# **Modelos a Valores Booleanos:**
*Aplicações em Teoria dos Conjuntos*

IME - USP

Orientador: Prof. Hugo Luiz Mariano
José Goudet Alvim

2017-19

**Palavras-chave**

Reticulados; Álgebras de Heyting; Álgebras Booleanas; Teoria de Modelos; Valores booleanos de fórmulas; Independência; Forcing;

**Resumo**

Neste trabalho de iniciação científica, estudaremos a teoria de modelos a valores booleanos de ZF, a fim de entender e produzir provas de consistência e independência na teoria de conjuntos. Para tanto, trataremos de álgebras de Boole; de Heyting; Filtros; Morfismos; Teoria de Modelos e Lógica.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Lógica de Primeira Ordem

> It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music [. . .] because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect and yet true.
>
> *Bertrand Russell.*

Começamos com uma língua $\mathcal{L}$ de primeira ordem, isto é, a coleção de palavras (bem-)formadas por um determinado conjunto de símbolos para variáveis; uma série de símbolos para relações, $\langle R_1, R_2, \ldots \rangle$; uma de funções, $\langle F_1, F_2, \ldots \rangle$ e uma de constantes $\langle C_1, C_2, \ldots \rangle$; conectivos e operadores lógicos e quantificadores.

DEFINIÇÃO: **Termos, Fórmulas e variáveis livres | escopadas**.

(a) Se $x_i$ for uma variável, então a palavra "$x_i$" é um **termo** e a (única) ocorrência de $x_i$ é dita **livre** no termo.

(b) Se $C_i$ for uma constante, então a palavra "$C_i$" é um **termo**. Como ele não contém variável, não faz sentido tratar de ocorrências de variáveis livres ou escopadas.

(c) Se $\{t_1, \ldots, t_k\}$ forem termos, e $R_j$ é um relacional de aridade $k$, então a palavra "$(R_j\,(t_1, \ldots, t_k))$" é uma **fórmula**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.

(d) Se $\{t_1, \ldots, t_k\}$ forem termos, e $F_j$ é um relacional de aridade $k$, então a palavra "$(F_j\,(t_1, \ldots, t_k))$" é um **termo**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.

(e) Se $\varphi, \psi$ forem fórmulas e $\diamond$ for um conectivo lógico, então as palavras: "$(\varphi \diamond \psi)$" e "$(\neg\varphi)$" são **fórmulas**, e occorências de variáveis são livres ou escopadas de acordo com sua liberdade ou limitação nas fórmulas componentes.

(f) Se $\varphi$ for uma fórmula, e $x_i$ é uma variável, então as palavras: "$\exists x_i : \varphi$" e "$\forall x_i : \varphi$" são **fórmulas** e cada ocorrência de $x_i$ é dita **escopada** — pois está no escopo de um quantificador —, e cada ocorrência de qualquer outra variável é livre ou escopada de acordo com sua situação em $\varphi$.

A língua é formada destes componentes, fórmulas e termos.

* * *

Por legibilidade, por omitiremos parenteses quando possível, e intruduziremos abreviaturas para fórmulas, termos *etc.*

A ideia de uma língua é que ela *fale sobre* um determinado domínio. Quando escrevo, minhas palavras tratam de objetos de alguma sorte. Quando nomeio um objeto e predico sobre ele, por exemplo, existe uma interpretação da verdade do predicado no nosso universo.

Por exemplo, "*Eu tenho cinco dedos cada uma de minhas mãos*", é uma sentença da língua portuguesa, cujo valor de verdade é dependente em quem é "*Eu*" e em suas propriedades. Poderia ser o caso que o autor *não* tivesse cinco dedos em cada uma de minhas mãos, então, a interpretação costumeira de quem *é* "Eu" falsearia a sentença.

Poderia ser o caso que o autor não tivesse *mão alguma*, mas neste caso a sentença seria verdade, pelo mesmo motivo que eu tenho uma lamborghini em cada uma das minhas mansões.

Tentando capturar a noção de interpretação das *palavras* para objetos concretos (que não pertencem à língua, mas a um mundo) — por exemplo "*Eu*" — e como, associando palavras a objetos e símbolos a relações, constantes, funções *etc.* temos como determinar a veracidade de uma proposição no mundo alvo, dada uma interpretação.

DEFINIÇÃO: **Estrutura, Interpretação e Validação**.

**Assinatura:** Uma **assinatura** é uma tripla de coleções: a das relações, cada qual com sua aridade; a das constantes; e, finalmente, a das funções, cada qual com sua aridade.

$$\Sigma = \langle \langle \mathbf{R_1}, \ldots \rangle , \langle \mathbf{C_1}, \ldots \rangle , \langle \mathbf{F_1}, \ldots \rangle \rangle$$

Se cada relação ou função em uma assinatura $\Sigma$ tiver domínio em uma coleção $A$, e cada constante estiver em $A$, então podemos dizer que $\Sigma$ está definida sobre $A$.

**Estrutura:** Chamamos a dupla $\langle A, \Sigma \rangle$ de $A$ coleção e uma assinatura $\Sigma$ definida sobre $A$, de $\mathfrak{A}$. E este tipo de objeto batizamos de **estrutura**. E dizemos $A$ ser o domínio de $\mathfrak{A}$, que escrevemos $|\mathfrak{A}|$, e $\Sigma$ ser assinatura de $\mathfrak{A}$, possivelmente $sgn(\mathfrak{A})$.

**Compatibilidade Estrutura-Língua:** Dada uma língua de primeira ordem $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathfrak{A}$ dizemos elas serem compatíveis se e só se valem todas:

(a) Se $sgn(\mathfrak{A})$ tiver tantas relações quanto há relacionais na língua.

(b) Se $\mathbf{R_i}$ é a $i$-ésima relação da estrutura, então $R_i$, o $i$-ésimo símbolo relacional da língua, concorda com sua aridade.

(c) Se $sgn(\mathfrak{A})$ tiver tantas funções quanto há funcionais na língua.

(d) Se $\mathbf{F_i}$ é a $i$-ésima função da estrutura, então $F_i$, o $i$-ésimo símbolo funcional da língua, concorda com sua aridade.

**Interpretação:** Dizemos que uma $f$ é uma interpretação de $\mathcal{L}$ para $\mathfrak{A}$ se e, só se:

(a) $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{A}$ são compatíveis.

(b) $f$ associa cada variável $\lambda$ da língua para algum elemento $f(\lambda)$ de $|\mathfrak{A}|$.

(c) $f$ leva cada símbolo relacional $R_i$ na relação $f[R_i] = \mathbf{R}_i$ da $sgn(\mathfrak{A})$.

(d) $f$ leva cada símbolo funcional $F_i$ na função $f[F_i] = \mathbf{F}_i$ da $sgn(\mathfrak{A})$.

(e) Se $x_1, \ldots, x_k$ forem termos e $F$ um funcional, então $f(F\,(x_1, \ldots, x_k)) = f[F]\,(f(x_1), \ldots, f(x_k))$.

(f) $f$ leva cada símbolo de constante $c$ em um membro $f(c)$ de $|\mathfrak{A}|$.

Isto é, ter uma interpretação — ou melhor — *interpretar* um símbolo é dar significado a ele. Pois, leva-lo a um objeto, relação semântica entre objetos, função, *etc.*

Um exemplo de significação é imaginar que quando escrevo "*o autor*" em alguma sentença, pode-se *interpretar* como referente do símbolo o *autor deste texto.* Ficam, pois, definidas as propriedades do signo e, assim, este pedaço da sentença ganha significado.

Além disso, dada uma interpretação $f$ de $\mathcal{L}$ para $\mathfrak{A}$, uma variável ou constante $x$ e um membro $a$ de $|\mathfrak{A}|$, definimos $f_{[x/a]}$ como sendo exatamente igual a $f$ nas variáveis e constantes exceto em $x$, onde ela valerá $a$. Os outros valores de $f$ — isto é, em termos diversos — induz-se das funções, constantes e variáveis.

Isto se comporta como mudar um pedaço da intepretação, por exemplo, a interpretação de "*o nome do autor tem a letra W*" muda radicalmente de acordo com quem é o autor, mesmo mantendo a interpretação da função "nome de X". Não poderia "*autor*" denotar Ludwig Wittgenstein, que foi autor?

**Validação:** Definimos uma fórmula $\varphi$ de $\mathcal{L}$ valer em $\mathfrak{A}$ sob a interpretação $f$ (estrutura compatível com a língua) — alternativamente, que $\mathfrak{A}$ satisfaz $\varphi$ —, ou simbolicamente, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi$ por recorrência sobre sua complexidade.
(a) Se $x_0, \ldots, x_{\rho_i}$ forem termos quaisquer, $R_i$ relacional de aridade $\rho_i$:

$$\varphi \equiv R_i\left(x_0, \ldots, x_{\rho_i}\right) \Rightarrow \left[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow f[R_i]\left(f(x_0), \ldots, f(x_{\rho_i})\right)\right]$$

(b) Se $\sigma$ e $\psi$ forem fórmulas, $x$ uma variável:

$$\begin{aligned}&\varphi \equiv \sigma \wedge \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ e } \mathfrak{A} \vDash_f \psi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varphi \equiv \sigma \vee \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varphi \equiv \neg\sigma \Rightarrow \\ &[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \text{ não } \mathfrak{A} \vDash_f \sigma]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varphi \equiv \sigma \rightarrow \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \neg\sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi]\end{aligned}$$

$$\varphi \equiv \forall x : \sigma \Rightarrow$$
$$[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \text{ para todo } a \text{ de } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi]$$

$$\varphi \equiv \exists x : \sigma \Rightarrow$$
$$[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \text{ existe algum } a \text{ de } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi]$$

A motivação desta definição é a ideia que os fatos elementares, no caso as relações e funções entre os objetos, determinam todos os fatos "complexos". Os quantificadores por sua vez, desempenham o papel de providenciar genericidade. Isto é, sem estes, a validade de uma fórmula é extremamente dependente da interpretação. Mas uma **sentença** — isto é, uma fórmula com todas as variáveis em algum escopo de quantificador —, de certa forma, não depende de uma interpretação.

* * *

DEFINIÇÃO: **Sentença**.

Uma **sentença** de uma língua é uma fórmula em que todas as ocorrências de suas variáveis são escopadas.

* * *

LEMA: **Genericidade restrita de fórmulas:**.

Se todas as ocorrências de uma variável $x$ em uma dada fórmula $\varphi$ estiverem escopadas, então para todo $a$ no domínio de uma certa estrutura $\mathfrak{A}$ compatível com a língua de $\varphi$, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi$.

*Prova*:

Onde $x$ aparecer, ela estará escopada, então *ja íamos* substituir o valor de $f$ lá. Como a validade das fórmulas é dada por recorrência, e como tudo permanece o mesmo salvo em $x$, fica clara a ida, para a volta reaplica-se a inda. ■

LEMA: **Independência das interpretações irrelevantes:**.

Se $x$ não ocorrer em *varphi* uma $\mathcal{L}$-fórmula com língua compatível com $\mathfrak{A}$ estrutura, então para todo $a$ em $|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi$.

*Prova*:

Na definição de validação $x$ não desempenha papel algum. ■

TEOREMA: **Genericidade de sentenças para validação:**.

Dadas uma língua e uma estrutura compatíveis. Se $\varphi$ for uma sentença da língua, então a estrutura valida $\varphi$ sob uma interpretação $f$ se e somente se valida sob qualquer interpretação $g$ que leva as relações, funções e constantes nas mesmas que leva $f$.

*Prova*:

A volta é trivial, se valida para qualquer que coincide com $f$ em certa parte, valida para $f$, que de certo coincide com $f$ nesta parte.

Por outro lado, todas as ocorrências de variáveis são escopadas, então, qualquer substituição de variáveis (presentes em $\varphi$) na intepretação não altera a validade da sentença. Adicionalmente, qualquer substituição de variáveis irrelevantes não altera a validade. Pois, quaisquer substituições não alteram a validade. Logo, toda interpretação leva a mesma validação. ■

DEFINIÇÃO: **Satisfatibilidade**.

Finalmente, definiremos uma noção de satisfatibilidade ou validade que independe de *interpretação*.

Dadas $\mathfrak{A}$ uma estrutura e $\mathcal{L}$ uma língua compatíveis, e uma fórmula $\varphi$ da língua.

Deixe $\psi \equiv \forall x_1, \ldots, \forall x_k : \varphi$ onde $x_1, \ldots, x_k$ são todas as variáveis em $\varphi$ não escopadas,

$$\mathfrak{A} \vDash \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda interpretação } f : \mathfrak{A} \vDash_f \psi]$$

Possívelmente, nenhuma variável será livre em $\varphi$ neste caso, $\psi$ coincidirá com $\varphi$.

No caso que $\mathfrak{A} \models \varphi$ vale, dizemos que $\mathfrak{A}$ satisfaz $\varphi$ ou, alternativamente, $\varphi$ é válida em $\mathfrak{A}$. Note que uma fórmula que não for sentença é válida só se por falta de contra exemplo.

No caso em que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, com $\Sigma$ uma coleção de fórmulas, dizemos que $\mathfrak{A}$ **modela** $\Sigma$.

* * *

O estudo das estruturas e as fórmulas que lá são satisfeitas é extremamente importante, afinal. De exemplos, um trivial é uma estrutura com (apenas) a relação identidade e uma língua com (apenas) o símbolo "=", sendo assim, temos que

$$\langle A, Id \rangle\ ^{1} \models x = x$$

**Notação:** A partir deste ponto, não vamos explicitamente dizer que uma língua é compatível com uma estrutura quando tratamos delas. Nem diremos que uma $\varphi$ é fórmula da língua, *etc.*

DEFINIÇÃO: **Consequência**.

Da mesma forma que definimos satisfatibilidade com a intenção de abstrair a noção de interpretação, queremos agora abstrair as relações da própria estrutura.

**Estruturas compatíveis** Duas estruturas são ditas compatíveis exatamente quando houver uma língua que é compatível com as duas, isto é as aridades de cada relação, função, número de constantes *etc.* coincidem.

[1] No caso, interprete que a dupla é uma estrutura com apenas relações, nesta instância $Id$ e domínio $A$.

Duas estruturas compatíveis podem satisfazer fórumlas radicalmente diferentes, por exemplo, a estrutura que tomamos acima e uma outra estrutura com apenas a relação "$x(Nq)y \Leftrightarrow x \neq y$". Se $\mathcal{L}$ for a língua com apenas um símbolo relacional $R$, fica claro que $\langle A, Id\rangle \vDash x = x$ e $\langle B, Nq\rangle \nvDash x = x$. Queremos, pois, uma noção que não dependa tanto da estrutura fina do universo interpretativo.

**Consequência:** Dizemos que $\varphi$ segue, ou é consequência, de $\psi$, ou simbolicamente,

$$\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda } \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \vDash \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi]$$

Note a semelhança com a definição de satisfatibilidade sem interpretação. Novamente, a quantificação universal faz o trabalho de generalizar o conceito em certa direção.

Extendemos a definição para conjuntos de fórmulas dos dois lados,

$$\Gamma \vdash \Sigma$$

Da maneira natural de fazer, isto é, para cada $\varphi$ em $\Sigma$, $\Gamma \vdash \varphi$, e por isso, queremos dizer:

$$[\text{Para toda } \mathfrak{A} : (\text{para toda } \gamma \text{ em } \Gamma : \mathfrak{A} \vDash \psi) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi]$$

Finalmente, se $\emptyset \vdash \varphi$, escrevemos $\vdash \varphi$.

* * *

A interpretação da definição é que algumas fórmulas são genéricas sobre uma certa sorte de estrutura, por exemplo, considere a fórmula $\varphi \equiv xRx \to xRx$. Não importa *quem* seja $x$, nem quais sejam suas relações com quaisquer outros membros de seu universo. $\varphi$ é *sempre* verdade.

Considere um outro exemplo menos formal do mesmo princípio: Seja $\psi =$"*Todos os cavalos são animais*" e $\varphi =$"*todas as cabeças de cavalo são cabeças de animais*" então $\psi \vdash \varphi$ é válida. Isso não depende de se existem cavalos, o quê são cavalos, o quê são cabeças, se cavalos tem quatro patas, se cavalos tem cabeças, se cavalos são uma cor *etc.* E isso não é jogo de palavras:

$$\psi \equiv \forall x : E(x, x) \to A(x, x)$$

$$\varphi \equiv \forall c : (\exists a : E(a, a) \wedge C(c, a)) \to \exists b : A(a, a) \wedge C(c, b)$$

Que podemos ler "$\varphi$: para todo objeto, se este for um Equino, ele é um Animal" e "$\psi$: para todo objeto, se existe um outro que é Equino e tem como Cabeça este, então existe um terceiro que é Animal e tem como Cabeça o primeiro".

PROPOSIÇÃO: **Resultados sobre $\vdash$.**

a) $\varphi \vdash \varphi$,

b) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Lambda \Rightarrow \Lambda \vdash \varphi$,

c) $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$,

d) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$,

e) $\varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$,

f) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$,

g) $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$,

h) $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$,

i) $\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi$,

j) $\forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$,

k) $\forall x : \varphi \vdash \neg\exists x : \neg\varphi$,

l) $\neg\exists x : \neg\varphi \vdash \forall x : \varphi$,

m) $\vdash \varphi \Rightarrow\ \vdash \{\forall x : \varphi, \exists x : \varphi\}$,

n) $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$,

o) $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$.

*Prova*:

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi}}{\varphi \vdash \varphi}$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \subseteq \Lambda \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \models \Lambda}{\lambda \in \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \lambda}}{\gamma \in \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \gamma}}{\mathfrak{A} \models \Gamma}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$

$$\therefore \mathfrak{A} \models \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$$

Assim, $\Lambda \vdash \varphi$

c)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \varphi \vee \psi$$

d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \models \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

e)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}$$

$$\therefore \varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$$

f)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \emptyset \qquad \mathfrak{A} \not\models \varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \neg\varphi}$$

$$\therefore \emptyset \vdash \varphi \vee \neg\varphi$$

g)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\text{Não-não } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \neg\varphi}}{\mathfrak{A} \models \neg\neg\varphi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

h)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \neg\neg\varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \neg\varphi}}{\text{Não-não } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$

$$\therefore \neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \vee \psi} \qquad \mathfrak{A} \vDash \emptyset}{\mathfrak{A} \vDash \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi \rightarrow \psi}}{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\mathfrak{A} \vDash \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi \rightarrow \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \rightarrow \psi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\varphi \vdash \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

j)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ de } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f[x/\hat{x}]} \varphi} \qquad \dfrac{|\mathfrak{A}| \neq \emptyset}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|}}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f[x/\hat{x}]} \varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \exists x : \varphi}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$$

k)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \exists x : \neg\varphi}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \vDash \neg\varphi}}{\bot}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \neg \exists x : \neg \varphi$$

l)

$$\therefore \exists x : \neg \varphi \vdash \neg \forall x : \varphi$$

m) Se $x$ não ocorre em $\varphi$, então é trivial. Se $x$ ocorre em $\varphi$, lembramos que é uma sentença, então $x$ sempre ocorre quantificado em $\varphi$. Então $\vDash$ vai ignorar os quantificadores em "$\forall x : \phi$" e "$\exists x : \phi$".

n)

$$\frac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \to \psi}{\mathfrak{A} \nvDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$$

o)

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \vee \psi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}$$

$$\therefore \{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$$

■

O que estes resultados primários nos dizem é que, se tivermos uma prova formal (em um sistema dedutivo razoável) — partindo de hipóteses $\Gamma$ — de uma coleção $\Phi$ de sentenças, então temos garantido que $\Gamma \vdash \Phi$. Isto é importante porque temos que, de certa forma, $\vdash$ respeita a dedução lógica: se achamos que $\Gamma$ consegue provar $\Phi$, então de fato onde vale $\Gamma$, vale $\Phi$.

A reciproca, *que toda sentênça consequente de* $\Gamma$ *é provável por hipóteses de* $\Gamma$, requer um trato cuidadoso com sistemas dedutíveis, definição de prova, *etc.* Mas é resultado conhecido que se $\Gamma \vdash \varphi$, então *prova-se* $\varphi$ com hipóteses de $\Gamma$. Claro, dado um sistema dedutivo dentro de certas hipóteses.

DEFINIÇÃO: **Teoria**.

Dada uma língua, um subconjunto de sentenças $\mathcal{T}$ é dito uma teoria quando ele é não-vazio e $\vdash$-fechado. Isto é, se $\mathcal{T} \vdash \tau$ então $\tau$ já estava em $\mathcal{T}$. Ou seja, é uma coleção de sentenças que contém todas as suas consequências sintáticas.

* * *

Tomemos agora um momento para tratar de **Teorias**.

DEFINIÇÃO: **Teoria**.

Dada uma língua $\mathcal{L}$, um conjunto de sentenças $\mathcal{S}$ é dito uma teoria dentro desta exatamente quando ele for fechado por $\vdash$, em outras palavras

$$\text{Para qualquer } \tau \text{ em } \mathcal{L},\ \mathcal{T} \vdash \tau \Rightarrow\ \tau \text{ já estava em } \mathcal{T}$$

* * *

Dada uma língua $\mathcal{L}$, e um conjunto de sentenças não-vazio desta que batizamos "axiomas" $\mathcal{A}$, dizemos que um conjunto de sentenças $\mathcal{T}$ é a teoria de $\mathcal{A}$ exatamente quando para toda $\tau$ de $\mathcal{T}$, temos $\mathcal{A} \vdash \tau$, que podemos abreviar para $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

O fato de que, para um conjunto de axiomas conforme acima, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ é teoria verifica-se por:

*Prova*:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \vdash \tau}{\mathfrak{A} \vDash \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \tau} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}{\mathfrak{A} \vDash \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \mathcal{A}} \quad \dfrac{\dfrac{\text{para cada } \sigma \text{ em } \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}{\mathcal{A} \vdash \sigma}}{\mathfrak{A} \vDash \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}}{\mathfrak{A} \vDash \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}}{\mathfrak{A} \vDash \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \tau}}{\mathcal{A} \vdash \tau}}{\tau \text{ está em } \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}
$$

■

Obviamente, toda $\mathcal{T}$ teoria é da forma $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ para algum conjunto de axiomas conveniente (por exemplo a própria $\mathcal{T}$).

DEFINIÇÃO: **Consistência**.

Dizemos que uma teoria $\mathcal{T}$ sobre uma língua $\mathcal{L}$ é consistente se e só se ela é não trivial, isto é, existe uma $\mathcal{L}$-sentença $\varphi$ que não está em $\mathcal{T}$.

* * *

A motivação da definição de consistência é evitar contradições:

$$
\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \wedge \varphi \text{ em } \mathcal{T}}{\neg\varphi \text{ em } \mathcal{T}} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\varphi \wedge \varphi \text{ em } \mathcal{T}}{\varphi \text{ em } \mathcal{T}} \quad \psi \text{ em } \mathcal{L} \text{ sentença}}{\varphi \vee \psi \text{ em } \mathcal{T}}}{\psi \text{ em } \mathcal{T}}
$$

Se a teoria não for trivial, então ela não pode ser contraditória. Se ela *for* trivial, ela obviamente é.

Uma estrutura que modela uma teoria passa a ocupar um lugar especial em nossos estudos, afinal, uma teoria pretende descrever exaustivamente as propriedades *a priori* de uma estrutura compatível através de uma manipulação que é puramente sintática, pois não temos acesso à estrutura específica quando tratamos de uma teoria (afinal, definimos ela com $\vdash$ e não $\vDash$).

## 1.1 Relativização

Um último tema, agora já tratando da línguagem de ZF, é o tema da relativização de fórmulas. Uma $\varphi$ fórmula com quantificadores e sem termos de abstração tem uma *restrição* a um determinado termo $X$, escrevemos $\varphi^X$ para a fórumla $\varphi$ com todos os quantificadores limitados por $X$.

Então $\forall x : \exists y : y = P(x)$ torna-se $\forall x \in X : \exists y \in X : y = P(x)$. Por enquanto isso parece um tanto artificial, mas é interessante observar como fórumlas se comportam em domínios específicos da teoria.

Um resultado importante é o Princípio da Reflexção, que vale em ZF e diz que existem alturas arbitrariamente altas da hierarquia cumulativa tal que, para uma dada $\varphi$, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X : \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{V_\kappa}$

# Capítulo 2

# Teoria de Modelos de Teorias de Conjuntos

A teoria dos modelos das teorias de conjuntos está relacionada com, por um lado, estudo de grandes cardinais e seus ramos, e, por outro, lógica e teoria de conjuntos em si.

Isto pois, para uma certa classe de teorias de primeira ordem expressivas o suficiente, existem sentenças que são independentes da teoria, e é o caso que as teorias de conjuntos estão justamente entre incompletas.

No campo da teoria, isto nos diz que a uma teoria de conjuntos é, de certa forma, agnóstica a respeito de certas proposições. Por exemplo, é necessário que não se possa provar a existência de cardinais excessivamente grandes, isto porque se um cardinal for $\beth$-fixo, a hierarquia cumulativa até o mesmo é um modelo da teoria de conjuntos.

Dado um modelo de, digamos ZF pode muito bem ser o caso que haja cardinais inacessíveis no mesmo, mas sem informações adicionais, é impossível provar que existem — se a teoria for consistente, que esperamos ser —.

No campo prático temos ainda traços do abalo deste quarto golpe narcísico que tomou a humanidade com os resultados de K. Gödel, da mesma forma que em um dado modelo de ZF possa valer ou não valer $\varphi$, pode ser que problemas importantes ou interessante sejam, simplesmente, independentes da teoria sem que saibamos. É este justamente o caso da hipótese do contínuo, que novamente mostra a capacidade de $\mathbb{R}$ de apresentar-se como a besta que de fato é.

A hipótese do contínuo não é *um pouco* independente, por sinal. Como enunciou Robert M. Solovay: "$2^{\aleph_0}$ *can be anything it ought to be*"[1]. Dizendo que $\mathfrak{c}$ pode ser (e é em algum modelo) $\aleph_\beta$ para um $\beta$ sucessor ou de cofinalidade incontável. A hipótese do contínuo é "tão" independente que $\mathfrak{c}$ pode, inclusive, ser fracamente inacessível.

[1] The Theory of Models, Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. Amsterdam, North-Holland, 1965, Addison, Henkin, Tarski, eds., pg. 435.

Provar a independência de uma proposição pode ser feita tanto sintaticamente, ou semanticamente. Enquanto a maneira sintática é mais econômica ontologicamente falando, a semantica é mais acessível à mente, por mais que devamos tomar cuidado para não cairmos em confusões linguísticas.

Empregaremos uma abordagem principalmente semantica para tratar de ZF, e por isso que surge a necessidade da teoria dos modelos. Porém, para tratar de ZF, vamos primeiro definir qual teoria de fato falamos.

A língua de nossa teoria é relativamente simples, é a lingua com dois[2] símbolos relacionais $\langle = , \in \rangle$ apenas. Já a teoria é a gerada por esses 7 axiomas e o Esquema de Substituição, que nos dá um axioma para cada fórmula conforme.

1. Ax. da Identidade:
   $\forall x : [\exists ! y : x = y] \wedge x = x.$

2. Ax. Extensionalidade:
   $\forall x : \forall y : [\forall z : z \in x \leftrightarrow z \in y] \leftrightarrow x = y.$

3. Ax. da União:
   $\forall x : \exists y : \forall z : [z \in y \leftrightarrow \exists w \in x : z \in w].$

4. Ax. da Potência:
   $\forall x : \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow [\forall w : w \in z \leftrightarrow w \in y].$

5. Ax. Esquema da Substituição:
   Se $\varphi$ uma fórmula com apenas $a, b, \vec{v}$ livres e $c, w, x, y, z$ não ocorrendo em $\varphi$. Então:

$$[\forall \vec{v} : \forall a : [\exists b : \varphi(a, b; \vec{v})] \leftrightarrow [\exists ! b : \varphi(a, b; \vec{v})]] \rightarrow$$
$$\rightarrow [\forall x : \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow \exists w : w \in x \wedge \varphi(w, z; \vec{v})]$$

6. Ax. do Conjunto Indutivo:

$$\exists I : \exists x : x \in I \wedge (\forall t : t \in x \leftrightarrow t \neq t)$$
$$\wedge [(\exists w : w \in I) \rightarrow \exists z : z \in I \wedge \forall t' : t' \in z \leftrightarrow t' = w \vee t' \in w].$$

[2] Poderiamos fazer apenas com $\in$, mas não é necessário.

7. Ax. da Fundação:
$$\forall x : (\exists x' : x' \in x) \to \exists y : (y \in x) \wedge [\forall t : (t \in x \wedge t \in y) \to t \neq t].$$

## 2.1 Estruturas Transitivas

DEFINIÇÃO: **Identidade Induzida**.

Se tivermos uma relação $R$ definida sobre uma classe $A$, gostaríamos de ter uma relação de equivalência em $A$ que fosse congruente com $R$, definimos $\approx_R$ como sendo
$$a \approx_R b \Leftrightarrow \forall t \in A : tRa \leftrightarrow tRb$$

Restrito ao domínio adequado.

Isto é, em $A$, dois identificados são idênticos à esquerda.

* * *

DEFINIÇÃO: **Estrutura Transitiva**.

Uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, \approx, \epsilon \rangle$ é dita uma **estrutura transitiva** exatamente quando $\epsilon = \{\langle a, b \rangle : a, b \in A \wedge a \in b\}$, $\approx = \approx_\epsilon$ e $A$ é uma classe transitiva.

* * *

DEFINIÇÃO: **Substrutura**.

Dadas duas estruturas compatíveis $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ dizemos que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ — que $\mathfrak{A}$ é substrutura de $\mathfrak{B}$ — exatamente quando $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$, as relações e funções de $\mathfrak{A}$ são as restrições das de $\mathfrak{B}$ e as constantes de $\mathfrak{B}$ são as mesmas que as de $\mathfrak{A}$.

* * *

TEOREMA: **Estrutura transitivas atendem fundação e extensionalidade**.

Se $\mathfrak{A} = \langle A, \approx, \epsilon \rangle$ for uma estrutura transitiva, então,

a) $\mathfrak{A} \models$ Ax. da Fundação

b) $\mathfrak{A} \models$ Ax. da Extensionalidade

*Prova*:

a) Seja $x \in A$, com tal que $\exists y \in A : y \,\epsilon\, x$, isso significa que $\exists y : y \in x$, assim, pelo axioma da fundação, $\exists y \in x : \forall t : [t \in x \wedge t \in y] \rightarrow t \neq t$. Como $A$ é transitivo, temos que este $y$ existe *em* $A$, então $\exists y \,\epsilon\, x : \forall t : [t \,\epsilon\, x \wedge t \,\epsilon\, y] \rightarrow t \neq t$.

Por outro lado, temos que $\forall a, b \in A : a \approx b \leftrightarrow a = b$, pois, para a ida[3]: Como $A$ é transitivo, então $a, b \subset A$. Assim, se os membros de $a$ em $A$ forem exatamente os de $b$ em $A$, então os membros de $a$ são os mesmos que os de $b$, e por extensionalidade, são iguais. Assim, temos $\exists y \,\epsilon\, x : \forall t : [t \,\epsilon\, x \wedge t \,\epsilon\, y] \rightarrow t \not\approx t$, que é a tradução da fundação para a estrutura $\mathfrak{A}$.

b) Se $a, b \in A$ então todos os membros *deste* estão em $A$ também. Se os membros de $a$ e $b$ que estão dentro de $A$ coincidem, então os fora de $A$ coincidem e temos a extensionalidade. Assim, eles são iguais ($=$), mas se são iguais, como vimos, também são iguais ($\approx$). Vale então a extensionalidade.

$\blacksquare$

Neste teorema aparece insinuada uma propriedade de certas fórmulas que chamamos de Incondicionalidade, ou *Absoluteness*.

[3] a volta é trivial

### 2.1.1 Incondicionalidade e Elementaridade

DEFINIÇÃO: **Incondicionalidade**.
Sejam $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas transitivas.

Uma fórmula $\varphi$ da língua de ZF é dita **absoluta** ou **incondicional** entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ exatamente quando, para toda $f$ interpretação das variáveis da língua em $\mathfrak{A}$.

$$\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi$$

Um termo $t$ da língua é dito **absoluta entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$** exatamente quando, para toda $f$ interpretação das variáveis da língua em $\mathfrak{A}$.

$$\mathfrak{A} \vDash_f x = t \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash_f x = t$$

Dizemos ainda que uma fórmula é preservada sob restrição de $\mathfrak{B}$ para $\mathfrak{A}$ quando a implicação da direita para esquerda vale. E Dizemos que uma fórmula é preservada sob extensão de $\mathfrak{A}$ para $\mathfrak{B}$ quando a implicação da esquerda para a direita vale.

* * *

DEFINIÇÃO: **Elementaridade**.
Dadas $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas compatíveis Dizemos $\mathfrak{A}$ ser substrutura elementar de $\mathfrak{B}$, ou que $\mathfrak{B}$ é extensão elementar de $\mathfrak{A}$, exatamente quando toda fórmula é absoluta entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

* * *

Fórmulas absolutas, pois, formam uma classe de fórmulas muito útil para o trato de modelos, já que seus significados não mudam quando as extendemos ou as restringimos. Que estas fórmulas não são todas as que existem é simple de ver: Deixe $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2\}, \leq \rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3\}, \leq \rangle$ É trivial ver que $\forall x, y, z : (x \neq y) \to z = x \vee z = y$ não é absoluta entre as estruturas.

No entanto, a situação não é tão ruim assim, por mais que tamanho não seja absoluto entre estruturas, temos critérios para gerar fórmulas absolutas:

PROPOSIÇÃO: **Condições suficientes para incondicionalidade**.

a) fórmulas atômicas são absolutas.

b) conjunção, disjunção e negação de absolutas é a absoluta.

*Prova*:

a) Como uma é substrutura da outra, então as relações são as restrições. Como a fórmula é atômica, e a interpretação é em na substrutura, então vai ser verdade em numa estrutura exatamente quando for na outra.

b) Segue da definição de satisfação.

DEFINIÇÃO: **Fórmulas Completas**.

Uma fórmula $\varphi(x; \vec{v})$ é dita **completa** em $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ com respeito a $x$ exatamente quando é o caso que:

Se $\hat{x} \in |\mathfrak{B}|$ e $\vec{u}$ forem parâmetros em $|\mathfrak{A}|$, então $\mathfrak{B} \vDash \varphi(\hat{x}, \vec{u}) \Rightarrow b \in |\mathfrak{A}|$. Sendo que com " $\mathfrak{B} \vDash \varphi(\hat{x}, \vec{u})$" queremos dizer "$\mathfrak{B} \vDash_{f_{[x/\hat{x}, \vec{v}/\vec{u}]}} \varphi(\hat{x}, \vec{u})$" pois $\varphi$ só tem os parâmetros e $x$ livres.

Uma fórmula completa em relação a uma par estrutura-substrutura e um variável é de tal forma que se não for verdade em baixo, não é por falta de testemunha. Da mesma forma que se uma sequência em $\mathbb{R}$ não converge, não é porque está faltando o ponto de convergência, como poderia ser o caso em $\mathbb{Q}$.

* * *

Teorema: $\exists x : \varphi$ **para completas e absolutas**.

Seja $\varphi(x;\vec{v})$ absoluta entre $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ transitivas, e completa para $x$ entre as mesmas estruturas. Nestas condições, $\exists x : \varphi(x,\vec{v})$ é absoluta entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

*Prova*:

Primeiro, temos que:

a) $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi(x;\vec{v}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi(x;\vec{v})$.

b) $[(\vec{u} \subseteq |\mathfrak{A}|) \wedge (b \in |\mathfrak{B}|)] \Rightarrow [\mathfrak{B} \vDash_f \varphi(b;\vec{u}) \Rightarrow b \in |\mathfrak{A}|]$.

$(\Rightarrow)$ Então considere:

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{A} \vDash_f \exists x : \varphi(x,\vec{v}) \\
\hline
\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v}) \\
\hline
\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v}) \\
\hline
\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{B} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v}) \\
\hline
\mathfrak{B} \vDash_f \exists x : \varphi(x,\vec{v})
\end{array}$$

$(\Leftarrow)$ Por outro lado, tome que

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{B} \vDash_f \exists x : \varphi(x,\vec{v})}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{B} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v})} \qquad \cfrac{f \text{ é uma } \mathfrak{A}\text{-valoração de variáveis}}{f[\vec{v}] \subseteq |\mathfrak{A}|}}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v})}}{\mathfrak{A} \vDash_f \exists x : \varphi(x,\vec{v})}$$

Assim, fica provado o teorema. ■

TEOREMA: **Quantificação limitada de fórmulas absolutas**.

Seja $\varphi$ absoluta entre $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas transitivas, então $\exists x \in y : \varphi(x)$ e $\forall x \in y : \varphi(x)$ são ambas absolutas, quando $y$ não ocorre em $x$.

*Prova*:

Primeiro, $\exists x \in y : \varphi(x) \equiv \exists x : x \in y \wedge \varphi$:

$$\frac{x \in y \text{ é absoluta} \qquad \varphi(x) \text{ é absoluta}}{x \in y \wedge \varphi(x) \text{ é absoluta}}$$

$x \in y \wedge \varphi(x)$ é completa para $x$ entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ pois: se $y \in \mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ crê que $x$ está em $y$ e satisfaz $\varphi$, então, certamente $x$ está em $y$ que está em $\mathfrak{A}$.

Logo, pelo teorema anterior, $\exists x \in y : \varphi(x)$ é absoluta entre as estruturas.

Para o quantificador universal, basta ver que $\neg\varphi(x)$ também é absoluta, então $\exists x : x \in y \wedge \neg\varphi(x)$ é absoluta, mas ela é equivalente a $\exists x : \neg(x \in y \to \varphi(x))$ que equivale a $\neg\forall x : x \in y \to \varphi(x)$. Neste caso, sabemos que ela será absoluta, mas negação de absoluta também é. Então $\forall x : x \in y \to \varphi(x)$. ■

DEFINIÇÃO: **Fórmulas preservadas por Extenção/Restrição**.

Dizemos que uma fórmula $\varphi$ é **preservada por extenções** — ou é **extendível** — exatamente quando:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ estruturas transitivas} \Rightarrow (\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi)$$

Toda vez que $f$ for uma $\mathfrak{A}$ valoração.

Dizemos que uma fórmula $\varphi$ é **preservada por restrições** — ou é **restringível** — exatamente quando:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ estruturas transitivas} \Rightarrow (\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi)$$

Toda vez que $f$ for uma $\mathfrak{A}$ valoração.

* * *

LEMA: **Quantificação sobre absoluta é Restringível/Extendível**.

Trivialmente, se $\varphi$ for absoluta entre duas transitivas $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, então $\exists x : \varphi$ é extendível e $\forall x : \varphi$ é restringível.

### 2.1.2 Hierarquia de Lévy

DEFINIÇÃO: **Fórmulas $\Sigma$, $\Pi$ e $\Delta$.**

Uma fórmula $\varphi$ é dita **restrita** ou **limitada** quando todos os seus quantificadores são da forma $\forall x : x \in y \to \psi$ ou $\exists x : x \in y \wedge \psi$ (isto é $\forall x \in y : \psi$ ou $\exists x \in y : \psi$ )

Uma fórmula é dita $\Sigma_0$ e $\Pi_0$ exatamente quando ela é restrita; É dita $\Sigma_{n+1}$ quando é da forma $\exists x_1 : \ldots : \exists x_k : \psi$ para $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ variáveis e uma $\psi$ fórmula $\Pi_n$. Similarmente, é dita $\Pi_{n+1}$ exatamente quando $\forall x_1 : \ldots : \forall x_k \psi$ com $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ variáveis e uma $\psi$ fórmula $\Sigma_n$.

Finalmente, uma fórmula $\varphi$ é dita $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ — sigma-$n$ para $\mathcal{T}$ — quando existe uma $\psi$ que é $\Sigma_n$ tal que $\mathcal{T} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$, $\Pi_n^{\mathcal{T}}$ sendo similarmente definida. Um caso especial são as fórumlas $\Delta_n^{\mathcal{T}}$, que são exatamente aquelas fórmulas que são $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ e $\Pi_n^{\mathcal{T}}$ simultaneamente. Novamente, um termo $t$ é dito $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$, $\Pi_n^{\mathcal{T}}$ ou $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ quando $x = t$ o for — com $x$ não ocorrendo em $t$, é claro —.

* * *

O motivo do nosso interesse em catalogar certas fórmulas na hierarquia de Lévy é a relação que estas fórmulas possuem com as estruturas transitivas. A ver, as fórmulas $\Sigma_1^{\mathcal{T}}$ são preservadas por extensões, as $\Pi_1^{\mathcal{T}}$ são preservada por restrições e as $\Delta_1^{\mathcal{T}}$ são absolutas, quando se tratando de modelos da teoria $\mathcal{T}$, claro.

Teorema: **Fórmulas $\Delta_1^{\mathcal{T}}$ são $\mathcal{T}$-absolutas**.

*Prova*:

Lema: $\Delta_0$ **são absolutas**.

Trivialmente, pois são conjunções de outras absolutas ou quantificações limitadas de fórmulas absolutas.

Seja $\varphi$ uma fórmula $\Delta_1^{\mathcal{T}}$. Como ela é equivalente a uma $\forall x_k : \psi$ com $\psi \in \Sigma_0^{\mathcal{T}}$, ela é $\mathcal{T}$-equivalente a uma quantificação universal de uma fórmula absoluta, afinal $\psi$ é absoluta.

Por outro lado, ela é equivalente a uma $\exists x_j : \gamma$ com $\gamma \in \Pi_0^{\mathcal{T}}$, que nos dá que ela é $\mathcal{T}$-equivalente a uma quantificação existêncial de uma absoluta, pois $\gamma$ também é absoluta.

Assim, sendo $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas transitivas e $f$ uma $\mathfrak{A}$-valoração, temos que:

a) $\mathcal{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \forall x_k : \psi$.

b) $\mathcal{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x_k : \gamma$.

c) $\mathfrak{A} \vDash_f \exists x_k : \gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \exists x_k : \gamma$.

d) $\mathfrak{A} \vDash_f \exists x_k : \psi \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \forall x_k : \psi$.

Se for o caso que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vDash \mathcal{T}$, então temos que

$$\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi$$

■

Agora que temos uma condição suficiente para uma fórmula ser absoluta entre estruturas transitivas de uma teoria dada, transferimos o problema de identificar uma fórmula absoluta para o problema de identificar uma fórmula $\Delta_1^{\mathcal{T}}$

Por [?], temos que, para um teoria $\mathcal{T}$ tão forte quanto ZF,

TEOREMA: **Resultados acerca da Hierarquia de Lévy**.

(a) Se "$\varphi$" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$, então "$\forall x : \varphi$" $\in \Pi_{n+1}^{\mathcal{T}}$ e "$\exists x : \varphi$" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$, para toda $x$ variável da língua.

(b) Se "$\varphi$" $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$, então "$\forall x : \varphi$" $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$ e "$\exists x : \varphi$" $\in \Sigma_{n+1}^{\mathcal{T}}$, para toda $x$ variável da língua.

(c) Se "$\varphi$", "$\psi$" $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$, então suas conjunções e disjunções são $\Pi_n^{\mathcal{T}}$

(d) Se "$\varphi$", "$\psi$" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$, então suas conjunções e disjunções são $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$

(e) Se "$\varphi$" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ e "$\psi$" $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$, então suas conjunções e disjunções são $\Delta_{n+1}^{\mathcal{T}}$,
e "$\varphi \to \psi$" é $\Pi_n^{\mathcal{T}}$
e "$\psi \to \varphi$" é $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$

(f) Quantificação limitada não altera classe de Lévy: portanto
Se "$\varphi$" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$, temos que "$\forall x \in y : \varphi$" continua $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$,

(g) Se $\varphi(x)$ for $\Delta_n^{\mathcal{T}}$, então $\{x : \varphi(x)\}$ é $\Pi_n^{\mathcal{T}}$

(h) Se $\varphi(x)$ for $\Delta_n^{\mathcal{T}}$, então $\{x \in y : \varphi(x)\}$ é $\Delta_n^{\mathcal{T}}$

(i) Se $x$ for um termo $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ e $\mathcal{T} \vdash \exists y : y = x$, então $t$ é $\Delta_n^{\mathcal{T}}$

(j) Se $\varphi(x)$ e $t$ forem $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ e $\mathcal{T} \vdash \exists y : y = t$, então todos são $\Delta_n^{\mathcal{T}}$:
- $\{x \in y : \varphi(x)\}$ é $\Delta_n^{\mathcal{T}}$
- $\exists x \in t : \varphi(x)$
- $\forall x \in t : \varphi(x)$

(k) Se $\varphi$ e $t$ forem $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$, então $\{t : \varphi\}$ é $\Delta_{n+1}^{\mathcal{T}}$

(l) Se $\psi$ for $\Sigma_1^{\mathrm{ZF}}$ atendendo as hipóteses do teorema da recursão transfinita, então a fórmula da função recursiva é $\Delta_1^{\mathrm{ZF}}$.

TEOREMA: $V \vDash_f \varphi^A \Leftrightarrow A \vDash_f \varphi$.
As hipóteses são $f \in A^{<\omega}$, $A \subseteq V$ transitivo e $V \vDash \mathrm{ZF}$.

A prova é na complexidade de $\varphi$ e vamos provar apenas para o conectivo $\wedge$ e $\neg$ e para o quantificador existêncial $\exists$. Para fórmulas atômicas, temos que, pelo fato de $A$ ser estrutura transitivia, então $\Delta_0$ são absolutas.

Suponha que para todo $\psi$ de complexidade $n$ ou menor vale o teorema, vamos provar o passo indutivo em três casos: Ou $\varphi \equiv \psi \wedge \sigma$; ou $\varphi \equiv \neg\psi$; ou $\varphi \equiv \exists x_i : \psi$, todas com $\psi$ de complexidade $n$ e $\sigma$ mais simples.

No caso $\wedge$, temos:

$$V \vDash_f (\psi \wedge \sigma)^A \Leftrightarrow V \vDash_f \psi^A \wedge \sigma^A \Leftrightarrow (V \vDash_f \psi^A) \wedge (V \vDash_f \sigma^A) \Leftrightarrow (A \vDash_f \psi)(\vDash_f \sigma) \Leftrightarrow A \vDash_f \psi \wedge \sigma$$

No caso $\neg$, temos:

$$V \vDash_f (\neg\psi)^A \Leftrightarrow V \vDash_f \neg(\psi)^A \Leftrightarrow \neg(V \vDash_f \psi^A) \Leftrightarrow \neg(A \vDash_f \psi) \Leftrightarrow A \vDash_f \neg\psi$$

No caso $\exists$, temos:

$$V \vDash_f (\exists x_i : \psi)^A \Leftrightarrow V \vDash_f \exists x_i \in A : \psi^A \Leftrightarrow V \vDash_f \exists x_i : x_i \in A \wedge \psi^A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \hat{x} \in V : (V \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} x_i \in A \wedge \psi^A) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in V : [(V \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} x_i \in A) \wedge (V \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi^A)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (V \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi^A) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (A \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi) \Leftrightarrow A \vDash_f \exists x_i : \psi$$

■

Isso nos dá a profundidade da relação das estruturas transitivas de ZF com um modelo base. Uma estrutura transitiva modela exatamente o que a sua estrutura ambiente crê que ela modela.

## 2.2 O Universo Construtível

Um modelo especial de ZF é o Universo Construtível, que satisfaz uma restrição adicional sobre sua estrutura fina. É um exemplo de modelo onde vale o axioma da escolha e a hipótese generalizada do contínuo, e gostaríamos de passar por ele justamente para contrapôr os modelos a valores Booleanos.

Chamamos o universo construtível de $L$, que é uma classe transitiva da hierarquia acumulada $V$. A definição de $L$ dentro da língua depende de uma internalização da lógica e da teoria dos modelos transitivos. Mas, moralmente, queremos:

$$L_{\alpha+1} = \{x : \exists\varphi \text{ fórmula da teoria: } \exists\vec{p} \in L_\alpha^{<\omega} : x = \{t \in V_\alpha : \varphi(t; \vec{p})\}\}$$

$$(\lambda = \bigcup \lambda) \Rightarrow L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$$

Evidentemente, se "$\varphi$ fórmula da teoria" não estiver formalizado *dentro* da teoria, não temos esperaça alguma desta definição fazer sentido. Pois, o primeiro passo que devemos tomar é achar uma Gödelização apropriada das fórmulas como *conjuntos* de fato.

Suponha que possuamos códigos para $\ulcorner\forall\urcorner$, $\ulcorner\exists\urcorner$, $\ulcorner = \urcorner$, $\ulcorner \in \urcorner$, $\ulcorner\neg\urcorner$, $\ulcorner \vee \urcorner$, $\ulcorner \wedge \urcorner$ e $\ulcorner\rightarrow\urcorner$. Então, definimos a codificação das fórmulas da seguinte maneira, similar a de [Drake]:

$$\begin{aligned}
\ulcorner \mathtt{Q} x_i : \varphi \urcorner &= \left\langle \ulcorner \mathtt{Q} \urcorner, i, \ulcorner \varphi \urcorner \right\rangle, \text{ onde } \mathtt{X} \text{ for um quantificador;} \\
\ulcorner x_i = x_j \urcorner &= \left\langle \ulcorner = \urcorner, i, j \right\rangle \\
\ulcorner x_i \in x_j \urcorner &= \left\langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \right\rangle \\
\ulcorner \neg\varphi \urcorner &= \left\langle \ulcorner \neg \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \right\rangle \\
\ulcorner \varphi \mathtt{X} \psi \urcorner &= \left\langle \ulcorner \mathtt{X} \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \right\rangle, \text{ onde } \mathtt{X} \text{ for um conectivo;}
\end{aligned}$$

Fixar códigos para os componentes simples não poderia ser mais fácil: temos apenas 8 deles, e $8 = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Não desejamos impor a nossa bijeção favorita, qualquer uma serve. Agora que temos uma especificação de como é uma "fórmula" internalizada, podemos escrever uma fórmula *de fato* que afirma que um dado *conjunto* é uma *representação* de um fórumla.

DEFINIÇÃO: **Construção de uma Fórmula**.

$$
\begin{aligned}
Repr(\varphi,\chi,n) \equiv & [n\in\omega]\wedge[Fun(\chi)]\wedge[Dom(\chi)=n+1]\wedge[\chi(n)=\varphi]\wedge\forall k\in n+1:\{\\
& [\exists a,b\in k:[\chi(k)=\langle\ulcorner\rightarrow\urcorner,\chi(a),\chi(b)\rangle]]\vee\\
& [\exists a,b\in k:[\chi(k)=\langle\ulcorner\neg\urcorner,\chi(a),\chi(a)\rangle]]\vee\\
& [\exists a,b\in k:[\chi(k)=\langle\ulcorner\vee\urcorner,\chi(a),\chi(b)\rangle]]\vee\\
& [\exists a,b\in k:[\chi(k)=\langle\ulcorner\wedge\urcorner,\chi(a),\chi(b)\rangle]]\vee\\
& [\exists a,i\in k:[\chi(k)=\langle\ulcorner\forall\urcorner,i,\chi(a)\rangle]]\vee\\
& [\exists a,i\in k:[\chi(k)=\langle\ulcorner\exists\urcorner,i,\chi(a)\rangle]]\vee\\
& [\exists i,j\in\omega:[\chi(k)=\langle\ulcorner\in\urcorner,i,j\rangle]]\vee\\
& [\exists i,j\in\omega:[\chi(k)=\langle\ulcorner=\urcorner,i,j\rangle]]\}
\end{aligned}
$$

* * *

Apesar de longa, *Repr* é bem simples: ela afirma que $\chi$ é testemunha da construção de $\varphi$ em $n$ passos. Fica claro que um determinado conjunto $X$ é fórmula se e só se $\Phi(X)\equiv\exists n\in\omega:\exists\chi\in V_\omega:Repr(X,\chi,n)$. Vamos chamar $\Phi=\{t\in V_\omega:\Phi(t)\}$ e

$\Phi\restriction n=\{\varphi\in\Phi:\exists\chi\in V_\omega:Repr(\varphi,\chi,n)\wedge\forall m<n:\neg[\exists\chi\in V_\omega:Repr(\varphi,\chi,m)]\}$ o conjunto de fórmulas de complexidade $n$

Definição: **Satisfatibilidade Internalizada**.

$$
\begin{aligned}
Sat(A,\varphi,f) \equiv & \exists w : \exists \chi, n, r \in V_\omega : [Repr(\varphi,\chi,n) \wedge Fun(w) \wedge (Dom(w) = n+1) \wedge \\
& \wedge [r = rank(\varphi)] \wedge [f \in w(n)] \wedge \forall k \in n+1 : [ \\
& [\exists i,j \in \omega : \chi(k) = \left\langle \ulcorner = \urcorner, i, j \right\rangle \wedge w(k) = \{f \in A^r : f(i) = f(j)\}] \vee \\
& \vee [\exists i,j \in \omega : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \right\rangle \wedge w(k) = \{f \in A^r : f(i) \in f(j)\}] \vee \\
& \vee [\exists a,b \in k : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \vee \urcorner, \chi(a), \chi(b) \right\rangle \wedge w(k) = w(a) \cup w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a,b \in k : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \wedge \urcorner, \chi(a), \chi(b) \right\rangle \wedge w(k) = w(a) \cap w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a,b \in k : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \rightarrow \urcorner, \chi(a), \chi(b) \right\rangle \wedge w(k) = (A^r - w(a)) \cup w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a,b \in k : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \neg \urcorner, \chi(a), \chi(a) \right\rangle \wedge w(k) = (A^r - w(a))] \vee \\
& \vee [\exists a \in k, i \in \omega : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \exists \urcorner, i, \chi(a) \right\rangle \wedge w(k) = \left\{ v \in A^r : \exists x \in A : v_{[i/x]} \in w(a) \right\}] \vee \\
& \vee [\exists a \in k, i \in \omega : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \forall \urcorner, i, \chi(a) \right\rangle \wedge w(k) = \left\{ v \in A^r : \forall x \in A : v_{[i/x]} \in w(a) \right\}]]]
\end{aligned}
$$

Onde $v_{[i/x]} = v - \langle i, v(i) \rangle \cup \{\langle i, x \rangle\}$, ou seja, substituição do valor de $v$ em $i$ por $x$.

$Sat(A,\varphi,f)$ quer dizer, essencialmente, que existe uma sequência de conjuntos de testemunhas para a veracidade da fórmula e $f$ é uma das testemunhas.

* * *

**Lema: Resultados sobre** $Sat$**.**

Se $f \in A^{<\omega}$, $A$ estrutura transitiva e $\varphi, \psi$ forem fórmulas.

$$Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \wedge Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner, f]$$

$$Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \vee Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner, f]$$

$$Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \rightarrow Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner, f]$$

$$\neg Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \neg \varphi \urcorner, f]$$

$$\exists \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner, f]$$

$$\forall \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \forall x_i : \varphi \urcorner, f]$$

*Prova*:

Para $\wedge$, suponha que $Sat$ valha para $\varphi$ e para $\psi$. Que existe a construção é trivial, para $w$, basta concatenar as $w$-s que existem e na última etapa interceptar a os últimos valores dos $w$-s. Por outro lado, se valer para $\varphi \wedge \psi$ então restringir as construções e $w$ é praticamente trivial.

Para $\vee$, a ida é igual é a mesma, mas une-se ao invés de se interceptar. Para a volta, sabemos que $f$ está em alguma etapa final das duas $w$ que os $Sat$s nos dão, assim sabemos que $f$ estará na união, e portanto valerá $Sat(A, \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner, f)$.

Para $\rightarrow$, ao invés de se unir as etapas finais de testemunhas, unimos o complementar de uma com a outra. Para a volta, sabemos $f$ ou não é testemunha $\varphi$, ou é testemunha de $\psi$, então fica claro que vale a volta.

Para $\neg$, se $f$ não valida $Sat(A, \ulcorner \varphi \urcorner, f)$, então é porque $f$ não está entre as testemunhas da última etapa de $w$. Isto é se e só se $f$ estiver no complementar das testemunas que é se e somente se $Sat(A, \ulcorner \neg\varphi \urcorner, f)$.

Para o existencial, se existe um elemento de $A$ que faz $f$ estar na testemunhas, então pela definição de $Sat$ temos que valerá o $Sat$ de $\ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner$. E, adicionalmente, vale a volta. Similarmente vale o mesmo para o quantificador universal. ■

TEOREMA: $A \vDash_f \varphi \Leftrightarrow V \vDash Sat(A, \ulcorner \varphi \urcorner, f)$.

As hipóteses são: seja $A \subset V$ uma estrutura transitiva, e $V \vDash$ ZF, $\varphi$ uma fórmula da língua de ZF e $f \in A^{<\omega}$. Novamente a prova é por indução na complexidade da fórmula. Novamente, o caso atômico é simples e, por isso, não o faremos aqui. Provaremos o caso da conjunção, negação e quantificador existêncial.

*Prova*:

Seja $A$ uma estrutura transitiva e seja sempre $f$ uma $A$-valoração das variáveis pertinententes. A prova é por indução na complexidade de $\varphi$. Para fórmulas atômicas temos que a igualdade e pertinência em $A$ são só as restrições das relações à classe, então $V \vDash_f x = y$ exatamente quando $Sat(A, \ulcorner x = y \urcorner, f)$ e similarmente para $(x \in y)$.

Assim, assumamos que valha a bi-implicação para o caso de fórmulas de complexidade até $n$. Seja agora, $\psi$ e $\sigma$ fórmulas de complexidade até $n$.

Vamos provar a bi-implicação da etapa sucessora só para $\wedge, \neg, \exists$ pois é suficiente, afinal $\vDash$ é muito bem comportado. Para $\wedge$ temos:

$$A \vDash_f \psi \wedge \sigma \Leftrightarrow (A \vDash_f \psi) \wedge (A \vDash_f \sigma) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \psi \urcorner, f) \wedge Sat(A, \ulcorner \sigma \urcorner, f) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \psi \wedge \sigma \urcorner, f)$$

Para o caso de $\neg$,

$$A \vDash_f \neg\psi \Leftrightarrow \neg(A \vDash_f \psi) \Leftrightarrow \neg Sat(A, \ulcorner \psi \urcorner, f) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \neg\psi \urcorner, f)$$

E no caso do quantificador $\exists$,

$$A \vDash_f \exists x_i : \psi \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (A \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] \Leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner, f]$$

■

Com este teorema, temos uma correspondência muito forte entre: *O ambiente achar que uma susbtrutura transitiva modela algo*, a *substrutura transtitiva modelar algo* e a *codificação da noção interna de modelos de fórmulas Gödelizadas.*

DEFINIÇÃO: **L**.

Com isso, temos o suficiente para expressar a classe dos Construtíveis,

$$L_{\alpha+1} = \left\{ x : \exists\varphi : \exists r \in \omega : \exists f \in L_\alpha^r : x = \left\{ t \in L_\alpha : Sat(A, \varphi, f_{[0/t]}) \right\} \right\}$$

$$(\lambda = \bigcup \lambda) \to L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha$$

* * *

DEFINIÇÃO: **Rank Construtível**.

Seja $\rho_c(x) = \min\{\alpha \in Ord : x \in L_\alpha\}$, para todo $x$ que ocorre em $L$ este chamado Rank Construtível está definido. É claro que $\rho_c$ é homomorfismo, isto é, preserva pertinência. Ainda não podemos dizer o que ele faz com ordinais, por exemplo.

* * *

O primeiro resultado importante sobre os Construtíveis é, claro, que $L$ é modelo de ZF, que iremos verificar a seguir. Na sequência, iremos verificar que $L \models \text{ZF} + AC + CH$. Que é grande coisa.

LEMA: $L$ **é transitivo**.

Basta ver que $L_\alpha$ é transitivo. Se $x \in L_{\alpha+1}$ então $\exists\varphi \in V_\omega \exists f \in L_\alpha^{<\omega} : x = \left\{t \in L_\alpha : Sat(A, \varphi, f_{[0/t]})\right\}$, oras então certamente $x \subseteq L_\alpha$. Similarmente, se $\lambda$ for ordinal limite, $L_\lambda$ será união de transitivos, e portanto transitivo. Unindo $L_\alpha$ para todos os os ordinais, temos uma classe transitiva.

LEMA: **Conjunto contido em** $L$ **está contido em um membro de** $L$.

Seja $X \subset L$ um conjunto em $V$. Por substituição, o é conjunto $\{\alpha : \exists x \in X : \alpha = \rho_c(x)\}$. Como é conjunto de ordinais, ele possuí um supremo, que chamaremos de $\gamma$, então, por definição, todos os membros de $x$ ocorrem em $L_\gamma$, assim, $X \subset L_\gamma \in L_{\gamma+1}$. Está provado.

LEMA: $L_\alpha \subseteq V_\alpha$.

É óbvio que $L_\emptyset = V_\emptyset$. Suponha, agora, que $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ vale para $\alpha$. Pela definição $L_{\alpha+1} \subseteq \wp(L_\alpha)$, e $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$. Então

$$L_{\alpha+1} \subseteq \wp(L_\alpha) \subseteq \wp(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$$

E

TEOREMA: $L \vDash \text{ZF} + GCH + AC + V = L$.

Provaremos que $L$ modela: O axioma do Vazio; O axioma do Par; O axioma da União; Os axiomas da Substituição Enfraquecido; O axioma do Infinito; O axioma das Partes; O axioma da Fundação; O axioma da Extensionalidade; O Esquema de Separação. Então provaremos o Axioma da Escolha e depois a Hipótese Generalizada do Contínuo.

*Prova*:

**Extensionalidade e Fundação** Pelo fato que $L$ é estrutura transitiva, temos, de graça, os axiomas de Extensionalidade e Fundação.

**Axioma do Vazio**

$$L \vDash \exists x : x = x \Leftrightarrow V \vDash (\exists x : x = x)^L \Leftrightarrow \exists x \in L : x = x \leftrightarrow L \neq \emptyset$$

É claramente o caso de $L$ não ser vazio, pois $L_1$ não é vazio. Aqui entra com força os meta-teoremas que provamos sobre fórmulas relativizadas e $\vDash$.

**Axioma do Par**
Queremos

$$L \vDash \forall x : \forall y : \exists z : \forall t : t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)$$

Que será o caso exatamente quando

$$V \vDash \forall x \in L : \forall y \in L : \exists z \in L : \forall t \in L : t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)$$

Mas é claro que $V \vDash \text{ZF}$, então vamos apenas provar a fórmula acima em ZF.

Sejam $x, y \in L_\alpha$ seja $z = \{t \in L_\alpha : Sat(L_\alpha, \ulcorner x_0 = x_1 \vee x_0 = x_2 \urcorner, f)\}$ onde $f = \{\langle \ulcorner x_0 \urcorner, t\rangle, \langle \ulcorner x_1 \urcorner, x\rangle, \langle \ulcorner x_2 \urcorner, y\rangle\}$, que, por razões óbvias, vamos abreviar como $[t, x, y]$ e continuaremos tratando valorações desta forma. Fica claro que com esta valoração $z$ está em $L_{\alpha+1}$, e portanto em $L$. Não é difícil ver que $z$ é de fato o par em $L$.

**Axioma da Soma**
Queremos

$$L \vDash \forall x \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow \exists t : t \in y \wedge z \in t$$

Deixe, $x \in L$, logo em $L_\alpha + 1$ para algum $\alpha$. Deixe agora $\varphi \equiv \exists x_2 \in x_1 : x_0 \in x_2$, e

$$y = \left\{ t \in L_\alpha : Sat(L_\alpha, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_0/z, x_1/x]}) \right\}$$

Sabemos que $V \vDash_f y \in L$ e que $V \vDash_f \forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y$, então segue que $V \vDash_f (\forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y)^L$, pois o universal restringe-se e o existencial já está em $L$ pois $x$ está, e temos transitividade. Logo, $L \vDash_f \forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y$ que era o que queríamos: uma testemunha da validade do axioma para cada $x$ dado.

**Axioma das Partes**
Queremos

$$L \vDash \forall x : \exists y : \forall z : (\forall t \in z \to t \in x) \to z \in y$$

Seja $x \in L$, e deixe $y = \left\{ z \in L : (z \subseteq x)^L \right\}$. Vemos que $y$ é claramente um conjunto, resta verificar que ele está em $L$ e teremos o que buscamos. Seja

$$\beta = \bigcup_{z \in y} \rho_c(z) + 1$$

Então sabemos que $y = \left\{ z \in L_\beta : (z \subseteq x)^L \right\}$, sabemos também que $\rho_c(x) < \beta$ afinal $x \in y$. Como $L_{\rho_c(x)} \subset L_\beta \subset L$, então uma é subestrutura transitiva da outra. Assim, $y = \left\{ z \in L_\beta : (z \subseteq x)^{L_\beta} \right\}$, que sabemos ser meta-equivalente a

$$y = \left\{ z \in L_\beta : Sat(L_\beta, \ulcorner x_0 \subseteq x_1 \urcorner, [z, x]) \right\}$$

Então $y \in L$, e então está provado.

**Axioma Enfraquecido da Substituição**
Queremos

$$L \vDash [\forall x, y, z : \psi(y, x) \wedge \psi(z, x) \to z = y] \to [\forall x : \exists X : \forall y : \exists t \in x : \psi(y, t) \to y \in X]$$

Suponha uma fórmula $\psi$ nas condições do axioma. Deixe $p, x \in L$ e deixe $X = \{y \in L : (\exists t \in x : \psi(y, x; p))^L\}$, que sabemos existir. Como $X$ é conjunto,

$$\alpha = \bigcup_{y \in X} \rho_c(y) \text{ é ordinal}$$

Segue que todos os $y$ em $X$ estão em $L_\alpha$. E como $L$ é transitivo, então $X = \{y \in L_\alpha : \exists t \in x : \psi^L(y, x)\}$. Oras, dado um $y \in L$, se existir um $t \in x$ para o qual $\psi^L(y, t)$ então necessariamente $y$ está em $L_\alpha$, pelo menos $V$ pensa isso. Mas como $V$ e $L$ concordam sobre pertinência, $y \in L_\alpha$. Encontramos, pois, um conjunto onde vive a imagem de $x$ pela $\psi$ aos olhos de $L$.

**Axioma da Separação**

Queremos

$$L \vDash \forall x \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \psi(z)$$

Deixe então $x \in L$ e $y = \{z \in L : (z \in x \wedge \psi(z))^L\}$. Reduzindo, temos $y = \{z \in L : z \in x \wedge \psi^L(z))\}$, que, neste caso, nos dá: $y = \{z \in L_{\rho_c(x)} : z \in x \wedge \psi^L(z)\}$. Invocamos, agora, o primcípio da reflexão, que nos dará uma $\alpha > \rho_c(x)$ onde $V_\alpha$ reflete a situação de

1. $\psi^L(z)$
2. $\exists \delta : z \in L_\delta$.
3. $z \in L_\gamma$

Temos então que

1. $\forall x \in V_\alpha : \psi^L(x) \leftrightarrow (\psi^L)^{V_\alpha}(x)$
2. $\forall x \in V_\alpha : [\exists \delta : x \in L_\delta] \leftrightarrow [\exists \delta < \alpha : x \in (L_\delta)^{V_\alpha}]$
3. $\forall x \in V_\alpha : \forall \gamma < \alpha : [x \in L_\gamma] \leftrightarrow [x \in (L_\gamma)^{V_\alpha}]$

Em 1. podemos subsituír $(\psi^L)^{V_\alpha}$ por $\psi^{L \cap V_\alpha}$. Conclui-se, também, que $\forall x \in V_\alpha : x \in L \leftrightarrow \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta$.

O $\alpha$ dado deve ser ordinal limite, pois se $\zeta < \alpha$, então $\zeta \in L \cap V_\alpha$. Como $\forall \beta \in Ord : \rho_c(\beta) = \beta + 1$, então, $\zeta + 1 \in V_\alpha$. Então $L_\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} L_\delta$.

Então
$$[x \in L \cap V_\alpha] \leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta \in L_\delta] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta^{V_\alpha}] \leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [x \in V_\alpha \cap \bigcup_{\delta<\alpha} L_\delta] \leftrightarrow [x \in V_\alpha \cap L_\alpha] \leftrightarrow [x \in L_\alpha]$$

Assim, temos que:
$$y = \left\{z \in L : (z \in x \wedge \psi(z))^L\right\} = \left\{z \in L_\alpha : z \in x \wedge \psi^{L_\alpha}(z)\right\} =$$
$$\left\{z \in L_\alpha : Sat(L_\alpha, \ulcorner x_0 \in x_1 \wedge \psi(x_0)\urcorner, [z, x])\right\}$$

Assim, temos que $y \in L$, temos então o conjunto desejado. ∎

Lema: $x = L_\alpha$ **é** $\Delta_1^{\mathrm{ZF}}$.
Segue do fato de que a definição de $L_\alpha$ é por recursão em uma fórmula que é $\Delta_1^{\mathrm{ZF}}$. [**Drake**] faz isto com mais cuidado, mas a demonstração não agrega muito a nossa discussão.

Teorema: $L \vDash V = L$.
Como $x = L_\alpha$ é absoluto, e, similarmente, $x_\alpha$ também o é, se $A$ é transitivo e modelo de ZF, por definição, temos $(x \in L)^A \leftrightarrow \exists \alpha \in A : x \in L_\alpha$. Se $Ord \subset A$ então $(x \in L)^A \leftrightarrow x \in L$, e assim, temos que se temos um modelo $A$ de ZF com todos os ordinais, $L$ é sub modelo menor ainda. Portanto $L$ é o menor modelo transitivo de ZF contendo todos os ordinais.

Como $L$ modela ZF e contém todos os ordianis, "por fora" constatamos que $L^L = L$, então $V \vDash \forall x \in L : x \in L^L$, mas sabemos que isso é $V \vDash (\forall x x \in L)^L$ e então sabemos que $L \vDash \forall x : x \in L$, que é justamente $L \vDash V = L$.

Lema: **Ordem Conveniente**.
Existe uma fórmula $\varphi(x, y)$ que é $\Sigma_1$ tal que:

1. ZF $\vdash BF(\varphi(x,y))$
2. ZF $\vdash \varphi(x,y)$ ordena totalmente $L$
3. $\varphi$ é $\Delta_1^{\mathrm{ZF}+V=L}$

Onde $BF(\varphi(x,y))$ diz

$\forall x : [\exists v : (x \neq \emptyset \to v \in x \wedge \forall y \in x : \neg\varphi(y,v)) \wedge \exists u : (x \subset u \wedge \forall a, b : [b \in u \wedge \varphi(a,b)] \to w \in u)]$

Ou seja, todo conjunto tem um $\varphi$-minimal e a relação é sempre "*left-narrow*", ou "*set-like*".

A ordem é a lexicográfica, primeiro, dizemos que um construtível é menor que o outro já de pronto se o seu rank construtível for menor que o do outro.

Então nos focamos no caso que os dois conjuntos estão surgem no mesmo nível $\alpha + 1$. Como as fórmulas são bem ordenadas (e inclusive [**Drake**] dá uma ordem $\Delta_1^{\mathrm{ZF}}$) podemos dizer que um conjunto é menor que outro de mesmo que rank construtível que ele quando a fórmula mínima que define o primeiro é menor que a mínima que define o segundo.

No caso em que ambos os ranks e as fórmulas mínimas coincidem, então deve ser o caso que os parâmetros diferem entre si. No caso, se assumirmos que $L_\alpha$ pode ser bem ordenado, então segue que $L_\alpha^{<\omega}$ também pode ser – e com uma fórmula decente –. Neste caso, podemos dizer que dois conjuntos $x, y$ de mesmo rank e fórmula minimal estão relacionados por $\varphi$ quando o parâmetro de $x$ for menor que o de $y$.

Teorema: $L \vDash AC$.

Todo $L$ pode ser bem ordenado, mas $L$ é transitivo, então certamente qualquer $x$ pode ser bem ordenado. Então dado uma família não vazia $X \in L$ de conjuntos não vazios, considere $\{x \in \bigcup X : \exists y \in X : x = \min y\}$. Claramente existe, então está provado. ■

Para provar a Hipótese Generalizada do Contínuo, precisamos de dois lemas antes:

LEMA: $\mathrm{ZF} + AC \vdash \forall \alpha > \omega : |L_\alpha| = |\alpha|$.

# Referências Bibliográficas


[**Bell**]
Bell, J. L. **Set Theory, Boolean-Valued Models and Independence Proofs**, Oxford logic Guides **v. 47**, Clarendon Press, 2005.

[**Drake**]
Drake, Frank R. **Set theory : an introduction to large cardinals**, Studies in logic and the foundations of mathematics **v. 76**, American Elsevier Pub. Co., 1974.

[**Freire**]
Freire, Rodrigo. A. **Grasping Sets Through Ordinals: On a Weak Form of the Constructibility Axiom**, *South American Journal of Logic* Vol. 2, n. 2, pp. 357-359, 2016. ISSN: 2446-6719.

[**Jech**]
Jech, T. **Set Theory: Third Millennium Edition, revised. and extended**, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.

[**Kunen**]
Kunen K. **Set Theory**, Studies in Logic **v. 34**, Lightning Source, Milton Keyne, UK.

[**Miraglia**]
Neto, F. Miraglia. **Cálculo Proposicional: Uma interação da Álgebra e da Lógica**, Coleção CLE – **v. 1**, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas — São Paulo, 1987.