

4. gyakorlat

VALÓS SOROZATOK 1.

Emlékeztető. Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ egy valós sorozat. Ekkor

- (a_n) **konvergens**, ha

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

A -t a sorozat határértékének nevezzük,

- (a_n) **divergens**, ha nem konvergens, azaz

$$\forall A \in \mathbb{R}\text{-hez } \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}\text{-hoz } \exists n > n_0 : |a_n - A| \geq \varepsilon,$$

- (a_n) **határértéke** $+\infty$ (vagy a **sorozat** $+\infty$ -hez tart), ha

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : a_n > P,$$

- (a_n) **határértéke** $-\infty$ (vagy a **sorozat** $-\infty$ -hez tart), ha

$$\forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : a_n < P.$$

- Az (a_n) sorozatnak **van határértéke**, ha konvergens, vagy $(+\infty)$ -hez vagy pedig $(-\infty)$ -hez tart. Azt a tényt, hogy a sorozatnak a határérték $A \in \overline{\mathbb{R}}$, az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim(a_n) := A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n := A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad a_n \rightarrow A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

A továbbiakban

$$\boxed{\lim(a_n) \in \mathbb{R}}$$

jelöli azt, hogy az (a_n) sorozat *konvergens*, vagyis véges a határértéke, a

$$\boxed{\lim(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}}$$

jelölés pedig azt fejezi ki, hogy az (a_n) sorozatnak *van határértéke*, azaz a sorozat vagy konvergens, vagy $+\infty$, vagy pedig $-\infty$ a határértéke.

Megjegyzések.

1. Sorozatok határértékének a vizsgálata a *definíció alapján* nem egyszerű feladat. A határértéket ui. először meg kell *sejteni*. (Ilyen „technikákra” előadáson láttunk példákat).

Most foglalkozunk csak azzal, hogy a definíció alapján hogyan lehet *belátni* azt, hogy egy sorozat határértéke egy $\overline{\mathbb{R}}$ -beli A elem. Ehhez azt kell igazolni, hogy *tetszőlegesen* rögzített $\varepsilon > 0$, illetve $P \in \mathbb{R}$ számhoz (az ún. *hibakorláthoz*) van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ (ezt *küszöbindexnek* nevezzük), hogy a sorozat ennél nagyobb indexű tagjaira bizonyos egyenlőtlenségek teljesülnek.

Az n_0 küszöbindex függ az ε -tól, illetve a P hibakorláttól. Világos, hogy egy küszöbindexnél nagyobb természetes szám is jó küszöbindex. A küszöbindex megadásánál nem törekszünk a legkisebb küszöbindex meghatározására.

2. Egy hibakorláthoz tartozó n_0 küszöbindex keresése mindig egy egyenlőtlenség vizsgálatára vezet. Azt kell belátnunk, hogy az egy n_0 -tól kezdve minden indexre teljesül. Ennek igazolásához megoldhatnánk a szóban forgó egyenlőtlenséget is; ez azonban az esetek többségében reménytelen feladat. Ezért küszöbindex keresésénél rendszerint a következő *ötletet* alkalmazzuk:

A sorozat tagjait megadó képletet (a határérték-típustól függően) több lépésben növeljük vagy csökkentjük addig, amíg a végén a küszöbindexre egy „ránézésre” megoldható egyenlőtlenséget nem kapunk.

1. Feladat. Tekintsük az (a_n) sorozat konvergenciájának a definícióját:

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Módosítsuk ezt a következőképpen:

$$(*) \quad \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0 \text{ és } \forall n > n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Az (a_n) sorozat milyen tulajdonságát fejezi ki az utóbbi állítás?

Megoldás. Figyeljük meg, hogy $(*)$ csupán sorrendben különbözik a konvergencia definíciójától.

Mit jelent a $(*)$ állítás? Azt, hogy van olyan $A \in \mathbb{R}$ és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy az

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség minden pozitív ε számra igaz, ha $n > n_0$. Mivel $|a_n - A| \geq 0$, ezért ez csak úgy lehetséges, ha

$$|a_n - A| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = A$$

minden $n > n_0$ indexre. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a sorozat n_0 -nál nagyobb indexű tagjai mind A -val egyenlők, röviden: (a_n) „majdnem konstans sorozat”.

Világos, hogy $(*) \implies (a_n)$ konvergens sorozat. A fordított állítás azonban nem igaz, hiszen például az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat konvergens és 0 a határértéke, de erre a sorozatra a $(*)$ állítás nyilván nem teljesül.

2. Feladat. A konvergencia definíciója alapján mutassuk meg, hogy

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}, \quad b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} = \frac{1}{2}, \quad c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = 0.$$

Megoldás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz meg kell határozni egy lehetséges n_0 küszöb-indexet!

a) A határérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \left| \frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Ezt az állítást az egyenlőtlenség megoldásával is igazolhatnánk. Figyeljük meg, hogy elég azt bizonyítani, hogy a szóban forgó egyenlőtlenség teljesül alkalmas n_0 küszöb-indexnél nagyobb n -ekre. Ezért az egyenlőtlenség megoldása helyett egy lényegesen egyszerűbb utat fogunk követni: az

$$\left| \frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2} \right|$$

kifejezést több lépésben egyre egyszerűbb kifejezésekkel növeljük addig, ameddig a végén a küszöbindexre egy „ránézésre” megoldható egyenlőtlenséget nem kapunk.

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{2n - (2n-3)}{2(2n-3)} \right| = \frac{3}{2|2n-3|} = (2n-3 > 0 \text{ ha } \underline{n \geq 1}) = \\ &= \frac{3}{2(2n-3)} = \frac{3}{4n-6} = \frac{3}{\underbrace{n+3(n-2)}_{\geq 0, \text{ ha } n \geq 1}} \leq \underbrace{\frac{3}{n}}_{n > \frac{3}{\varepsilon}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \frac{3}{\varepsilon}$. Legyen

$$n_0 := \max \left\{ \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil, 1 \right\}.$$

Ha $n > n_0$ tetszőleges természetes szám, akkor az előzőek alapján fennáll az

$$\left| \frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség, ezért ε -hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex. A (*) állítást, így a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}$$

egyenlőséget bebizonyítottuk.

b) A határérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \left| \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Most is meg tudnánk oldani az utolsó egyenlőtlenséget, de az előző feladat megoldásában vázolt utat fogjuk követni. Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{2(n^2+1) - (2n^2+n+2)}{2(2n^2+n+2)} \right| = \frac{|-n|}{2(2n^2+n+2)} = \\ &= \frac{n}{2(2n^2+n+2)} \leq (\text{ha } n > 0) \leq \frac{n}{4n^2} = \underbrace{\frac{1}{4n}}_{n > \frac{1}{4\varepsilon}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \frac{1}{4\varepsilon}$. Legyen

$$n_0 := \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon} \right\rceil.$$

Ekkor minden $n > n_0$ index esetén az

$$\left| \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül, ezért ε -hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex. A (*) állítást, így a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} = \frac{1}{2}$$

egyenlőséget bebizonyítottuk.

c) A határérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \left| (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) - 0 \right| < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőtlenség megoldása most hosszadalmas lenne, viszont az előző feladatokban mutatott utat követve egyszerűen igazolhatjuk a (*) állítást.

Először azonban „gyöktelenítéssel” átalakítjuk a sorozat tagjait megadó kifejezést:

$$(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) \cdot \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} = \frac{(n+3) - (n+1)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}$$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. (Ebből már világosabb képet alkothatunk a sorozat tagjainak a viselkedéséről, ti. elég nagy n -ekre a sorozat tagjai tetszőlegesen közel lesznek 0-hoz.)

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) - 0 \right| &= \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} < \\ &< (\text{elhagyjuk } \sqrt{n+3} > 0\text{-t}) < \frac{2}{\sqrt{n+1}} < (\text{ha } n > 0) < \underbrace{\frac{2}{\sqrt{n}}}_{n > \frac{4}{\varepsilon^2}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$. Legyen

$$n_0 := \left\lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rceil.$$

Ekkor minden $n > n_0$ index esetén az

$$\left| (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) - 0 \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül, ezért ε -hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex. A (*) állítást, így a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = 0$$

egyenlőséget bebizonyítottuk.

3. Feladat. A definíció szerint az (a_n) sorozat $(+\infty)$ -hez tart, ha

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n > P.$$

Módosítsuk ezt a következőképpen:

$$(**) \quad \exists P > 0 \text{ és } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n > P.$$

Az (a_n) sorozat milyen tulajdonságát fejezi ki az utóbbi állítás?

Megoldás. Figyeljük meg, hogy $(**)$ csak abban különbözik a $(+\infty)$ -hez tartás definíciójától, hogy ez utóbbiban az első „ \forall ” kvantor helyett a „ \exists ” kvantor szerepel.

Világos, hogy a $(**)$ állítás azt fejezi ki, hogy a sorozat n_0 indexnél nagyobb indexű tagjai P -nél nagyobbak.

Nyilvánvaló, hogy $\lim(a_n) = +\infty \implies$ a $(**)$ állítás. Ennek a megfordítása azonban nem igaz, hiszen például az $a_n = 2$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatra $(**)$ $P = 1$ -vel teljesül, de (a_n) határértéke nem $+\infty$.

4. Feladat. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} = +\infty, \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3n^2}{n + 1} = -\infty.$$

Megoldás. Tetszőleges P hibakorláthoz meg kell határozni egy lehetséges n_0 küszöbindexet!

a) A $(+\infty)$ -hez definíciója szerint azt kell megmutatni, hogy

$$(*) \quad \forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} > P.$$

Ezt az állítást az utolsó egyenlőtlenség megoldása helyett a 2. feladat megoldásaiban szereplő gondolatok felhasználásával igazoljuk. Nevezetesen: most az

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3}$$

kifejezést több lépésben addig *csökkentjük*, ameddig a küszöbindexre egy olyan egyszerű egyenlőtlenséget nem kapunk, amelynek a megoldása már „ránézésre” is megállapítható.

Legyen tehát $P > 0$ egy tetszőlegesen rögzített valós szám. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} > \frac{n^2}{n + 3} \geq (\text{ha } n > 0) \geq \frac{n^2}{n + 3n} = \frac{n^2}{4n} = \underbrace{\frac{n}{4}}_{n > 4P} > P.$$

Az utolsó egyenlőtlenség igaz, ha $n > 4P$. Legyen

$$n_0 := [4P].$$

Ekkor $\forall n > n_0$ indexre az

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} > P$$

egyenlőtlenség teljesül, ezért $P > 0$ -hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex.

A $(*)$ állítást, így a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} = +\infty$$

egyenlőséget is bebizonyítottuk.

b) A $(-\infty)$ -hez definíciója szerint azt kell igazolni, hogy

$$(*) \quad \forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \frac{2 - 3n^2}{n + 1} < P.$$

Szorozzuk meg az utolsó egyenlőtlenséget (-1) -gyel, és vegyük figyelembe, hogy ekkor az egyenlőtlenség iránya megfordul:

$$\frac{2 - 3n^2}{n + 1} < P \iff (-1) \cdot \frac{2 - 3n^2}{n + 1} > (-1) \cdot P \iff \frac{3n^2 - 2}{n + 1} > -P.$$

Legyen $P < 0$ egy tetszőlegesen rögzített valós szám. Azt kell belátni, hogy az utolsó egyenlőtlenség egy alkalmas n_0 küszöbindextől kezdve igaz. Az előző megoldásban alkalmazott módszert követve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 - 2}{n + 1} &= \frac{2n^2 + (n^2 - 2)}{n + 1} > (\text{ha } \underline{n > 1}, \text{ akkor } n^2 - 2 > 0) > \\ &> \frac{2n^2}{n + 1} \geq \frac{2n^2}{n + n} = \frac{2n^2}{2n} = \underbrace{n}_{> -P}. \end{aligned}$$

Legyen

$$n_0 := \max\{1, [-P]\}.$$

Ekkor $\forall n > n_0$ indexre a

$$\frac{3n^2 - 2}{n + 1} > -P \iff \frac{2 - 3n^2}{n + 1} < P$$

egyenlőtlenség teljesül, ezért $P < 0$ -hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex.

A $(*)$ állítást, így a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3n^2}{n + 1} = -\infty$$

egyenlőséget is bebizonyítottuk.