3 Menor de uma matriz

Por definição, o menor $A^{(j,k)} \in \mathbb{C}^{(n-1)\text{x}(n-1)}$ de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\text{x}n}$ é obtido excluíndo-se a j-ésima linha e k-ésima coluna de A. *Exemplo:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 17 & 23 \end{bmatrix}. \tag{78}$$

Exercício: Para essa matriz, obtenha o menor $A^{(2,3)}$.

2.7.4 Matriz cofator

Por definição, a matriz cofator $cof(A) \in \mathbb{C}^{n\text{x}n}$ de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\text{x}n}$ é obtida como segue

$$cof(A) = \left(cof(A)_{j,k}\right) = \left((-1)^{j+k}\det(A^{(j,k)})\right). \tag{79}$$

Exemplo: Para a matriz do último exemplo, termos e.g. que

$$cof(A)_{1,3} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 17 & 19 \end{bmatrix} = (1)(7 * 19 - 11 * 17) = -54. \tag{80}$$

Exercício: Calcule $cof(A)_{2,1}$.

2.8 Teorema (expansão em cofatores)

Seja $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ com $n \geq 2$. Podemos escrever o determinante dessa matriz como

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} cof(A)_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} cof(A)_{j,k}, \tag{81}$$

com a primeira sendo chamada de expansão na linha j e a segunda é denominada expansão na coluna k.

Prova Considera um conjunto de n matrizes $B^{(k)} \in \mathbb{C}^{nxn}$ que são iguais a A a menos da j-ésima linha, cujos elementos são todos nulos a menos daquele na coluna k, que é igual a $A_{j,k}$. Então, se donotamos a j-ésima linha de A por $\langle A_j|$ e similarmente para a j-ésima linha de $B^{(k)}$, $\langle B_j^{(k)}|$, teremos que

$$\begin{aligned} \langle A_j| &:= \begin{bmatrix} A_{j,1} & A_{j,2} & \cdots & A_{j,n} \end{bmatrix} && (82) \\ &= (1) \begin{bmatrix} A_{j,1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 0 & A_{j,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + (1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & A_{j,n} \end{bmatrix} && (83) \\ &=: (1)\langle B_j^{(1)}| + (1)\langle B_j^{(2)}| + \cdots + (1)\langle B_j^{(n)}| && (84) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (1)\langle B_j^{(k)}|. && (85) \end{aligned}$$

Mas, em vistas do penúltimo lema que provamos, teremos que o determinante de A é a combinação linear dos determinantes das matrizes $B^{(k)}$, com todos os coeficientes iguais a um:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} \det(B^{(k)}). \tag{86}$$

Para continuar com a prova faremos uso último lema que provamos. Lembrando, lá tínhamos uma matriz cuja n-ésima linha era nula a menos do elemento na n-ésima coluna. Precisamos colocar todas as matrizes $B^{(k)}$ nessa forma:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \tag{87}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{88}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} & A_{j-1,k} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} & A_{j+1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} & A_{n,k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} \end{bmatrix}, \tag{89}$$

onde para a primeira passagem fizemos $n - j$ trocas de linhas e para a segunda passagem fizemos $n - k$ trocas de colunas.

Como para cada troca entre linhas ou colunas trocamos o sinal do determinante, teremos

$$\det(B^{(k)}) = (-1)^{n-k}(-1)^{n-j} \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} & A_{j-1,k} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} & A_{j+1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} & A_{n,k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{j,k} \end{bmatrix} \tag{90}$$

$$= (-1)^{2n}(-1)^{-(j+k)} A_{j,k} \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j-1,1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots & A_{j-1,n} \\ A_{j+1,1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots & A_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \tag{91}$$

$$= \frac{1}{(-1)^{j+k}} A_{j,k} \det(A^{(j,k)}) = (-1)^{j+k} A_{j,k} \det(A^{(j,k)}) = A_{j,k} cof(A)_{j,k}. \tag{92}$$

Com isso concluímos a verificação de que $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} cof(A)_{j,k}$.
Exercício: Prove que $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} cof(A)_{j,k}$.
Exemplo: Determinante de uma matriz triangular inferior

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,1} & T_{n-1,2} & T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} \tag{93}$$

Expande em cofatores na primeira linha

$$\det(T) = T_{1,1} cof(T)_{1,1} + \sum_{k=2}^{n} 0 cof(T)_{1,k} = T_{1,1}(-1)^{1+1} \det(T^{(1,1)}) \tag{94}$$

$$= T_{1,1} \det \begin{bmatrix} T_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{3,2} & T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,2} & T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,2} & T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} = T_{1,1} T_{2,2} (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} T_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ T_{n,3} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} \tag{95}$$

$$\vdots \tag{96}$$

$$= \Pi_{j=1}^{n} T_{j,j}. \tag{97}$$

2.9 Fórmula para a inversa

A *inversa* de uma matrix $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ é denotada por A^{-1} e é definida pelas igualdades:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I}_n, \tag{98}$$

com $\mathbb{I}_n$ sendo a matriz identidade nxn.

2.9.1 Teorema

A^{-1} existe se e somente se $\det(A) \neq 0$. Se $\det(A) \neq 0$, os elementos de matriz da inversa podem ser escritos como:

$$(A^{-1})_{j,k} = \frac{cof(A)_{k,j}}{\det(A)}. \tag{99}$$

Ou seja, identificamos a inversa de uma matriz A com a transposta da sua matriz de cofatores dividida pelo determinante de A.

Prova Começamos assumindo que a inversa existe. Então teremos que

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \det(A), \tag{100}$$

o que implica que o determinante da matriz A não pode ser nulo, i.e., $\exists A^{-1} \Rightarrow \det(A) \neq 0$.
Agora assuminos que $\det(A) \neq 0$. Usando a expansão em cofatores podemos escrever

$$1 = \frac{\det(A)}{\det(A)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} cof(A)_{j,k}}{\det(A)} =: \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} (A^{-1})_{k,j} = (AA^{-1})_{j,j}. \tag{101}$$

Exercício: Use a definição $(A^{-1})_{j,k} := cof(A)_{k,j} / \det(A)$ e o mesmo tipo de argumento para mostrar que $(A^{-1}A)_{j,j} = 1$.

Para provar que essa definição realmente fornece a inversa, falta ainda verificarmos que $(A^{-1}A)_{j,k} = 0$ se $j \neq k$. Pra isso, vamos encontrar uma matriz cujo determinante possa ser escrito como nessa expressão mas que sabemos ser nulo. Consideremos uma matriz B que é igual a A a menos da coluna k que é igual à coluna l de A (com $k > l$). Olhando para

$$B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & B_{j-1,l-1} & B_{j-1,l} & B_{j-1,l+1} & \cdots & B_{j-1,k-1} & B_{j-1,k} & B_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & B_{j,l-1} & B_{j,l} & B_{j,l+1} & \cdots & B_{j,k-1} & B_{j,k} & B_{j,k+1} & \cdots \\ \cdots & B_{j+1,l-1} & B_{j+1,l} & B_{j+1,l+1} & \cdots & B_{j+1,k-1} & B_{j+1,k} & B_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{102}$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j,l-1} & A_{j,l} & A_{j,l+1} & \cdots & A_{j,k-1} & A_{j,l} & A_{j,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{103}$$

vemos que os menores

$$B^{(j,k)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{104}$$

e

$$B^{(j,l)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{j-1,l-1} & A_{j-1,l+1} & \cdots & A_{j-1,k-1} & A_{j-1,l} & A_{j-1,k+1} & \cdots \\ \cdots & A_{j+1,l-1} & A_{j+1,l+1} & \cdots & A_{j+1,k-1} & A_{j+1,l} & A_{j+1,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{105}$$

são iguais a menos de $k - l$ trocas de colunas. Como cada troca entre colunas troca o sinal do determinante, teremos a seguinte expansão em cofatores na coluna l de B:

$$0 = \det(B) = \sum_j B_{j,l} cof(B)_{j,l} = \sum_j B_{j,l}(-1)^{j+l} \det(B^{(j,l)}) \tag{106}$$

$$= \sum_j A_{j,l}(-1)^{j+l}(-1)^{k-l} \det(B^{(j,k)}) = \sum_j A_{j,l}(-1)^{j+k} \det(A^{(j,k)}) = \sum_j A_{j,l} cof(A)_{j,k} \tag{107}$$

$$= \det(A) \sum_j A_{j,l} cof(A)_{j,k} / \det(A) = \det(A) \sum_j A_{j,l}(A^{-1})_{k,j} = \det(A) \sum_j (A^{-1})_{k,j} A_{j,l} \tag{108}$$

$$= \det(A)(A^{-1}A)_{k,l}, \tag{109}$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)_{k,l} = 0. \tag{110}$$

Vemos assim que $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, com $(A^{-1})_{j,k} := cof(A)_{k,j} / \det(A)$, completando assim a prova do teorema.

Exercício: Usando o mesmo tipo de procedimento, verifique que $(AA^{-1})_{k,l} = 0$ para $k \neq l$.

Exemplo Consideremos como exemplo a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, para a qual $\det(A) = -1$. Nesse caso

$$(A^{-1})_{1,1} = cof(A)_{1,1}/det(A) = -(-1)^{1+1} \det(A^{1,1}) = -7, \tag{111}$$

$$(A^{-1})_{1,2} = cof(A)_{2,1}/det(A) = -(-1)^{2+1} \det(A^{2,1}) = 3, \tag{112}$$

$$(A^{-1})_{2,1} = cof(A)_{1,2}/det(A) = -(-1)^{1+2} \det(A^{1,2}) = 5, \tag{113}$$

$$(A^{-1})_{2,2} = cof(A)_{2,2}/det(A) = -(-1)^{2+2} \det(A^{2,2}) = -2. \tag{114}$$

Então $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$. Para verificação considera

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{115}$$

Exercício: Usando a relação com a matriz de cofatores, calcule a inversa da matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$.

2.10 Sistemas de equações lineares não homogêneas (SELNH)

Considere um SELNH

$$A|x\rangle = |y\rangle, \tag{116}$$

com $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ e $|x\rangle, |y\rangle \in \mathbb{C}^n$ com $|y\rangle \neq |\oslash\rangle$, onde $|\oslash\rangle$ é o vetor nulo. Determinar a solução desse SELNH é obter $|x\rangle$ dada a matriz de coeficientes A e o vetor de não homogeneidade $|y\rangle$. Um caso especial onde podemos obter essa solução, é quando a matriz de coeficientes possui inversa. Nesse caso

$$|x\rangle = A^{-1}A|x\rangle = A^{-1}|y\rangle. \tag{117}$$

Uma regra mnemônica bem conhecida nesse contexto é a **regra de Kramer**, que é obtida como segue. Considere

$$|x\rangle_j = (A^{-1}|y\rangle)_j = \sum_{k=1}^{n}(A^{-1})_{j,k}|y\rangle_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{cof(A)_{k,j}}{\det(A)}|y\rangle_k = \frac{\sum_{k=1}^{n}|y\rangle_k(-1)^{k+j}\det(A^{(k,j)})}{\det(A)} \tag{118}$$

$$=: \frac{\sum_{k=1}^{n}K^{(j)}_{k,j}cof(K^{(j)})_{k,j}}{\det(A)} = \frac{\det(K^{(j)})}{\det A}, \tag{119}$$

onde definimos as *matrizes de Kramer*:

$$K^{(j)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & K^{(j)}_{k-1,j-1} & K^{(j)}_{k-1,j} & K^{(j)}_{k-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & K^{(j)}_{2,j-1} & K^{(j)}_{2,j} & K^{(j)}_{2,j+1} & \cdots \\ \cdots & K^{(j)}_{k+1,j-1} & K^{(j)}_{k+1,j} & K^{(j)}_{k+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A_{k-1,j-1} & A_{k-1,j} & A_{k-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & A_{2,j-1} & A_{2,j} & A_{2,j+1} & \cdots \\ \cdots & A_{k+1,j-1} & A_{k+1,j} & A_{k+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \tag{120}$$

que são obtidas substituindo-se a j-ésima coluna de A por $|y\rangle$.

Exemplo Considere seguinte SELNH:

$$2|x\rangle_1 + 3|x\rangle_2 = 5, \tag{121}$$
$$7|x\rangle_1 + 11|x\rangle_2 = 13. \tag{122}$$

Notemos primeiro que $\det(A) = \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} = 1$. A solução desse SELNH é

$$|x\rangle_1 = \frac{\det(K^{(1)})}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}}{1} = 16, \tag{123}$$

$$|x\rangle_2 = \frac{\det(K^{(2)})}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}}{1} = -9. \tag{124}$$

Verificação: $2(16) + 3(-9) = 5$ e $7(16) + 11(-9) = 13$.

Exercício: Obtenha a solução, via regra de Kramer, de um SELNH especificado pela matrix de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$ e pelo vetor de não homogeneidade $|y\rangle = \begin{bmatrix} 29 \\ 31 \\ 37 \end{bmatrix}$.

2.11 Método de eliminação de Gauss

Esse método é utilizado para colocar uma matriz na forma triangular através de operações que não alteram seu determinante. Note que depois de feito isso, precisamos de somente um produto de n números para calcular o determinante, em lugar dos $n!$ produtos na definição original. Vamos denotar a j-ésima linha de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{nxm}$ por $\langle L_j^A|$. Consideremos que substituímos em uma linha de A a combinação linear dessa linha com uma ou mais das suas outras linhas, i.e.,

$$\langle L_j^A| \rightarrow \langle L_j^A| + c\langle L_l^A| \tag{125}$$

com $c \in \mathbb{C}$. O determinante de A não muda por esse tipo de operação pois

$$\sum_{(\cdots,k_{j-1},k_j,k_{j+1},\cdots,k_l,\cdots)} sgn(\cdots,k_{j-1},k_j,k_{j+1},\cdots,k_l,\cdots)\cdots A_{j-1,k_{j-1}}(A_{j,k_j}+cA_{l,k_j})A_{j+1,k_{j+1}}\cdots A_{l,k_l}\cdots \tag{126}$$

$$= \sum_{(\cdots,k_{j-1},k_j,k_{j+1},\cdots,k_l,\cdots)} sgn(\cdots,k_{j-1},k_j,k_{j+1},\cdots)\cdots A_{j-1,k_{j-1}}A_{j,k_j}A_{j+1,k_{j+1}}\cdots A_{l,k_l}\cdots \tag{127}$$

$$+c \sum_{(\cdots,k_{j-1},k_j,k_{j+1},\cdots,k_l,\cdots)} sgn(\cdots,k_{j-1},k_j,k_{j+1},\cdots)\cdots A_{j-1,k_{j-1}}A_{l,k_j}A_{j+1,k_{j+1}}\cdots A_{l,k_l}\cdots \tag{128}$$

$$= \det(A) + \text{(det de uma matriz com 2 linhas iguais)} \tag{129}$$

$$= \det(A). \tag{130}$$

2.11.1 Algoritmo

Considera

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & A_{n-1,3} & \cdots & A_{n-1,n} \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{131}$$

Vamos deixar essa matriz na forma triangular superior sem mudar seu determinante. Se $A_{1,1} = 0$, verifica se há $A_{j,1} \neq 0$ para algum $j = 2, \cdots, n$. Se não há, então $\det(A) = 0$. Se há, troca $|L_1^A\rangle \leftrightarrow |L_j^A\rangle$. Tendo $A_{1,1} \neq 0$, zeramos todos os elementos abaixo de $A_{1,1}$ fazendo as substituições: $|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,1}/A_{1,1})|L_1^A\rangle$ para $j = 2, \cdots, n$. Seguindo, para a nova matriz, se $A_{2,2} \neq 0$, zeramos os elementos abaixo de $A_{2,2}$ fazendo $|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,2}/A_{2,2})|L_2^A\rangle$ para $j = 3, \cdots, n$. E seguimos assim até $A_{n-1,n-1}$. De forma geral,

$$|L_j^A\rangle \rightarrow |L_j^A\rangle - (A_{j,k}/A_{k,k})|L_1^A\rangle \text{ para } j = k+1, \cdots, n. \tag{132}$$

Por fim, o produto dos elementos na diagonal principal nos fornecerão o determinante. Diz que para entender realmente algum cálculo, etc, precimos programá-lo. Seguindo esse dito, o algoritmo de Gauss está implementado no código Sympy da função det_gauss.

```
In [38]: def det_gauss(A):
             n = A.shape[0] # = A.shape[1]
             det = 1
             T = zeros(n,n)
             for k in range(0,n-1):
```

```
            if A[k,k] == 0:
                for l in range(k+1,n):
                    if A[l,k] != 0:
                        T[n-1,:] = A[k,:]
                        A[k,:] = A[l,:]
                        A[l,:] = T[n-1,:]
                        det *= -1
                        break
            if A[k,k] == 0:
                return 0
            T[k,:] = A[k,:]
            for j in range(k+1,n):
                T[j,:] = A[j,:] - (A[j,k]/A[k,k])*A[k,:]
            A = T
        for j in range(0,n):
            det *= T[j,j]
        return det
```

In [51]:
```
#A = Matrix([[2,3],[5,7]])
#A = Matrix([[2,3,5],[7,11,13],[17,19,23]])
a,b,c,d = symbols("a b c d"); A = Matrix([[a,b],[c,d]])
#det(A)
det_gauss(A)
```

Out[51]:

$$a\left(d - \frac{bc}{a}\right)$$

In [52]:
```
def triangular(A):
    n = A.shape[0] # = A.shape[1]
    T = zeros(n,n)
    for k in range(0,n-1):
        if A[k,k] == 0:
            for l in range(k+1,n):
                if A[l,k] != 0:
                    T[n-1,:] = A[k,:]
                    A[k,:] = A[l,:]
                    A[l,:] = T[n-1,:]
                    break
        T[k,:] = A[k,:]
        for j in range(k+1,n):
            T[j,:] = A[j,:] - (A[j,k]/A[k,k])*A[k,:]
        A = T
    return T
```

In [53]:
```
triangular(A)
```

Out[53]:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

Exercício: Usando o método de Gauss, coloque a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$ na forma triangular e calcule seu determinante. Use os códigos relacionados para verificar seus cálculos.