Modelos a Valores Booleanos:
Aplicações em Teoria dos Conjuntos

IME - USP

Orientador: Prof. Hugo Luiz Mariano
José Goudet Alvim

2017-19

Palavras-chave

Reticulados; Álgebras de Heyting; Álgebras Booleanas; Teoria de Modelos; Valores booleanos de fórmulas; Independência; Forcing;

Resumo

Neste trabalho de iniciação científica, estudaremos a teoria de modelos a valores booleanos de ZF, a fim de entender e produzir provas de consistência e independência na teoria de conjuntos. Para tanto, trataremos de álgebras de Boole; de Heyting; Filtros; Morfismos; Teoria de Modelos e Lógica.

Conteúdo

Capítulo 1

Lógica de Primeira Ordem

It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music [...] because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect and yet true.

Bertrand Russell.

Começamos com uma língua $\mathcal{L}$ de primeira ordem, isto é, a coleção de palavras (bem-)formadas por um determinado conjunto de símbolos para variáveis; uma série de símbolos para relações, $\langle R_1, R_2, \ldots \rangle$; uma de funções, $\langle F_1, F_2, \ldots \rangle$ e uma de constantes $\langle C_1, C_2, \ldots \rangle$; conectivos e operadores lógicos e quantificadores.

1) DEFINIÇÃO: **Termos, Fórmulas e variáveis livres | escopadas**.

(a) Se x_i for uma variável, então a palavra "x_i" é um **termo** e a (única) ocorrência de x_i é dita **livre** no termo.

(b) Se C_i for uma constante, então a palavra "C_i" é um **termo**. Como ele não contém variável, não faz sentido tratar de ocorrências de variáveis livres ou escopadas.

(c) Se $\{t_1, \ldots, t_k\}$ forem termos, e R_j é um relacional de aridade k, então a palavra "$(R_j(t_1, \ldots, t_k))$" é uma **fórmula**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.

(d) Se $\{t_1, \ldots, t_k\}$ forem termos, e F_j é um relacional de aridade k, então a palavra "$(F_j(t_1, \ldots, t_k))$" é um **termo**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.

(e) Se φ, ψ forem fórmulas e $\diamond$ for um conectivo lógico, então as palavras: "$(\varphi \diamond \psi)$" e "$(\neg\varphi)$" são **fórmulas**, e occorências de variáveis são livres ou escopadas de acordo com sua liberdade ou limitação nas fórmulas componentes.

(f) Se φ for uma fórmula, e x_i é uma variável, então as palavras: "$\exists x_i : \varphi$" e "$\forall x_i : \varphi$" são **fórmulas** e cada ocorrência de x_i é dita **escopada** — pois está no escopo de um quantificador —, e cada ocorrência de qualquer outra variável é livre ou escopada de acordo com sua situação em φ.

A língua é formada destes componentes, fórmulas e termos.

* * *

Por legibilidade, por omitiremos parenteses quando possível, e intruduziremos abreviaturas para fórmulas, termos *etc.*

A ideia de uma língua é que ela *fale sobre* um determinado domínio. Quando escrevo, minhas palavras tratam de objetos de alguma sorte. Quando nomeio um objeto e predico sobre ele, por exemplo, existe uma interpretação da verdade do predicado no nosso universo.

Por exemplo, "*Eu tenho cinco dedos cada uma de minhas mãos*", é uma sentença da língua portuguesa, cujo valor de verdade é dependente em quem é "*Eu*" e em suas propriedades. Poderia ser o caso que o autor *não* tivesse cinco dedos em cada uma de minhas mãos, então, a interpretação costumeira de quem *é* "Eu" falsearia a sentença.

Poderia ser o caso que o autor não tivesse *mão alguma*, mas neste caso a sentença seria verdade, pelo mesmo motivo que eu tenho uma lamborghini em cada uma das minhas mansões.

Tentando capturar a noção de interpretação das *palavras* para objetos concretos (que não pertencem à língua, mas a um mundo) — por exemplo "*Eu*" — e como, associando palavras a objetos e símbolos a relações, constantes, funções *etc.* temos como determinar a veracidade de uma proposição no mundo alvo, dada uma interpretação.

2) Definição: **Estrutura, Interpretação e Validação**.

Assinatura: Uma **assinatura** é uma tripla de coleções: a das relações, cada qual com sua aridade; a das constantes; e, finalmente, a das funções, cada qual com sua aridade.

$$\Sigma = \langle \langle \mathbf{R_1}, \ldots \rangle , \langle \mathbf{C_1}, \ldots \rangle , \langle \mathbf{F_1}, \ldots \rangle \rangle$$

Se cada relação ou função em uma assinatura Σ tiver domínio em uma coleção A, e cada constante estiver em A, então podemos dizer que Σ está definida sobre A.

Estrutura: Chamamos a dupla $\langle A, \Sigma \rangle$ de A coleção e uma assinatura Σ definida sobre A, de $\mathfrak{A}$. E este tipo de objeto batizamos de **estrutura**. E dizemos A ser o domínio de $\mathfrak{A}$, que escrevemos $|\mathfrak{A}|$, e Σ ser assinatura de $\mathfrak{A}$, possivelmente $sgn(\mathfrak{A})$.

Compatibilidade Estrutura-Língua: Dada uma língua de primeira ordem $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathfrak{A}$ dizemos elas serem compatíveis se e só se valem todas:

(a) Se $sgn(\mathfrak{A})$ tiver tantas relações quanto há relacionais na língua.

(b) Se $\mathbf{R_i}$ é a i-ésima relação da estrutura, então
R_i, o i-ésimo símbolo relacional da língua, concorda com sua aridade.

(c) Se $sgn(\mathfrak{A})$ tiver tantas funções quanto há funcionais na língua.

(d) Se $\mathbf{F_i}$ é a i-ésima função da estrutura, então
F_i, o i-ésimo símbolo funcional da língua, concorda com sua aridade.

Interpretação: Dizemos que uma f é uma interpretação de $\mathcal{L}$ para $\mathfrak{A}$ se e, só se:

(a) $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{A}$ são compatíveis.

(b) f associa cada variável λ da língua para algum elemento $f(\lambda)$ de $|\mathfrak{A}|$.

(c) f leva cada símbolo relacional R em uma relação $f[R]$ da $sgn(\mathfrak{A})$.

(d) f leva cada símbolo funcional F em uma função $f[F]$ da $sgn(\mathfrak{A})$.

(e) Se $x_1, \ldots, x_k$ forem termos e F um funcional, então
$f(F(x_1, \ldots, x_k)) = f[F](f(x_1), \ldots, f(x_k))$.

(f) f leva cada símbolo de constante c em um membro $f(c)$ de $|\mathfrak{A}|$.

Isto é, ter uma interpretação — ou melhor — *interpretar* um símbolo é dar significado a ele. Pois, leva-lo a um objeto, relação semântica entre objetos, função, *etc.*

Um exemplo de significação é imaginar que quando escrevo "*o autor*" em alguma sentença, pode-se *interpretar* como referente do símbolo o *autor deste texto*. Ficam, pois, definidas as propriedades do signo e, assim, este pedaço da sentença ganha significado.

Além disso, dada uma interpretação f de $\mathcal{L}$ para $\mathfrak{A}$, uma variável ou constante x e um membro a de $|\mathfrak{A}|$, definimos $f_{[x/a]}$ como sendo exatamente igual a f nas variáveis e constantes exceto em x, onde ela valerá a. Os outros valores de f — isto é, em termos diversos — induz-se das funções, constantes e variáveis.

Isto se comporta como mudar um pedaço da intepretação, por exemplo, a interpretação de "*o nome do autor tem a letra W*" muda radicalmente de acordo com quem é o autor, mesmo mantendo a interpretação da função "nome de X". Não poderia "*autor*" denotar Ludwig Wittgenstein, que foi autor?

Validação: Definimos uma fórmula φ de $\mathcal{L}$ valer em $\mathfrak{A}$ sob a interpretação f (estrutura compatível com a língua) — alternativamente, que $\mathfrak{A}$ satisfaz φ —, ou simbolicamente, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi$ por recorrência sobre sua complexidade.
(a) Se $x_0, \ldots, x_{\rho_i}$ forem termos quaisquer, R_i relacional de aridade ρ_i:

$$\varphi \equiv R_i\,(x_0, \ldots, x_{\rho_i}) \Rightarrow [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow f[R_i]\,(f(x_0), \ldots, f(x_{\rho_i}))]$$

(b) Se σ e ψ forem fórmulas, x uma variável:

$$\begin{aligned}&\varphi \equiv \sigma \wedge \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ e } \mathfrak{A} \vDash_f \psi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varphi \equiv \sigma \vee \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varphi \equiv \neg\sigma \Rightarrow \\ &[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \text{ não } \mathfrak{A} \vDash_f \sigma]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varphi \equiv \sigma \rightarrow \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \neg\sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi]\end{aligned}$$

$\varphi \equiv \forall x : \sigma \Rightarrow$
$[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow$ para todo a de $|\mathfrak{A}|$: $\mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi]$

$\varphi \equiv \exists x : \sigma \Rightarrow$
$[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow$ existe algum a de $|\mathfrak{A}|$: $\mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi]$

A motivação desta definição é a ideia que os fatos elementares, no caso as relações e funções entre os objetos, determinam todos os fatos "complexos". Os quantificadores por sua vez, desempenham o papel de providenciar genericidade. Isto é, sem estes, a validade de uma fórmula é extremamente dependente da interpretação. Mas uma **sentença** — isto é, uma fórmula com todas as variáveis em algum escopo de quantificador —, de certa forma, não depende de uma interpretação.

* * *

3) DEFINIÇÃO: **Sentença**.

Uma **sentença** de uma língua é uma fórmula em que todas as ocorrências de suas variáveis são escopadas.

* * *

4) LEMA: **Genericidade restrita de fórmulas:**.

Se todas as ocorrências de uma variável x em uma dada fórmula φ estiverem escopadas, então para todo a no domínio de uma certa estrutura $\mathfrak{A}$ compatível com a língua de φ, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi$.

Prova:

Onde x aparecer, ela estará escopada, então *ja íamos* substituir o valor de f lá. Como a validade das fórmulas é dada por recorrência, e como tudo permanece o mesmo salvo em x, fica clara a ida, para a volta reaplica-se a inda. ■

5) LEMA: **Independência das interpretações irrelevantes:**.

Se x não ocorrer em *varphi* uma $\mathcal{L}$-fórmula com língua compatível com $\mathfrak{A}$ estrutura, então para todo a em $|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_{f[x/a]} \varphi$.

Prova:

Na definição de validação x não desempenha papel algum. ■

6) TEOREMA: **Genericidade de sentenças para validação:**.

Dadas uma língua e uma estrutura compatíveis. Se φ for uma sentença da língua, então a estrutura valida φ sob uma interpretação f se e somente se valida sob qualquer interpretação g que leva as relações, funções e constantes nas mesmas que leva f.

Prova:

A volta é trivial, se valida para qualquer que coincide com f em certa parte, valida para f, que de certo coincide com f nesta parte.

Por outro lado, todas as ocorrências de variáveis são escopadas, então, qualquer substituição de variáveis (presentes em φ) na intepretação não altera a validade da sentença. Adicionalmente, qualquer substituição de variáveis irrelevantes não altera a validade. Pois, quaisquer substituições não alteram a validade. Logo, toda interpretação leva a mesma validação. ■

7) DEFINIÇÃO: **Satisfatibilidade**.

Finalmente, definiremos uma noção de satisfatibilidade ou validade que independe de *interpretação*.

Dadas $\mathfrak{A}$ uma estrutura e $\mathcal{L}$ uma língua compatíveis, e uma fórmula φ da língua.

Deixe $\psi \equiv \forall x_1, \dots, \forall x_k : \varphi$ onde $x_1, \dots, x_k$ são todas as variáveis em φ não escopadas,

$$\mathfrak{A} \vDash \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda interpretação } f : \mathfrak{A} \vDash_f \psi]$$

Possívelmente, nenhuma variável será livre em φ neste caso, ψ coincidirá com φ.

No caso que $\mathfrak{A} \models \varphi$ vale, dizemos que $\mathfrak{A}$ satisfaz φ ou, alternativamente, φ é válida em $\mathfrak{A}$. Note que uma fórmula que não for sentença é válida só se por falta de contra exemplo.

* * *

O estudo das estruturas e as fórmulas que lá são satisfeitas é extremamente importante, afinal. De exemplos, um trivial é uma estrutura com (apenas) a relação identidade e uma língua com (apenas) o símbolo "=", sendo assim, temos que

$$\langle A, Id\rangle\,[1] \models x = x$$

Notação: A partir deste ponto, não vamos explicitamente dizer que uma língua é compatível com uma estrutura quando tratamos delas. Nem diremos que uma φ é fórmula da língua, *etc.*

8) Definição: **Consequência**.

Da mesma forma que definimos satisfatibilidade com a intenção de abstrair a noção de interpretação, queremos agora abstrair as relações da própria estrutura.

Estruturas compatíveis Duas estruturas são ditas compatíveis exatamente quando houver uma língua que é compatível com as duas, isto é as aridades de cada relação, função, número de constantes *etc.* coincidem.

Duas estruturas compatíveis podem satisfazer fórumlas radicalmente diferentes, por exemplo, a estrutura que tomamos acima e uma outra estrutura com apenas a relação "$x(Nq)y \Leftrightarrow x \neq y$". Se $\mathcal{L}$ for a língua com apenas um símbolo relacional R, fica claro que $\langle A, Id\rangle \models x = x$ e $\langle B, Nq\rangle \not\models x = x$. Queremos, pois, uma noção que não dependa tanto da estrutura fina do universo interpretativo.

[1] No caso, interprete que a dupla é uma estrutura com apenas relações, nesta instância Id e domínio A.

Consequência: Dizemos que φ segue, ou é consequência, de ψ, ou simbolicamente,

$$\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda } \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi]$$

Note a semelhança com a definição de satisfatibilidade sem interpretação. Novamente, a quantificação universal faz o trabalho de generalizar o conceito em certa direção.

Extendemos a definição para conjuntos de fórmulas dos dois lados,

$$\Gamma \vdash \Sigma$$

Da maneira natural de fazer, isto é, para cada φ em Σ, $\Gamma \vdash \varphi$, e por isso, queremos dizer:

$$[\text{Para toda } \mathfrak{A} : (\text{para toda } \gamma \text{ em } \Gamma : \mathfrak{A} \models \psi) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi]$$

Finalmente, se $\emptyset \vdash \varphi$, escrevemos $\vdash \varphi$.

* * *

A interpretação da definição é que algumas fórmulas são genéricas sobre uma certa sorte de estrutura, por exemplo, considere a fórmula $\varphi \equiv xRx \rightarrow xRx$. Não importa *quem* seja x, nem quais sejam suas relações com quaisquer outros membros de seu universo. φ é *sempre* verdade.

Considere um outro exemplo menos formal do mesmo princípio: Seja $\psi =$"*Todos os cavalos são animais*" e $\varphi =$"*todas as cabeças de cavalo são cabeças de animais*" então $\psi \vdash \varphi$ é válida. Isso não depende de se existem cavalos, o quê são cavalos, o quê são cabeças, se cavalos tem quatro patas, se cavalos tem cabeças, se cavalos são uma cor *etc.* E isso não é jogo de palavras:

$$\psi \equiv \forall x : E(x, x) \rightarrow A(x, x)$$

$$\varphi \equiv \forall c : (\exists a : E(a, a) \wedge C(c, a)) \rightarrow \exists b : A(a, a) \wedge C(c, b)$$

Que podemos ler "φ: para todo objeto, se este for um Equino, ele é um Animal" e "ψ: para todo objeto, se existe um outro que é Equino e tem como Cabeça este, então existe um terceiro que é Animal e tem como Cabeça o primeiro".

9) PROPOSIÇÃO: **Resultados sobre $\vdash$.**

a) $\varphi \vdash \varphi$,

b) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Lambda \Rightarrow \Lambda \vdash \varphi$,

c) $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$,

d) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$,

e) $\varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$,

f) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$,

g) $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$,

h) $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$,

i) $\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi$,

j) $\forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$,

k) $\forall x : \varphi \vdash \neg\exists x : \neg\varphi$,

l) $\neg\exists x : \neg\varphi \vdash \forall x : \varphi$,

m) $\vdash \varphi \Rightarrow \ \vdash \{\forall x : \varphi, \exists x : \varphi\}$,

n) $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$,

o) $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$.

Prova:

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi}}{\varphi \vdash \varphi}$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\mathfrak{A} \vDash \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \subseteq \Lambda \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \Lambda}{\lambda \in \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \lambda}}{\gamma \in \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \gamma}}{\mathfrak{A} \vDash \Gamma}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi}$$

$$\therefore \mathfrak{A} \vDash \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi$$

$$\text{Assim, } \Lambda \vdash \varphi$$

c)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \vee \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \varphi \vee \psi$$

d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

e)

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}$$

$$\therefore \varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$$

f)

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A} \models \emptyset \qquad \mathfrak{A} \not\models \varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \neg\varphi}$$

$$\therefore \emptyset \vdash \varphi \vee \neg\varphi$$

g)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\text{Não-não } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \neg\varphi}}{\mathfrak{A} \models \neg\neg\varphi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

h)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A} \models \neg\neg\varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \neg\varphi}}{\text{Não-não } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$

$$\therefore \neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

i)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \neg\varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \neg\varphi \vee \psi} \qquad \mathfrak{A} \models \emptyset}{\dfrac{\mathfrak{A} \models \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \to \psi}{\emptyset \vdash \varphi \to \psi}}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset \vdash \varphi \to \psi}{\mathfrak{A} \models \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \to \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi}}{\varphi \vdash \psi}
$$

$$
\therefore \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \emptyset \vdash \varphi \to \psi
$$

j)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ de } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \models_{f[x/\hat{x}]} \varphi} \qquad \dfrac{|\mathfrak{A}| \neq \emptyset}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|}}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \models_{f[x/\hat{x}]} \varphi}}{\mathfrak{A} \models \exists x : \varphi}
$$

$$
\therefore \forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi
$$

k)

$$
\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \models \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \models \exists x : \neg\varphi}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \models \neg\varphi}}{\perp}
$$

$$
\therefore \forall x : \varphi \vdash \neg\exists x : \neg\varphi
$$

l)

$$\therefore \exists x : \neg\varphi \vdash \neg\forall x : \varphi$$

m) Se x não ocorre em φ, então é trivial. Se x ocorre em φ, lembramos que é uma sentença, então x sempre ocorre quantificado em φ. Então $\vDash$ vai ignorar os quantificadores em "$\forall x : \phi$" e "$\exists x : \phi$".

n)

$$\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \rightarrow \psi}{\mathfrak{A} \nvDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$$

o)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \vee \psi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}$$

$$\therefore \{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$$

■

O que estes resultados primários nos dizem é que, se tivermos uma prova formal (em um sistema dedutivo razoável) — partindo de hipóteses Γ — de uma coleção Φ de sentenças, então temos garantido que $\Gamma \vdash \Phi$. Isto é importante porque temos que, de certa forma, $\vdash$ respeita a dedução lógica: se achamos que Γ consegue provar Φ, então de fato onde vale Γ, vale Φ.

A reciproca, *que toda sentênça consequente de* Γ *é provável por hipóteses de* Γ, requer um trato cuidadoso com sistemas dedutíveis, definição de prova, *etc.* Mas é resultado conhecido que se $\Gamma \vdash \varphi$, então *prova-se* φ com hipóteses de Γ, mas isso depende do sistema dedutivo.