2. előadás

FÜGGVÉNYEK 2.

Valós-valós függvények

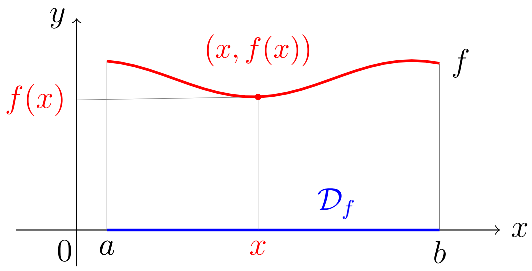
Valós-valós függvényeknek nevezzük az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket, azaz $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ és $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}$. Az ilyen függvények sajátossága, hogy hozzárendelési szabálya gyakran képlettel adható meg. Alapvetően három különböző módot fogunk alkalmazni egy valós-valós függvény megadására, amelyeket a másodfokú alapfüggvénnyel illusztrálunk:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2$,
- $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$,
- $f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

A valós-valós függvényeknek egy másik fontos sajátossága, hogy azokat a síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben szemléltethetjük. Az

$$\left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f\right\}$$

síkbeli halmaz az ***f* függvény grafikonja**. Az ábra ezt illusztrálja.



A matematikai analízis egyik alapvető feladata valós-valós függvények *általános* tulajdonságainak a leírása. Ezeket a tulajdonságokat fogjuk fokozatosan bevezetni és tanulmányozni az analízis kurzusok során.

Először néhány olyan *egyszerű* függvénytulajdonságra emlékeztetünk, amelyeket az előző tanulmányaikban már megismertek.

1. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós-valós függvény*

- ***felülről korlátos**, ha*

$$\exists\, K \in \mathbb{R},\ \textit{hogy}\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f\ \textit{esetén}\ f(x) \le K,$$

*az ilyen K számot az f függvény egy **felső korlátjának** nevezzük;*

- ***alulról korlátos**, ha*

$$\exists\, k \in \mathbb{R},\ \textit{hogy}\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f\ \textit{esetén}\ f(x) \ge k,$$

*az ilyen k számot az f függvény egy **alsó korlátjának** nevezzük;*

- ***korlátos**, ha felülről is és alulról is korlátos, azaz*

$$\exists\, K \in \mathbb{R},\ \textit{hogy}\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f\ \textit{esetén}\ |f(x)| \le K.$$

Egy függvény korlátossága az értékkészletének korlátosságát jelenti. Azok a korlátos függvények, amelyeknek a grafikonja két vízszintes vonal közé esik. Pl. az $f(x) := x^2 \big(x \in [-1,1]\big)$ függvény korlátos.

2. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós-valós függvény*

- ***monoton növekedő*** *(jele: $\nearrow$), ha*

$$\forall\, x, y \in \mathcal{D}_f,\ \ x < y \ \ \textit{esetén} \ \ f(x) \le f(y),$$

- ***monoton csökkenő*** *(jele: $\searrow$), ha*

$$\forall\, x, y \in \mathcal{D}_f,\ \ x < y \ \ \textit{esetén} \ \ f(x) \ge f(y),$$

- ***szigorúan monoton növekedő*** *(jele: $\uparrow$), ha*

$$\forall\, x, y \in \mathcal{D}_f,\ \ x < y \ \ \textit{esetén} \ \ f(x) < f(y),$$

- ***szigorúan monoton csökkenő*** *(jele: $\downarrow$), ha*

$$\forall\, x, y \in \mathcal{D}_f,\ \ x < y \ \ \textit{esetén} \ \ f(x) > f(y),$$

- ***(szigorúan) monoton****, ha ott (szigorúan) monoton növekedő vagy csökkenő.*

A szigorú monotonitás úgy jelentkezik a függvény grafikonján, hogy a függvényértékek mindig emelkednek, vagy mindig csökkennek ahogy jobbra haladunk. Például az $f(x) := x^2$ $\big(x \in [0,+\infty)\big)$ függvény szigorúan monoton növekvő.

Egy f valós-valós függvény korlátossága, ill. monotonitása egy adott $C \subset \mathcal{D}_f$ halmazon is értelmezhető. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *korlátos*, ill. *monoton a $C \subset \mathcal{D}_f$ halmazon*, ha az $f_{|C}$ függvény korlátos, ill. monoton. Ehhez fontos tudni, hogy milyen értékeket vehet fel a függvény a C halmazon.

Halmaz függvény által létesített képe, ill. őskép

A továbbiakban feltesszük, hogy A és B nemüres halmazok.

3. definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor* ***a C halmaz f által létesített képén*** *az*

$$f[C] := \big\{f(x) \mid x \in C\big\} = \big\{y \in B \mid \exists\, x \in C :\ y = f(x)\big\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.

Világos, hogy az f függvény értékkészlete az értelmezési tartományának f által létesített képe, azaz

$$\mathcal{R}_f = f\left[\mathcal{D}_f\right].$$

Megjegyzés. Szavakkal így is fogalmazhatunk:

- $f[C]$ az a B-beli halmaz, amelyet az $f(x)$ függvényértékek „befutnak”, ha x „befutja” a C halmaz elemeit.

- Az $f[C]$ halmaz B azon y elemeit tartalmazza, amelyekhez létezik olyan $x \in C$, amelyre $y = f(x)$. ■

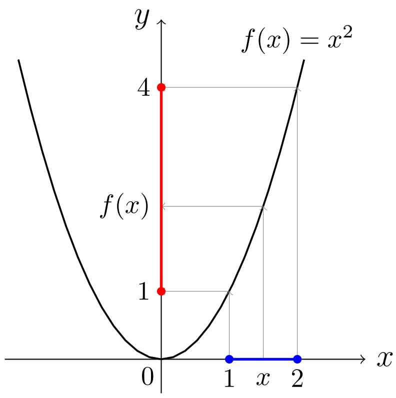
1. feladat. *Határozzuk meg a* $C := [1, 2]$ *halmaz*

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét!

Megoldás. Nézzük először a feladat grafikus megoldását! Az ábráról látjuk, hogy

$$f\Big[[1, 2]\Big] = [1, 4].$$



Most megmutatjuk a feladat precíz megoldását. A definíció alapján

$$f\Big[[1, 2]\Big] = \Big\{x^2 \mid 1 \le x \le 2\Big\} =$$
$$= \Big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in [1, 2]: \ y = x^2\Big\}.$$

Azt kell tehát meghatározni, hogy x^2 milyen értékek vesz fel, ha x „befutja” az $[1, 2]$ intervallum pontjait. Mivel

$$1 \le x \le 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \le x^2 \le 4, \quad \text{azaz} \quad x^2 \in [1, 4],$$

ezért

$$(*) \qquad f\Big[[1, 2]\Big] \subset [1, 4].$$

A kérdés ezek után az, hogy az x^2 függvényértékek vajon teljesen „befutják-e” az egész $[1, 4]$ intervallumot, ha x „befutja” az $[1, 2]$ intervallum pontjait, vagyis igaz-e a fordított irányú

$$(\#) \qquad [1, 4] \subset f\Big[[1, 2]\Big]$$

tartalmazás is. Az előzőek alapján ez azzal ekvivalens, hogy

$$(\#') \qquad \forall y \in [1, 4] \text{ számhoz } \exists\, x \in [1, 2]\colon y = x^2.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$. Mivel $1 \le y \le 4$, ezért $1 \le \sqrt{y} \le 2$, így $x_1 \in [1, 2]$. Ez pedig azt jelenti, hogy a $(\#')$ állítás, tehát a vele ekvivalens $(\#)$ tartalmazás is igaz.

$(*)$ és $(\#)$ alapján a két halmaz egyenlő. Bebizonyítottuk tehát azt, hogy

$$f\Big[[1, 2]\Big] = [1, 4].$$

4. definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $D \subset B$. Ekkor **a D halmaz f által létesített ősképén** az*

$$f^{-1}[D] := \Big\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\Big\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

Világos, hogy az f függvény értelmezési tartománya az értékkészletének f által létesített ősképe, azaz

$$\mathcal{D}_f = f^{-1}\Big[\mathcal{R}_f\Big].$$

2. feladat. *Számítsuk ki a $D := [1, 4]$ halmaz*

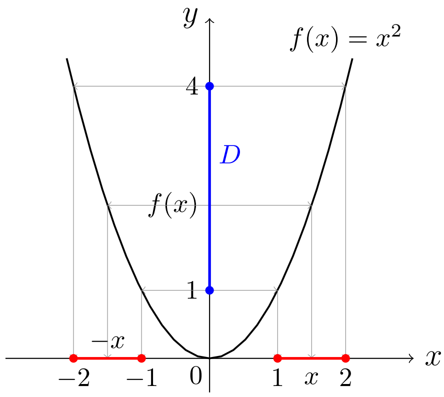
$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét!

Megoldás. Most is a grafikus megoldással kezdjük.

Az ábráról látjuk, hogy

$$f^{-1}\Big[[1, 4]\Big] = [-2, -1] \cup [1, 2].$$



A feladat precíz megoldása a következő. A definíció alapján

$$f^{-1}\Big[[1, 4]\Big] = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [1, 4]\Big\} = \\ = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x^2 \le 4\Big\}.$$

Így $f^{-1}\Big[[1, 4]\Big]$ az $1 \le x^2 \le 4$ egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. Mivel

$$1 \le x^2 \le 4 \iff 1 \le |x| \le 2 \iff 1 \le x \le 2 \quad \text{vagy} \quad -2 \le x \le -1 \iff \\ \iff x \in [-2, -1] \cup [1, 2],$$

ezért bebizonyítottuk azt, hogy

$$f^{-1}\Big[[1, 4]\Big] = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

Műveletek függvényekkel

Függvények inverze

Az előző előadáson már megismerkedtünk az invertálható függvény fogalmával. Akkor mondtuk azt, hogy egy $f : A \to B$ függvény invertálható, ha az $A = \mathcal{D}_f$ halmaz bármely két különböző pontjának a képe különböző. Ezt pedig három különböző módon is le lehet írni:

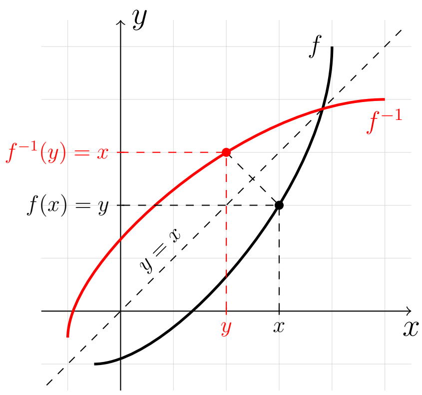
- f invertálható $\iff$ $\forall\, x, t \in \mathcal{D}_f$ esetén $x \ne t \implies f(x) \ne f(t)$,
- f invertálható $\iff$ $\forall\, x, t \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) = f(t) \implies x = t$,
- f invertálható $\iff$ $\forall\, y \in \mathcal{R}_f$-hez $\exists!\, x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) = y$.

Ekkor az f inverz függvényét (vagy röviden inverzét) így értelmeztük:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \text{ amelyre } f(x) = y.$$

Megjegyzés. Itt hívjuk fel a figyelmet egy, a jelölésekkel kapcsolatos látszólagos következetlenségre. Az $f^{-1}[D]$ szimbólum *tetszőleges* f függvény esetén a D halmaz f által létesített ősképét jelölte. Azonban, ha f *invertálható* függvény, akkor ugyanezzel jelöltük – a fogalmilag igencsak különböző dolgot, nevezetesen – a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képét. Ez azért nem vezet félreértéshez – sőt némiképp egyszerűsíti a bevezetett jelöléseket –, mert minden invertálható f függvény és minden $D \subset \mathcal{R}_f$ esetén a D halmaz f által létesített ősképe – azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\}$ halmaz – megegyezik a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével – azaz az $\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} \mid y \in D\}$ halmazzal. ■

Tegyük fel, hogy az f **valós-valós függvény** invertálható, és ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek tengelyein az egységek egyenlő hosszúak. Vegyük f grafikonjának egy (x, y) pontját, azaz legyen $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, vagyis az (y, x) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükörképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy **az f és az f^{-1} függvények grafikonjai – geometriailag – egymás tükörképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan**.



Megjegyzés. Ha van egy „átlátszó” papírunk, akkor nincs szükség tükrözésre. Az f grafikonjának a megrajzolása után megkapjuk az inverzének a grafikonját, ha először elforgatjuk a papírt 90 fokkal az óra járásával megegyező irányban, és utána függőlegesen megforgatjuk a papírt. Az az ábra, ami a papíron át látható, az f^{-1} függvény grafikonja. ■

3. feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x) := \frac{3x-7}{x-2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\big)$$

függvény invertálható, és számítsuk ki az inverzét!

Megoldás. A számítások egyszerűsítése érdekében alakítsuk át a függvény képletét:

$$\frac{3x-7}{x-2} = \frac{3(x-2)-1}{x-2} = 3 - \frac{1}{x-2}.$$

Az invertálhatóság igazolása: Ha $x, t \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, azaz $x, t \neq 2$, akkor

$$f(x) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad 3 - \frac{1}{x-2} = 3 - \frac{1}{t-2} \quad \Longrightarrow \quad x-2 = t-2 \quad \Longrightarrow \quad x = t,$$

ami azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz előállítása: A definíció értelmében

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \text{ amelyre } f(x) = y.$$

Ehhez meg kell határoznunk a függvény értékkészletét:

$$\mathcal{R}_f = f\big[\mathcal{D}_f\big] = \left\{3 - \frac{1}{x-2} \;\middle|\; 2 \neq x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Mivel

$$\mathbb{R} \ni x \neq 2 \quad\Longleftrightarrow\quad x - 2 \neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{x-2} \neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 3 - \frac{1}{x-2} \neq 3,$$

így $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Ha $y \in \mathcal{R}_f$, akkor

$$f(x) = y \quad\Longleftrightarrow\quad 3 - \frac{1}{x-2} = y \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{x-2} = 3 - y \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad x - 2 = \frac{1}{3-y} \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2 + \frac{1}{3-y} = \frac{2y-7}{y-3}.$$

Tehát

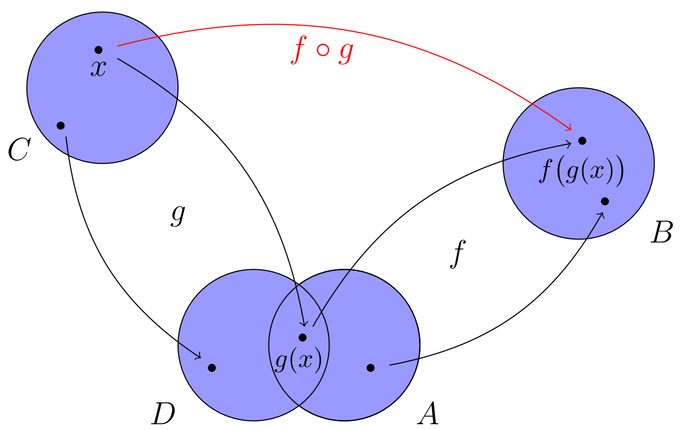
$$f^{-1}(y) = \frac{2y-7}{y-3} \qquad \big(y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\big).$$

Függvények kompozíciója

Legyenek A, B, C és D tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok, illetve $f : A \to B$ és $g : C \to D$ adott függvények. Az $f \circ g$ kompozíció akkor képezhető, ha a $C = \mathcal{D}_g$ halmaznak van olyan x eleme, amelynek a $g(x)$ képe benne van az $A = \mathcal{D}_f$ halmazban, azaz

$$\big\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\big\} \neq \emptyset.$$

Ekkor a $g(x)$ elem f szerinti képe, azaz $f\big(g(x)\big)$ lesz az x elemnek a kompozíció által meghatározott képe, azaz $\big(f \circ g\big)(x)$.



5. definíció. *Tegyük fel, hogy $f : A \to B$ és $g : C \to D$ olyan függvények, amelyekre*

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

*Ebben az esetben az f (**külső**) és a g (**belső**) függvény **összetett függvényét** (vagy más szóval f és g **kompozícióját**) az $f \circ g$ szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:*

$$f \circ g : \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \to B, \qquad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya tehát a

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\}$$

halmaz. A korábban bevezetett fogalmakat felhasználva egyszerűen belátható, hogy

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = g^{-1}\left[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f\right].$$

Ha még a $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ tartalmazás is fennáll, akkor

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g.$$

Ha $\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \emptyset$, akkor f és g kompozícióját nem értelmezzük.

Megjegyzés. Az $f \circ g$ függvény $\mathcal{D}_{f \circ g}$ értelmezési tartományát szavakkal így fogalmazhatjuk meg: „$\mathcal{D}_{f \circ g}$ a belső függvény értelmezési tartományának azon pontjait tartalmazza, amelyekben felvett függvényértékek benne vannak a külső függvény értelmezési tartományában.” ■

4. feladat. *Legyen*

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad \big(x \in (-\infty, 1]\big) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket!

Megoldás. $\boxed{f \circ g}$. Mivel

$$\Big\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\Big\} = [-1, 1] \neq \emptyset,$$

ezért az $f \circ g$ kompozíció képezhető, és $\mathcal{D}_{f \circ g} = [-1, 1]$. Így

$$f \circ g : [-1, 1] \ni x \mapsto f\big(g(x)\big) = \sqrt{1 - g(x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

azaz

$$\big(f \circ g\big)(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \big(-1 \leq x \leq 1\big).$$

$\boxed{g \circ f}$. Mivel

$$\Big\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\Big\} = \Big\{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\Big\} = (-\infty, 1] \neq \emptyset,$$

ezért a $g \circ f$ kompozíció is képezhető, és $\mathcal{D}_{g \circ f} = (-\infty, 1]$. Így

$$g \circ f : (-\infty, 1] \ni x \mapsto g\big(f(x)\big) = g\Big(\sqrt{1-x}\Big) = \Big(\sqrt{1-x}\Big)^2 = 1 - x,$$

azaz

$$\big(g \circ f\big)(x) = 1 - x \qquad \big(x \leq 1\big).$$

Megjegyzés. Az előbbi példánál látható, hogy

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f},$$

ezért a kompozíció művelete **nem kommutatív** művelet. ■

Algebrai műveletek valós-valós függvényekkel

Az f és a g valós-valós függvények összegét, szorzatát és hányadosát a $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$ feltétel teljesülése esetén a következőképpen értelmezzük:

- $\big(f+g\big)(x) := f(x) + g(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$,
- $\big(f \cdot g\big)(x) := f(x) \cdot g(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$,
- ha még az is teljesül, hogy $A := \big\{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\big\} \neq \emptyset$, akkor
$$\left(\frac{f}{g}\right) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (x \in A).$$

VALÓS SOROZATOK 1.

Valós-valós függvények tulajdonságainak vizsgálatát az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ típusú függvényekkel, vagyis a sorozatokkal kezdjük.

A sorozat fogalma, megadása és szemléltetése

A korábbi tanulmányaikban már megismerkedtek a sorozatokkal.

6. definíció. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt (**valós**) **sorozatnak** vagy **számsorozatnak** nevezzük. Az*

$$a(n) =: a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

*helyettesítési érték a sorozat **n-edik** (vagy **n-indexű**) **tagja**, a tag sorszámát jelző szám a tag **indexe**.*

A számsorozatok tehát a természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvények, így öröklik a valós-valós függvényeknél alkalmazott megadást, jelölésmódot és néhány elemi tulajdonságot is. Azonban $\mathbb{N}$ sajátos induktív értelmezése miatt érdemes ettől eltérő jelölésmódot is alkalmazni. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra az

$$a, \qquad (a_n), \qquad \big(a_0, a_1, a_2, \dots\big)$$

jelölések bármelyikével fogunk hivatkozni. Így például

$$\big(n^2\big) \qquad \text{vagy} \qquad \big(0, 1, 4, 9, \dots\big)$$

azt a sorozatot jelöli, amelynek n-edik tagja n^2, azaz $a_n := n^2$ $(n \in \mathbb{N})$.

Egy sorozat megadásához egyértelműen meg kell adni azt, hogy az $n \in \mathbb{N}$ számhoz melyik valós szám van hozzárendelve. Ezt többféleképpen is megtehetjük:

a) **explicit módon**, a valós-valós függvények megadásához hasonlóan, pl.

- $a_n := 3n^2 + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$,
- $a_n := \sqrt{n^2 - 100} \quad (n = 10, 11, 12, \ldots)$,
- $a_n := \begin{cases} 2n^2 & (n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots) \\ n & (n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots). \end{cases}$

b) **rekurzív módon**, az $\mathbb{N}$ sajátos induktív értelmezése alapján; pl.

- $a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + 2 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$ (*egylépéses rekurzió*),
- $a_0 := 1, \quad a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$ (*kétlépéses rekurzió*), ez a **Fibonacci-sorozat**.

Rekurzív sorozatról akkor beszélünk, ha megadjuk a sorozat első m tagját, és megmondjuk azt, hogy egy tagját hogyan képezzük az előtte lévő m tag segítségével. Ekkor **m-lépéses** rekurzióról beszélünk.

Megjegyzés. A rekurzív sorozatokról. Felvetődik az a kérdés, hogy rekurzióval vajon „jól definiáltunk-e” egy sorozatot, vagyis a megadott feltételek egyértelműen meghatározzák-e a sorozat tagjait. Erre a kérdésre válaszol az ún. **rekurzió tétel**. ■

Az előző példák is sugallják azt, hogy tetszőlegesen rögzített $M \in \mathbb{Z}$ esetén az

$$a : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq M\} \to \mathbb{R}$$

függvényt is célszerű sorozatnak tekinteni, vagyis egy sorozatot bármely egész számtól is el lehet indítani.

A függvények egyenlőségével kapcsolatban tett megállapodásunkból az következik, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és a $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat **egyenlő**, ha bármely index esetén az azonos indexű tagok egyenlők, azaz $a_n = b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül.

Néhány nevezetes példa:

1. **A harmonikus sorozat:** $a_n := \dfrac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

2. **A számtani sorozat:** Adott $\alpha, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$a_n := \alpha + nd \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezt a sorozatot rekurzív módon is megadhatjuk:

$$a_0 := \alpha, \qquad a_{n+1} := a_n + d \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

3. **A mértani** (vagy **geometriai**) **sorozat:** Adott $\alpha, q \in \mathbb{R}$ esetén

$$a_n := \alpha\, q^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

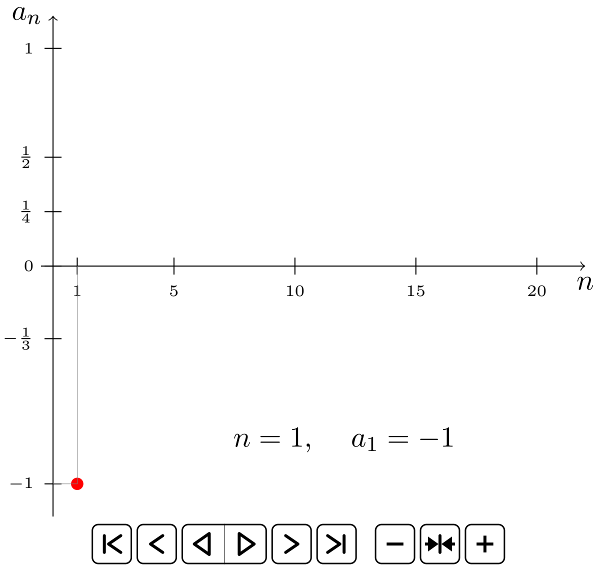
Ezt a sorozatot rekurzív módon így adjuk meg:

$$a_0 := \alpha, \qquad a_{n+1} := q \cdot a_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

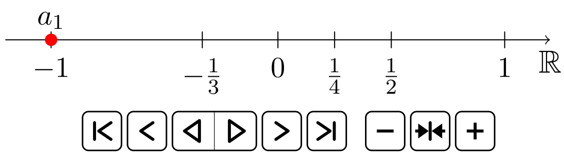
A számsorozatokat kétféle módon is tudjuk szemléltetni. Mivel speciális valós-valós függvények, így a különálló pontokból álló grafikonjukat ábrázolhatjuk a koordináta-rendszerben. Másrészt a sorozat tagjait – értékei szerint – elhelyezhetjük egy számegyenesen. Mindkét szemléltetési módot megmutatjuk az

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat esetében:



Koordináta-rendszerben



Számegyenesen

Elemi tulajdonságok, műveletek

Valós-valós függvények esetében bevezettük a monoton és a korlátos függvény fogalmát. Nem nehéz meggondolni, hogy sorozatok esetében ezek a fogalmak az alábbi módon leegyszerűsödnek.

7. definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) valós sorozat*

- ***monoton növekedő*** *(jele: $\nearrow$), ha*
$$a_n \le a_{n+1} \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$
- ***szigorúan monoton növekedő*** *(jele: $\uparrow$), ha*
$$a_n < a_{n+1} \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$
- ***monoton csökkenő*** *(jele: $\searrow$), ha*
$$a_{n+1} \le a_n \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$
- ***szigorúan monoton csökkenő*** *(jele: $\downarrow$), ha*
$$a_{n+1} < a_n \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén.}$$

Az (a_n) sorozatot ***monoton*** *sorozatnak nevezzük, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.*

Megjegyzés. A sorozatok monotonitását sokszor a teljes indukció elvével igazolhatjuk. Gyakran hasznos lehet, ha a monotonitás definíciójában szereplő egyenlőtlenség helyett egy vele ekvivalens egyenlőtlenséget igazolunk:
$$a_{n+1} \ge a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{n+1} - a_n \ge 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$
ha $a_n > 0$ minden n-re, akkor
$$a_{n+1} \ge a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Például az
$$a_n := \frac{2n-1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat szigorúan monoton növekvő, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} =$$
$$= \frac{(2n+1)(n+1)-(2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0.$$

Ugyanígy az
$$a_n := \frac{1}{2^n} > 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{n+1}} : \frac{1}{2^n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$
egyenlőtlenség teljesül. ■

8. definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (a_n) *sorozat*

- ***alulról korlátos***, *ha*
$$\exists\, k \in \mathbb{R}, \quad \textit{hogy} \quad k \le a_n \qquad (n \in \mathbb{N});$$
- ***felülről korlátos***, *ha*
$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \quad \textit{hogy} \quad a_n \le K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha a sorozat alulról és felülről is korlátos, akkor ***korlátos*** *sorozatnak mondjuk. Ekkor*
$$\exists K > 0, \quad \textit{hogy} \quad |a_n| \le K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Például az
$$a_n := \frac{2n-1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat felülről korlátos, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:
$$\frac{2n-1}{n+1} < 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2n-1 < 2n+2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < 2,$$
ami igaz. Ez egyébként a
$$\frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
átalakításból is azonnal látható. De a sorozat alulról is korlátos, hiszen már igazoltuk, hogy monoton növekvő, ezért
$$a_n \ge a_0 = -1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Így igazoltuk azt, hogy az
$$a_n := \frac{2n-1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat korlátos.

Megjegyzések.

1^o Sorozat korlátosságát, például egy „megsejtett” felső korlátot sok esetben célszerű a teljes indukció módszerével igazolni.

2^o Egy sorozat felülről, ill. alulról korlátossága megegyezik az értékkészletének felülről, ill. alulról korlátosságával. Hasonlóan értelmezhetjük a sorozatok alsó és felső korlátjait, illetve a sorozatok infimumát, ill. szuprémumát. ■

Valós-valós függvények mintájára adott sorozatokból kiindulva **algebrai műveletekkel** új sorozatokat képezhetünk. Az (a_n) és a (b_n) sorozat

- **összegén** az
$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$
- **szorzatán** az
$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n),$$
- $b_n \ne 0$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén a **hányadosán** az
$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$
sorozatot értjük.

Környezetek

Az analízisben fontos szerepet játszik az $\mathbb{R}$-beli **távolság** és a **környezet** fogalma. Ezek definiálásához induljuk ki az abszolút érték értelmezéséből:

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$

Az alábbi állítások igazak minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén:

a) $|x| \geq 0$, és $\quad |x| = 0 \iff x = 0$,

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Valóban, az első két állítás bizonyítását nem nehéz meggondolni, a c)-t pedig a gyakorlaton igazoltuk. A fenti állításokból azonnal következik, hogy

i) $|x - y| \geq 0 \quad$ és $\quad |x - y| = 0 \iff (\ x - y = 0\ ) \iff x = y \quad$ (pozitív definit),

ii) $|x - y| = \Big(\big|(-1)(y - x)\big| = \big|(-1)\big| \cdot |y - x| \Big) = |y - x| \quad$ (szimmetrikus),

iii) $|x - y| \Big(= \big|(x - z) + (z - y)\big| \Big) \leq |x - z| + |z - y| \quad$ (háromszög egyenlőtlenség).

Két valós szám **távolságát**, tekintettel a számegyenesen való természetes elhelyezkedésükkel úgy értelmezzük, hogy a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Más szavakkal vesszük a két szám különbségének abszolút értékét:

$$d(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

A valós számok távolságára vonatkozó i), ii) és iii) tulajdonságokat a továbbiakban gyakran fogjuk alkalmazni.

Valós szám **környezetének** fogalmát így értelmezzük:

9. definíció. *Valamilyen $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ esetén a*

$$K_r(a) := \Big\{ x \in \mathbb{R} \ \Big| \ |x - a| < r \Big\}$$

*halmazt az **a középpontú r sugarú környezetének** nevezzük.*

A környezetek tehát olyan halmazok, amelyek elemeinek távolsága a szóban forgó középponttól kisebb, mint a megadott sugár. Mivel

$$|x - a| < r \iff -r < x - a < r \iff a - r < x < a + r,$$

ezért

$$\boxed{K_r(a) = (a - r, a + r)}\,.$$

A környezetekre a következő tulajdonságok érvényesek:

a) Minden valós szám saját környezetének eleme:

$\forall\, a \in \mathbb{R}$ és $\forall\, r > 0$ esetén $a \in K_r(a)$.

b) Minden környezet része az azonos középpontú, de nála nagyobb sugarú környezeteknek:

$\forall\, a \in \mathbb{R}$ és $\forall\, 0 < r_1 < r_2$ esetén $K_{r_1}(a) \subset K_{r_2}(a)$.

c) Minden környezet tartalmazza tetszőleges elemének egy környezetét:

$\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, r > 0$ és $\forall\, b \in K_r(a)$-hez $\exists\, r_1 > 0$, hogy $K_{r_1}(b) \subset K_r(a)$.

d) Bármely két különböző valós szám szétválasztható diszjunkt környezetekkel:

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$-hez $\exists\, r_1, r_2 > 0$, hogy $K_{r_1}(a) \cap K_{r_2}(b) = \emptyset$.

A környezet fogalmát célszerű kiterjeszteni a kibővített valós számok halmazára, azaz célszerű értelmezni a $+\infty$ és a $-\infty$ elemek környezeteit.

10. definíció. *Legyen $r > 0$ valós szám. Ekkor a $+\infty$, ill. a $-\infty$ elemek r sugarú környezetét így értelmezzük:*

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \qquad \textit{ill.} \qquad K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

Nem nehéz meggondolni, hogy az így kiterjesztett környezetfogalom is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden környezet része az azonos középpontú, de nála nagyobb sugarú környezeteknek:

$$\forall\, a \in \overline{\mathbb{R}} \ \text{ és } \ \forall\, 0 < r_1 < r_2 \ \text{ esetén } \ K_{r_1}(a) \subset K_{r_2}(a),$$

illetve bármely két különböző $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem szétválasztható diszjunkt környezetekkel:

$$\forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}},\ a \neq b\text{-hez } \exists\, r_1, r_2 > 0, \ \text{hogy } K_{r_1}(a) \cap K_{r_2}(b) = \emptyset.$$