Modelos a Valores Booleanos:
Aplicações em Teoria dos Conjuntos

IME - USP

Orientador: Prof. Hugo Luiz Mariano
José Goudet Alvim

2017-19

Palavras-chave

Reticulados; Álgebras de Heyting; Álgebras Booleanas; Teoria de Modelos; Valores booleanos de fórmulas; Independência; Forcing;

Resumo

Neste trabalho de iniciação científica, estudaremos a teoria de modelos a valores booleanos de ZF, a fim de entender e produzir provas de consistência e independência na teoria de conjuntos. Para tanto, trataremos de álgebras de Boole; de Heyting; Filtros; Morfismos; Teoria de Modelos e Lógica.

Conteúdo

Capítulo 1

Lógica de Primeira Ordem

> It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music [...] because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect and yet true.
>
> *Bertrand Russell.*

Começamos com uma língua $\mathcal{L}$ de primeira ordem, isto é, a coleção de palavras (bem-)formadas por um determinado conjunto de símbolos para variáveis; uma série de símbolos para relações, $\langle R_1, R_2, \ldots \rangle$; uma de funções, $\langle F_1, F_2, \ldots \rangle$ e uma de constantes $\langle C_1, C_2, \ldots \rangle$; conectivos e operadores lógicos e quantificadores.

DEFINIÇÃO: **Termos, Fórmulas e variáveis livres | escopadas**.

(a) Se x_i for uma variável, então a palavra "x_i" é um **termo** e a (única) ocorrência de x_i é dita **livre** no termo.

(b) Se C_i for uma constante, então a palavra "C_i" é um **termo**. Como ele não contém variável, não faz sentido tratar de ocorrências de variáveis livres ou escopadas.

(c) Se $\{t_1, \ldots, t_k\}$ forem termos, e R_j é um relacional de aridade k, então a palavra "$(R_j\,(t_1, \ldots, t_k))$" é uma **fórmula**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.

(d) Se $\{t_1, \ldots, t_k\}$ forem termos, e F_j é um relacional de aridade k, então a palavra "$(F_j\,(t_1, \ldots, t_k))$" é um **termo**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.

(e) Se φ, ψ forem fórmulas e $\diamond$ for um conectivo lógico, então as palavras: "$(\varphi \diamond \psi)$" e "$(\neg\varphi)$" são **fórmulas**, e occorências de variáveis são livres ou escopadas de acordo com sua liberdade ou limitação nas fórmulas componentes.

(f) Se φ for uma fórmula, e x_i é uma variável, então as palavras: "$\exists x_i : \varphi$" e "$\forall x_i : \varphi$" são **fórmulas** e cada ocorrência de x_i é dita **escopada** — pois está no escopo de um quantificador —, e cada ocorrência de qualquer outra variável é livre ou escopada de acordo com sua situação em φ.

A língua é formada destes componentes, fórmulas e termos.

* * *

Por legibilidade, por omitiremos parenteses quando possível, e intruduziremos abreviaturas para fórmulas, termos *etc.*

A ideia de uma língua é que ela *fale sobre* um determinado domínio. Quando escrevo, minhas palavras tratam de objetos de alguma sorte. Quando nomeio um objeto e predico sobre ele, por exemplo, existe uma interpretação da verdade do predicado no nosso universo.

Por exemplo, "*Eu tenho cinco dedos cada uma de minhas mãos*", é uma sentença da língua portuguesa, cujo valor de verdade é dependente em quem é "*Eu*" e em suas propriedades. Poderia ser o caso que o autor *não* tivesse cinco dedos em cada uma de minhas mãos, então, a interpretação costumeira de quem *é* "Eu" falsearia a sentença.

Poderia ser o caso que o autor não tivesse *mão alguma*, mas neste caso a sentença seria verdade, pelo mesmo motivo que eu tenho uma lamborghini em cada uma das minhas mansões.

Tentando capturar a noção de interpretação das *palavras* para objetos concretos (que não pertencem à língua, mas a um mundo) — por exemplo "*Eu*" — e como, associando palavras a objetos e símbolos a relações, constantes, funções *etc.* temos como determinar a veracidade de uma proposição no mundo alvo, dada uma interpretação.

DEFINIÇÃO: **Estrutura, Interpretação e Validação**.

Assinatura: Uma **assinatura** é uma tripla de coleções: a das relações, cada qual com sua aridade; a das constantes; e, finalmente, a das funções, cada qual com sua aridade.

$$\Sigma = \langle \langle \mathbf{R_1}, \ldots \rangle, \langle \mathbf{C_1}, \ldots \rangle, \langle \mathbf{F_1}, \ldots \rangle \rangle$$

Se cada relação ou função em uma assinatura Σ tiver domínio em uma coleção A, e cada constante estiver em A, então podemos dizer que Σ está definida sobre A.

Estrutura: Chamamos a dupla $\langle A, \Sigma \rangle$ de A coleção e uma assinatura Σ definida sobre A, de $\mathfrak{A}$. E este tipo de objeto batizamos de **estrutura**. E dizemos A ser o domínio de $\mathfrak{A}$, que escrevemos $|\mathfrak{A}|$, e Σ ser assinatura de $\mathfrak{A}$, possivelmente $sgn(\mathfrak{A})$.

Compatibilidade Estrutura-Língua: Dada uma língua de primeira ordem $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathfrak{A}$ dizemos elas serem compatíveis se e só se valem todas:

(a) Se $sgn(\mathfrak{A})$ tiver tantas relações quanto há relacionais na língua.

(b) Se $\mathbf{R_i}$ é a i-ésima relação da estrutura, então R_i, o i-ésimo símbolo relacional da língua, concorda com sua aridade.

(c) Se $sgn(\mathfrak{A})$ tiver tantas funções quanto há funcionais na língua.

(d) Se $\mathbf{F_i}$ é a i-ésima função da estrutura, então F_i, o i-ésimo símbolo funcional da língua, concorda com sua aridade.

Interpretação: Dizemos que uma f é uma interpretação de $\mathcal{L}$ para $\mathfrak{A}$ se e, só se:

(a) $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{A}$ são compatíveis.

(b) f associa cada variável λ da língua para algum elemento $f(\lambda)$ de $|\mathfrak{A}|$.

(c) f leva cada símbolo relacional R_i na relação $f[R_i] = \mathbf{R}_i$ da $sgn(\mathfrak{A})$.

(d) f leva cada símbolo funcional F_i na função $f[F_i] = \mathbf{F}_i$ da $sgn(\mathfrak{A})$.

(e) Se $x_1, \ldots, x_k$ forem termos e F um funcional, então $f(F\,(x_1, \ldots, x_k)) = f[F]\,(f(x_1), \ldots, f(x_k))$.

(f) f leva cada símbolo de constante c em um membro $f(c)$ de $|\mathfrak{A}|$.

Isto é, ter uma interpretação — ou melhor — *interpretar* um símbolo é dar significado a ele. Pois, leva-lo a um objeto, relação semântica entre objetos, função, *etc.*

Um exemplo de significação é imaginar que quando escrevo "*o autor*" em alguma sentença, pode-se *interpretar* como referente do símbolo o *autor deste texto*. Ficam, pois, definidas as propriedades do signo e, assim, este pedaço da sentença ganha significado.

Além disso, dada uma interpretação f de $\mathcal{L}$ para $\mathfrak{A}$, uma variável ou constante x e um membro a de $|\mathfrak{A}|$, definimos $f_{[x/a]}$ como sendo exatamente igual a f nas variáveis e constantes exceto em x, onde ela valerá a. Os outros valores de f — isto é, em termos diversos — induz-se das funções, constantes e variáveis.

Isto se comporta como mudar um pedaço da intepretação, por exemplo, a interpretação de "*o nome do autor tem a letra W*" muda radicalmente de acordo com quem é o autor, mesmo mantendo a interpretação da função "nome de X". Não poderia "*autor*" denotar Ludwig Wittgenstein, que foi autor?

Validação: Definimos uma fórmula φ de $\mathcal{L}$ valer em $\mathfrak{A}$ sob a interpretação f (estrutura compatível com a língua) — alternativamente, que $\mathfrak{A}$ satisfaz φ —, ou simbolicamente, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi$ por recorrência sobre sua complexidade.
(a) Se $x_0, \ldots, x_{\rho_i}$ forem termos quaisquer, R_i relacional de aridade ρ_i:

$$\varphi \equiv R_i\,(x_0, \ldots, x_{\rho_i}) \Rightarrow [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow f[R_i]\,(f(x_0), \ldots, f(x_{\rho_i}))]$$

(b) Se σ e ψ forem fórmulas, x uma variável:

$$\begin{aligned} &\varphi \equiv \sigma \wedge \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ e } \mathfrak{A} \vDash_f \psi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi \equiv \sigma \vee \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi \equiv \neg\sigma \Rightarrow \\ &[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \text{ não } \mathfrak{A} \vDash_f \sigma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi \equiv \sigma \to \psi \Rightarrow \\ &\quad [\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \neg\sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi] \end{aligned}$$

$$\varphi \equiv \forall x : \sigma \Rightarrow$$
$$[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \text{ para todo } a \text{ de } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi]$$

$$\varphi \equiv \exists x : \sigma \Rightarrow$$
$$[\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \text{ existe algum } a \text{ de } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi]$$

A motivação desta definição é a ideia que os fatos elementares, no caso as relações e funções entre os objetos, determinam todos os fatos "complexos". Os quantificadores por sua vez, desempenham o papel de providenciar genericidade. Isto é, sem estes, a validade de uma fórmula é extremamente dependente da interpretação. Mas uma **sentença** — isto é, uma fórmula com todas as variáveis em algum escopo de quantificador —, de certa forma, não depende de uma interpretação.

* * *

Definição: **Sentença**.

Uma **sentença** de uma língua é uma fórmula em que todas as ocorrências de suas variáveis são escopadas.

* * *

Lema: **Genericidade restrita de fórmulas:**.

Se todas as ocorrências de uma variável x em uma dada fórmula φ estiverem escopadas, então para todo a no domínio de uma certa estrutura $\mathfrak{A}$ compatível com a língua de φ, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi$.

Prova:

Onde x aparecer, ela estará escopada, então *ja íamos* substituir o valor de f lá. Como a validade das fórmulas é dada por recorrência, e como tudo permanece o mesmo salvo em x, fica clara a ida, para a volta reaplica-se a inda. ■

Lema: **Independência das interpretações irrelevantes:**.

Se x não ocorrer em *varphi* uma $\mathcal{L}$-fórmula com língua compatível com $\mathfrak{A}$ estrutura, então para todo a em $|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/a]}} \varphi$.

Prova:

Na definição de validação x não desempenha papel algum. ■

Teorema: **Genericidade de sentenças para validação:**.

Dadas uma língua e uma estrutura compatíveis. Se φ for uma sentença da língua, então a estrutura valida φ sob uma interpretação f se e somente se valida sob qualquer interpretação g que leva as relações, funções e constantes nas mesmas que leva f.

Prova:

A volta é trivial, se valida para qualquer que coincide com f em certa parte, valida para f, que de certo coincide com f nesta parte.

Por outro lado, todas as ocorrências de variáveis são escopadas, então, qualquer substituição de variáveis (presentes em φ) na intepretação não altera a validade da sentença. Adicionalmente, qualquer substituição de variáveis irrelevantes não altera a validade. Pois, quaisquer substituições não alteram a validade. Logo, toda interpretação leva a mesma validação. ■

Definição: **Satisfatibilidade**.

Finalmente, definiremos uma noção de satisfatibilidade ou validade que independe de *interpretação*.

Dadas $\mathfrak{A}$ uma estrutura e $\mathcal{L}$ uma língua compatíveis, e uma fórmula φ da língua.

Deixe $\psi \equiv \forall x_1, \ldots, \forall x_k : \varphi$ onde $x_1, \ldots, x_k$ são todas as variáveis em φ não escopadas,

$$\mathfrak{A} \vDash \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda interpretação } f : \mathfrak{A} \vDash_f \psi]$$

Possívelmente, nenhuma variável será livre em φ neste caso, ψ coincidirá com φ.

No caso que $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ vale, dizemos que $\mathfrak{A}$ satisfaz φ ou, alternativamente, φ é válida em $\mathfrak{A}$. Note que uma fórmula que não for sentença é válida só se por falta de contra exemplo.

No caso em que $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$, com Σ uma coleção de fórmulas, dizemos que $\mathfrak{A}$ **modela** Σ.

* * *

O estudo das estruturas e as fórmulas que lá são satisfeitas é extremamente importante, afinal. De exemplos, um trivial é uma estrutura com (apenas) a relação identidade e uma língua com (apenas) o símbolo "=", sendo assim, temos que

$$\langle A, Id \rangle\ [1] \vDash x = x$$

Notação: A partir deste ponto, não vamos explicitamente dizer que uma língua é compatível com uma estrutura quando tratamos delas. Nem diremos que uma φ é fórmula da língua, *etc.*

DEFINIÇÃO: **Consequência**.

Da mesma forma que definimos satisfatibilidade com a intenção de abstrair a noção de interpretação, queremos agora abstrair as relações da própria estrutura.

Estruturas compatíveis Duas estruturas são ditas compatíveis exatamente quando houver uma língua que é compatível com as duas, isto é as aridades de cada relação, função, número de constantes *etc.* coincidem.

[1] No caso, interprete que a dupla é uma estrutura com apenas relações, nesta instância Id e domínio A.

Duas estruturas compatíveis podem satisfazer fórumlas radicalmente diferentes, por exemplo, a estrutura que tomamos acima e uma outra estrutura com apenas a relação “$x(Nq)y \Leftrightarrow x \neq y$”. Se $\mathcal{L}$ for a língua com apenas um símbolo relacional R, fica claro que $\langle A, Id\rangle \vDash x = x$ e $\langle B, Nq\rangle \nvDash x = x$. Queremos, pois, uma noção que não dependa tanto da estrutura fina do universo interpretativo.

Consequência: Dizemos que φ segue, ou é consequência, de ψ, ou simbolicamente,

$$\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda } \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \vDash \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi]$$

Note a semelhança com a definição de satisfatibilidade sem interpretação. Novamente, a quantificação universal faz o trabalho de generalizar o conceito em certa direção.

Extendemos a definição para conjuntos de fórmulas dos dois lados,

$$\Gamma \vdash \Sigma$$

Da maneira natural de fazer, isto é, para cada φ em Σ, $\Gamma \vdash \varphi$, e por isso, queremos dizer:

$$[\text{Para toda } \mathfrak{A} : (\text{para toda } \gamma \text{ em } \Gamma : \mathfrak{A} \vDash \psi) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi]$$

Finalmente, se $\emptyset \vdash \varphi$, escrevemos $\vdash \varphi$.

* * *

A interpretação da definição é que algumas fórmulas são genéricas sobre uma certa sorte de estrutura, por exemplo, considere a fórmula $\varphi \equiv xRx \rightarrow xRx$. Não importa *quem* seja x, nem quais sejam suas relações com quaisquer outros membros de seu universo. φ é *sempre* verdade.

Considere um outro exemplo menos formal do mesmo princípio: Seja $\psi =$“*Todos os cavalos são animais*” e $\varphi =$“*todas as cabeças de cavalo são cabeças de animais*” então $\psi \vdash \varphi$ é válida. Isso não depende de se existem cavalos, o quê são cavalos, o quê são cabeças, se cavalos tem quatro patas, se cavalos tem cabeças, se cavalos são uma cor *etc.* E isso não é jogo de palavras:

$$\psi \equiv \forall x : E(x,x) \to A(x,x)$$

$$\varphi \equiv \forall c : (\exists a : E(a,a) \wedge C(c,a)) \to \exists b : A(a,a) \wedge C(c,b)$$

Que podemos ler "φ: para todo objeto, se este for um Equino, ele é um Animal" e "ψ: para todo objeto, se existe um outro que é Equino e tem como Cabeça este, então existe um terceiro que é Animal e tem como Cabeça o primeiro".

PROPOSIÇÃO: **Resultados sobre $\vdash$.**

a) $\varphi \vdash \varphi$,

b) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Lambda \Rightarrow \Lambda \vdash \varphi$,

c) $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$,

d) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$,

e) $\varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$,

f) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$,

g) $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$,

h) $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$,

i) $\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi$,

j) $\forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$,

k) $\forall x : \varphi \vdash \neg\exists x : \neg\varphi$,

l) $\neg\exists x : \neg\varphi \vdash \forall x : \varphi$,

m) $\vdash \varphi \Rightarrow \ \vdash \{\forall x : \varphi, \exists x : \varphi\}$,

n) $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$,

o) $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$.

Prova:

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi}}{\varphi \vdash \varphi}$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \subseteq \Lambda \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \models \Lambda}{\lambda \in \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \lambda}}{\gamma \in \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \gamma}}{\mathfrak{A} \models \Gamma}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$

$$\therefore \mathfrak{A} \models \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$$

$$\text{Assim, } \Lambda \vdash \varphi$$

c)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \varphi \vee \psi$$

d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

e)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \psi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \psi\}}$$

$$\therefore \varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$$

f)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \emptyset \qquad \mathfrak{A} \nvDash \varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}$$

$$\therefore \emptyset \vdash \varphi \vee \neg\varphi$$

g)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi}{\text{Não-não } \mathfrak{A} \vDash \varphi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \neg\neg\varphi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

h)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \neg\neg\varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}}{\text{Não-não } \mathfrak{A} \vDash \varphi}}{\mathfrak{A} \vDash \varphi}$$

$$\therefore \neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \neg\varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \neg\varphi \vee \psi \qquad\qquad \mathfrak{A} \models \emptyset}}{\dfrac{\mathfrak{A} \models \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\mathfrak{A} \models \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi}}{\varphi \vdash \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

j)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ de } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \models_{f[x/\hat{x}]} \varphi} \qquad \dfrac{|\mathfrak{A}| \neq \emptyset}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|}}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A} \models_{f[x/\hat{x}]} \varphi}}{\mathfrak{A} \models \exists x : \varphi}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$$

k)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \models \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \models \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \models \exists x : \neg\varphi}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|\text{: } \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \models \neg\varphi}}{\bot}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \neg\exists x : \neg\varphi$$

l)

$$\therefore \exists x : \neg\varphi \vdash \neg\forall x : \varphi$$

m) Se x não ocorre em φ, então é trivial. Se x ocorre em φ, lembramos que é uma sentença, então x sempre ocorre quantificado em φ. Então $\vDash$ vai ignorar os quantificadores em "$\forall x : \phi$" e "$\exists x : \phi$".

n)

$$\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \to \psi}{\mathfrak{A} \nvDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$$

o)

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \vDash \varphi} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \vDash \varphi \vee \psi}{\mathfrak{A} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash \psi}}{\mathfrak{A} \vDash \psi}$$

$$\therefore \{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$$

■

O que estes resultados primários nos dizem é que, se tivermos uma prova formal (em um sistema dedutivo razoável) — partindo de hipóteses Γ — de uma coleção Φ de sentenças, então temos garantido que $\Gamma \vdash \Phi$. Isto é importante porque temos que, de certa forma, $\vdash$ respeita a dedução lógica: se achamos que Γ consegue provar Φ, então de fato onde vale Γ, vale Φ.

A reciproca, *que toda sentênça consequente de* Γ *é provável por hipóteses de* Γ, requer um trato cuidadoso com sistemas dedutíveis, definição de prova, *etc.* Mas é resultado conhecido que se $\Gamma \vdash \varphi$, então *prova-se* φ com hipóteses de Γ. Claro, dado um sistema dedutivo dentro de certas hipóteses.

DEFINIÇÃO: **Teoria**.

Dada uma língua, um subconjunto de sentenças $\mathcal{T}$ é dito uma teoria quando ele é não-vazio e $\vdash$-fechado. Isto é, se $\mathcal{T} \vdash \tau$ então τ já estava em $\mathcal{T}$. Ou seja, é uma coleção de sentenças que contém todas as suas consequências sintáticas.

$$* * *$$

Tomemos agora um momento para tratar de **Teorias**.

DEFINIÇÃO: **Teoria**.

Dada uma língua $\mathcal{L}$, um conjunto de sentenças $\mathcal{S}$ é dito uma teoria dentro desta exatamente quando ele for fechado por $\vdash$, em outras palavras

$$\text{Para qualquer } \tau \text{ em } \mathcal{L},\ \mathcal{T} \vdash \tau \Rightarrow\ \tau \text{ já estava em } \mathcal{T}$$

$$* * *$$

Dada uma língua $\mathcal{L}$, e um conjunto de sentenças não-vazio desta que batizamos "axiomas" $\mathcal{A}$, dizemos que um conjunto de sentenças $\mathcal{T}$ é a teoria de $\mathcal{A}$ exatamente quando para toda τ de $\mathcal{T}$, temos $\mathcal{A} \vdash \tau$, que podemos abreviar para $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

O fato de que, para um conjunto de axiomas conforme acima, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ é teoria verifica-se por:

Prova:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \vdash \tau}{\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \tau} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}{\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{A}} \quad \dfrac{\dfrac{\text{para cada } \sigma \text{ em } \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}{\mathcal{A} \vdash \sigma}}{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}}{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}}{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \tau}}{\mathcal{A} \vdash \tau}}{\tau \text{ está em } \mathcal{T}_{\mathcal{A}}}$$

■

Obviamente, toda $\mathcal{T}$ teoria é da forma $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ para algum conjunto de axiomas conveniente (por exemplo a própria $\mathcal{T}$).

Definição: **Consistência**.

Dizemos que uma teoria $\mathcal{T}$ sobre uma língua $\mathcal{L}$ é consistente se e só se ela é não trivial, isto é, existe uma $\mathcal{L}$-sentença φ que não está em $\mathcal{T}$.

* * *

A motivação da definição de consistência é evitar contradições:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \wedge \varphi \text{ em } \mathcal{T}}{\neg\varphi \text{ em } \mathcal{T}} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\varphi \wedge \varphi \text{ em } \mathcal{T}}{\varphi \text{ em } \mathcal{T}} \qquad \psi \text{ em } \mathcal{L} \text{ sentença}}{\varphi \vee \psi \text{ em } \mathcal{T}}}{\psi \text{ em } \mathcal{T}}$$

Se a teoria não for trivial, então ela não pode ser contraditória. Se ela *for* trivial, ela obviamente é.

Uma estrutura que modela uma teoria passa a ocupar um lugar especial em nossos estudos, afinal, uma teoria pretende descrever exaustivamente as propriedades *a priori* de uma estrutura compatível através de uma manipulação que é puramente sintática, pois não temos acesso à estrutura específica quando tratamos de uma teoria (afinal, definimos ela com $\vdash$ e não $\models$).

1.1 Relativização

Um último tema, agora já tratando da línguagem de ZF, é o tema da relativização de fórmulas. Uma φ fórmula com quantificadores e sem termos de abstração tem uma *restrição* a um determinado termo X, escrevemos φ^X para a fórumla φ com todos os quantificadores limitados por X.

Então $\forall x : \exists y : y = P(x)$ torna-se $\forall x \in X : \exists y \in X : y = P(x)$. Por enquanto isso parece um tanto artificial, mas é interessante observar como fórumlas se comportam em domínios específicos da teoria.

Um resultado importante é o Princípio da Reflexção, que vale em ZF e diz que existem alturas arbitrariamente altas da hierarquia cumulativa tal que, para uma dada φ, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X : \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{V_\kappa}$

Capítulo 2

Teoria de Modelos de Teorias de Conjuntos

A teoria dos modelos das teorias de conjuntos está relacionada com, por um lado, estudo de grandes cardinais e seus ramos, e, por outro, lógica e teoria de conjuntos em si.

Isto pois, para uma certa classe de teorias de primeira ordem expressivas o suficiente, existem sentenças que são independentes da teoria, e é o caso que as teorias de conjuntos estão justamente entre incompletas.

No campo da teoria, isto nos diz que a uma teoria de conjuntos é, de certa forma, agnóstica a respeito de certas proposições. Por exemplo, é necessário que não se possa provar a existência de cardinais excessivamente grandes, isto porque se um cardinal for $\beth$-fixo, a hierarquia cumulativa até o mesmo é um modelo da teoria de conjuntos.

Dado um modelo de, digamos ZF pode muito bem ser o caso que haja cardinais inacessíveis no mesmo, mas sem informações adicionais, é impossível provar que existem — se a teoria for consistente, que esperamos ser —.

No campo prático temos ainda traços do abalo deste quarto golpe narcísico que tomou a humanidade com os resultados de K. Gödel, da mesma forma que em um dado modelo de ZF possa valer ou não valer φ, pode ser que problemas importantes ou interessante sejam, simplesmente, independentes da teoria sem que saibamos. É este justamente o caso da hipótese do contínuo, que novamente mostra a capacidade de $\mathbb{R}$ de apresentar-se como a besta que de fato é.

A hipótese do contínuo não é *um pouco* independente, por sinal. Como enunciou Robert M. Solovay: "$2^{\aleph_0}$ *can be anything it ought to be*"[1]. Dizendo que $\mathfrak{c}$ pode ser (e é em algum modelo) $\aleph_\beta$ para um β sucessor ou de cofinalidade incontável. A hipótese do contínuo é "tão" independente que $\mathfrak{c}$ pode, inclusive, ser fracamente inacessível.

[1] The Theory of Models, Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. Amsterdam, North-Holland, 1965, Addison, Henkin, Tarski, eds., pg. 435.

Provar a independência de uma proposição pode ser feita tanto sintaticamente, ou semanticamente. Enquanto a maneira sintática é mais econômica ontologicamente falando, a semantica é mais acessível à mente, por mais que devamos tomar cuidado para não cairmos em confusões linguísticas.

Empregaremos uma abordagem principalmente semantica para tratar de ZF, e por isso que surge a necessidade da teoria dos modelos. Porém, para tratar de ZF, vamos primeiro definir qual teoria de fato falamos.

A língua de nossa teoria é relativamente simples, é a lingua com dois[2] símbolos relacionais $\langle = , \in \rangle$ apenas. Já a teoria é a gerada por esses 7 axiomas e o Esquema de Substituição, que nos dá um axioma para cada fórmula conforme.

1. Ax. da Identidade:
   $\forall x : [\exists ! y : x = y] \wedge x = x.$
2. Ax. Extensionalidade:
   $\forall x : \forall y : [\forall z : z \in x \leftrightarrow z \in y] \leftrightarrow x = y.$
3. Ax. da União:
   $\forall x : \exists y : \forall z : [z \in y \leftrightarrow \exists w \in x : z \in w].$
4. Ax. da Potência:
   $\forall x : \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow [\forall w : w \in z \leftrightarrow w \in y].$
5. Ax. Esquema da Substituição:
   Se φ uma fórmula com apenas $a, b, \vec{v}$ livres e c, w, x, y, z não ocorrendo em φ. Então:
   $$\begin{aligned}[\forall \vec{v} : \forall a : [\exists b : \varphi(a, b; \vec{v})] \leftrightarrow [\exists ! b : \varphi(a, b; \vec{v})]] \rightarrow \\ \rightarrow [\forall x : \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow \exists w : w \in x \wedge \varphi(w, z; \vec{v})]\end{aligned}$$
6. Ax. do Conjunto Indutivo:
   $$\begin{aligned}\exists I : \exists x : x \in I \wedge (\forall t : t \in x \leftrightarrow t \neq t) \\ \wedge [(\exists w : w \in I) \rightarrow \exists z : z \in I \wedge \forall t' : t' \in z \leftrightarrow t' = w \vee t' \in w].\end{aligned}$$

[2]Poderiamos fazer apenas com $\in$, mas não é necessário.

7. Ax. da Fundação:
$$\forall x : (\exists x' : x' \in x) \to \exists y : (y \in x) \wedge [\forall t : (t \in x \wedge t \in y) \to t \neq t].$$

2.1 Estruturas Transitivas

DEFINIÇÃO: **Identidade Induzida**.

Se tivermos uma relação R definida sobre uma classe A, gostaríamos de ter uma relação de equivalência em A que fosse congruente com R, definimos $\approx_R$ como sendo
$$a \approx_R b \Leftrightarrow \forall t \in A : tRa \leftrightarrow tRb$$

Restrito ao domínio adequado.

Isto é, em A, dois identificados são idênticos à esquerda.

* * *

DEFINIÇÃO: **Estrutura Transitiva**.

Uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, \approx, \epsilon \rangle$ é dita uma **estrutura transitiva** exatamente quando $\epsilon = \{\langle a, b \rangle : a, b \in A \wedge a \in b\}$, $\approx = \approx_\epsilon$ e A é uma classe transitiva.

* * *

DEFINIÇÃO: **Substrutura**.

Dadas duas estruturas compatíveis $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ dizemos que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ — que $\mathfrak{A}$ é substrutura de $\mathfrak{B}$ — exatamente quando $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$, as relações e funções de $\mathfrak{A}$ são as restrições das de $\mathfrak{B}$ e as constantes de $\mathfrak{B}$ são as mesmas que as de $\mathfrak{A}$.

* * *

TEOREMA: **Estrutura transitivas atendem fundação e extensionalidade**.

Se $\mathfrak{A} = \langle A, \approx, \epsilon \rangle$ for uma estrutura transitiva, então,

a) $\mathfrak{A} \models$ Ax. da Fundação

b) $\mathfrak{A} \models$ Ax. da Extensionalidade

Prova:

a) Seja $x \in A$, com tal que $\exists y \in A : y \, \epsilon \, x$, isso significa que $\exists y : y \in x$, assim, pelo axioma da fundação, $\exists y \in x : \forall t : [t \in x \land t \in y] \rightarrow t \neq t$. Como A é transitivo, temos que este y existe *em* A, então $\exists y \, \epsilon \, x : \forall t : [t \, \epsilon \, x \land t \, \epsilon \, y] \rightarrow t \neq t$.

   Por outro lado, temos que $\forall a, b \in A : a \approx b \leftrightarrow a = b$, pois, para a ida[3]: Como A é transitivo, então $a, b \subset A$. Assim, se os membros de a em A forem exatamente os de b em A, então os membros de a são os mesmos que os de b, e por extensionalidade, são iguais. Assim, temos $\exists y \, \epsilon \, x : \forall t : [t \, \epsilon \, x \land t \, \epsilon \, y] \rightarrow t \not\approx t$, que é a tradução da fundação para a estrutura $\mathfrak{A}$.

b) Se $a, b \in A$ então todos os membros *deste* estão em A também. Se os membros de a e b que estão dentro de A coincidem, então os fora de A coincidem e temos a extensionalidade. Assim, eles são iguais ($=$), mas se são iguais, como vimos, também são iguais ($\approx$). Vale então a extensionalidade. ■

Neste teorema aparece insinuada uma propriedade de certas fórmulas que chamamos de Incondicionalidade, ou *Absoluteness*.

[3] a volta é trivial

2.1.1 Incondicionalidade e Elementaridade

DEFINIÇÃO: **Incondicionalidade**.
Sejam $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas transitivas.

Uma fórmula φ da língua de ZF é dita **absoluta** ou **incondicional** entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ exatamente quando, para toda f interpretação das variáveis da língua em $\mathfrak{A}$.

$$\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi$$

Um termo t da língua é dito **absoluta entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$** exatamente quando, para toda f interpretação das variáveis da língua em $\mathfrak{A}$.

$$\mathfrak{A} \models_f x = t \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f x = t$$

Dizemos ainda que uma fórmula é preservada sob restrição de $\mathfrak{B}$ para $\mathfrak{A}$ quando a implicação da direita para esquerda vale. E Dizemos que uma fórmula é preservada sob extensão de $\mathfrak{A}$ para $\mathfrak{B}$ quando a implicação da esquerda para a direita vale.

* * *

DEFINIÇÃO: **Elementaridade**.
Dadas $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas compatíveis Dizemos $\mathfrak{A}$ ser substrutura elementar de $\mathfrak{B}$, ou que $\mathfrak{B}$ é extensão elementar de $\mathfrak{A}$, exatamente quando toda fórmula é absoluta entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

* * *

Fórmulas absolutas, pois, formam uma classe de fórmulas muito útil para o trato de modelos, já que seus significados não mudam quando as extendemos ou as restringimos. Que estas fórmulas não são todas as que existem é simple de ver: Deixe $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2\}, \leq \rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3\}, \leq \rangle$ É trivial ver que $\forall x, y, z : (x \neq y) \rightarrow z = x \vee z = y$ não é absoluta entre as estruturas.

No entanto, a situação não é tão ruim assim, por mais que tamanho não seja absoluto entre estruturas, temos critérios para gerar fórmulas absolutas:

Proposição: **Condições suficientes para incondicionalidade**.

a) fórmulas atômicas são absolutas.

b) conjunção, disjunção e negação de absolutas é a absoluta.

Prova:

a) Como uma é substrutura da outra, então as relações são as restrições. Como a fórmula é atômica, e a interpretação é em na substrutura, então vai ser verdade em numa estrutura exatamente quando for na outra.

b) Segue da definição de satisfação.

Definição: **Fórmulas Completas**.

Uma fórmula $\varphi(x;\vec{v})$ é dita **completa** em $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ com respeito a x exatamente quando é o caso que:

Se $\hat{x} \in |\mathfrak{B}|$ e $\vec{u}$ forem parâmetros em $|\mathfrak{A}|$, então $\mathfrak{B} \models \varphi(\hat{x},\vec{u}) \Rightarrow b \in |\mathfrak{A}|$. Sendo que com " $\mathfrak{B} \models \varphi(\hat{x},\vec{u})$" queremos dizer "$\mathfrak{B} \models_{f[x/\hat{x},\vec{v}/\vec{u}]} \varphi(\hat{x},\vec{u})$" pois φ só tem os parâmetros e x livres.

Uma fórmula completa em relação a uma par estrutura-substrutura e um variável é de tal forma que se não for verdade em baixo, não é por falta de testemunha. Da mesma forma que se uma sequência em $\mathbb{R}$ não converge, não é porque está faltando o ponto de convergência, como poderia ser o caso em $\mathbb{Q}$.

* * *

Teorema: $\exists x : \varphi$ **para completas e absolutas**.

Seja $\varphi(x;\vec{v})$ absoluta entre $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ transitivas, e completa para x entre as mesmas estruturas. Nestas condições, $\exists x : \varphi(x,\vec{v})$ é absoluta entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

Prova:

Primeiro, temos que:

a) $\mathfrak{A} \vDash_f \varphi(x;\vec{v}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi(x;\vec{v})$.

b) $[(\vec{u} \subseteq |\mathfrak{A}|) \wedge (b \in |\mathfrak{B}|)] \Rightarrow [\mathfrak{B} \vDash_f \varphi(b;\vec{u}) \Rightarrow b \in |\mathfrak{A}|]$.

($\Rightarrow$) Então considere:

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{A} \vDash_f \exists x : \varphi(x,\vec{v}) \\ \hline
\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v}) \\ \hline
\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v}) \\ \hline
\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{B} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v}) \\ \hline
\mathfrak{B} \vDash_f \exists x : \varphi(x,\vec{v})
\end{array}$$

($\Leftarrow$) Por outro lado, tome que

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{B} \vDash_f \exists x : \varphi(x,\vec{v})}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{B} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v})} \qquad \dfrac{f \text{ é uma } \mathfrak{A}\text{-valoração de variáveis}}{f[\vec{v}] \subseteq |\mathfrak{A}|}}{\dfrac{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \vDash_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x,\vec{v})}{\mathfrak{A} \vDash_f \exists x : \varphi(x,\vec{v})}}$$

Assim, fica provado o teorema. ■

TEOREMA: **Quantificação limitada de fórmulas absolutas**.

Seja φ absoluta entre $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas transitivas, então $\exists x \in y : \varphi(x)$ e $\forall x \in y : \varphi(x)$ são ambas absolutas, quando y não ocorre em x.

Prova:

Primeiro, $\exists x \in y : \varphi(x) \equiv \exists x : x \in y \wedge \varphi$:

$$\frac{x \in y \text{ é absoluta} \qquad \varphi(x) \text{ é absoluta}}{x \in y \wedge \varphi(x) \text{ é absoluta}}$$

$x \in y \wedge \varphi(x)$ é completa para x entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ pois: se $y \in \mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ crê que x está em y e satisfaz φ, então, certamente x está em y que está em $\mathfrak{A}$.

Logo, pelo teorema anterior, $\exists x \in y : \varphi(x)$ é absoluta entre as estruturas.

Para o quantificador universal, basta ver que $\neg\varphi(x)$ também é absoluta, então $\exists x : x \in y \wedge \neg\varphi(x)$ é absoluta, mas ela é equivalente a $\exists x : \neg(x \in y \to \varphi(x))$ que equivale a $\neg\forall x : x \in y \to \varphi(x)$. Neste caso, sabemos que ela será absoluta, mas negação de absoluta também é. Então $\forall x : x \in y \to \varphi(x)$. ■

DEFINIÇÃO: **Fórmulas preservadas por Extenção/Restrição**.

Dizemos que uma fórmula φ é **preservada por extenções** — ou é **extendível** — exatamente quando:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ estruturas transitivas} \Rightarrow (\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi)$$

Toda vez que f for uma $\mathfrak{A}$ valoração.

Dizemos que uma fórmula φ é **preservada por restrições** — ou é **restringível** — exatamente quando:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ estruturas transitivas} \Rightarrow (\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi)$$

Toda vez que f for uma $\mathfrak{A}$ valoração.

* * *

Lema: **Quantificação sobre absoluta é Restringível/Extendível**.

Trivialmente, se φ for absoluta entre duas transitivas $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, então $\exists x : \varphi$ é extendível e $\forall x : \varphi$ é restringível.

2.1.2 Hierarquia de Lévy

Definição: **Fórmulas Σ, Π e Δ**.

Uma fórmula φ é dita **restrita** ou **limitada** quando todos os seus quantificadores são da forma $\forall x : x \in y \to \psi$ ou $\exists x : x \in y \wedge \psi$ (isto é $\forall x \in y : \psi$ ou $\exists x \in y : \psi$)

Uma fórmula é dita Σ_0 e Π_0 exatamente quando ela é restrita; É dita Σ_{n+1} quando é da forma $\exists x_1 : \ldots : \exists x_k : \psi$ para $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ variáveis e uma ψ fórmula Π_n. Similarmente, é dita Π_{n+1} exatamente quando $\forall x_1 : \ldots : \forall x_k \psi$ com $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ variáveis e uma ψ fórmula Σ_n.

Finalmente, uma fórmula φ é dita $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ — sigma-n para $\mathcal{T}$ — quando existe uma ψ que é Σ_n tal que $\mathcal{T} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$, $\Pi_n^{\mathcal{T}}$ sendo similarmente definida. Um caso especial são as fórumlas $\Delta_n^{\mathcal{T}}$, que são exatamente aquelas fórmulas que são $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ e $\Pi_n^{\mathcal{T}}$ simultaneamente. Novamente, um termo t é dito $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$, $\Pi_n^{\mathcal{T}}$ ou $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ quando $x = t$ o for — com x não ocorrendo em t, é claro —.

* * *

O motivo do nosso interesse em catalogar certas fórmulas na hierarquia de Lévy é a relação que estas fórmulas possuem com as estruturas transitivas. A ver, as fórmulas $\Sigma_1^{\mathcal{T}}$ são preservadas por extensões, as $\Pi_1^{\mathcal{T}}$ são preservada por restrições e as $\Delta_1^{\mathcal{T}}$ são absolutas, quando se tratando de modelos da teoria $\mathcal{T}$, claro.

Teorema: **Fórmulas $\Delta_1^{\mathcal{T}}$ são $\mathcal{T}$-absolutas**.

Prova:

Lema: **Δ_0 são absolutas**.

Trivialmente, pois são conjunções de outras absolutas ou quantificações limitadas de fórmulas absolutas.

Seja φ uma fórmula $\Delta_1^{\mathcal{T}}$. Como ela é equivalente a uma $\forall x_k : \psi$ com $\psi \in \Sigma_0^{\mathcal{T}}$, ela é $\mathcal{T}$-equivalente a uma quantificação universal de uma fórmula absoluta, afinal ψ é absoluta.

Por outro lado, ela é equivalente a uma $\exists x_j : \gamma$ com $\gamma \in \Pi_0^{\mathcal{T}}$, que nos dá que ela é $\mathcal{T}$-equivalente a uma quantificação existêncial de uma absoluta, pois γ também é absoluta.

Assim, sendo $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas transitivas e f uma $\mathfrak{A}$-valoração, temos que:

a) $\mathcal{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \forall x_k : \psi$.

b) $\mathcal{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x_k : \gamma$.

c) $\mathfrak{A} \vDash_f \exists x_k : \gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \exists x_k : \gamma$.

d) $\mathfrak{A} \vDash_f \exists x_k : \psi \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \forall x_k : \psi$.

Se for o caso que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vDash \mathcal{T}$, então temos que

$$\mathfrak{A} \vDash_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash_f \varphi$$

■

Agora que temos uma condição suficiente para uma fórmula ser absoluta entre estruturas transitivas de uma teoria dada, transferimos o problema de identificar uma fórmula absoluta para o problema de identificar uma fórmula $\Delta_1^{\mathcal{T}}$

Por [?], temos que, para um teoria $\mathcal{T}$ tão forte quanto ZF,

Teorema: **Resultados acerca da Hierarquia de Lévy**.

(a) Se "φ" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$, então "$\forall x : \varphi$" $\in \Pi_{n+1}^{\mathcal{T}}$ e "$\exists x : \varphi$" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$, para toda x variável da língua.

(b) Se "φ" $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$, então "$\forall x : \varphi$" $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$ e "$\exists x : \varphi$" $\in \Sigma_{n+1}^{\mathcal{T}}$, para toda x variável da língua.

(c) Se "φ", "ψ" $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$, então suas conjunções e disjunções são $\Pi_n^{\mathcal{T}}$

(d) Se "φ", "ψ" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$, então suas conjunções e disjunções são $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$

(e) Se "φ" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ e "ψ" $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$, então suas conjunções e disjunções são $\Delta_{n+1}^{\mathcal{T}}$,
e "$\varphi \to \psi$" é $\Pi_n^{\mathcal{T}}$
e "$\psi \to \varphi$" é $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$

(f) Quantificação limitada não altera classe de Lévy: portanto
Se "φ" $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$, temos que "$\forall x \in y : \varphi$" continua $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$,

(g) Se $\varphi(x)$ for $\Delta_n^{\mathcal{T}}$, então $\{x : \varphi(x)\}$ é $\Pi_n^{\mathcal{T}}$

(h) Se $\varphi(x)$ for $\Delta_n^{\mathcal{T}}$, então $\{x \in y : \varphi(x)\}$ é $\Delta_n^{\mathcal{T}}$

(i) Se x for um termo $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ e $\mathcal{T} \vdash \exists y : y = x$, então t é $\Delta_n^{\mathcal{T}}$

(j) Se $\varphi(x)$ e t forem $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ e $\mathcal{T} \vdash \exists y : y = t$, então todos são $\Delta_n^{\mathcal{T}}$:
- $\{x \in y : \varphi(x)\}$ é $\Delta_n^{\mathcal{T}}$
- $\exists x \in t : \varphi(x)$
- $\forall x \in t : \varphi(x)$

(k) Se φ e t forem $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$, então $\{t : \varphi\}$ é $\Delta_{n+1}^{\mathcal{T}}$

(l) Se ψ for Σ_1^{ZF} atendendo as hipóteses do teorema da recursão transfinita, então a fórmula da função recursiva é Δ_1^{ZF}.

Teorema: $V \vDash_f \varphi^A \Leftrightarrow A \vDash_f \varphi$.
As hipóteses são $f \in A^{<\omega}$, $A \subseteq V$ transitivo e $V \vDash \mathrm{ZF}$.

A prova é na complexidade de φ e vamos provar apenas para o conectivo $\wedge$ e $\neg$ e para o quantificador existêncial $\exists$. Para fórmulas atômicas, temos que, pelo fato de A ser estrutura transitivia, então Δ_0 são absolutas.

Suponha que para todo ψ de complexidade n ou menor vale o teorema, vamos provar o passo indutivo em três casos: Ou $\varphi \equiv \psi \wedge \sigma$; ou $\varphi \equiv \neg\psi$; ou $\varphi \equiv \exists x_i : \psi$, todas com ψ de complexidade n e σ mais simples.

No caso $\wedge$, temos:

$$V \vDash_f (\psi \wedge \sigma)^A \Leftrightarrow V \vDash_f \psi^A \wedge \sigma^A \Leftrightarrow (V \vDash_f \psi^A) \wedge (V \vDash_f \sigma^A) \Leftrightarrow (A \vDash_f \psi) \wedge V(\vDash_f \sigma) \Leftrightarrow A \vDash_f \psi \wedge \sigma$$

No caso $\neg$, temos:

$$V \vDash_f (\neg\psi)^A \Leftrightarrow V \vDash_f \neg(\psi)^A \Leftrightarrow \neg(V \vDash_f \psi^A) \Leftrightarrow \neg(A \vDash_f \psi) \Leftrightarrow A \vDash_f \neg\psi$$

No caso $\exists$, temos:

$$V \vDash_f (\exists x_i : \psi)^A \Leftrightarrow V \vDash_f \exists x_i \in A : \psi^A \Leftrightarrow V \vDash_f \exists x_i : x_i \in A \wedge \psi^A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \hat{x} \in V : (V \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} x_i \in A \wedge \psi^A) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in V : [(V \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} x_i \in A) \wedge (V \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi^A)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (V \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi^A) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (A \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi) \Leftrightarrow A \vDash_f \exists x_i : \psi$$

■

Isso nos dá a profundidade da relação das estruturas transitivas de ZF com um modelo base. Uma estrutura transitiva modela exatamente o que a sua estrutura ambiente crê que ela modela.

2.2 O Universo Construtível

Um modelo especial de ZF é o Universo Construtível, que satisfaz uma restrição adicional sobre sua estrutura fina. É um exemplo de modelo onde vale o axioma da escolha e a hipótese generalizada do contínuo, e gostaríamos de passar por ele justamente para contrapôr os modelos a valores Booleanos.

Chamamos o universo construtível de L, que é uma classe transitiva da hierarquia acumulada V. A definição de L dentro da língua depende de uma internalização da lógica e da teoria dos modelos transitivos. Mas, moralmente, queremos:

$$L_{\alpha+1} = \{x : \exists\varphi \text{ fórmula da teoria: } \exists\vec{p} \in L_{\alpha}^{<\omega} : x = \{t \in V_{\alpha} : \varphi(t;\vec{p})\}\}$$

$$(\lambda = \bigcup \lambda) \Rightarrow L_{\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_{\alpha}$$

Evidentemente, se "φ fórmula da teoria" não estiver formalizado *dentro* da teoria, não temos esperaça alguma desta definição fazer sentido. Pois, o primeiro passo que devemos tomar é achar uma Gödelização apropriada das fórmulas como *conjuntos* de fato.

Suponha que possuamos códigos para $\ulcorner\forall\urcorner$, $\ulcorner\exists\urcorner$, $\ulcorner = \urcorner$, $\ulcorner \in \urcorner$, $\ulcorner\neg\urcorner$, $\ulcorner \vee \urcorner$, $\ulcorner \wedge \urcorner$ e $\ulcorner\rightarrow\urcorner$. Então, definimos a codificação das fórmulas da seguinte maneira, similar a de [**Drake**]:

$$\begin{aligned}
\ulcorner \mathtt{Q}x_i : \varphi \urcorner &= \left\langle \ulcorner \mathtt{Q} \urcorner, i, \ulcorner \varphi \urcorner \right\rangle, \text{ onde } \mathtt{X} \text{ for um quantificador;} \\
\ulcorner x_i = x_j \urcorner &= \left\langle \ulcorner = \urcorner, i, j \right\rangle \\
\ulcorner x_i \in x_j \urcorner &= \left\langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \right\rangle \\
\ulcorner \neg\varphi \urcorner &= \left\langle \ulcorner \neg \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \right\rangle \\
\ulcorner \varphi \mathtt{X} \psi \urcorner &= \left\langle \ulcorner \mathtt{X} \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \right\rangle, \text{ onde } \mathtt{X} \text{ for um conectivo;}
\end{aligned}$$

Fixar códigos para os componentes simples não poderia ser mais fácil: temos apenas 8 deles, e $8 = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Não desejamos impor a nossa bijeção favorita, qualquer uma serve. Agora que temos uma especificação de como é uma "fórmula" internalizada, podemos escrever uma fórmula *de fato* que afirma que um dado *conjunto* é uma *representação* de um fórumla.

DEFINIÇÃO: **Construção de uma Fórmula**.

$$
\begin{aligned}
Repr(\varphi,\chi,n) \equiv & [n \in \omega] \wedge [Fun(\chi)] \wedge [Dom(\chi) = n+1] \wedge [\chi(n) = \varphi] \wedge \forall k \in n+1 : \{ \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \to \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \neg \urcorner, \chi(a), \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \vee \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \wedge \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, i \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \forall \urcorner, i, \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, i \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \exists \urcorner, i, \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists i, j \in \omega : [\chi(k) = \langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \rangle]] \vee \\
& [\exists i, j \in \omega : [\chi(k) = \langle \ulcorner = \urcorner, i, j \rangle]]\}
\end{aligned}
$$

* * *

Apesar de longa, *Repr* é bem simples: ela afirma que χ é testemunha da construção de φ em n passos. Fica claro que um determinado conjunto X é fórmula se e só se $\Phi(X) \equiv \exists n \in \omega : \exists \chi \in V_\omega : Repr(X, \chi, n)$. Vamos chamar $\Phi = \{t \in V_\omega : \Phi(t)\}$ e

$\Phi \restriction n = \{\varphi \in \Phi : \exists \chi \in V_\omega : Repr(\varphi, \chi, n) \wedge \forall m < n : \neg[\exists \chi \in V_\omega : Repr(\varphi, \chi, m)]\}$ o conjunto de fórmulas de complexidade n

Definição: **Satisfatibilidade Internalizada**.

$$
\begin{aligned}
Sat(A,\varphi,f) \equiv & \exists w : \exists \chi, n, r \in V_\omega : [Repr(\varphi,\chi,n) \wedge Fun(w) \wedge (Dom(w) = n+1) \wedge \\
& \wedge [r = rank(\varphi)] \wedge [f \in w(n)] \wedge \forall k \in n+1 : [\\
& [\exists i, j \in \omega : \chi(k) = \left\langle \ulcorner = \urcorner, i, j \right\rangle \wedge w(k) = \{f \in A^r : f(i) = f(j)\}] \vee \\
& \vee [\exists i, j \in \omega : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \right\rangle \wedge w(k) = \{f \in A^r : f(i) \in f(j)\}] \vee \\
& \vee [\exists a, b \in k : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \vee \urcorner, \chi(a), \chi(b) \right\rangle \wedge w(k) = w(a) \cup w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a, b \in k : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \wedge \urcorner, \chi(a), \chi(b) \right\rangle \wedge w(k) = w(a) \cap w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a, b \in k : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \rightarrow \urcorner, \chi(a), \chi(b) \right\rangle \wedge w(k) = (A^r - w(a)) \cup w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a, b \in k : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \neg \urcorner, \chi(a), \chi(a) \right\rangle \wedge w(k) = (A^r - w(a))] \vee \\
& \vee [\exists a \in k, i \in \omega : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \exists \urcorner, i, \chi(a) \right\rangle \wedge w(k) = \left\{ v \in A^r : \exists x \in A : v_{[i/x]} \in w(a) \right\}] \vee \\
& \vee [\exists a \in k, i \in \omega : \chi(k) = \left\langle \ulcorner \forall \urcorner, i, \chi(a) \right\rangle \wedge w(k) = \left\{ v \in A^r : \forall x \in A : v_{[i/x]} \in w(a) \right\}]]]
\end{aligned}
$$

Onde $v_{[i/x]} = v - \langle i, v(i) \rangle \cup \{\langle i, x \rangle\}$, ou seja, substituição do valor de v em i por x.

$Sat(A,\varphi,f)$ quer dizer, essencialmente, que existe uma sequência de conjuntos de testemunhas para a veracidade da fórmula e f é uma das testemunhas.

* * *

Lema: **Resultados sobre** Sat.

Se $f \in A^{<\omega}$, A estrutura transitiva e φ, ψ forem fórmulas.

$$Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \wedge Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner, f]$$

$$Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \vee Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner, f]$$

$$Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \rightarrow Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner, f]$$

$$\neg Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \neg \varphi \urcorner, f]$$

$$\exists \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner, f]$$

$$\forall \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \forall x_i : \varphi \urcorner, f]$$

Prova:

Para $\wedge$, suponha que Sat valha para φ e para ψ. Que existe a construção é trivial, para w, basta concatenar as w-s que existem e na última etapa interceptar a os últimos valores dos w-s. Por outro lado, se valer para $\varphi \wedge \psi$ então restringir as construções e w é praticamente trivial.

Para $\vee$, a ida é igual é a mesma, mas une-se ao invés de se interceptar. Para a volta, sabemos que f está em alguma etapa final das duas w que os Sats nos dão, assim sabemos que f estará na união, e portanto valerá $Sat(A, \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner, f)$.

Para $\rightarrow$, ao invés de se unir as etapas finais de testemunhas, unimos o complementar de uma com a outra. Para a volta, sabemos f ou não é testemunha φ, ou é testemunha de ψ, então fica claro que vale a volta.

Para $\neg$, se f não valida $Sat(A, \ulcorner \varphi \urcorner, f)$, então é porque f não está entre as testemunhas da última etapa de w. Isto é se e só se f estiver no complementar das testemunas que é se e somente se $Sat(A, \ulcorner \neg\varphi \urcorner, f)$.

Para o existencial, se existe um elemento de A que faz f estar na testemunhas, então pela definição de Sat temos que valerá o Sat de $\ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner$. E, adicionalmente, vale a volta. Similarmente vale o mesmo para o quantificador universal. $\blacksquare$

Teorema: $A \vDash_f \varphi \Leftrightarrow V \vDash Sat(A, \ulcorner \varphi \urcorner, f)$.

As hipóteses são: seja $A \subset V$ uma estrutura transitiva, e $V \vDash$ ZF, φ uma fórmula da língua de ZF e $f \in A^{<\omega}$. Novamente a prova é por indução na complexidade da fórmula. Novamente, o caso atômico é simples e, por isso, não o faremos aqui. Provaremos o caso da conjunção, negação e quantificador existêncial.

Prova:

Seja A uma estrutura transitiva e seja sempre f uma A-valoração das variáveis pertinententes. A prova é por indução na complexidade de φ. Para fórmulas atômicas temos que a igualdade e pertinência em A são só as restrições das relações à classe, então $V \vDash_f x = y$ exatamente quando $Sat(A, \ulcorner x = y \urcorner, f)$ e similarmente para $(x \in y)$.

Assim, assumamos que valha a bi-implicação para o caso de fórmulas de complexidade até n. Seja agora, ψ e σ fórmulas de complexidade até n.

Vamos provar a bi-implicação da etapa sucessora só para $\wedge, \neg, \exists$ pois é suficiente, afinal $\vDash$ é muito bem comportado. Para $\wedge$ temos:

$$A \vDash_f \psi \wedge \sigma \Leftrightarrow (A \vDash_f \psi) \wedge (A \vDash_f \sigma) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \psi \urcorner, f) \wedge Sat(A, \ulcorner \sigma \urcorner, f) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \psi \wedge \sigma \urcorner, f)$$

Para o caso de $\neg$,

$$A \vDash_f \neg\psi \Leftrightarrow \neg(A \vDash_f \psi) \Leftrightarrow \neg Sat(A, \ulcorner \psi \urcorner, f) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \neg\psi \urcorner, f)$$

E no caso do quantificador $\exists$,

$$A \vDash_f \exists x_i : \psi \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (A \vDash_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] \Leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner, f]$$

■

Com este teorema, temos uma correspondência muito forte entre: *O ambiente achar que uma susbtrutura transitiva modela algo*, a *substrutura transtitiva modelar algo* e a *codificação da noção interna de modelos de fórmulas Gödelizadas.*

Definição: **L**.

Com isso, temos o suficiente para expressar a classe dos Construtíveis,

$$L_{\alpha+1} = \left\{x : \exists\varphi : \exists r \in \omega : \exists f \in L_\alpha^r : x = \left\{t \in L_\alpha : Sat(A, \varphi, f_{[0/t]})\right\}\right\}$$

$$(\lambda = \bigcup \lambda) \to L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha$$

* * *

DEFINIÇÃO: **Rank Construtível**.

Seja $\rho_c(x) = \min\{\alpha \in Ord : x \in L_\alpha\}$, para todo x que ocorre em L este chamado Rank Construtível está definido. É claro que ρ_c é homomorfismo, isto é, preserva pertinência. Ainda não podemos dizer o que ele faz com ordinais, por exemplo.

* * *

O primeiro resultado importante sobre os Construtíveis é, claro, que L é modelo de ZF, que iremos verificar a seguir. Na sequência, iremos verificar que $L \vDash$ ZF $+ AC + CH$. Que é grande coisa.

LEMA: L **é transitivo**.

Basta ver que L_α é transitivo. Se $x \in L_{\alpha+1}$ então $\exists \varphi \in V_\omega \exists f \in L_\alpha^{<\omega} : x = \left\{t \in L_\alpha : Sat(A, \varphi, f_{[0/t]})\right\}$, oras então certamente $x \subseteq L_\alpha$. Similarmente, se λ for ordinal limite, L_λ será união de transitivos, e portanto transitivo. Unindo L_α para todos os os ordinais, temos uma classe transitiva.

LEMA: **Conjunto contido em** L **está contido em um membro de** L.

Seja $X \subset L$ um conjunto em V. Por substituição, o é conjunto $\{\alpha : \exists x \in X : \alpha = \rho_c(x)\}$. Como é conjunto de ordinais, ele possuí um supremo, que chamaremos de γ, então, por definição, todos os membros de x ocorrem em L_γ, assim, $X \subset L_\gamma \in L_{\gamma+1}$. Está provado.

LEMA: $L_\alpha \subseteq V_\alpha$.

É óbvio que $L_\emptyset = V_\emptyset$. Suponha, agora, que $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ vale para α. Pela definição $L_{\alpha+1} \subseteq \wp(L_\alpha)$, e $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$. Então

$$L_{\alpha+1} \subseteq \wp(L_\alpha) \subseteq \wp(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$$

E

TEOREMA: $L \vDash \mathrm{ZF} + GCH + AC + V = L$.

Provaremos que L modela: O axioma do Vazio; O axioma do Par; O axioma da União; Os axiomas da Substituição Enfraquecido; O axioma do Infinito; O axioma das Partes; O axioma da Fundação; O axioma da Extensionalidade; O Esquema de Separação. Então provaremos o Axioma da Escolha e depois a Hipótese Generalizada do Contínuo.

Prova:

Extensionalidade e Fundação Pelo fato que L é estrutura transitiva, temos, de graça, os axiomas de Extensionalidade e Fundação.

Axioma do Vazio

$$L \vDash \exists x : x = x \Leftrightarrow V \vDash (\exists x : x = x)^L \Leftrightarrow \exists x \in L : x = x \leftrightarrow L \neq \emptyset$$

É claramente o caso de L não ser vazio, pois L_1 não é vazio. Aqui entra com força os meta-teoremas que provamos sobre fórmulas relativizadas e $\vDash$.

Axioma do Par

Queremos

$$L \vDash \forall x : \forall y : \exists z : \forall t : t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)$$

Que será o caso exatamente quando

$$V \vDash \forall x \in L : \forall y \in L : \exists z \in L : \forall t \in L : t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)$$

Mas é claro que $V \vDash \mathrm{ZF}$, então vamos apenas provar a fórmula acima em ZF.

Sejam $x, y \in L_\alpha$ seja $z = \left\{t \in L_\alpha : Sat(L_\alpha, \ulcorner x_0 = x_1 \vee x_0 = x_2 \urcorner, f)\right\}$ onde $f = \left\{\left\langle \ulcorner x_0 \urcorner, t\right\rangle, \left\langle \ulcorner x_1 \urcorner, x\right\rangle, \left\langle \ulcorner x_2 \urcorner, y\right\rangle\right\}$, que, por razões óbvias, vamos abreviar como $[t, x, y]$ e continuaremos tratando valorações desta forma. Fica claro que com esta valoração z está em $L_{\alpha+1}$, e portanto em L. Não é difícil ver que z é de fato o par em L.

Axioma da Soma
Queremos

$$L \vDash \forall x \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow \exists t : t \in y \wedge z \in t$$

Deixe, $x \in L$, logo em $L_\alpha + 1$ para algum α. Deixe agora $\varphi \equiv \exists x_2 \in x_1 : x_0 \in x_2$, e

$$y = \left\{ t \in L_\alpha : Sat(L_\alpha, \ulcorner\varphi\urcorner, f_{[x_0/z, x_1/x]}) \right\}$$

Sabemos que $V \vDash_f y \in L$ e que $V \vDash_f \forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y$, então segue que $V \vDash_f (\forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y)^L$, pois o universal restringe-se e o existencial já está em L pois x está, e temos transitividade. Logo, $L \vDash_f \forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y$ que era o que queríamos: uma testemunha da validade do axioma para cada x dado.

Axioma das Partes
Queremos

$$L \vDash \forall x : \exists y : \forall z : (\forall t \in z \rightarrow t \in x) \rightarrow z \in y$$

Seja $x \in L$, e deixe $y = \left\{ z \in L : (z \subseteq x)^L \right\}$. Vemos que y é claramente um conjunto, resta verificar que ele está em L e teremos o que buscamos. Seja

$$\beta = \bigcup_{z \in y} \rho_c(z) + 1$$

Então sabemos que $y = \left\{ z \in L_\beta : (z \subseteq x)^L \right\}$, sabemos também que $\rho_c(x) < \beta$ afinal $x \in y$. Como $L_{\rho_c(x)} \subset L_\beta \subset L$, então uma é subestrutura transitiva da outra. Assim, $y = \left\{ z \in L_\beta : (z \subseteq x)^{L_\beta} \right\}$, que sabemos ser meta-equivalente a

$$y = \left\{ z \in L_\beta : Sat(L_\beta, \ulcorner x_0 \subseteq x_1 \urcorner, [z, x]) \right\}$$

Então $y \in L$, e então está provado.

Axioma Enfraquecido da Substituição
Queremos

$$L \vDash [\forall x, y, z : \psi(y, x) \wedge \psi(z, x) \rightarrow z = y] \rightarrow [\forall x : \exists X : \forall y : \exists t \in x : \psi(y, t) \rightarrow y \in X]$$

Suponha uma fórmula ψ nas condições do axioma. Deixe $p, x \in L$ e deixe $X = \left\{y \in L : (\exists t \in x : \psi(y, x; p))^L\right\}$, que sabemos existir. Como X é conjunto,

$$\alpha = \bigcup_{y \in X} \rho_c(y) \text{ é ordinal}$$

Segue que todos os y em X estão em L_α. E como L é transitivo, então $X = \left\{y \in L_\alpha : \exists t \in x : \psi^L(y, x)\right\}$. Oras, dado um $y \in L$, se existir um $t \in x$ para o qual $\psi^L(y, t)$ então necessariamente y está em L_α, pelo menos V pensa isso. Mas como V e L concordam sobre pertinência, $y \in L_\alpha$. Encontramos, pois, um conjunto onde vive a imagem de x pela ψ aos olhos de L.

Axioma da Separação

Queremos

$$L \vDash \forall x \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \psi(z)$$

Deixe então $x \in L$ e $y = \left\{z \in L : (z \in x \wedge \psi(z))^L\right\}$. Reduzindo, temos $y = \left\{z \in L : z \in x \wedge \psi^L(z))\right\}$, que, neste caso, nos dá: $y = \left\{z \in L_{\rho_c(x)} : z \in x \wedge \psi^L(z)\right\}$. Invocamos, agora, o primcípio da reflexão, que nos dará uma $\alpha > \rho_c(x)$ onde V_α reflete a situação de

1. $\psi^L(z)$
2. $\exists \delta : z \in L_\delta$.
3. $z \in L_\gamma$

Temos então que

1. $\forall x \in V_\alpha : \psi^L(x) \leftrightarrow \left(\psi^L\right)^{V_\alpha}(x)$
2. $\forall x \in V_\alpha : [\exists \delta : x \in L_\delta] \leftrightarrow [\exists \delta < \alpha : x \in (L_\delta)^{V_\alpha}]$
3. $\forall x \in V_\alpha : \forall \gamma < \alpha : [x \in L_\gamma] \leftrightarrow [x \in (L_\gamma)^{V_\alpha}]$

Em 1. podemos subsituír $\left(\psi^L\right)^{V_\alpha}$ por $\psi^{L \cap V_\alpha}$. Conclui-se, também, que $\forall x \in V_\alpha : x \in L \leftrightarrow \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta$.

O α dado deve ser ordinal limite, pois se $\zeta < \alpha$, então $\zeta \in L \cap V_\alpha$. Como $\forall \beta \in Ord : \rho_c(\beta) = \beta + 1$, então, $\zeta + 1 \in V_\alpha$. Então $L_\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} L_\delta$.

Então

$$[x \in L \cap V_\alpha] \leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta \in L_\delta] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta^{V_\alpha}] \leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [x \in V_\alpha \cap \bigcup_{\delta<\alpha} L_\delta] \leftrightarrow [x \in V_\alpha \cap L_\alpha] \leftrightarrow [x \in L_\alpha]$$

Assim, temos que:

$$y = \big\{z \in L : (z \in x \wedge \psi(z))^L\big\} = \big\{z \in L_\alpha : z \in x \wedge \psi^{L_\alpha}(z)\big\} =$$

$$\big\{z \in L_\alpha : Sat(L_\alpha, \ulcorner x_0 \in x_1 \wedge \psi(x_0)\urcorner, [z, x])\big\}$$

Assim, temos que $y \in L$, temos então o conjunto desejado. ∎

Lema: $x = L_\alpha$ **é** Δ_1^{ZF}.

Segue do fato de que a definição de L_α é por recursão em uma fórmula que é Δ_1^{ZF}. [**Drake**] faz isto com mais cuidado, mas a demonstração não agrega muito a nossa discussão.

Teorema: $L \vDash V = L$.

Como $x = L_\alpha$ é absoluto, e, similarmente, x_α também o é, se A é transitivo e modelo de ZF, por definição, temos $(x \in L)^A \leftrightarrow \exists \alpha \in A : x \in L_\alpha$. Se $Ord \subset A$ então $(x \in L)^A \leftrightarrow x \in L$, e assim, temos que se temos um modelo A de ZF com todos os ordinais, L é sub modelo menor ainda. Portanto L é o menor modelo transitivo de ZF contendo todos os ordinais.

Como L modela ZF e contém todos os ordianis, "por fora" constatamos que $L^L = L$, então $V \vDash \forall x \in L : x \in L^L$, mas sabemos que isso é $V \vDash (\forall x x \in L)^L$ e então sabemos que $L \vDash \forall x : x \in L$, que é justamente $L \vDash V = L$.

Lema: **Ordem Conveniente**.

Existe uma fórmula $\varphi(x, y)$ que é Σ_1 tal que:

1. ZF $\vdash BF(\varphi(x,y))$
2. ZF $\vdash \varphi(x,y)$ ordena totalmente L
3. φ é $\Delta_1^{\mathrm{ZF}+V=L}$

Onde $BF(\varphi(x,y))$ diz

$$\forall x : [\exists v : (x \neq \emptyset \to v \in x \wedge \forall y \in x : \neg\varphi(y,v)) \wedge \exists u : (x \subset u \wedge \forall a, b : [b \in u \wedge \varphi(a,b)] \to w \in u)]$$

Ou seja, todo conjunto tem um φ-minimal e a relação é sempre "*left-narrow*", ou "*set-like*".

A ordem é a lexicográfica, primeiro, dizemos que um construtível é menor que o outro já de pronto se o seu rank construtível for menor que o do outro.

Então nos focamos no caso que os dois conjuntos estão surgem no mesmo nível $\alpha + 1$. Como as fórmulas são bem ordenadas (e inclusive [**Drake**] dá uma ordem Δ_1^{ZF}) podemos dizer que um conjunto é menor que outro de mesmo que rank construtível que ele quando a fórmula mínima que define o primeiro é menor que a mínima que define o segundo.

No caso em que ambos os ranks e as fórmulas mínimas coincidem, então deve ser o caso que os parâmetros diferem entre si. No caso, se assumirmos que L_α pode ser bem ordenado, então segue que $L_\alpha^{<\omega}$ também pode ser – e com uma fórmula decente –. Neste caso, podemos dizer que dois conjuntos x, y de mesmo rank e fórmula minimal estão relacionados por φ quando o parâmetro de x for menor que o de y.

Teorema: $L \vDash AC$.

Todo L pode ser bem ordenado, mas L é transitivo, então certamente qualquer x pode ser bem ordenado. Então dado uma família não vazia $X \in L$ de conjuntos não vazios, considere $\{x \in \bigcup X : \exists y \in X : x = \min y\}$. Claramente existe, então está provado. ■

Para provar a Hipótese Generalizada do Contínuo, primeiro, notemos que $\forall\sigma \geq \omega : |L_\sigma| = |\sigma|$. Isto é feito indutivamente. Como $V_\omega = L_\omega$, e o primeiro é enumerável, para ω já temos. Então, para a etapa sucessora, adicionamos, no pior caso,

$$|\omega \times L_\sigma^{<\omega}| = \omega|\bigcup_{n<\omega} L_\sigma^n| = \omega \bigcup_{n<\omega} |L_\sigma^n| = \omega|\sigma| = |\sigma|$$

Para a etapa limite, simplesmente

$$|L_\lambda| = |\bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha| = \bigcup_{\alpha<\lambda} |L_\alpha| = \bigcup_{\alpha<\lambda} |\alpha| = |\lambda|$$

Teorema: $L \models GCH$.

[Faltando]

Capítulo 3

Álgebras, Filtros e Morfismos

A successful attempt to express logical propositions by symbols, the laws of whose combinations should be founded upon the laws of the mental processes which they represent, would, so far, be a step towards a philosophical language.

George Boole – The Mathematical Analysis of Logic. p.5

O cálculo proposicional está intimamente ligada com estruturas que chamamos de "Álgebras". Por esta razão, quando formos tratar de Modelos a Valores Booleanos, convém compreender o quê é uma álgebra booleana, e quais propriedades exigimos sobre esta a fim de fazer a construção.

Para tanto, vamos falar cursoriamente sobre ordens parciais, e um pouco de filtros, morfismos e congruências.

Capítulo 4

$V^{(B)}$

Queremos modelos diferentes de ZF a fim de encontrar exemplos de modelos com propriedades diferentes de L, por exemplo, onde não valha o Axioma da Escolha, ou a Hipótese do Contínuo.

Definição: $V^{(B)}$.
Seja B uma Álgebra Booleana Completa

$$V_\alpha^{(B)} = \left\{ f : \exists \beta < \alpha : \exists D \subseteq V_\beta^{(B)} : f \in D^B \right\}$$
$$V^{(B)} = \left\{ f : \exists \alpha : f \in V_\alpha^{(B)} \right\}$$

* * *

Esta classe que definimos acima é uma espécie de homogenização da ideia de função característica. No sentido de que a função χ leva um conjunto em um representante de determinada classe de funções: as funções características daquele conjunto. O que estamos fazendo em $V^{(B)}$ é criar um tipo estratificado que, cujos membros são funções dos membros anteriores em uma álgebra booleana completa dada.

A maneira de pensar sobre esta classe é que seus membros são representantes de objetos — que podem até não estar no modelo base — cujas propriedades queremos capturar. Cada representante decide *quanto* o representado por membros anteriores *pertence* ao conjunto que ele representa em um determinado modelo diferente.

Trivialmente $\alpha < \beta \leftrightarrow V_\alpha^{(B)} \subset V_\beta^{(B)}$

Definição: $Sat_{V^{(B)}}$.
Vamos emprestar a notação de Drake,

$$Sat(V^{(B)}, \varphi, f)$$

Passa a ser uma *função*:

$$Sat_{V^{(B)}} : \Phi \times V^{(B)^{<\omega}} \longrightarrow B$$

Definida por recursão na complexidade das fórmulas:

Se $B = \langle |B|, \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle$, então

$$\begin{aligned}
Sat(V^{(B)}, \ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner, f) &= Sat(V^{(B)}, \ulcorner\varphi\urcorner, f) \wedge Sat(V^{(B)}, \ulcorner\psi\urcorner, f)\\
Sat(V^{(B)}, \ulcorner\varphi \vee \psi\urcorner, f) &= Sat(V^{(B)}, \ulcorner\varphi\urcorner, f) \vee Sat(V^{(B)}, \ulcorner\psi\urcorner, f)\\
Sat(V^{(B)}, \ulcorner\varphi \to \psi\urcorner, f) &= \neg Sat(V^{(B)}, \ulcorner\varphi\urcorner, f) \vee Sat(V^{(B)}, \ulcorner\psi\urcorner, f)\\
Sat(V^{(B)}, \ulcorner\neg\psi\urcorner, f) &= \neg Sat(V^{(B)}, \ulcorner\psi\urcorner, f)\\
Sat(V^{(B)}, \ulcorner\forall x_i : \psi\urcorner, f) &= \bigwedge_{x \in V^{(B)}} Sat(V^{(B)}, \psi, f_{[x_i/x]})\\
Sat(V^{(B)}, \ulcorner\exists x_i : \psi\urcorner, f) &= \bigvee_{x \in V^{(B)}} Sat(V^{(B)}, \psi, f_{[x_i/x]})
\end{aligned}$$

Para as fórmulas atômicas temos um problema bem maior. O que tentávamos fazer acima era emular a definição de $\vDash$ para estruturas mas internamente. Entrentanto, como $V^{(B)}$ não é nem um pouco transitivo, a definição de $=$ e de $\in$ não pode ser a simples restrição das relações em V.

Queremos, como dissemos, representar objetos de um universo potencialmente diferente do universo base. Mas, veremos, há muitos representantes redundantes, a relação de igualdade e de pertinência devem como que quocientar estes representantes e simplesmente identificar coisas que reconhecemos como diferentes no nosso universo. De qualquer forma, define-se por recursão:

$$Sat(V^{(B)}, \ulcorner x \in y\urcorner, f) = \bigvee_{\hat{z} \in Dom(f[y])} (f[y])(\hat{z}) \wedge Sat(V^{(B)}, \ulcorner x = z\urcorner, f_{[z/\hat{z}]})$$

Onde $f[y]$ é o elemento valorado como y por f. Bom, ainda falta definir a igualdade, que usamos para definir pertinência.

$$\begin{aligned}
&Sat(V^{(B)}, \ulcorner x = y\urcorner, f) =\\
&\qquad \left[\bigwedge_{\hat{u} \in Dom(f[x])} (f[x])(\hat{u}) \to Sat(V^{(B)}, \ulcorner u \in y\urcorner, f_{[u/\hat{u}]})\right] \wedge\\
&\qquad \left[\bigwedge_{\hat{v} \in Dom(f[y])} (f[y])(\hat{v}) \to Sat(V^{(B)}, \ulcorner v \in x\urcorner, f_{[v/\hat{v}]})\right]
\end{aligned}$$

* * *

O complicado desta definição é a forma amarrada que ela se dá: a recursão acontece de maneira estranha, e precisamos mostrar que a relação da recursão é bem fundanda. [Bell] faz isto com algum detalhe, e, por ser apenas uma tecnicalidade e não ilustra nada da teoria em si, não reporduziremos a curta prova de que o que definimos acima é de fato função e existe, antes de qualquer outra coisa.

Em termos de discussão que podemos fazer nesta etapa, há alguns pontos particularmente interessantes: primeiramente, o motivo de exigirmos álgebras booleanas *completas* é que estes *sups* e *infs* precisam existir sempre.

Em segundo lugar, a definição de Sat, que funciona muito bem para fórmulas compostas, e faz mais ou menos o que se espera dela. Mas, nos casos de fórmulas atômicas, age de maneira estranha mas familiar:

Dois objetos de, digamos, "$V^{(B)}/\doteq$" são iguais quando seus representantes entram em uma sorte de acordo: $V^{(B)}$ acredita que se um representante diz que um outro objeto pertence ao seu cliente, então o objeto pertence ao cliente do outro. E *vice versa*. É fato que $V^{(2)}$ é essencialmente igual a V, assim, o que dá sabor a esta mistura é, realmente, B, que permite que coisas "mais ou menos" pertençam a outras, *etc.*

Uma discussão importante também é a dos morfismos de álgebras booleanas completas. Em parte por conta de propriedades futuras e importantes, mas também para nos familiarizarmos com a estrutura.

Proposição: **Morfismos de Álgebras induzem morfismos entre $V^{(B)}$s.**

Sejam A e B duas álgebras booleanas completas e seja

$$\omega : A \longrightarrow B$$

Um morfismo de álgebras booleanas que preserva *sups* arbitrários. Define-se indutivamente uma série de funções compatíveis Ω_α: Suponha que, dado um α

$$[F : \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(A)} \longrightarrow V^{(B)}] \wedge [F(x) = \varphi \circ x \circ F]$$

Então deixe

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha : & V_\alpha^{(A)} \longrightarrow V^{(B)} \\ & x \longmapsto \begin{cases} F(x), \text{ caso } \exists \beta < \alpha : x \in V_\beta^{(A)} \\ \omega \circ x \circ F, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Com Ω_α assim definido, podemos iterar partindo de $\emptyset$ — a função vazia — obtendo uma sequência Ω_α de funções. Elas vão ser, por construção, compatíveis, então consideramos a colagem:

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in Ord} \Omega_\alpha$$

Fica claro que ela é de $V^{(A)}$ em $V^{(B)}$. Veremos mais a diante que este mapa tem uma sorte de qualidades que dependem de quão decente é nosso morfismo ω. Ele se relaciona com a, agora familiar, Hierarquia de Lévy, submodelos, entre outras coisas.

Referências Bibliográficas

[**Bell**]
Bell, J. L. **Set Theory, Boolean-Valued Models and Independence Proofs**, Oxford logic Guides **v. 47**, Clarendon Press, 2005.

[**Drake**]
Drake, Frank R. **Set theory : an introduction to large cardinals**, Studies in logic and the foundations of mathematics **v. 76**, American Elsevier Pub. Co., 1974.

[**Freire**]
Freire, Rodrigo. A. **Grasping Sets Through Ordinals: On a Weak Form of the Constructibility Axiom**, *South American Journal of Logic* Vol. 2, n. 2, pp. 357-359, 2016. ISSN: 2446-6719.

[**Jech**]
Jech, T. **Set Theory: Third Millennium Edition, revised. and extended**, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.

[**Kunen**]
Kunen K. **Set Theory**, Studies in Logic **v. 34**, Lightning Source, Milton Keyne, UK.

[**Miraglia**]
Neto, F. Miraglia. **Cálculo Proposicional: Uma interação da Álgebra e da Lógica**, Coleção CLE – **v. 1**, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas — São Paulo, 1987.