

**Modelos a Valores Booleanos:**  
*Aplicações em Teoria dos Conjuntos*

IME - USP

Orientador: Prof. Hugo Luiz Mariano  
José Goudet Alvim

2017-19

### **Palavras-chave**

Reticulados; Álgebras de Heyting; Álgebras Booleanas; Teoria de Modelos; Valores booleanos de fórmulas; Independência; Forcing;

### **Resumo**

Neste trabalho de iniciação científica, estudaremos a teoria de modelos a valores booleanos de ZF, a fim de entender e produzir provas de consistência e independência na teoria de conjuntos. Para tanto, trataremos de álgebras de Boole; de Heyting; Filtros; Morfismos; Teoria de Modelos e Lógica.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Lógica de Primeira Ordem</b>	<b>4</b>
·	Def. Termos, Fórmulas e variáveis livres   escopadas	5
·	Def. Estrutura, Interpretação e Validação	6
·	Def. Sentença	9
·	Prp. Genericidade restrita de fórmulas:	9
·	Prp. Independência das interpretações irrelevantes:	10
·	Teo. Genericidade de sentenças para validação:	10
·	Def. Satisfatibilidade	10
·	Def. Consequência	11
·	Prp. Resultados sobre $\vdash$	13
·	Def. Teoria	18
·	Def. Teoria	18
·	Def. Consistência	19
1.1	Relativização	20
<b>2</b>	<b>Teoria de Modelos de Teorias de Conjuntos</b>	<b>21</b>
2.1	Estruturas Transitivas	24
·	Def. Identidade Induzida	24
·	Def. Estrutura Transitiva	24
·	Def. Subestrutura	24
·	Teo. Estrutura transitivas atendem fundação e extensionalidade	25
2.1.1	Incondicionalidade e Elementaridade	26
·	Def. Incondicionalidade	26
·	Def. Elementaridade	26
·	Prp. Condições suficientes para incondicionalidade	27
·	Def. Fórmulas Completas	27

· Teo. $\exists x : \varphi$ para completas e absolutas	28
· Teo. Quantificação limitada de fórmulas absolutas	29
· Def. Fórmulas preservadas por Extensão/Restrição	29
· Prp. Quantificação sobre absoluta é Restringível/Extendível	30
2.1.2 Hierarquia de Lévy	30
· Def. Fórmulas $\Sigma$ , $\Pi$ e $\Delta$	30
· Teo. Fórmulas $\Delta_1^T$ são $\mathcal{T}$ -absolutas	31
· Prp. $\Delta_0$ são absolutas	31
· Teo. Resultados acerca da Hierarquia de Lévy	32
· Teo. $V \models_f \varphi^A \Leftrightarrow A \models_f \varphi$	32
2.2 O Universo Construtível	33
· Def. Construção de uma Fórmula	34
· Def. Satisfatibilidade Internalizada	35
· Prp. Resultados sobre $Sat$	36
· Teo. $A \models_f \varphi \Leftrightarrow V \models Sat(A, \ulcorner \varphi \urcorner, f)$	37
· Def. $L$	38
· Def. Rank Construtível	39
· Prp. $L$ é transitivo	39
· Prp. Conjunto contido em $L$ está contido em um membro de $L$	39
· Prp. $L_\alpha \subseteq V_\alpha$	39
· Teo. $L \models ZF + GCH + AC + V = L$	40
· Prp. $x = L_\alpha$ é $\Delta_1^{ZF}$	43
· Teo. $L \models V = L$	43
· Prp. Ordem Conveniente	43
· Teo. $L \models AC$	44
· Teo. $L \models GCH$	45
<b>3 Álgebras, Filtros e Morfismos</b>	<b>46</b>
<b>4 Modelos a Valores Booleanos</b>	<b>48</b>
· Def. $M^{(B)}$	49
· Prp. $\prec$ é Bem Fundada	50
· Def. $B$ -medidas de igualdade e pertinência	52
· Prp. Propriedades das medidas de $M^{(B)}$	52

# Capítulo 1

## Lógica de Primeira Ordem

It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music [...] because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect and yet true.

---

*Bertrand Russell.*

Começamos com uma língua  $\mathcal{L}$  de primeira ordem, isto é, a coleção de palavras (bem-)formadas por um determinado conjunto de símbolos para variáveis; uma série de símbolos para relações,  $\langle R_1, R_2, \dots \rangle$ ; uma de funções,  $\langle F_1, F_2, \dots \rangle$  e uma de constantes  $\langle C_1, C_2, \dots \rangle$ ; conectivos e operadores lógicos e quantificadores.

**DEFINIÇÃO: Termos, Fórmulas e variáveis livres | escopadas.**

- (a) Se  $x_i$  for uma variável, então a palavra “ $x_i$ ” é um **termo** e a (única) ocorrência de  $x_i$  é dita **livre** no termo.
- (b) Se  $C_i$  for uma constante, então a palavra “ $C_i$ ” é um **termo**. Como ele não contém variável, não faz sentido tratar de ocorrências de variáveis livres ou escopadas.
- (c) Se  $\{t_1, \dots, t_k\}$  forem termos, e  $R_j$  é um relacional de aridade  $k$ , então a palavra “ $(R_j(t_1, \dots, t_k))$ ” é uma **fórmula**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.
- (d) Se  $\{t_1, \dots, t_k\}$  forem termos, e  $F_j$  é um relacional de aridade  $k$ , então a palavra “ $(F_j(t_1, \dots, t_k))$ ” é um **termo**. E cada ocorrência de cada variável presente nesta é dita livre nela exatamente quando for livre no termo em que ocorre e é dita escopada exatamente quando é escopada no termo que ocorre.
- (e) Se  $\varphi, \psi$  forem fórmulas e  $\diamond$  for um conectivo lógico, então as palavras: “ $(\varphi \diamond \psi)$ ” e “ $(\neg \varphi)$ ” são **fórmulas**, e ocorrências de variáveis são livres ou escopadas de acordo com sua liberdade ou limitação nas fórmulas componentes.
- (f) Se  $\varphi$  for uma fórmula, e  $x_i$  é uma variável, então as palavras: “ $\exists x_i : \varphi$ ” e “ $\forall x_i : \varphi$ ” são **fórmulas** e cada ocorrência de  $x_i$  é dita **escopada** — pois está no escopo de um quantificador —, e cada ocorrência de qualquer outra variável é livre ou escopada de acordo com sua situação em  $\varphi$ .

A língua é formada destes componentes, fórmulas e termos.

\* \* \*

Por legibilidade, por omitiremos parenteses quando possível, e intruduziremos abreviaturas para fórmulas, termos *etc.*

A ideia de uma língua é que ela *fale sobre* um determinado domínio. Quando escrevo, minhas palavras tratam de objetos de alguma sorte. Quando nomeio um objeto e predico sobre ele, por exemplo, existe uma interpretação da verdade do predicado no nosso universo.

Por exemplo, “*Eu tenho cinco dedos cada uma de minhas mãos*”, é uma sentença da língua portuguesa, cujo valor de verdade é dependente em quem é “*Eu*” e em suas propriedades. Poderia ser o caso que o autor *não* tivesse cinco dedos em cada uma de minhas mãos, então, a interpretação costumeira de quem é “*Eu*” falsearia a sentença.

Poderia ser o caso que o autor não tivesse *mão alguma*, mas neste caso a sentença seria verdade, pelo mesmo motivo que eu tenho uma lamborghini em cada uma das minhas mansões.

Tentando capturar a noção de interpretação das *palavras* para objetos concretos (que não pertencem à língua, mas a um mundo) — por exemplo “*Eu*” — e como, associando palavras a objetos e símbolos a relações, constantes, funções *etc.* temos como determinar a veracidade de uma proposição no mundo alvo, dada uma interpretação.

**DEFINIÇÃO: Estrutura, Interpretação e Validação.**

**Assinatura:** Uma **assinatura** é uma tripla de coleções: a das relações, cada qual com sua aridade; a das constantes; e, finalmente, a das funções, cada qual com sua aridade.

$$\Sigma = \langle \langle \mathbf{R}_1, \dots \rangle, \langle \mathbf{C}_1, \dots \rangle, \langle \mathbf{F}_1, \dots \rangle \rangle$$

Se cada relação ou função em uma assinatura  $\Sigma$  tiver domínio em uma coleção  $A$ , e cada constante estiver em  $A$ , então podemos dizer que  $\Sigma$  está definida sobre  $A$ .

**Estrutura:** Chamamos a dupla  $\langle A, \Sigma \rangle$  de  $A$  coleção e uma assinatura  $\Sigma$  definida sobre  $A$ , de  $\mathfrak{A}$ . E este tipo de objeto batizamos de **estrutura**. E dizemos  $A$  ser o domínio de  $\mathfrak{A}$ , que escrevemos  $|\mathfrak{A}|$ , e  $\Sigma$  ser assinatura de  $\mathfrak{A}$ , possivelmente  $sgn(\mathfrak{A})$ .

**Compatibilidade Estrutura-Língua:** Dada uma língua de primeira ordem  $\mathcal{L}$  e uma estrutura  $\mathfrak{A}$  dizemos elas serem compatíveis se e só se valem todas:

- (a) Se  $sgn(\mathfrak{A})$  tiver tantas relações quanto há relacionais na língua.
- (b) Se  $\mathbf{R}_i$  é a  $i$ -ésima relação da estrutura, então  $R_i$ , o  $i$ -ésimo símbolo relacional da língua, concorda com sua aridade.
- (c) Se  $sgn(\mathfrak{A})$  tiver tantas funções quanto há funcionais na língua.
- (d) Se  $\mathbf{F}_i$  é a  $i$ -ésima função da estrutura, então  $F_i$ , o  $i$ -ésimo símbolo funcional da língua, concorda com sua aridade.

**Interpretação:** Dizemos que uma  $f$  é uma interpretação de  $\mathcal{L}$  para  $\mathfrak{A}$  se e, só se:

- (a)  $\mathcal{L}$  e  $\mathfrak{A}$  são compatíveis.
- (b)  $f$  associa cada variável  $\lambda$  da língua para algum elemento  $f(\lambda)$  de  $|\mathfrak{A}|$ .
- (c)  $f$  leva cada símbolo relacional  $R_i$  na relação  $f[R_i] = \mathbf{R}_i$  da  $sgn(\mathfrak{A})$ .
- (d)  $f$  leva cada símbolo funcional  $F_i$  na função  $f[F_i] = \mathbf{F}_i$  da  $sgn(\mathfrak{A})$ .
- (e) Se  $x_1, \dots, x_k$  forem termos e  $F$  um funcional, então  $f(F(x_1, \dots, x_k)) = f[F](f(x_1), \dots, f(x_k))$ .
- (f)  $f$  leva cada símbolo de constante  $c$  em um membro  $f(c)$  de  $|\mathfrak{A}|$ .

Isto é, ter uma interpretação — ou melhor — *interpretar* um símbolo é dar significado a ele. Pois, leva-lo a um objeto, relação semântica entre objetos, função, etc.



Um exemplo de significação é imaginar que quando escrevo “*o autor*” em alguma sentença, pode-se *interpretar* como referente do símbolo o *autor deste texto*. Ficam, pois, definidas as propriedades do signo e, assim, este pedaço da sentença ganha significado.

Além disso, dada uma interpretação  $f$  de  $\mathcal{L}$  para  $\mathfrak{A}$ , uma variável ou constante  $x$  e um membro  $a$  de  $|\mathfrak{A}|$ , definimos  $f_{[x/a]}$  como sendo exatamente igual a  $f$  nas variáveis e constantes exceto em  $x$ , onde ela valerá  $a$ . Os outros valores de  $f$  — isto é, em termos diversos — induz-se das funções, constantes e variáveis.

Isto se comporta como mudar um pedaço da interpretação, por exemplo, a interpretação de “*o nome do autor tem a letra W*” muda radicalmente de acordo com quem é o autor, mesmo mantendo a interpretação da função “nome de X”. Não poderia “*autor*” denotar Ludwig Wittgenstein, que foi autor?

**Validação:** Definimos uma fórmula  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$  valer em  $\mathfrak{A}$  sob a interpretação  $f$  (estrutura compatível com a língua) — alternativamente, que  $\mathfrak{A}$  satisfaz  $\varphi$  —, ou simbolicamente,  $\mathfrak{A} \models_f \varphi$  por recorrência sobre sua complexidade.

(a) Se  $x_0, \dots, x_{\rho_i}$  forem termos quaisquer,  $R_i$  relacional de aridade  $\rho_i$ :

$$\varphi \equiv R_i(x_0, \dots, x_{\rho_i}) \Rightarrow [\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow f[R_i](f(x_0), \dots, f(x_{\rho_i}))]$$

(b) Se  $\sigma$  e  $\psi$  forem fórmulas,  $x$  uma variável:

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \sigma \wedge \psi &\Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_f \sigma \text{ e } \mathfrak{A} \models_f \psi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \sigma \vee \psi &\Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_f \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \models_f \psi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \neg \sigma &\Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi &\Leftrightarrow \text{não } \mathfrak{A} \models_f \sigma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \sigma \rightarrow \psi &\Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_f \neg \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \models_f \psi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi \equiv \forall x : \sigma \Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \text{para todo } a \text{ de } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \models_{f[x/a]} \varphi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi \equiv \exists x : \sigma \Rightarrow \\ [\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \text{existe algum } a \text{ de } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \models_{f[x/a]} \varphi]\end{aligned}$$

A motivação desta definição é a ideia que os fatos elementares, no caso as relações e funções entre os objetos, determinam todos os fatos “complexos”. Os quantificadores por sua vez, desempenham o papel de providenciar genericidade. Isto é, sem estes, a validade de uma fórmula é extremamente dependente da interpretação. Mas uma **sentença** — isto é, uma fórmula com todas as variáveis em algum escopo de quantificador —, de certa forma, não depende de uma interpretação.

\* \* \*

**DEFINIÇÃO: Sentença.**

Uma **sentença** de uma língua é uma fórmula em que todas as ocorrências de suas variáveis são escopadas.

\* \* \*

**LEMA: Genericidade restrita de fórmulas:.**

Se todas as ocorrências de uma variável  $x$  em uma dada fórmula  $\varphi$  estiverem escopadas, então para todo  $a$  no domínio de uma certa estrutura  $\mathfrak{A}$  compatível com a língua de  $\varphi$ ,  $\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_{f[x/a]} \varphi$ .

*Prova:*

Onde  $x$  aparecer, ela estará escopada, então *ja íamos* substituir o valor de  $f$  lá. Como a validade das fórmulas é dada por recorrência, e como tudo permanece o mesmo salvo em  $x$ , fica clara a ida, para a volta reaplica-se a inda. ■

**LEMA: Independência das interpretações irrelevantes:.**

Se  $x$  não ocorrer em *varphi* uma  $\mathcal{L}$ -fórmula com língua compatível com  $\mathfrak{A}$  estrutura, então para todo  $a$  em  $|\mathfrak{A}|$ ,  $\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_{f[x/a]} \varphi$ .

*Prova:*

Na definição de validação  $x$  não desempenha papel algum. ■

**TEOREMA: Genericidade de sentenças para validação:.**

Dadas uma língua e uma estrutura compatíveis. Se  $\varphi$  for uma sentença da língua, então a estrutura valida  $\varphi$  sob uma interpretação  $f$  se e somente se valida sob qualquer interpretação  $g$  que leva as relações, funções e constantes nas mesmas que leva  $f$ .

*Prova:*

A volta é trivial, se valida para qualquer que coincide com  $f$  em certa parte, valida para  $f$ , que de certo coincide com  $f$  nesta parte.

Por outro lado, todas as ocorrências de variáveis são escopadas, então, qualquer substituição de variáveis (presentes em  $\varphi$ ) na interpretação não altera a validade da sentença. Adicionalmente, qualquer substituição de variáveis irrelevantes não altera a validade. Pois, quaisquer substituições não alteram a validade. Logo, toda interpretação leva a mesma validação. ■

**DEFINIÇÃO: Satisfatibilidade.**

Finalmente, definiremos uma noção de satisfatibilidade ou validade que independe de *interpretação*.

Dadas  $\mathfrak{A}$  uma estrutura e  $\mathcal{L}$  uma língua compatíveis, e uma fórmula  $\varphi$  da língua.

Deixe  $\psi \equiv \forall x_1, \dots, \forall x_k : \varphi$  onde  $x_1, \dots, x_k$  são todas as variáveis em  $\varphi$  não escopadas,

$$\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda interpretação } f : \mathfrak{A} \models_f \psi]$$

Possivelmente, nenhuma variável será livre em  $\varphi$  neste caso,  $\psi$  coincidirá com  $\varphi$ .

No caso que  $\mathfrak{A} \models \varphi$  vale, dizemos que  $\mathfrak{A}$  satisfaz  $\varphi$  ou, alternativamente,  $\varphi$  é válida em  $\mathfrak{A}$ . Note que uma fórmula que não for sentença é válida só se por falta de contra exemplo.

No caso em que  $\mathfrak{A} \models \Sigma$ , com  $\Sigma$  uma coleção de fórmulas, dizemos que  $\mathfrak{A}$  **modela**  $\Sigma$ .

\* \* \*

O estudo das estruturas e as fórmulas que lá são satisfeitas é extremamente importante, afinal. De exemplos, um trivial é uma estrutura com (apenas) a relação identidade e uma língua com (apenas) o símbolo “=”, sendo assim, temos que

$$\langle A, Id \rangle^1 \models x = x$$

**Notação:** A partir deste ponto, não vamos explicitamente dizer que uma língua é compatível com uma estrutura quando tratamos delas. Nem diremos que uma  $\varphi$  é fórmula da língua, *etc.*

**DEFINIÇÃO: Consequência.**

Da mesma forma que definimos satisfatibilidade com a intenção de abstrair a noção de interpretação, queremos agora abstrair as relações da própria estrutura.

**Estruturas compatíveis** Duas estruturas são ditas compatíveis exatamente quando houver uma língua que é compatível com as duas, isto é as aridades de cada relação, função, número de constantes *etc.* coincidem.

---

<sup>1</sup>No caso, interprete que a dupla é uma estrutura com apenas relações, nesta instância  $Id$  e domínio  $A$ .

Duas estruturas compatíveis podem satisfazer fórmulas radicalmente diferentes, por exemplo, a estrutura que tomamos acima e uma outra estrutura com apenas a relação “ $x(Nq)y \Leftrightarrow x \neq y$ ”. Se  $\mathcal{L}$  for a língua com apenas um símbolo relacional  $R$ , fica claro que  $\langle A, Id \rangle \models x = x$  e  $\langle B, Nq \rangle \not\models x = x$ . Queremos, pois, uma noção que não dependa tanto da estrutura fina do universo interpretativo.

**Consequência:** Dizemos que  $\varphi$  segue, ou é consequência, de  $\psi$ , ou simbolicamente,

$$\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow [\text{Para toda } \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi]$$

Note a semelhança com a definição de satisfatibilidade sem interpretação. Novamente, a quantificação universal faz o trabalho de generalizar o conceito em certa direção.

Extendemos a definição para conjuntos de fórmulas dos dois lados,

$$\Gamma \vdash \Sigma$$

Da maneira natural de fazer, isto é, para cada  $\varphi$  em  $\Sigma$ ,  $\Gamma \vdash \varphi$ , e por isso, queremos dizer:

$$[\text{Para toda } \mathfrak{A} : (\text{para toda } \gamma \text{ em } \Gamma : \mathfrak{A} \models \gamma) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi]$$

Finalmente, se  $\emptyset \vdash \varphi$ , escrevemos  $\vdash \varphi$ .

\* \* \*

A interpretação da definição é que algumas fórmulas são genéricas sobre uma certa sorte de estrutura, por exemplo, considere a fórmula  $\varphi \equiv xRx \rightarrow xRx$ . Não importa *quem* seja  $x$ , nem quais sejam suas relações com quaisquer outros membros de seu universo.  $\varphi$  é *sempre* verdade.

Considere um outro exemplo menos formal do mesmo princípio: Seja  $\psi =$  “*Todos os cavalos são animais*” e  $\varphi =$  “*todas as cabeças de cavalo são cabeças de animais*” então  $\psi \vdash \varphi$  é válida. Isso não depende de se existem cavalos, o quê são cavalos,

o quê são cabeças, se cavalos tem quatro patas, se cavalos tem cabeças, se cavalos são uma cor *etc.* E isso não é jogo de palavras:

$$\psi \equiv \forall x : E(x, x) \rightarrow A(x, x)$$

$$\varphi \equiv \forall c : (\exists a : E(a, a) \wedge C(c, a)) \rightarrow \exists b : A(a, a) \wedge C(c, b)$$

Que podemos ler “ $\varphi$ : para todo objeto, se este for um Equino, ele é um Animal” e “ $\psi$ : para todo objeto, se existe um outro que é Equino e tem como Cabeça este, então existe um terceiro que é Animal e tem como Cabeça o primeiro”.

**PROPOSIÇÃO: Resultados sobre  $\vdash$ .**

- a)  $\varphi \vdash \varphi$ ,
- b)  $\Gamma \vdash \varphi$  e  $\Gamma \subseteq \Lambda \Rightarrow \Lambda \vdash \varphi$ ,
- c)  $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ ,
- d)  $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ ,
- e)  $\varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$ ,
- f)  $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ ,
- g)  $\varphi \vdash \neg \neg \varphi$ ,
- h)  $\neg \neg \varphi \vdash \varphi$ ,
- i)  $\varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ,
- j)  $\forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$ ,
- k)  $\forall x : \varphi \vdash \neg \exists x : \neg \varphi$ ,
- l)  $\neg \exists x : \neg \varphi \vdash \forall x : \varphi$ ,
- m)  $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \{\forall x : \varphi, \exists x : \varphi\}$ ,
- n)  $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$ ,

o)  $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ .

*Prova:*

a)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi} \\ \varphi \vdash \varphi$$

b)

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi} \quad \frac{\frac{\Gamma \subseteq \Lambda \quad \frac{\mathfrak{A} \models \Lambda}{\lambda \in \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \lambda}}{\gamma \in \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \gamma}}{\mathfrak{A} \models \Gamma}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$

$\therefore \mathfrak{A} \models \Lambda \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$

Assim,  $\Lambda \vdash \varphi$

c)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi}$$

$\therefore \varphi \vdash \varphi \vee \psi$

d)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \models \varphi} \quad \frac{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}{\mathfrak{A} \models \psi}}{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \models \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi}}$$

$$\therefore \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

e)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ e } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \{\varphi, \psi\}}$$

$$\therefore \varphi \wedge \psi \vdash \{\varphi, \psi\}$$

f)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \emptyset \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi}{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \neg \varphi}$$

$$\therefore \emptyset \vdash \varphi \vee \neg \varphi$$

g)

$$\frac{\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \varphi}{\text{N\~ao-n\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \neg \varphi}}{\mathfrak{A} \models \neg \neg \varphi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \neg \neg \varphi$$

h)

$$\frac{\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \neg \neg \varphi}{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \neg \varphi}}{\text{N\~ao-n\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi}}{\mathfrak{A} \models \varphi}$$



$$\therefore \neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

i)

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \vdash \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi}}{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\frac{\mathfrak{A} \models \neg\varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}{\mathfrak{A} \models \neg\varphi \vee \psi} \quad \mathfrak{A} \models \emptyset}}{\frac{\mathfrak{A} \models \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi}}$$

$$\frac{\frac{\frac{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\mathfrak{A} \models \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}}{\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}}{\frac{\text{N\~ao } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi}}{\varphi \vdash \psi}$$

$$\therefore \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

j)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ de } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \models_{f[x/\hat{x}]} \varphi} \quad \frac{|\mathfrak{A}| \neq \emptyset}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|}}{\frac{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \models_{f[x/\hat{x}]} \varphi}{\mathfrak{A} \models \exists x : \varphi}}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \exists x : \varphi$$

k)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \forall x : \varphi}{\text{Para todo } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \models \varphi} \quad \frac{\mathfrak{A} \models \exists x : \neg\varphi}{\text{Existe } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A}_{f[x/\hat{x}]} \models \neg\varphi}}{\perp}$$

$$\therefore \forall x : \varphi \vdash \neg \exists x : \neg \varphi$$

l)

$$\therefore \exists x : \neg \varphi \vdash \neg \forall x : \varphi$$

m) Se  $x$  não ocorre em  $\varphi$ , então é trivial. Se  $x$  ocorre em  $\varphi$ , lembramos que é uma sentença, então  $x$  sempre ocorre quantificado em  $\varphi$ . Então  $\models$  vai ignorar os quantificadores em “ $\forall x : \phi$ ” e “ $\exists x : \phi$ ”.

n)

$$\frac{\mathfrak{A} \models \varphi \quad \frac{\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi}{\mathfrak{A} \not\models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \psi}$$

$$\therefore \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$$

o)

$$\frac{\frac{\mathfrak{A} \models \neg \varphi}{\text{Não } \mathfrak{A} \models \varphi} \quad \frac{\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi}{\mathfrak{A} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{A} \models \psi}}{\mathfrak{A} \models \psi}$$

$$\therefore \{\varphi \vee \psi, \neg \varphi\} \vdash \psi$$

■

O que estes resultados primários nos dizem é que, se tivermos uma prova formal (em um sistema dedutivo razoável) — partindo de hipóteses  $\Gamma$  — de uma coleção  $\Phi$  de sentenças, então temos garantido que  $\Gamma \vdash \Phi$ . Isto é importante porque temos que, de certa forma,  $\vdash$  respeita a dedução lógica: se achamos que  $\Gamma$  consegue provar  $\Phi$ , então de fato onde vale  $\Gamma$ , vale  $\Phi$ .

A recíproca, *que toda sentença consequente de  $\Gamma$  é provável por hipóteses de  $\Gamma$* , requer um trato cuidadoso com sistemas dedutíveis, definição de prova, *etc.* Mas é resultado conhecido que se  $\Gamma \vdash \varphi$ , então *prova-se*  $\varphi$  com hipóteses de  $\Gamma$ . Claro, dado um sistema dedutivo dentro de certas hipóteses.

**DEFINIÇÃO: Teoria.**

Dada uma língua, um subconjunto de sentenças  $\mathcal{T}$  é dito uma teoria quando ele é não-vazio e  $\vdash$ -fechado. Isto é, se  $\mathcal{T} \vdash \tau$  então  $\tau$  já estava em  $\mathcal{T}$ . Ou seja, é uma coleção de sentenças que contém todas as suas consequências sintáticas.

\* \* \*

Tomemos agora um momento para tratar de **Teorias**.

**DEFINIÇÃO: Teoria.**

Dada uma língua  $\mathcal{L}$ , um conjunto de sentenças  $\mathcal{S}$  é dito uma teoria dentro desta exatamente quando ele for fechado por  $\vdash$ , em outras palavras

Para qualquer  $\tau$  em  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{T} \vdash \tau \Rightarrow \tau$  já estava em  $\mathcal{T}$

\* \* \*

Dada uma língua  $\mathcal{L}$ , e um conjunto de sentenças não-vazio desta que batizamos “axiomas”  $\mathcal{A}$ , dizemos que um conjunto de sentenças  $\mathcal{T}$  é a teoria de  $\mathcal{A}$  exatamente quando para toda  $\tau$  de  $\mathcal{T}$ , temos  $\mathcal{A} \vdash \tau$ , que podemos abreviar para  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ .

O fato de que, para um conjunto de axiomas conforme acima,  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$  é teoria verifica-se por:

*Prova:*

$$\begin{array}{c}
\frac{\mathcal{T}_A \vdash \tau}{\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_A \Rightarrow \mathfrak{A} \models \tau} \quad \frac{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_A}{\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_A \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{A}} \quad \frac{\text{para cada } \sigma \text{ em } \mathcal{T}_A}{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_A} \\
\hline
\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_A \\
\hline
\frac{\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \tau}{\mathcal{A} \vdash \tau} \\
\hline
\tau \text{ está em } \mathcal{T}_A
\end{array}$$

■

Obviamente, toda  $\mathcal{T}$  teoria é da forma  $\mathcal{T}_A$  para algum conjunto de axiomas conveniente (por exemplo a própria  $\mathcal{T}$ ).

**DEFINIÇÃO: Consistência.**

Dizemos que uma teoria  $\mathcal{T}$  sobre uma língua  $\mathcal{L}$  é consistente se e só se ela é não trivial, isto é, existe uma  $\mathcal{L}$ -sentença  $\varphi$  que não está em  $\mathcal{T}$ .

\* \* \*

A motivação da definição de consistência é evitar contradições:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg\varphi \wedge \varphi \text{ em } \mathcal{T}}{\neg\varphi \text{ em } \mathcal{T}} \quad \frac{\neg\varphi \wedge \varphi \text{ em } \mathcal{T}}{\varphi \text{ em } \mathcal{T}} \quad \psi \text{ em } \mathcal{L} \text{ sentença} \\
\hline
\varphi \vee \psi \text{ em } \mathcal{T} \\
\hline
\psi \text{ em } \mathcal{T}
\end{array}$$

Se a teoria não for trivial, então ela não pode ser contraditória. Se ela *for* trivial, ela obviamente é.

Uma estrutura que modela uma teoria passa a ocupar um lugar especial em nossos estudos, afinal, uma teoria pretende descrever exhaustivamente as propriedades *a priori* de uma estrutura compatível através de uma manipulação que é puramente sintática, pois não temos acesso à estrutura específica quando tratamos de uma teoria (afinal, definimos ela com  $\vdash$  e não  $\models$ ).

## 1.1 Relativização

Um último tema, agora já tratando da linguagem de ZF, é o tema da relativização de fórmulas. Uma  $\varphi$  fórmula com quantificadores e sem termos de abstração tem uma *restrição* a um determinado termo  $X$ , escrevemos  $\varphi^X$  para a fórmula  $\varphi$  com todos os quantificadores limitados por  $X$ .

Então  $\forall x : \exists y : y = P(x)$  torna-se  $\forall x \in X : \exists y \in X : y = P(x)$ . Por enquanto isso parece um tanto artificial, mas é interessante observar como fórmulas se comportam em domínios específicos da teoria.

Um resultado importante é o Princípio da Reflexão, que vale em ZF e diz que existem alturas arbitrariamente altas da hierarquia cumulativa tal que, para uma dada  $\varphi$ ,  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X : \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)^{V_\kappa}$

## Capítulo 2

# Teoria de Modelos de Teorias de Conjuntos

A teoria dos modelos das teorias de conjuntos está relacionada com, por um lado, estudo de grandes cardinais e seus ramos, e, por outro, lógica e teoria de conjuntos em si.

Isto pois, para uma certa classe de teorias de primeira ordem expressivas o suficiente, existem sentenças que são independentes da teoria, e é o caso que as teorias de conjuntos estão justamente entre incompletas.

No campo da teoria, isto nos diz que a uma teoria de conjuntos é, de certa forma, agnóstica a respeito de certas proposições. Por exemplo, é necessário que não se possa provar a existência de cardinais excessivamente grandes, isto porque se um cardinal for  $\beth$ -fixo, a hierarquia cumulativa até o mesmo é um modelo da teoria de conjuntos.

Dado um modelo de, digamos ZF pode muito bem ser o caso que haja cardinais inacessíveis no mesmo, mas sem informações adicionais, é impossível provar que existem — se a teoria for consistente, que esperamos ser —.

No campo prático temos ainda traços do abalo deste quarto golpe narcísico que tomou a humanidade com os resultados de K. Gödel, da mesma forma que em um dado modelo de ZF possa valer ou não valer  $\varphi$ , pode ser que problemas importantes ou interessante sejam, simplesmente, independentes da teoria sem que saibamos. É este justamente o caso da hipótese do contínuo, que novamente mostra a capacidade de  $\mathbb{R}$  de apresentar-se como a besta que de fato é.

A hipótese do contínuo não é *um pouco* independente, por sinal. Como enunciou Robert M. Solovay: “ $2^{\aleph_0}$  can be anything it ought to be”<sup>1</sup>. Dizendo que  $\mathfrak{c}$  pode ser (e é em algum modelo)  $\aleph_\beta$  para um  $\beta$  sucessor ou de cofinalidade incontável. A hipótese do contínuo é “tão” independente que  $\mathfrak{c}$  pode, inclusive, ser fracamente inacessível.

---

<sup>1</sup>The Theory of Models, Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. Amsterdam, North-Holland, 1965, Addison, Henkin, Tarski, eds., pg. 435.

Provar a independência de uma proposição pode ser feita tanto sintaticamente, ou semanticamente. Enquanto a maneira sintática é mais econômica ontologicamente falando, a semantica é mais acessível à mente, por mais que devamos tomar cuidado para não cairmos em confusões linguísticas.

Empregaremos uma abordagem principalmente semantica para tratar de ZF, e por isso que surge a necessidade da teoria dos modelos. Porém, para tratar de ZF, vamos primeiro definir qual teoria de fato falamos.

A língua de nossa teoria é relativamente simples, é a lingua com dois<sup>2</sup> símbolos relacionais  $\langle =, \in \rangle$  apenas. Já a teoria é a gerada por esses 7 axiomas e o Esquema de Substituição, que nos dá um axioma para cada fórmula conforme.

1. Ax. da Identidade:

$$\forall x : [\exists! y : x = y] \wedge x = x.$$

2. Ax. Extensionalidade:

$$\forall x : \forall y : [\forall z : z \in x \leftrightarrow z \in y] \leftrightarrow x = y.$$

3. Ax. da União:

$$\forall x : \exists y : \forall z : [z \in y \leftrightarrow \exists w \in x : z \in w].$$

4. Ax. da Potência:

$$\forall x : \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow [\forall w : w \in z \leftrightarrow w \in x].$$

5. Ax. Esquema da Substituição:

Se  $\varphi$  uma fórmula com apenas  $a, b, \vec{v}$  livres e  $c, w, x, y, z$  não ocorrendo em  $\varphi$ . Então:

$$\begin{aligned} [\forall \vec{v} : \forall a : [\exists b : \varphi(a, b; \vec{v})] \leftrightarrow [\exists! b : \varphi(a, b; \vec{v})]] \rightarrow \\ \rightarrow [\forall x : \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow \exists w : w \in x \wedge \varphi(w, z; \vec{v})] \end{aligned}$$

6. Ax. do Conjunto Indutivo:

$$\begin{aligned} \exists I : \exists x : x \in I \wedge (\forall t : t \in x \leftrightarrow t \neq t) \\ \wedge [(\exists w : w \in I) \rightarrow \exists z : z \in I \wedge \forall t' : t' \in z \leftrightarrow t' = w \vee t' \in w]. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Poderíamos fazer apenas com  $\in$ , mas não é necessário.



7. Ax. da Fundação:

$$\forall x : (\exists x' : x' \in x) \rightarrow \exists y : (y \in x) \wedge [\forall t : (t \in x \wedge t \in y) \rightarrow t \neq t].$$

## 2.1 Estruturas Transitivas

DEFINIÇÃO: **Identidade Induzida.**

Se tivermos uma relação  $R$  definida sobre uma classe  $A$ , gostaríamos de ter uma relação de equivalência em  $A$  que fosse congruente com  $R$ , definimos  $\approx_R$  como sendo

$$a \approx_R b \Leftrightarrow \forall t \in A : tRa \leftrightarrow tRb$$

Restrito ao domínio adequado.

Isto é, em  $A$ , dois identificados são idênticos à esquerda.

\* \* \*

DEFINIÇÃO: **Estrutura Transitiva.**

Uma estrutura  $\mathfrak{A} = \langle A, \approx, \epsilon \rangle$  é dita uma **estrutura transitiva** exatamente quando  $\epsilon = \{ \langle a, b \rangle : a, b \in A \wedge a \in b \}$ ,  $\approx = \approx_\epsilon$  e  $A$  é uma classe transitiva.

\* \* \*

DEFINIÇÃO: **Subestrutura.**

Dadas duas estruturas compatíveis  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  dizemos que  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  — que  $\mathfrak{A}$  é subestrutura de  $\mathfrak{B}$  — exatamente quando  $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ , as relações e funções de  $\mathfrak{A}$  são as restrições das de  $\mathfrak{B}$  e as constantes de  $\mathfrak{B}$  são as mesmas que as de  $\mathfrak{A}$ .

\* \* \*

**TEOREMA: Estruturas transitivas atendem fundação e extensionalidade.**

Se  $\mathfrak{A} = \langle A, \approx, \epsilon \rangle$  for uma estrutura transitiva, então,

- a)  $\mathfrak{A} \models \text{Ax. da Fundação}$
- b)  $\mathfrak{A} \models \text{Ax. da Extensionalidade}$

*Prova:*

- a) Seja  $x \in A$ , com tal que  $\exists y \in A : y \in x$ , isso significa que  $\exists y : y \in x$ , assim, pelo axioma da fundação,  $\exists y \in x : \forall t : [t \in x \wedge t \in y] \rightarrow t \neq t$ . Como  $A$  é transitivo, temos que este  $y$  existe *em*  $A$ , então  $\exists y \in x : \forall t : [t \in x \wedge t \in y] \rightarrow t \neq t$ .

Por outro lado, temos que  $\forall a, b \in A : a \approx b \leftrightarrow a = b$ , pois, para a ida<sup>3</sup>: Como  $A$  é transitivo, então  $a, b \subset A$ . Assim, se os membros de  $a$  em  $A$  forem exatamente os de  $b$  em  $A$ , então os membros de  $a$  são os mesmos que os de  $b$ , e por extensionalidade, são iguais. Assim, temos  $\exists y \in x : \forall t : [t \in x \wedge t \in y] \rightarrow t \neq t$ , que é a tradução da fundação para a estrutura  $\mathfrak{A}$ .

- b) Se  $a, b \in A$  então todos os membros *deste* estão em  $A$  também. Se os membros de  $a$  e  $b$  que estão dentro de  $A$  coincidem, então os fora de  $A$  coincidem e temos a extensionalidade. Assim, eles são iguais ( $=$ ), mas se são iguais, como vimos, também são iguais ( $\approx$ ). Vale então a extensionalidade. ■

Neste teorema aparece insinuada uma propriedade de certas fórmulas que chamamos de Incondicionalidade, ou *Absoluteness*.

---

<sup>3</sup>a volta é trivial

### 2.1.1 Incondicionalidade e Elementaridade

DEFINIÇÃO: **Incondicionalidade.**

Sejam  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  estruturas transitivas.

Uma fórmula  $\varphi$  da língua de ZF é dita **absoluta** ou **incondicional** entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  exatamente quando, para toda  $f$  interpretação das variáveis da língua em  $\mathfrak{A}$ .

$$\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi$$

Um termo  $t$  da língua é dito **absoluta entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$**  exatamente quando, para toda  $f$  interpretação das variáveis da língua em  $\mathfrak{A}$ .

$$\mathfrak{A} \models_f x = t \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f x = t$$

Dizemos ainda que uma fórmula é preservada sob restrição de  $\mathfrak{B}$  para  $\mathfrak{A}$  quando a implicação da direita para esquerda vale. E Dizemos que uma fórmula é preservada sob extensão de  $\mathfrak{A}$  para  $\mathfrak{B}$  quando a implicação da esquerda para a direita vale.

\* \* \*

DEFINIÇÃO: **Elementaridade.**

Dadas  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  estruturas compatíveis Dizemos  $\mathfrak{A}$  ser subestrutura elementar de  $\mathfrak{B}$ , ou que  $\mathfrak{B}$  é extensão elementar de  $\mathfrak{A}$ , exatamente quando toda fórmula é absoluta entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ .

\* \* \*

Fórmulas absolutas, pois, formam uma classe de fórmulas muito útil para o trato de modelos, já que seus significados não mudam quando as extendemos ou as restringimos. Que estas fórmulas não são todas as que existem é simple de ver: Deixe  $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2\}, \leq \rangle$  e  $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3\}, \leq \rangle$  É trivial ver que  $\forall x, y, z : (x \neq y) \rightarrow z = x \vee z = y$  não é absoluta entre as estruturas.

No entanto, a situação não é tão ruim assim, por mais que tamanho não seja absoluto entre estruturas, temos critérios para gerar fórmulas absolutas:

**PROPOSIÇÃO: Condições suficientes para incondicionalidade.**

- a) fórmulas atômicas são absolutas.
- b) conjunção, disjunção e negação de absolutas é a absoluta.

*Prova:*

- a) Como uma é subestrutura da outra, então as relações são as restrições. Como a fórmula é atômica, e a interpretação é em na subestrutura, então vai ser verdade em numa estrutura exatamente quando for na outra.
- b) Segue da definição de satisfação.

**DEFINIÇÃO: Fórmulas Completas.**

Uma fórmula  $\varphi(x; \vec{v})$  é dita **completa** em  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  com respeito a  $x$  exatamente quando é o caso que:

Se  $\hat{x} \in |\mathfrak{B}|$  e  $\vec{u}$  forem parâmetros em  $|\mathfrak{A}|$ , então  $\mathfrak{B} \models \varphi(\hat{x}, \vec{u}) \Rightarrow b \in |\mathfrak{A}|$ . Sendo que com “ $\mathfrak{B} \models \varphi(\hat{x}, \vec{u})$ ” queremos dizer “ $\mathfrak{B} \models_{f_{[x/\hat{x}, \vec{v}/\vec{u}]}} \varphi(\hat{x}, \vec{u})$ ” pois  $\varphi$  só tem os parâmetros e  $x$  livres.

Uma fórmula completa em relação a uma par estrutura-subestrutura e um variável é de tal forma que se não for verdade em baixo, não é por falta de testemunha. Da mesma forma que se uma sequência em  $\mathbb{R}$  não converge, não é porque está faltando o ponto de convergência, como poderia ser o caso em  $\mathbb{Q}$ .

\* \* \*

TEOREMA:  $\exists x : \varphi$  **para completas e absolutas.**

Seja  $\varphi(x; \vec{v})$  absoluta entre  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  transitivas, e completa para  $x$  entre as mesmas estruturas. Nestas condições,  $\exists x : \varphi(x, \vec{v})$  é absoluta entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ .

*Prova:*

Primeiro, temos que:

- a)  $\mathfrak{A} \models_f \varphi(x; \vec{v}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi(x; \vec{v})$ .
- b)  $[(\vec{u} \subseteq |\mathfrak{A}|) \wedge (b \in |\mathfrak{B}|)] \Rightarrow [\mathfrak{B} \models_f \varphi(b; \vec{u}) \Rightarrow b \in |\mathfrak{A}|]$ .

( $\Rightarrow$ ) Então considere:

$$\frac{\frac{\frac{\mathfrak{A} \models_f \exists x : \varphi(x, \vec{v})}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \models_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x, \vec{v})}}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \models_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x, \vec{v})}}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{B} \models_{f_{[x/\hat{x}]}} \varphi(x, \vec{v})}}{\mathfrak{B} \models_f \exists x : \varphi(x, \vec{v})}$$

( $\Leftarrow$ ) Por outro lado, tome que

$$\frac{\frac{\frac{\mathfrak{B} \models_f \exists x : \varphi(x, \vec{v})}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tal que: } \mathfrak{B} \models_{f_{[x/\hat{x}]} \varphi(x, \vec{v})}}}{\text{Existe um } \hat{x} \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tal que: } \mathfrak{A} \models_{f_{[x/\hat{x}]} \varphi(x, \vec{v})}}}{\mathfrak{A} \models_f \exists x : \varphi(x, \vec{v})} \quad \frac{f \text{ é uma } \mathfrak{A}\text{-valoração de variáveis}}{f[\vec{v}] \subseteq |\mathfrak{A}|}$$

Assim, fica provado o teorema. ■

**TEOREMA: Quantificação limitada de fórmulas absolutas.**

Seja  $\varphi$  absoluta entre  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  estruturas transitivas, então  $\exists x \in y : \varphi(x)$  e  $\forall x \in y : \varphi(x)$  são ambas absolutas, quando  $y$  não ocorre em  $x$ .

*Prova:*

Primeiro,  $\exists x \in y : \varphi(x) \equiv \exists x : x \in y \wedge \varphi$ :

$$\frac{x \in y \text{ é absoluta} \quad \varphi(x) \text{ é absoluta}}{x \in y \wedge \varphi(x) \text{ é absoluta}}$$

$x \in y \wedge \varphi(x)$  é completa para  $x$  entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  pois: se  $y \in \mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  crê que  $x$  está em  $y$  e satisfaz  $\varphi$ , então, certamente  $x$  está em  $y$  que está em  $\mathfrak{A}$ .

Logo, pelo teorema anterior,  $\exists x \in y : \varphi(x)$  é absoluta entre as estruturas.

Para o quantificador universal, basta ver que  $\neg\varphi(x)$  também é absoluta, então  $\exists x : x \in y \wedge \neg\varphi(x)$  é absoluta, mas ela é equivalente a  $\exists x : \neg(x \in y \rightarrow \varphi(x))$  que equivale a  $\neg\forall x : x \in y \rightarrow \varphi(x)$ . Neste caso, sabemos que ela será absoluta, mas negação de absoluta também é. Então  $\forall x : x \in y \rightarrow \varphi(x)$ . ■

**DEFINIÇÃO: Fórmulas preservadas por Extensão/Restrição.**

Dizemos que uma fórmula  $\varphi$  é **preservada por extensões** — ou é **extendível** — exatamente quando:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ estruturas transitivas} \Rightarrow (\mathfrak{A} \models_f \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi)$$

Toda vez que  $f$  for uma  $\mathfrak{A}$  valoração.

Dizemos que uma fórmula  $\varphi$  é **preservada por restrições** — ou é **restringível** — exatamente quando:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ estruturas transitivas} \Rightarrow (\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi)$$

Toda vez que  $f$  for uma  $\mathfrak{A}$  valoração.

\* \* \*

**LEMA: Quantificação sobre absoluta é Restringível/Extendível.**

Trivialmente, se  $\varphi$  for absoluta entre duas transitivas  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ , então  $\exists x : \varphi$  é extendível e  $\forall x : \varphi$  é restringível.

### 2.1.2 Hierarquia de Lévy

**DEFINIÇÃO: Fórmulas  $\Sigma$ ,  $\Pi$  e  $\Delta$ .**

Uma fórmula  $\varphi$  é dita **restrita** ou **limitada** quando todos os seus quantificadores são da forma  $\forall x : x \in y \rightarrow \psi$  ou  $\exists x : x \in y \wedge \psi$  (isto é  $\forall x \in y : \psi$  ou  $\exists x \in y : \psi$  )

Uma fórmula é dita  $\Sigma_0$  e  $\Pi_0$  exatamente quando ela é restrita; É dita  $\Sigma_{n+1}$  quando é da forma  $\exists x_1 : \dots : \exists x_k : \psi$  para  $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$  variáveis e uma  $\psi$  fórmula  $\Pi_n$ . Similarmente, é dita  $\Pi_{n+1}$  exatamente quando  $\forall x_1 : \dots : \forall x_k \psi$  com  $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$  variáveis e uma  $\psi$  fórmula  $\Sigma_n$ .

Finalmente, uma fórmula  $\varphi$  é dita  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$  — sigma- $n$  para  $\mathcal{T}$  — quando existe uma  $\psi$  que é  $\Sigma_n$  tal que  $\mathcal{T} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$ ,  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$  sendo similarmente definida. Um caso especial são as fórmulas  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ , que são exatamente aquelas fórmulas que são  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$  e  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$  simultaneamente. Novamente, um termo  $t$  é dito  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ ,  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$  ou  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$  quando  $x = t$  o for — com  $x$  não ocorrendo em  $t$ , é claro —.

\* \* \*

O motivo do nosso interesse em catalogar certas fórmulas na hierarquia de Lévy é a relação que estas fórmulas possuem com as estruturas transitivas. A ver, as fórmulas  $\Sigma_1^{\mathcal{T}}$  são preservadas por extensões, as  $\Pi_1^{\mathcal{T}}$  são preservada por restrições e as  $\Delta_1^{\mathcal{T}}$  são absolutas, quando se tratando de modelos da teoria  $\mathcal{T}$ , claro.

TEOREMA: Fórmulas  $\Delta_1^{\mathcal{T}}$  são  $\mathcal{T}$ -absolutas.

*Prova:*

LEMA:  $\Delta_0$  são absolutas.

Trivialmente, pois são conjunções de outras absolutas ou quantificações limitadas de fórmulas absolutas.

Seja  $\varphi$  uma fórmula  $\Delta_1^{\mathcal{T}}$ . Como ela é equivalente a uma  $\forall x_k : \psi$  com  $\psi \in \Sigma_0^{\mathcal{T}}$ , ela é  $\mathcal{T}$ -equivalente a uma quantificação universal de uma fórmula absoluta, afinal  $\psi$  é absoluta.

Por outro lado, ela é equivalente a uma  $\exists x_j : \gamma$  com  $\gamma \in \Pi_0^{\mathcal{T}}$ , que nos dá que ela é  $\mathcal{T}$ -equivalente a uma quantificação existencial de uma absoluta, pois  $\gamma$  também é absoluta.

Assim, sendo  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  estruturas transitivas e  $f$  uma  $\mathfrak{A}$ -valoração, temos que:

- a)  $\mathcal{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \forall x_k : \psi$ .
- b)  $\mathcal{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x_k : \gamma$ .
- c)  $\mathfrak{A} \models_f \exists x_k : \gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \models_f \exists x_k : \gamma$ .
- d)  $\mathfrak{A} \models_f \exists x_k : \psi \Rightarrow \mathfrak{B} \models_f \forall x_k : \psi$ .

Se for o caso que  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathcal{T}$ , então temos que

$$\mathfrak{A} \models_f \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_f \varphi$$

■

Agora que temos uma condição suficiente para uma fórmula ser absoluta entre estruturas transitivas de uma teoria dada, transferimos o problema de identificar uma fórmula absoluta para o problema de identificar uma fórmula  $\Delta_1^{\mathcal{T}}$



Por [?], temos que, para um teoria  $\mathcal{T}$  tão forte quanto ZF,

**TEOREMA: Resultados acerca da Hierarquia de Lévy.**

- (a) Se “ $\varphi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , então “ $\forall x : \varphi$ ”  $\in \Pi_{n+1}^{\mathcal{T}}$  e “ $\exists x : \varphi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , para toda  $x$  variável da língua.
- (b) Se “ $\varphi$ ”  $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$ , então “ $\forall x : \varphi$ ”  $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$  e “ $\exists x : \varphi$ ”  $\in \Sigma_{n+1}^{\mathcal{T}}$ , para toda  $x$  variável da língua.
- (c) Se “ $\varphi$ ”, “ $\psi$ ”  $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$ , então suas conjunções e disjunções são  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$
- (d) Se “ $\varphi$ ”, “ $\psi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , então suas conjunções e disjunções são  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$
- (e) Se “ $\varphi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$  e “ $\psi$ ”  $\in \Pi_n^{\mathcal{T}}$ , então suas conjunções e disjunções são  $\Delta_{n+1}^{\mathcal{T}}$ ,  
e “ $\varphi \rightarrow \psi$ ” é  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$   
e “ $\psi \rightarrow \varphi$ ” é  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$
- (f) Quantificação limitada não altera classe de Lévy: portanto  
Se “ $\varphi$ ”  $\in \Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , temos que “ $\forall x \in y : \varphi$ ” continua  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ ,
- (g) Se  $\varphi(x)$  for  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ , então  $\{x : \varphi(x)\}$  é  $\Pi_n^{\mathcal{T}}$
- (h) Se  $\varphi(x)$  for  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ , então  $\{x \in y : \varphi(x)\}$  é  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$
- (i) Se  $x$  for um termo  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$  e  $\mathcal{T} \vdash \exists y : y = x$ , então  $t$  é  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$
- (j) Se  $\varphi(x)$  e  $t$  forem  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$  e  $\mathcal{T} \vdash \exists y : y = t$ , então todos são  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$ :  
  - $\{x \in y : \varphi(x)\}$  é  $\Delta_n^{\mathcal{T}}$
  - $\exists x \in t : \varphi(x)$
  - $\forall x \in t : \varphi(x)$
- (k) Se  $\varphi$  e  $t$  forem  $\Sigma_n^{\mathcal{T}}$ , então  $\{t : \varphi\}$  é  $\Delta_{n+1}^{\mathcal{T}}$
- (l) Se  $\psi$  for  $\Sigma_1^{\text{ZF}}$  atendendo as hipóteses do teorema da recursão transfinita, então a fórmula da função recursiva é  $\Delta_1^{\text{ZF}}$ .

**TEOREMA:**  $V \models_f \varphi^A \Leftrightarrow A \models_f \varphi$ .

As hipóteses são  $f \in A^{<\omega}$ ,  $A \subseteq V$  transitivo e  $V \models \text{ZF}$ .

A prova é na complexidade de  $\varphi$  e vamos provar apenas para o conectivo  $\wedge$  e  $\neg$  e para o quantificador existencial  $\exists$ . Para fórmulas atômicas, temos que, pelo fato de  $A$  ser estrutura transitiva, então  $\Delta_0$  são absolutas.

Suponha que para todo  $\psi$  de complexidade  $n$  ou menor vale o teorema, vamos provar o passo indutivo em três casos: Ou  $\varphi \equiv \psi \wedge \sigma$ ; ou  $\varphi \equiv \neg\psi$ ; ou  $\varphi \equiv \exists x_i : \psi$ , todas com  $\psi$  de complexidade  $n$  e  $\sigma$  mais simples.

No caso  $\wedge$ , temos:

$$V \models_f (\psi \wedge \sigma)^A \Leftrightarrow V \models_f \psi^A \wedge \sigma^A \Leftrightarrow (V \models_f \psi^A) \wedge (V \models_f \sigma^A) \Leftrightarrow (A \models_f \psi) \wedge (A \models_f \sigma) \Leftrightarrow A \models_f \psi \wedge \sigma$$

No caso  $\neg$ , temos:

$$V \models_f (\neg\psi)^A \Leftrightarrow V \models_f \neg(\psi)^A \Leftrightarrow \neg(V \models_f \psi^A) \Leftrightarrow \neg(A \models_f \psi) \Leftrightarrow A \models_f \neg\psi$$

No caso  $\exists$ , temos:

$$\begin{aligned} V \models_f (\exists x_i : \psi)^A &\Leftrightarrow V \models_f \exists x_i \in A : \psi^A \Leftrightarrow V \models_f \exists x_i : x_i \in A \wedge \psi^A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \hat{x} \in V : (V \models_{f_{[x_i/\hat{x}]}} x_i \in A \wedge \psi^A) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in V : [(V \models_{f_{[x_i/\hat{x}]}} x_i \in A) \wedge (V \models_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi^A)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (V \models_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi^A) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (A \models_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi) \Leftrightarrow A \models_f \exists x_i : \psi \end{aligned}$$

■

Isso nos dá a profundidade da relação das estruturas transitivas de ZF com um modelo base. Uma estrutura transitiva modela exatamente o que a sua estrutura ambiente crê que ela modela.

## 2.2 O Universo Construtível

Um modelo especial de ZF é o Universo Construtível, que satisfaz uma restrição adicional sobre sua estrutura fina. É um exemplo de modelo onde vale o axioma da escolha e a hipótese generalizada do contínuo, e gostaríamos de passar por ele justamente para contrapor os modelos a valores Booleanos.

Chamamos o universo construtível de  $L$ , que é uma classe transitiva da hierarquia acumulada  $V$ . A definição de  $L$  dentro da língua depende de uma internalização da lógica e da teoria dos modelos transitivos. Mas, moralmente, queremos:

$$L_{\alpha+1} = \{x : \exists \varphi \text{ fórmula da teoria: } \exists \vec{p} \in L_{\alpha}^{<\omega} : x = \{t \in V_{\alpha} : \varphi(t; \vec{p})\}\}$$

$$(\lambda = \bigcup \lambda) \Rightarrow L_{\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_{\alpha}$$

Evidentemente, se “ $\varphi$  fórmula da teoria” não estiver formalizado *dentro* da teoria, não temos esperança alguma desta definição fazer sentido. Pois, o primeiro passo que devemos tomar é achar uma Gödelização apropriada das fórmulas como *conjuntos* de fato.

Suponha que possuamos códigos para  $\ulcorner \forall \urcorner$ ,  $\ulcorner \exists \urcorner$ ,  $\ulcorner = \urcorner$ ,  $\ulcorner \in \urcorner$ ,  $\ulcorner \neg \urcorner$ ,  $\ulcorner \vee \urcorner$ ,  $\ulcorner \wedge \urcorner$  e  $\ulcorner \rightarrow \urcorner$ . Então, definimos a codificação das fórmulas da seguinte maneira, similar a de [\[Drake\]](#):

$$\begin{aligned} \ulcorner \mathbf{Q}x_i : \varphi \urcorner &= \langle \ulcorner \mathbf{Q} \urcorner, i, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle, \text{ onde } \mathbf{Q} \text{ for um quantificador;} \\ \ulcorner x_i = x_j \urcorner &= \langle \ulcorner = \urcorner, i, j \rangle \\ \ulcorner x_i \in x_j \urcorner &= \langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \rangle \\ \ulcorner \neg \varphi \urcorner &= \langle \ulcorner \neg \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle \\ \ulcorner \varphi \mathbf{X} \psi \urcorner &= \langle \ulcorner \mathbf{X} \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle, \text{ onde } \mathbf{X} \text{ for um conectivo;} \end{aligned}$$

Fixar códigos para os componentes simples não poderia ser mais fácil: temos apenas 8 deles, e  $8 = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Não desejamos impor a nossa bijeção favorita, qualquer uma serve. Agora que temos uma especificação de como é uma “fórmula” internalizada, podemos escrever uma fórmula *de fato* que afirma que um dado *conjunto* é uma *representação* de um fórmula.

**DEFINIÇÃO: Construção de uma Fórmula.**

$$\begin{aligned}
Repr(\varphi, \chi, n) \equiv & [n \in \omega] \wedge [Fun(\chi)] \wedge [Dom(\chi) = n + 1] \wedge [\chi(n) = \varphi] \wedge \forall k \in n + 1 : \{ \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \rightarrow \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \neg \urcorner, \chi(a), \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \vee \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, b \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \wedge \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, i \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \forall \urcorner, i, \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists a, i \in k : [\chi(k) = \langle \ulcorner \exists \urcorner, i, \chi(a) \rangle]] \vee \\
& [\exists i, j \in \omega : [\chi(k) = \langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \rangle]] \vee \\
& [\exists i, j \in \omega : [\chi(k) = \langle \ulcorner = \urcorner, i, j \rangle]] \}
\end{aligned}$$

\* \* \*

Apesar de longa,  $Repr$  é bem simples: ela afirma que  $\chi$  é testemunha da construção de  $\varphi$  em  $n$  passos. Fica claro que um determinado conjunto  $X$  é fórmula se e só se  $\Phi(X) \equiv \exists n \in \omega : \exists \chi \in V_\omega : Repr(X, \chi, n)$ . Vamos chamar  $\Phi = \{t \in V_\omega : \Phi(t)\}$  e

$\Phi \upharpoonright n = \{\varphi \in \Phi : \exists \chi \in V_\omega : Repr(\varphi, \chi, n) \wedge \forall m < n : \neg [\exists \chi \in V_\omega : Repr(\varphi, \chi, m)]\}$  o conjunto de fórmulas de complexidade  $n$

**DEFINIÇÃO: Satisfatibilidade Internalizada.**

$$\begin{aligned}
Sat(A, \varphi, f) \equiv & \exists w : \exists \chi, n, r \in V_\omega : [Repr(\varphi, \chi, n) \wedge Fun(w) \wedge (Dom(w) = n + 1) \wedge \\
& \wedge [r = rank(\varphi)] \wedge [f \in w(n)] \wedge \forall k \in n + 1 : [ \\
& [\exists i, j \in \omega : \chi(k) = \langle \ulcorner \urcorner, i, j \rangle \wedge w(k) = \{f \in A^r : f(i) = f(j)\}] \vee \\
& \vee [\exists i, j \in \omega : \chi(k) = \langle \ulcorner \in \urcorner, i, j \rangle \wedge w(k) = \{f \in A^r : f(i) \in f(j)\}] \vee \\
& \vee [\exists a, b \in k : \chi(k) = \langle \ulcorner \vee \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle \wedge w(k) = w(a) \cup w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a, b \in k : \chi(k) = \langle \ulcorner \wedge \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle \wedge w(k) = w(a) \cap w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a, b \in k : \chi(k) = \langle \ulcorner \rightarrow \urcorner, \chi(a), \chi(b) \rangle \wedge w(k) = (A^r - w(a)) \cup w(b)] \vee \\
& \vee [\exists a, b \in k : \chi(k) = \langle \ulcorner \neg \urcorner, \chi(a), \chi(a) \rangle \wedge w(k) = (A^r - w(a))] \vee \\
& \vee [\exists a \in k, i \in \omega : \chi(k) = \langle \ulcorner \exists \urcorner, i, \chi(a) \rangle \wedge w(k) = \{v \in A^r : \exists x \in A : v_{[i/x]} \in w(a)\}] \vee \\
& \vee [\exists a \in k, i \in \omega : \chi(k) = \langle \ulcorner \forall \urcorner, i, \chi(a) \rangle \wedge w(k) = \{v \in A^r : \forall x \in A : v_{[i/x]} \in w(a)\}]]]
\end{aligned}$$

Onde  $v_{[i/x]} = v - \langle i, v(i) \rangle \cup \{ \langle i, x \rangle \}$ , ou seja, substituição do valor de  $v$  em  $i$  por  $x$ .

$Sat(A, \varphi, f)$  quer dizer, essencialmente, que existe uma sequência de conjuntos de testemunhas para a veracidade da fórmula e  $f$  é uma das testemunhas.

\* \* \*

**LEMA: Resultados sobre  $Sat$ .**

Se  $f \in A^{<\omega}$ ,  $A$  estrutura transitiva e  $\varphi, \psi$  forem fórmulas.

$$\begin{aligned}
Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \wedge Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] & \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner, f] \\
Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \vee Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] & \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner, f] \\
Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] \rightarrow Sat[A, \ulcorner \psi \urcorner, f] & \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner, f] \\
\neg Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f] & \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \neg \varphi \urcorner, f] \\
\exists \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] & \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner, f] \\
\forall \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] & \leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \forall x_i : \varphi \urcorner, f]
\end{aligned}$$

*Prova:*

Para  $\wedge$ , suponha que  $Sat$  valha para  $\varphi$  e para  $\psi$ . Que existe a construção é trivial, para  $w$ , basta concatenar as  $w$ -s que existem e na última etapa interceptar a os últimos valores dos  $w$ -s. Por outro lado, se valer para  $\varphi \wedge \psi$  então restringir as construções e  $w$  é praticamente trivial.

Para  $\vee$ , a ida é igual é a mesma, mas une-se ao invés de se interceptar. Para a volta, sabemos que  $f$  está em alguma etapa final das duas  $w$  que os  $Sats$  nos dão, assim sabemos que  $f$  estará na união, e portanto valerá  $Sat(A, \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner, f)$ .

Para  $\rightarrow$ , ao invés de se unir as etapas finais de testemunhas, unimos o complementar de uma com a outra. Para a volta, sabemos  $f$  ou não é testemunha  $\varphi$ , ou é testemunha de  $\psi$ , então fica claro que vale a volta.

Para  $\neg$ , se  $f$  não valida  $Sat(A, \ulcorner \varphi \urcorner, f)$ , então é porque  $f$  não está entre as testemunhas da última etapa de  $w$ . Isto é se e só se  $f$  estiver no complementar das testemunhas que é se e somente se  $Sat(A, \ulcorner \neg \varphi \urcorner, f)$ .

Para o existencial, se existe um elemento de  $A$  que faz  $f$  estar na testemunhas, então pela definição de  $Sat$  temos que valerá o  $Sat$  de  $\ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner$ . E, adicionalmente, vale a volta. Similarmente vale o mesmo para o quantificador universal. ■

TEOREMA:  $A \models_f \varphi \Leftrightarrow V \models Sat(A, \ulcorner \varphi \urcorner, f)$ .

As hipóteses são: seja  $A \subset V$  uma estrutura transitiva, e  $V \models ZF$ ,  $\varphi$  uma fórmula da língua de  $ZF$  e  $f \in A^{<\omega}$ . Novamente a prova é por indução na complexidade da fórmula. Novamente, o caso atômico é simples e, por isso, não o faremos aqui. Provaremos o caso da conjunção, negação e quantificador existencial.

*Prova:*

Seja  $A$  uma estrutura transitiva e seja sempre  $f$  uma  $A$ -valoração das variáveis pertinentes. A prova é por indução na complexidade de  $\varphi$ . Para fórmulas atômicas temos que a igualdade e pertinência em  $A$  são só as restrições das relações à classe, então  $V \models_f x = y$  exatamente quando  $Sat(A, \ulcorner x = y \urcorner, f)$  e similarmente para  $(x \in y)$ .

Assim, assumamos que valha a bi-implicação para o caso de fórmulas de complexidade até  $n$ . Seja agora,  $\psi$  e  $\sigma$  fórmulas de complexidade até  $n$ .

Vamos provar a bi-implicação da etapa sucessora só para  $\wedge, \neg, \exists$  pois é suficiente, afinal  $\models$  é muito bem comportado. Para  $\wedge$  temos:

$$A \models_f \psi \wedge \sigma \Leftrightarrow (A \models_f \psi) \wedge (A \models_f \sigma) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \psi \urcorner, f) \wedge Sat(A, \ulcorner \sigma \urcorner, f) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \psi \wedge \sigma \urcorner, f)$$

Para o caso de  $\neg$ ,

$$A \models_f \neg \psi \Leftrightarrow \neg(A \models_f \psi) \Leftrightarrow \neg Sat(A, \ulcorner \psi \urcorner, f) \Leftrightarrow Sat(A, \ulcorner \neg \psi \urcorner, f)$$

E no caso do quantificador  $\exists$ ,

$$A \models_f \exists x_i : \psi \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : (A \models_{f_{[x_i/\hat{x}]}} \psi) \Leftrightarrow \exists \hat{x} \in A : Sat[A, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_i/\hat{x}]}] \Leftrightarrow Sat[A, \ulcorner \exists x_i : \varphi \urcorner, f]$$

■

Com este teorema, temos uma correspondência muito forte entre: *O ambiente achar que uma subestrutura transitiva modela algo, a subestrutura transitiva modelar algo e a codificação da noção interna de modelos de fórmulas Gödelizadas.*

**DEFINIÇÃO: L.**

Com isso, temos o suficiente para expressar a classe dos Construtíveis,

$$L_{\alpha+1} = \{x : \exists \varphi : \exists r \in \omega : \exists f \in L_\alpha^r : x = \{t \in L_\alpha : Sat(A, \varphi, f_{[0/t]})\}\}$$

$$(\lambda = \bigcup \lambda) \rightarrow L_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha$$

\* \* \*

**DEFINIÇÃO: Rank Construtível.**

Seja  $\rho_c(x) = \min \{\alpha \in Ord : x \in L_\alpha\}$ , para todo  $x$  que ocorre em  $L$  este chamado Rank Construtível está definido. É claro que  $\rho_c$  é homomorfismo, isto é, preserva pertinência. Ainda não podemos dizer o que ele faz com ordinais, por exemplo.

\* \* \*

O primeiro resultado importante sobre os Construtíveis é, claro, que  $L$  é modelo de ZF, que iremos verificar a seguir. Na sequência, iremos verificar que  $L \models ZF + AC + CH$ . Que é grande coisa.

**LEMA:  $L$  é transitivo.**

Basta ver que  $L_\alpha$  é transitivo. Se  $x \in L_{\alpha+1}$  então  $\exists \varphi \in V_\omega \exists f \in L_\alpha^{<\omega} : x = \{t \in L_\alpha : Sat(A, \varphi, f_{[0/t]})\}$ , oras então certamente  $x \subseteq L_\alpha$ . Similarmente, se  $\lambda$  for ordinal limite,  $L_\lambda$  será união de transitivos, e portanto transitivo. Unindo  $L_\alpha$  para todos os os ordinais, temos uma classe transitiva.

**LEMA: Conjunto contido em  $L$  está contido em um membro de  $L$ .**

Seja  $X \subset L$  um conjunto em  $V$ . Por substituição, o é conjunto  $\{\alpha : \exists x \in X : \alpha = \rho_c(x)\}$ . Como é conjunto de ordinais, ele possui um supremo, que chamaremos de  $\gamma$ , então, por definição, todos os membros de  $x$  ocorrem em  $L_\gamma$ , assim,  $X \subset L_\gamma \in L_{\gamma+1}$ . Está provado.

**LEMA:  $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ .**

É óbvio que  $L_\emptyset = V_\emptyset$ . Suponha, agora, que  $L_\alpha \subseteq V_\alpha$  vale para  $\alpha$ . Pela definição  $L_{\alpha+1} \subseteq \wp(L_\alpha)$ , e  $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$ . Então

$$L_{\alpha+1} \subseteq \wp(L_\alpha) \subseteq \wp(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$$

E



TEOREMA:  $L \models \text{ZF} + GCH + AC + V = L$ .

Provaremos que  $L$  modela: O axioma do Vazio; O axioma do Par; O axioma da União; Os axiomas da Substituição Enfraquecido; O axioma do Infinito; O axioma das Partes; O axioma da Fundação; O axioma da Extensionalidade; O Esquema de Separação. Então provaremos o Axioma da Escolha e depois a Hipótese Generalizada do Contínuo.

*Prova:*

**Extensionalidade e Fundação** Pelo fato que  $L$  é estrutura transitiva, temos, de graça, os axiomas de Extensionalidade e Fundação.

### Axioma do Vazio

$$L \models \exists x : x = x \Leftrightarrow V \models (\exists x : x = x)^L \Leftrightarrow \exists x \in L : x = x \leftrightarrow L \neq \emptyset$$

É claramente o caso de  $L$  não ser vazio, pois  $L_1$  não é vazio. Aqui entra com força os meta-teoremas que provamos sobre fórmulas relativizadas e  $\models$ .

### Axioma do Par

Queremos

$$L \models \forall x : \forall y : \exists z : \forall t : t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)$$

Que será o caso exatamente quando

$$V \models \forall x \in L : \forall y \in L : \exists z \in L : \forall t \in L : t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)$$

Mas é claro que  $V \models \text{ZF}$ , então vamos apenas provar a fórmula acima em  $\text{ZF}$ .

Sejam  $x, y \in L_\alpha$  seja  $z = \{t \in L_\alpha : \text{Sat}(L_\alpha, \ulcorner x_0 = x_1 \vee x_0 = x_2 \urcorner, f)\}$  onde  $f = \{\langle \ulcorner x_0 \urcorner, t \rangle, \langle \ulcorner x_1 \urcorner, x \rangle, \langle \ulcorner x_2 \urcorner, y \rangle\}$ , que, por razões óbvias, vamos abreviar como  $[t, x, y]$  e continuaremos tratando valorações desta forma. Fica claro que com esta valoração  $z$  está em  $L_{\alpha+1}$ , e portanto em  $L$ . Não é difícil ver que  $z$  é de fato o par em  $L$ .

### Axioma da Soma

Queremos

$$L \models \forall x \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow \exists t : t \in y \wedge z \in t$$

Deixe,  $x \in L$ , logo em  $L_\alpha + 1$  para algum  $\alpha$ . Deixe agora  $\varphi \equiv \exists x_2 \in x_1 : x_0 \in x_2$ , e

$$y = \{t \in L_\alpha : \text{Sat}(L_\alpha, \ulcorner \varphi \urcorner, f_{[x_0/z, x_1/x]})\}$$

Sabemos que  $V \models_f y \in L$  e que  $V \models_f \forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y$ , então segue que  $V \models_f (\forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y)^L$ , pois o universal restringe-se e o existencial já está em  $L$  pois  $x$  está, e temos transitividade. Logo,  $L \models_f \forall t : t \in y \leftrightarrow \exists y \in x : t \in y$  que era o que queríamos: uma testemunha da validade do axioma para cada  $x$  dado.

### Axioma das Partes

Queremos

$$L \models \forall x : \exists y : \forall z : (\forall t \in z \rightarrow t \in x) \rightarrow z \in y$$

Seja  $x \in L$ , e deixe  $y = \{z \in L : (z \subseteq x)^L\}$ . Vemos que  $y$  é claramente um conjunto, resta verificar que ele está em  $L$  e teremos o que buscamos. Seja

$$\beta = \bigcup_{z \in y} \rho_c(z) + 1$$

Então sabemos que  $y = \{z \in L_\beta : (z \subseteq x)^L\}$ , sabemos também que  $\rho_c(x) < \beta$  afinal  $x \in y$ . Como  $L_{\rho_c(x)} \subset L_\beta \subset L$ , então uma é subestrutura transitiva da outra. Assim,  $y = \{z \in L_\beta : (z \subseteq x)^{L_\beta}\}$ , que sabemos ser meta-equivalente a

$$y = \{z \in L_\beta : \text{Sat}(L_\beta, \ulcorner x_0 \subseteq x_1 \urcorner, [z, x])\}$$

Então  $y \in L$ , e então está provado.

### Axioma Enfraquecido da Substituição

Queremos

$$L \models [\forall x, y, z : \psi(y, x) \wedge \psi(z, x) \rightarrow z = y] \rightarrow [\forall x : \exists X : \forall y : \exists t \in x : \psi(y, t) \rightarrow y \in X]$$

Suponha uma fórmula  $\psi$  nas condições do axioma. Deixe  $p, x \in L$  e deixe  $X = \{y \in L : (\exists t \in x : \psi(y, x; p))^L\}$ , que sabemos existir. Como  $X$  é conjunto,

$$\alpha = \bigcup_{y \in X} \rho_c(y) \text{ é ordinal}$$

Segue que todos os  $y$  em  $X$  estão em  $L_\alpha$ . E como  $L$  é transitivo, então  $X = \{y \in L_\alpha : \exists t \in x : \psi^L(y, x)\}$ . Oras, dado um  $y \in L$ , se existir um  $t \in x$  para o qual  $\psi^L(y, t)$  então necessariamente  $y$  está em  $L_\alpha$ , pelo menos  $V$  pensa isso. Mas como  $V$  e  $L$  concordam sobre pertinência,  $y \in L_\alpha$ . Encontramos, pois, um conjunto onde vive a imagem de  $x$  pela  $\psi$  aos olhos de  $L$ .

### Axioma da Separação

Queremos

$$L \models \forall x \exists y : \forall z : z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \psi(z)$$

Deixe então  $x \in L$  e  $y = \{z \in L : (z \in x \wedge \psi(z))^L\}$ . Reduzindo, temos  $y = \{z \in L : z \in x \wedge \psi^L(z)\}$ , que, neste caso, nos dá:  $y = \{z \in L_{\rho_c(x)} : z \in x \wedge \psi^L(z)\}$ . Invocamos, agora, o princípio da reflexão, que nos dará uma  $\alpha > \rho_c(x)$  onde  $V_\alpha$  reflete a situação de

1.  $\psi^L(z)$
2.  $\exists \delta : z \in L_\delta$ .
3.  $z \in L_\gamma$

Temos então que

1.  $\forall x \in V_\alpha : \psi^L(x) \leftrightarrow (\psi^L)^{V_\alpha}(x)$
2.  $\forall x \in V_\alpha : [\exists \delta : x \in L_\delta] \leftrightarrow [\exists \delta < \alpha : x \in (L_\delta)^{V_\alpha}]$
3.  $\forall x \in V_\alpha : \forall \gamma < \alpha : [x \in L_\gamma] \leftrightarrow [x \in (L_\gamma)^{V_\alpha}]$

Em 1. podemos subsituír  $(\psi^L)^{V_\alpha}$  por  $\psi^{L \cap V_\alpha}$ . Conclui-se, também, que  $\forall x \in V_\alpha : x \in L \leftrightarrow \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta$ .

O  $\alpha$  dado deve ser ordinal limite, pois se  $\zeta < \alpha$ , então  $\zeta \in L \cap V_\alpha$ . Como  $\forall \beta \in Ord : \rho_c(\beta) = \beta + 1$ , então,  $\zeta + 1 \in V_\alpha$ . Então  $L_\alpha = \bigcup_{\delta < \alpha} L_\delta$ .

Então

$$\begin{aligned} [x \in L \cap V_\alpha] &\leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta \in L_\delta] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta^{V_\alpha}] \leftrightarrow [x \in V_\alpha \wedge \exists \delta < \alpha : x \in L_\delta] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow [x \in V_\alpha \cap \bigcup_{\delta < \alpha} L_\delta] \leftrightarrow [x \in V_\alpha \cap L_\alpha] \leftrightarrow [x \in L_\alpha] \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} y = \{z \in L : (z \in x \wedge \psi(z))^L\} &= \{z \in L_\alpha : z \in x \wedge \psi^{L_\alpha}(z)\} = \\ &= \{z \in L_\alpha : Sat(L_\alpha, \ulcorner x_0 \in x_1 \wedge \psi(x_0) \urcorner, [z, x])\} \end{aligned}$$

Assim, temos que  $y \in L$ , temos então o conjunto desejado. ■

LEMA:  $x = L_\alpha$  é  $\Delta_1^{ZF}$ .

Segue do fato de que a definição de  $L_\alpha$  é por recursão em uma fórmula que é  $\Delta_1^{ZF}$ . [Drake] faz isto com mais cuidado, mas a demonstração não agrega muito a nossa discussão.

TEOREMA:  $L \models V = L$ .

Como  $x = L_\alpha$  é absoluto, e, similarmente,  $x_\alpha$  também o é, se  $A$  é transitivo e modelo de ZF, por definição, temos  $(x \in L)^A \leftrightarrow \exists \alpha \in A : x \in L_\alpha$ . Se  $Ord \subset A$  então  $(x \in L)^A \leftrightarrow x \in L$ , e assim, temos que se temos um modelo  $A$  de ZF com todos os ordinais,  $L$  é sub modelo menor ainda. Portanto  $L$  é o menor modelo transitivo de ZF contendo todos os ordinais.

Como  $L$  modela ZF e contém todos os ordinais, “por fora” constatamos que  $L^L = L$ , então  $V \models \forall x \in L : x \in L^L$ , mas sabemos que isso é  $V \models (\forall x x \in L)^L$  e então sabemos que  $L \models \forall x : x \in L$ , que é justamente  $L \models V = L$ .

LEMA: **Ordem Conveniente.**

Existe uma fórmula  $\varphi(x, y)$  que é  $\Sigma_1$  tal que:

1.  $\text{ZF} \vdash BF(\varphi(x, y))$
2.  $\text{ZF} \vdash \varphi(x, y)$  ordena totalmente  $L$
3.  $\varphi$  é  $\Delta_1^{\text{ZF}+V=L}$

Onde  $BF(\varphi(x, y))$  diz

$$\forall x : [\exists v : (x \neq \emptyset \rightarrow v \in x \wedge \forall y \in x : \neg \varphi(y, v)) \wedge \exists u : (x \subset u \wedge \forall a, b : [b \in u \wedge \varphi(a, b)] \rightarrow w \in u)]$$

Ou seja, todo conjunto tem um  $\varphi$ -minimal e a relação é sempre “*left-narrow*”, ou “*set-like*”.

A ordem é a lexicográfica, primeiro, dizemos que um construtível é menor que o outro já de pronto se o seu rank construtível for menor que o do outro.

Então nos focamos no caso que os dois conjuntos estão surgem no mesmo nível  $\alpha + 1$ . Como as fórmulas são bem ordenadas (e inclusive [Drake] dá uma ordem  $\Delta_1^{\text{ZF}}$ ) podemos dizer que um conjunto é menor que outro de mesmo que rank construtível que ele quando a fórmula mínima que define o primeiro é menor que a mínima que define o segundo.

No caso em que ambos os ranks e as fórmulas mínimas coincidem, então deve ser o caso que os parâmetros diferem entre si. No caso, se assumirmos que  $L_\alpha$  pode ser bem ordenado, então segue que  $L_\alpha^{<\omega}$  também pode ser – e com uma fórmula decente –. Neste caso, podemos dizer que dois conjuntos  $x, y$  de mesmo rank e fórmula minimal estão relacionados por  $\varphi$  quando o parâmetro de  $x$  for menor que o de  $y$ .

TEOREMA:  $L \models AC$ .

Todo  $L$  pode ser bem ordenado, mas  $L$  é transitivo, então certamente qualquer  $x$  pode ser bem ordenado. Então dado uma família não vazia  $X \in L$  de conjuntos não vazios, considere  $\{x \in \bigcup X : \exists y \in X : x = \min y\}$ . Claramente existe, então está provado. ■

Para provar a Hipótese Generalizada do Contínuo, primeiro, notemos que  $\forall \sigma \geq \omega : |L_\sigma| = |\sigma|$ . Isto é feito indutivamente. Como  $V_\omega = L_\omega$ , e o primeiro é enumerável, para  $\omega$  já temos. Então, para a etapa sucessora, adicionamos, no pior caso,

$$|\omega \times L_\sigma^{<\omega}| = \omega \left| \bigcup_{n < \omega} L_\sigma^n \right| = \omega \bigcup_{n < \omega} |L_\sigma^n| = \omega |\sigma| = |\sigma|$$

Para a etapa limite, simplesmente

$$|L_\lambda| = \left| \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha \right| = \bigcup_{\alpha < \lambda} |L_\alpha| = \bigcup_{\alpha < \lambda} |\alpha| = |\lambda|$$

TEOREMA:  $L \models GCH$ .

[Faltando]

## Capítulo 3

# Álgebras, Filtros e Morfismos

A successful attempt to express logical propositions by symbols, the laws of whose combinations should be founded upon the laws of the mental processes which they represent, would, so far, be a step towards a philosophical language.

---

*George Boole – The Mathematical  
Analysis of Logic. p.5*

O cálculo proposicional está intimamente ligada com estruturas que chamamos de “Álgebras”. Por esta razão, quando formos tratar de Modelos a Valores Booleanos, convém compreender o quê é uma álgebra booleana, e quais propriedades exigimos sobre esta a fim de fazer a construção.

Para tanto, vamos falar cursoriamente sobre ordens parciais, e um pouco de filtros, morfismos e congruências.



## Capítulo 4

# Modelos a Valores Booleanos

Queremos modelos diferentes de ZF a fim de encontrar exemplos de modelos com propriedades diferentes de  $L$ , por exemplo, onde não valha o Axioma da Escolha, ou a Hipótese do Contínuo.

Por questões cabalísticas, não podemos de fato definir a verdade do  $V$  de maneira internalizada satisfatória [?]. E, por consequência, não é possível fazê-lo para  $V^{(B)}$  inteiro — pois poderíamos trazer de volta a definição para  $V$ . Nossa abordagem é fazer a teoria de modelos booleanos em submodelos base.

Ao longo deste capítulo,  $B$  e  $B'$  serão álgebras Booleanas completas,  $B$  será munida das operações  $*$  para o *meet*,  $+$  para o *join*,  $-$  para o complemento e  $\leq$  para a ordem induzida. A implicação escreveremos dupla  $\Rightarrow$ .

DEFINIÇÃO:  $M^{(B)}$ .

Seja  $B$  uma Álgebra Booleana Completa, e seja  $M \in V$  um conjunto transitivo que modela ZF.

$$M_\alpha^{(B)} = \left\{ f : \exists \beta \in M : \beta < \alpha \wedge \exists D \subseteq M_\beta^{(B)} : f \in D^B \right\}$$

$$M^{(B)} = \left\{ f : \exists \alpha : f \in M_\alpha^{(B)} \right\}$$

\* \* \*

Acima definimos um conjunto (pois a partir de certo  $\alpha$  não se adiciona mais conjuntos) onde cada um de seus elementos é uma função de um pedaço de um nível anterior  $B$ -valorada.

A maneira de pensar sobre esta classe é que seus membros são representantes de objetos ideais cujas propriedades queremos capturar dentro da teoria de ZF. Cada representante decide *quanto* os objetos representados por anteriores *pertence* ao objeto que ele representa.

Trivialmente  $\alpha < \beta \Leftrightarrow M_\alpha^{(B)} \subset M_\beta^{(B)}$

Já mencionamos que objetos em  $M^{(B)}$  representam objetos ideais, mas não explicamos exatamente o que queremos dizer com isso. É evidente que  $M^{(B)}$  não é transitivo, nem tem um conjunto indutivo, logo não há esperança de  $M^{(B)}$  ser modelo transitivo de ZF.

Mas, com uma relação não-*standard* de pertinência e uma igualdade adequadamente definida, é possível que seja um modelo de ZF. Como estamos distorcendo a igualdade, os elementos de  $M^{(B)}$  não são os objetos do modelo, estritamente falando, mas são coisas habitando classes de equivalência que, estas sim, são os verdadeiros objetos do modelo.

Vamos, pois, definir uma  $(B)$  medida de igualdade e de pertinência de maneira recursiva: Primeiro considere a relação

$$\langle a, b \rangle \prec \langle \alpha, \beta \rangle \leftrightarrow [a = \alpha \wedge b \in \text{Dom}(\beta)] \vee [a \in \text{Dom}(\alpha) \wedge b = \beta]$$

Queremos mostrar que, sobre  $\mathbb{M} = M^{(B)} \times M^{(B)}$ , esta relação é bem fundada — isto é, todo subconjunto de  $\mathbb{M}$  tem um elemento  $\prec$ -minimal e  $\prec$  é “pequeno à esquerda”.

**LEMA:  $\prec$  é Bem Fundada.**

Seja  $B$  álgebra Booleana Completa,  $M$  um modelo interno transitivo de ZF, então  $\prec$  é *set-like* e minimalizável em  $\mathbb{M} = M^{(B)} \times M^{(B)}$ .

*Prova:*

Primeiro lidemos com *minimalizável*, que significa dizer há um elemento minimal em qualquer subconjunto:

$$\forall X \subseteq \mathbb{M} : \exists x_0 \in \mathbb{M} : \forall x \in X : \neg[x \prec x_0]$$

Como todo membro de  $M^{(B)}$  surgiu neste conjunto em alguma etapa ordinal, seja  $\rho_B$  a função que associa a cada membro de  $M^{(B)}$  o ordinal mínimo cuja etapa o contém. Dado  $\rho_B$  queremos estender esta função para uma útil em  $\mathbb{M}$ , no caso:  $\rho \langle a, b \rangle = \min \{\rho_B(a), \rho_B(b)\}$ .

Considere, pois, o conjunto de ordinais correspondente à imagem de  $\mathbb{M}$  por  $\rho$ , este conjunto tem um mínimo  $\gamma$  que é atingido por algum  $\langle a, b \rangle \in \mathbb{M}$ .

Seja, então,  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{M}$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{[\alpha=a \wedge \beta \in \text{Dom}(b)]}{[\rho_B(\alpha)=\rho_B(a)] \wedge [\rho_B(\beta)<\rho_B(b)]} \quad \frac{\langle \alpha, \beta \rangle \prec \langle a, b \rangle}{[\alpha=a \wedge \beta \in \text{Dom}(b)] \vee [\alpha \in \text{Dom}(a) \wedge \beta=b]} \quad \frac{[\alpha \in \text{Dom}(a) \wedge \beta=b]}{[\rho_B(\alpha)<\rho_B(a)] \wedge [\rho_B(\beta)=\rho_B(b)]}}{\frac{\rho\langle \alpha, \beta \rangle < \gamma}{[\alpha=a \wedge \beta \in \text{Dom}(b)] \vee [\rho\langle \alpha, \beta \rangle < \gamma]}} \\
\frac{\rho\langle \alpha, \beta \rangle < \gamma \vee [\rho\langle \alpha, \beta \rangle < \gamma]}{\rho\langle \alpha, \beta \rangle < \gamma} \\
\perp
\end{array}$$

Como se buscava, provamos que  $\neg(\langle \alpha, \beta \rangle \prec \langle a, b \rangle)$ . ■

Quanto a *set-like*, que significa que a classe dos objetos menores que  $x$  é um conjunto:

$$\forall x \in \mathbb{M} : \exists X \subseteq \mathbb{M} : X = \{t : t \prec x\}$$

É simples:  $\mathbb{M}$  é conjunto, e se — dado um  $x$  dentro de  $\mathbb{M}$  — um  $y$  é tal que  $y \prec x$  então,  $y$  — pela definição de  $\prec$  deverá estar em  $\mathbb{M}$  também. ■

Assim temos provado que esta relação auxiliar que definimos é bem fundada em qualquer  $M^{(B)}$ . Podemos então, definir:

$$\begin{aligned}
F(\langle a, b \rangle, f) = & \langle \bigwedge_{x \in \text{Dom}(b)} [b(x) \Rightarrow \pi_2 \circ f(\langle x, b \rangle)] * \bigwedge_{y \in \text{Dom}(a)} [a(y) \Rightarrow \pi_3 \circ f(\langle y, a \rangle)], \\
& \bigvee_{x \in \text{Dom}(b)} [b(x) * \pi_1 \circ f(\langle a, x \rangle)], \\
& \bigvee_{x \in \text{Dom}(a)} [a(x) * \pi_1 \circ f(\langle x, b \rangle)] \rangle
\end{aligned}$$

Onde  $\pi_i$  são as projeções usuais de *tuplas*.

Pelo teorema da recursão transfinita, existe uma (única)  $G$  função de domínio  $\mathbb{M} = M^{(B)} \times M^{(B)}$  tal que:

$$\forall x \in \mathbb{M} : G(x) = F(x, G \upharpoonright \{y : y \prec x\})$$

**DEFINIÇÃO:  $B$ -medidas de igualdade e pertinência.**

Para cada álgebra Booleana Completa  $B$ , teremos uma  $G$  associada determinada pelo processo acima, definimos, então definimos  $\mathfrak{E}$ , que é a  $B$  medida de pertiência em  $M^{(B)}$  e  $\approx$ , que é a medida de igualdade de dois membros de  $M^{(B)}$ .

$$a \approx b = \pi_1 \circ G \langle a, b \rangle = \left[ \bigwedge_{x \in Dom(a)} a(x) \Rightarrow (x \mathfrak{E} b) \right] * \left[ \bigwedge_{y \in Dom(b)} b(y) \Rightarrow (y \mathfrak{E} a) \right]$$

$$a \mathfrak{E} b = \pi_2 \circ G \langle a, b \rangle = \bigvee_{t \in Dom(b)} b(t) * (a \approx t)$$

\* \* \*

De fato o que fizemos foi uma dupla-recursão transfinita: As coordenadas da tripla  $G(x)$  representam “ $\langle x_1 = x_2, x_1 \in x_2, x_1 \in x_2 \rangle$ ” e precisamos destes valores para em níveis anteriores para definir no atual nível.

Provaremos que

$$a \sim b \leftrightarrow a \approx b \in \mathfrak{F}$$

é uma relação de equivalência para qualquer filtro  $\mathfrak{F}$  em  $B$ . Mas antes, alguns resultados preliminares.

**PROPOSIÇÃO: Propriedades das medidas de  $M^{(B)}$ .**

1.  $x \approx x = 1$ ;
2.  $x \in Dom(y) \rightarrow y(x) \leq x \mathfrak{E} y$ , no sentido da ordem  $\leq$  de  $B$ ;

3.  $x \approx y = y \approx x$ ;
4.  $[x \approx y] * x(u) \leq [u \mathfrak{S} y]$ ;
5.  $[x \approx y] * [y \approx z] \leq [x \approx z]$ ;
6.  $[x \approx y] * [x \mathfrak{S} z] \leq [y \approx z]$ ;
7.  $[x \approx y] * [x \mathfrak{S} z] \leq [y \approx z]$ ;

*Prova:*

$(a \approx a = 1)$ :

$$a \approx a = \left[ \bigwedge_{x \in Dom(a)} a(x) \Rightarrow (x \mathfrak{S} a) \right] * \left[ \bigwedge_{y \in Dom(a)} a(y) \Rightarrow (y \mathfrak{S} a) \right] =$$

$$a \approx a = \bigwedge_{x \in Dom(a)} a(x) \Rightarrow (x \mathfrak{S} a)$$

Assumindo a hipótese indutiva, que  $\forall x \in Dom(a) : x \approx x = 1$ , então:

$$x \mathfrak{S} a = \bigvee_{t \in Dom(a)} a(t) * (x \approx t) \geq a(x) * (x \approx x) = a(x)$$

Substituindo acima temos:

$$a \approx a = \bigwedge_{x \in Dom(a)} a(x) \Rightarrow (x \mathfrak{S} a) = \bigwedge_{x \in Dom(a)} a(x) \Rightarrow a(x) = 1$$

■

*Prova:*

$(y(x) \leq x \mathfrak{S} y)$ :

Como  $x \in Dom(y)$ ,

$$x \mathfrak{E} y = \bigvee_{t \in Dom(y)} y(t) * (x \approx t) \geq y(x) * (x \approx x) = 1$$

■

*Prova:*

$(a \approx b = b \approx a)$ :

$$\begin{aligned} a \approx b &= \left[ \bigwedge_{x \in Dom(a)} a(x) \Rightarrow (x \mathfrak{E} b) \right] * \left[ \bigwedge_{y \in Dom(b)} b(y) \Rightarrow (y \mathfrak{E} a) \right] = \\ &= \left[ \bigwedge_{y \in Dom(b)} b(y) \Rightarrow (y \mathfrak{E} a) \right] * \left[ \bigwedge_{x \in Dom(a)} a(x) \Rightarrow (x \mathfrak{E} b) \right] = b \approx a \end{aligned}$$

■

*Prova:*

$([x \approx y] * x(u) \leq [u \mathfrak{E} y])$ :

$$\frac{\frac{x \approx y = \bigwedge_{i,j} (x(i) \Rightarrow [i \mathfrak{E} y]) * (y(j) \Rightarrow [j \mathfrak{E} x])}{[x \approx y] * x(u) \leq x(u) * (x(u) \Rightarrow [u \mathfrak{E} y]) * \bigwedge_j (y(j) \Rightarrow [j \mathfrak{E} x])}}{[x \approx y] * x(u) \leq x(u) * (x(u) \Rightarrow [u \mathfrak{E} y])} = \frac{[x \approx y] * x(u) \leq x(u) * (x(u) \Rightarrow [u \mathfrak{E} y])}{[x \approx y] * x(u) \leq u \mathfrak{E} y}$$

■

*Prova:*

$([x \approx y] * [y \approx z] \leq [x \approx z])$ :

Sejam  $u, v, w \in M^{(B)}$ . Vamos assumir, como passo indutivo, que

$$\forall x \in Dom(u) : \forall y, z : (x \approx y) * (y \approx z) \leq (x \approx z)$$

Restringindo  $y \in Dom(v), z \in Dom(w)$  temos:

$$\frac{\frac{(x \approx y) * (y \approx z) \leq (x \approx z)}{(x \approx y) * (y \approx z) * w(z) \leq (x \approx z) * w(z)}}{\frac{\bigvee_{z \in Dom(w)} (x \approx y) * (y \approx z) * w(z) \leq \bigvee_{z \in Dom(w)} (x \approx z) * w(z)}{(x \approx y) * (y \mathfrak{E} w) \leq (x \mathfrak{E} w)}}$$

No entanto, temos, nas condições da hipótese indutiva, o seguinte resultado auxiliar:

$$\frac{a = x, \text{ Hipótese Indutiva} \quad \frac{\frac{[a \approx b] * a(d) \leq [d \mathfrak{E} b]}{[a \approx b] * [c \approx d] * a(d) \leq [d \mathfrak{E} b] * [c \approx d]}}{[a \approx b] * [c \approx d] * a(d) \leq \bigvee_z w(z) * [d \approx z] * [c \approx d]}}{\frac{[a \approx b] * [c \approx d] * a(d) \leq \bigvee_z w(z) * [c \approx z]}{[a \approx b] * [c \approx d] * a(d) \leq [c \mathfrak{E} b]}} \quad \frac{[a \approx b] * [c \approx d] * a(d) \leq [c \mathfrak{E} b]}{[x \approx y] * [u \approx v] * x(u) \leq [v \mathfrak{E} y]}$$

Tomando o supremo sobre  $u$  no domínio de  $x$ , temos:

$$[x \approx y] * [v \mathfrak{E} x] \leq [v \mathfrak{E} y]$$

Temos também que

$$\frac{[x \approx y] * x(u) \leq [u \mathfrak{E} y]}{\frac{[x \approx y] * [y \approx z] * x(u) \leq [u \mathfrak{E} y] * [y \approx z]}{[x \approx y] * [y \approx z] * x(u) \leq [u \mathfrak{E} z]}} \quad \frac{[x \approx y] * [y \approx z] * x(u) \leq [u \mathfrak{E} z]}{[x \approx y] * [y \approx z] \leq \bigwedge_u x(u) \Rightarrow [u \mathfrak{E} z]}$$

Graças à hipótese indutiva, temos:

$$[x \approx y] * [y \approx z] \leq \bigwedge_v z(v) \Rightarrow [v \mathfrak{E} x]$$



E, logo,

$$[x \approx y] * [y \approx z] \leq [x \approx z]$$

■

# Referências Bibliográficas

[Bell]

Bell, J. L. **Set Theory, Boolean-Valued Models and Independence Proofs**, Oxford logic Guides v. 47, Clarendon Press, 2005.

[Drake]

Drake, Frank R. **Set theory : an introduction to large cardinals**, Studies in logic and the foundations of mathematics v. 76, American Elsevier Pub. Co., 1974.

[Freire]

Freire, Rodrigo. A. **Grasping Sets Through Ordinals: On a Weak Form of the Constructibility Axiom**, *South American Journal of Logic* Vol. 2, n. 2, pp. 357-359, 2016. ISSN: 2446-6719.

[Jech]

Jech, T. **Set Theory: Third Millennium Edition, revised. and extended**, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.

[Kunen]

Kunen K. **Set Theory**, Studies in Logic v. 34, Lightning Source, Milton Keynes, UK.

[Miraglia]

Neto, F. Miraglia. **Cálculo Proposicional: Uma interação da Álgebra e da Lógica**, Coleção CLE – v. 1, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas — São Paulo, 1987.