Modelos a Valores Booleanos:
Aplicações em Conjuntos e Álgebra

IME - USP Prof. Hugo Luiz Mariano
José Goudet Alvim

2017-19

Palavras-chave
Reticulados; Álgebras de Heyting; Álgebras Booleanas; Teoria de Modelos; Valores booleanos de fórmulas; Independência; Forcing;

Resumo

Neste trabalho de iniciação científica, estudaremos a teoria de modelos a valores booleanos de ZF, a fim de entender e produzir provas de consistência e independência na teoria de conjuntos. Para tanto, trataremos de álgebras de Boole; de Heyting; Filtros; Morfismos; Teoria de Modelos e Lógica.

Conteúdo

1 Lógica **3**

1.1 Lógica de Primeira Ordem 4

1.1.1 Satisfatibilidade 5

Def. Valoração de Variáveis 5

Def. Satisfatibilidade 6

1.1.2 Provabilidade 8

Def. Consequência Sintática 8

Def. Teoria 9

Capítulo 1

Lógica

It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music [...] because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect and yet true.

Bertrand Russell.

A forma mais básica de lógica que nos propomos a tratar é a "lógica proposicional", que veremos ser intimamente ligada com álgebras de Heyting. Ela consiste de uma coleção de letras proposicionais, que podem ser vistas como condições, e destas "fórmulas atômicas", obtemos fórmulas compostas através do uso de conectivos e operadores lógicos.

O estudo da lógica proposicional tem seu mérito, mas não será especialmente util para nós, afinal vamos tratar das álgebras de Heyting em profundidade. Mas, no entanto, convém mostrar um pouco desta para contrastar com a *lógica de primeira ordem* que logo iremos tratar.

Grosseiramente, lógica proposicional se ocupa de sentenças como:

$$(P \to Q) \to P \to Q$$

$$(P \land Q) \to P$$

Pode-se ver como, associando "valores de verdade" às letras proposicionais, obtemos valores das fórmulas compostas. Mais que isso, os teoremas da lógica proposicional são exatamente as tautologias.

Avançando no nível de complexidade, no deparamos com a "lógica de primeira ordem", que trataremos agora com mais cuidado.

1.1 Lógica de Primeira Ordem

Nossa abordagem para lógica pode não ser a melhor para todos os propósitos, mas acreditamos que ela será util ao aproximar a estrutura de uma língua com uma *estrutura* de fato.

Definimos uma língua formal como sendo as sentenças potenciais de uma gramática (finitária), isto é, dadas $\langle R_0, \ldots, R_n \rangle$ relações $\rho_0, \ldots, \rho_n$-árias, respectivamente; e uma coleção ω — geralmente infinito potencial — de variáveis $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, dizemos que uma sequência (finita) de símbolos σ é da língua associada à assinatura exatamente quando vale alguma das condições abaixo:

a) $\sigma \equiv R_k\left(x_{\alpha_0}, \ldots, x_{\alpha_{\rho_k}}\right)$, com $0 \leq k \leq n$, e x_{α_i} todos em ω.

b) $\sigma \equiv \varphi \wedge \psi$, com φ, ψ da língua.

c) $\sigma \equiv \varphi \vee \psi$, com φ, ψ da língua.

d) $\sigma \equiv \neg\varphi$, com φ da língua.

e) $\sigma \equiv \forall x_i : \varphi$, com x_i variável em ω e φ da língua.

f) $\sigma \equiv \exists x_i : \varphi$, com x_i variável em ω e φ da língua.

Como não iremos tratar de línguas com muitos símbolos, fixaremos uma coleção de variáveis $\{x_0, x_1, \ldots\}$, para termos: dada uma assinatura $\Sigma = \langle R_0, \ldots, R_n \rangle$, associamos uma língua $\mathcal{L}_\Sigma$ como definido acima.

1.1.1 Satisfatibilidade

Mas, afinal, qual é a interpretação destas formulas? Pois, o significado desta contrução vem exatamente da *definição* de interpretação, de significado.

Primeiro, observemos que para montar uma língua só usamos a quantidade de relações e a aridade de cada uma delas, ρ_i. Desta forma, vamos simplificar ainda mais e fixar $\{R_0, R_1, \ldots\}$ símbolos canônicos para as relações, assim, se tivermos $\Sigma = \langle \rho_0, \ldots, \rho_k \rangle$, podemos definir $\mathcal{L}_\Sigma$ como se espera: use os símbolos R_i para relações ρ_i-árias, respectivamente.

Segundo, definâmos "estruturas", pois se uma fórmula é verdade ela deve ser verdade em algum lugar (apesar que) algumas coisas são verdade em todos os lugares. Para tanto, vamos definir uma "valoração de variáveis":

DEFINIÇÃO **Valoração de Variáveis**:
Dada uma classe A de objetos, uma valoração de variáveis das variáveis de uma língua $\mathcal{L}$ de primeira ordem com alguma assinatura, dizemos que f é uma valoração de variáveis quando ela é uma realização dos símbolos das $\mathcal{L}$-variáveis em objetos de A.

Adicionalmente, dados um objeto o de A, uma variável x_j de $\mathcal{L}$ e uma valoração f, definimos:

$$f[x_j/o](x_i) = \begin{cases} o, \text{ se } i = j; \\ f(x_i), \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

$$* * *$$

Uma estrutura é uma coleção de informações:

$$\mathfrak{A} = \langle A, R_0, \ldots, R_n \rangle$$

Onde A é uma classe não vazia chamada "domínio" e cada uma R_i é uma relação definida sobre o mesmo. Dizemos que uma estrutura e uma língua são *compatíveis* exatamente quando a aridade de cada R_i é ρ_i.

Definição **Satisfatibilidade**:

Sejam φ uma $\mathcal{L}$-fórmula; f uma valoração de variáveis; e $\mathfrak{A} = \langle A, P_0, \ldots, P_n \rangle$ uma estrutura, e sejam $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{A}$ compatíveis.

$$\mathfrak{A} \vDash_f \varphi$$

Que se lê "$\mathfrak{A}$ satisfaz φ", "$\mathfrak{A}$ crê que φ" ou "φ vale em $\mathfrak{A}$", É definido recursivamente:

$$\varphi \equiv R_i\left(x_0, \ldots, x_{\alpha_{\rho_i}}\right) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow P_i\left(f(x_0), \ldots, f(x_{\alpha_{\rho_i}})\right).$$
$$\varphi \equiv \sigma \wedge \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ e } \mathfrak{A} \vDash_f \psi.$$
$$\varphi \equiv \sigma \vee \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi.$$
$$\varphi \equiv \neg\sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \text{ não } \mathfrak{A} \vDash_f \sigma.$$
$$\varphi \equiv \sigma \to \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \neg\sigma \text{ ou } \mathfrak{A} \vDash_f \psi.$$
$$\varphi \equiv \forall x_i : \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \text{ para todo } a \text{ de } A\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f[x_i/a]} \varphi.$$
$$\varphi \equiv \exists x_i : \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_f \varphi \leftrightarrow \text{ existe algum } a \text{ de } A\text{: } \mathfrak{A} \vDash_{f[x_i/a]} \varphi.$$

Existe uma questão delicada nessa quantificação que fazemos nas últimas duas clausulas: ela é necessáriamente de primeira ordem, desta forma, não definimos *nada*. A solução oferecida é tratar destas quantificações em um nível acima, em uma meta-teoria.

$$* * *$$

Vamos tomar um parágrafo para explorar o significado da definição (admitidamente meta-teorética) de satisfatibilidade. Primeiro, vemos que se a fórmula sendo interpretada é um sentença[1], então não importa quais valorações f, f' que dermos, dada uma σ-sentença:

$$\mathfrak{A} \vDash_f \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash_{f'} \sigma$$

Segundo, se uma fórmula da língua é $\varphi(x, y, z)$[2] onde estas vairáveis estão livres na fórmula, então se $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ forem objetos do domínio de uma estrutura compatível, "$\varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$" — que gostaríamos que significasse quão verdade é dizer $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ estão relacionados como φ predica — se traduz simplesmente em: $f' = f[x/\hat{x}; y/\hat{y}; z/\hat{z}]$ uma nova valoração de variáveis:

$$\mathfrak{A} \vDash_{f'} \varphi$$

Codifica exatamente isso. $\vDash_{f'}$ vale se e só se a estrutura dá uma semiose à φ "avaliada" nos objetos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Assim, satisfatibilidade é a codificação dessa interpretação de uma coisa *sintática*, a fórmula, em uma coisa *semântica* relações entre objetos, quantificações sobre o domínio, etc.

Finalmente, — dado um coleção de fórmulas Γ de uma língua compatível com $\mathfrak{A}$ estrutura e uma valoração f —, dizemos que:

$$\mathfrak{A} \vDash_f \Gamma \Leftrightarrow \text{ para toda } \varphi \text{ de } \Gamma\text{: } \mathfrak{A} \vDash_f \varphi$$

[1] *ie.* todas as variáveis da fórmula estão quantificadas sobre por algum $\forall$ ou um $\exists$, em todos os escopos.

[2] Onde x, y, z são açucar sintático para alguns x_i, x_j, x_k.

E que, se Γ for coleção de sentenças, então dizemos:

$$\mathfrak{A} \models \Gamma \Leftrightarrow \text{ para toda } \varphi \text{ de } \Gamma\text{: } \mathfrak{A} \models_f \varphi$$

onde f é qualquer (fixa) valoração das variáveis, por exemplo: $f(x_i) = \hat{x}$[3]

1.1.2 Provabilidade

O interessante da satisfatibilidade como definida antes é sua relação com a provabilidade. Para explora-la, devemos tratar de "teorias".

Agora, sendo um pouco colecionista, considere a coleção das fórmulas de de uma língua $\mathcal{L}_\Sigma$, com $\Sigma = \langle R_0, \ldots, R_n \rangle$.

Definição **Consequência Sintática**:
A ideia por trás da definição é que existem coisas que são verdadeiras independente de interpretação e localidade. Por exemplo, não importa se $\forall x_7 \forall x_8 : R_3(x_7, x_8)$ é verdade ou não em um uma dada estrutura (de assinatura compatível), sempre vale que: $[\forall x_7 \forall x_8 : R_3(x_7, x_8)] \to [\exists x_7 : \exists x_8 : R_3(x_7, x_8)]$. Isto é, existem sentenças que não dependem de interpretações de variávei nem da semântica das relações: suas verdades são *consequências sintáticas*.

Então vamos definir uma relação entre conjuntos de sentenças de uma língua e sentenças desta mesma língua a de consequência sintática.

Seja $\Gamma \subset \mathcal{L}$ conjunto de sentenças de uma língua. Seja também φ uma sentença da mesma língua. Dizemos que φ é consequência sintática de Γ:

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi)$$[4]

* * *

[3]Pelo menos uma tal valoração existe pois os domínios de estruturas são não vazios.

[4]Onde $\mathfrak{A}$ é uma estrutura de assinatura compatível. Estamos, de certa forma, com $\mathfrak{A}$ livre sobre estruturas, o que é assustador. Afinal, para teoria de conjuntos, por exemplo, potencialmente estaríamos quantificando sobre classe próprias. E, em teorias mais fortes, todo tipo de coisas informalizáveis. Já estamos, no entanto, em uma meta-teoria generosa.
Pouco mais abaixo de onde estamos se agita um mar de metafísica, e questões epistemo e ontológicas no qual não ousamos mergulhar.

A definição se extende para conjuntos de sentenças simplemente dizendo

$$\Gamma \vdash \Sigma \Leftrightarrow \text{ para todo } \sigma \text{ de } \Sigma \text{ temos: } \Gamma \vdash \sigma$$

Esta é uma definição de fato bem estranha, definimos uma coisa ser sintáticamente consequente da outra em termos de interpretações, que são semânticas em natureza[5]. No entanto, ela é uma relação extremamente razoável: não há interpretação que tenha Γ sem ter φ. De alguma forma, dizer que "Em todo lugar que Γ vale, φ vale" nos garante que não importa o lugar, apenas Γ e φ.

Teorias

DEFINIÇÃO **Teoria**:

Dada uma língua, um subconjunto de sentenças $\mathcal{T}$ é dito uma teoria quando ele é não-vazio e $\vdash$-fechado. Isto é, se $\mathcal{T} \vdash \tau$ então τ já estava em $\mathcal{T}$. Ou seja, é uma coleção de sentenças que contém todas as suas consequências semânticas.

$* * *$

Dada uma língua $\mathcal{L}$, e um conjunto de sentenças não-vazio desta que batizamos "axiomas" $\mathcal{A}$, dizemos que um conjunto de sentenças $\mathcal{T}$ é a teoria de $\mathcal{A}$ exatamente quando *para toda* τ *de* $\mathcal{T}$*, temos* $\mathcal{A} \vdash \tau$, que podemos abreviar para $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

O fato de que, para um conjunto de axiomas conforme acima, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ é teoria verifica-se por:

PROVA:
Suponha que $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \vdash \tau$.
Então, $\mathfrak{A} \vDash \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \tau$.

[5]É claro que é possível fazê-lo de maneira puramente sintática, que é útil para computadores e provadores automáticos de teoremas, mas cremos que é uma abordagem que oculta algo da beleza da relação inseparável entre $\vdash$ e $\vDash$.

Por outro lado, uma abordagem sintática *é* de fato mais precisa, pois não necessita quantificar sobre as estruturas compatíveis com a língua, *etc.*

Mas $\mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{A}$ pois $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.
Por outro lado, $\mathfrak{A} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, pois, para cada σ em $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \vdash \sigma$.
Assim, $\mathcal{A} \vdash \tau$, e portanto, τ está em $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.