2. gyakorlat

SZÁMHALMAZ SZUPRÉMUMA ÉS INFIMUMA

Emlékeztető. A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz

- ***felülről korlátos***, ha $\exists K \in \mathbb{R},$ hogy $\forall x \in H$ esetén $x \leq K$.
  Az ilyen K számot a H halmaz ***felső korlátjának*** nevezzük.
- ***alulról korlátos***, ha $\exists k \in \mathbb{R},$ hogy $\forall x \in H$ esetén $k \leq x$.
  Az ilyen k számot a H halmaz ***alsó korlátjának*** nevezzük.
- ***korlátos***, ha alulról is, felülről is korlátos, azaz $\exists K \in \mathbb{R},$ hogy $\forall x \in H$ esetén $|x| \leq K$.

1. Feladat. *Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában azt, hogy a nemüres $A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről* **nem** *korlátos! Mutassuk meg, hogy az*

$$A := \left\{ \frac{x^2+2x+3}{x+1} \;\Big|\; x \in [1,+\infty) \right\}$$

halmaz felülről **nem** *korlátos!*

Megoldás. A definíció szerint a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről korlátos, ha

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in A \colon x \leq K.$$

Az A halmaz felülről **nem** korlátos, ha ennek az állításnak a tagadása igaz, azaz

$$(*) \qquad \forall K \in \mathbb{R}\text{-hoz } \exists x \in A \colon x > K.$$

Tekintsük most az

$$A := \left\{ \frac{x^2+2x+3}{x+1} \;\Big|\; x \in [1,+\infty) \right\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy erre a $(*)$ állítás igaz. Vegyünk egy tetszőlegesen rögzített K valós számot. Feltehetjük, hogy $K > 0$. Azt kell megmutatni, hogy K-hoz

$$(\#) \qquad \exists x \in [1,+\infty) \colon \frac{x^2+2x+3}{x+1} > K.$$

Egy ilyen x elemet a következő módon határozunk meg: az egyenlőtlenség bal oldalát *csökkentve* azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2+2x+3}{x+1} \geq \ (x \geq 1 \text{ miatt}) \ \geq \frac{x^2}{x+1} \geq \frac{x^2}{x+x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} > K,$$

ezért K-hoz például

$$x := 2K+1 \in [1,+\infty)$$

egy jó választás. Így a $(\#)$, következésképpen a $(*)$ állítás is igaz.

Beláttuk tehát azt, hogy az A halmaz felülről nem korlátos.

Emlékeztető. A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak van

- ***maximuma*** vagy ***legnagyobb eleme***, ha $\exists \alpha \in H$, hogy $\forall x \in H$ esetén $x \le \alpha$. Ekkor α-t a H ***maximumának*** nevezzük, és a $\max H$ szimbólummal jelöljük.
- ***minimuma*** vagy ***legkisebb eleme***, ha $\exists \beta \in H$, hogy $\forall x \in H$ esetén $\beta \le x$. Ekkor β-t a H ***minimumának*** nevezzük, és a $\min H$ szimbólummal jelöljük.

2. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$A := \left\{ 2 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

halmaznak ***nincs*** *maximuma!*

Megoldás. A definíció szerint egy $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$ halmaznak **van** maximuma, ha

$$\exists \alpha \in A,\ \forall x \in A \colon x \le \alpha.$$

Az A halmaznak **nincs** maximuma, ha ennek az állításnak a tagadása igaz, azaz

$$(*) \qquad \forall \alpha \in A\text{-hoz } \exists x \in A \colon x > \alpha.$$

Szavakkal kifejezve: „az A halmaz minden eleménél van nagyobb halmazbeli elem". A feladat megoldásához a megadott A halmazra a $(*)$ állítást fogjuk bebizonyítani.

Legyen $\alpha = 2 - \frac{1}{n}$ az A halmaz egy tetszőlegesen rögzített eleme, vagyis n egy tetszőlegesen rögzített pozitív egész szám. Olyan $x = 2 - \frac{1}{m} \in A$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ elemet keresünk, amire a

$$2 - \frac{1}{m} = x > \alpha = 2 - \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenség teljesül. Vegyük észre, hogy ha $m = n + 1$, akkor

$$2 - \frac{1}{n+1} > 2 - \frac{1}{n} \qquad (\text{ui.} \quad \iff \quad n + 1 > n).$$

Mivel $x = 2 - \frac{1}{n+1} \in A$, ezért ezzel azt láttuk be, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ esetén a halmaz $\alpha = 2 - \frac{1}{n}$ eleménél nagyobb a halmaz $x = 2 - \frac{1}{n+1}$ eleme. Ez pedig $(*)$ szerint azt jelenti, hogy A-nak nincs legnagyobb eleme.

Emlékeztető. A szuprémum és az infimum fogalma:

- A felülről korlátos $\emptyset \ne H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját H ***szuprémumának*** nevezzük, és a $\sup H$ szimbólummal jelöljük.
- Az alulról korlátos $\emptyset \ne H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját H ***infimumának*** nevezzük, és az $\inf H$ szimbólummal jelöljük.

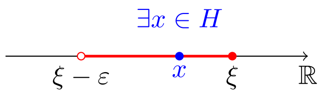
A szuprémum elv: Minden nemüres és felülről korlátos számhalmaznak van szuprémuma. (A szuprémum elvből következik, hogy minden nemüres és alulról korlátos számhalmaznak van infimuma.)

A szuprémum és az infimum értelmezését kiterjesztjük nem korlátos halmazokra is:

- ha a $\emptyset \ne H \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy a ***szuprémuma plusz végtelen***, és ezt úgy jelöljük, hogy $\sup H := +\infty$.
- ha a $\emptyset \ne H \subset \mathbb{R}$ halmaz alulról nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy az ***infimuma mínusz végtelen***, és ezt úgy jelöljük, hogy $\inf H := -\infty$.

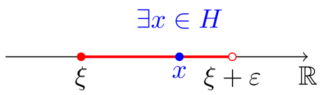
Tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \sup H \qquad \iff \qquad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \textit{ felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H\colon x \leq \xi; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{a legkisebb felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz } \ \exists x \in H\colon \xi - \varepsilon < x. \end{cases}$$



Tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \inf H \qquad \iff \qquad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \textit{ alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H\colon \xi \leq x; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{a legnagyobb alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz } \ \exists x \in H\colon x < \xi + \varepsilon \end{cases}$$



Kapcsolat a sup A, az inf A, a max A és a min A között. Ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, akkor

- $\exists \max A \quad \iff \quad \sup A \in A$ és ekkor $\sup A = \max A$,
- $\exists \min A \quad \iff \quad \inf A \in A$ és ekkor $\inf A = \min A$.

3. Feladat. *Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha*

a) $A := \left\{ \dfrac{1}{x} \;\middle|\; x \in (0,1] \right\}$, *b)* $A := \left\{ \dfrac{x+1}{2x+3} \;\middle|\; x \in [0,+\infty) \right\}$,

c) $A := \left\{ \dfrac{2|x|+3}{3|x|+1} \;\middle|\; x \in [-2,+\infty) \right\}$, *d)* $A := \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \;\middle|\; 0 \leq x \in \mathbb{R} \right\}$?

Határozzuk meg $\sup A$*-t és* $\inf A$*-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?*

Megoldás. Egy számhalmazt megadó kifejezésből az esetek többségében nehéz látni a halmaz elemeinek „viselkedését”, ezért gyakran érdemes **átalakítani a szóban forgó kifejezést**. Ha sikerül igazolni, hogy a halmaznak van maximuma vagy minimuma, akkor a **kapcsolatuk a szuprémummal és az infimummal** alapján ez utóbbiak rögtön megadhatók. Ellenkező esetekben először meg kell *sejtenünk* a $\sup A$-t, illetve az $\inf A$-t, majd az emlékeztetőben szereplő tételek segítségével **bizonyítani, hogy a sejtésünk igaz**.

a) Az

$$A := \left\{ \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in (0,1] \right\}$$

halmaz alulról korlátos és 0 egy triviális alsó korlát, hiszen A minden eleme pozitív. Ennél pontosabb alsó korlátot is megadhatunk, ui.

$$0 < x \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \leq \frac{1}{x},$$

tehát 1 is alsó korlátja A-nak. Sőt azt is látjuk, hogy $x = 1$ esetén $\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \in A$, ezért az A halmaznak van minimuma:

$$\min A = 1, \quad \text{így} \quad \inf A = \min A = 1.$$

Nézzük a felső korlátokat. Vegyük észre azt, hogy ha x közel van 0-hoz, akkor $\frac{1}{x}$ értéke nagy, sőt akármilyen nagy is lehet, ha x elég közel van 0-hoz. Ebből azt *sejtjük*, hogy az A halmaz felülről nem korlátos. Ennek megmutatásához azt kell belátni, hogy

$$(*) \qquad \forall K \in \mathbb{R}\text{-hoz } \exists x \in (0,1]\colon \frac{1}{x} > K.$$

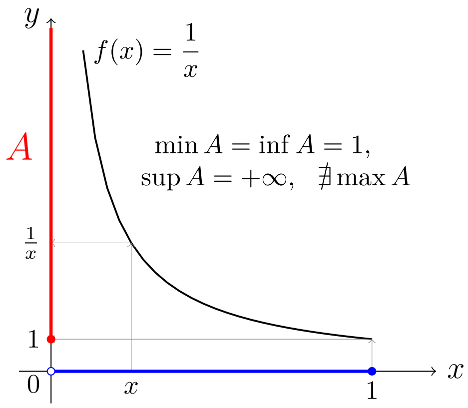
Vegyünk egy tetszőlegesen rögzített K valós számot. Feltehetjük, hogy $K > 0$. Ekkor $\frac{1}{x} > K$, ha $0 < x < \frac{1}{K}$. Mivel $\frac{1}{K+1} < \frac{1}{K}$ és $0 < \frac{1}{K+1} < 1$, ezért $(*)$ teljesül az

$$x := \frac{1}{K+1}$$

megválasztásával. Tehát a A halmaz felülről nem korlátos, és így

$$\sup A = +\infty \quad \text{és} \quad \nexists \max A.$$

Megjegyzés. A kapott eredmények az $\frac{1}{x}$ $(x > 0)$ függvény grafikonjáról is leolvashatók:



b) Az

$$A := \left\{ \frac{x+1}{2x+3} \;\middle|\; x \in [0, +\infty) \right\}$$

halmaz elemeit megadó kifejezést először átalakítjuk:

$$(*) \qquad \frac{x+1}{2x+3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\big(2x+3\big) - \frac{1}{2}}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x+6} \qquad (x \geq 0).$$

A jobb oldalon az x változó már csak egy helyen szerepel, így ebből az alakból már világosabb képet kaphatunk a halmaz elemeinek „viselkedéséről”. Valóban: mivel $x \geq 0$ miatt $4x+6 \geq 0$, ezért $\frac{1}{2}$ az A halmaznak egy triviális felső korlátja.

Egy alsó korlát megadásához vegyük figyelembe azt, hogy $x \geq 0$ esetén $\frac{1}{2} - \frac{1}{4x+6}$ a lehető legkisebb akkor, ha $\frac{1}{4x+6}$ a lehető legnagyobb, vagyis akkor, ha $4x+6$ a lehető legkisebb, azaz akkor, ha $x = 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot 0 + 6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

A-nak egy alsó korlátja. Az A halmaz tehát korlátos, és

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4x+6} \leq \frac{1}{2} \quad (x \geq 0).$$

Mivel $\frac{1}{3} \in A$ (ha $x = 0$), ezért ez A-nak a minimális eleme, tehát

$$\min A = \frac{1}{3}, \quad \text{így} \quad \inf A = \min A = \frac{1}{3}.$$

Határozzuk most meg $\sup A$-t! $(*)$ jobb oldalán az $\frac{1}{4x+6}$ tört x nagy értékeire 0-hoz nagyon közeli értékeket vesz fel. Ezért azt a *sejtést* alakítjuk ki, hogy

$$\sup A = \frac{1}{2}.$$

A bizonyítás. i) Azt már láttuk, hogy $\frac{1}{2}$ egy felső korlátja A-nak. ✓

ii) Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{2}$ a legkisebb felső korlátja A-nak. Ez azt jelenti, hogy bármely $\frac{1}{2}$-nél kisebb szám már nem felső korlátja A-nak, azaz

$$(\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x \geq 0\colon\ A \ni \frac{1}{2} - \frac{1}{4x+6} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Vegyünk egy tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4x+6} > \frac{1}{2} - \varepsilon \iff \varepsilon > \frac{1}{4x+6} \iff 4x+6 > \frac{1}{\varepsilon} \iff x > \frac{1}{4\,\varepsilon} - \frac{3}{2},$$

így ε-hoz valóban létezik alkalmas halmazbeli elem. A $(\#)$ állítást tehát bebizonyítottuk. ✓

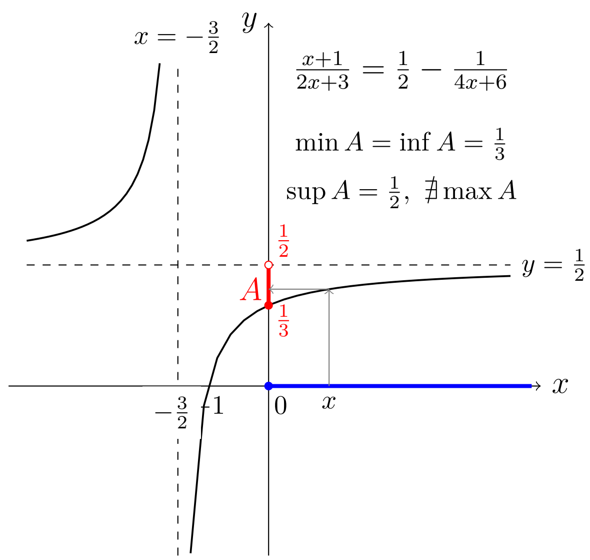
i) és ii) $\implies$ $\sup A = \frac{1}{2}$.

Mivel $\frac{1}{2} \notin A$, ezért az A halmaznak nincs legnagyobb eleme, azaz $\nexists \max A$.

Összefoglalva: Az A halmaz alulról és felülről is korlátos.

$$\sup A = \frac{1}{2}, \quad \nexists \max A \quad \text{és} \quad \inf A = \min A = \frac{1}{3}.$$

Megjegyzés. Függvénytranszformációval az $\frac{1}{x}$ $\big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ függvény grafikonjából a $(*)$ azonosság felhasználásával ábrázolhatjuk az $\frac{x+1}{2x+3}$ $\Big(x \in \mathbb{R} \setminus \big\{-\frac{3}{2}\big\}\Big)$ függvény grafikonját. A kapott eredmények arról is leolvashatók:



c) Először átalakítjuk az

$$A := \left\{ \frac{2|x|+3}{3|x|+1} \;\middle|\; x \in [-2, +\infty) \right\}$$

halmaz elemeit megadó kifejezést:

$$(*) \qquad \frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\big(3|x|+1\big)+\frac{7}{3}}{3|x|+1} = \frac{2}{3} + \frac{7}{9|x|+3} \qquad (x \geq -2).$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $\frac{2}{3}$ az A halmaznak egy (triviális) alsó korlátja.

Egy felső korlát meghatározásához vegyük figyelembe, hogy a $\frac{7}{9|x|+3}$ tört $x \geq -2$ esetén akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a nevező a lehető legkisebb, azaz akkor, ha $|x| = 0$. Ezért $\frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$ az A halmaznak egy felső korlátja. Az A halmaz tehát korlátos, és

$$\frac{2}{3} < \frac{2}{3} + \frac{7}{9|x|+3} \leq 3 \quad (x \geq -2).$$

Mivel $3 \in A$ (ha $x = 0$), ezért A-nak van maximális eleme, tehát

$$\max A = 3, \quad \text{ezért} \quad \sup A = \max A = 3 \ \text{ is fennáll.}$$

Határozzuk most meg $\inf A$-t. A $(*)$ azonosság jobb oldalán a $\frac{7}{9|x|+3}$ tört nagy x értékekre 0-hoz nagyon közeli értékeket vesz fel, ezért a halmaz elemei elég nagy x-ekre $\frac{2}{3}$-hoz közeli értékeket vesznek fel. Azt a *sejtést* alakíthatjuk ki, hogy

$$\inf A = \frac{2}{3}.$$

A bizonyítás. i) Azt már láttuk, hogy $\frac{2}{3}$ egy alsó korlátja A-nak. ✓

ii) Megmutatjuk, hogy $\frac{2}{3}$ a legnagyobb alsó korlátja A-nak. Ez azt jelenti, hogy bármely $\frac{2}{3}$-nál nagyobb szám már nem alsó korlátja A-nak, azaz

$$(\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x \geq -2\colon\ A \ni \frac{2}{3} + \frac{7}{9|x|+3} < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Vegyünk egy tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor $x \geq -2$ esetén

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{9|x|+3} < \frac{2}{3} + \varepsilon \iff \frac{7}{9|x|+3} < \varepsilon \iff \frac{7}{\varepsilon} < 9|x|+3 \iff |x| > \frac{7}{9\,\varepsilon} - \frac{1}{3},$$

így ε-hoz valóban létezik alkalmas halmazbeli elem. A $(\#)$ állítást tehát bebizonyítottuk. ✓

i) és ii) $\implies$ $\inf A = \frac{2}{3}$.

Mivel $\frac{2}{3} \notin A$, ezért az A halmaznak nincs legkisebb eleme, azaz $\nexists \min A$.

Összefoglalva: Az A halmaz alulról és felülről is korlátos.

$$\sup A = \max A = 3, \quad \inf A = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad \nexists \min A.$$

Megjegyzés. Ha észrevesszük, hogy

$$\left\{ \frac{2|x|+3}{3|x|+1} \;\middle|\; x \in [-2, +\infty) \right\} = \left\{ \frac{2x+3}{3x+1} \;\middle|\; x \in [0, +\infty) \right\}$$

akkor a feladat egyszerűbben oldható meg.

d) Az

$$A := \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \ \Big| \ 0 \leq x \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz elemeit megadó kifejezést most így alakítjuk át („gyöktelenítünk”):

$$(*) \qquad \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad (x \geq 0).$$

Ebből az alakból már az is rögtön leolvasható, hogy az A halmaz korlátos, ti. 0 egy triviális alsó korlát, és $1 \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ miatt 1 egy felső korlát, azaz

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq 1 \qquad (x \geq 0).$$

A jobb oldali egyenlőtlenségben $x = 0$ esetén egyenlőség áll fenn. Ez azt jelenti, hogy a halmaznak van maximuma, és az 1 maximális értéket $x = 0$ esetén veszi fel, hiszen $\sqrt{0+1} + \sqrt{0} = 1 \in A$, tehát

$$\max A = 1, \quad \text{ezért} \quad \sup A = \max A = 1 \ \text{ is fennáll.}$$

Az $\inf A$, illetve a $\min A$ meghatározásához tekintsük a $(*)$ azonosság jobb oldalát. Nagy x-ekre a tört nevezője nagy, a tört értéke tehát kicsi, sőt elég nagy x-ekre a tört értékei tetszőlegesen közel lesznek 0-hoz. Azt a *sejtést* alakíthatjuk ki, hogy

$$\inf A = 0.$$

A bizonyítás. (i) Azt már láttuk, hogy 0 egy alsó korlátja A-nak. ✓

ii) Annak igazolásához, hogy 0 az A halmaz legnagyobb alsó korlátja, azt kell megmutatni, hogy

$$(\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x \geq 0 \colon A \ni \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \varepsilon.$$

Vegyünk egy tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ számot. Most a $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ kifejezést növelve a következőket kapjuk:

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \ (x > 0 \text{ feltehető}) \ < \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x > \frac{1}{\varepsilon^2},$$

így a (#) állítás teljesül tetszőleges $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ számra. Ez azt jelenti, hogy 0 valóban a legnagyobb alsó korlátja az A halmaznak. A (#) állítást tehát bebizonyítottuk. ✓

i) és ii) $\implies$ $\inf A = 0$.

Mivel $0 \notin A$, ezért az A halmaznak nincs legkisebb eleme, azaz $\nexists \min A$.

Összefoglalva: Az A halmaz alulról és felülről is korlátos.

$$\sup A = \max A = 1, \quad \inf A = 0 \quad \text{és} \quad \nexists \min A.$$