

**Modelos a Valores Booleanos:**  
*Aplicações em Teoria dos Conjuntos*

IME - USP

Orientador: Prof. Hugo Luiz Mariano  
José Goudet Alvim

2017-19

### **Palavras-chave**

Reticulados; Álgebras de Heyting; Álgebras Booleanas; Teoria de Modelos; Valores booleanos de fórmulas; Independência; Forcing;

### **Resumo**

Neste trabalho de iniciação científica, estudaremos a teoria de modelos a valores booleanos de ZF, a fim de entender e produzir provas de consistência e independência na teoria de conjuntos. Para tanto, trataremos de álgebras de Boole; de Heyting; Filtros; Morfismos; Teoria de Modelos e Lógica.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Lógica de Primeira Ordem</b>	<b>4</b>
·	Def. Termos, Fórmulas e variáveis livres   escopadas	5
·	Def. Estrutura, Interpretação e Validação	6
·	Def. Sentença	9
·	Prp. Genericidade restrita de fórmulas:	9
·	Prp. Independência das interpretações irrelevantes:	10
·	Teo. Genericidade de sentenças para validação:	10
·	Def. Satisfatibilidade	10
·	Def. Consequência	11
·	Prp. Resultados sobre $\vdash$	13
·	Def. Teoria	18
·	Def. Teoria	18
·	Def. Consistência	19
<b>2</b>	<b>Teoria de Modelos de Teorias de Conjuntos</b>	<b>20</b>
2.1	Estruturas Transitivas	23
·	Def. Identidade Induzida	23
·	Def. Estrutura Transitiva	23
·	Def. Subestrutura	23
·	Teo. Estrutura transitivas atendem fundação e extensionalidade	24
2.1.1	Incondicionalidade e Elementaridade	25
·	Def. Incondicionalidade	25
·	Def. Elementaridade	25
·	Prp. Condições suficientes para incondicionalidade	26
·	Def. Fórmulas Completas	26
·	Teo. $\exists x : \varphi$ para completas e absolutas	27

· Teo. Quantificação limitada de fórmulas absolutas . . . . .	28
· Def. Fórmulas preservadas por Extensão/Restrição . . . . .	28
· Prp. Quantificação sobre absoluta é Restringível/Extendível . . .	29
2.1.2 Hierarquia de Lévy . . . . .	29
· Def. Fórmulas $\Sigma$ , $\Pi$ e $\Delta$ . . . . .	29
· Teo. Fórmulas $\Delta_1^T$ são $\mathcal{T}$ -absolutas . . . . .	30
· Prp. $\Delta_0$ são absolutas . . . . .	30
· Teo. Resultados acerca da Hierarquia de Lévy . . . . .	31
· Prp. Algumas Fórmulas e Termos $\Delta_0^{ZF}$ ou $\Delta_1^{ZF}$ . . . . .	31
2.2 O Universo Construtível . . . . .	32

# Capítulo 1

## Lógica de Primeira Ordem

It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music [...] because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect and yet true.

---

*Bertrand Russell.*

Começamos com uma língua  $\mathcal{L}$  de primeira ordem, isto é, a coleção de palavras (bem-)formadas por um determinado conjunto de símbolos para variáveis; uma série de símbolos para relações,  $\langle R_1, R_2, \dots \rangle$ ; uma de funções,  $\langle F_1, F_2, \dots \rangle$  e uma de constantes  $\langle C_1, C_2, \dots \rangle$ ; conectivos e operadores lógicos e quantificadores.

**DEFINIÇÃO: Termos, Fórmulas e variáveis livres | escopadas.**

- (a) Se  $x_i$  for uma variável, então a palavra “ $x_i$ ” é um **termo** e a (única) ocorrência de  $x_i$  é dita **livre** no termo.
- (b) Se  $C_i$  for uma constante, então a palavra “ $C_i$ ” é um **termo**. Como ele não contém variável, não faz sentido tratar de ocorrências de variáveis livres ou escopadas.
- (c) Se  $\{t_1, \dots, t_k\}$  forem termos, e  $R_j$  é um relacional de aridade  $k$ , então a palavra “ $(R_j(t_1, \dots, t_k))$ ” é uma **fórmula**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.
- (d) Se  $\{t_1, \dots, t_k\}$  forem termos, e  $F_j$  é um relacional de aridade  $k$ , então a palavra “ $(F_j(t_1, \dots, t_k))$ ” é um **termo**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.
- (e) Se  $\varphi, \psi$  forem fórmulas e  $\diamond$  for um conectivo lógico, então as palavras: “ $(\varphi \diamond \psi)$ ” e “ $(\neg \varphi)$ ” são **fórmulas**, e ocorrências de variáveis são livres ou escopadas de acordo com sua liberdade ou limitação nas fórmulas componentes.
- (f) Se  $\varphi$  for uma fórmula, e  $x_i$  é uma variável, então as palavras: “ $\exists x_i : \varphi$ ” e “ $\forall x_i : \varphi$ ” são **fórmulas** e cada ocorrência de  $x_i$  é dita **escopada** — pois está no escopo de um quantificador —, e cada ocorrência de qualquer outra variável é livre ou escopada de acordo com sua situação em  $\varphi$ .

A língua é formada destes componentes, fórmulas e termos.

\* \* \*

Por legibilidade, por omitiremos parenteses quando possível, e intruduziremos abreviaturas para fórmulas, termos *etc.*

A ideia de uma língua é que ela *fale sobre* um determinado domínio. Quando escrevo, minhas palavras tratam de objetos de alguma sorte. Quando nomeio um objeto e predico sobre ele, por exemplo, existe uma interpretação da verdade do predicado no nosso universo.

Por exemplo, “*Eu tenho cinco dedos cada uma de minhas mãos*”, é uma sentença da língua portuguesa, cujo valor de verdade é dependente em quem é “*Eu*” e em suas propriedades. Poderia ser o caso que o autor *não* tivesse cinco dedos em cada uma de minhas mãos, então, a interpretação costumeira de quem é “*Eu*” falsearia a sentença.

Poderia ser o caso que o autor não tivesse *mão alguma*, mas neste caso a sentença seria verdade, pelo mesmo motivo que eu tenho uma lamborghini em cada uma das minhas mansões.

Tentando capturar a noção de interpretação das *palavras* para objetos concretos (que não pertencem à língua, mas a um mundo) — por exemplo “*Eu*” — e como, associando palavras a objetos e símbolos a relações, constantes, funções *etc.* temos como determinar a veracidade de uma proposição no mundo alvo, dada uma interpretação.

**DEFINIÇÃO: Estrutura, Interpretação e Validação.**

**Assinatura:** Uma **assinatura** é uma tripla de coleções: a das relações, cada qual com sua aridade; a das constantes; e, finalmente, a das funções, cada qual com sua aridade.

$$\Sigma = \langle \langle \mathbf{R}_1, \dots \rangle, \langle \mathbf{C}_1, \dots \rangle, \langle \mathbf{F}_1, \dots \rangle \rangle$$

Se cada relação ou função em uma assinatura  $\Sigma$  tiver domínio em uma coleção  $A$ , e cada constante estiver em  $A$ , então podemos dizer que  $\Sigma$  está definida sobre  $A$ .

**Estrutura:** Chamamos a dupla  $\langle A, \Sigma \rangle$  de  $A$  coleção e uma assinatura  $\Sigma$  definida sobre  $A$ , de  $\mathfrak{A}$ . E este tipo de objeto batizamos de **estrutura**. E dizemos  $A$  ser o domínio de  $\mathfrak{A}$ , que escrevemos  $|\mathfrak{A}|$ , e  $\Sigma$  ser assinatura de  $\mathfrak{A}$ , possivelmente  $sgn(\mathfrak{A})$ .

**Compatibilidade Estrutura-Língua:** Dada uma língua de primeira ordem  $\mathcal{L}$  e uma estrutura  $\mathfrak{A}$  dizemos elas serem compatíveis se e só se valem todas:

- (a) Se  $sgn(\mathfrak{A})$  tiver tantas relações quanto há relacionais na língua.
- (b) Se  $\mathbf{R}_i$  é a  $i$ -ésima relação da estrutura, então  $R_i$ , o  $i$ -ésimo símbolo relacional da língua, concorda com sua aridade.
- (c) Se  $sgn(\mathfrak{A})$  tiver tantas funções quanto há funcionais na língua.
- (d) Se  $\mathbf{F}_i$  é a  $i$ -ésima função da estrutura, então  $F_i$ , o  $i$ -ésimo símbolo funcional da língua, concorda com sua aridade.

**Interpretação:** Dizemos que uma  $f$  é uma interpretação de  $\mathcal{L}$  para  $\mathfrak{A}$  se e, só se:

- (a)  $\mathcal{L}$  e  $\mathfrak{A}$  são compatíveis.
- (b)  $f$  associa cada variável  $\lambda$  da língua para algum elemento  $f(\lambda)$  de  $|\mathfrak{A}|$ .
- (c)  $f$  leva cada símbolo relacional  $R_i$  na relação  $f[R_i] = \mathbf{R}_i$  da  $sgn(\mathfrak{A})$ .
- (d)  $f$  leva cada símbolo funcional  $F_i$  na função  $f[F_i] = \mathbf{F}_i$  da  $sgn(\mathfrak{A})$ .
- (e) Se  $x_1, \dots, x_k$  forem termos e  $F$  um funcional, então  $f(F(x_1, \dots, x_k)) = f[F](f(x_1), \dots, f(x_k))$ .
- (f)  $f$  leva cada símbolo de constante  $c$  em um membro  $f(c)$  de  $|\mathfrak{A}|$ .

Isto é, ter uma interpretação — ou melhor — *interpretar* um símbolo é dar significado a ele. Pois, leva-lo a um objeto, relação semântica entre objetos, função, etc.



Um exemplo de significação é imaginar que quando escrevo “*o autor*” em alguma sentença, pode-se *interpretar* como referente do símbolo o *autor deste texto*. Ficam, pois, definidas as propriedades do signo e, assim, este pedaço da sentença ganha significado.

Além disso, dada uma interpretação  $f$  de  $\mathcal{L}$  para  $\mathfrak{A}$ , uma variável ou constante  $x$  e um membro  $a$  de  $|\mathfrak{A}|$ , definimos  $f_{[x/a]}$  como sendo exatamente igual a  $f$  nas variáveis e constantes exceto em  $x$ , onde ela valerá  $a$ . Os outros valores de  $f$  — isto é, em termos diversos — induz-se das funções, constantes e variáveis.

Isto se comporta como mudar um pedaço da interpretação, por exemplo, a interpretação de “*o nome do autor tem a letra W*” muda radicalmente de acordo com quem é o autor, mesmo mantendo a interpretação da função “nome de X”. Não poderia “*autor*” denotar Ludwig Wittgenstein, que foi autor?

**Validação:** Definimos uma fórmula  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$  valer em  $\mathfrak{A}$  sob a interpretação  $f$  (estrutura compatível com a língua) — alternativamente, que  $\mathfrak{A}$  satisfaz  $\varphi$  —, ou simbolicamente,  $\mathfrak{A} \models_f \varphi$  por recorrência sobre sua complexidade.

(a) Se  $x_0, \dots, x_{\rho_i}$  forem termos quaisquer,  $R_i$  relacional de aridade  $\rho_i$ :

$$\varphi \equiv R_i(x_0, \dots, x_{\rho_i}) \Rightarrow [\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow f[R_i](f(x_0), \dots, f(x_{\rho_i}))]$$

(b) Se  $\sigma$  e  $\psi$  forem fórmulas,  $x$  uma variável:

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \sigma \wedge \psi &\Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_f \sigma \text{ e } \mathfrak{A} \models_f \psi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \sigma \vee \psi &\Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_f \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \models_f \psi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \neg \sigma &\Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi &\Leftrightarrow \text{não } \mathfrak{A} \models_f \sigma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \sigma \rightarrow \psi &\Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_f \neg \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \models_f \psi] \end{aligned}$$

$$\varphi \equiv \forall x : \sigma \Rightarrow$$

$$[\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \text{para todo } a \text{ de } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \models_{f[x/a]} \varphi]$$

$$\varphi \equiv \exists x : \sigma \Rightarrow$$

$$[\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \text{existe algum } a \text{ de } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \models_{f[x/a]} \varphi]$$

A motivação desta definição é a ideia que os fatos elementares, no caso as relações e funções entre os objetos, determinam todos os fatos “complexos”. Os quantificadores por sua vez, desempenham o papel de providenciar genericidade. Isto é, sem estes, a validade de uma fórmula é extremamente dependente da interpretação. Mas uma **sentença** — isto é, uma fórmula com todas as variáveis em algum escopo de quantificador —, de certa forma, não depende de uma interpretação.

\* \* \*

**DEFINIÇÃO: Sentença.**

Uma **sentença** de uma língua é uma fórmula em que todas as ocorrências de suas variáveis são escopadas.

\* \* \*

**LEMA: Genericidade restrita de fórmulas:.**

Se todas as ocorrências de uma variável  $x$  em uma dada fórmula  $\varphi$  estiverem escopadas, então para todo  $a$  no domínio de uma certa estrutura  $\mathfrak{A}$  compatível com a língua de  $\varphi$ ,  $\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_{f[x/a]} \varphi$ .

*Prova:*

Onde  $x$  aparecer, ela estará escopada, então *ja íamos* substituir o valor de  $f$  lá. Como a validade das fórmulas é dada por recorrência, e como tudo permanece o mesmo salvo em  $x$ , fica clara a ida, para a volta reaplica-se a inda. ■

**LEMA: Independência das interpretações irrelevantes:.**

Se  $x$  não ocorrer em  $\text{varphi}$  uma  $\mathcal{L}$ -fórmula com língua compatível com  $\mathfrak{A}$  estrutura, então para todo  $a$  em  $|\mathfrak{A}|$ ,  $\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_{f[x/a]} \varphi$ .

*Prova:*

Na definição de validação  $x$  não desempenha papel algum. ■

**TEOREMA: Genericidade de sentenças para validação:.**

Dadas uma língua e uma estrutura compatíveis. Se  $\varphi$  for uma sentença da língua, então a estrutura valida  $\varphi$  sob uma interpretação  $f$  se e somente se valida sob qualquer interpretação  $g$  que leva as relações, funções e constantes nas mesmas que leva  $f$ .

*Prova:*

A volta é trivial, se valida para qualquer que coincide com  $f$  em certa parte, valida para  $f$ , que de certo coincide com  $f$  nesta parte.

Por outro lado, todas as ocorrências de variáveis são escapadas, então, qualquer substituição de variáveis (presentes em  $\varphi$ ) na interpretação não altera a validade da sentença. Adicionalmente, qualquer substituição de variáveis irrelevantes não altera a validade. Pois, quaisquer substituições não alteram a validade. Logo, toda interpretação leva a mesma validação. ■

**DEFINIÇÃO: Satisfatibilidade.**

Finalmente, definiremos uma noção de satisfatibilidade ou validade que independe de *interpretação*.

Dadas  $\mathfrak{A}$  uma estrutura e  $\mathcal{L}$  uma língua compatíveis, e uma fórmula  $\varphi$  da língua.

Deixe  $\psi \equiv \forall x_1, \dots, \forall x_k : \varphi$  onde  $x_1, \dots, x_k$  são todas as variáveis em  $\varphi$  não escapadas,

$$\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda interpretação } f : \mathfrak{A} \models_f \psi]$$

Possivelmente, nenhuma variável será livre em  $\varphi$  neste caso,  $\psi$  coincidirá com  $\varphi$ .

No caso que  $\mathfrak{A} \models \varphi$  vale, dizemos que  $\mathfrak{A}$  satisfaz  $\varphi$  ou, alternativamente,  $\varphi$  é válida em  $\mathfrak{A}$ . Note que uma fórmula que não for sentença é válida só se por falta de contra exemplo.

No caso em que  $\mathfrak{A} \models \Sigma$ , com  $\Sigma$  uma coleção de fórmulas, dizemos que  $\mathfrak{A}$  **modela**  $\Sigma$ .

\* \* \*

O estudo das estruturas e as fórmulas que lá são satisfeitas é extremamente importante, afinal. De exemplos, um trivial é uma estrutura com (apenas) a relação identidade e uma língua com (apenas) o símbolo “=”, sendo assim, temos que

$$\langle A, Id \rangle^1 \models x = x$$

**Notação:** A partir deste ponto, não vamos explicitamente dizer que uma língua é compatível com uma estrutura quando tratamos delas. Nem diremos que uma  $\varphi$  é fórmula da língua, *etc.*

**DEFINIÇÃO: Consequência.**

Da mesma forma que definimos satisfatibilidade com a intenção de abstrair a noção de interpretação, queremos agora abstrair as relações da própria estrutura.

**Estruturas compatíveis** Duas estruturas são ditas compatíveis exatamente quando houver uma língua que é compatível com as duas, isto é as aridades de cada relação, função, número de constantes *etc.* coincidem.

---

<sup>1</sup>No caso, interprete que a dupla é uma estrutura com apenas relações, nesta instância  $Id$  e domínio  $A$ .

Duas estruturas compatíveis podem satisfazer fórmulas radicalmente diferentes, por exemplo, a estrutura que tomamos acima e uma outra estrutura com apenas a relação “ $x(Nq)y \Leftrightarrow x \neq y$ ”. Se  $\mathcal{L}$  for a língua com apenas um símbolo relacional  $R$ , fica claro que  $\langle A, Id \rangle \models x = x$  e  $\langle B, Nq \rangle \not\models x = x$ . Queremos, pois, uma noção que não dependa tanto da estrutura fina do universo interpretativo.

**Consequência:** Dizemos que  $\varphi$  segue, ou é consequência, de  $\psi$ , ou simbolicamente,

$$\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda } \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi]$$

Note a semelhança com a definição de satisfatibilidade sem interpretação. Novamente, a quantificação universal faz o trabalho de generalizar o conceito em certa direção.

Extendemos a definição para conjuntos de fórmulas dos dois lados,

$$\Gamma \vdash \Sigma$$

Da maneira natural de fazer, isto é, para cada  $\varphi$  em  $\Sigma$ ,  $\Gamma \vdash \varphi$ , e por isso, queremos dizer:

$$[\text{Para toda } \mathfrak{A} : (\text{para toda } \gamma \text{ em } \Gamma : \mathfrak{A} \models \gamma) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi]$$

Finalmente, se  $\emptyset \vdash \varphi$ , escrevemos  $\vdash \varphi$ .

\* \* \*

A interpretação da definição é que algumas fórmulas são genéricas sobre uma certa sorte de estrutura, por exemplo, considere a fórmula  $\varphi \equiv xRx \rightarrow xRx$ . Não importa *quem* seja  $x$ , nem quais sejam suas relações com quaisquer outros membros de seu universo.  $\varphi$  é *sempre* verdade.

Considere um outro exemplo menos formal do mesmo princípio: Seja  $\psi =$  “*Todos os cavalos são animais*” e  $\varphi =$  “*todas as cabeças de cavalo são cabeças de animais*” então  $\psi \vdash \varphi$  é válida. Isso não depende de se existem cavalos, o quê são cavalos,

o quê são cabeças, se cavalos tem quatro patas, se cavalos tem cabeças, se cavalos são uma cor *etc.* E isso não é jogo de palavras:

$$\psi \equiv \forall x : E(x, x) \rightarrow A(x, x)$$

$$\varphi \equiv \forall c : (\exists a : E(a, a) \wedge C(c, a)) \rightarrow \exists b : A(a, a) \wedge C(c, b)$$

Que podemos ler “ $\varphi$ : para todo objeto, se este for um Equino, ele é um Animal” e “ $\psi$ : para todo objeto, se existe um outro que é Equino e tem como Cabeça este, então existe um terceiro que é Animal e tem como Cabeça o primeiro”.

**PROPOSIÇÃO: Resultados sobre  $\vdash$ .**

- a)  $\varphi \vdash \varphi$ ,
- b)  $\Gamma \vdash \varphi$  e  $\Gamma \subseteq \Lambda \Rightarrow \Lambda \vdash \varphi$ ,
- c)  $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ ,
- d)  $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ ,
- e)  $\varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$ ,
- f)  $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ ,
- g)  $\varphi \vdash \neg \neg \varphi$ ,
- h)  $\neg \neg \varphi \vdash \varphi$ ,
- i)  $\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ,
- j)  $\forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$ ,
- k)  $\forall x : \varphi \vdash \neg \exists x : \neg \varphi$ ,
- l)  $\neg \exists x : \neg \varphi \vdash \forall x : \varphi$ ,
- m)  $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \{\forall x : \varphi, \exists x : \varphi\}$ ,
- n)  $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$ ,

o)  $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ .

*Prova:*

a)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi}}{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi}{\varphi \vdash \varphi}}$$

b)

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi} \quad \frac{\frac{\Gamma \subseteq \Lambda \quad \frac{\mathfrak{A} \models \Lambda}{\lambda \in \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \lambda}}{\gamma \in \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \gamma}}{\mathfrak{A} \models \Gamma}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$

$\therefore \mathfrak{A} \models \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$

Assim,  $\Lambda \vdash \varphi$

c)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi}$$

$\therefore \varphi \vdash \varphi \vee \psi$

d)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \models \varphi} \quad \frac{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \models \psi}}{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \models \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi}}$$

$$\therefore \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

e)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}$$

$$\therefore \varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$$

f)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \emptyset \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi}{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \neg \varphi}$$

$$\therefore \emptyset \vdash \varphi \vee \neg \varphi$$

g)

$$\frac{\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\text{N\~ao-n\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \neg \varphi}}{\mathfrak{A} \models \neg \neg \varphi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \neg \neg \varphi$$

h)

$$\frac{\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \neg \neg \varphi}{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \neg \varphi}}{\text{N\~ao-n\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$



$$\therefore \neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

i)

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \vdash \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi}}{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\frac{\mathfrak{A} \models \neg\varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}{\mathfrak{A} \models \neg\varphi \vee \psi} \quad \mathfrak{A} \models \emptyset}}{\frac{\mathfrak{A} \models \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi}}$$

$$\frac{\frac{\frac{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\mathfrak{A} \models \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}}{\frac{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi}}{\varphi \vdash \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

j)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ de } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \models_{f[x/\hat{x}]} \varphi} \quad \frac{|\mathfrak{A}| \neq \emptyset}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|}}{\frac{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \models_{f[x/\hat{x}]} \varphi}{\mathfrak{A} \models \exists x : \varphi}}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$$

k)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \models \varphi} \quad \frac{\mathfrak{A} \models \exists x : \neg\varphi}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \models \neg\varphi}}{\perp}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \neg \exists x : \neg \varphi$$

l)

$$\therefore \exists x : \neg \varphi \vdash \neg \forall x : \varphi$$

m) Se  $x$  não ocorre em  $\varphi$ , então é trivial. Se  $x$  ocorre em  $\varphi$ , lembramos que é uma sentença, então  $x$  sempre ocorre quantificado em  $\varphi$ . Então  $\models$  vai ignorar os quantificadores em “ $\forall x : \phi$ ” e “ $\exists x : \phi$ ”.

n)

$$\frac{\mathfrak{A} \models \varphi \quad \frac{\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}{\mathfrak{A} \not\models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$$

o)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \neg \varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \varphi} \quad \frac{\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \psi}$$

$$\therefore \{\varphi \vee \psi, \neg \varphi\} \vdash \psi$$

■

O que estes resultados primários nos dizem é que, se tivermos uma prova formal (em um sistema dedutivo razoável) — partindo de hipóteses  $\Gamma$  — de uma coleção  $\Phi$  de sentenças, então temos garantido que  $\Gamma \vdash \Phi$ . Isto é importante porque temos que, de certa forma,  $\vdash$  respeita a dedução lógica: se achamos que  $\Gamma$  consegue provar  $\Phi$ , então de fato onde vale  $\Gamma$ , vale  $\Phi$ .

A recíproca, *que toda sentença consequente de  $\Gamma$  é provável por hipóteses de  $\Gamma$* , requer um trato cuidadoso com sistemas dedutíveis, definição de prova, *etc.* Mas é resultado conhecido que se  $\Gamma \vdash \varphi$ , então *prova-se*  $\varphi$  com hipóteses de  $\Gamma$ . Claro, dado um sistema dedutivo dentro de certas hipóteses.

**DEFINIÇÃO: Teoria.**

Dada uma língua, um subconjunto de sentenças  $\mathcal{T}$  é dito uma teoria quando ele é não-vazio e  $\vdash$ -fechado. Isto é, se  $\mathcal{T} \vdash \tau$  então  $\tau$  já estava em  $\mathcal{T}$ . Ou seja, é uma coleção de sentenças que contém todas as suas consequências sintáticas.

\* \* \*

Tomemos agora um momento para tratar de **Teorias**.

**DEFINIÇÃO: Teoria.**

Dada uma língua  $\mathcal{L}$ , um conjunto de sentenças  $\mathcal{S}$  é dito uma teoria dentro desta exatamente quando ele for fechado por  $\vdash$ , em outras palavras

Para qualquer  $\tau$  em  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{T} \vdash \tau \Rightarrow \tau$  já estava em  $\mathcal{T}$

\* \* \*

Dada uma língua  $\mathcal{L}$ , e um conjunto de sentenças não-vazio desta que batizamos “axiomas”  $\mathcal{A}$ , dizemos que um conjunto de sentenças  $\mathcal{T}$  é a teoria de  $\mathcal{A}$  exatamente quando para toda  $\tau$  de  $\mathcal{T}$ , temos  $\mathcal{A} \vdash \tau$ , que podemos abreviar para  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ .

O fato de que, para um conjunto de axiomas conforme acima,  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$  é teoria verifica-se por:

*Prova:*

$$\begin{array}{c}
\frac{\mathcal{T}_A \vdash \tau}{\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_A \Rightarrow \mathfrak{A} \models \tau} \quad \frac{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_A}{\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_A \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{A}} \quad \frac{\text{para cada } \sigma \text{ em } \mathcal{T}_A}{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_A} \\
\hline
\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_A \\
\hline
\frac{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \tau}{\mathcal{A} \vdash \tau} \\
\hline
\tau \text{ est\'a em } \mathcal{T}_A
\end{array}$$

■

Obviamente, toda  $\mathcal{T}$  teoria é da forma  $\mathcal{T}_A$  para algum conjunto de axiomas conveniente (por exemplo a própria  $\mathcal{T}$ ).

**DEFINIÇÃO: Consistência.**

Dizemos que uma teoria  $\mathcal{T}$  sobre uma língua  $\mathcal{L}$  é consistente se e só se ela é não trivial, isto é, existe uma  $\mathcal{L}$ -sentença  $\varphi$  que não está em  $\mathcal{T}$ .

\* \* \*

A motivação da definição de consistência é evitar contradições:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg\varphi \wedge \varphi \text{ em } \mathcal{T}}{\neg\varphi \text{ em } \mathcal{T}} \quad \frac{\neg\varphi \wedge \varphi \text{ em } \mathcal{T}}{\varphi \text{ em } \mathcal{T}} \quad \psi \text{ em } \mathcal{L} \text{ sentença} \\
\hline
\varphi \vee \psi \text{ em } \mathcal{T} \\
\hline
\psi \text{ em } \mathcal{T}
\end{array}$$

Se a teoria não for trivial, então ela não pode ser contraditória. Se ela *for* trivial, ela obviamente é.

Uma estrutura que modela uma teoria passa a ocupar um lugar especial em nossos estudos, afinal, uma teoria pretende descrever exhaustivamente as propriedades *a priori* de uma estrutura compatível através de uma manipulação que é puramente sintática, pois não temos acesso à estrutura específica quando tratamos de uma teoria (afinal, definimos ela com  $\vdash$  e não  $\models$ ).

## Capítulo 2

# Teoria de Modelos de Teorias de Conjuntos

A teoria dos modelos das teorias de conjuntos está relacionada com, por um lado, estudo de grandes cardinais e seus ramos, e, por outro, lógica e teoria de conjuntos em si.

Isto pois, para uma certa classe de teorias de primeira ordem expressivas o suficiente, existem sentenças que são independentes da teoria, e é o caso que as teorias de conjuntos estão justamente entre incompletas.

No campo da teoria, isto nos diz que a uma teoria de conjuntos é, de certa forma, agnóstica a respeito de certas proposições. Por exemplo, é necessário que não se possa provar a existência de cardinais excessivamente grandes, isto porque se um cardinal for  $\beth$ -fixo, a hierarquia cumulativa até o mesmo é um modelo da teoria de conjuntos.

Dado um modelo de, digamos ZF pode muito bem ser o caso que haja cardinais inacessíveis no mesmo, mas sem informações adicionais, é impossível provar que existem — se a teoria for consistente, que esperamos ser —.

No campo prático temos ainda traços do abalo deste quarto golpe narcísico que tomou a humanidade com os resultados de K. Gödel, da mesma forma que em um dado modelo de ZF possa valer ou não valer  $\varphi$ , pode ser que problemas importantes ou interessante sejam, simplesmente, independentes da teoria sem que saibamos. É este justamente o caso da hipótese do contínuo, que novamente mostra a capacidade de  $\mathbb{R}$  de apresentar-se como a besta que de fato é.

A hipótese do contínuo não é *um pouco* independente, por sinal. Como enunciou Robert M. Solovay: “ $2^{\aleph_0}$  can be anything it ought to be”<sup>1</sup>. Dizendo que  $\mathfrak{c}$  pode ser (e é em algum modelo)  $\aleph_\beta$  para um  $\beta$  sucessor ou de cofinalidade incontável. A hipótese do contínuo é “tão” independente que  $\mathfrak{c}$  pode, inclusive, ser fracamente inacessível.

---

<sup>1</sup>The Theory of Models, Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. Amsterdam, North-Holland, 1965, Addison, Henkin, Tarski, eds., pg. 435.

Provar a independência de uma proposição pode ser feita tanto sintaticamente, ou semanticamente. Enquanto a maneira sintática é mais econômica ontologicamente falando, a semantica é mais acessível à mente, por mais que devamos tomar cuidado para não cairmos em confusões linguísticas.

Empregaremos uma abordagem principalmente semantica para tratar de ZF, e por isso que surge a necessidade da teoria dos modelos. Porém, para tratar de ZF, vamos primeiro definir qual teoria de fato falamos.

A língua de nossa teoria é relativamente simples, é a lingua com dois<sup>2</sup> símbolos relacionais  $\langle =, \in \rangle$  apenas. Já a teoria é a gerada por esses 7 axiomas e o Esquema de Substituição, que nos dá um axioma para cada fórmula conforme.

1. Ax. da Identidade:

$$\forall x : [\exists! y : x = y] \wedge x = x.$$

2. Ax. Extensionalidade:

$$\forall x : \forall y : [\forall z : z \in x \leftrightarrow z \in y] \leftrightarrow x = y.$$

3. Ax. da União:

$$\forall x : \exists y : \forall z : [z \in y \leftrightarrow \exists w \in x : z \in w].$$

4. Ax. da Potência:

$$\forall x : \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow [\forall w : w \in z \leftrightarrow w \in x].$$

5. Ax. Esquema da Substituição:

Se  $\varphi$  uma fórmula com apenas  $a, b, \vec{v}$  livres e  $c, w, x, y, z$  não ocorrendo em  $\varphi$ . Então:

$$\begin{aligned} [\forall \vec{v} : \forall a : [\exists b : \varphi(a, b; \vec{v})] \leftrightarrow [\exists! b : \varphi(a, b; \vec{v})]] \rightarrow \\ \rightarrow [\forall x : \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow \exists w : w \in x \wedge \varphi(w, z; \vec{v})] \end{aligned}$$

6. Ax. do Conjunto Indutivo:

$$\begin{aligned} \exists I : \exists x : x \in I \wedge (\forall t : t \in x \leftrightarrow t \neq t) \\ \wedge [(\exists w : w \in I) \rightarrow \exists z : z \in I \wedge \forall t' : t' \in z \leftrightarrow t' = w \vee t' \in w]. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Poderíamos fazer apenas com  $\in$ , mas não é necessário.

7. Ax. da Fundação:

$$\forall x : (\exists x' : x' \in x) \rightarrow \exists y : (y \in x) \wedge [\forall t : (t \in x \wedge t \in y) \rightarrow t \neq t].$$

## 2.1 Estruturas Transitivas

DEFINIÇÃO: **Identidade Induzida.**

Se tivermos uma relação  $R$  definida sobre uma classe  $A$ , gostaríamos de ter uma relação de equivalência em  $A$  que fosse congruente com  $R$ , definimos  $\approx_R$  como sendo

$$a \approx_R b \Leftrightarrow \forall t \in A : tRa \leftrightarrow tRb$$

Restrito ao domínio adequado.

Isto é, em  $A$ , dois identificados são idênticos à esquerda.

\* \* \*

DEFINIÇÃO: **Estrutura Transitiva.**

Uma estrutura  $\mathfrak{A} = \langle A, \approx, \epsilon \rangle$  é dita uma **estrutura transitiva** exatamente quando  $\epsilon = \{ \langle a, b \rangle : a, b \in A \wedge a \in b \}$ ,  $\approx = \approx_\epsilon$  e  $A$  é uma classe transitiva.

\* \* \*

DEFINIÇÃO: **Subestrutura.**

Dadas duas estruturas compatíveis  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  dizemos que  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  — que  $\mathfrak{A}$  é subestrutura de  $\mathfrak{B}$  — exatamente quando  $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ , as relações e funções de  $\mathfrak{A}$  são as restrições das de  $\mathfrak{B}$  e as constantes de  $\mathfrak{B}$  são as mesmas que as de  $\mathfrak{A}$ .

\* \* \*



**TEOREMA: Estruturas transitivas atendem fundação e extensionalidade.**

Se  $\mathfrak{A} = \langle A, \approx, \epsilon \rangle$  for uma estrutura transitiva, então,

- a)  $\mathfrak{A} \models \text{Ax. da Fundação}$
- b)  $\mathfrak{A} \models \text{Ax. da Extensionalidade}$

*Prova:*

- a) Seja  $x \in A$ , com tal que  $\exists y \in A : y \in x$ , isso significa que  $\exists y : y \in x$ , assim, pelo axioma da fundação,  $\exists y \in x : \forall t : [t \in x \wedge t \in y] \rightarrow t \neq t$ . Como  $A$  é transitivo, temos que este  $y$  existe *em*  $A$ , então  $\exists y \in x : \forall t : [t \in x \wedge t \in y] \rightarrow t \neq t$ .

Por outro lado, temos que  $\forall a, b \in A : a \approx b \leftrightarrow a = b$ , pois, para a ida<sup>3</sup>: Como  $A$  é transitivo, então  $a, b \subset A$ . Assim, se os membros de  $a$  em  $A$  forem exatamente os de  $b$  em  $A$ , então os membros de  $a$  são os mesmos que os de  $b$ , e por extensionalidade, são iguais. Assim, temos  $\exists y \in x : \forall t : [t \in x \wedge t \in y] \rightarrow t \neq t$ , que é a tradução da fundação para a estrutura  $\mathfrak{A}$ .

- b) Se  $a, b \in A$  então todos os membros *deste* estão em  $A$  também. Se os membros de  $a$  e  $b$  que estão dentro de  $A$  coincidem, então os fora de  $A$  coincidem e temos a extensionalidade. Assim, eles são iguais ( $=$ ), mas se são iguais, como vimos, também são iguais ( $\approx$ ). Vale então a extensionalidade. ■

Neste teorema aparece insinuada uma propriedade de certas fórmulas que chamamos de Incondicionalidade, ou *Absoluteness*.

---

<sup>3</sup>a volta é trivial

### 2.1.1 Incondicionalidade e Elementaridade

DEFINIÇÃO: **Incondicionalidade.**

Sejam  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  estruturas transitivas.

Uma fórmula  $\varphi$  da língua de ZF é dita **absoluta** ou **incondicional** entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  exatamente quando, para toda  $f$  interpretação das variáveis da língua em  $\mathfrak{A}$ .

$$\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi$$

Um termo  $t$  da língua é dito **absoluta entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$**  exatamente quando, para toda  $f$  interpretação das variáveis da língua em  $\mathfrak{A}$ .

$$\mathfrak{A} \models_f x = t \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f x = t$$

Dizemos ainda que uma fórmula é preservada sob restrição de  $\mathfrak{B}$  para  $\mathfrak{A}$  quando a implicação da direita para esquerda vale. E Dizemos que uma fórmula é preservada sob extensão de  $\mathfrak{A}$  para  $\mathfrak{B}$  quando a implicação da esquerda para a direita vale.

\* \* \*

DEFINIÇÃO: **Elementaridade.**

Dadas  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  estruturas compatíveis Dizemos  $\mathfrak{A}$  ser subestrutura elementar de  $\mathfrak{B}$ , ou que  $\mathfrak{B}$  é extensão elementar de  $\mathfrak{A}$ , exatamente quando toda fórmula é absoluta entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ .

\* \* \*

Fórmulas absolutas, pois, formam uma classe de fórmulas muito útil para o trato de modelos, já que seus significados não mudam quando as extendemos ou as restringimos. Que estas fórmulas não são todas as que existem é simple de ver: Deixe  $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2\}, \leq \rangle$  e  $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3\}, \leq \rangle$  É trivial ver que  $\forall x, y, z : (x \neq y) \rightarrow z = x \vee z = y$  não é absoluta entre as estruturas.

No entanto, a situação não é tão ruim assim, por mais que tamanho não seja absoluto entre estruturas, temos critérios para gerar fórmulas absolutas:

**PROPOSIÇÃO: Condições suficientes para incondicionalidade.**

- a) fórmulas atômicas são absolutas.
- b) conjunção, disjunção e negação de absolutas é a absoluta.

*Prova:*

- a) Como uma é subestrutura da outra, então as relações são as restrições. Como a fórmula é atômica, e a interpretação é em na subestrutura, então vai ser verdade em numa estrutura exatamente quando for na outra.
- b) Segue da definição de satisfação.

**DEFINIÇÃO: Fórmulas Completas.**

Uma fórmula  $\varphi(x; \vec{v})$  é dita **completa** em  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  com respeito a  $x$  exatamente quando é o caso que:

Se  $\hat{x} \in |\mathfrak{B}|$  e  $\vec{u}$  forem parâmetros em  $|\mathfrak{A}|$ , então  $\mathfrak{B} \models \varphi(\hat{x}, \vec{u}) \Rightarrow b \in |\mathfrak{A}|$ . Sendo que com “ $\mathfrak{B} \models \varphi(\hat{x}, \vec{u})$ ” queremos dizer “ $\mathfrak{B} \models_{f_{[x/\hat{x}, \vec{v}/\vec{u}]}} \varphi(\hat{x}, \vec{u})$ ” pois  $\varphi$  só tem os parâmetros e  $x$  livres.

Uma fórmula completa em relação a uma par estrutura-subestrutura e um variável é de tal forma que se não for verdade em baixo, não é por falta de testemunha. Da mesma forma que se uma sequência em  $\mathbb{R}$  não converge, não é porque está faltando o ponto de convergência, como poderia ser o caso em  $\mathbb{Q}$ .

\* \* \*

TEOREMA:  $\exists x : \varphi$  **para completas e absolutas.**

Seja  $\varphi(x; \vec{v})$  absoluta entre  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  transitivas, e completa para  $x$  entre as mesmas estruturas. Nestas condições,  $\exists x : \varphi(x, \vec{v})$  é absoluta entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ .

*Prova:*

Primeiro, temos que:

- a)  $\mathfrak{A} \models_f \varphi(x; \vec{v}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi(x; \vec{v})$ .
- b)  $[(\vec{u} \subseteq |\mathfrak{A}|) \wedge (b \in |\mathfrak{B}|)] \Rightarrow [\mathfrak{B} \models_f \varphi(b; \vec{u}) \Rightarrow b \in |\mathfrak{A}|]$ .

( $\Rightarrow$ ) Então considere:

$$\frac{\frac{\frac{\mathfrak{A} \models_f \exists x : \varphi(x, \vec{v})}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \models_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x, \vec{v})}}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \models_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x, \vec{v})}}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{B} \models_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x, \vec{v})}}{\mathfrak{B} \models_f \exists x : \varphi(x, \vec{v})}$$

( $\Leftarrow$ ) Por outro lado, tome que

$$\frac{\frac{\frac{\mathfrak{B} \models_f \exists x : \varphi(x, \vec{v})}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{B} \models_{f_{[x/\hat{x}]} \varphi(x, \vec{v})}}}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \models_{f_{[x/\hat{x}]} \varphi(x, \vec{v})}}}{\mathfrak{A} \models_f \exists x : \varphi(x, \vec{v})} \quad \frac{f \text{ é uma } \mathfrak{A}\text{-valoração de variáveis}}{f[\vec{v}] \subseteq |\mathfrak{A}|}$$

Assim, fica provado o teorema. ■

**TEOREMA: Quantificação limitada de fórmulas absolutas.**

Seja  $\varphi$  absoluta entre  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  estruturas transitivas, então  $\exists x \in y : \varphi(x)$  e  $\forall x \in y : \varphi(x)$  são ambas absolutas, quando  $y$  não ocorre em  $x$ .

*Prova:*

Primeiro,  $\exists x \in y : \varphi(x) \equiv \exists x : x \in y \wedge \varphi$ :

$$\frac{x \in y \text{ é absoluta} \quad \varphi(x) \text{ é absoluta}}{x \in y \wedge \varphi(x) \text{ é absoluta}}$$

$x \in y \wedge \varphi(x)$  é completa para  $x$  entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  pois: se  $y \in \mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  crê que  $x$  está em  $y$  e satisfaz  $\varphi$ , então, certamente  $x$  está em  $y$  que está em  $\mathfrak{A}$ .

Logo, pelo teorema anterior,  $\exists x \in y : \varphi(x)$  é absoluta entre as estruturas.

Para o quantificador universal, basta ver que  $\neg\varphi(x)$  também é absoluta, então  $\exists x : x \in y \wedge \neg\varphi(x)$  é absoluta, mas ela é equivalente a  $\exists x : \neg(x \in y \rightarrow \varphi(x))$  que equivale a  $\neg\forall x : x \in y \rightarrow \varphi(x)$ . Neste caso, sabemos que ela será absoluta, mas negação de absoluta também é. Então  $\forall x : x \in y \rightarrow \varphi(x)$ . ■

**DEFINIÇÃO: Fórmulas preservadas por Extensão/Restrição.**

Dizemos que uma fórmula  $\varphi$  é **preservada por extensões** — ou é **extendível** — exatamente quando:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ estruturas transitivas} \Rightarrow (\mathfrak{A} \models_f \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi)$$

Toda vez que  $f$  for uma  $\mathfrak{A}$  valoração.

Dizemos que uma fórmula  $\varphi$  é **preservada por restrições** — ou é **restringível** — exatamente quando:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ estruturas transitivas} \Rightarrow (\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi)$$

Toda vez que  $f$  for uma  $\mathfrak{A}$  valoração.

\* \* \*

**LEMA: Quantificação sobre absoluta é Restringível/Extendível.**

Trivialmente, se  $\varphi$  for absoluta entre duas transitivas  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ , então  $\exists x : \varphi$  é extendível e  $\forall x : \varphi$  é restringível.

### 2.1.2 Hierarquia de Lévy

**DEFINIÇÃO: Fórmulas  $\Sigma$ ,  $\Pi$  e  $\Delta$ .**

Uma fórmula  $\varphi$  é dita **restrita** ou **limitada** quando todos os seus quantificadores são da forma  $\forall x : x \in y \rightarrow \psi$  ou  $\exists x : x \in y \wedge \psi$  (isto é  $\forall x \in y : \psi$  ou  $\exists x \in y : \psi$  )

Uma fórmula é dita  $\Sigma_0$  e  $\Pi_0$  exatamente quando ela é restrita; É dita  $\Sigma_{n+1}$  quando é da forma  $\exists x_1 : \dots : \exists x_k : \psi$  para  $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$  variáveis e uma  $\psi$  fórmula  $\Pi_n$ . Similarmente, é dita  $\Pi_{n+1}$  exatamente quando  $\forall x_1 : \dots : \forall x_k \psi$  com  $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$  variáveis e uma  $\psi$  fórmula  $\Sigma_n$ .

Finalmente, uma fórmula  $\varphi$  é dita  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$  — sigma- $n$  para  $\mathcal{T}$  — quando existe uma  $\psi$  que é  $\Sigma_n$  tal que  $\mathcal{T} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$ ,  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$  sendo similarmente definida. Um caso especial são as fórmulas  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ , que são exatamente aquelas fórmulas que são  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$  e  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$  simultaneamente. Novamente, um termo  $t$  é dito  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ ,  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$  ou  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$  quando  $x = t$  o for — com  $x$  não ocorrendo em  $t$ , é claro —.

\* \* \*

O motivo do nosso interesse em catalogar certas fórmulas na hierarquia de Lévy é a relação que estas fórmulas possuem com as estruturas transitivas. A ver, as fórmulas  $\Sigma_1^{\mathcal{T}}$  são preservadas por extensões, as  $\Pi_1^{\mathcal{T}}$  são preservada por restrições e as  $\Delta_1^{\mathcal{T}}$  são absolutas, quando se tratando de modelos da teoria  $\mathcal{T}$ , claro.

TEOREMA: Fórmulas  $\Delta_1^{\mathcal{T}}$  são  $\mathcal{T}$ -absolutas.

*Prova:*

LEMA:  $\Delta_0$  são absolutas.

Trivialmente, pois são conjunções de outras absolutas ou quantificações limitadas de fórmulas absolutas.

Seja  $\varphi$  uma fórmula  $\Delta_1^{\mathcal{T}}$ . Como ela é equivalente a uma  $\forall x_k : \psi$  com  $\psi \in \Sigma_0^{\mathcal{T}}$ , ela é  $\mathcal{T}$ -equivalente a uma quantificação universal de uma fórmula absoluta, afinal  $\psi$  é absoluta.

Por outro lado, ela é equivalente a uma  $\exists x_j : \gamma$  com  $\gamma \in \Pi_0^{\mathcal{T}}$ , que nos dá que ela é  $\mathcal{T}$ -equivalente a uma quantificação existencial de uma absoluta, pois  $\gamma$  também é absoluta.

Assim, sendo  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  estruturas transitivas e  $f$  uma  $\mathfrak{A}$ -valoração, temos que:

- a)  $\mathcal{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \forall x_k : \psi$ .
- b)  $\mathcal{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x_k : \gamma$ .
- c)  $\mathfrak{A} \models_f \exists x_k : \gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \models_f \exists x_k : \gamma$ .
- d)  $\mathfrak{A} \models_f \exists x_k : \psi \Rightarrow \mathfrak{B} \models_f \forall x_k : \psi$ .

Se for o caso que  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathcal{T}$ , então temos que

$$\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi$$

■

Agora que temos uma condição suficiente para uma fórmula ser absoluta entre estruturas transitivas de uma teoria dada, transferimos o problema de identificar uma fórmula absoluta para o problema de identificar uma fórmula  $\Delta_1^{\mathcal{T}}$

Por [?], temos que, para um teoria  $\mathcal{T}$  tão forte quanto ZF,

**TEOREMA: Resultados acerca da Hierarquia de Lévy.**

- (a) Se “ $\varphi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , então “ $\forall x : \varphi$ ”  $\in \Pi_{n+1}^{\mathcal{T}}$  e “ $\exists x : \varphi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , para toda  $x$  variável da língua.
- (b) Se “ $\varphi$ ”  $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$ , então “ $\forall x : \varphi$ ”  $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$  e “ $\exists x : \varphi$ ”  $\in \Sigma_{n+1}^{\mathcal{T}}$ , para toda  $x$  variável da língua.
- (c) Se “ $\varphi$ ”, “ $\psi$ ”  $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$ , então suas conjunções e disjunções são  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$
- (d) Se “ $\varphi$ ”, “ $\psi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , então suas conjunções e disjunções são  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$
- (e) Se “ $\varphi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$  e “ $\psi$ ”  $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$ , então suas conjunções e disjunções são  $\Delta_{n+1}^{\mathcal{T}}$ ,  
e “ $\varphi \rightarrow \psi$ ” é  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$   
e “ $\psi \rightarrow \varphi$ ” é  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$
- (f) Quantificação limitada não altera classe de Lévy: portanto  
Se “ $\varphi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , temos que “ $\forall x \in y : \varphi$ ” continua  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ ,
- (g) Se  $\varphi(x)$  for  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ , então  $\{x : \varphi(x)\}$  é  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$
- (h) Se  $\varphi(x)$  for  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ , então  $\{x \in y : \varphi(x)\}$  é  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$
- (i) Se  $x$  for um termo  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$  e  $\mathcal{T} \vdash \exists y : y = x$ , então  $t$  é  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$
- (j) Se  $\varphi(x)$  e  $t$  forem  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$  e  $\mathcal{T} \vdash \exists y : y = t$ , então todos são  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ :  
  - $\{x \in y : \varphi(x)\}$  é  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$
  - $\exists x \in t : \varphi(x)$
  - $\forall x \in t : \varphi(x)$
- (k) Se  $\varphi$  e  $t$  forem  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , então  $\{t : \varphi\}$  é  $\Delta_{n+1}^{\mathcal{T}}$

**LEMA: Algumas Fórmulas e Termos  $\Delta_0^{\text{ZF}}$  ou  $\Delta_1^{\text{ZF}}$ .**



$$\Delta_0^{\text{ZF}} :$$

$$x = y, x \subseteq y, \emptyset, \{x, y\}, \langle x, y \rangle.$$

$$\Delta_1^{\text{ZF}} :$$

$$\text{Trans}(x), \text{Ord}(x), x < y(x), \omega, \text{Fun}(f), \text{Dom}(f), \text{Im}(f), f(x), f^{-1}(x), f \upharpoonright X, \bigcup x, X \times Y, x + 1.$$

## 2.2 O Universo Construtível

Um modelo especial de ZF é o Universo Construtível, que satisfaz uma restrição adicional sobre sua estrutura fina. É um exemplo de modelo onde vale o axioma da escolha e a hipótese generalizada do contínuo, e gostaríamos de passar por ele justamente para contrapor os modelos a valores Booleanos.

Chamamos o universo construtível de  $L$ , que é uma classe transitiva da hierarquia acumulada  $V$ . A definição de  $L$  dentro da língua depende de uma internalização da lógica e da teoria dos modelos transitivos. Mas, moralmente, queremos:

$$L_{\alpha+1} = \{x : \exists \varphi \text{ fórmula da teoria: } \exists \vec{p} \in L_{\alpha}^{<\omega} : x = \{t \in V_{\alpha} : \varphi(t; \vec{p})\}\}$$

$$(\lambda = \bigcup \lambda) \Rightarrow L_{\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_{\alpha}$$

Evidentemente, se “ $\varphi$  fórmula da teoria” não estiver formalizado *dentro* da teoria, não temos esperança alguma desta definição fazer sentido. Pois, o primeiro passo que devemos tomar é achar uma Gödelização apropriada das fórmulas como *conjuntos* de fato.

Suponha que possuamos códigos para  $\ulcorner \forall \urcorner$ ,  $\ulcorner \exists \urcorner$ ,  $\ulcorner = \urcorner$ ,  $\ulcorner \in \urcorner$ ,  $\ulcorner \neg \urcorner$ ,  $\ulcorner \vee \urcorner$ ,  $\ulcorner \wedge \urcorner$  e  $\ulcorner \rightarrow \urcorner$ . Então, definimos a codificação das fórmulas da seguinte maneira, similar a de [\[Drake\]](#):

$$\begin{aligned}
\ulcorner Qx_i : \varphi \urcorner &= \langle \ulcorner Q \urcorner, i, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle, \text{ onde } Q \text{ for um quantificador;} \\
\ulcorner x_i = x_j \urcorner &= \langle \ulcorner = \urcorner, i, j \rangle \\
\ulcorner x_i \in x_j \urcorner &= \langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \rangle \\
\ulcorner \neg \varphi \urcorner &= \langle \ulcorner \neg \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle \\
\ulcorner \varphi X \psi \urcorner &= \langle \ulcorner X \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle, \text{ onde } X \text{ for um conectivo;}
\end{aligned}$$

Fixar códigos para os componentes simples não poderia ser mais fácil: temos apenas 8 deles, e  $8 = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Não desejamos impor a nossa bijeção favorita, qualquer uma serve. Agora que temos uma especificação de como é uma “fórmula” internalizada, podemos escrever uma fórmula *de fato* que afirma que um dado *conjunto* é uma *representação* de um fórmula.

$$\begin{aligned}
Repr(\varphi, \chi, n) \equiv & [n \in \omega] \wedge [Fun(\chi)] \wedge [Dom(\chi) = n + 1] \wedge [\chi(n) = \varphi] \wedge \forall k \in n + 1 : \{ \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \rightarrow \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \neg \urcorner, \chi(a), \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \vee \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \wedge \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, i \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \forall \urcorner, i, \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, i \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \exists \urcorner, i, \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists i, j \in \omega : [\chi(k) = \langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \rangle]] \vee \\
& [\exists i, j \in \omega : [\chi(k) = \langle \ulcorner = \urcorner, i, j \rangle]] \}
\end{aligned}$$

Apesar de longa, *Repr* é bem simples: ela afirma que  $\chi$  é testemunha da construção de  $\varphi$  em  $n$  passos. Fica claro que um determinado conjunto  $X$  é fórmula se e só se  $\exists n \in \omega : \exists \chi \in V_\omega : Repr(X, \chi, n)$ .

Agora, deixe:

$$\begin{aligned}
Q_i(\chi) &= \{I : \exists X : \exists Q \in \{\ulcorner \forall \urcorner, \ulcorner \exists \urcorner\} : \chi(I) = \langle Q, i, X \rangle\} \\
O_i(\chi) &= \{I : \exists j : \exists R \in \{\ulcorner = \urcorner, \ulcorner \in \urcorner\} : \chi(I) = \langle R, i, j \rangle \vee \chi(I) = \langle R, j, i \rangle\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Bound(\varphi, i) &\equiv [\exists \chi : \exists n : Repr(\varphi, \chi, n) \wedge \\
&\quad (O_i(\chi) \neq \emptyset) \wedge (Q_i(\chi) \neq \emptyset) \wedge \max O_i(\chi) < \min Q_i(\chi)] \\
Free(\varphi, i) &\equiv [\exists \chi : \exists n : Repr(\varphi, \chi, n) \wedge \\
&\quad (O_i(\chi) \neq \emptyset) \wedge (\neg Bound(\varphi, i))]
\end{aligned}$$

Ou seja,  $Bound(\varphi, i)$  diz que  $x_i$  ocorre na fórmula, e  $x_i$  é quantificado, e é quantificado antes de ocorrer. E  $Free(\varphi, i)$  diz que  $x_i$  ocorre na fórmula e não é quantificado antes de ocorrer.

Em tendo internalizado as fórmulas da teoria, o próximo passo é internalizar a teoria de modelos da teoria, ou pelo menos um pedaço desta. queremos uma fórmula que diga algo similar a  $\mathfrak{A} \models_f \varphi$ , mas interna à língua.

# Referências Bibliográficas

[Bell]

Bell, J. L. **Set Theory, Boolean-Valued Models and Independence Proofs**, Oxford logic Guides v. 47, Clarendon Press, 2005.

[Drake]

Drake, Frank R. **Set theory : an introduction to large cardinals**, Studies in logic and the foundations of mathematics v. 76, American Elsevier Pub. Co., 1974.

[Freire]

Freire, Rodrigo. A. **Grasping Sets Through Ordinals: On a Weak Form of the Constructibility Axiom**, *South American Journal of Logic* Vol. 2, n. 2, pp. 357-359, 2016. ISSN: 2446-6719.

[Jech]

Jech, T. **Set Theory: Third Millennium Edition, revised. and extended**, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.

[Kunen]

Kunen K. **Set Theory**, Studies in Logic v. 34, Lightning Source, Milton Keynes, UK.

[Miraglia]

Neto, F. Miraglia. **Cálculo Proposicional: Uma interação da Álgebra e da Lógica**, Coleção CLE – v. 1, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas — São Paulo, 1987.