Modelos a Valores Booleanos: Aplicações em Teoria dos Conjuntos

IME - USP
Orientador: Prof. Hugo Luiz Mariano
José Goudet Alvim

2017-19

Palavras-chave
Reticulados; Álgebras de Heyting; Álgebras Booleanas; Teoria de Modelos; Valores booleanos de fórmulas; Independência; Forcing;

Resumo

Neste trabalho de iniciação científica, estudaremos a teoria de modelos a valores booleanos de ZF, a fim de entender e produzir provas de consistência e independência na teoria de conjuntos. Para tanto, trataremos de álgebras de Boole; de Heyting; Filtros; Morfismos; Teoria de Modelos e Lógica.

Conteúdo

1 Lógica **3**

1.1 Lógica de Primeira Ordem 4

1.1.1 Satisfatibilidade 5

Def. Valoração de Variáveis 5

Def. Satisfatibilidade 6

1.1.2 Provabilidade 8

Def. Consequência Sintática 8

Def. Teoria 9

Prp. Resultados sobre $\vdash$ 10

Capítulo 1

Lógica

It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music [...] because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect and yet true.

Bertrand Russell.

A forma mais básica de lógica que nos propomos a tratar é a "lógica proposicional", que veremos ser intimamente ligada a álgebras de Heyting. Ela consiste de uma coleção de letras proposicionais, que podem ser vistas como condições, e destas "fórmulas atômicas", obtemos fórmulas compostas através do uso de conectivos e operadores lógicos.

O estudo da lógica proposicional tem seu mérito, mas não será especialmente util para nós. O nosso foco serão álgebras booleanas completas. Veremos, no entanto, um tanto sobre álgebras de heyting, que são como que realizações de alguma lógica proposicional.

Grosseiramente, uma lógica proposicional se ocupa de sentenças como:

$$(P \to Q) \to P \to Q$$

$$(P \wedge Q) \to P$$

Onde P, Q, $e$tc. são letras proposicionais. Uma álgebra de Heyting como que dá um valor parcialmente ordenado a cada uma das letras, e indutivamente, obtemos um valor para fórmulas como as acima.

1.1 Lógica de Primeira Ordem

Definimos uma língua formal como sendo as sequências simbólicas finitas definidas por pela seguinte gramática:

Dados $\Sigma = \{R_0, \ldots, R_n\}$ símbolos relacionais $\rho_0, \ldots, \rho_n$-árias, respectivamente; e uma coleção $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ de símbolos de variáveis (infinitos e distintos dos relacionais) que uma sequência (finita) de símbolos σ pertence à língua de $\langle \Sigma, \Omega \rangle$ exatamente quando vale alguma das condições abaixo:

a) $\sigma \equiv R_k\left(x_{\alpha_0}, \ldots, x_{\alpha_{\rho_k}}\right)$, com $0 \leq k \leq n$, e x_{α_i} todos em Ω.

b) $\sigma \equiv \varphi \wedge \psi$, com φ, ψ da língua.

c) $\sigma \equiv \varphi \vee \psi$, com φ, ψ da língua.

d) $\sigma \equiv \neg\varphi$, com φ da língua.

e) $\sigma \equiv \forall x_i : \varphi$, com x_i variável em Ω e φ da língua.

f) $\sigma \equiv \exists x_i : \varphi$, com x_i variável em Ω e φ da língua.

Como na construção da língua, usamos apenas a aridade e número de símbolos relacionais, podemos definir uma língua canônica para cada "assinatura".

Primeiro, fixaremos uma coleção de símbolos $\Omega = \{x_0, x_1, \ldots\}$, para variáveis, e uma coleção de símbolos distintos $\Sigma = \{R_0, R_1, \ldots\}$ relacionais. Para cada $\rho : n \longrightarrow \mathbb{N}$ que define a aridade de cada um dos R_i-s e número de símbolos relacionais, define-se a língua $\mathcal{L}_\rho$ como feito acima.

1.1.1 Satisfatibilidade

Sem alguma ideia de o que fórmulas de uma língua dada dizem a respeito de um ambiente, não temos nada de muito interessante. Então, vamos definir o que queremos dizer com um ambiente e, então definir o que significa satisfatibilidade.

Primeiro, para definirmos **estruturas**, pois se uma fórmula é verdade ela deve ser verdade em algum lugar. Para tanto, vamos definir uma **valoração de variáveis**:

1) Definição: **Valoração de Variáveis**.

Dada uma classe A de objetos, uma valoração de **variáveis das variáveis** de uma língua $\mathcal{L}$ de primeira ordem com alguma assinatura, dizemos que f é uma **valoração de variáveis** quando ela é uma realização dos símbolos das $\mathcal{L}$-variáveis em objetos de A — *i*e. uma função que associa símbolos de variáveis a objetos concretos de A.

Adicionalmente, dados um objeto o de A, uma variável x_j de $\mathcal{L}$ e uma valoração f, definimos:

$$f[x_j/o](x_i) = \begin{cases} o, \text{ se } i = j; \\ f(x_i), \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Uma valoração que é a substituição do valor de f em um só ponto.

* * *

Uma **estrutura** é uma coleção de informações:

$$\mathfrak{A} = \langle A, R_0, \ldots, R_n \rangle$$

Onde A é uma classe não vazia chamada "domínio" e cada uma R_i é uma relação definida sobre o mesmo. Dizemos que uma estrutura e uma língua são **compatíveis** exatamente quando a aridade de cada R_i é ρ_i.

2) DEFINIÇÃO: **Satisfatibilidade**.

Sejam φ uma $\mathcal{L}$-fórmula; $\mathfrak{A} = \langle A, P_0, \ldots, P_n \rangle$ uma estrutura; f uma valoração de variáveis em A; e sejam $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{A}$ compatíveis.

$$\mathfrak{A} \vDash_f \varphi$$

Que se lê "$\mathfrak{A}$ satisfaz φ", "$\mathfrak{A}$ crê que φ" ou "φ vale em $\mathfrak{A}$", É definido recursivamente:

$$\varphi \equiv R_i\left(x_0, \ldots, x_{\alpha_{\rho_i}}\right) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow P_i\left(f(x_0), \ldots, f(x_{\alpha_{\rho_i}})\right).$$
$$\varphi \equiv \sigma \wedge \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ e } \mathfrak{A} \vDash_f \psi.$$
$$\varphi \equiv \sigma \vee \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi.$$
$$\varphi \equiv \neg\sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \text{ não } \mathfrak{A} \vDash_f \sigma.$$
$$\varphi \equiv \sigma \rightarrow \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \neg\sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi.$$
$$\varphi \equiv \forall x_i : \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \text{ para todo } a \text{ de } A\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f[x_i/a]} \varphi.$$
$$\varphi \equiv \exists x_i : \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \text{ existe algum } a \text{ de } A\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f[x_i/a]} \varphi.$$

Existe uma questão delicada nessa quantificação que fazemos nas últimas duas clausulas: Não devemos acreditar que é possível fazer isso em 1^a ordem, devido a um resultado de Tarski. Uma língua que pode definir satisfatibilidade para todas as outras línguas de primeira ordem, pode, também definir para ela mesma, e isso resulta em uma contradição devido a meta-linguística.

* * *

Vamos tomar um parágrafo para explorar o significado da definição (admitidamente meta-teorética) de satisfatibilidade. Primeiro, vemos que se a fórmula sendo interpretada é um sentença[1], então não importa quais valorações f, f' que dermos, dada uma σ-sentença:

$$\mathfrak{A} \vDash_f \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_{f'} \sigma$$

Segundo, se uma fórmula da língua é $\varphi(x, y, z)$[2] onde estas vairáveis estão livres na fórmula, então se $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ forem objetos do domínio de uma estrutura compatível, "$\varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$" — que gostaríamos que significasse quão verdade é dizer que $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ estão relacionados como φ predica — se traduz simplesmente em: $f' = f[x/\hat{x}; y/\hat{y}; z/\hat{z}]$ uma nova valoração de variáveis:

$$\mathfrak{A} \vDash_{f'} \varphi$$

Codifica exatamente isso. $\vDash_{f'}$ vale se e só se a estrutura dá uma semiose à φ "avaliada" nos objetos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Assim, satisfatibilidade é a codificação dessa interpretação de uma coisa *s*intática, a fórmula, em uma coisa *s*emântica relações entre objetos, quantificações sobre o domínio, etc.

Finalmente, — dado um coleção de fórmulas Γ[3] de uma língua compatível com $\mathfrak{A}$ estrutura e uma valoração f —, dizemos que:

$$\mathfrak{A} \vDash_f \Gamma \Leftrightarrow \text{ para toda } \varphi \text{ de } \Gamma\text{: } \mathfrak{A} \vDash_f \varphi$$

E que, se Γ for coleção de sentenças, então dizemos:

$$\mathfrak{A} \vDash \Gamma \Leftrightarrow \text{ para toda } \varphi \text{ de } \Gamma\text{: } \mathfrak{A} \vDash_f \varphi$$

onde f é qualquer (fixa) valoração das variáveis, por exemplo: $f(x_i) = \hat{x}$[4]

[1] *ie.* todas as variáveis da fórmula estão quantificadas sobre por algum $\forall$ ou um $\exists$, em todos os escopos.

[2] Onde x, y, z são açucar sintático para alguns x_i, x_j, x_k.

[3] Caso Γ seja vazio, $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$ é vacuamente verdade.

[4] Pelo menos uma tal valoração existe pois os domínios de estruturas são não vazios.

1.1.2 Provabilidade

O interessante da satisfatibilidade como definida antes é sua relação com a provabilidade. Para explora-la, devemos tratar de "teorias".

Agora, sendo um pouco colecionista, considere o conjunto das fórmulas de de uma língua $\mathcal{L}_\Sigma$, com $\Sigma = \langle R_0, \ldots, R_n \rangle$.

3) Definição: **Consequência Sintática**.

A ideia por trás da definição é que existem coisas que são verdadeiras independente de interpretação e localidade. Por exemplo, não importa se $\forall x_7 \forall x_8 : R_3(x_7, x_8)$ é verdade ou não em um uma dada estrutura (de assinatura compatível), sempre vale que: $[\forall x_7 \forall x_8 : R_3(x_7, x_8)] \to [\exists x_7 : \exists x_8 : R_3(x_7, x_8)]$. Isto é, existem sentenças que não dependem de interpretações de variáveis nem da semântica das relações: suas verdades são *c*onsequências sintáticas.

Então vamos definir uma relação entre conjuntos de sentenças de uma língua e sentenças desta mesma língua a de consequência sintática.

Seja $\Gamma \subset \mathcal{L}$ conjunto de sentenças de uma língua. Seja também φ uma sentença da mesma língua. Dizemos que φ é consequência sintática de Γ:

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi)$$[5]

* * *

A definição se extende para conjuntos de sentenças simplemente dizendo

$$\Gamma \vdash \Sigma \Leftrightarrow \text{ para todo } \sigma \text{ de } \Sigma \text{ temos: } \Gamma \vdash \sigma$$

[5] Onde $\mathfrak{A}$ é uma estrutura de assinatura compatível. Estamos, de certa forma, com $\mathfrak{A}$ livre sobre estruturas, o que é assustador. Afinal, para teoria de conjuntos, por exemplo, potencialmente estaríamos quantificando sobre classe próprias. E, em teorias mais fortes, todo tipo de coisas informalizáveis. Já estamos, no entanto, em uma meta-teoria generosa.

Pouco mais abaixo de onde estamos se agita um mar de metafísica, e questões epistemo e ontológicas no qual não ousamos mergulhar.

Em se tratando de conjuntos unitários, *i*e. $\Gamma = \{\varphi\}$, abreviamos a relação $\vdash$ para:

$$\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \{\varphi\} \vdash \psi$$

Esta é uma definição de fato bem estranha, definimos uma coisa ser sintáticamente consequente da outra em termos de interpretações, que são semânticas em natureza[6]. No entanto, ela é uma relação extremamente razoável: não há interpretação que tenha Γ sem ter φ. De alguma forma, dizer que "Em todo lugar que Γ vale, φ vale" nos garante que não importa o lugar, apenas Γ e φ.

Teorias

4) Definição: **Teoria**.

Dada uma língua, um subconjunto de sentenças $\mathcal{T}$ é dito uma teoria quando ele é não-vazio e $\vdash$-fechado. Isto é, se $\mathcal{T} \vdash \tau$ então τ já estava em $\mathcal{T}$. Ou seja, é uma coleção de sentenças que contém todas as suas consequências semânticas.

* * *

Dada uma língua $\mathcal{L}$, e um conjunto de sentenças não-vazio desta que batizamos "axiomas" $\mathcal{A}$, dizemos que um conjunto de sentenças $\mathcal{T}$ é a teoria de $\mathcal{A}$ exatamente quando *p*ara toda τ de $\mathcal{T}$, temos $\mathcal{A} \vdash \tau$, que podemos abreviar para $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

O fato de que, para um conjunto de axiomas conforme acima, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ é teoria verifica-se por:

Prova:

[6]É claro que é possível fazê-lo de maneira puramente sintática, que é útil para computadores e provadores automáticos de teoremas, mas cremos que é uma abordagem que oculta algo da beleza da relação inseparável entre $\vdash$ e $\vDash$.

Por outro lado, uma abordagem sintática de fato mais precisa, pois não necessita quantificar sobre as estruturas compatíveis com a língua, *e*tc.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \vdash \tau}{\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \tau} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}{\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{A}} \quad \dfrac{\dfrac{\text{para cada } \sigma \text{ em } \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}{\mathcal{A} \vdash \sigma}}{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}}{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}}{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \tau}}{\mathcal{A} \vdash \tau}}{\tau \text{ está em } \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}$$

$\blacksquare$

5) PROPOSIÇÃO: **Resultados sobre** $\vdash$.

Dada uma língua fixada $\mathcal{L}$ e $\varphi, \psi, \sigma, \tau$ sentenças da de $\mathcal{L}$.

a) $\varphi \vdash \varphi$,

b) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Lambda \Rightarrow \Lambda \vdash \varphi$,

c) $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$,

d) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$,

e) $\varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$,

f) $\emptyset \vdash \varphi \vee \neg\varphi$,

g) $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$,

h) $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$,

i) $\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi$,

j) $\forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$,

k) $\forall x : \varphi \vdash \neg\exists x : \neg\varphi$,

l) $\neg\exists x : \neg\varphi \vdash \forall x : \varphi$,

m) $\emptyset \vdash \varphi \Rightarrow \emptyset \vdash \{\forall x : \varphi, \exists x : \varphi\}$

Prova:

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi}}{\varphi \vdash \varphi}$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\mathfrak{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \subseteq \Lambda \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \models \Lambda}{\lambda \in \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \lambda}}{\lambda \in \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \lambda}}{\mathfrak{A} \models \Gamma}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$

$$\therefore \mathfrak{A} \models \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$$

$$\text{Assim, } \Lambda \vdash \varphi$$

c)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \varphi \vee \psi$$

d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

e)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \psi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \psi\}}$$

$$\therefore \varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$$

f)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \emptyset \qquad \mathfrak{A} \nvDash \varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}$$

$$\therefore \emptyset \vdash \varphi \vee \neg\varphi$$

g)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi}{\text{Não-não } \mathfrak{A} \vDash \varphi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \neg\neg\varphi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

h)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \neg\neg\varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}}{\text{Não-não } \mathfrak{A} \vDash \varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi}$$

$$\therefore \neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \vee \psi} \qquad \mathfrak{A} \vDash \emptyset}{\mathfrak{A} \vDash \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi \to \psi}}{\emptyset \vdash \varphi \to \psi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset \vdash \varphi \to \psi}{\mathfrak{A} \vDash \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi \to \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \to \psi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \Rightarrow \text{A} \vDash \psi}}{\varphi \vdash \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \emptyset \vdash \varphi \to \psi$$

j)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ de } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f[x/\hat{x}]} \varphi} \qquad \dfrac{|\mathfrak{A}| \neq \emptyset}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|}}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f[x/\hat{x}]} \varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \exists x : \varphi}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$$

k)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \exists x : \neg\varphi}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \vDash \neg\varphi}}{\perp}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \neg\exists x : \neg\varphi$$

l)

$$\therefore \exists x : \neg\varphi \vdash \neg\forall x : \varphi$$

m) Se x não ocorre em φ, então é trivial. Se x ocorre em φ, lembramos que é uma sentença, então x sempre ocorre quantificado em φ. Então $\vDash$ vai ignorar os quantificadores em "$\forall x : \phi$" e "$\exists x : \phi$".

■

O que estes resultados primários nos dizem é que, se tivermos uma prova formal — partindo de hipóteses Γ — de uma coleção Φ de sentenças, então temos garantido que $\Gamma \vdash \Phi$. Isto é importante porque temos que, de certa forma, $\vdash$ respeita a dedução lógica: se achamos que Γ consegue provar Φ, então de fato onde vale Γ, vale Φ.

O importante agora é ver se "Se $\Gamma \vdash \varphi$, então existe uma **prova** de φ partindo de Γ". Ou seja, que consequência sintática é equivalente a provabilidade.