7. előadás

VÉGTELEN SOROK 2.

További konvergenciakritériumok

A gyök- és a hányadoskritérium

1. tétel (A Cauchy-féle gyökkritérium). *Tekintsük a* $\sum a_n$ *végtelen sort, és tegyük fel, hogy létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

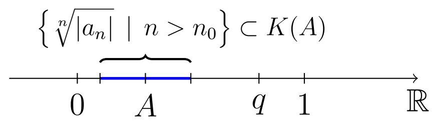
1° $0 \leq A < 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*

2° $A > 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor divergens,*

3° $A = 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért $A \geq 0$.

1° Tegyük fel, hogy $\boxed{0 \leq A < 1}$.

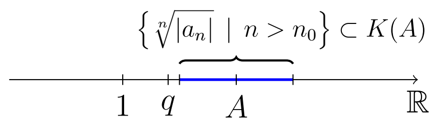


Vegyünk egy A és 1 közötti q számot!

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) < q \quad\Longrightarrow\quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon\ \sqrt[n]{|a_n|} < q, \quad \text{azaz} \quad |a_n| < q^n.$$

Mivel $0 < q < 1$, ezért a $\sum q^n$ mértani sor konvergens. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor is konvergens, és ez azt jelenti, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

2° Tegyük fel, hogy $\boxed{A > 1}$.



Vegyünk most egy 1 és A közötti q számot!

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) > q \quad\Longrightarrow\quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon\ \sqrt[n]{|a_n|} > q, \quad \text{azaz} \quad |a_n| > q^n.$$

Tehát, véges sok n indextől eltekintve $|a_n| > q^n > 1$.

Ebből következik, hogy $\lim(a_n) \neq 0$, és így a $\sum a_n$ sor divergens.

3° Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- a $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \dfrac{1}{n}$, azaz $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$;
- a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \dfrac{1}{n^2}$, azaz $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$.

2. tétel (A d'Alembert-féle hányadoskritérium). *Tegyük fel, hogy a* $\sum a_n$ *végtelen sor tagjai közül egyik sem* 0 *és létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1° $0 \le A < 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*

2° $A > 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor divergens,*

3° $A = 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Világos, hogy $A \ge 0$.

1° Legyen $\boxed{0 \le A < 1}$, és vegyünk egy olyan q számot, amire $A < q < 1$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q \quad\Longrightarrow\quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \ge n_0\colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q, \quad \text{azaz} \quad |a_{n+1}| < q|a_n|.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|a_{n_0+1}| < q|a_{n_0}|, \quad |a_{n_0+2}| < q|a_{n_0+1}|, \quad \ldots \quad , |a_{n-1}| < q|a_{n-2}|,\ |a_n| < q|a_{n-1}|$$

minden $n \ge n_0$ esetén. Így

$$|a_n| < q|a_{n-1}| < q^2|a_{n-2}| < q^3|a_{n-3}| < \cdots < q^{n-n_0-1}|a_{n_0+1}| < q^{n-n_0}|a_{n_0}| = q^{-n_0}|a_{n_0}|q^n = aq^n,$$

ahol $a := q^{-n_0}|a_{n_0}|$ egy n-től független konstans. A $\sum aq^n$ mértani sor konvergens, mert $0 < q < 1$. Ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor is konvergens, vagyis a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

2° Legyen $\boxed{A > 1}$, és vegyünk most egy olyan q számot, amire $1 < q < A$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q \quad\Longrightarrow\quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q, \quad \text{azaz} \quad |a_{n+1}| > q|a_n| > |a_n|.$$

Ebből következik, hogy $\lim (a_n) \ne 0$, így a $\sum a_n$ sor divergens.

3° Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$

Megjegyzések.

1^o Igazolható, hogy ha a $\sum a_n$ szigorúan pozitív tagú sorban létezik a $\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ határérték, akkor a $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ határérték is létezik, és

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz. Ez azt jelenti, hogy a gyökkritérium általánosabb a hányadoskritériumnál, azaz olyan soroknál is alkalmazható, ahol a hányadoskritérium nem. Azonban sok esetben a hányadoskritériumban szereplő képlet könnyebben kezelhető.

2^o Már több kritériumot is megismertünk sorok **konvergenciájának** az eldöntésére. Ezek felhasználásával konvergencia esetén a sor **összegét** nem tudjuk kiszámítani. Néhány esetben azonban a sor konvergenciájának az ismeretében bizonyos tételek felhasználásával a sor összegét is meg tudjuk határozni. Például a gyakorlaton már foglalkoztunk a $\sum\limits_{n=1} nq^n$ sorral, ahol $|q| < 1$. A definíció alapján igazoltuk, hogy a sor konvergens, és az összegét is kiszámoltuk. Most ennek a feladatnak egy másik megoldását is megmutatjuk.

A gyökkritérium alapján a sor konvergens, hiszen

$$a_n = nq^n \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n|q|^n} = |q| \cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = |q| \cdot 1 = |q| < 1.$$

Legyen $A := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^n \in \mathbb{R}$. Ekkor átindexeléssel azt kapjuk, hogy

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^{n+1} = q\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n + q\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n + q\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = qA + q\,\frac{1}{1-q},$$

hiszen az előző átalakításban szereplő sorok konvergensek, ami miatt a sorok lineáris kombinációra vonatkozó tétel alkalmazható. Ekkor

$$A = qA + q\,\frac{1}{1-q} \qquad \Longrightarrow \qquad (1-q)A = q\frac{1}{1-q} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{q}{(1-q)^2}. \ \blacksquare$$

Leibniz-típusú sorok

Váltakozó előjelű sorok konvergenciáját az eddigiek alapján csak akkor tudjuk eldönteni, ha a sor abszolút konvergens. Most egy olyan kritériumot ismertetünk, amelyik bizonyos speciális alakban felírható váltakozó előjelű sorok konvergenciájára ad elégséges feltételt abban az esetben is, ha a sor nem abszolút konvergens.

1. definíció. *A $0 \le a_{n+1} \le a_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ feltételt kielégítő sorozatból képzett*

$$\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

váltakozó előjelű sort ***Leibniz-típusú*** *sornak nevezzük.*

3. tétel (Leibniz-kritérium).

1^o ***Konvergencia:*** *A* $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\lim(a_n) = 0$.

2^o ***Hibabecslés:*** *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor konvergens és az összege*

$$A := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n.$$

Ekkor

$$(*) \qquad \left|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \le a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

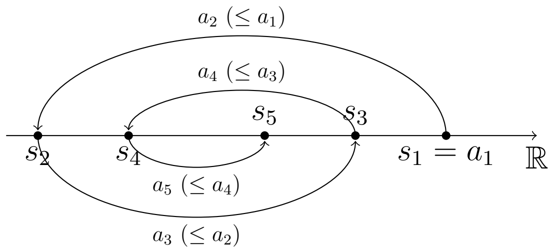
Bizonyítás.

1^o $\boxed{\Longrightarrow}$ A sorok konvergenciájának szükséges feltétele értelmében, ha a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ sor konvergens, akkor $\lim\big((-1)^{n+1}a_n\big) = 0$, ami csak akkor lehetséges, ha $\lim(a_n) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ egy Leibniz-típusú sor és $\lim(a_n) = 0$. Igazoljuk, hogy a sor konvergens. Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Szemléltessük az (s_n) részletösszeg-sorozat első néhány tagját!



$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 - a_2 = s_1 - a_2, \\ s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = s_2 + a_3, \\ s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_3 - a_4, \\ s_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_4 + a_5. \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy az ábra alapján sejthető tendencia valóban igaz, azaz, hogy az (s_{2n}) sorozat monoton növekedő, és az (s_{2n+1}) sorozat monoton csökkenő.

- A páros indexű részsorozatnál a következő csoportosításból látható, hogy

$$s_{2n} = \overbrace{\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\ge 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\ge 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{\ge 0}}^{s_{2n-2}} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\ge 0}$$

  minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, tehát (s_{2n}) valóban monoton növekedő.

- Hasonlóan, a páratlan indexű részsorozatnál

$$s_{2n+1} = \overbrace{a_1 + \underbrace{(-a_2 + a_3)}_{\le 0} + \underbrace{(-a_4 + a_5)}_{\le 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\le 0}}^{s_{2n-1}} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\le 0}$$

  minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, tehát (s_{2n+1}) monoton csökkenő sorozat.

Másrészt, az $s_0 := 0$ értelmezés mellett

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, amiből következik, hogy $s_{2n} \leq s_{2n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1. \tag{1}$$

Tehát (s_{2n}) és (s_{2n+1}) korlátos sorozatok. Mivel mindkettő monoton és korlátos, ezért konvergens is. Jelölje $A = \lim (s_{2n+1})$ és $B = \lim (s_{2n})$ a határértéküket. Ekkor

$$A - B = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

hiszen (a_{2n+1}) részsorozata az (a_n) sorozatnak. Ezért $A = B$, tehát az (s_{2n}) és az (s_{2n+1}) részsorozatok határértéke megegyezik. Ebből következik, hogy az (s_n) sorozat konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy a Leibniz-típusú sor valóban konvergens.

2^o Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ Leibniz-típusú sor konvergens és A az összege. Ekkor $A = \lim (s_{2n+1}) = \lim (s_{2n})$. Az (1) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$s_{2n} \leq A \leq s_{2n+1} \leq s_{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Így

- $0 \leq A - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad |A - s_{2n}| \leq a_{2n+1},$ és
- $a_{2n} = s_{2n-1} - s_{2n} \geq s_{2n-1} - A \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad |A - s_{2n-1}| \leq a_{2n}$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Azt kaptuk tehát, hogy

$$|A - s_n| \leq a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

ami az állítást igazolja.

Megjegyzések.

1º Az előző tételt *Gottfried Leibniz* (1646–1716) német matematikus fedezte fel, és 1714-ben levélben közölte *Johann Bernoulli* (1667–1748) svájci matematikussal. A Leibniz-kritérium konvergenciára vonatkozó állítása szerint a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor konvergens, mert az $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozat monoton csökkenve tart 0-hoz.

Később be fogjuk bizonyítani azt, hogy a sor összege

$$A := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log_e 2 =: \ln 2,$$

és ez a szám irracionális.

2º A Leibniz-kritériumban szereplő $(*)$ hibabecslés felhasználásával az A közelítő értékét (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk adni. Például, ha $n = 10$, akkor $a_{11} = 1/11$ és

$$s_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} = 0,645\overline{634920}.$$

Mivel $s_{10} < A$, ezért $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$0,645\overline{634920} = s_{10} < A < s_{10} + a_{11} = \frac{20417}{27720} = 0,736\overline{544011},$$

így

$$(\triangle) \qquad 0,6456 < A < 0,7366.$$

A Leibniz-típusú sorok hibabecslésére mintegy 250 évig csak Leibniz $(*)$ egyenlőtlensége volt ismeretes. Meglepő tény az, hogy csak az 1960-as évektől jelentek meg olyan dolgozatok, amelyekben a szerzők a szóban forgó becslés élesítését igazolták. Például `D. Rattaggi` 2018-ban közölt dolgozatában bizonyította be azt, hogy a Leibniz-sorra a következő állítás igaz: tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{4n^3 + 32n^2 + 87n + 83}{8n^4 + 68n^3 + 208n^2 + 268n + 120} < |A - s_n| < \frac{4n^2 + 16n + 17}{8n^3 + 36n^2 + 52n + 24}.$$

Ebből pl. az $n = 10$ indexre azt kapjuk, hogy

$$0,693146 < \frac{2497823}{3603600} < A < \frac{883847}{1275120} < 0,693149,$$

és ez a $(\triangle)$-nél lényegesen jobb becslés.

Végül megjegyezzük azt, hogy

$$A = \ln 2 = 0,693147180\ldots.$$

3º A Leibniz-kritériumban az (a_n) sorozat monotonitására tett feltétel nem hagyható el. Például az

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{2}{k} & (n = 2k - 1) \\[2mm] \dfrac{1}{k} & (n = 2k) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}^+)$$

pozitív tagú nullasorozat *nem monoton csökkenő*, és a $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ váltakozó előjelű (nem Leibniz-típusú!) végtelen sor divergens. ■

TIZEDES TÖRTEK, p-ADIKUS TÖRTEK

Tizedes törtek

Valós számokat már az általános iskolában is gyakran írtuk fel tizedes tört alakban. A tizedes tört olyan számábrázolás, ami jól kifejezi hol helyezkedik el az adott szám a számegyenesen, ezáltal gyorsan tudjuk a számokat összehasonlítani. Ha azt szeretnénk megállapítani, hogy melyik szám nagyobb az alábbiak közül, akkor elég egy pillantást vetni tizedes tört alakjukra:

$$\frac{15}{100} = 0,15, \qquad \frac{1}{6} = 0,166\,666\ \ldots, \qquad \frac{\sqrt{2}}{9} = 0,157\,134\ \ldots\ .$$

A valós számok középiskolából megismert végtelen tizedes tört előállítása

$$\alpha = a_0, a_1a_2a_3\ldots, \qquad \Big(a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\},\ n \in \mathbb{N}^+\Big)$$

tulajdonképpen egy végtelen sorösszeg:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

A tizedes törtek matematikailag pontos leírásához tehát a végtelen sorokkal kapcsolatos ismeretek szükségesek.

4. tétel. *Legyen $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots$$

végtelen sor konvergens és az összege

$$\alpha := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0,1].$$

Bizonyítás. Mivel

$$0 \le \frac{a_n}{10^n} \le \frac{9}{10^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

és a $\sum \frac{9}{10^n}$ mértani sor konvergens ($0 < q = 1/10 < 1$), így a majoráns kritérium miatt a sor konvergens. Másrészt a mértani sor

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1)$$

összegképlete alapján

$$0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1,$$

ezért $0 \le \alpha \le 1$.

A következő tétel azt állítja, hogy minden $[0,1]$-beli szám felírható az előző tételben megadott alakban.

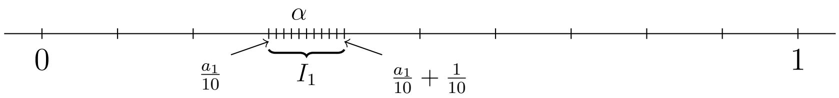
5. tétel. *Minden* $\alpha \in [0,1]$ *számhoz létezik olyan* $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ *sorozat, amire az teljesül, hogy*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\alpha \in [0,1]$ számot!

Az első lépésben osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor

$$\exists\, a_1 \in \{0,1,2,\ldots,9\} \colon \alpha \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\right] =: I_1 \quad \text{azaz} \quad \frac{a_1}{10} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$



A második lépésben osszuk fel az I_1 intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor

$$\exists\, a_2 \in \{0,1,2,\ldots,9\} \colon \alpha \in \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\right] =: I_2, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}.$$

Ha az eljárást folytatjuk, akkor az n-edik lépésben találunk olyan $a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ számot, hogy

$$s_n := \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} = s_n + \frac{1}{10^n},$$

ahol s_n a sor n-edik részletösszege. Ekkor

$$|\alpha - s_n| = \left|\alpha - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right)\right| \le \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

és így

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

2. definíció. *Legyen* $\alpha \in [0,1]$ *és* $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ *olyan sorozat, amire*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

teljesül. Ekkor $0,a_1a_2a_3\ldots$ *az* α *szám **tizedes tört alakja** és ezt az*

$$\alpha = 0,a_1a_2a_3\ldots$$

egyenlőséggel fejezzük ki.

Megjegyzések.

1^o Ha $\alpha \in [n, n+1]$, ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor α tizedes tört alakja $n, a_1a_2a_3\dots$.

2^o Bizonyos valós számoknak több tizedes tört alakja van. Például

$$\frac{1}{10} = 0,1000\dots \quad \text{és} \quad \frac{1}{10} = 0,0999\dots,$$

ugyanis

$$0,0999\dots = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}.$$

Igazolható, hogy ha egy pozitív számnak van nullára végződő tizedes tört alakja, akkor van még egy tizedes tört alakja, ami 9-re végződik. Csak ilyen esetben lehet egy pozitív számnak több tizedes tört alakja, és ekkor pontosan két különböző tizedes tört alakja van.

3^o **A tizedes tört alak előállítása.** A következő rekurzív algoritmus generálja a szám tizedes tört alakját. Legyen $\alpha \in [0, 1)$. Szorozzuk meg α-t 10-zel. a_1 legyen a kapott szám egész része, a tört része egy $[0, 1)$-beli szám, amivel az eljárás megismételhető. Ezzel egymás után kapjuk meg az a_2, a_3,... számjegyeket. Ha $\alpha = 1$, akkor tizedes tört alakja $0,999\dots$.

4^o **Tizedes törtek osztályozása.** Azt mondjuk, hogy $0, a_1a_2a_3\dots$

- *véges tizedes tört*, ha $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0 \colon a_n = 0$,
- *szakaszos végtelen tizedes tört*, ha $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ és $\exists\, k \in \mathbb{N}^+$, $\forall\, n > n_0 \colon a_{n+k} = a_n$,
- *nem szakaszos végtelen tizedes tört*, ha végtelen, de nem szakaszos tizedes tört.

A szakaszos végtelen tizedes törtek általános alakja

$$0, a_1a_2\dots a_{n_0}\underbrace{b_1b_2\dots b_k}\underbrace{b_1b_2\dots b_k}\underbrace{b_1b_2\dots b_k}\dots,$$

azaz egy ismétlődő k hosszúságú szakasz található a felírásban. Ekkor a tizedes törtet a

$$0, a_1a_2\dots a_{n_0}\overline{b_1b_2\dots b_k}$$

alakban fogjuk felírni. Például $1/3 = 0,\overline{3}$.

5^o Egy valós szám pontosan akkor **racionális**, ha tizedes tört alakja véges, vagy végtelen tizedes tört alakja szakaszos. Ebből az is következik, hogy egy valós szám akkor és csak akkor **irracionális**, ha végtelen tizedes tört alakja nem szakaszos.

6^o A tizedes törtekre (mint végtelen sorokra) értelmezhetők a műveletek, megadható rendezés, bizonyíthatók ezek tulajdonságai, érvényes a teljességi axióma is, ezért ez is egy modellje (reprezentációja) lehet a valós számoknak. Ez a **tizedes tört modell**. ■

1. feladat. *Írjuk fel a* $0,1\overline{24}$ *tizedes törtet két egész szám hányadosaként!*

Megoldás. A mértani sorok összege alapján

$$\begin{aligned}0,1\overline{24} &= 0,1 + 0,024 + 0,00024 + 0,0000024 + \dots = \\ &= 0,1 + 0,024\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots\right) = \frac{1}{10} + \frac{24}{1000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{123}{990}.\end{aligned}$$

A p-adikus törtek

A tizedes törtek szorosan kapcsolódnak a mindennapos használatban alkalmazott tízes számrendszerhez. Más számrendszerek alkalmazásának is létjogosultsága van, figyelembe véve több gyakorlati alkalmazásban betöltött szerepüket. Ezért a tizedes törtekhez hasonlóan sor kerül a p-adikus törtek bevezetésére.

A 4. és az 5. tétel bizonyításához hasonlóan igazolható a következő két állítás, ahol p átveszi a 10 szerepét.

6. tétel. *Legyen* $2 \leq p \in \mathbb{N}$ *és* $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ *egy sorozat. Ekkor a* $\sum_{n=1} \frac{a_n}{p^n}$ *sor konvergens és összege*

$$\alpha := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n} \in [0, 1].$$

7. tétel. *Legyen* $2 \leq p \in \mathbb{N}$. *Ekkor* $\forall \alpha \in [0, 1]$ *számhoz* $\exists\, (a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ *sorozat, amire az teljesül, hogy*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

3. definíció. *Legyen* $2 \leq p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1]$ *és* $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ *olyan sorozat, amire*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy a $0, a_1 a_2 a_3 \ldots_{(p)}$ *felírás az* α *szám* ***p*-adikus tört alakja**, *és ezt az* $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots_{(p)}$ *egyenlőséggel fejezzük ki.*

Ha $p = 2$, *akkor* ***diadikus törtekről*** *beszélünk.*

Megjegyzések.

1° A tizedes törtekre vonatkozó megjegyzések a magától értetődő módosításokkal érvényesek maradnak a p-adikus törtekre is. Hasonlóan beszélhetünk véges, végtelen szakaszos és végtelen nem szakaszos p-adikus törtekről is. Ha egy tizedes tört véges, akkor nem biztos, hogy egy másik $2 \leq p \in \mathbb{N}$ alap esetén a tizedes törthöz tartozó szám p-adikus tört alakja is véges lesz. Például

$$0,1_{(10)} = \frac{1}{10} = 0,0\overline{0011}_{(2)}.$$

2° Az az állítás, hogy egy szám akkor és csak akkor racionális, ha tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos, érvényben marad p-adikus törtek esetére is. A véges p-adikus törteket ***p*-adikus racionális számoknak** nevezzük.

3^o A diadikus törtek fontos szerepet játszanak az informatikában, például a lebegőpontos számábrázolásnál. Ennek lényege, hogy a számot egyértelműen felírjuk

$$e \cdot M \cdot 2^k$$

alakban, ahol e a szám előjele, $1/2 \le M < 1$ és $k \in \mathbb{Z}$. Az M számot (mantisszát) úgy tároljuk, hogy a diadikus tört alakjából vesszük az első néhány bitet a legmagasabb helyértékű kivételével, mert az úgyis 1. A tárolt bitek száma függ az alkalmazott pontosságtól. Ezzel általában csak egy M-hez közeli diadikus racionális számot tudunk tárolni. Például az $1/10$ számot nem tudjuk pontosan tárolni. ■

Műveletek végtelen sorokkal 1.

A konvergens sorok a véges összegek általánosításának tekinthetők. Azt szeretnénk, hogy végtelen sorokkal úgy tudjunk számolni, mint a véges összegekkel. Ez bizonyos esetekben lehetséges, más esetekben azonban nem. Ebben a részben arról lesz szó, hogy a véges összegek megszokott (és nagyon hasznos) tulajdonságai (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás) vajon érvényben maradnak-e a végtelen összegekre is.

Elöljáróban a következőket jegyezzük meg: Az első feladat azt tisztázni, hogy ezeket a tulajdonságokat végtelen sorokra hogyan lehet/kell **értelmezni**. Ki fog derülni, hogy a szóban forgó tulajdonságok végtelen összegekre csak bizonyos feltételek teljesülése esetén maradnak meg. A „legerősebb” követelmény az **abszolút konvergencia** lesz. Már itt kiemeljük azt a tényt, hogy **abszolút konvergens sorokra a véges összegek minden említett tulajdonsága teljesül, az ilyen végtelen összegekkel úgy számolhatunk, mint a végesekkel.**

Végtelen sorok zárójelezése (asszociativitás)

A véges összegek rendelkeznek az asszociativitás (csoportosíthatóság) tulajdonságával. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ számokra az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ összeg bármilyen csoportosítás (zárójelezés) esetén ugyanazt az értéket adja.

Igazolni fogjuk, hogy ezzel a tulajdonsággal minden **konvergens végtelen sor** rendelkezik. Előtte azonban meg kell mondanunk azt, hogy mit értünk egy végtelen sor zárójelezésén.

4. definíció. *Legyen* $\sum\limits_{n=1} a_n$ *egy végtelen sor és* $(m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *egy szigorúan monoton növekvő indexsorozat, ahol* $m_0 := 0$. *Ekkor az*

$$\alpha_n := \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

sorozattal definiált $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ *végtelen sort a* $\sum\limits_{n=1} a_n$ *sor* (m_n) *indexsorozat által meghatározott* ***zárójelezésének*** *nevezzük.*

Az (m_n) sorozat mutatja hova kerülnek a zárójelek

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1})}_{\alpha_1} + \underbrace{(a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_{m_2})}_{\alpha_2} + \cdots .$$

8. tétel. *Egy konvergens sor minden zárójelezése is konvergens sor, és összege az eredeti sor összegével egyenlő.*

Bizonyítás. Legyen $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ a $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor (m_n) által meghatározott zárójelezése, és jelölje (σ_n) és (s_n) rendre a két sor részletösszegeiből álló sorozatokat. Ha $\sum\limits_{n=1} a_n$ konvergens, akkor (s_n) konvergens sorozat, de ekkor minden részsorozata is konvergens, és határértéke megegyezik az (s_n) sorozat határértékével.

Mivel $\forall n \in \mathbb{N}^+$ indexre $\sigma_n = s_{m_n}$ teljesül, így (σ_n) részsorozata az (s_n) sorozatnak. Tehát a (σ_n) sorozat konvergens és $\lim(\sigma_n) = \lim(s_n)$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum \alpha_n$ sor konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Megjegyzés. A

$$\sum_{n=1} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

divergens sornál végezzük el az alábbi csoportosításokat!

$$\begin{aligned} (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots &= 0, \\ 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots \quad &= 1. \end{aligned}$$

Látható, hogy ha máshova tesszük a zárójeleket, akkor az eredmény változhat. A tétel szerint konvergens sorokkal nem lehet ilyet csinálni. ■

A véges összegek asszociatív tulajdonsága azt is jelenti, hogy egy összegben elhelyezett zárójeleket el is lehet hagyni. Végtelen összegekre ez az állítás általában már nem igaz, mert zárójelek elhagyásával egy konvergens sorból divergens sort is kaphatunk. Bizonyos feltételek mellett mégis el lehet hagyni a zárójeleket.

9. tétel. *Legyen $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ a $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott zárójelezése, és tegyük fel, hogy*

i) *a zárójelek hossza korlátos, azaz $(m_{n+1} - m_n)$ korlátos sorozat,*

ii) $\lim(a_n) = 0$,

iii) *a $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ sor konvergens.*

Ekkor a $\sum\limits_{n=1} a_n$ is konvergens, és $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$

Bizonyítás. Mivel $(m_{n+1} - m_n)$ korlátos sorozat, így

$$\exists\, K := \max\{m_{n+1} - m_n : n \in \mathbb{N}^+\} > 0.$$

Másrészt minden n indexű tag megtalálható az egyik zárójelben:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+\text{-hez } \exists\, k(n) \in \mathbb{N}^+ : m_{k(n)-1} < n \le m_{k(n)}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített szám. Mivel $\lim(a_n) = 0$, így

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > n_0\colon |a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Jelölje (s_n) és (σ_n) a két sor részletösszegeiből álló sorozatokat. Ekkor $\forall\, n > n_0$ esetén

$$|s_n - \sigma_{k(n)}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{k(n)} \alpha_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m_{k(n)}} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m_{k(n)}} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m_{k(n)}} |a_k| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Ezért $\lim(s_n - \sigma_{k(n)}) = 0$. De ha a $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ sor konvergens és összege s, akkor $\lim(\sigma_{k(n)}) = s$, és így

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - \sigma_{k(n)}) + \lim_{n\to+\infty} \sigma_{k(n)} = 0 + s = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor is konvergens, és összege megegyezik a $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ sor összegével.

Végtelen sorok átrendezése (kommutativitás)

A véges összegek rendelkeznek a kommutativitás (felcserélhetőség) tulajdonsággal. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $a_0, a_1, \ldots, a_n$ számokra az $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ összeg bármilyen sorrendben ugyanazt az értéket adja. Pontosabban fogalmazva: ha $n \in \mathbb{N}$ rögzített, $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ tetszőleges számok és $p : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ egy bijekció (azaz p a $0, 1, \ldots, n$ számok egy permutációja), akkor

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_n}.$$

A következő tétel azt állítja, hogy az **abszolút konvergens sorok** is rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, vagyis az ilyen sorok tetszés szerinti sorrendben átrendezhetők anélkül, hogy az összege megváltoznék. Először azonban meg kell mondanunk azt, hogy mit értsünk egy végtelen sor átrendezésén.

5. definíció. *Legyen $\sum a_n$ egy adott végtelen sor. Tegyük fel, hogy $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijekció, (más szóval p egy permutációja $\mathbb{N}$-nek). Ekkor a $\sum a_{p_n}$ végtelen sort a $\sum a_n$ sor (p_n) által meghatározott* ***átrendezésének*** *nevezzük.*

10. tétel. *Ha a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor tetszőleges $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutációval képzett $\sum a_{p_n}$ átrendezése is abszolút konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Tehát egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens sor, és összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{és} \quad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} a_{p_k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1. lépés. *Igazoljuk, hogy a $\sum a_{p_n}$ sor abszolút konvergens.* Valóban, mivel $\sum a_n$ abszolút konvergens, ezért minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{p_k}| = |a_{p_0}| + |a_{p_1}| + \cdots + |a_{p_n}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = K < +\infty,$$

azaz a $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_{p_k}|$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat felülről korlátos, de nyilván monoton növekvő is, következésképpen a $\sum |a_{p_n}|$ sor konvergens. Így a $\sum a_{p_n}$ sor valóban abszolút konvergens.

2. lépés. *Azt igazoljuk, hogy*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Legyen

$$A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad \text{és} \qquad B := \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n.$$

Tudjuk, hogy a $\sum |a_n|$ sor konvergens, így a Cauchy-kritérium szerint

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, m > n \geq n_0\colon |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdot + |a_m| < \varepsilon.$$

Ezért $n = n_0$ mellett, ha $m > n_0$, akkor $\sum\limits_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$.

Adott $\varepsilon > 0$-ra tekintsük az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat, és legyen N_0 olyan index, amire az $a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}$ összeg már tartalmazza ezeket a tagokat. Ilyen N_0 nyilván létezik, és $N_0 \geq n_0$. Legyen $n > N_0$. Ekkor

$$\sigma_n - s_n = \Big(\underbrace{a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots a_{p_{N_0}}} + a_{p_{N_0+1}} + \cdots a_{p_n}\Big) - \Big(\underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0}} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n\Big)$$

nem tartalmazza az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat. Így

$$|\sigma_n - s_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

ahol $m := \max\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, hiszen $m \geq n > N_0 \geq n_0$. Ez azt jelenti, hogy $(\sigma_n - s_n)$ nullasorozat. Ezért

$$\sigma_n = (\sigma_n - s_n) + s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + A = A,$$

azaz

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Megjegyzés. A tétel egyik fontos következménye, hogy végtelen sok pozitív számot bármilyen sorrendben adhatunk össze, mert ugyanaz lesz a végeredmény. Ez azért van, mert pozitív számokból álló sor abszolút sora megegyezik az eredeti sorral. ■

Ha egy konvergens sor nem abszolút konvergens (ezeket neveztük *feltételesen konvergens soroknak*), akkor az előbbi állításhoz képest „drámaian” megváltozik a helyzet. Az ilyen sorokat át lehet rendezni úgy, hogy az összege előre megadott $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem legyen, sőt konvergens sorból divergens sort is kaphatunk. Ezt fejezi ki a következő állítás.

11. tétel (Riemann átrendezési tétele). *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ egy feltételesen konvergens sor (azaz $\sum a_n$ konvergens, de $\sum |a_n|$ divergens). Ekkor a sornak*

1º *minden $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén létezik olyan átrendezése, amelynek összege A,*

2º *van olyan átrendezése, aminek nincs összege.*

Riemann átrendezési tételét a következő példával illusztráljuk. A

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

sor konvergens és összege nulla, mert $s_{2n} = 0$ és $s_{2n+1} = 1/n \to 0$, azaz a sor részletösszegeiből álló páros és páratlan indexű részsorozata egyszerre a nullához tart. Rendezzük át a fenti sort a következő módon:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

azaz most nem vonjuk ki azonnal ugyanazt a tagot, hanem elmegyünk a következő 2 hatványát megelőző tag reciprokáig, és utána ugyanazokat az értékeket ki is vonjuk. Az ilyen tagok összege nagyobb mint $1/2$, hiszen $\forall\, k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}-1} \geq \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k\text{-szor}} = 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Adjuk össze egymás után a számokat! A fentiek miatt, amikor eljutunk egy „pluszos” sorozat végéhez, akkor az összeadott érték nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. De amikor eljutunk egy „mínuszos” sorozat végéhez, akkor az összeadott érték nulla. Egy ilyen sor nem lehet konvergens.