Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

I. éves
Programtervező informatikus

Matematikai alapok

Kovács Sándor gyakorlata

(Hétfő, $16^{00} - 18^{15}$: DT-0.311, 2. csoport)

2020. ősz

0.1. $\boxed{\text{1. oktatási hét}}$

Emlékeztető. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek.

1. $\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$;

2. $\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$;

3. $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$;

4. $\boxed{a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)}$;

5. $\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$.
   Ha n páros, $n = 2k$, és b helyébe $(-b)$-t írunk, akkor
   $$\boxed{a^{2k} - b^{2k} = (a+b)(a^{2k-1} - a^{2k-2}b + - \ldots + ab^{2k-2} - b^{2k-1})};$$
   ha n páratlan, $n = 2k+1$, és b helyébe $(-b)$-t írunk, akkor
   $$\boxed{a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + - \ldots + ab^{2k-1} + b^{2k})}.$$

Az fenti emlékeztetőben lévő utolsó állítás többek között azt (is) jelenti, hogy ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor

- $a^n - b^n$ osztható $(a-b)$-vel.
- ha n páros, akkor $a^n - b^n$ osztható $(a+b)$-vel /és természetesen $(a-b)$-vel/.
- ha n páratlan, akkor $a^n + b^n$ osztható $(a+b)$-vel.

Feladat. Mutassuk meg, hogy igazak az alábbi állítások!

1. $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a + b + c = 0$, akkor $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$;
2. $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a + b + c = 0$, akkor $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;
3. $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, akkor $a = b = c$.

teljesül! **Útm.**

1. Két módszerrel is igazoljuk az egyenlőség fennállását.

1. módszer. Világos, hogy

$$\begin{aligned} a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 &= a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc = \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) + c(a^2 + b^2 - ab) = \\ &= (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) = 0 \cdot (a^2 - ab + b^2) = 0. \end{aligned}$$

2. módszer. Mivel $c = -a - b$, ezért

$$\begin{aligned} a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 &= a^3 + b^3 + c(a^2 - ab + b^2) = \\ &= a^3 + b^3 - (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \\ &= a^3 + b^3 - \left(a^3 + b^3\right) = 0. \end{aligned}$$

2. Két módszerrel is igazoljuk az egyenlőség fennállását.

1. módszer. Világos, hogy

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= ((a+b)+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b+c) + 3bc(a+b+c) + 3ac(a+b+c) - 3abc, \end{aligned}$$

ahonnan átrendezéssel, ill. kiemeléssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)\left[(a+b+c)^2 - 3ab - 3bc - 3ac\right] = \\ &= (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right). \end{aligned}$$

amiből az állítás már nyilvánvaló.

2. módszer. Mivel $c = -a - b$, ezért

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + b^3 - (a+b)^3 + 3ab(a+b) = \\ &= (a+b)\left[a^2 - ab + b^2 - (a+b)^2 + 3ab\right] = \\ &= (a+b)\left[a^2 - ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 + 3ab\right] = 0. \end{aligned}$$

3. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$0 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2,$$

azaz ha $a = b = c$. ■

Feladat.

1. Alakítsuk szorzattá az

$$S := a^{128} + a^{64} + 1 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

összeget!

2. Mutassuk meg, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$a^2 + ab + b^2 = 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

egyenlőség! Számítsuk ki ennek alapján $a^3 - b^3$ pontos értékét, ha $a - b = 2$ és $a + b = \sqrt{5}$ teljesül!

3. Tudva, hogy $x > 0$: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$, számítsuk ki $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ pontos értékét!

Útm.

1. Mivel

$$S = \left(a^{64}\right)^2 + 2a^{64} + 1 - a^{64} = \left(a^{64} + 1\right)^2 - \left(a^{32}\right)^2 = \left(a^{64} + a^{32} + 1\right)\left(a^{64} - a^{32} + 1\right),$$

továbbá hasonló átalakítással

$$\begin{aligned}
a^{64} + a^{32} + 1 &= \left(a^{32} + a^{16} + 1\right)\left(a^{32} - a^{16} + 1\right), \\
a^{32} + a^{16} + 1 &= \left(a^{16} + a^{8} + 1\right)\left(a^{16} - a^{8} + 1\right), \\
a^{16} + a^{8} + 1 &= \left(a^{8} + a^{4} + 1\right)\left(a^{8} - a^{4} + 1\right), \\
a^{8} + a^{4} + 1 &= \left(a^{4} + a^{2} + 1\right)\left(a^{4} - a^{2} + 1\right), \\
a^{4} + a^{2} + 1 &= \left(a^{2} + a + 1\right)\left(a^{2} - a + 1\right),
\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}
S &= \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^2 - a + 1\right)\left(a^4 - a^2 + 1\right)\left(a^8 - a^4 + 1\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(a^{16} - a^8 + 1\right)\left(a^{32} - a^{16} + 1\right)\left(a^{64} - a^{32} + 1\right).
\end{aligned}$$

2. Mivel

$$3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{3(a+b)^2}{4}+\frac{(a-b)^2}{4}=\frac{3a^2+6ab+3b^2+a^2-2ab+b^2}{4}=$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{4}=a^2+ab+b^2$$

és

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left(3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right),$$

ezért

$$a^3-b^3=\frac{19}{2}.$$

3. Világos, hogy

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=7+2, \qquad \text{azaz} \qquad x+\frac{1}{x}=3,$$

továbbá

$$x^5+\frac{1}{x^5} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^4-x^3\cdot\frac{1}{x}+x^2\cdot\frac{1}{x^2}-x\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)=$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^4+\frac{1}{x^4}+1-x^2-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2+1-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\right]=$$

$$= 3\cdot[49-1-7]=123. \quad \blacksquare$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas $a, b, \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}+\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}=0$$

egyenlőség!

Útm. Világos, hogy

$$\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}+\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{a}{(a+b)^3-2ab(a+b)}+\frac{b}{(a-b)^3+2ab(a-b)}+\frac{2b^2}{a^4-b^4}-\frac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{a}{(a+b)[(a+b)^2-2ab]}+\frac{b}{(a-b)[(a-b)^2+2ab]}-\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{a}{(a+b)[a^2+b^2]}+\frac{b}{(a-b)[a^2+b^2]}-\frac{1}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{a(a-b)+b(a+b)-[a^2+b^2]}{(a^2-b^2)[a^2+b^2]}=0.$$

Feladat. Adott $a, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, ill.

$$x := \frac{c(1-a^2)}{1+a^2}, \qquad y := \frac{2ac}{1+a^2}$$

esetén számítsuk ki az

$$f(x,y) := \frac{x^3-x-y^3+y+xy^2-x^2y}{x^3+x-y^3-y+xy^2-x^2y}$$

tört értékét!

Útm. Látható, hogy $x \neq y$, ezért

$$f(x,y)=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)-xy(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)-xy(x-y)}=\frac{x^2+xy+y^2-1-xy}{x^2+xy+y^2+1-xy}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

Továbbá

$$x^2=\frac{c^2(1-a^2)^2}{(1+a^2)^2} \qquad \text{és} \qquad y^2=\frac{4a^2c^2}{(1+a^2)^2},$$

így

$$x^2+y^2=c^2\cdot\frac{(1-a^2)^2+4a^2}{(1+a^2)^2}=c^2\cdot\frac{1-2a^2+a^4+4a^2}{(1+a^2)^2}=c^2\cdot\frac{1+2a^2+a^4}{(1+a^2)^2}=c^2\cdot\frac{(1+a^2)^2}{(1+a^2)^2}=c^2,$$

ahonnan

$$f(x,y)=\frac{c^2-1}{c^2+1}.$$

következik. ■

Feladat. Legyen

$$f(x) := \frac{1-x}{1+x} \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad g(x) := \frac{1+x}{1-x} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Igazoljuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$ esetén fennáll az

$$f(g(x)) \cdot g(f(x)) = -1$$

egyenlőség!
Útm. Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$ esetén

$$f(g(x)) \cdot g(f(x)) = \frac{1-\frac{1+x}{1-x}}{1+\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1+\frac{1-x}{1+x}}{1-\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2x}{2} \cdot \frac{2}{2x} = -1. \quad \blacksquare$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$: $0 < a \neq b$, akkor fennáll a

$$\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right) = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

egyenlőség!
Útm. Látható, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}: \ 0 < a \neq b$, akkor

$$\left(\sqrt{a} - \tfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \cdot \left(\tfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \tfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \tfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{a}[\sqrt{a}+\sqrt{b}] - \sqrt{ab} - b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}[\sqrt{a}-\sqrt{b}] + \sqrt{b}[\sqrt{a}+\sqrt{b}] + 2\sqrt{ab}}{a-b} =$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \sqrt{a}+\sqrt{b}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzések.

1. Adott $n \in \mathbb{N}_0$, ill. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

függvényt **legfeljebb n-edfokú (valós) polinom**nak nevezzük. Ha

(a) $f = \mathbf{0}$, azaz

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f-et **zéruspolinom**nak nevezzük.

(b) $a_n \neq 0$, akkor

- azt mondjuk, hogy f **pontosan n-edfokú**, s az $n \in \mathbb{N}_0$ számot az f polinom **fokszám**ának nevezzük és a $\deg(f)$ szimbólummal jelöljük;
- az a_k $(k \in \{0, \ldots, n\})$ számokat az f polinom **együtthatói**nak nevezzük, ahol a_n az f **főegyütthatój**a;
- $a_n = 1$ esetén f-et **normálpolinom**nak nevezzük.

Ha valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén $f(c) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a c szám az f polinom **zérushelye** (**gyöke**) vagy az $f(x) = 0$ **egyenlet megoldása** (**gyöke**).

2. Hány művelet szükséges polinomok helyettesítési értékeinek kiszámításához?

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0 + x(a_1 + a_2x) \qquad (5/4)$$
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + a_3x)) \qquad (9/6)$$
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + a_4x))) \qquad (14/8)$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0
c	a_n	$a_nc + a_{n-1}$	$c(a_nc + a_{n-1}) + a_{n-2}$	$\cdots$	$f(c)$

3. Ha f legalább elsőfokú polinom, $c \in \mathbb{R}$ és $f(c) = 0$, akkor van olyan h polinom, hogy

$$f(x) = (x - c)h(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $\deg(h) < \deg(f)$. Ez a h polinom megkapható pl. maradékos osztással (is). Ha $f(c) = 0$, akkor a fenti h polinom együtthatói:

$$a_n, \quad a_nc + a_{n-1}, \quad c(a_nc + a_{n-1}) + a_{n-2}, \quad \ldots$$

4. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ és az

$$f(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-a}x^{n-1} + x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak valamely $c \in \mathbb{Z}$ szám gyöke: $f(c) = 0$, akkor $c|a_0$, ui.

$$c|0 = f(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \ldots + a_{n-a}c^{n-1} + c^n \qquad \Longrightarrow \qquad c|a_0.$$

Ennek a ténynek különösen a sajátértékszámításkor lesz nagy jelentősége (vö. 9. gyakorlat).

Feladat. Igazoljuk, hogy $f(\xi) = 0$, amajd határozzunk meg olyan h polinomot, amelyre

$$f(x) = (x - \xi)h(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül!

1. $\xi := 2$, $f(x) := 3x^2 - 7x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$;
2. $\xi := 3$, $f(x) := 2x^3 - 4x^2 - 18$ $(x \in \mathbb{R})$;
3. $\xi := -1$, $f(x) := 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$;
4. $\xi := 1$, $f(x) := 5x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ $(x \in \mathbb{R})$;
5. $\xi := -2$, $f(x) := 3x^3 + 10x^2 + 8x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel

	3	−7	2
2	$\boxed{3}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$

ezért

$$f(x) = (x - 2)(3x - 1) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Mivel

	2	−4	0	−18
3	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$

ezért

$$f(x) = (x - 3)(2x^2 + 2x + 6) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Mivel

	2	−5	−6	3	2
−1	$\boxed{2}$	$\boxed{-7}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$

ezért

$$f(x) = (x + 1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Mivel

	5	−2	7	−10
1	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$

ezért

$$f(x) = (x-1)(5x^2+3x+10) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Mivel

	3	10	8	0
-2	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

ezért

$$f(x) = (x+2)(3x^2+4x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Milyen $k \in \mathbb{R}$ mellett lehet

1. $(2x^2+x+k)$-ból $(x+3)$-at;
2. $(4x^2-6x+k)$-ból $(x-3)$-at;
3. $(x^3-4x+2k)$-ból $(x-4)$-et;
4. $(x^4-3x^3+5x^2+7x-3k)$-ból $(x+1)$-et

kiemelni?

Útm.

1. Ha

$$p(x) := 2x^2+x+k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

	2	1	k
-3	$\boxed{2}$	$\boxed{-5}$	$\boxed{k+15}$

ezért

$$p(-3) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = -15.$$

2. Ha

$$p(x) := 4x^2-6x+k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

	4	-6	k
3	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{18+k}$

ezért

$$p(3) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = -18.$$

3. Ha
$$p(x) := x^3 - 4x + 2k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor

	1	0	−4	2k
3	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{15+2k}$

ezért
$$p(3) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = -15/2.$$

4. Ha
$$p(x) := x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 3k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor

	1	−3	5	7	−3k
−1	$\boxed{1}$	$\boxed{-4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{-2}$	$\boxed{2-3k}$

ezért
$$p(-1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 2/3. \quad \blacksquare$$

Feladat. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek a segítségével az $f(x) = 0$ másodfokú egyenletet!

1. $f(x) := x^2 - 6x + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$, 2. $f(x) := 2x^2 + 7x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1.$$
Így
$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - 3 = \pm 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{2; 4\}.$$

2. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$2x^2 + 7x - 1 = 2(x^2 + (7/2)x - 1/2) = 2(x + 7/4)^2 - \frac{49}{8} - 1 = \ldots$$
Így
$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\textbf{HF.}}$$

Megjegyzések.

1. Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \neq 0$, továbbá

$$f(x) := ax^2 + bx + c \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x-u)^2 + v, \end{aligned}$$

ahol

$$u := -\frac{b}{2a}, \qquad v := \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Így, ha $b^2 - 4ac \geq 0$, akkor

$$\exists\, x_\pm \in \mathbb{R}: \qquad f(x_-) = f(x_+) = 0.$$

Konkrétan:

$$x_\pm = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}.$$

2. A fenti f másodfokú polinom esetében

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a}, \\ x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2, \\ |x_1 - x_2| &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} \quad (x_1 \cdot x_2 \neq 0). \end{aligned}$$

Feladat. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

$$1.\ x^2 - 5x + 6 > 0; \qquad 2.\ \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2; \qquad 3.\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3x+4}{1-2x}$$

egyenlőtlenség? **Útm.**

1. Mivel
$$(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0,$$
így
$$x^2 - 5x + 6 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \boxed{(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)}.$$

2. Világos, hogy
$$\frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} - 2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} < 0.$$
Az utóbbi egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn, ha
$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) > 0 \qquad \text{és} \qquad x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) < 0,$$
azaz
$$x \in ((-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)) \cap (-3, 1) = (-3, -2) \cup (-1, 1)$$
VAGY
$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) < 0 \qquad \text{és} \qquad x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) > 0,$$
azaz
$$x \in (-2, -1) \cap ((-\infty, -3) \cup (1, +\infty)) = \emptyset.$$
A megoldáshalmaz tehát a $\boxed{(-3, -2) \cup (-1, 1)}$ halmaz.

3. Az egyenlőtlenséget „0-ra redukálva” azt kapjuk, hogy
$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{3x+4}{1-2x} > 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{5x^2 + 4x + 5}{(x+1)(1-2x)} > 0.$$
Mivel
$$4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = -84 < 0,$$
ezért
$$5x^2 + 4x + 5 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így az eredeti egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn, ha

$$x \in \boxed{(-\infty,-1) \cup \left(\frac{1}{2},+\infty\right)}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Adjuk meg azokat a $p \in \mathbb{R}$ paramétereket, amelyekre:

1. $x^2 + 6x + p > 0 \ (x \in \mathbb{R})$;
2. $x^2 - px > \frac{2}{p} \ (x \in \mathbb{R})$;
3. $(p^2-1)x^2 + 2(p-1)x + 1 > 0 \ (x \in \mathbb{R})$;
4. $\frac{x^2 - px + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \ (x \in \mathbb{R})$

teljesül! **Útm.**

1. $36 - 4p < 0$, azaz $p \in (9, +\infty)$.
2. Az egyenlőtlenséget „0-ra redukálva” azt kapjuk, hogy

$$x^2 - px - \frac{2}{p} > 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $p^2 + \frac{8}{p} < 0$. Szorozzuk be az egyenlőtlenség mindkét oldalát p-vel. Ekkor, ha

- $p > 0$, akkor $p^3 + 8 < 0$, azaz $p < -2$ és ilyen p nincs;
- $p < 0$, akkor $p^3 + 8 > 0$, azaz $p > -2$.

Így tehát az egyenlőtlenség $p \in \boxed{(-2, 0)}$ esetén teljesül.

3. p értékétől függően több esetet különböztetünk meg:

$\boxed{p=-1}$: $-4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1/4$, van tehát olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre

$$(p^2-1)x^2 + 2(p-1)x + 1 < 0.$$

Így az ilyen p nem megoldás.

$\boxed{p=1}$: $1 > 0$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így $p = 1$ megoldás.

$\boxed{p \in (-1,1)}$**:** Ebben az esetben a másodfokú parabola főegyütthatója negatív, tehát van olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre

$$(p^2-1)x^2+2(p-1)x+1<0.$$

Így az ilyen p nem megoldás.

$\boxed{p \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)}$**:**

$$(p^2-1)x^2+2(p-1)x+1>0 \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4(p-1)^2-4(p^2-1)<0.$$

Ez pedig $p \geq 1$ esetén áll fenn.

A megoldás tehát $p \in \boxed{[1,\infty)}$.

4. Használjuk fel, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2-px+1}{x^2+x+1}<3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0>\frac{x^2-px+1}{x^2+x+1}-3=\frac{-2x^2-(p+3)x-2}{x^2+x+1}$$

teljesül! ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ szám esetén fennáll az

$$\frac{7-\sqrt{52}}{3} \leq \frac{x+3}{x^2-x+1} \leq \frac{7+\sqrt{52}}{3}$$

egyenlőtlenségpár! **Útm.** Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^2-x+1>0,$$

ezért

$$\frac{7-\sqrt{52}}{3} \leq \frac{x+3}{x^2-x+1} \leq \frac{7+\sqrt{52}}{3}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$(7-\sqrt{52})(x^2-x+1) \leq 3(x+3) \leq (7+\sqrt{52})(x^2-x+1).$$

Mivel

$$(7-\sqrt{52})(x^2-x+1) \leq 3(x+3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\underbrace{7-\sqrt{52}}_{=:a})x^2-(\underbrace{10-\sqrt{52}}_{=:-b})x-(\underbrace{2+\sqrt{52}}_{=:-c}) \leq 0$$

és

$$b^2-4ac=(10-\sqrt{52})^2+4(7-\sqrt{52})(2+\sqrt{52})=\ldots=0,$$

ezért az első egyenlőtlenség tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül. Mivel

$$3(x+3) \leq (7+\sqrt{52})(x^2-x+1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\underbrace{7+\sqrt{52}}_{=:a})x^2-(\underbrace{10+\sqrt{52}}_{=:-b})x+\underbrace{\sqrt{52}-2}_{=:c} \geq 0$$

és

$$\beta^2-4\alpha\gamma=(10+\sqrt{52})^2-4(7+\sqrt{52})(\sqrt{52}-2)=\ldots=0,$$

ezért a második egyenlőtlenség tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül. ■

0.2. $\boxed{\text{2. oktatási hét}}$

Emlékeztető. Ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $a \neq 0$, akkor az

$$f(x) := ax^2 + bx + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

másodfokú polinommal kapcsolatban három eset fordulhat elő.

1. eset. Ha $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$, akkor $\boxed{\nexists x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = 0}$. Ebben az esetben (vö. 1. ábra)

$$f(x) \lessgtr 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \lessgtr 0.$$

2. eset. Ha $\boxed{b^2 - 4ac = 0}$, akkor

$$\boxed{f(x)} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \boxed{= 0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{x = -\frac{b}{2a}}.$$

Ebben az esetben (vö. 2. ábra)

$$f(x) \gtreqless 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \lessgtr 0.$$

3. eset. Ha $\boxed{b^2 - 4ac > 0}$, akkor

$$\boxed{f(x) = 0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}.$$

Ebben az esetben (vö. 3. ábra)

- $a > 0$ esetén

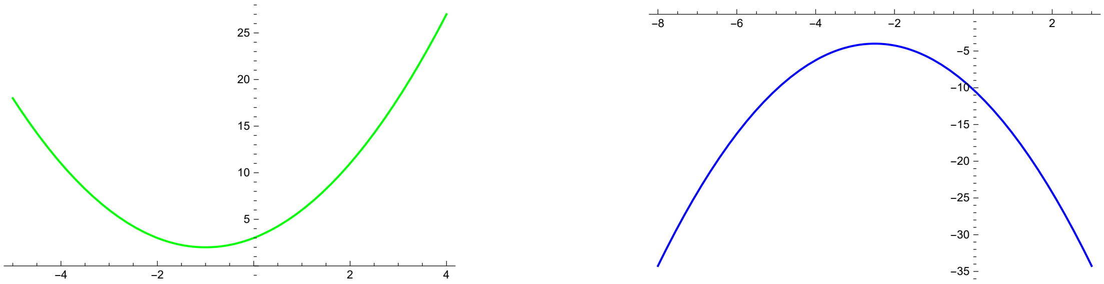
$$f(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, x_-) \cup (x_+, +\infty) \qquad \text{és} \qquad f(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (x_-, x_+);$$

- $a < 0$ esetén

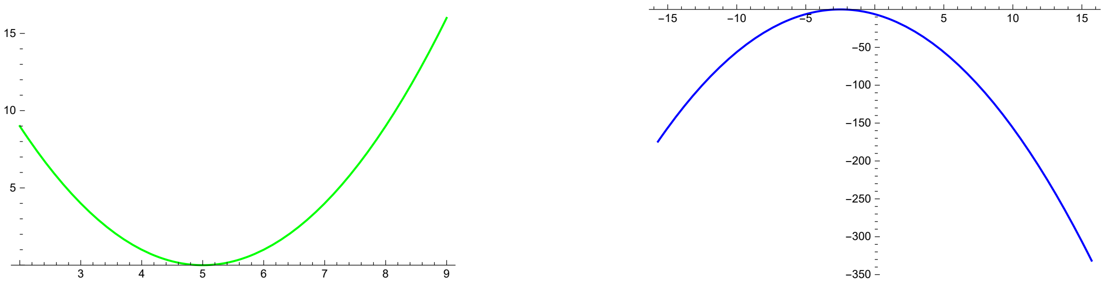
$$f(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, x_-) \cup (x_+, +\infty) \qquad \text{és} \qquad f(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (x_-, x_+).$$

Megjegyezzük, hogy

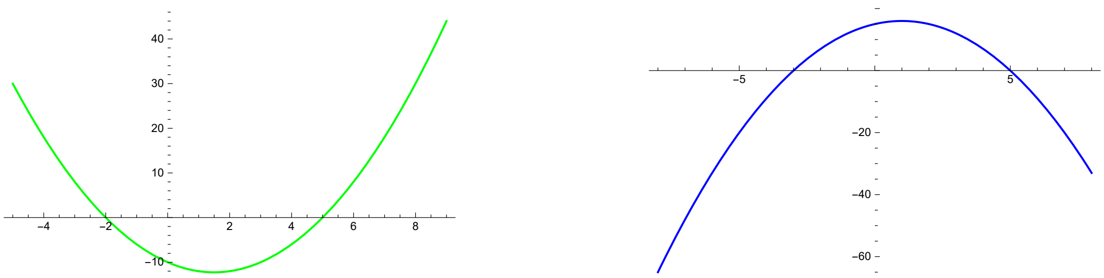
$$\boxed{x_+ + x_- = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{x_+ \cdot x_- = \frac{c}{a}} \qquad \text{és} \qquad \boxed{f(x) = a(x - x_+)(x - x_-) \quad (x \in \mathbb{R})}.$$



1. ábra.



2. ábra.



3. ábra.

Feladat. Igazoljuk az alábbi állításokat!

1. Bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ számra
$$\frac{x^4+5x^2+4}{x^4-16} = \frac{x^2+1}{x^2-4}.$$

2. Minden $-\frac{1}{2} \neq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{2x^2-13x-7}{8x^3+1} = \frac{x-7}{4x^2-2x+1}.$$

3. Tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)^2}{x^5+x^3} = \frac{-4}{x(x^2+1)}.$$

4. Bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ számra
$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

5. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;-2\}$ esetén
$$\frac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2} = \frac{3x-1}{x+1}.$$

Útm.

1. Ha $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ és $y := x^2$, akkor
$$\frac{x^4+5x^2+4}{x^4-16} = \frac{y^2+5y+4}{y^2-16} = \frac{(y+1)(y+4)}{(y-4)(y+4)} = \frac{y+1}{y-4} = \frac{x^2+1}{x^2-4}.$$

2. Ha $-\frac{1}{2} \neq x \in \mathbb{R}$, akkor
$$\frac{2x^2-13x-7}{8x^3+1} = \frac{2(x-7)(x+\frac{1}{2})}{(2x)^3+1^3} = \frac{(x-7)(2x+1)}{(2x+1)(4x^2-2x+1)} = \frac{x-7}{4x^2-2x+1}.$$

3. Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor
$$\frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)^2}{x^5+x^3} = \frac{(-2)(2x^2)}{x^3(x^2+1)} = \frac{-4}{x(x^2+1)}.$$

4. Ha $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-1} &= \frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \\ &= \frac{2(x^2+x+1)-3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \\ &= \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}.\end{aligned}$$

5. Ha $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;-2\}$, akkor

$$\frac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2} = \frac{3(x-\frac{1}{3})(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(3x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{3x-1}{x+1}. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

1. $a-\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)$ $(a \geq 0)$;
2. $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ $(a, b \geq 0)$;
3. $\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$ $(a, b \geq 0)$;
4. $a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)$ $(a, b \geq 0)$;
5. $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(a-\sqrt{ab}+b\right)$ $(a, b \geq 0)$;
6. $a \pm b=\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$ $(a, b \in \mathbb{R})$;
7. $a-b=\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right) \cdot \left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)$ $(a, b \geq 0,\ n \in \mathbb{N})$.

Feladat. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket!

1. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^3-1}$ $\quad (1 \neq x \in \mathbb{R})$;
2. $\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1}$ $\quad (2 < x \in \mathbb{R})$;
3. $\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$ $\quad (8 \neq x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Bármely $\neq x \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^3-1} &= \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} = \\
&= \frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \frac{x+1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}.
\end{aligned}$$

2. Tetszőleges $2 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x-6}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1} &= \frac{x^2+x-6}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1} = \\
&= \frac{(x-2)(x+3)\left[\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1\right]}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \\
&= (\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+3)\left[\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1\right].
\end{aligned}$$

3. Ha $8 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2} &= \frac{x^2-8^2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8}} = \frac{(x-8)(x+8)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{64}} = \\
&= \frac{(x-8)(x+8)\left[\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{64}\right]}{x-8} = (x+8)\left[\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{64}\right]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ szám **abszolút érték**én, ill. **előjel**én az

$$\boxed{|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x < 0) \end{cases}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \dfrac{x}{|x|} & (x \neq 0) \end{cases}}$$

valós számot értjük. Nyilván igaz, hogy

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

1. $|x| \geq 0$ és $|x| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$;
2. $|x| = |-x|$;
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, ill. ha $y \neq 0$, úgy $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$;
4. ha $a \geq 0$, akkor

$$\boxed{|x| \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad -a \leq x \leq a}, \qquad \text{ill.} \qquad \boxed{|x| \geq a \quad \Longleftrightarrow \quad (x \leq -a \ \text{vagy} \ x \geq a)};$$

5. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ (**háromszög-egyenlőtlenség**);
6. $|x - y| \geq ||x| - |y||$ (**háromszög-egyenlőtlenség**).

Feladat. Mely $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek, ill. egyenlőtlenségek?

1. $|x - 2| < 3$;
2. $|2x - 1| < |x - 1|$;
3. $|2x - 7| + |2x + 7| = x + 15$;
4. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$.

egyenlőtlenség?
Útm.

1. Az abszolút értékre vonatkozó 4. tulajdonság alapján

$$|x - 2| < 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -3 < x - 2 < 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 5.$$

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát a $(-1, 5)$ intervallum.

2. Az abszolút érték definíciója szerint

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \left(x \geq \frac{1}{2}\right), \\ 1-2x & \left(x < \frac{1}{2}\right), \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1), \\ 1-x & (x < 1). \end{cases}$$

Az első abszolút értékben lévő szám előjele $x = \frac{1}{2}$-nél, a másodikéban lévő pedig $x = 1$-nél változik meg. $\mathbb{R}$-et tehát az alábbi intervallumokra célszerű felbontani: $\mathbb{R} = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, ahol

$$I_1 := \left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \qquad I_2 := \left[\frac{1}{2}, 1\right), \qquad I_3 := [1, +\infty)\,.$$

Így

- az I_1 intervallumon az egyenlőtlenség

$$1-2x < 1-x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0$$

alakú, ahonnan

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cap (0, +\infty) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

felhasználásával I_1-en az $\mathcal{M}_1 := \left(0, \frac{1}{2}\right)$ halmaz elemei a megoldások.

- az I_2 intervallumon az egyenlőtlenség

$$2x-1 < 1-x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x < 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < \frac{2}{3}$$

alakú, ahonnan

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cap \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

felhasználásával I_2-n az $\mathcal{M}_2 := \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ halmaz elemei a megoldások.

- az I_3 intervallumon az egyenlőtlenség

$$2x-1 < x-1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < 0$$

alakú, ahonnan

$$(1, +\infty) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$$

felhasználásával I_3-n az egyenlőtlenségnek nincsen megoldása.

Mindent összevetve az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

halmaz (intervallum).

3. Az abszolút érték definíciója szerint

$$|2x-7| = \begin{cases} 2x-7 & \left(x \geq \dfrac{7}{2}\right), \\ 7-2x & \left(x < \dfrac{7}{2}\right), \end{cases} \qquad |2x+7| = \begin{cases} 2x+7 & \left(x \geq -\dfrac{7}{2}\right), \\ -2x-7 & \left(x < -\dfrac{7}{2}\right). \end{cases}$$

Az első abszolút értékben lévő szám előjele $x = \frac{7}{2}$-nél, a másodikéban lévő pedig $x = -\frac{7}{2}$-nél változik meg. $\mathbb{R}$-et tehát az alábbi intervallumokra célszerű felbontani: $\mathbb{R} = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, ahol

$$I_1 := \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right), \quad I_2 := \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right), \quad I_3 := \left[\frac{7}{2}, +\infty\right).$$

Mivel

$$|2x-7| + |2x+7| = \left\{ \begin{array}{ll} (-2x+7) + (-2x-7) = -4x & (x \in I_1), \\ (-2x+7) + (2x+7) = 14 & (x \in I_2), \\ (2x-7) + (2x+7) = 4x & (x \in I_3), \end{array} \right\}$$

ezért a fenti egyenlet

- az $I_1 = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$ intervallumon nem más mint

$$-4x = x + 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -3 \notin I_1.$$

  Az I_1 intervallumon tehát nincs megoldás.

- az $I_2 = \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ intervallumon nem más mint

$$14 = x + 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -1 \in I_2.$$

  Ennélfogva ezen az intervallumon $x = -1$ az egyetlen megoldás.

- az $I_3 = \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$ intervallumon nem más mint

$$4x = x + 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x = 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 5 \in I_3.$$

  Tehát ezen az intervallumon $x = 5$ az egyetlen megoldás.

Mindent összevetve az eredeti egyenlet megoldáshalmaza a kételemű $\{-1; 5\}$ halmaz.

4. Az abszolút érték definíciója szerint

$$|x^2-9| = \begin{cases} x^2 - 9 & (x \in (-\infty, -3[\cup[3, +\infty)), \\ \\ 9 - x^2 & (x \in (-3, 3)), \end{cases} \qquad |x^2-4| = \begin{cases} x^2 - 4 & (x \in (-\infty, -2[\cup[2, +\infty)), \\ \\ 4 - x^2 & (x \in (-3, 3)). \end{cases}$$

így célszerű $\mathbb{R}$-et az alábbi halmazok egyesítésre bontani: $\mathbb{R} = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, ahol

$$H_1 := (-\infty, -3] \cup [3, +\infty), \qquad H_2 := (-3, -2] \cup [2, 3), \qquad H_3 := (-2, 2).$$

Mivel

$$|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = \left\{ \begin{array}{ll} (x^2 - 9) + (x^2 - 4) = 2x^2 - 13 & (x \in H_1), \\ \\ (9 - x^2) + (x^2 - 4) = 5 & (x \in H_2), \\ \\ (9 - x^2) + (4 - x^2) = -2x^2 + 13 & (x \in H_3), \end{array} \right\}$$

ezért a fenti egyenlet

- a $H_1 := (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ halmazon nem más mint

$$2x^2 - 13 = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{-3; 3\} \subset H_1.$$

  A H_1 halmazon tehát két megoldás van: $x = -3$ és $x = 3$.

- a $H_2 := (-3, -2] \cup [2, 3)$ halmazon nem más mint az $5 = 5$. azonosság. Tehát a H_2 halmaz minden eleme megoldás.

- a $H_3 := (-2, 2)$ halmazon nem más mint

$$-2x^2 + 13 = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2 = 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{-2; 2\} \subset \mathbb{R} \backslash H_3.$$

  Ezen a halmazon tehát nincsen megoldás.

Mindent összevetve az eredeti egyenlet megoldáshalmaza a

$$[-3,-2] \cup [2,3]$$

halmaz. ■

Feladat. Oljuk meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

1. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$; 2. $\sqrt{x^2+4x}>2-x$; 3. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$.

Útm.

1. Világos, hogy ha van ilyan x, akkor arra

$$x \geq -1, \qquad x \leq 9, \qquad x \geq 6,$$

azaz $x \in [6,9]$ teljesül. Az

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$$

egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve azt kapjuk, hogy

$$x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}+9-x=2x-12, \qquad \text{azaz} \qquad \sqrt{x+1}\sqrt{9-x}=11-x.$$

Innen mindkét oldalt négyzetre emelésével pedig azt kapjuk, hogy

$$(x+1)(9-x)=121-22x+x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2-30x+112=0.$$

Így tehát

$$2x^2-30x+112=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{\pm}=\frac{15\pm\sqrt{225-224}}{2}\in\{8;7\}$$

következtében a megoldáshalmaz: $\{7;8\}\,/\subseteq[6,9]/$.

2. Látható, hogy ha van ilyan x, akkor arra

$$x^2+4x=x(x+4)\geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\in\mathcal{H}:=(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$$

teljesül. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát akkor érdemes négyzetre emelni, ha azok nemnegatívak. Ha tehát

- $2-x<0$, azaz $x>2$, akkor $x\in\mathcal{H}$. Így az egyenlőtlenség teljesül, hiszen bal oldala nemnegatív, jobb oldala pedig negatív. Az

$$\mathcal{M}_1:=(2,+\infty)$$

halmaz minden elem tehát megoldás.

- $2-x\geq 0$, akkor $x\in\mathcal{H}$. Így tetszőleges $x\in(-\infty,-4]\cup[0,2]$ esetén

$$\sqrt{x^2+4x}>2-x \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+4x>(2-x)^2=4-4x+x^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x\in(0.5,+\infty).$$

A feltétel fényében így minden olyan $x\in\mathcal{H}$ megoldás, amelyre $x\in(0.5,+\infty)$, azaz

$$x\in\mathcal{H}\cap(0.5,+\infty)=(0.5,2]=:\mathcal{M}_2.$$

A egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát az

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2=(0.5,+\infty)$$

halmaz.

3. Vegyük észre, hogy ha van ilyan x, akkor arra

$$(3-x\geq 0 \quad \text{és} \quad x+1\geq 0) \quad\Longleftrightarrow\quad x\in\mathcal{H}:=[-1,3]$$

teljesül. Mivel

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{3-x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x+1},$$

ezért (ez utóbbi) egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, tehát négyzetre emelhető:

$$\sqrt{3-x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x+1} \quad\Longleftrightarrow\quad 3-x>\frac{1}{4}+\sqrt{x+1}+x+1 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{7}{4}-2x>\sqrt{x+1}.$$

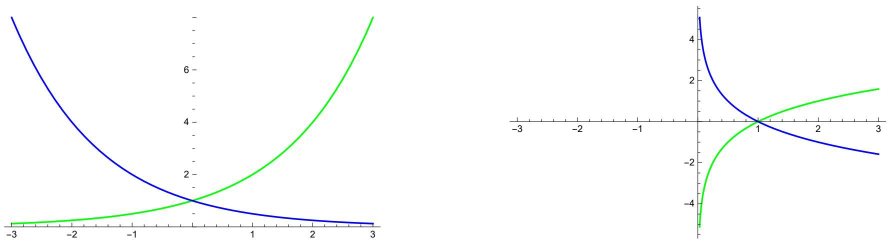
Ha tehát

- $\frac{7}{4}-2x<0$, azaz $x<\frac{7}{8}$ és $x\in\mathcal{H}$ is teljesül, akkor $x\in\left(\frac{7}{8},3\right]$. Ebben az esetben nincsen megoldás, mert $\sqrt{x+1}\geq 0$.
- $\frac{7}{4}-2x\geq 0$ és $x\in\mathcal{H}$ is teljesül, azaz $x\in\left[-1,\frac{7}{8}\right]$, akkor mindkét oldalt négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$\frac{7}{4}-2x>\sqrt{x+1} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{49}{16}-7x+4x^2>x+1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4x^2-8x+\frac{33}{16}>0,$$

azaz

$$x\in\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{31}}{8},+\infty\right).$$



4. ábra.

A egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát az

$$\mathcal{M} =: \left[-1, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right)$$

halmaz. ■

Emlékeztető. Legyen $0 < a \in \mathbb{R}$: $a \neq 1$. A

$$\varphi_a(x) := a^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt a**-alapú exponenciális függvény**nek nevezzük. Ismeretes, hogy $\varphi_a(0) = 1$, továbbá (vö. 4. ábra)

- $a > 1$ esetén φ_a szigorúan monoton növekedő
- $0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő.

Ezért pl.

1. $a^x = a^y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$;
2. ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, $f, h : H \to \mathbb{R}$, akkor

$$a^{f(x)} = a^{f(y)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y) \qquad (x, y \in H);$$

3. ha
   - $a > 1$, akkor
   $$a^x < a^y \quad \Longleftrightarrow \quad x < y \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$
   - $0 < a < 1$, akkor
   $$a^x > a^y \quad \Longleftrightarrow \quad x < y \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket ill. egyenlőtlenségeket!

(a) $2^x = 128$; (b) $2^x \geq 128$; (c) $\left(\frac{1}{27}\right)^x = 81$; (d) $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{25}{9}$.

Útm.

(a) $x = 7$; (b) $x \geq 7$; (c) $x = -4/3$; (d) $x < -2$. ■

Emlékeztető. Mivel $\mathcal{R}_{\varphi_a} = (0, +\infty)$ és φ_a szigorúan monoton, ezért invertálható:

$$\log_a(x) := \varphi_a^{-1}(x) \quad (x \in (0, +\infty)),$$

így tetszőleges $0 < b \in \mathbb{R}$ esetén az $a^x = b$ egyenlet megoldása $\log_a(b)$, azaz az a kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapunk:

$$\boxed{a^{\log_a(b)} = b}.$$

Például:

$$3^{\log_3(7)} = 7, \qquad 4^{\log_2(3)} = 2^{2\cdot\log_2(3)} = \left(2^{\log_2(3)}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

1. $4^x + 2^{x+1} = 8$;
2. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$;
3. $5^x - 0.2^x = 4.8$;
4. $10^x - 10^{-x} = 8/3$;
5. $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0$;
6. $2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33$.

Útm.

1. Mivel

$$\left(4^x + 2^{x+1} = 2^{2x} + 2 \cdot 2^x = (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x = 8, \quad y := 2^x\right) \quad \rightsquigarrow \quad y^2 + 2y - 8 = 0,$$

ezért $y = -1 + \sqrt{1+8} = 2$, ahonnan $\boxed{x = 1}$.

2. Mivel

$$\left(3^{x+2} + 9^{x+1} = 9 \cdot 3^x + 3^{2x+2} = 9 \cdot 3^x + 9 \cdot (3^x)^2 = 810, \quad y := 3^x\right) \quad \rightsquigarrow \quad 9y^2 + 9y - 810 = 0,$$

ezért

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 + 360}}{2} = \frac{-1 + 19}{2} = \frac{18}{2} = 9,$$

azaz $\boxed{x = 2}$.

3. Mivel

$$\left(5^x - 0.2^x = 5^x - \left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{24}{5}, \quad y := 5^x\right) \quad \rightsquigarrow \quad y - \frac{1}{y} = \frac{24}{5},$$

ezért

$$5y^2 - 24y - 5 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad y = \frac{12 + \sqrt{144 + 25}}{5} = \frac{12 + 15}{5} = 5.$$

Így $\boxed{x = 1}$.

4. Mivel

$$\left(10^x - 10^{-x} = \frac{8}{3}, \quad y := 10^x\right) \quad \rightsquigarrow \quad y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3},$$

ezért

$$3y^2 - 8y - 3 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad y = \frac{4 + \sqrt{16 + 9}}{3} = 3.$$

Így $\boxed{x = \lg(3)}$.

5. Mivel

$$\left(4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0 = 4 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 2 = 4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 > 0, \ y := 2^x\right) \quad \rightsquigarrow \quad 4y^2 - 9y + 2 > 0$$

ezért $y \in (-\infty, 1/4) \cup (2, +\infty)$. Így

$$\boxed{x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)}.$$

6. Mivel

$$\left(2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 8 \cdot 2^x + 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 33, \quad y := 2^x\right) \quad \rightsquigarrow \quad 8y + \frac{4}{y} = 33,$$

ezért

$$8y^2 - 33y + 4 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad y = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{16} \in \left\{\frac{1}{8}, 4\right\}.$$

Így tehát $\boxed{x \in \{-3, 2\}}$. ■

Emlékeztető. A $\log_a$ függvény is szigorúan monoton (vö. 4. ábra):

- $a > 0$ esetén szigorúan monoton növekedő;
- $0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő.

Ha $0 < x, y \in \mathbb{R}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y),\\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y),\\ \log_a(x^\alpha) &= \alpha\log_a(x).\end{aligned}$$

Ha

$$\begin{aligned}&xy > 0, && \text{akkor} && \log_a(xy) = \log_a(|x|) + \log_a(|y|),\\ &xy \neq 0, && \text{akkor} && \log_a(|x|) + \log_a(|y|) = \log_a(|xy|),\\ &\frac{x}{y} > 0, && \text{akkor} && \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(|x|) - \log_a(|y|),\\ &x \neq 0, && \text{akkor} && \log_a(x^2) = 2\log_a(|x|).\end{aligned}$$

Ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, $f(x), g(x) > 0$ $(x \in H)$, akkor

$$\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x),$$

továbbá

- $a > 1$ esetén $\log_a(f(x)) > \log_a(g(x)) \Longleftrightarrow f(x) > g(x)$ $(x, y \in H)$;
- $0 < a < 1$ esetén $\log_a(f(x)) > \log_a(g(x)) \Longleftrightarrow f(x) < g(x)$ $(x, y \in H)$.

Megjegyzés.

$$\boxed{\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} = \frac{1}{\log_b(a)}}, \qquad \boxed{\log_{a^\alpha}(b) = \frac{1}{\alpha}\log_a(b)} \quad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}).$$

Példa.

$$4^{\log_2(3)} = 2^{2\cdot\log_2(3)} = 2^{\log_2(3^2)} = 9, \qquad 2^{\log_4(5)} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\log_2(5)} = 2^{\log_2(\sqrt{5})} = \sqrt{5}.$$

Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

1. $\log_{4-x}(x^2+16)+\log_{4-x}(2x+1)=\log_{4-x}(2x)+\log_{4-x}(x^2+21)$;
2. $\dfrac{\lg^2(2x)-1}{1-\lg(2x)}=1$;
3. $16^{\sqrt{x^2-8x+16}}=8$.

Útm.

1. Világos, hogy
$$3\neq x\in(-\infty,4)\cap(-1/2,+\infty)\cap(0,+\infty)=(0,4)\backslash\{3\}.$$
Továbbá
$$\begin{aligned} & \log_{4-x}(x^2+16)+\log_{4-x}(2x+1)=\log_{4-x}(2x)+\log_{4-x}(x^2+21) \\ \iff & \log_{4-x}((x^2+16)\cdot(2x+1))=\log_4(2x(x^2+21)) \\ \iff & \log_{4-x}((x^2+16)\cdot(2x+1))=\log_4(2x(x^2+21)) \\ \iff & 3x^3+x^2+32x+16=2x^3+42x \\ \iff & x^2-10x+16=0. \end{aligned}$$
Következésképpen
$$x=5\pm\sqrt{25-16}=5\pm3,\qquad \text{ezért}\qquad \boxed{x=2}.$$
2. Világos, hogy $5\neq x\in(0,+\infty)$. Így
$$\frac{\lg^2(2x)-1}{1-\lg(2x)}=1\qquad\iff\qquad \lg^2(2x)-1=1-\lg(2x).$$
H $y:=\lg(2x)$, akkor $y^2+y-2=0$, azaz
$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}.$$
$\lg(2x)=1\Leftrightarrow x=5$, ami nem gyök, $\lg(2x)=-2\Leftrightarrow\boxed{x=1/200}$, ami gyök.
3. Mivel
$$16^{\sqrt{x^2-8x+16}}=8\quad\iff\quad\log_2\left(16^{\sqrt{x^2-8x+16}}\right)=\log_2(8)\quad\iff\quad 4\sqrt{x^2-8x+16}=3,$$

ezért a $4|x-4| = 3$ egyenletet kell megoldanunk: $x \in \{13/4, 19/4\}$. ■

Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

(a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) < 0$; (b) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) < 1$.

Útm.

1. $\frac{1}{2} < 1$ miatt

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{3x-1} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3-x}{3x-1} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-4x+4x}{3x-1} > 0,$$

amiből

$$\boxed{\frac{1}{3} < x < 1}.$$

2. $\frac{1}{3} < 1$ miatt

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+2} > \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{8x-5}{3(x+2)} > 0,$$

amiből

$$\boxed{x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{5}{8}, +\infty\right)}. \quad ■$$

Feladat. Számítsuk ki

$$3^{2+\log_9(25)} + 25^{1-\log_5(2)} + 10^{-\lg(-4)}$$

pontos értékét!

Útm.

$$3^{2+\log_9(25)} + 25^{1-\log_5(2)} + 10^{-\lg(-4)} = 9 \cdot \left(9^{\log_9(25)}\right)^{1/2} + 25 \cdot \left(5^{\log_5(2)}\right)^{-2} + \left(10^{\lg(4)}\right)^{-1} =$$

$$= 9 \cdot \sqrt{25} + 25 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{103}{2}}}. \quad ■$$

Feladat. A valós számok halmazán oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

1. $3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0$;
2. $\log_{25}\left(\frac{1}{5}\log_3\left(2 - \log_{1/2}(x)\right)\right) = -\frac{1}{2}$;
3. $\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2 \cdot \log_3(4.5) - 4$;

4. $\log_2(x-2)+\log_2(x+3)=1+2\cdot\log_4(3)$;

5. $\log_{32}(2x)-\log_8(4x)+\log_2(x)=3$;

6. $x^{2\cdot\lg^2(x)-1.5\cdot\lg(x)}=\sqrt{10}$.

Útm.

1. Mivel
$$3^{x+2}\cdot 2^x-2\cdot 36^x+18=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 9\cdot 6^x-2\cdot(6^x)^2+18=0,$$
ezlért az $y:=6^x$ helyettesítéssel a
$$-2y^2+9y+18=0$$
másodfokú egyenletet kapjuk. Így
$$y_\pm=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{-4}\in\{6;-3/2\},$$
ahonnan $y=6$, azaz $\boxed{x=1}$.

2. Világos, hogy ha van olyan x, akkor arra
$$\frac{1}{25}\log_3\left(2-\log_{1/2}(x)\right)>0 \qquad \text{és} \qquad 2-\log_{1/2}(x)>0 \qquad \text{és} \qquad x>0$$
teljesül. Mivel
$$\log_{25}\left(\frac{1}{5}\log_3\left(2-\log_{1/2}(x)\right)\right)=-\frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{25}\log_3\left(2-\log_{1/2}(x)\right)=\frac{1}{5} \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \log_3\left(2-\log_{1/2}(x)\right)=1 \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2-\log_{1/2}(x)=3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_{1/2}(x)=-1 \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad x=(1/2)^{-1}=2,$$
ezért a megoldás $\boxed{x=2}$.

3. Világos, hogy ha van olyan x, akkor arra

$$(x+1>0 \qquad \text{és} \qquad x+10>0), \qquad \text{azaz} \qquad x \in \mathcal{H} := (-1,+\infty)$$

teljesül. Mivel

$$\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2 \cdot \log_3(4.5) - 4 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_3\left(\frac{x+1}{x+10}\right) = 2 \cdot (\log_3(9) - \log_3(2)) - 4 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_3\left(\frac{x+1}{x+10}\right) = -2 \cdot \log_3(2) = \log_3\left(\frac{1}{4}\right),$$

ezért a $\log_3$ függvény szigorúan monoton növekedő volta következtében azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+1}{x+10} = \frac{1}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4x+4 = x+10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2 \in \mathcal{H}.$$

4. Világos, hogy ha van olyan x, akkor arra

$$(x-2>0 \qquad \text{és} \qquad x+3>0), \qquad \text{azaz} \qquad x \in \mathcal{H} := (2,+\infty)$$

teljesül. Mivel

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1 + 2 \cdot \log_4(3) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_2\left((x-2)(x+3)\right) = \log_2(2) + 2 \cdot \frac{\log_2(3)}{\log_2(4)} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_2\left(x^2+x-6\right) = \log_2(2) + \log_2(3 = \log_2(6)) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2+x-6 = 6,$$

ezért a $\log_3$ függvény szigorúan monoton növekedő volta következtében azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \in \{3; -4\}.$$

Világos, hogy $3 \in \mathcal{H} \not\ni -4$, ezért az egyetlen megoldás $\boxed{x=3}$.

5. Világos, hogy ha van ilyen x, akkor arra $x \in \mathcal{H} := (0, +\infty)$. Mivel

$$\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{5}\left(\log_2(2) + \log_2(x)\right) - \frac{1}{3}\left(\log_2(4) + \log_2(x)\right) + \log_2(x) = 3,$$

ezért az $y := \log_2(x)$ jelölés bevezetésével azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{5}(1+y) - \frac{1}{3}(2+y) + \log_2(x) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 13y = 52 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 4.$$

Mivel $x = 2^y = 2^4 \in \mathcal{H}$, ezért a megoldás: $\boxed{x = 4}$.

6. Világos, hogy ha van ilyen x, akkor arra $x \in \mathcal{H} := (0, +\infty)$. Mivel

$$x^{2\cdot \lg^2(x) - 1.5\cdot \lg(x)} = \sqrt{10} \quad \Longleftrightarrow \quad \lg\left(x^{2\cdot \lg^2(x) - 1.5\cdot \lg(x)}\right) = \lg\left(\sqrt{10}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(2\cdot \lg^2(x) - 1.5\cdot \lg(x)\right)\cdot \lg(x) = \frac{\lg(10)}{2},$$

ezért az $y := \lg(x)$ jelölés bevezetésével azt kapjuk, hogy

$$(2y^2 - 1.5\cdot y)\cdot y = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 4y^3 - 3y^2 - 1 = 0.$$

Nem nehéz észrevenni, hogy fenti egyenletnek az $y = 1$ szám gyöke. A Horner-módszer használatával így azt kapjuk, hogy

	4	−3	0	−1
1	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$

Tehát

$$4y^3 - 3y^2 - 1 = (y-1)(4y^2 + y + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1.$$

Mivel $x = 10^y = 10^1 \in \mathcal{H}$, ezért a megoldás: $\boxed{x = 10}$. ■

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ha f egyész együtthatós polinom, azaz alkalmas

$$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, \qquad a_n \neq 0$$

esetén

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

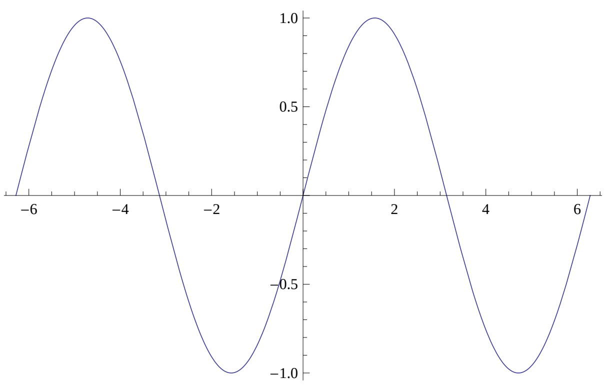
és valamely $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{lnko}(\xi, \eta) = 1$ számokra $f(\xi/\eta) = 0$, akkor $\xi | a_0$ és $\eta | a_n$.

0.3. $\boxed{\text{3. oktatási hét}}$

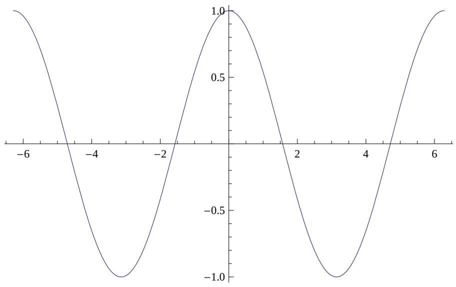
Feladat. Vázoljuk a sin, cos, tg, ctg függvények grafikonját, majd jól **jegyezzük meg** a trigonometrikus függvények alábbi értékeit!

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\mathrm{tg}(\alpha)$	$\mathrm{ctg}(\alpha)$
0	0	1	0	$-$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	0
π	0	-1	0	$-$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-$	0

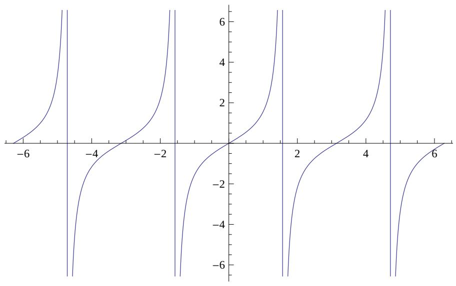
Útm.



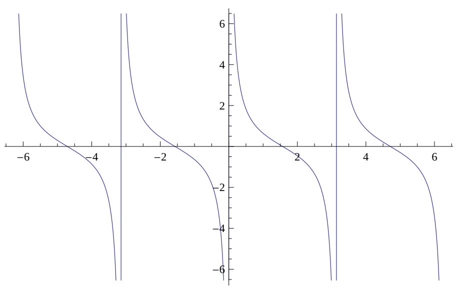
5. ábra. A sin grafikonjának egy részlete.



6. ábra. A cos grafikonjának egy részlete.



7. ábra. A tg grafikonjának egy részlete.



8. ábra. A ctg grafikonjának egy részlete.

Emlékeztető. Alkalmas $x, y \in \mathbb{R}$, ill. $k \in \mathbb{N}$ esetén igazak az alábbi trigonometrikus összefüggések.

1. $\sin(k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k, \quad \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

2. különböző szögfüggvények közötti összefüggések:
   - $\cos(x+\pi) = -\cos(x), \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x);$
   - $\cos(x+2\pi) = \cos(x), \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x);$
   - $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1;$
   - $\cos(\pi - x) = -\cos(x), \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x);$
   - $\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x);$
   - $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x);$
   - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x);$
   - $\mathrm{tg}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \mathrm{ctg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{ctg}(x).$

3. addíciós tételek:
   - $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y);$
   - $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y);$
   - $\mathrm{tg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}(x) \pm \mathrm{tg}(y)}{1 \mp \mathrm{tg}(x)\cdot\mathrm{tg}(y)}, \qquad \mathrm{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{ctg}(y)\cdot\mathrm{ctg}(x) \mp 1}{\mathrm{ctg}(y) \pm \mathrm{ctg}(x)}.$

4. kétszeres szögfüggvények:
   - $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \dfrac{2\,\mathrm{tg}(x)}{1 + \mathrm{tg}^2(x)};$
   - $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2(x)}{1 + \mathrm{tg}^2(x)};$
   - $\mathrm{tg}(2x) = \dfrac{2\,\mathrm{tg}(x)}{1 - \mathrm{tg}^2(x)}, \qquad \mathrm{ctg}(2x) = \dfrac{\mathrm{ctg}^2(x) - 1}{2\,\mathrm{ctg}(x)}.$

5. szögfüggvények összegének/különbségének szorzattá alakítása:
   - $\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\dfrac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x \mp y}{2}\right);$
   - $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x + y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x - y}{2}\right);$
   - $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\dfrac{x + y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x - y}{2}\right);$

- $\mathrm{tg}(x) \pm \mathrm{tg}(y) = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)}, \qquad \mathrm{ctg}(x) \pm \mathrm{ctg}(y) = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\sin(x) \cdot \sin(y)}.$

6. szögfüggvények szorzatának átalakítása:

   - $\cos(x) \cdot \cos(y) = \dfrac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2};$
   - $\sin(x) \cdot \sin(y) = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2};$
   - $\sin(x) \cdot \cos(y) = \dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}.$

7. linearizáló formulák, ill. hasonló összefüggések:

   - $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}, \qquad \sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2};$
   - $\mathrm{tg}\,(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}, \qquad \mathrm{ctg}\,(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1-\cos(2x)} = \dfrac{1+\cos(2x)}{\sin(2x)}.$

Feladat. Számítsuk ki a

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

pontos értékét!

Útm. Világos, hogy

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2-\sqrt{3}}}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Természetesen az alábbi számolás is célravezető. Mivel

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4},$$

ezért

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1),$$

és

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}),$$

a következő eredményt kapjuk:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \underline{\underline{2-\sqrt{3}}}. \quad \blacksquare$$

A trigonometrikus függvényeknek igen fontos alkalmazása van a műszaki tudományokban. Gépek, mechanikai rendszerek működése általában az időben szabályosan ismétlődő mozgásokkal kapcsolatos (pl. dugattyúk, hajtókarok stb. mozgása). Az ilyen mozgások jellegzetes tulajdonsága, hogy az alkatrészek egyes pontjainak kitérése az időnek periodikus függvénye, e pontok **periodikus rezgőmozgás**t (lengést) végeznek. A rezgőmozgás legegyszerűbb formái azok, amelyek szinusz-, ill. koszinuszfüggvénnyel leírhatók.

Definíció. Adott $\omega \in \mathbb{N}$, $A \in [0, +\infty)$, ill. $\varphi \in [0, 2\pi)$ esetén az

$$f(t) := A\sin(\omega t + \varphi), \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad g(t) := A\cos(\omega t + \varphi) \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvények által leírt rezgést **lineáris harmonikus rezgés**nek nevezzük. $f(t)$ adja meg a kitérést a t időpontban, A (a legnagyobb kitérés) a rezgés **amplitúdó**ja, ω a **körfrekvencia** (a 2π mp alatt végzett rezgések száma), $(\omega t + \varphi)$ a **rezgés fázisa**, φ a **kezdőfázis**. Az 1 mp alatt végzett rezgések száma a **frekvencia** (rezgésszám):

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Egy rezgés teljes ideje:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

a rezgés **periódus**a.

Gyakran fordul elő, hogy egy anyagi pont egy egyenes mentén kétféle hatásra egyszerre két harmonikus rezgőmozgást végez. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a két harmonikus rezgés összeadódik.

Feladat. Lássuk be, hogy bármely $A, B, x \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $C, \psi \in \mathbb{R}$, hogy

$$A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x + \psi)$$

teljesül!
Útm.

1. lépés. Ha $A = 0 = B$, akkor a $C := 0$ választás tetszőleges $\psi \in \mathbb{R}$ mellett megfelelő.

2. lépés. Ha $A^2 + B^2 > 0$, akkor

$$A\sin(x) + B\cos(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x)\right\}.$$

Mivel

$$-1 \leq \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \leq 1 \qquad \text{és} \qquad \left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]^2 + \left[\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]^2 = 1,$$

ezért alkalmas $\psi \in [0, 2\pi)$ esetén

$$\cos(\psi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{és} \qquad \sin(\psi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ennélfogva

$$C := \sqrt{A^2+B^2}, \qquad \psi := \operatorname{arctg}(B/A) := \overset{-1}{\operatorname{tg}}(B/A). \quad \blacksquare$$

Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

1. $\cos(2x) = 0$;
2. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$;
3. $\sin^2(2x) = \frac{1}{4}$;
4. $\sin(4x) = \sin(x)$;
5. $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$.

Útm.

1. $\cos(2x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. $\sin(2x) = \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

3. $\sin^2(2x) = \frac{1}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin(2x) = \pm\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \\ \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$, azaz $2x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ és így

$$x = \pm\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. $\sin(4x) = \sin(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \sin(4x) = \sin(x) = \sin(\pi - x)$. Így bármely $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$4x = x + 2k\pi, \qquad \text{ill.} \qquad 4x = \pi - x + 2k\pi,$$

ahonnan

$$x = \begin{cases} \dfrac{2k}{3}\pi & (k \in \mathbb{Z}), \\ \\ \dfrac{2k+1}{5}\pi & (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

5. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, ezért az $y := \cos(x) \in [-1, 1]$ helyetesítéssel:

$$2y^2 - 3y + 1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Így

$$x = \begin{cases} 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}), \\ \\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}). \quad \blacksquare \end{cases}$$

Feladat. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket!

1. $\mathrm{ctg}(x) - \mathrm{tg}(x) = 2\sqrt{3}$;
2. $\cos(2x) = \cos(x) - \sin(x)$.

Útm.

1. Mivel bármely $x \in (0, \pi)$ esetén $\mathrm{ctg}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(x)}$, ezért

$$\mathrm{ctg}(x) - \mathrm{tg}(x) = 2\sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1 - \mathrm{tg}^2(x)}{\mathrm{tg}(x)} = 2\sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{tg}^2(x) + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(x) - 1 = 0.$$

Így az $y := \mathrm{tg}(x)$ helyettesítéssel

$$y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3+1} \in \{-\sqrt{3}+2, -\sqrt{3}-2\}.$$

Egy korábbi feladatból tudjuk, hogy

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3},$$

továbbá

$$2 + \sqrt{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{12}\right),$$

így

$$-2-\sqrt{3}=-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

Ennélfogva

$$x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{12}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}),\\[2ex] \dfrac{7\pi}{12}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).\end{cases}$$

2. Mivel bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=(\cos(x)-\sin(x))\cdot(\cos(x)+\sin(x)),$$

ezért

$$\cos(2x)=\cos(x)-\sin(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\cos(x)-\sin(x))\cdot(\cos(x)+\sin(x)-1)=0.$$

1. eset. $\cos(x)-\sin(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}(x)=1 \quad \Longleftrightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$

2. eset. $\cos(x)+\sin(x)-1=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(x)+\sin(x)=1$. Mivel bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\left\{\cos(x)\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right),$$

ezért

$$\cos(x)+\sin(x)=1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ahonnan

$$x\in\{2k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

következik. A megoldáshalmaz tehát

$$\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}. \qquad \blacksquare$$

Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

1. $\sin(4x)=\sin(3x)$;
2. $\cos(2x)=\cos(x)$;
3. $\operatorname{tg}(5x)=\operatorname{tg}(x)$;
4. $\sqrt{2}\sin(x)\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{1+\cos(x)}$;

Útm.

1. Világos, hogy ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, úgy

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{\beta + 2k\pi \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \beta + 2l\pi \in \mathbb{R}: \ l \in \mathbb{Z}\}.$$

   Ennélfogva

$$\sin(4x) = \sin(3x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{2k\pi \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{(2l+1)\frac{\pi}{7} \in \mathbb{R}: \ l \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Világos, hogy ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, úgy

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{\beta + 2k\pi \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0 - \beta + 2l\pi \in \mathbb{R}: \ l \in \mathbb{Z}\}.$$

   Ennélfogva

$$\cos(2x) = \cos(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \underbrace{\{2k\pi \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2l\pi}{3} \in \mathbb{R}: \ l \in \mathbb{Z}\right\}}_{=\left\{\frac{2m\pi}{3} \in \mathbb{R}: \ m \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

3. Világos, hogy ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, úgy

$$(\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{tg}(\beta) \quad \vee \quad \mathrm{ctg}(\alpha) = \mathrm{ctg}(\beta)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{\beta + k\pi \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

   Ennélfogva

$$\mathrm{tg}(5x) = \mathrm{tg}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left\{\frac{k\pi}{4} \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

4. Világos, hogy

$$\sqrt{2}\sin(x) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{1+\cos(x)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(x) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}.$$

   Az $y := \dfrac{x}{2}$ jelölés bevezetésével az egyenlet

$$\sin(2y) \cdot \cos(y) = \sqrt{\frac{1+\cos(2y)}{2}} = \sqrt{\cos^2(y)} = |\cos(y)|$$

   alakú. Így

   - $\cos(y) = 0$, azaz $y \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ esetén $\sin(2y) \cdot 0 = 0$, így

$$x \in \{\pi + 2k\pi \in \mathbb{R}: \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

- $\cos(y) > 0$, azaz
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < y < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$
esetén $\sin(2y) \cdot \cos(y) = \cos(y)$, ahonnan $\sin(2y) = 1$ következik. $\boxed{\textbf{HF}}$
- $\cos(y) < 0$, azaz
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < y < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$
esetén $\sin(2y) \cdot \cos(y) = -\cos(y)$, ahonnan $\sin(2y) = -1$ következik. $\boxed{\textbf{HF}}$

Feladat. Oldjuk meg az aléábbi egyenlőtlenségeket!

$$1.\ 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 > 0; \qquad\qquad 2.\ \frac{2\sin(x)+1}{2\cos(x)} \leq 0.$$

Útm.

1. Az $y := \sin(x)$ jelölés bevezetésével az egyenlőtlenség nem más, mint $2y^2 - y - 1 > 0$. Mivel
$$y_{\pm} = \frac{1 \pm 3}{3} \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\},$$
ezért a szóba jövő tartomány
$$y \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$
Ha tehát
   - $\sin(x) < -\frac{1}{2}$, akkor
$$-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z});$$
   - $\sin(x) > 1$, akkor nincs megoldás. ■

2. Világos, hogy $\cos(x) \neq 0$. A tört pontosan akkor zérus, ha $2\sin(x)+1 = 0 \iff \sin(x) = -1/2$, azaz
$$x \in \left(\frac{4\pi}{3} + 3k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$
A tört negatív, ha számlálója és nevezője ellenkező előjelű. Így
   - $2\sin(x) + 1 > 0$, $2\cos(x) < 0$ esetén
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z});$$

- $2\sin(x)+1<0$, $2\cos(x)>0$ esetén

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Adott $2\leq n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$: $a_n>0$, ill.

$$f(x):=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \qquad (x\in\mathbb{R})$$

esetén adjunk meg olyan $0<\omega, k, K\in\mathbb{R}$ számokat, hogy

$$k\cdot x^n\leq f(x)\leq K\cdot x^n \qquad (x\in[\omega,+\infty))$$

teljesüljön!
Útm.

1. eset. $\exists\,\omega, K>0\;\forall\,x\in\mathbb{R}\;(x\geq\omega\Longrightarrow f(x)\leq K\cdot x^n)$: feltesszük, hogy $x\geq 1$ és

1. lépés. Legyen g az a polinom, amelyet úgy kapunk f-ből, hogy a negatív együtthatójú tagjait (ha vannak) elhagyjuk, azaz ezeket az együtthatókat 0-val helyettesítjük. Ilyenkor ($x\geq 1>0$ miatt) $f(x)\leq g(x)$.

2. lépés. Legyen h az a polinom, amelyet úgy kapunk g-ből, hogy g minden, n-nél alacsonyabb fokú tagjának kitevőjét n-re növeljük. Ilyenkor ($x\geq 1>0$ miatt) $g(x)\leq h(x)$. Világos, hogy ekkor van olyan $K, \omega>0$ ($\omega:=1$), hogy minden $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$(x\geq\omega \quad\Longrightarrow\quad f(x)\leq h(x)\leq K\cdot x^n).$$

2. eset. $\exists\,\omega, k>0\;\forall\,x\in\mathbb{R}\;(x\geq\omega\Longrightarrow k\cdot x^n\leq f(x))$:

1. lépés. Legyen g az a polinom, amelyet úgy kapunk f-ből, hogy a főegyütthatójú tagtól különböző pozitív együtthatójú tagjait (ha vannak) elhagyjuk, azaz ezeket az együtthatókat 0-val helyettesítjük, és a_{n-1} helyébe (-1)-et írunk, ha az 0 lett vagy eleve az is volt. Ilyenkor ($x\geq 1>0$ miatt) $f(x)\geq g(x)$.

2. lépés. Legyen h az a polinom, amelyet úgy kapunk g-ből, hogy elhagyjuk g főegyütthatós tagját, és az így kapott polinomot beszorozzuk (-1)-gyel. A h polinom minden együtthatója tehát pozitív szám.

3. lépés. A fenti módszerrel meghatározunk olyan $\omega_h, K_h>0$ számokat, hogy

$$h(x)\leq K_h\cdot x^{n-1} \qquad (x\in[\omega_h,+\infty))$$

teljesüljön.

4. lépés. Így, ha $p, q > 0$:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(pl. $p = q = 2$), akkor f-re a következő becslés igaz:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n - h(x) \geq a_n x^n - K_h \cdot x^{n-1} = \frac{a_n}{p} \cdot x^n + \frac{a_n}{q} \cdot x^n - K_h \cdot x^{n-1} = \\ &= \frac{a_n}{p} \cdot x^n + x^{n-1} \left(\frac{a_n}{q} \cdot x - K_h \right) \geq \frac{a_n}{p} \cdot x^n =: k \cdot x^n \end{aligned}$$

$$(x \in [\max\{\omega_h, qK_h/a_n\}, +\infty) =: [\omega, +\infty)) . \quad \blacksquare$$

Feladat. Adjuk meg az

$$f(x) := x^4 + 30x^3 - 10x^2 + 43x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

polinom esetében a $0 < \omega, K \in \mathbb{R}$ számokat!
Útm. Ha $x \in [1, +\infty) =: [\omega, +\infty)$, akkor

$$f(x) \leq x^4 + 30x^3 + 43x =: g(x) \leq x^4 + 30x^4 + 43x^4 =: h(x) \leq 74 \cdot x^4 =: K \cdot x^4. \quad \blacksquare$$

Feladat. Adjuk meg az

$$f(x) := x^5 - 71x^4 - 100x^3 + 31x^2 - 25x + 12 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

polinom esetében a $0 < \omega, k \in \mathbb{R}$ számokat!
Útm. Tetszőleges $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) \geq x^5 - 71x^4 - 100x^3 - 25x = x^5 - \left(71x^4 + 100x^3 + 25x\right),$$

ill.

$$71x^4 + 100x^3 + 25x \leq 71x^4 + 100x^4 + 25x^4 = 196x^4.$$

Így tehát

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 71x^4 - 100x^3 + 31x^2 - 25x + 12 \geq \\ &\geq x^5 - 71x^4 - 100x^3 - 25x = x^5 - \left(71x^4 + 100x^3 + 25x\right) \geq \\ &\geq x^5 - 196x^4 = \frac{x^5}{2} + \frac{x^5}{2} - 196x^4 = \\ &= \frac{x^5}{2} + x^4\left(\frac{x}{2} - 196\right) \quad (1 \leq x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ha most

$$x \in \mathbb{R}: \quad \frac{x}{2} - 196 \geq 0, \qquad \text{azaz} \qquad x \geq 392 =: \omega,$$

akkor

$$f(x) \geq \frac{x^5}{2} = \frac{1}{2}x^5 =: kx^5. \quad \blacksquare$$

Feladat. Adjunk meg olyan $0 < \omega, k, K \in \mathbb{R}$ számokat, hogy

$$k \cdot x^n \leq f(x) \leq K \cdot x^n \qquad (x \in [\omega, +\infty)),$$

teljesüljön!

1. $f(x) := 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 \ (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \ (x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \ (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Ha $x \in [1, +\infty)$, akkor
   (a) $f(x) \leq 4x^5$, azaz $\omega := 1$, $K := 4$;
   (b) $f(x) = 4x^5 - (3x^4 + 2x^2 + 5) \geq 4x^5 - (3x^4 + 2x^4 + 5x^4) = 4x^5 - 10x^4 = 2x^5 + 2x^5 - 10x^4 = 2x^5 + x^4(2x - 10) \geq 2x^5 \ (x \in [5, +\infty))$, azaz $\omega := 5$, $k := 2$.
2. Ha $x \in [1, +\infty)$, akkor
   (a) $f(x) \leq 2x^3 + 6x + 7 \leq 2x^3 + 6x^3 + 7x^3 = 15x^3$, azaz $\omega := 1$, $K := 15$;
   (b) $f(x) \geq 2x^3 - 3x^2 = x^3 + x^3 - 3x^2 = x^3 + x^2(x - 2) \geq x^3 \ (x \in [2, +\infty))$, azaz $\omega := 2$, $k := 1$.
3. Ha $x \in [1, +\infty)$, akkor

(a) $f(x) \leq 6x^5 + 7x^5 + 10x^5 + x^5 + 2x^5 + 3x^5 = 29x^5$, azaz $\omega := 1$, $K := 29$;

(b) $f(x) \geq 6x^5$, azaz $\omega := 1$, $k := 6$. ■

Feladat. Adott $2 \leq m, n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$: $a_m, b_n > 0$, ill.

$$f(x) := \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m, \quad g(x) := \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

esetén adjunk meg olyan $0 < \omega, k, K \in \mathbb{R}$ számokat, hogy

$$k \cdot x^{m-n} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq K \cdot x^{m-n} \qquad (x \in [\omega, +\infty))$$

teljesüljön!
Útm. Meghatározunk olyan $0 < \omega_f, \omega_g, k_f, K_f, k_g, K_g \in \mathbb{R}$ számokat, hogy

$$k_f \cdot x^m \leq f(x) \leq K_f \cdot x^m \qquad (x \in [\omega_f, +\infty))$$

és

$$k_g \cdot x^n \leq g(x) \leq K_g \cdot x^n \qquad (x \in [\omega_g, +\infty)),$$

így, ha

$$\omega := \max\{\omega_f, \omega_g\},$$

akkor tetszőleges $x \in [\omega, +\infty)$ esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{K_f \cdot x^m}{k_g \cdot x^n} = \frac{K_f}{k_g} \cdot x^{m-n},$$

ill.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{k_f \cdot x^m}{K_g \cdot x^n} = \frac{k_f}{K_g} \cdot x^{m-n}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Az alábbi polinomok esetében határozzuk meg a fenti feltételeknek megfelelő $0 < \omega, k, K \in \mathbb{R}$ számokat!

1. $f(x) := 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6$, $g(x) := 5x^2 - 3x - 10 \quad (x \in \mathbb{R})$;

2. $f(x) := 4x^3 - 10x^2 + 20x - 15$, $g(x) := 7x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Világos, hogy

$$3x^4 \leq f(x) \leq 3x^4 + 2x^4 + 5x^4 + 7x^4 + 6x^4 = 23x^4 \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R})$$

és

$$g(x) \leq 5x^2 \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R}),$$

ill. tetszőleges $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} g(x) &= 5x^2 - (3x+10) \geq 5x^2 - (3x+10x) = 5x^2 - 13x = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^2 - 13x = \\ &= \frac{5}{2}x^2 + x\left(\frac{5}{2}x - 13\right) \geq \frac{5}{2}x^2 \quad (x \in [26/5, +\infty)), \end{aligned}$$

így, ha $x \in [26/5, +\infty)$, akkor

$$\frac{3}{5} \cdot x^2 \leq \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{5x^2 - 3x - 10} \leq \frac{23}{5/2} \cdot x^2.$$

2. Nem nehéz belátni, hogy

$$f(x) \leq 4x^3 + 20x \leq 4x^3 + 20x^3 = 24x^3 \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R}),$$

ill. $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 10x^2 + 20x - 15 \geq x^3 - 10x^2 - 15 = x^3 - (10x^2 + 15) \geq \\ &\geq x^3 - (10x^2 + 15x^2) = x^3 - 25x^2 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 25x^2 = \\ &= \frac{1}{2}x^3 + x^2\left(\frac{x}{2} - 25\right) \geq \frac{1}{2}x^3 \quad (x \in [50, +\infty)), \end{aligned}$$

és

$$g(x) \leq 7x^4 + 6x + 8 \leq 7x^4 + 6x^4 + 8x^4 = 21x^4 \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R})$$

és tetszőleges $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} g(x) &= 7x^4 - 5x^3 - 10x^2 \geq 7x^4 - (5x^3 + 10x^2) \geq 7x^4 - (5x^3 + 10x^3) = \\ &= 7x^4 - 15x^3 = \frac{7}{2}x^4 + \frac{7}{2}x^4 - 15x^3 = \\ &= \frac{7}{2}x^4 + x^3\left(\frac{7}{2}x - 15\right) \geq \frac{7}{2}x^4 \quad (x \in [30/7, +\infty)), \end{aligned}$$

így, ha $x \in [\max\{50, 30/7\}, +\infty) = [50, +\infty)$, akkor

$$\frac{1/2}{21} \cdot x^{-1} \leq \frac{4x^3 - 10x^2 + 20x - 15}{7x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 8} \leq \frac{24}{7/2} \cdot x^{-1}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $x, y, z \in \mathbb{R}$. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!

1. $x = 0$ és $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$;
2. $xy = xz \Longrightarrow y = z$;
3. $x > y^2 \Longrightarrow x > 0$;
4. $x^2 + y^2 = 12x + 16y - 75 \Longrightarrow 25 \leq x^2 + y^2 \leq 225$.

Fogalmazzuk meg a fenti állítások megfordítását! Igaz állításokat kapunk-e így? **Útm.**

1. Az állítés igaz, hiszen $0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0$. Az állítás megfordítása:

   $$x^2 + y^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0 \quad \wedge \quad y = 0$$

   is igaz, ui. ha x, ill. y közül valamelyik $\neq 0$, akkor $x^2 + y^2 > 0$.

2. Az állítás nem igaz, hiszen pl. $x = 0$ esetén, ha $y \neq z$ (pl. $y = 2$, $z = 5$), akkor is $xy = 0 = xz$. Az állítás megfordítása:

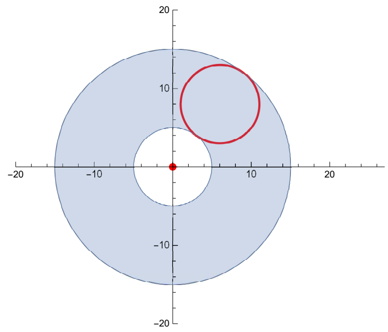
   $$y = z \qquad \Longrightarrow \qquad xy = xz$$

   nyilvánvalóan igaz.

3. Az állítás igaz, ui. $x > y^2 \geq 0$, a megfordítása viszont hamis, hiszen pl. $x = 2$, ill. $y = 3$ esetén $x = 2 < 9 = y^2$.

4. Az állítás igaz, ui.

   $$x^2+y^2 = 12x+16y-75 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-6)^2-36+(y-8)^2-64 = -75 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-6)^2+(y-8)^2 = 25 = 5^2.$$



9. ábra.

A megfordítása nyilván hamis. ■

Megjegyzés. Az olyan állítás tagadása, mely univerzális $(\forall)$ és egzisztenciális $(\exists)$ kvantorokat, és végül egy lezáró állítást tartalmaz, úgy történik, hogy minden $\forall$, ill. $\exists$ helyébe $\exists$-t, ill. $\forall$-t írunk, és a lezáró állítást a negáltjával helyettesítjük.

Példa.

- A „$\forall x A(x)$" állítás tagadása: $\exists x \neg A(x)$.
- A „$\exists x A(x)$" állítás tagadása: $\forall x \neg A(x)$.

Megjegyzések. Ha A és B állítások, akkor

1. $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (**a kontrapozíció törvénye**)
2. $\neg(A \Rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$.

Feladat. Formalizáljuk a következő állítást!
Van olyan $N \in \mathbb{N}$ *szám, hogy, hogy minden ennél nagyobb természetes számra fennáll az*

$$\frac{n^2}{2n+1} > 100$$

egyenlőtlenség. Mutassuk meg, hogy a fenti állítás igaz! Pozitív állítás formájában fogalmazzuk meg a fenti állítás tagadását!
Útm.

1. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon \quad \left(n > N \quad \Longrightarrow \quad \frac{n^2}{2n+1} > 100\right).$
2. $\frac{n^2}{2n+1} > 100 \Longleftrightarrow n^2 > 200n + 100 \Longleftrightarrow n^2 - 200n - 100 > 0 \Longleftrightarrow n(n-200) > 100.$
   Pl. $N := 201$ jó.

3. Az állítás tagadása: $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$: $\left(n > N \quad \wedge \quad \frac{n^2}{2n+1} \leq 100\right)$. ■

Feladat. Formalizáljuk a következő állítást!
Minden elég nagy n természetes számra igaz az

$$\frac{2n^3+3}{n^3+n^2+1} > 1$$

egyenlőtlenség. **Mutassuk meg**, hogy az állítás igaz, majd pozitív állítás formájában fogalmazzuk meg a fenti állítás tagadását!
Útm.

1. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $\left(n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \frac{2n^3+3}{n^3+n^2+1} > 1\right)$.

2. $\frac{2n^3+3}{n^3+n^2+1} > 1 \Longleftrightarrow 2n^3+3 > n^3+n^2+1 \Longleftrightarrow n^3+2 > n^2$, tehát pl. $N := 0$ jó.

3. $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$: $\left(n \geq N \quad \wedge \quad \frac{2n^3+3}{n^3+n^2+1} \leq 1\right)$. ■

Feladat. Formalizáljuk (írjuk fel kvantorok segítségével) a következő állítást! *Elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\frac{2n^3+3n^2+n+4}{n^4-7n^3+3n^2-7n-4} < \frac{1}{100}.$$

Igaz-e az állítás? Fogalmazzuk meg tagadását!
Útm. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{S}(n) := 2n^3+3n^2+n+4 \leq 2n^3+3n^3+n^3+4n^3 = 10n^3$$

és bármely $36 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(n) \quad &:= \quad n^4-7n^3+3n^2-7n-4 \geq n^4-7n^3-7n-4 = n^4-(7n^3+7n+4) \geq \\ &\geq \quad n^4-18n^3 = \frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^4-18n^3 = \frac{1}{2}n^4+n^3\left(\frac{1}{2}n-18\right) \geq \frac{1}{2}n^4,\end{aligned}$$

ezért, ha $36 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\frac{\mathcal{S}(n)}{\mathcal{N}(n)} \leq \frac{10n^3}{n^4/2} = \frac{20}{n},$$

ill.

$$\frac{20}{n} < \frac{1}{100} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 2000.$$

Az $N := 2001$ index tehát megfelelő, az állítás tehát igaz. Az állítás tagadása:

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geq N \quad \wedge \quad \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 4}{n^4 - 7n^3 + 3n^2 - 7n - 4} \geq \frac{1}{100}\right). \quad \blacksquare$$

0.4. 4. oktatási hét

Emlékeztető.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

Példák.

1. Ha A és B állítás, akkor

$$\neg(\neg A) \equiv A \equiv A \wedge A \equiv A \vee A, \qquad \text{és} \qquad A \vee (\neg A) \equiv \neg((\neg A) \wedge A),$$

ui.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \vee (\neg A)$	$(\neg A) \wedge A$	$\neg((\neg A) \wedge A)$	$A \wedge A$	$A \vee A$
i	h	i	i	h	i	i	i
h	i	h	i	h	i	h	h

2. Ha A és B állítás, akkor

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \qquad \text{és} \qquad A \vee B \equiv B \vee A, \qquad \text{ill.} \qquad (A \vee B) \wedge B \equiv (A \wedge B) \vee B,$$

ui.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$B \vee A$	$(A \vee B) \wedge B$	$(A \wedge B) \vee B$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	i	h	h
h	i	h	h	i	i	i	i
h	h	h	h	h	h	h	h

3. $(A \Longleftrightarrow B) \equiv ((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A))$, ui.

A	B	$A \Longleftrightarrow B$	$A \Longrightarrow B$	$B \Longleftarrow A$	$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	h	i	h	h
h	h	i	i	i	i

Feladat. Legyen A, B állítás. Lássuk be az akábbiakat!

1. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ és $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$ (**De-Morgan-azonosságok**);
2. $(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(\neg B) \vee \neg A \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Útm.

1. A
$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$
azonosság bal oldala pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz, azaz A is és B is igaz. A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $\neg A$ és $\neg B$ is hamis, azaz A és B is igaz. Hasonlóan igazolható a
$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$$
azonosság is.

2.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Longrightarrow B$	$\neg A \vee B$	$\neg(\neg B) \vee A$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	h	h	i	i
h	i	h	i	i	i	i	i
h	h	i	i	i	h	i	i

Feladat. Legyen $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Igazak-e az alábbi állítások?

1. $a + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 = -2ab$;
2. $a + b = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 1 - 2ab$;
3. $x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x = 0$.

Útm.

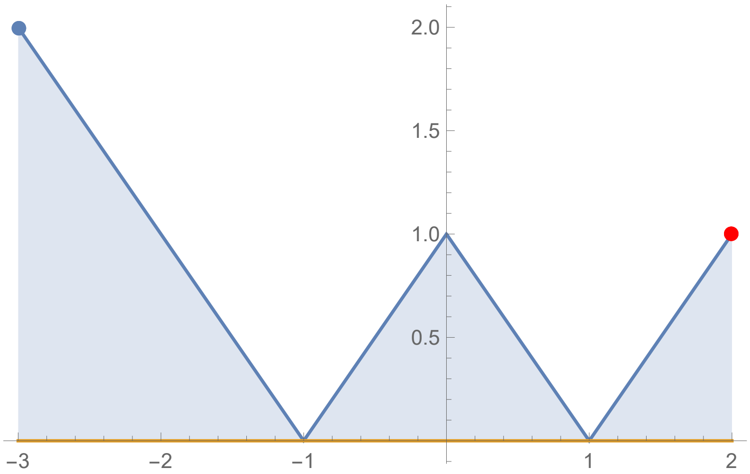
1. $a + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a+b)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 = -2ab$;
2. $a + b = 1 \quad \Longrightarrow \quad (a+b)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a^2 + b^2 = 1 - 2ab$, de $(a+b)^2 = 1 \quad \not\Rightarrow \quad a + b = 1$.
3. $x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$, de $x^2 + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \{-1; 0\}$. ■

Feladat. Legyen

$$f(x) := |1 - |x|| \qquad (x \in [-3, 2)).$$

Igazak-e az alábbi állítások?

1. $\forall x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) \geq 0$;
2. $\forall x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) \leq 2$;
3. $\exists | a \in \mathcal{D}_f \; \forall x \in \mathcal{D}_f \colon f(a) \leq f(x)$;
4. $\exists a \in \mathcal{D}_f \; \forall x \in \mathcal{D}_f \colon f(a) \leq f(x)$.



10. ábra. Az f grafikonjának egy részlete.

1. Igaz, ui. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $|1 - |x|| \geq 0$.
2. Igaz, ui. bármely $x \in [-3, 2]$ esetén $0 \leq |x| \leq 3$, ahonnan $-2 \leq 1 - |x| \leq 1$, azaz $0 \leq |1 - |x|| \leq 2$ következik.
3. Hamis, ui. az $a \in \{-1; 1\}$ számokra $f(a) = 0 \leq f(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$.
4. Igaz (vö. előző pont). ■

Feladat. Állapítsuk, meg, hogy az alábbi állítások közé milyen jel tehető a $*$ szimbólum helyére a

$$\{\Longrightarrow, \; \Longleftarrow \Longleftrightarrow\}$$

halmazból úgy, hogy igaz állítást kapjunk!

1. $x^2 = 25 \quad * \quad x = 5$;

2. $a^2 + b^2 = 0 \quad * \quad ab = 0;$

3. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \quad * \quad x = 1;$

4. $|x| = x \quad * \quad x \geq 0;$

5. $\sin(2x) = \mathrm{tg}(x) \quad * \quad x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Útm.

1. $\Longleftarrow$, ui. $5^2 = 25$, de visszafelé nem igaz, ui. $x^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad x \in \{-5; 5\}$;

2. $\Longrightarrow$, ui. $a^2 + b^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0 = b \quad \Longrightarrow \quad ab = 0$, de visszafelé nem igaz, ui. ha pl. $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor ugyan $ab = 0$, de $a^2 + b^2 > 0$.

3. $\Longleftarrow$, ui. $(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = 0$, de visszafelé nem igaz, ui. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow$ $x^2(x-1) - x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x^2-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \{-1; 1\}$.

4. $\Longleftrightarrow$.

5. Vegyük figyelembe, hogy ha $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, akkor

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

ill. hogy

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \mathrm{tg}(x) \quad &\Longrightarrow \quad 2\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \sin(x)\left\{2\cos(x) - \frac{1)}{\cos(x)}\right\} = \sin(x) \cdot \frac{2\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \sin(x) = 0 \quad \wedge \quad 2\cos^2(x) - 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tétel (a teljes indukció elve.) Legyen $m \in \mathbb{Z}$ rögzített egész szám, és tegyük fel, hogy $\mathcal{A}(n)$ az $m \leq n \in \mathbb{Z}$ (m-nél nem kisebb egész) számokra vonatkozó olyan állítás, amelyre:

(a) $\mathcal{A}(m)$ igaz, és

(b) ha valamely $m \leq n \in \mathbb{Z}$ esetén $\mathcal{A}(n)$ igaz, akkor $\mathcal{A}(n+1)$ is igaz.

Ekkor $\mathcal{A}(n)$ igaz minden $m \leq n \in \mathbb{Z}$ számra.

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek!

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$;

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$;

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boxed{1^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$;

4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \boxed{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}}$.

Útm.

1.
   - $n = 1$ esetén
   $$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$
   - Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
   Ekkor
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

2.
   - $n = 1$ esetén
   $$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$
   - Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

3. • $n = 1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

• Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

4. • $n = 1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

• Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Megjegyezzük, hogy bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

1. $2^n > n^2$ $(5\le n\in\mathbb{N})$;
2. $2\sqrt{n+1}-2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$ $(2\le n\in\mathbb{N})$;
3. $\frac{1}{2\sqrt{n}}\le\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $(n\in\mathbb{N})$;
4. $(2n)!<2^{2n}\cdot(n!)^2$ $(n\in\mathbb{N})$;
5. $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$ $(n\in\mathbb{N})$.

Útm.

1.
   - $n=5$ esetén $2^5=32>25=5^2$.
   - Tegyük fel, hogy valamely $5\le n\in\mathbb{N}$ esetén $2^n>n^2$. Ekkor

$$2^{n+1}=2\cdot 2^n>2\cdot n^2.$$

Ha be tudjuk látni, hogy
$$2\cdot n^2 > (n+1)^2 \qquad (5 \le n \in \mathbb{N})$$
teljesül, akkor készen vagyunk. Ez utóbbi egyenlőtlenség az alábbi ekvivalencialánc következménye:
$$2\cdot n^2 > (n+1)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad n\cdot n > 2n+1 \quad\Longleftrightarrow\quad n(n-2) > 1\cdot 1 = 1. \quad \blacksquare$$

2. • Ha $n = 2$, akkor
$$2\sqrt{3}-2 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Longleftrightarrow\quad 2\sqrt{6} < 3\sqrt{2}+1 \quad\Longleftrightarrow\quad 24 < 18+6\sqrt{2}+1,$$
ami igaz, ui. $25 < 72$, továbbá
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-1 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}+1 < 4-\sqrt{2} \quad\Longleftrightarrow\quad 2\sqrt{2} < 3,$$
ami igaz, ui. $8 < 9$.

• Tegyük fel, hogy valamely $2 \le n \in \mathbb{N}$ esetén
$$2\sqrt{n+1}-2 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1.$$
Ekkor
$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$
Ha belátjuk, hogy
$$2\sqrt{n+2}-2 < 2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
és
$$2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}-1,$$
akkor igazoltuk az állítást. A fenti két egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha
$$4n+8 < 4n+4+\frac{1}{n+1}+4, \qquad \text{azaz} \qquad 0 < \frac{1}{n+1}$$
és
$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 2(n+1), \qquad \text{azaz} \qquad n^2+n < n^2+2n+1.$$

3. **1. lépés.**

- Ha $n = 1$, akkor
$$\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1}.$$

  - Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$
Ekkor
$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$
Ha belátjuk, hogy
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$
akkor igazoltuk az állítást. A fenti egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha
$$2\sqrt{n}(n+1) \leq \sqrt{n+1} \cdot (2n+1), \qquad \text{azaz} \qquad 4n^3 + 8n^2 + 4n \leq 4n^3 + 8n^2 + 5n + 1.$$

2. lépés.

- Ha $n = 1$, akkor
$$\frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{3} \leq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 \leq 4.$$

  - Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$
Ekkor
$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$
Ha belátjuk, hogy
$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}},$$
akkor igazoltuk az állítást. A fenti egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha
$$(2n+1)\sqrt{2n+3} \leq 2(n+1)\sqrt{2n+1},$$
azaz
$$8n^3 + 20n^2 + 14n + 3 \leq 8n^3 + 20n^2 + 16n + 4. \quad \blacksquare$$

4. - Ha $n = 1$, akkor
$$(2 \cdot 1)! = 2 < 4 = 2^{2 \cdot 1} \cdot (1!)^2.$$

   - Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$ teljesül. Ekkor
$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} \cdot ((n+1)!)^2 &= 2^{2n+2} \cdot ((n+1)n!)^2 = 4 \cdot 2^{2n} \cdot (n!)^2 \cdot (n+1)^2 = \\ &= 4 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{2n} \cdot (n!)^2 > 4 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n)!. \end{aligned}$$

   Ha belátjuk, hogy
$$4 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n)! > ((2(n+1))!,$$
   akkor készen vagyunk. Mivel
$$((2(n+1))! = (2n+2)! = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2),$$
   ezért
$$4 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n)! > ((2(n+1))! \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \cdot (n+1)^2 > (2n+1) \cdot (2n+2),$$
   azaz
$$4 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n)! > ((2(n+1))! \quad \Longleftrightarrow \quad 4n^2 + 8n + 4 > 4n^2 + 6n + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2n > 2,$$
   ami igaz.

5. - Ha $n = 1$, akkor
$$\sum_{k=1}^{2 \cdot 1+1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} > 1.$$

   - Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} > 1,$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{2n+3} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} = \sum_{k=2}^{2n+2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} >$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4}.$$

Ha belátjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 1, \qquad \text{azaz} \qquad -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 0$$

akkor készen vagyunk. Világos, hogy

$$-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} = \frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3(n+1)} + \frac{1}{3n+4} =$$

$$= \frac{3(n+1)(3n+4) - 2(3n+2)(3n+4) + 3(n+1)(3n+2)}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} =$$

$$= \frac{3(n+1)(6n+6) - 2(3n+2)(3n+4)}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} = \frac{18(n+1)^2 - 2(3n+2)(3n+4)}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} =$$

$$= \frac{18n^2 + 36n + 18 - 18n^2 - 36n - 16}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} = \frac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} > 0. \quad \blacksquare$$

0.5. 5. oktatási hét

Definíció. A valós számokból álló rendezett számpárok $\mathbb{R}^2$-tel jelölt halmazát, ha abban a műveleteket az alábbi módon értelmezzük, **komplex számok halmazá**nak nevezzük, és a $\mathbb{C}$ szimbólummal jelöljük: tetszőleges $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén legyen

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \qquad \text{és} \qquad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Megjegyzés. Az (a, b) és a (c, d) komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha

$$a = c \qquad \text{és} \qquad b = d.$$

A jelölések egyszerűsítése érdekében bevezetjük az

$$\imath := (0, 1)$$

képzetes vagy **imaginárius egység**et. Így bármely $(a, b) \in \mathbb{C}$ szám a következő alakba írható:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) \equiv a + b\imath.$$

Ez az azonosítás anniyra megszokott, hogy egyszerű tartalmazást és egyenlőséget írunk:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \qquad x = (x, 0), \qquad \text{továbbá} \qquad (a, b) \equiv a + b\imath.$$

Minden $z = (a, b)$ komplex szám egyértelműen felírható tehát a

$$z = a + b\imath$$

ún. **algebrai alak**ban. A továbbiakban algebrai alaknak tekintjük az

$$a - b\imath := a + (-b)\imath$$

felírást is. Az $\imath$ imaginárius egységre:

$$\imath^2 = \imath \cdot \imath = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Az alkalmazások során gyakran előfordul, hogy az imaginárius egységet $\jmath$-vel jelölik (megkülönböztetendő az áramerősség jelölésére gyakran használatos $\imath$ szimbólumtól).

Tétel. Ha $u, v \in \mathbb{C}$: $v \neq 0$, akkor pontosan egy olyan z komplex szám van, amelyre

$$u = zv$$

teljesül. Ezt az u és a v **komplex szám hányadosá**nak nevezzük, és az

$$\frac{u}{v} := z$$

módon jelöljük.

Tétel. A

$$z = a + b\imath, \qquad \text{ill.} \qquad w = c + d\imath$$

algebrai alakban megadott komplex számok esetében

- z és w összegére
$$z + w = (a + b\imath) + (c + d\imath) = (a + c) + (b + d)\imath;$$
teljesül;
- z és w szorzatára
$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)\imath$$
teljesül;
- ha $w \neq 0$, azaz $c^2 + d^2 > 0$, akkor
$$\frac{a + b\imath}{c + d\imath} = \frac{a + b\imath}{c + d\imath} \cdot \frac{c - d\imath}{c - d\imath} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\imath}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot \imath.$$

Feladat. Végezzük el az algebrai alakban megadott komplex számokkal az

$$\imath^n, \quad (-\imath)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

műveletet!
Útm.

$$\imath^n = \begin{cases} 1 & (n = 4k,\ k \in \mathbb{N}_0), \\ \imath & (n = 4k + 1,\ k \in \mathbb{N}_0), \\ -1 & (n = 4k + 2,\ k \in \mathbb{N}_0), \\ -\imath & (n = 4k + 3,\ k \in \mathbb{N}_0), \end{cases} \qquad (-\imath)^n = \begin{cases} 1 & (n = 4k,\ k \in \mathbb{N}_0), \\ -\imath & (n = 4k + 1,\ k \in \mathbb{N}_0), \\ -1 & (n = 4k + 2,\ k \in \mathbb{N}_0), \\ \imath & (n = 4k + 3,\ k \in \mathbb{N}_0). \end{cases} \quad \blacksquare$$

Példák.

1. $(1-2\imath)(5+\imath) = 5+\imath-10\imath-2\imath^2 = 7-9\imath$.
2. $\dfrac{1}{2-3\imath} = \dfrac{1}{2-3\imath}\cdot\dfrac{2+3\imath}{2+3\imath} = \dfrac{2+3\imath}{4-9\imath^2} = \dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}\imath$.
3. $\dfrac{1+5\imath}{3+2\imath} = \dfrac{1+5\imath}{3+2\imath}\cdot\dfrac{3-2\imath}{3-2\imath} = \dfrac{3-2\imath-10\imath^2+15\imath}{9+4} = \dfrac{13+13\imath}{13} = 1+\imath$.
4. $(2-\imath)^2+(2+\imath)^3 = (3-4\imath)+(2+11\imath) = 5+7\imath$, ui.
   - $(2-\imath)^2 = (2-\imath)(2-\imath) = 4-2\imath-2\imath+\imath^2 = 3-4\imath$.
     Megjegyzés. Bármely $a, b\in\mathbb{C}$ számra $\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$.
   - $(2+\imath)^3 = (2+\imath)(2+\imath)^2 = (2+\imath)(4+4\imath+\imath^2) = (2+\imath)(3+4\imath) = 6+8\imath+3\imath+4\imath^2 = 2+11\imath$.
5. Mivel
$$\frac{1+\imath}{3-\imath}+\frac{3-\imath}{1+\imath} = \frac{(1+\imath)^2+(3-\imath)^2}{(3-\imath)(1+\imath)} = \frac{1+2\imath+\imath^2+9-6\imath+\imath^2}{3+3\imath-\imath-\imath^2} = \frac{4-2\imath}{2+\imath}$$
és
$$\frac{4-2\imath}{2+\imath} = \frac{4-2\imath}{2+\imath}\cdot\frac{2-\imath}{2-\imath} = \frac{8-4\imath-4\imath+2\imath^2}{4+1} = \frac{6-8\imath}{5},$$
ezért
$$\frac{1+\imath}{3-\imath}+\frac{3-\imath}{1+\imath} = \frac{6}{5}-\frac{8}{5}\imath.$$
6. $\dfrac{(1+\imath)^2}{1-\imath}+\dfrac{(1-\imath)^3}{(1+\imath)^2} = \dfrac{(1+\imath)^4+(1-\imath)^4}{(1-\imath)\,(1+\imath)^2} = \dfrac{-8}{2+2\imath} = \dfrac{-4}{1+\imath}\cdot\dfrac{1-\imath}{1-\imath} = \dfrac{-4+4\imath}{1+1} = -2+2\imath$, ui.
   - $(1+\imath)^4 = \left((1+\imath)^2\right)^2 = (1+2\imath+\imath^2)^2 = (2\imath)^2 = -4$;
   - $(1-\imath)^4 = \left((1-\imath)^2\right)^2 = (1-2\imath+\imath^2)^2 = (-2\imath)^2 = -4$.

Feladat. Mutassuk meg, hogy igaz a
$$z\in\{1+3\imath,\ 1-3\imath\} \qquad\Longrightarrow\qquad z^3-z^2+8z+10=0$$
implikáció!
Útm.

1. lépés. Mivel
$$(1+3\imath)^2 = 1+6\imath+9\imath^2 = -8+6\imath \qquad \text{és} \qquad (1+3\imath)^3 = (-8+6\imath)(1+3\imath) = -8-24\imath+6\imath+18\imath^2 = -26-18\imath,$$

ezért a $z := 1 + 3\imath$ számra

$$z^3 - z^2 + 8z + 10 = -26 - 18\imath + 8 - 6\imath + 8 + 24\imath + 10 = \ldots = 0 + 0\imath = 0.$$

2. lépés. Mivel

$$(1-3\imath)^2 = 1-6\imath+9\imath^2 = -8-6\imath \qquad \text{és} \qquad (1-3\imath)^3 = (-8-6\imath)(1-3\imath) = -8+24\imath-6\imath+18\imath^2 = -26+18\imath,$$

ezért a $z := 1 - 3\imath$ számra

$$z^3 - z^2 + 8z + 10 = -26 + 18\imath + 8 + 6\imath + 8 - 24\imath + 10 = \ldots = 0 + 0\imath = 0.$$

Megjegyezzük, hogy viszonylag könnyen észrevehető, hogy a $z : -1$ komplex szám gyöke a

$$p(z) := z^3 - z^2 + 8z + 10 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinomnak: $(-1)^3 - (-1)^2 + 8(-1) + 10 = 0$. Így

	1	−1	8	10
−1	$\boxed{1}$	$\boxed{-2}$	$\boxed{10}$	0

$$p(z) = (z+1)q(z) := (z+1)(z^2 - 2z + 10) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

A q polinom gyökei nyilván gyökei p-nek is és

$$q(z) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-p} = 1 \pm 3\imath. \quad \blacksquare$$

Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

1. $x^3 - 1 = 0$;
2. $x^4 - 1 = 0$;
3. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 = 0$;
4. $x^3 - 9x^2 + 18x + 28 = 0$.

Útm.

1. Mivel
$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1) \quad (x \in \mathbb{C})$$

és

$$x^2 + x + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

ezért az $x^3 - 1 = 0$ egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \left\{1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right\}.$$

2. Mivel

$$x^4 - 1 = x^4 - 1^4 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1) \quad (x \in \mathbb{C})$$

és

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_\pm = \pm\imath,$$

ezért az $x^4 - 1 = 0$ egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{-1,\ 1,\ \imath,\ -\imath\}.$$

3. Világos, hogy

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_\pm = \sqrt{2} \pm \sqrt{2-5} = \sqrt{2} \pm \sqrt{-3} = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}\imath.$$

4. Vegyük észre, hogy az $x := -1$ komplex szám gyöke a

$$p(x) := x^3 - 9x^2 + 18x + 28 \qquad (x \in \mathbb{C})$$

polinomnak: $(-1)^3 - 9(-1)^2 + 18(-1) + 28 = 0$. Így

	1	−9	18	28
−1	$\boxed{1}$	$\boxed{-10}$	$\boxed{28}$	0

$$p(x) = (x+1)q(z) := (x+1)(x^2 - 10x + 28) \qquad (x \in \mathbb{C}).$$

A q polinom gyökei nyilván gyökei p-nek is és

$$q(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_\pm = 5 \pm \sqrt{25-28} = 5 \pm \sqrt{-3} = 5 \pm \sqrt{3}\imath.$$

Így az $x^3 - 9x^2 + 18x + 28 = 0$ egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_= \left\{-1,\ 5 + \sqrt{3}\imath,\ 5 - \sqrt{3}\imath\right\}. \quad \blacksquare$$

Feladat. A lineáris algebra alapjai).

Feladat. Írjuk fel táblázatos formában az

$$\mathcal{I} := \{1,2,3,4,5,6,7\} \times \{1,2,3,4,5\}$$

Descartes-szorzat elemeit úgy, hogy az adott $(k,l) \in \mathcal{I}$ rendezett pár a k-adik sor és az l-edik oszlop kereszteződésébe kerüljön!
Útm.

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$
$(7,1)$	$(7,2)$	$(7,3)$	$(7,4)$	$(7,5)$

Feladat. Tetszőleges $m,n \in \mathbb{N}$ esetén írjuk fel táblázatos formában az

$$\mathcal{I} := \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$$

Descartes-szorzat elemeit úgy, hogy az adott $(k,l) \in \mathcal{I}$ rendezett pár a k-adik sor és az l-edik oszlop kereszteződésébe kerüljön!
Útm.

$(1,1)$	$\ldots$	$(1,l)$	$\ldots$	$(1,n)$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
$(k,1)$	$\ldots$	(k,l)	$\ldots$	(k,n)
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
$(m,1)$	$\ldots$	(m,l)	$\ldots$	(m,n)

Definíció. Adott $m,n \in \mathbb{N}$, ill. $\emptyset \neq H$ halmaz esetén az

$$\{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$$

halmazon értelmezett H-beli elemeket felvevő függvényeket H-beli $(m \times n)$ típusú vagy $(m \times n)$-es **mátrix**oknak nevezzük. $H = \mathbb{C}$, ill. $H = \mathbb{R}$ esetén valós, ill. komplex (elemű) mátrixról beszélünk.

Az $(m \times n)$-es, H halmazba képező mátrixok halmazára a $H^{m\times n}$ szimbólumot használjuk. Ha

$$A \in H^{m\times n}, \qquad \text{azaz} \qquad A : \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} \longrightarrow H,$$

akkor az A mátrixnak a (k,l) rendezett páron felvett értékét kétindexes módon jelöljük:

$$A((k,l)) =: a_{kl} \qquad (k \in \{1,\ldots,m\},\ l \in \{1,\ldots,n\}),$$

és A-t szögletes zárójelek közé írt táblázattal jelenítjük meg:[1]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kl} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{ml} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ahol tehát tetszőleges $k \in \{1,\ldots,m\}$, ill. $l \in \{1,\ldots,n\}$ esetén $a_{kl} \in H$. A fenti táblázatban lévő a_{kl} elem esetében k neve **sorindex**, l neve pedig az **oszlopindex**. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az indexként használt betűktől függetlenül bármely elem első indexe mindig az elem sorának, második indexe pedig oszlopának sorszámát jelöli.

Az $A \in H^{m\times n}$ mátrix megjelenítésére használjuk még az

$$[a_{kl}]_{k,l=1}^{m,n}, \qquad \text{ill. a rövidített} \qquad [a_{kl}]$$

szimbólumot is.

A mátrix vízszintesen egymás mellett lévő elemeinek együttesét a **mátrix sora**inak, a függőlegesen egymás alatt álló tagok együttesét a **mátrix oszlopa**inak nevezzük.

A fenti definíció előttiek értelmében nyilvánvaló a következő

Megjegyzés. Valamely

$$A = [a_{kl}] \in H^{m\times n}, \qquad \text{ill.} \qquad B = [b_{kl}] \in H^{p\times q}$$

mátrixok esetén tehát $A = B$ pontosan akkor teljesül, ha

1. A és B azonos típusú: $m = p$ és $n = q$,

2. az azonos indexű elemek megegyeznek:

$$a_{kl} = b_{kl} \qquad (k \in \{1,\ldots,m\};\ l \in \{1,\ldots,n\}).$$

Feladat. Mely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az $A = B$ egyenlőség?

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & \pi & -2 \\ 8 & -7 & 2,5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 3 & a & -2 \\ b^3 & -7 & 2,5 & \log_2(c) \end{bmatrix}.$$

[1]Mátrixok jelölésére szokásos a $()$ gömbölyű zárójel használata is.

Feladat. Mivel $A \in \mathbb{R}^{2\times 4} \ni B$, ezért $A = B$ pontosan akkor teljesül, ha $a = \pi$, $b = 2$, $c = 8$. ■

Definíció. Valamely $A \in \mathbb{H}^{m\times n}$ mátrix azonos sor- és oszlopindexű elemeinek összességét a mátrix **főátló**jának nevezzük; a mátrix **mellékátló**ja pedig azokból az elemekből áll, amelyek sor- és oszlopindexének összege $n + 1$.

A fő- és a mellékátlót szemlélteti az alábbi séma:

főátló, ha $n < m$ főátló, ha $n > m$

$$\begin{bmatrix} \star & & & \\ & \star & & \\ & & \star & \\ & & & \star \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \star & & & & & \\ & \star & & & & \\ & & \star & & & \\ & & & \star & & \end{bmatrix}$$

mellékátló, ha $n < m$ mellékátló, ha $n > m$

$$\begin{bmatrix} & & & \star \\ & & \star & \\ & \star & & \\ \star & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & & & \star \\ & & & \star & \\ & & \star & & \end{bmatrix}$$

Definíció. Valamely $A \in \mathbb{H}^{m\times n}$ esetén azt mondjuk, hogy

1. A **négyzetes mátrix**, ha sorainak és sozlopainak száma megegyezik: $m = n$,

2. A **sormátrix**, ha $m = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{1\times n}.$$

Megjegyzés. A

$$\varphi : \mathbb{H}^{1\times n} \longrightarrow \mathbb{H}^n, \qquad \varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}\right) := (a_{11}, \dots, a_{1n})$$

leképezés bijekció. Ez az oka a $\mathbb{H}^{1\times n} \equiv \mathbb{H}^n$ azonosításnak, ill. annak, hogy a sormátrixot szokás **sorvektor**nak is nevezni.

3. A **oszlopmátrix**, ha $n = 1$:
$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in H^{m\times 1}.$$

   Megjegyzés. A
$$\varphi : H^{m\times 1} \longrightarrow H^m, \qquad \varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}\right) := (a_{11}, \dots, a_{m1})$$
   leképezés bijekció. Ez az oka a $H^{m\times 1} \equiv H^m$ azonosításnak, ill. annak, hogy az oszlopmátrixot szokás **oszlopvektor**nak is nevezni.

4. A **zérusmátrix**, ha $H = \mathbb{K}$ és A minden eleme zérus,

5. A **diagonális mátrix**, ha $H = \mathbb{K}$ és A olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlón kívül minden eleme zérus,

6. A **skalármátrix**, ha $H = \mathbb{K}$ és A olyan diagonális mátrix, amelynek a főátlójában mindenütt ugyanaz a szám áll,

7. A **egységmátrix**, ha $H = \mathbb{K}$ és A olyan skalármátrix, amelynek a főátlójában mindenütt 1 áll,

8. A **alsó háromszögmátrix**, ha $H = \mathbb{K}$ és A olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlója feletti összes eleme zérus,

9. A **felső háromszögmátrix**, ha $H = \mathbb{K}$ és A olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlója alatti összes eleme zérus,

10. A **háromszögmátrix**, ha $H = \mathbb{K}$ és A alsó vagy felső háromszögmátrix.

Példa. Az
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
mátrix rendre diagonális, skalár-, alsó háromszög, felső háromszögmátrix.

Megjegyzés. Ha $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ olyan diagonális mátrix, amely főátlója $d_1, \ldots, d_n$ elemekből áll, akkor azt az

$$M =: \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$$

módon is szokás jelölni.

A $\mathbb{K}^{n\times n}$-beli egységmátrixot a továbbiakban az E_n szimbólummal fogjuk jelölni. Tehát

$$E_n = [\delta_{ij}]_{i,j=1}^{n,n}, \qquad \text{ahol} \qquad \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

(**Kronecker-szimbólum**).

Feladat. Az

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok esetében határozzuk meg

1. a mátrix típusát,
2. az $(1, 3)$ pozícióban, azaz az első sor és a harmadik oszlop kereszteződésében álló elemet,
3. a főátlóban és a mellékátlóban álló elemeket!

Útm.

1. Világos, hogy $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $\qquad B \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, $\qquad C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.
2. Ha $A = [a_{kl}]_{k,l=1}^{2,3}$, $\qquad B = [a_{kl}]_{k,l=1}^{1,3}$, $\qquad C = [c_{kl}]_{k,l=1}^{3,4}$, akkor

   $$a_{13} = 0, \qquad b_{13} = 1, \qquad c_{13} = 3.$$

3. A főátló, ill. a mellékátló elemei
   (a) az A mátrix esetében: $1, 1$, ill. $0, 1$;
   (b) a B mátrix esetében: 1, ill. 1;
   (c) a C mátrix esetében: $0, 3, 1$, ill. $0, 2, 2$. ■

Definíció. (Mátrix számszorosa.) Adott $A = [a_{kl}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\lambda A := [\lambda a_{kl}] := \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1l} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \dots & \lambda a_{kl} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{ml} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

Definíció. (Mátrixok ellentettje.) Adott $A = [a_{kl}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix esetén

$$-A := (-1)A = [-a_{kl}] \in \mathbb{K}^{m\times n}.$$

Példa.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & -8 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad -A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -7 \\ -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Definíció. (Mátrixok összege, különbsége.) Adott

$$A = [a_{kl}] \in \mathbb{K}^{m\times n} \qquad \text{és} \qquad B = [b_{kl}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

mátrixok esetén

$$A + B := [a_{kl} + b_{kl}] := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1l} + b_{1l} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} + b_{k1} & \dots & a_{kl} + b_{kl} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n},$$

ill.

$$A - B := A + (-B).$$

Feladat. Határozzuk meg az $A + B$, $A - B$ és az $5B - A$ mátrixot!

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Útm.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

és

$$5B - A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 & 8 \\ -7 & -23 & -6 & 11 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Definíció. (Mátrixok szorzata.) Az

$$A = [a_{kl}] \in \mathbb{K}^{m \times n} \qquad \text{és} \qquad B = [b_{kl}] \in \mathbb{K}^{n \times p}$$

mátrixok szorzatának nevezzük és $A \cdot B$-vel vagy egyszerűen csak AB-vel jelöljük azt a $C = [c_{kl}] \in \mathbb{K}^{m \times p}$ mátrixot, amelynek elemeire

$$c_{kl} = a_{k1}b_{1l} + \ldots + a_{kn}b_{nl} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{il}$$

$$(k \in \{1, \ldots, m\}; \qquad l \in \{1, \ldots, p\})$$

teljesül.

Az A és a B mátrix tehát pontosan akkor szorozható össze (ebben a sorrendben), ha A-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek. Ekkor az AB mátrixnak annyi sora lesz, mint A-nak és annyi oszlopa, mint B-nek. A szorzatmátrixban a k-adik sor l-edik elemét úgy kapjuk meg, hogy az A mátrix k-adik sorána és a B mátrix l-edik oszlopának megfelelő elemeinek szorzatösszegét képezzük. Amíg a mátrixok szorzásában nem teszünk szert megfelelő gyakorlatra, addig érdemes a szorzást az alábbi ún. **Falk-séma** szerint elvégezni:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1l} & \ldots & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kl} & \ldots & \ldots & b_{kp} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nl} & \ldots & \ldots & b_{np} \end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kl} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{ml} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{kl} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Példa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & -10 \\ 16 & 8 & 8 & 18 \\ 5 & 8 & -5 & 11 \\ 8 & -10 & 19 & 1 \end{bmatrix}.$$

Példa.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad AB = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 8 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Definíció. Valamely $A = [a_{kl}] \in H^{m\times n}$ mátrix **transzponált**ján azt a $B = [b_{kl}] \in H^{n\times m}$ mátrixot értjük, amelyre

$$b_{kl} = a_{lk} \qquad (k \in \{1, \ldots, m\};\ l \in \{1, \ldots, n\})$$

teljesül. Az A mátrix transzponáltját A^T-vel jelöljük.

Példa. Az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix transzponáltja az $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix.

A transzponálás geometriailag a főátló egyenesére történő tükrözést jelenti. A transzponálás tehát felcseréli a sorok és az oszlopok szerepét.
Definíció. Valamely $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ **adjungált**ján azt a $B = [b_{kl}] \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mátrixot értjük, amelyre

$$b_{kl} = \overline{a_{lk}} \qquad (k \in \{1, \ldots, m\};\ l \in \{1, \ldots, m\})$$

teljesül. Az A mátrix adjungáltját A^*-gal jelöljük.

Az A mátrix adjungáltja tehát a transzponáltjának konjugáltja. Valós elemű A esetén nyilván $A^* = A^T$.

Példa.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1+\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-\imath \\ -\imath & 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & -\imath \\ 1-\imath & 0 \end{bmatrix}.$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{K}^{m\times n}$ halmazon az **összeadás**

1. kommutatív:
$$A + B = B + A \qquad (A, B \in \mathbb{K}^{m\times n});$$

2. asszociatív:

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad (A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n});$$

3. a $O \in \mathbb{K}^{m\times n}$ zérusmátrixra teljesül, hogy bármely $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix esetén

$$A + O = A;$$

4. minden $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix esetén a $-A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrixra $A + (-A) = O$ teljesül.

Feladat. Igazoljuk, hogy A $\mathbb{K}^{m\times n}$-beli mátrixok **számmal való szorzás**a a következő tulajdonságokkal rendelkezik!

1. $1 \cdot A = A \quad (A \in \mathbb{K}^{m\times n});$
2. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K},\ A \in \mathbb{K}^{m\times n});$
3. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K},\ A \in \mathbb{K}^{m\times n});$
4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \mu B \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}).$

Feladat. Lássuk be, hogy a megfelelő méretű mátrixok szorzására igazak az alábbi állítások!

1. Bármely $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{K}^{p\times q}$ mátrixra

$$A(BC) = (AB)C;$$

2. Az $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ és $B, C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ mátrixokra

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad \text{ill.} \qquad (A + B)C = AC + BC.$$

Feladat. Bizonyítsuk be a transzponálás és a konjugálás alábbi tulajdonságait!

1. $(A^T)^T = A$, $(A^*)^* = A \quad (A \in \mathbb{K}^{m\times n});$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ A \in \mathbb{K}^{m\times n});$
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$, $(A \pm B)^* = A^* \pm B^* \quad (A, B \in \mathbb{K}^{m\times n});$
4. $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^* = B^* A^* \quad (A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}).$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix

1. **szimmetrikus**, ha $A^\top = A$;
2. **antiszimmetrikus** vagy **ferdén szimmetrikus**, ha $A^\top = -A$;
3. **önadjungált** vagy **hermitikus** vagy **Hermite-féle**, ha $A^* = A$;
4. **ferdén hermitikus**, ha $A^* = -A$;
5. **ortogonális**, ha $A^\top A = E_n$;
6. **unitér**, ha $A^* A = E_n$;
7. **normális**, ha $A^* A = AA^*$;
8. **nilpotens**, ha alkalmas $k \in \mathbb{N}$ esetén $A^k = O$;
9. **projektormátrix** vagy **vetítőmátrix**, ha $A^2 = A$;
10. **involutórius**, ha $A^2 = E_n$.

Példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad N := \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szimmetrikus, ill. antiszimmetrikus, hiszen

$$M^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = M, \qquad \text{ill.} \qquad N^\top = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -N.$$

teljesül.

Feladat. Igazoljuk, hogy minden $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ négyzetes mátrix felírható egy S_M szimmetrikus és egy T_M antiszimmetrikus mátrix összegeként, majd állítsuk elő az alábbi M esetében ezt a két mátrixot! (Van-e olyan mátrix, amely szimmetrikus és antisszimmetrikus is egyben? Hogy néz ki a felbontás, ha M szimmetrikus, ill. antiszimmetrikus?)

$$1.\ M := \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \qquad 2.\ M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Útm. Legyen

$$S_M := \frac{1}{2}\left(M + M^\top\right), \qquad \text{ill.} \qquad T_M := \frac{1}{2}\left(M - M^\top\right).$$

Ekkor

- S_M, ill. T_M összegére

$$S_M + T_M = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^T\right) = \frac{1}{2}\left(M + M^T + M - M^T\right) = \ldots = \frac{1}{2}(2M) = M$$

  teljesül;

- S_M szimmetrikus, ui.

$$\begin{aligned}(S_M)^T &= \left\{\frac{1}{2}\left(M + M^T\right)\right\}^T = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(M^T + \left(M^T\right)^T\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(M^T + M\right) = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) = S_M;\end{aligned}$$

- T_M antiszimmetrikus, ui.

$$\begin{aligned}(T_M)^T &= \left\{\frac{1}{2}\left(M - M^T\right)\right\}^T = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(M^T - \left(M^T\right)^T\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -\frac{1}{2}\left(M - M^T\right) = -T_M.\end{aligned}$$

Világos, hogy

1. $$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3/2 & 11/2 \\ 3/2 & -1 & -2 \\ 11/2 & -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 0 & 4 \\ 5/2 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha M szimmetrikus, akkor T_M nullmátrix, ha pedig M antiszimmmetrikus, akkor S_M nullmátrix. A nullmátrix szimmetrikus és antiszimmetrikus is egyben. ■

Feladat. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Igazoljuk, hogy ekkor alkalmas H_1 és H_2 hermitikus mátrixok esetén

$$A = H_1 + \imath H_2$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy a

$$H_1 := \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad H_2 := \frac{1}{2\imath}(A - A^*)$$

mátrixok megfelelők. ■

Feladat. Számítsuk ki AB-t!

$$1.\ A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\quad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad 2.\ A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},\quad B := \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Útm.

$$1.\ AB = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix};\quad 2.\ AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Vegyük észre, hogy a nullmátrix összeadás szempontjából ugyan hasonlóan viselkedik, mint a valós számoknál a zérus, azonban két nem-nullmátrix szorzata lehet nullmátrix. Ezt úgy is szokás emlegetni, hogy „$\mathbb{K}^{n\times n}$ nem **nullosztó**mentes”.

Feladat. Az

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{és a} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében határozzuk meg az $AB - BA$ mátrixot!

Útm.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},\qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az $AB - BA$ különbséget, ha a megfelelő műveletek értelmesek!

$$1.\ A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ B := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};\qquad 2.\ A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ B := \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};$$

$$3.\ A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B := \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix};\qquad 4.\ A := F_\alpha,\ B := F_\beta,$$

ahol

$$F_\vartheta := \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \qquad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

Útm.

$$1.\ AB=\begin{bmatrix}11 & 6\\ 1 & 2\end{bmatrix};BA=\begin{bmatrix}4 & -3 & 13\\ -2 & -1 & 11\\ 2 & -2 & 10\end{bmatrix};\quad 2.\ AB-BA=\begin{bmatrix}-9 & 4 & 2\\ 9 & -11 & -19\\ 45 & -20 & 20\end{bmatrix};$$

$$3.\ AB-BA=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\qquad 4.\ F_\alpha F_\beta=F_\beta F_\alpha=F_{\alpha+\beta}\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R}).\quad\blacksquare$$

Útm. Mely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén lesz az AB, ill. a BA szorzat nullmátrix?

$$A:=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\qquad B:=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & b & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Útm. Mivel

$$AB=\begin{bmatrix}-3-2a & -1+a+2b & a-1\\ -18 & 4+4b & -2\\ -9 & 2+2b & -1\end{bmatrix},\quad \text{ill.}\quad BA=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3+a\\ -3+2b & -6+4b & -3-2a+6b\\ 0 & 0 & 6-2a\end{bmatrix},$$

ezért AB semmilyen paraméterértékek mellett nem lesz nullmátrix, viszont

$$BA=O\qquad\Longleftrightarrow\qquad(a=3,\quad b=3/2).\quad\blacksquare$$

Feladat. Határozzuk meg az $A(BC)$, ill. az $(AB)C$ mátrixot!

1. $A:=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{bmatrix}, B:=\begin{bmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{bmatrix}, C:=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix};$

2. $A:=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}, B:=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}, C:=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}.$

Útm.

$$1.\ A(BC)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=(AB)C;\quad 2.\ A(BC)=\begin{bmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{bmatrix}=(AB)C.\quad\blacksquare$$

Feladat. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

$$1.\ \begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}^n\quad(n\in\mathbb{N};\ a,b\in\mathbb{R});\quad 2.\ (F_\vartheta)^n,\ \text{ahol } F_\vartheta:=\begin{bmatrix}\cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta)\\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta)\end{bmatrix}\quad(n\in\mathbb{N};\vartheta\in\mathbb{R}).$$

Útm.

$$1.\quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix} \quad (n \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R}); \quad 2.\ F_\vartheta^n \equiv \begin{bmatrix} \cos(n\vartheta) & -\sin(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) & \cos(n\vartheta) \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az

$$(AB)^2, \qquad A^2B^2, \qquad (A+B)^2 \qquad \text{és az} \qquad A^2 + 2AB + B^2$$

mátrixot!

Útm.

$$(AB)^2 = \begin{bmatrix} 56 & 70 \\ 14 & 21 \end{bmatrix}, \qquad A^2B^2 = \begin{bmatrix} 26 & 51 \\ -38 & -67 \end{bmatrix},$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 9 & 29 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Látható, hogy a valós számok körében megszokott

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

azonosság mátrixoknál nem feltétlenül teljesül. Ha $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, akkor csak annyit mondhatunk, hogy

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Világos, hogy ennek az eltérésnek az az oka, hogy a fenti mátrixokra $AB \neq BA$.

Feladat. Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -7 \\ -3 & 5 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & -7 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

szorzatot!

Útm. Mivel

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 3,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -7 \\ -3 & 5 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & -7 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 11 & 11 & -5 \end{bmatrix},$$

továbbá

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ezért a fenti szorzat nem más, mint

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 7 & 11 & 11 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 30 & 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 234 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Az

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixok esetében számítsuk ki az alábbi mátrixokat!

$$1.\ AC\mathbf{x},\ 2.\ A^\mathsf{T}C^\mathsf{T}\mathbf{x}^\mathsf{T},\ 3.\ \mathbf{x}^\mathsf{T}C^\mathsf{T}A^\mathsf{T},\ 4.\ A^\mathsf{T}C,\ 5.\ A^\mathsf{T}C^\mathsf{T},\ 6.\ AC\mathbf{y},\ 7.\ BC\mathbf{y},\ 8.\ \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y},\ 9.\ \mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T}.$$

Útm.

$$1.\ AC\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

2. Az $A^TC^T\mathbf{x}^T$ szorzat nem értelmezett, hiszen $C^T \in \mathbb{R}^{2\times3}$, $\mathbf{x}^T \in \mathbb{R}^{1\times2}$.

3. $\mathbf{x}^TC^TA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \end{bmatrix}.$

4. Az A^TC szorzat nem értelmezett, mivel $A^T \in \mathbb{R}^{3\times2}$ és $C \in \mathbb{R}^{3\times2}$.

5. $A^TC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \\ 6 & -15 & -1 \end{bmatrix}.$

6. $AC\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

7. A $BC\mathbf{y}$ szorzat nem értelmezett, ui. $B \in \mathbb{R}^{1\times2}$ és $C \in \mathbb{R}^{3\times2}$.

8. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$

9. $\mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$ ■

Feladat. Az

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

mátrixok esetében számítsuk ki az alábbi mátrixokat!

$$1.\ A+B, \quad 2.\ A-B, \quad ,3.\ 2A-3B, \quad 4.\ A+C, \quad 5.\ A\cdot B, \quad 6.\ A^TC, \quad 7.\ C^2.$$

Útm.

1. $A+B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$

2. $A-B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$

3. $2A-3B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 13 \end{bmatrix}.$

4. Az $A+C$ összeg nem értelmezett, ui. $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$ és $C \in \mathbb{R}^{2\times2}$.

5. Az AB szorzat nem értelmezett, ui. $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

6. $A^TC = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 12 & 12 \\ 31 & 32 \end{bmatrix}.$

7. $C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 24 \\ 30 & 36 \end{bmatrix}.$ ■

Feladat. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, ill. $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$, továbbá tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mathbf{b}_i \in \mathbb{K}^n$ olyan vektor, melynek i-edik komponense 1, a többi pedig 0. Számítsuk ki az alábbi szorzatokat!

1. $A\mathbf{b}_i$, 2. $\mathbf{b}_i^T B$

Útm.

1. $A\mathbf{b}_i$ nem más mint az A mártix i-edik oszlopvektora;

2. $\mathbf{b}_i^T B$ nem más, mint a B mátrix i-edik sorvektora. ■

Példa. Könnyű utánaszámolni, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Példa. Könnyű utánaszámolni, hogy

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

Tétel.

1. Ha $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$: $A = [\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_n]$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, akkor

$$A\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} o_k \mathbf{a}_k.$$

2. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$ és $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$: $B = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n \end{bmatrix}$, akkor

$$\mathbf{a}^T B = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{s}_k.$$

3. Ha $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ és

   (a) $B = [\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_p]$, akkor $AB = [A\mathbf{o}_1, \ldots, A\mathbf{o}_p]$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_m \end{bmatrix}$, akkor

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 B \\ \vdots \\ \mathbf{s}_m B \end{bmatrix}.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{M}_{a,b} := \left\{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \ M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \right\},$$

ill.

$$\varphi : \mathcal{M}_{a,b} \to \mathbb{K}, \qquad \varphi(M) := a + b\imath$$

akkor

$$\varphi(M + N) = \varphi(M) + \varphi(N), \qquad \text{ill.} \qquad \varphi(M \cdot N) = \varphi(M) \cdot \varphi(N)$$

teljesül!

Útm. Ha valamely $a, b \in \mathbb{R}$, ill. $c, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$M := \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad N := \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix},$$

akkor

$$\varphi(M+N) = \varphi\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right\} = \varphi\left\{\begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+ca \end{bmatrix}\right\} = (a+c)+(b+d)\imath,$$

másrészt

$$\varphi(M)+\varphi(N) = \varphi\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right\} + \varphi\left\{\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right\} = (a+b\imath)+(c+d\imath) = (a+c)+(b+d)\imath,$$

továbbá

$$\begin{aligned} \varphi(MN) &= \varphi\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right\} = \varphi\left\{\begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \varphi\left\{\begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ bc+ad & ac-bd \end{bmatrix}\right\} = \\ &= (ac-bd)+(bc+ad)\imath, \end{aligned}$$

másrészt

$$\varphi(M)\cdot\varphi(N) = \varphi\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right\}\cdot\varphi\left\{\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right\} = (a+b\imath)\cdot(c+d\imath) = (ac-bd)+(bc+ad)\imath. \quad \blacksquare$$

Definíció. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, majd

$$f(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Ekkor az f függvény (polinomn) valamely $M \in \mathbb{K}^{m\times m}$ helyen vett helyettesítési értékének nevezzük az

$$f(M) := a_0 E_m + a_1 M + a_2 M^2 + \ldots + a_n M^n$$

mátrixot.

Feladat. Adott

$$f(x) := 2x^3 - x^2 - 5x + 3 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

esetén számítsuk ki az $f(A)$ mátrixot!

Útm. Mivel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\begin{aligned} f(A) &= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= 2\begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 4 \\ -2 & -13 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad f(x) := x^2 - (a+d)x + (ad - bc) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f(A)$ nullmátrix!

Útm.

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definíció. Az $M = [m_{ij}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrix **nyom**ának nevezzük a főátlójában lévő elemeinek összegét:

$$\mathrm{Tr}(M) := \mathrm{Sp}(M) := \sum_{k=1}^{n} m_{kk}.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, akkor fennáll a

$$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$$

egyenlőség!
Útm. Ha

$$A =: [a_{ij}], \qquad \text{ill.} \qquad B =: [b_{ij}],$$

és $(AB)_{kk}$ jelöli az AB mártix k-adik sorának k-adik elemét, akkor

$$\mathrm{Sp}(AB) = \sum_{k=1}^{n}(AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}b_{lk} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{lk}a_{kl} = \sum_{l=1}^{n}(BA)_{ll} = \mathrm{Sp}(BA). \quad \blacksquare$$

Feladat. Vannak-e olyan $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok, amelyekre

$$AB - BA = E_n$$

teljesül?
Útm. Nincsenek ilyen mátrixok, hiszen az $AB - BA$ mátrix átlójában álló elemek összege zérus, az E_n mátrix átlójában álló elemek összege pedig n. $\blacksquare$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrixok esetén $AB - BA = O$, azaz ha A és B **felcserélhető**, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$$

egyenlőség (**binomiális tétel**)!
Útm.

1. lépés. Ha $n = 1$, akkor

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}A^kB^{1-k} = IB + AI = A + B = (A + B)^1.$$

2. lépés. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k},$$

akkor

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)^n(A+B) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\right)(A+B) = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{k+1}B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k+1} = \\
&= \binom{n}{0}A^{n+1}I + \sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right\}A^kB^{n-k+1} + \binom{n}{n}IB^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0}A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A^kB^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1}B^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definíció. Pauli-mátrixoknak nevezzük a

$$\sigma_0 := E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat.

Feladat. Igazoljuk, hogy a Pauli-mátrixok szorzására igazak az alábbi azonosságok!

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0^2 = \sigma_0, \qquad \text{ill.} \qquad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \imath\sigma_0,$$

és

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\sigma_0 + \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad (i, j \in \{1,2,3\}),$$

azaz

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = \imath\sigma_3,$$

$$\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = \imath\sigma_1,$$

$$\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = \imath\sigma_2,$$

továbbá

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\imath \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\sigma_0 \qquad (i, j \in \{1, 2, 3\}).$$

Feladat. Adott $M \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ mátrix esetén adjunk meg olyan $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ számokat, hogy

$$M = a\sigma_0 + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3$$

teljesüljön!
Útm. Ha

$$M =: \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

akkor a fenti egyenlőség azzal egyenértékű, hogy

$$m_{11} = c + d, \qquad m_{12} = b - c\imath, \qquad m_{21} = b + c\imath, \qquad m_{22} = a - d.$$

Innen

$$a = \frac{m_{11} + m_{22}}{2}, \qquad b = \frac{m_{12} + m_{21}}{2}, \qquad c = \frac{m_{12} - m_{21}}{2}, \qquad d = \frac{m_{11} - m_{22}}{2}$$

következik. ■

0.6. 6. oktatási hét

Korábbi tanulmányainkban a vektorokat irányított szakaszként definiáltuk, majd beláttuk, hogy bizonyos vektorok – az **i**, a **j**, ill. a **k** vektorok – bevezetésével a síkvektorok halmaza és a valós számpárok halmaza, ill. a térvektorok halmaza és a valós számhármasok halmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ezért pl. tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén az (a, b) valós számpár, ill. az (a, b, c) valós számhármas is tekinthető vektornak. Az irányított szakaszokkal végzett műveletek (skalárral való szorzás, összeadás) tehát a rendezett számpárok, ill. számhármasok körében is elvégezhető kell, hogy legyen. Ezt a tényt felhasználva jutunk a vektor fogalmának egy általánosításához.

Adott $n \in \mathbb{N}$ szám esetén $\mathbb{K}^d$ jelöli a $\mathbb{K}$-nak önmagával vett Descartes-szorzatát:

$$\mathbb{K}^d := \overset{1}{\overset{\smile}{\mathbb{K}}} \times \ldots \times \overset{d}{\overset{\smile}{\mathbb{K}}}.$$

Definíció. Ha valamely $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$$

akkor az $x_1, \ldots, x_d$ számokat az **x vektor komponense**inek vagy **koordinátái**nak nevezzük. Azt mondjuk továbbá, hogy az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^d$ vektorok egyenlőek, ha megfelelő komponenseik egyenlőek:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (x_1 = y_1, \ldots, x_d = y_d).$$

Az alábbiakban látható, hogy ha a szám d-esek $\mathbb{K}$-beli számmal való szorzatát, ill. a szám d-esek összeadását „komponensenként” értelmezzük, akkor az irányított szakaszokkal kapcsolatban bebizonyított tulajdonságok teljesülnek a szám d-esekre is, pontosabban igaz a

Tétel. Ha valamely $\alpha \in \mathbb{K}$ szám és

$$\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d, \qquad \mathbf{y} := (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{K}^d$$

vektorok esetén a skalárral (számmal) való szorzást, ill. az összeadást az

$$\alpha\mathbf{x} := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_d), \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)$$

módon értelmezzük, akkor igazak az alábbi állítások:

1. A $\mathbb{K}^d$ elemei, azaz a rendezett $\mathbb{K}$-beli szám d-esek között értelmezett összeadásra a következők teljesülnek:

- **kommutatív**, azaz tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^d$ vektorok esetén

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

teljesül;

- **asszociatív**, azaz bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{K}^d$ vektorra

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z};$$

- létezik **nullvektor**, azaz olyan $\mathbf{0} \in \mathbb{K}^d$ szám d-es, amelyre

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \qquad (x \in \mathbb{K}^d);$$

- minden $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d$ vektornak van ($-\mathbf{x}$-szel jelölt) **ellentett**je, azaz bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d$ esetén a $-\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d$ vektorra fennáll az

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

egyenlőség.

2. A $\mathbb{K}^d$ elemeinek a valós számokkal való szorzása az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

   - $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d)$;
   - $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^d)$;
   - $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^d)$;
   - $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^d)$.

Megmutatható, hogy az iménti tételben megfogalmazott állításokból a sík- és a térvektoroknál gyakran használt további tulajdonságok, mint pl. a nullvektor vagy az ellentett egyértelműsége, a minden $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d$ esetén fennálló $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $(-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$ egyenlőségek) már egyszerűen levezethetők. Így pl.

$$\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \qquad \text{és} \qquad -\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_d).$$

Figyeljük meg, hogy adott $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mátrixok esetében is hasonló igaz (vö. múlt óra). Sőt, középiskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy a $\mathcal{P} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ legfeljebb n-edfokú polinomok halmazáról is ugyanez mondható el. Igen sok matematikai objektum összessége rendelkezik hasonló tulajdonsággal, ezért célszerű bevezetni az alábbi fogalmat.

Definíció (absztakt vektorterek). Legyen $V \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy a V halmaz **vektortér $\mathbb{K}$-ra vonatkozóan** (németesen egyszerűen V **vektortér** $\mathbb{K}$ **felett**), ha vannak olyan – **vektorok skalárral való szorzásá**nak, ill. **vekotok összeadásá**nak nevezett –

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \qquad + : V \times V \to V$$

leképezések, amelyekre igazaz az alábbi tulajdonságok.[2]

I. Az összeadás „axiómái” a következők:

1. a $+$ művelet kommutatív: $x, y \in V$ esetén $x + y = y + x$;
2. létezik **nullvektor**nak nevezett $0 \in V$ elem, amelyre bármely $x \in V$ esetén $x + 0 = x$ teljesül;
3. tetszőleges $x \in V$ vektohoz van olyan ún. $(-x) \in V$ **ellentett vektor**, amelyre $x + (-x) = 0$ teljesül.

II. Az skalárral való szorzás „axiómái” a következők:

1. bármely $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, ill. $x \in V$ esetén $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
2. tertszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, ill. $x \in V$ esetén $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
3. minden $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra, ill. $x, y \in V$ vektorokra $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

A V halmaz elemeit **vektor**oknak, a $\mathbb{K}$ halmaz eselemit pedig **skalár**oknak (számoknak) nevezzük.

Megjegyzések.

1. A továbbiakban $\lambda \in \mathbb{K}$, illletve $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ skalárok és $x, y \in V$ vektotok esetén használni fogjuk a következő jelöléseket:

$$x \cdot \lambda := \lambda \cdot x, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{x}{\lambda} := \frac{1}{\lambda} \cdot x \qquad \text{és} \qquad x - y := x + (-y).$$

2. A fenti definíció egyeszeű következményei az alábbi állítások:

   (a) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár, ill. $\mathbf{0} \in V$ vektor esetén $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

   (b) bármely $x \in V$ vektorra: $(-1) \cdot x = -x$;

   (c) ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in V$, akkor igaz a

$$\lambda x = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda = 0 \quad \vee \quad x = \mathbf{0})$$

   ekvivalencia.

[2] Az egyeszerűség kedvéért vektorok skalárszorosára, ill. két vektor összegére bevezetjük a $\cdot(\lambda, x) =: \lambda \cdot x =: \lambda x$, ill. $+(x, y) =: x + y$ jelölést.

Példa. Az $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ szám d-est gyakran **sorvektor**nak is nevezzük, és ekkor az $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_d]$ jelölést is használjuk. Az $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d$ komponenseit megadhatjuk oszlopba rendezve is:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix},$$

ilyenkor **oszlopvektor**ról beszélünk. A sorvektorok és az oszlopvektorok halmazában analóg módon értelmezhető a skalárral (számmal) való szorzás és az összeadás. A rendezett szám d-esek, az oszlopvektorok és a sorvektorok halmaza között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, amely „megtartja" a műveleteket, ezért e három halmaz között nem teszünk különbséget.

Feladat. Az

$$x := (-3, 4, 1, 5, 2), \qquad y := (2, 0, 4, -3, -1), \qquad (7, -1, 0, 2, 3)$$

($\mathbb{R}^5$-beli vektorok), ill.

$$M := \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 5}$$

mátrix esetén számítsuk ki az

$$x + y, \qquad y - z, \qquad 4x, \quad x + 3y - 2z, \qquad Mx$$

összegeket, ill. szorzatokat!

Útm.

1. $x + y = (-3, 4, 1, 5, 2) + (2, 0, 4, -3, -1) = (-1, 4, 5, 2, 1).$
2. $y - z = (2, 0, 4, -3, -1) - (7, -1, 0, 2, 3) = (-5, 1, 4, -5, -4).$
3. $4x = 4 \cdot (-3, 4, 1, 5, 2) = (-12, 16, 4, 20, 8).$
4. $x + 3y - 2z = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 6 \\ 13 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}.$
5. $Mx = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ -5 \end{bmatrix}.$ ■

Definíció. Adott V vektortér esetén azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A} \subset V$ halmaz (V-beli) **altér** (jel. $\mathcal{A} \leq V$), ha $\mathcal{A}$ **zárt az összeadásra és a számmal való szorzásra**, azaz

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{A} \qquad \text{és} \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{u} \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\mathbf{u} \in \mathcal{A}.$$

Megjegyzés. Világos, hogy ha $\mathcal{A}$ altér, akkor $\mathbf{0} \in \mathcal{A}$, hiszen

$$\mathbf{u} \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{0} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) \in \mathcal{A}.$$

Példa. A

$$\mathcal{H} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0\right\}$$

halmaz nem altér $\mathbb{R}^2$-ben, hiszen pl.

$$(2, 3) \in \mathcal{H}, \qquad \text{de} \qquad (-1)(2, 3) = (-2, -3) \notin \mathcal{H}.$$

Feladat. Altér-e $\mathbb{R}^2$-ben, ill. $\mathbb{R}^4$-ben a

$$\mathcal{H} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}, \quad \text{ill. a} \quad \mathcal{K} := \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 : \ u_1 + 3u_3 = 5u_3 - u_4\right\}$$

halmaz?

Útm.

1. A

$$\mathcal{H} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

   halmaz nem altér $\mathbb{R}^2$-ben, hiszen $\mathbf{0} \notin \mathcal{H}$ $/0^2 + 0^2 = 0 \neq 1/$.

2. A

$$\mathcal{K} := \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 : \ u_1 + 3u_3 = 5u_3 - u_4\right\}$$

   halmaz altér $\mathbb{R}^4$-ben, hiszen

   - ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{K}$, azaz ha

$$u_1 + 3u_3 = 5u_3 - u_4, \qquad \text{ill.} \qquad v_1 + 3v_3 = 5v_3 - v_4,$$

akkor

$$(u_1+v_1)+3(u_3+v_3)=5(u_3+v_3)-(u_4+v_4),$$

azaz $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathcal{K}$.

- ha $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}\in\mathcal{K}$, akkor

$$\lambda(u_1+3u_3)=\lambda(5u_3-u_4)\qquad\Longleftrightarrow\qquad \lambda u_1+3\lambda u_3=5\lambda u_3-\lambda u_4,$$

következtében $\lambda\mathbf{u}\in\mathcal{K}$. ■

Feladat. Alterek-e $\mathbb{R}^3$-ban a $\mathcal{H}$ halmaz?

1. $\mathcal{H}:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=1\right\}$;
2. $\mathcal{H}:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right\}$;
3. $\mathcal{H}:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2x-3y+z=0\right\}$;
4. $\mathcal{H}:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2x-3y+z=5\right\}$;
5. $\mathcal{H}:=\left\{(x-y,3x,2x+y)\in\mathbb{R}^3:\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

Útm.

1. $\mathcal{H}$ nem altér $\mathbb{R}^3$-ban, hiszen $\mathbf{0}=(0,0,0)\notin\mathcal{H}$: $0^2+0^2+0^2=0\neq 1$.
2. $\mathcal{H}$ nem altér $\mathbb{R}^3$-ban, hiszen bármely $\mathbf{0}<\mathbf{u}\in\mathcal{H}$ esetén $-\mathbf{u}\notin\mathcal{H}$.
3. $\mathcal{H}$ altér $\mathbb{R}^3$-ban, hiszen

   - ha $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{H}$, azaz ha

   $$2u_1-3u_2+u_3=0,\qquad \text{ill.}\qquad 2v_1-3v_2+v_3=0,$$

   akkor

   $$2(u_1+v_1)-3(u_2+v_2)+(u_3+v_3)=(2u_1-3u_2+u_3)+(2v_1-3v_2+v_3)=0+0=0,$$

   azaz $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathcal{H}$.

   - ha $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}\in\mathcal{H}$, akkor

   $$\lambda\mathbf{u}\in\mathcal{H}\qquad\Longleftrightarrow\qquad(\lambda 2)u_1-(\lambda 3)u_2+\lambda u_3=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad\lambda(2u_1-3u_2+u_3)=0$$

   miatt $\lambda\mathbf{u}\in\mathcal{H}$.

4. $\mathcal{H}$ nem altér $\mathbb{R}^3$-ban, hiszen $\mathbf{0} = (0,0,0) \notin \mathcal{H}$: $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 5$.

5. $\mathcal{H}$ altér $\mathbb{R}^3$-ban, hiszen

   - ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$, azaz ha $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ esetén

     $$\mathbf{u} = (a_1 - b_1, 3a_1, 2a_1 + b_1) \in \mathcal{H}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{v} = (a_2 - b_2, 3a_2, 2a_2 + b_2),$$

     akkor

     $$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (a_1 - b_1, 3a_1, 2a_1 + b_1) + (a_2 - b_2, 3a_2, 2a_2 + b_2) = \\ &= ((a_1 + a_2) - (b_1 + b_2), 3(a_1 + a_2), 2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)) \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

     azaz $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{H}$.
   - ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, akkor

     $$\lambda\mathbf{u} \in \mathcal{H} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda a_1 - \lambda b_1, 3\lambda a_1, 2\lambda a_1 + \lambda b_1) \in \mathcal{H}$$

     következtében $\lambda\mathbf{u} \in \mathcal{H}$.

Megjegyzés.

1. $\mathbb{R}^n$, ill. $\{\mathbf{0}\}$ /a csak a $\mathbf{0}$ vektorból álló halmaz/ nyilvánvalóan altér. Ezeket **triviális altereknek** nevezzük.

2. A **síkvektor**ok terének /$\mathbb{R}^2$-nek/ a triviálistól különböző alterei az origón átmenő egyenesek.

3. A **térvektor**ok terének /$\mathbb{R}^3$-nak/ a triviálistól különböző alterei az origón átmenő egyenesek és az origóra illeszkedő síkok.

4. Adott $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix esetén három fontos altérre hívjuk fel a figyelmet:

   (a) a
   $$\ker(M) := \mathcal{N}(M) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \ M\mathbf{u} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$
   halmaz altér $\mathbb{R}^n$-ben: az M **mátrix magtere**, **magja** vagy **nulltere**.

   (b) az
   $$\mathrm{Im}(M) := \mathcal{O}(M) := \{M\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m : \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$
   halmaz altér $\mathbb{R}^m$-ben: az M **mátrix képtere** vagy **oszlop(vektor)tere**.

   (c) az
   $$\mathcal{S}(M) := \left\{\mathbf{u}^\mathsf{T} M \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m\right\} \subset \mathbb{R}^n$$
   halmaz altér $\mathbb{R}^n$-ben: az M **mátrix sorvektortere**.

Feladat. Lássuk be, hogy a fenti példákbeli

$$\ker(M), \qquad \mathrm{Im}(M), \qquad \mathcal{S}(M)$$

halmazok alterek!
Útm. Ha $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor

1. $\ker(M)$ altér $\mathbb{R}^n$-ben, hiszen a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $M\mathbf{0} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{0} \in \ker(M)$, tehát $\ker(M) \neq \emptyset$, továbbá, ha

   - $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker(M)$, azaz $M\mathbf{u} = M\mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor

     $$M(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = M\mathbf{u} + M\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

     következtében $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \ker(M)$.

   - $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \ker(M)$, azaz $M\mathbf{u} = \mathbf{0}$, akkor

     $$M(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(M\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

     kövbetkeztében $\lambda\mathbf{u} \in \ker(M)$.

2. $\mathrm{Im}(M)$ altér $\mathbb{R}^m$-ben, hiszen a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ vektorra $M\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, azaz $M\mathbf{0} \in \mathrm{Im}(M)$, tehát $\mathrm{Im}(M) \neq \emptyset$, továbbá, ha

   - $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Im}(M)$, azaz alkalmas $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén $M\mathbf{a} = \mathbf{u}$, $M\mathbf{b} = \mathbf{v}$, akkor $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ és

     $$M(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = M\mathbf{a} + M\mathbf{b} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$$

     következtében $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(M)$.

   - $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathrm{Im}(M)$, azaz alkalmas $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén $M\mathbf{a} = \mathbf{u}$, akkor $\lambda\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és

     $$M(\lambda\mathbf{a}) = \lambda(M\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{u}$$

     kövbetkeztében $\lambda\mathbf{u} \in \mathrm{Im}(M)$.

3. $\mathcal{S}(M)$ altér $\mathbb{R}^n$-ben, hiszen a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ vektorra $\mathbf{0}^\mathsf{T}M = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, azaz $\mathbf{0}^\mathsf{T}M \in \mathcal{S}(M)$, tehát $\mathcal{S}(M) \neq \emptyset$, továbbá, ha

   - $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}(M)$, azaz alkalmas $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektorok esetén $\mathbf{a}^\mathsf{T}M = \mathbf{u}$, $\mathbf{b}^\mathsf{T}M = \mathbf{v}$, akkor $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ és

     $$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\mathsf{T}M = \mathbf{a}^\mathsf{T}M + \mathbf{b}^\mathsf{T}M = \mathbf{u}+\mathbf{v}$$

     következtében $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathcal{S}(M)$.

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(M)$, azaz alkalmas $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén $\mathbf{a}^T M = \mathbf{u}$, akkor $\lambda\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ és

$$(\lambda\mathbf{a})^T M = \lambda(\mathbf{a}^T M) = \lambda\mathbf{u}$$

  kövbetkeztében $\lambda\mathbf{u} \in \mathcal{S}(M)$. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathcal{A} := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d : \sum_{i=1}^{d} x_i = 0\right\}$$

halmaz altér $\mathbb{R}^n$-ben!

Útm. Ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} u_i = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda\sum_{i=1}^{d} u_i = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{d} \lambda u_i = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda\mathbf{u} \in \mathcal{A},$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} u_i = 0, \sum_{i=1}^{d} v_i = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{d} u_i + \sum_{i=1}^{d} v_i = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{d} (u_i + v_i) = 0 \quad\Longrightarrow$

  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{A}$. ■

Tétel. Ha $d, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^d$, akkor a

$$\text{span}\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) := \left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k \in \mathbb{K}^d : \ \alpha_k \in \mathbb{R}\,(k \in \{1, \ldots, n\})\right\}$$

halmaz (a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok **lineáris burka**) altér $\mathbb{K}^d$-ben.

Biz. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$, ill. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, azaz alkalmas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ esetén

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k, \qquad \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k,$$

akkor

- $\displaystyle\lambda\mathbf{a} = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda\alpha_k)\mathbf{v}_k \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\},$

- $\displaystyle\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k)\mathbf{v}_k \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}.$ ■

Példa. A

$$\mathbf{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektorok esetében

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} &= \left\{\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^4 : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + 2\gamma \\ 3\gamma \\ \alpha + 2\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Tétel (Leibniz). Legyen $d \in \mathbb{N}$. Ekkor pontosan egy olyan

$$\det : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{K}$$

függvény létezik, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságok mindegyikével.

(D1) det **lineáris** A minden oszlopában, pontosabban tetszőleges $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén

i) ha $\mathbf{o}_k = \mathbf{o}'_k + \mathbf{o}''_k$, akkor

$$\det\left(\begin{bmatrix} \ldots & \mathbf{o}_k & \ldots \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \ldots & \mathbf{o}'_k & \ldots \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \ldots & \mathbf{o}''_k & \ldots \end{bmatrix}\right),$$

ii) ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $\mathbf{o}_k = \lambda\mathbf{o}'_k$, akkor

$$\det\left(\begin{bmatrix} \ldots & \mathbf{o}_k & \ldots \end{bmatrix}\right) = \lambda \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \ldots & \mathbf{o}'_k & \ldots \end{bmatrix}\right).$$

A kipontozott részeken minden mátrixban az eredeti

$$\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_{k-1}, \mathbf{o}_{k+1}, \ldots, \mathbf{o}_d$$

oszlopvektorok vannak.

(D2) det **alternáló**, azaz ha B oly módon keletkezik A-ból, hogy felcseréljük két tetszőleges oszlopát, úgy

$$\det(B) = -\det(A).$$

(D3) det **normált**, azaz $\det(E_d) = 1$.

Definíció. A fenti télebeli det függvényt **determináns**nak nevezzük. A det függvény A mátrixon felvett helyettesítési értékére a $\det(A)$ jelsorozat helyett sok esetben $|A|$ használjuk.

A fenti tételbeli **(D1)-(D3)** tulajdonságból könnyen levezethetők az alábbi állítások.

Tétel. Legyen $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$. Ekkor igazak az alábbi állítások.

1. A transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával:
$$\det(A^T) = \det(A).$$

2. $\det(A)$ nem változik meg az alábbi esetekben:
   (a) valamelyik oszlopának számszorosát egy másik oszlopához adjuk,
   (b) valamelyik sorának számszorosát egy másik sorához adjuk.

3. $\det(A) = 0$, amennyiben A-nak van csupa 0-t tartalmazó oszlopa vagy sora.

4. $\det(A) = 0$, amennyiben A-nak van két arányos oszlopa vagy két arányos sora.

5. $\det(\Delta) = \prod_{k=1}^{d} a_{kk}$;

6. Bármely $c \in \mathbb{K}$ számra
$$\boxed{\det(cA) = c^d \det(A)}.$$

7. Ha $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $n = 2$, azaz alkalmas $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ esetén
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
akkor arra
$$\det(A) = ad - bc$$
teljesül.
Útm. Az
$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
vektorok bevezetésével:
$$A = \begin{bmatrix} a\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 & b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \end{bmatrix},$$

így

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(\begin{bmatrix} a\mathbf{e}_1 & b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} c\mathbf{e}_2 & v\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\right) = \\
&= a \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\right) + c \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & v\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\right) = \\
&= a \cdot b \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}\right) + a \cdot d \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\right) + \\
&\quad + c \cdot b \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}\right) + c \cdot d \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\right),
\end{aligned}$$

a **(D2)** tulajdonság miatt

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}\right) = 0 = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\right),$$

ill. a **(D3)** tulajdonság

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\right) = 1 \qquad \text{és} \qquad \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}\right) = -1,$$

ahonnan

$$\det(A) = ad - bc$$

következik. ■

Tétel. Legyen $M = [m_{ij}] \in \mathbb{K}^{d\times d}$. Ekkor

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{d} m_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}) = \sum_{j=1}^{d} m_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}),$$

ahol az $M_{ij} \in \mathbb{K}^{(d-1)\times(d-1)}$ az a mátrix, amelyet úgy kapunk M-ből, hogy elhagyjuk i-edik sorát és j-edik oszlopát (az m_{ij} elemet tartalmazó sort és oszlopot).

Példa. Ha $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, akkor

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det([d]) + c \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det([b]) = ad - bc.$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

telefonmátrix determinánsát hatféleképpen!

Útm.

1. az első oszlop szerinti kifejtéssel:

$$\begin{aligned}\det(M) &= 1\cdot\det\begin{bmatrix}5&6\\8&9\end{bmatrix} - 4\cdot\det\begin{bmatrix}2&3\\8&9\end{bmatrix} + 7\cdot\det\begin{bmatrix}2&3\\5&6\end{bmatrix} = \\ &= 1\cdot(45-48) - 4\cdot(18-24) + 7\cdot(12-15) = -3+24-21 = 0.\end{aligned}$$

2. a második oszlop szerinti kifejtéssel:

$$\begin{aligned}\det(M) &= -2\cdot\det\begin{bmatrix}4&6\\7&9\end{bmatrix} + 5\cdot\det\begin{bmatrix}1&3\\7&9\end{bmatrix} - 8\cdot\det\begin{bmatrix}1&3\\4&6\end{bmatrix} = \\ &= (-2)\cdot(36-42) + 5\cdot(9-21) - 8\cdot(6-12) = -12-60+48 = 0.\end{aligned}$$

3. a harmadik oszlop szerinti kifejtéssel:

$$\begin{aligned}\det(M) &= 3\cdot\det\begin{bmatrix}4&5\\7&8\end{bmatrix} - 6\cdot\det\begin{bmatrix}1&2\\7&8\end{bmatrix} + 9\cdot\det\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix} = \\ &= 3\cdot(32-35) - 6\cdot(8-14) + 9\cdot(5-8) = -9+36-27 = 0.\end{aligned}$$

4. az első sor szerinti kifejtéssel:

$$\begin{aligned}\det(M) &= 1\cdot\det\begin{bmatrix}5&6\\9&9\end{bmatrix} - 2\cdot\det\begin{bmatrix}4&6\\7&9\end{bmatrix} + 3\cdot\det\begin{bmatrix}4&5\\7&8\end{bmatrix} = \\ &= 1\cdot(45-48) - 2\cdot(36-42) + 3\cdot(32-35) = -3+12-9 = 0.\end{aligned}$$

5. a második sor szerinti kifejtéssel:

$$\begin{aligned}\det(M) &= -4\cdot\det\begin{bmatrix}2&3\\8&9\end{bmatrix} + 5\cdot\det\begin{bmatrix}1&3\\7&9\end{bmatrix} - 6\cdot\det\begin{bmatrix}1&2\\7&8\end{bmatrix} = \\ &= (-4)\cdot(18-24) + 5\cdot(9-21) - 6\cdot(8-14) = 24-60+36 = 0.\end{aligned}$$

6. a harmadik sor szerinti kifejtéssel:

$$\begin{aligned}\det(M) &= 7\cdot\det\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix} - 8\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix} + 9\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix} =\\ &= 7\cdot(12-15) - 8\cdot(6-12) + 9\cdot(5-8) = -21+48-27 = 0.\end{aligned}$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$M := \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát!
Útm. Világos, hogy

$$\det(M) = \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-2)\cdot 2 = -4. \quad \blacksquare$$

Tétel. Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. A M mátrix pontosan akkor reguláris, ha $\det(M) \neq 0$.

2. Ha M reguláris, akkor inverzére

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\cdot\widetilde{M}$$

teljesül, ahol

$$\widetilde{M} := \left[(-1)^{i+j}\det(M_{ij})\right]^T$$

jelöli az M **asszociált**ját.

Biz.

1. lépés. Világos, hogy bármely $j, k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén

$$\delta_{jk}\cdot\det(M) = \det[\mathbf{o}_1 \ \ldots \ \mathbf{o}_{j-1}\ \mathbf{o}_k\ \mathbf{o}_{j+1} \ \ldots \ \mathbf{o}_d] = \sum_{i=1}^{d}(-1)^{i+j}m_{ik}\cdot\det(M_{ij}).$$

2. lépés. Ha

$$\widetilde{M} := [\widetilde{m}_{ij}] := \left[(-1)^{i+j}\det(M_{ij})\right]^{T} = \left[(-1)^{i+j}\det(M_{ji})\right],$$

akkor

$$\delta_{jk} \cdot \det(M) = \sum_{i=1}^{d} \widetilde{m}_{ji} \cdot m_{ik},$$

hiszen

- $j = k$ esetén

$$1 \cdot \det(M) = \det(M) = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij}) \cdot m_{ij} = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ji}) \cdot m_{ij},$$

- $j \neq k$ esetén (vö. **1. lépés.**)

$$0 \cdot \det(M) = 0 = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij}) \cdot m_{ik} = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ji}) \cdot m_{ik}.$$

Így

$$\boxed{\det(M) \cdot E_d = \widetilde{M} \cdot M}.$$

3. lépés. Ha M reguláris, azaz van inverze, akkor

$$1 = \det(E_d) = \det(MM^{-1}) = \det(M) \cdot \det(M^{-1}),$$

így $\det(M) \neq 0$ és M^{-1} a fenti képletből kapható meg. Ha $\det(M) \neq 0$, akkor a fenti képlet következtében M invertálható és inverze a tételbeli. ■

Példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} = -1,$$

ill.

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{így} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Példa. Adott $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ esetén az

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Az $ad - bc \neq 0$ esetben A inverzére

$$A^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{T} = \boxed{\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

teljesül.

Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét (amennyiben invertálhatók)!

$$1. \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}; \qquad 2. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \qquad 3. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Útm.

1. Mivel

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 0 & -16 & -10 \\ 1 & 6 & 3 \\ 0 & -16 & -6 \end{bmatrix} = (-1)(16 \cdot 6 - 10 \cdot 16) = 4 \cdot 16 = 64 \neq 0,$$

ezért reguláris, és

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} -12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^{T},$$

következtében

$$M^{-1} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} -12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -6 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Tétel. Ha $M, N \in \mathbb{K}^{d\times d}$ reguláris mátrix, akkor

1. M^{-1} reguláris és $\left(M^{-1}\right)^{-1} = M$;
2. MN reguláris és $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$;
3. M^{T} reguláris és $\left(M^{T}\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^{T}$.

Útm.

1. $MM^{-1} = E_d = M^{-1}M$.
2. A mátrixok szorzásának asszociatív tulajdonságát felhasználva kapjuk, hogy
$$N^{-1}M^{-1}(MN) = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}E_dN = N^{-1}N = E_d.$$
3. Az
$$MM^{-1} = M^{-1}M = E_d$$
egyenlőséget transzponálva
$$(MM^{-1})^{T} = (M^{-1}M)^{T} = E_n^{T} = E_d$$
adódik, ahonnan
$$\left(M^{-1}\right)^{T} M^{T} = M^{T}\left(M^{-1}\right)^{T} = E_d. \quad ■$$

0.7. $\boxed{\text{7. oktatási hét}}$

Definíció. Legyen V vektortér, $l \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}$. Ekkor a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \in V$ vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük az

$$\mathbf{v} := \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_l \mathbf{v}_l \in V$$

vekort. Azt mondjuk, hogy a lineáris kombináció **triviális**, ha $\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = 0$.

Megjegyezzük, hogy a tirviális lineáris kombináció esetén a fenti definícióban szereplő $\mathbf{v}$ vektor nem más, mint a $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{v} = 0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_l = \mathbf{0}.$$

Tétel. Legyen V vektortér, $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \in V$. Ekkor a

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \rangle := \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l) := \left\{ \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \mathbf{v}_k \in V : \ \alpha_k \in \mathbb{K} \ (k \in \{1, \ldots, l\}) \right\}$$

halmaz (a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l$ vektorok **lineáris burka**) altér V-ben.
Biz. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$, ill. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l)$, azaz alkalmas $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{K}$ esetén

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \mathbf{v}_k, \qquad \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{l} \beta_k \mathbf{v}_k,$$

akkor

- $\lambda \mathbf{a} = \lambda \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k \mathbf{v}_k \right) = \sum_{k=1}^{l} (\lambda \alpha_k) \mathbf{v}_k \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$,
- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{l} \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{l} (\alpha_k + \beta_k) \mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l)$. $\blacksquare$

Tétel. Legyen V vektortér, $k \in \mathbb{N}$, továbbá $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Ekkor

1. bármely $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén $\mathbf{v}_i \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$;
2. ha $\mathcal{A} \subset V$ olyan altér, amelyre $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{A}$, akkor $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \mathcal{A}$.

Biz.

1. bármely $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén

$$\mathbf{v}_i = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{v}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{v}_i + 0 \cdot \mathbf{v}_{i+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{v}_k.$$

2. Ha valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ esetén

$$\mathbf{a} := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k),$$

akkor $\mathcal{A}$ altér volta következtében $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, így $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \mathcal{A}$. ■

Feladat. Az

$$\mathbf{u} := (1, 2, -1), \qquad \mathbf{v} := (6, 4, 2), \qquad \mathbf{x} := (9, 2, 7), \qquad \mathbf{y} := (4, -1, 8),$$

vektorok esetén

1. számítsuk ki a $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ lineáris kombinációt;
2. írjuk fel a $\operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ generált alteret;
3. döntsük el, hogy igaz-e az $\mathbf{x} \in \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, ill. $\mathbf{y} \in \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ állítás!

Útm.

1. Világos, hogy

$$-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = (-2) \cdot (1, 2, -1) + 3 \cdot (6, 4, 2) = (-2, -4, 2) + (18, 12, 6) = (16, 8, 8).$$

2. Mivel

$$\operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in V : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

és

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \alpha \cdot (1, 2, -1) + \beta \cdot (6, 4, 2) = (\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (6\beta, 4\beta, 2\beta) = (\alpha + 6\beta, 2\alpha + 4\beta, -\alpha + 2\beta),$$

ezért

$$\operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left\{(\alpha + 6\beta, 2\alpha + 4\beta, -\alpha + 2\beta) \in \mathbb{R}^3 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Mivel

$$\mathbf{x} \in \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{x}, \quad \text{azaz} \quad (\alpha + 6\beta, 2\alpha + 4\beta, -\alpha + 2\beta) = (9, 2, 7)$$

ezért $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$, ahonnan

$$\beta = 2 \qquad \text{és} \qquad \alpha = -3.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{x} \in \mathrm{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

A fentiek következtében

$$\mathbf{y} \in \mathrm{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v} = \mathbf{y}, \quad \text{azaz} \quad (\alpha+6\beta, 2\alpha+4\beta, -\alpha+2\beta) = (4, -1, -8)$$

ezért

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

Jól látható, hogy ez az egyenletrendszer nem megoldható, következéképpen $\mathbf{y} \notin \mathrm{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Megjegyezzük, hogy lineáris egyenletrendszerek egy hatékony megoldási módszere a **kiküszöböléses módszer**, amikor az $\boxed{\text{E1}}$ – $\boxed{\text{E4}}$ átalakítások „kombinálásával” az eredetivel ekvivalens alakra hozzuk az egyenletrendszert,[3] majd az így kapott egyenletrendszert megoldását „leolvassuk”.

$\boxed{\text{E1}}$ Két egyenletet felcserélünk.

$\boxed{\text{E2}}$ Valamelyik egyenletet nullától különböző számmal megszorozzuk.

$\boxed{\text{E3}}$ Valamelyik egyenlethez egy másik számszorosát adjuk.

$\boxed{\text{E4}}$ Az olyan egyenleteket, ahol valamennyi együttható és a jobb oldali konstans is 0, elhagyjuk.

Feladat. Tekintsük az alábbi altereket!

1. $\mathcal{A} := \left\{(x-y+5z, 2x-z, 2x+y-7z, -x) \in \mathbb{R}^4 : \ x, y, z \in \mathbb{R}\right\} \leq \mathbb{R}^4$;
2. $\mathcal{A} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : \ x + 3y = 0\} \leq \mathbb{R}^3$;
3. $\mathcal{A} := \left\{(2x-y+z, y+3z, x+y-2z, x-y) \in \mathbb{R}^4 : \ x, y, z \in \mathbb{R}, x+2y+z = 0\right\} \leq \mathbb{R}^4$

Adjuk meg véges generátorrendszerüket! **Útm.**

1. Mivel

$$(x-y+5z, 2x-z, 2x+y-7z, -x) = x \cdot \underbrace{(1,2,2,-1)}_{=:\mathbf{u}} + y \cdot \underbrace{(-1,0,1,0)}_{=:\mathbf{v}} + z \cdot \underbrace{(5,-1,-7,0)}_{=:\mathbf{w}},$$

ezért

$$\mathcal{A} = \mathrm{span}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\,.$$

[3]Olyan alakra, amely megoldásai pontosan azok, mint a kiindulási egyenletrendszer megoldásai.

2. Az $\mathcal{A}$ altér nem más, mint az origón átmenő $(1, 3, 0)$ normálvektorú sík. Olyan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{A}$ vektorokat keresünk tehát, amelyre $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$. Pl.

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ilyen:

$$\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

3. Mivel

$$\begin{aligned} &= (2x - y + z, y + 3z, x + y - 2z, x - y) = \\ &= x \cdot (2, 0, 1, 1) + y \cdot (-1, 1, 1, -1) + z \cdot (1, 3, -2, 0) = \\ &= x \cdot (2, 0, 1, 1) + y \cdot (-1, 1, 1, -1) - (x + 2y) \cdot (1, 3, -2, 0) = \\ &= x \cdot \underbrace{(1, -3, 3, 1)}_{=:\mathbf{u}} + y \cdot \underbrace{(-3, -5, 5, -1)}_{=:\mathbf{v}}, \end{aligned}$$

ezért

$$\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Tétel. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\mathbf{e}_i \in \mathbb{K}^d$ pedig jelölje azt a vektort, amelynek i-edik komponense 1, a többi komponense pedig 0. Ekkor

$$\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d) = \mathbb{K}^d.$$

Biz. Bármely $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \ldots + x_d \cdot 0 \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 + \ldots + x_d \cdot 0 \\ \vdots \\ x_1 \cdot 0 + \ldots + x_{d-1} \cdot 0 + x_d \cdot 1 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_d \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_d\mathbf{e}_d. \quad \blacksquare$$

Definíció. Adott V vektortér, ill. $k \in \mathbb{N}$ esetén azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ vektorok

1. **lineárisan függetlenek** (jelben $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \in \text{LF}$), ha csak a triviális lineáris kombinációjuk $\mathbf{0}$, azaz

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0;$$

2. **lineárisan összefüggők** (jelben $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \in \text{LÖF}$), ha nem lineárisan függetlenek, azaz

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}, \ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k| > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Megjegyzések.

1. A lineárisan független vektorok között nem lehet ott a $\mathbf{0}$, nem lehetnek közöttük azonos vektorok, illetve a vektorok között semelyik nem lehet valamelyik más vektor skalárszorosa.
2. Legyen $d \in \{2; 3\}$. Ekkor
   - két, egy egyenesbe eső vektor lineárisan összefüggő;
   - két, nem egy egyenesbe eső vektor lineárisan független;
   - három, egy síkba eső vektor lineárisan összefüggő;
   - három, nem egy síkba eső vektor lineárisan független.
   - a vektorok koordinátáiból képzett $d \times d$ mátrixot képezve elmondható, hogy a vektorok pontosan akkor függetlenek, ha az előbbi mátrix determinánsa zérustól különböző.
3. Az $\{\mathbf{u}\}$ vektorrendszer pontosan akkor független, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Példa. Az

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d \in \mathbb{K}^d$$

kanonikus egységvektorok lineárisan függetlenek, ui. ha valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{K}$ skalárokra

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \\ \alpha_d \end{bmatrix} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_d\mathbf{e}_d = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_d = 0. \quad \blacksquare$$

Tételek vektorrendszerekről.

1. tétel (az egyértelmű előállításról). Legyen V vektortér, $k \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ lineárisan független vektorrendszer. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{v}_i \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_i = \beta_i \quad (i \in \{1, \ldots, k\}).$$

Biz. Mivel

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{v}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad V \ni \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) \mathbf{v}_i,$$

ezért az $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ vektorok lineáris függetlensége következtében bármely $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén $\alpha_i - \beta_i = 0$, azaz $\alpha_i = \beta_i$. ■

2. tétel (összefüggő rendszer szűkítése). Legyen $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ lineárisan összefüggő vektorrendszer. Ekkor

$$\exists\, i \in \{1, \ldots, k\}: \qquad \mathcal{A} := \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) =: \mathcal{B},$$

azaz összefüggő rendszerből elhagyható valamely vektor úgy, hogy a generált altér nem változik.
Biz. Azt kell belátnunk, hogy fennáll az $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ egyenlőség. Mivel

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \quad \wedge \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}),$$

ezért két lépésben bizonyítunk.

1. lépés. Világos, hogy $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, hiszen

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

2. lépés. Mivel

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k) = \mathcal{A},$$

ezért az $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ tartalmazáshoz csak azt kell belátni, hogy

$$\mathbf{v}_i \in \mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

teljesül. Az $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorrendszer összefüggősége miatt alkalmas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, a

$$|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0$$

feltételnek eleget tévő skalárokra

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \in V.$$

Ha i olyan index, amelyre $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\mathbf{v}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right) \mathbf{v}_j, \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{v}_i \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

3. tétel (összefüggő rendszerré bővítés). Ha $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ vektorrendszer, valamint $\mathbf{v} \in V$, akkor

$$\mathbf{v} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}) \text{ lineárisan összefüggő.}$$

Biz.
Mivel $\mathbf{v} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ezért alkalmas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ skalárok esetén

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k, \qquad \text{és így} \qquad \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k + (-1)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Mivel $(-1) \neq 0$, azért az $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v} \in V$ rendszer összefüggő. $\blacksquare$
Megjegyezzük, hogy a kontrapozíció elvét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} \notin \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \qquad \Longleftarrow \qquad (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}) \text{ lineárisan független.}$$

4. tétel (független rendszer szűkítése). Legalább két elemű ineárisan független rendszerből bármely vektort elhagyva, a visszamaradó rendszer nem ugynazt az alteret generálja, mint az eredeti rendszer, azaz ha $2 \leq k \in \mathbb{N}$ és a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v} \in V$ rendszer lineárisan független, akkor

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \qquad \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots \mathbf{v}_k\} \neq \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Biz. Az előző állítás triviális következménye.

5. tétel (független rendszer bővítése). Ha a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ vektorrendszer lineárisan független, valamint $\mathbf{v} \in V$, akkor igaz a

$$\mathbf{v} \notin \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}) \text{ lineárisan független}$$

implikáció.

Biz. Tegyük fel, hogy valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$(*) \qquad \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k + \alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ekkor

- $\alpha = 0$, hiszen ellenkező esetben $\mathbf{v}$ kifejezhető:

  $$(**) \qquad \mathbf{v} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha}\mathbf{v}_k.$$

  Következésképpen $\mathbf{v} \in \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, ami ellentmond a kiinduló feltételnek.

- Ha $(**)$-ot $(*)$-ba helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

  $$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

  ahonnan

  $$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$$

  következik, ennéfogva a $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$ rendszer lineárisan független. ■ **Megjegyezzük**, hogy ha a $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ rendszer lineárisan független és a a $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$ rendszer pedig lineárisan összefüggő, akkor $\mathbf{v} \in \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

Feladat.

1. Döntsük el az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek-e vagy összefüggők!

   (a) $\mathbf{u} := (1, 2, 2, -1)$; $\quad \mathbf{v} := (4, 3, 9, -4)$; $\quad \mathbf{w} := (5, 8, 9, -5)$.

   (b) $\mathbf{u} := (1, 2, 3, 1)$; $\quad \mathbf{v} := (2, 2, 1, 3)$; $\quad \mathbf{w} := (-1, 2, 7, -3)$.

2. Döntsük el, hogy a

   $$\mathbf{u} := (1, 2, 3, 2), \qquad \mathbf{v} := (2, 2, 1, 3), \qquad \mathbf{w} := (-1, 2, 7, -3)$$

   vektorok lineárisan függetlenek-e vagy összefüggők az $\mathbb{R}^4$ térben! Elhagyható-e valamelyik vektor a $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ vektorrendszerből úgy, hogy a generált altér ne változzék? Ha igen, adjunk meg ilyen vektort!

3. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^3$-beli $\mathbf{u} := (1, -2, 1)$ és $\mathbf{v} := (2, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek, majd bővítsük az $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ rendszert olyan $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorral, hogy a kibővített rendszer

   (a) lineárisan összefüggő legyen;

(b) lineárisan független legyen!

Útm.

1. (a) Mivel

$$\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}4\\3\\9\\-4\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}5\\8\\9\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+4\beta+5\gamma\\2\alpha+3\beta+8\gamma\\\alpha+2\beta-\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&5&0\\2&3&8&0\\2&9&9&0\\-1&-4&-5&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&5&0\\0&-5&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&5&0\\0&0&-7&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

Ez azt jelenti, hogy $-7\gamma=0$, azaz $\gamma=0$, következésképpen $\beta=0$ és $\alpha=0$. Az $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ vektorrendszer tehát lineárisan független.

(b) Mivel

$$\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\2\\1\\3\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}-1\\2\\7\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+2\beta-\gamma\\2\alpha+2\beta+2\gamma\\\alpha+2\beta-\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\2&2&2&0\\3&1&7&0\\1&3&-3&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&-2&4&0\\0&-5&10&0\\0&1&-2&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&-2&0\end{array}\right].$$

Ez azt jelenti, hogy pl. az

$$\alpha:=3,\qquad\beta:=-2,\qquad\gamma:=-1$$

megoldás. Következésképpen az $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ vektorrendszer lineáreisan összefüggő.

2. Bármelyik vektor elhagyásával ugyanazt a generált alteret kapjuk, hiszen a fenti vizsgálatból következő

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

összefüggőségi relációban egyik együttható sem zérus.

3. Mivel

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta \\ -2\alpha + \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Következésképpen $\beta = 0$ és így $\alpha = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektorrendszer lineáreisan független $\mathbb{R}^3$-ben. Így olyan $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektort keresünk, amelyre

(a) $\mathbf{w} \in \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ teljesül. Ilyen pl.

$$\mathbf{w} := \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{w} \notin \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ teljesül. Mivel

$$\mathbf{w} := \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

0.8. $\boxed{\text{8. oktatási hét}}$

Definíció. Legyen V vektortér, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Azt mondjuk, hogy az $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ vektorrendszer **(Hamel-)bázis** V-ben, illetve V dimenziója k ($\dim(V) = k$), ha

(i) $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ **lineárisan független**, azaz

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0;$$

(ii) $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ **generátorrendszer**, azaz tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ vektor esetén van olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, hogy

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Példák.

1. Az $\mathbb{R}^2$ vektortérben bármely két, nem-kollineáris vektor bázist alkot, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
2. Az $\mathbb{R}^3$ vektortérben bármely három, nem-komplanáris vektor bázist alkot, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
3. A $\mathbb{K}^d$ vektorban bázis alkotnak az

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{e}_d := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   kanonikus egységvektorok, $\dim(\mathbb{K}^d) = d$.

4. A tér $\mathbf{0}$ nullvektora esetén a $\{\mathbf{0}\}$ vektortérben (**zéró-vektortér**) nincsen bázis, hiszen ebben a vektortérben nincsen lineárisan független rendszer.

Feladatok.

1. Az $\mathbb{R}^4$-beli

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} := \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektorok esetében adjuk meg a

$$\mathrm{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$$

altér egy bázisát!

2. Legyen

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 := (2, 3, -2, 7), \quad &&\mathbf{v}_2 := (0, 1, 0, 1), \quad &&\mathbf{v}_3 := (1, 2, -1, 0), \\ &\mathbf{v}_4 := (-1, -5, 2, 0), \quad &&\mathbf{v}_5 := (3, -1, 1, 2). \end{aligned}$$

Döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben!

(a) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$; (b) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$; (c) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.

Útm.

1. Vizsgáljuk meg először, hogy a $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ vektorrendszer összefüggő-e vagy független-e! Mivel

$$\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w}+\delta\mathbf{z} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + 2\beta - \gamma - \delta \\ \beta + 4\gamma + \delta \\ -2\alpha - \beta + 2\gamma + \delta \\ 4\alpha + 3\beta - \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Látható, hogy két paraméter szavadon választható:

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \qquad \beta = -\alpha - \gamma, \qquad \delta = 2\beta - \gamma + 3\alpha.$$

Így pl. ha

$$\alpha := 1, \qquad \gamma := -2, \qquad \text{akkor} \qquad \beta := 1, \qquad , \qquad \delta := 7$$

akkor

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} + \delta\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Tehát

$$\mathbf{z} \in \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

így a négy vektorból bármelyik elhagyható:

$$\operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}).$$

Az altér dimenziója tehát 3.

2. (a) Mivel $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ és $2 < 4$, ezért $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ nem alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben.

   (b) Mivel $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ és $5 > 4$, ezért $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$ nem alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben.

   (c) Mivel $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, ezért $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ pontosan akkor alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben, ha lineárisan független. Világos, hogy

$$\begin{aligned}\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - 5\alpha_4 \\ -2\alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 14 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

Következésképpen $\alpha_1 = 0$ és így $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$, azaz a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ vektorrendszer független $\mathbb{R}^4$-ben, következésképpen bázist alkot $\mathbb{R}^4$-ben. ■

Definíció. Legyen V vektortér, $k \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. A $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ vektorrendszer által generált altér dimenzióját a vektorrendszer **rang**jának nevezzük:

$$\operatorname{rang}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) := \dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

Megjegyzések.

1. $0 \leq \operatorname{rang}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \leq k$;
2. A vektorrendszer rangja megegyezik a vektorrendszerbeli lineárisan független vektorok maximális számával, következésképpen

$$\operatorname{rang}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = k \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \in LF,$$

   ill.

$$\operatorname{rang}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{v}_1 = \ldots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

3. Adott $M \in \mathbb{K}^{p \times q}$ mátrix esetén

$$0 \leq \dim \mathcal{S}(M) \leq p \qquad \text{és} \qquad 0 \leq \dim \mathcal{O}(M) \leq q,$$

   sőt

$$\dim \mathcal{S}(M) = \dim \mathcal{O}(M) =: \operatorname{rang}(M).$$

   Az M mátrix rangja tehát nem más, mint lineárisan független sorvektorainak maximális száma (M sorrangja), vagy ami ugyanaz: lineárisan független oszlopvektorainak maximális száma (M oszloprangja.

Állítások. Legyen $M \in \mathbb{K}^{p \times q}$. Ekkor

1. $0 \leq \operatorname{rang}(M) \leq \min\{p, q\}$;
2. $\operatorname{rang}(M) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M = O$;
3. $\operatorname{rang}(M) = p \quad \Longleftrightarrow \quad M$ sorvektorai lineárisan függetlenek;
4. $\operatorname{rang}(M) = q \quad \Longleftrightarrow \quad M$ sozlopvektorai lineárisan függetlenek;
5. Az $p = q =: d$ esetben

$$\operatorname{rang}(M) = d \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(M) \neq 0.$$

Feladat. Adott $M \in \mathbb{K}^{p\times q}$ mátrix, illetve $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^p$ vektor esetén határozzunk meg olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^q$ vektort, amelyre $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Definíció. A fenti feladatot (M együtthatómátrixú és $\mathbf{b}$ jobb oldalú) **lineáris egyenletrendszer**nek nevezzük. Az egyenletrendszer megoldáshalmazának nevezzük az

$$\mathcal{M} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{K}^q : \ M\mathbf{u} = \mathbf{b}\}$$

halmazt. Ha a feladat megoldható: $\mathcal{M} \neq \emptyset$, akkor a lineáris egyenletrendszert **konzisztens**nek, ellenkező esetben ($\mathcal{M} = \emptyset$ esetén) **inkonzisztens**nek nevezzük. Az egyenletrendszer **homogén**, ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ellenkező esetben **inhomogén**. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_h := \ker(M) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{K}^q : \ M\mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$

Megjegyzések.

1. Ha
$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \dots & m_{pq} \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix},$$
akkor
$$M\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \dots & m_{pq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix},$$
azaz
$$Mx = \mathbf{b} \qquad \longleftrightarrow \qquad \left.\begin{array}{ccccccc} m_{11}x_1 & + & \cdots & + & m_{1q}x_q & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ m_{p1}x_1 & + & \dots & + & m_{pq}x_q & = & b_p. \end{array}\right\}$$

2. A megoldhatóság feltétele:
$$M\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{konzisztens} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{b} \in \mathcal{O}(M) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rang}(M) = \text{rang}[M|\mathbf{b}].$$

3. Az egyenletrendszer $\mathcal{M}$ megoldáshalmaza nem más, mint a benne szereplő egyenletek megoldáshalmazainak a közös része.

4. Ha az egyenetrendszer tartalmaz legalább egy
$$0x_1 + \ldots + 0x_q = \alpha \quad (\alpha \neq 0)$$

alakú egyenletet, akkor $\mathcal{M} = \emptyset$.

5. Az egyenletrendszer $\mathcal{M}$ megoldáshalmaza nem változik, ha

   $\boxed{\mathrm{E1}}$ két egyenletet felcserélünk.

   $\boxed{\mathrm{E2}}$ valamelyik egyenletet nullától különböző számmal megszorozzuk.

   $\boxed{\mathrm{E3}}$ valamelyik egyenlethez egy másik számszorosát adjuk.

   $\boxed{\mathrm{E4}}$ az olyan egyenleteket, ahol valamennyi együttható és a jobb oldali konstans is 0, elhagyjuk.

6. Ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor $\mathcal{M} \neq \emptyset$, hiszen $M\mathbf{0} = \mathbf{0}$ következtén en $\mathbf{0} \in \mathcal{M}$.

Tétel. Adott $M \in \mathbb{K}^{p\times q}$ mátrix esetén az $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenlet $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmaza altér $\mathbb{K}^q$-ban.
Biz. Mint tudjuk: $\mathcal{M}_h \neq \emptyset$. Legyen

$$\alpha \in \mathbb{K} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}_h := \ker(M) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{K}^q : \ M\mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$

Ekkor

- $M\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $M\mathbf{b} = \mathbf{0}$, így
$$M(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = M\mathbf{a} + M\mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$
  ahonnan $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{M}_h$ következik.
- $M\mathbf{a} = \mathbf{0}$, így
$$M(\alpha\mathbf{a}) = \alpha M\mathbf{a} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0},$$
  ahonnan $\alpha\mathbf{a} \in \mathcal{M}_h$ következik. ■

Megjegyzés. Legyen $O \neq M \in \mathbb{K}^{p\times q}$, $r := \mathrm{rang}(M)(\geq 1)$, ill. $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^p$. Mivel M oszlopvektori generátorrendszert alkotnak $\mathcal{O}(M)$-ben, ezért M oszlopvektorai közül kiválasztható r darab $\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_r$ vektor, ami bázist alkot $\mathcal{O}(M)$-ben. Ha $\mathcal{M} \neq \emptyset$, azaz $\mathbf{b} \in \mathcal{O}(M)$, akkor alkalmas $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ skalárokkal

$$\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{o}_1 + \ldots + \alpha_r\mathbf{o}_r.$$

Ha

- $r = q$, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van:

$$x_1 = \alpha_1, \ldots, x_q = \alpha_q;$$

- $1 \leq r \leq q$, akkor legyen az $\mathbf{o}_{r+1}, \ldots, \mathbf{o}_q \in \mathcal{O}(M)$ oszlopvektorok egyértelmű előállítása az $\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_r$ bázisban:
$$\mathbf{o}_l = \sum_{k=1}^{r} d_{kl}\mathbf{o}_k \qquad (l \in \{r+1, \ldots, q\}).$$
Ekkor az egyenletrendszer összes megoldása:
$$x_k = \alpha_k - \sum_{l=r+1}^{q} d_{kl}x_l \quad (k \in \{1, \ldots, r\}, \qquad x_{r+1}, \ldots, x_q,$$
ahol $x_{r+1}, \ldots, x_q \in \mathbb{K}$ tetszőlegesek. Ebben az esetben az $x_{r+1}, \ldots, x_q$ ismeretleneket **szabad simeretlen**eknek, az $x_1, \ldots, x_r$ ismeretleneket pedig **kötött ismeretl**eneknek nevezzük.

Az az $n - r$ számot az egyenletrendszer **szabadsági fok**ának nevezzük. Ha

- $r = q$, akkor a rendszer szabadsági foka zérus, amit úgy is mondunk, hogy nincsen szabad ismeretlen, azaz minden ismeretlen kötött, hiszen ilyan kor a megoldás egyértelmű;
- $r < q$, akkor azt mondjuk, hogy végtelen sok megoldás van $n - r$ szabad ismeretlennel.

Tétel (a megoldáshalmaz szerkezete).

1. Az $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmaza $(n - r)$-dimenziós altér $\mathbb{K}^q$-ban.
2. Ha az $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor $\mathcal{M}$ megoldáshalmaza az $\mathcal{M}_h$ altérnek egy az inhomogén egyenlet egy $\mathbf{u}^*$ megoldásával való eltolása, azaz, ha $\mathbf{u}^* \in \mathcal{M}$, akkor
$$\mathcal{M} = \mathbf{u}^* + \mathcal{M}_h := \{\mathbf{u}^* + \mathbf{u} \in \mathbb{K}^q : \ \mathbf{u} \in \mathcal{M}_h\}.$$

Megjegyzések.

1. Ha $r = q$, akkor
$$\mathcal{M}_h = \{\mathbf{0}\}, \qquad \dim \mathcal{M}_h = 0, \qquad \mathcal{M} = \{\mathbf{u}^*\}.$$
2. Mivel
$$\ker(M) = \mathcal{M}_h, \qquad \dim \mathcal{M}_h = q - r, \qquad \dim \mathcal{O}(M) = r,$$
ezért
$$\boxed{\dim \ker(M) + \dim \mathcal{O}(M) = q}$$

Feladat. Az alábbi egyenletrendszerek esetében

1. írjuk fel az egyenletrendszert mátrixos alakban;
2. vizsgáljuk az egyenletrendszer konzisztenciáját; ha konzisztens írjuk fel $\mathcal{M}$ megoldáshalmazát;
3. határozzuk meg az együtthatómátrix rangját;
4. írjuk fel az egyenlketrendszerhez tartozó $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmazát, illetve annak egy bázisát!

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 &=& -5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &=& 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &=& 7; \end{array}\right\}$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 &=& 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &=& 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &=& 8, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &=& 6; \end{array}\right\}$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &=& -1, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 &=& 2, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &=& 1. \end{array}\right\}$

Útm.

1. Az egyenletrendszer $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakú, amelynek kibővített együtthatómátrixa:

$$[M|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

Így
$$\mathrm{rang}(M) = 3 = \mathrm{rang}([M|\mathbf{b}]),$$
következésképpen az egyenlet megoldható. Mivel $3 - 3 = 0$, ezért a megoldás egyértelmű:
$$\mathcal{M} = \{(-1, 4, 3)\}, \quad \text{továbbá} \quad \mathcal{M}_h = \ker(M) = \{(0, 0, 0)\}.$$

2. Az egyenletrendszer $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakú, amelynek kibővített együtthatómátrixa:

$$[M|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & -5 & -4 & 1 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right]$$

Így

$$\mathrm{rang}(M) = 3 = \mathrm{rang}([M|\mathbf{b}]),$$

következésképpen az egyenlet megoldható. Az így kapott – az eredetivel ekvivalens, azaz egyenlő megoldáshalmazú – egyenletrendszer tehát a következő:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 & = & 8, \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 & = & 16, \\ 3x_3 - x_5 & = & 10, \end{array} \right\}$$

ahonnan $x_5 = 3x_3 - 10$ következik. Ezt a második, illetve az első egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$16 = x_2+4x_3+2x_4-x_5 = x_2+4x_3+2x_4-(3x_3-10) = x_2+x_3+2x_4+10, \quad \text{azaz} \quad x_3 = 6 - x_2 - 2x_4,$$

ill.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 + 2(6 - x_2 - 2x_4) + x_4 - (3x_3 - 10) - 8 = x_2 + 12 - 2x_2 - 4x_4 + x_4 - 3x_3 + 10 - 8 = \\ &= -x_2 - 3x_4 + 14 - 3x_3 = -x_2 - 3x_4 + 14 - 3(6 - x_2 - 2x_4) = 2x_2 + 3x_4 - 4, \end{aligned}$$

ahonnan

$$x_5 = 3x_3 - 10 = 3(6 - x_2 - 2x_4) - 10 = 18 - 3x_2 + 6x_4 - 10 = 8 - 3x_2 + 6x_4.$$

Tehát az $x_2 =: u \in \mathbb{R}$, ill. $x_4 =: v \in \mathbb{R}$ **szabad ismeretlen**ekkel a megoldás az alábbi alakú:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2u+3v-4 \\ u \\ 6-u-2v \\ v \\ 2-3u+6v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

3. Az egyenletrendszer $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakú, amelynek kibővített együtthatómátrixa:

$$[M|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & -15 & 21 & -12 & -7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right].$$

Látható, hogy

$$\operatorname{rang}(M) = 2 \neq 3 = \operatorname{rang}([M|\mathbf{b}]).$$

Következésképpen az egyenletrendszer inkonzisztens. ■

0.9. $\boxed{\text{9. oktatási hét)}}$

Emlékeztető. Adott $M \in \mathbb{K}^{d\times d}$ (négyzetes) mátrix esetén az $r := \mathrm{rang}(M)$ rangra vonatkozóan két eset lehetséges:

1. eset: $r = d$. Ekkor M reguláris mátrix. Ennélfogva bármely $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^d$ vektor esetén az $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

2. eset: $r < d$. Ebben az esetben A szinguláris mátrix. Az $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer tehát pontosan akkor konzisztens, ill. inkonzisztens, ha

$$\mathbf{b} \in \mathcal{O}(M), \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{b} \notin \mathcal{O}(M),$$

azaz ha

$$\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}[M|\mathbf{b}], \qquad \text{ill.} \qquad \mathrm{rang}(M) \neq \mathrm{rang}[M|\mathbf{b}]$$

teljesül. Amennyiben $\mathbf{b} \in \mathcal{O}(M)$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, pontosabban az $\mathcal{M}$ megoldáshalmaz egy $n - r$ paraméteres vektorhalmaz ($n - r$ szabad ismeretlennel). ■

Tétel. Adott $M \in \mathbb{K}^{d\times d}$ (négyzetes) mátrix esetén

1. $\mathrm{rang}(M) = d \quad \Longleftrightarrow \quad M$ reguláris;
2. $\mathrm{rang}(M) < d \quad \Longleftrightarrow \quad M$ szinguláris.

Biz. Világos, hogy az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d \in \mathbb{K}^d$ kanonikus bázisvektorokkal a $\mathbb{K}^{d\times d}$-beli E_d egységmátrixra

$$E_d = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d]$$

teljesül. Így, ha valamely $B := [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d] \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix pontosan akkor inverze M-nak, ha

$$MB = E_d = BM,$$

ahonnan

$$M\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, \qquad \ldots \qquad M\mathbf{b}_d = \mathbf{e}_d$$

következik. Ennélfogva

$r = d$ **esetén** a fenti egyenletrendszerek mindegyike megoldható, következésképpen M reguláris mátrix.

$r < d$ **esetén** az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ kanonikus bázisvektorok közül nem mind lehet benne az M mátrix $\mathcal{O}(M)$ oszlopterében, így a fenti egyenletrendszer közül legalább az egyik inkonzisztens. Ez pedig azt jelenti, hogy M szinguláris mátrix. ■

Megjegyzés. Adott $M \in \mathbb{K}^{d\times d}$ (négyzetes) mátrix esetén egyenértékűek az alábbi állítások.

1. M reguláris, azaz $\exists\, M^{-1}$.
2. $\mathrm{rang}(M) = d$.
3. $\det(M) \neq 0$.
4. M oszlopai lineárisan függetlenek, ill. ha $M = [\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_d]$, akkor $\mathrm{span}(\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_d) = \mathbb{K}^d$.
5. M sorai lineárisan függetlenek, ill. ha $M = [\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_d]^T$, akkor $\mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_d) = \mathbb{K}^d$.

Tétel. Ha

$$m_{11} \cdot \ldots \cdot m_{dd} \neq 0,$$

akkor az

$$M := \mathrm{diag}\{m_{11}, \ldots, m_{dd}\}$$

mátrix reguláris, és inverzére

$$M^{-1} = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{m_{11}}, \ldots, \frac{1}{m_{dd}}\right\}$$

teljesül.

Biz.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & m_{dd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{22}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{m_{dd}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = E_d. \quad ■$$

Tétel. Ha $M, N \in \mathbb{R}^{d\times d}$ reguláris mátrix, akkor

1. M^{-1} reguláris és $\left(M^{-1}\right)^{-1} = M$;
2. MN reguláris és $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$;
3. M^T reguláris és $\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T$.

Biz.

1. $MM^{-1} = E_d = M^{-1}M$.

2. A mátrixok szorzásának asszociatív tulajdonságát felhasználva kapjuk, hogy

$$N^{-1}M^{-1}(MN) = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}E_nN = N^{-1}N = E_d$$

ill.

$$(MN)N^{-1}M^{-1} = M(NN^{-1})M^{-1} = ME_dM^{-1} = MM^{-1} = E_d.$$

3. Az

$$MM^{-1} = M^{-1}M = E_n$$

egyenlőséget transzponálva

$$(MM^{-1})^T = (M^{-1}M)^T = E_d^T = E_d,$$

adódik, ahonnan

$$\left(M^{-1}\right)^T M^T = M^T \left(M^{-1}\right)^T = E_d. \quad \blacksquare$$

Ha tehát alkalmas $k \in \mathbb{N}$ esetén az $M_1, \ldots, M_k \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrixok regulárisak, akkor

$$(M_1 \cdot M_2 \ldots \cdot M_{k-1} \cdot M_k)^{-1} = M_k^{-1} \cdot M_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}.$$

Megjegyzés. Valamely reguláris M mátrix inverzének kiszámítására a gyakorlatban – nagy műveletigénye miatt – nem az

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \widetilde{M} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \left[(-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})\right]^T$$

képletet (vö. 6. oktatási hét) használjuk. M inverzét úgy is kiszámíthatjuk, hogy elemi sorátalakításokkal M-et az E_d egységmátrixszá transzformáljuk (ha ez nem lehetséges, akkor M szinguláris), és ezekkel párhuzamosan az egységmátrixon elvégezzük ugyanazokat a sorátalakításokat, amely így az M mátrix inverzébe fog transzformálódni. Mivel minden elemi sorátalakítás megfelel egy elemi mátrixszal balról való szorzásnak, ezért ha az alkalmazott átalakításokat rendre a T_1, T_2, ..., T_k mátrixokkal való szorzás jelöli, akkor a

$$T_k \cdot T_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot M = E_d$$

szorzatból kiindulva

$$M^{-1} = T_k \cdot T_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot E_d,$$

vagyis M^{-1} megkapható az E_d-en végzett elemi sorátalakításokkal.

Példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix (vö. 6. oktatási hét) esetében

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] = [E_3|M^{-1}].$$

Feladatok.

1. Vizsgáljuk az

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 & = & -5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = & 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 7 \end{array} \right\}$$

   egyenletrendszert megoldhatóság szempontjából! Ha megoldható, akkor oldjuk is meg!

2. Számítsuk ki az M mátrix inverzét a Gauß-Jordan-módszer felhasználásával!

$$\text{(a) } M := \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b) } M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

3. Döntsük el, hogy reguláris-e vagy szinguláris-e az

$$M := \begin{bmatrix} 5 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

   mátrix!

4. A

$$\text{(a) } \mathbf{b}_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b) } \mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektorok, ill a fenti M mátrix esetében döntsük el, hogy konzisztens-e az $M\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ $(i \in \{1;2\})$ egyenletrendszer!

Útm.

1. Az egyenletrendszer $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakú, amelynek együtthatómátrixa, ill. jobb oldala:

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\text{rang}(M) = 3 = \text{rang}([M|\mathbf{b}])$$

(vö. 8. oktatási hét), ezért az egyenletrendszer megoldható, megoldása az $\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b}$ vektor. Mivel

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (0 - 3) = -6,$$

ill.

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -8 & 6 & 2 \\ 13 & -12 & -4 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 13 \\ 0 & 6 & -12 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \widetilde{M}\mathbf{b} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -8 & 13 \\ 0 & 6 & -12 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -24 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. 2/a ás 2/b)

3. Az M mátrix szinguláris, ui. $\det(M) =$

$$= -\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 & -2 \\ 0 & -10 & 15 & 5 \\ 0 & -24 & 36 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = -5\cdot 12\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= -60\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

4. Mivel

$$[M|\mathbf{b}_1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -7 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -10 & 15 & 5 & 5 \\ 0 & -24 & 36 & 12 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Következésképpen $\operatorname{rang}(M) = 2 = \operatorname{rang}[M|\mathbf{b}_1]$, így az egyenletrendszer konzisztens, sőt $4 = 2 = 2$ miatt a megoldáshalmaza egy kétparaméteres vektorhalmaz.

$$[M|\mathbf{b}_2] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -7 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 15 & 5 & 5 \\ 0 & -24 & 36 & 12 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -24 & 36 & 12 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Következésképpen $\operatorname{rang}(M) = 2 \neq 3 = \operatorname{rang}[M|\mathbf{b}_1]$, így az egyenletrendszer inkonzisztens.

Feladat. Mi az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa? Mennyi az együtthatómátrix rangja? Oldjuk meg az egyenletrendszert! Adjuk meg az egyenletrendszerhez tartozó homogén rendszer megoldáshalmazának egy bázisát és dimenzióját!

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & = & -1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Útm. Ha

$$M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

akkor az egyenletrendszer együtthatómátrixa, ill. kibővített együtthatómátrixa: M, ill. $[M|\mathbf{b}]$. Az egyenletrenszer pontosan akkor oldható meg, ha

$$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}[M|\mathbf{b}]$$

teljesül. Az egyenletrendszer együtthatómátrixának, ill. kibővített együtthatómátrixának rangja pl. a következő módon határozható meg:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Mivel

$$\operatorname{rang}(M) = 2 \neq 3 = \operatorname{rang}[M|\mathbf{b}],$$

ezért az egyenletrenszer inkonzisztens. ■

Feladat. Mi az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa? Mennyi az együtthatómátrix rangja? Oldjuk meg az egyenletrendszert! Adjuk meg az egyenletrendszerhez tartozó homogén rendszer megoldáshalmazának egy bázisát és dimenzióját!

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right\}$$

Útm. Ha

$$M := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

akkor az egyenletrendszer együtthatómátrixa, ill. kibővített együtthatómátrixa: M, ill. $[M|\mathbf{b}]$. Az egyenletrenszer pontosan akkor oldható meg, ha

$$\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}[M|\mathbf{b}]$$

teljesül. Az egyenletrendszer együtthatómátrixának, ill. kibővített együtthatómátrixának rangja pl. a következő módon határozható meg:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -16 & 2 & -12 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Mivel $\mathrm{rang}(M) = 2 = \mathrm{rang}[M|\mathbf{b}]$, ezért az egyenletrenszer konzisztens. Lévén, hogy $4 - 2 = 2$, ezért a megoldáshalmaz kétparaméteres $\mathbb{R}^4$-beli halmaz. Ha pl. $x_1 =: u \in \mathbb{R}$ és $x_3 =: v \in \mathbb{R}$, akkor

$$x_4 = -6 + 5x_1 + 8x_3 = -6 + 5u + 8v, \qquad \text{ill.} \qquad x_2 = 5 - 4x_1 - 5x_3 = 5 - 4u - 5v.$$

Így az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} u \\ 5 - 4u - 5v \\ v \\ -6 + 5u + 8v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mivel

$$\begin{bmatrix} u \\ 5-4u-5v \\ v \\ -6+5u+8v \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad (u, v \in \mathbb{R}),$$

ezért a homogén rendszer megoldáshalmaza $\mathbb{R}^4$-nek kétdimenziós altere, a homogén rendszer megoldáshalmazaának egy bázisa:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Mátrixok jellemzésének egyik igen hatékony eszköze olyan vektoroknak a meghatározása, amelyekre a mátrrixot ráuszítva önmagukkal párhuzamos vektorokat kapunk. Mivel „bármely” M mátrix, ill. bármely $\lambda \in \mathbb{C}$ szám esetén

$$M\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0},$$

ezért $\mathbf{0}$-t kizárjuk a vizsgálódásainkból.

Adott $M = \in \mathbb{K}^{d \times d}$ mátrix esetén az alábbi feladatot tűzzük ki:
HATÁROZZUNK MEG OLYAN $\lambda \in \mathbb{K}$ SZÁMOT ÉS $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{K}^d$ VEKTORT, AMELYRE

$$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \tag{2}$$

TELJESÜL!

Definíció. A fenti feladatot **sajátérték-feladat**nak vagy **saját(érték)-egyenlet**nek nevezzük és az

$$M\mathbf{x} = z\mathbf{x} \tag{3}$$

szimbólummal jelöljük. Ezzel kapcsolatos a

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $M = \in \mathbb{K}^{d \times d}$ mátrixnak a $\lambda \in \mathbb{C}$ szám **sajátérték**e, ha van olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{K}^d$ vektor, hogy

$$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \tag{4}$$

és az $\mathbf{u}$ vektort az M mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektor**ának nevezzük. Az M sajátértékeinek halmazát az M **spektrum**ának nevezzük és $\sigma(M)$-mel jelöljük.

A (3) sajátértékfeladat akkor tekinthető megoldottnak, ha meghatároztuk az M mátrix sajátértékeit, valamint a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

Példák.

1. Az
$$M := \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$
mátrixnak az 1 szám sajátértéke, és az $\mathbf{u} := (2, 1)$ vektor az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor, hiszen $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ és
$$M\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

2. Az
$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
mátrixnak a 2 szám sajátértéke, és az $\mathbf{u} := (1, 2, -1)$ vektor a 2 sajátértékhez tartozó sajátvektor, hiszen
$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad M\mathbf{u}^\top = 2\mathbf{u}.$$

A (3) sajátértékfeladat egyenértékű valamely homogén lineáris egyenletrendszer triviálistól (azaz $\mathbf{0}$-tól) különböző megoldásának megkeresésével, hiszen

$$M\mathbf{x} = z\mathbf{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z\mathbf{x} - M\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (zE_d - M)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Tudjuk, hogy valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén ennek a

$$(\lambda E_d - M)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha

$$\text{rang}(\lambda E_d - M) = \text{rang}(M - \lambda E_d) < d,$$

azaz a

$$p_M(z) := \det(zE_d - M) = (-1)^d \cdot \det(M - zE_d) \qquad (z \in \mathbb{K}) \tag{5}$$

függvényre $p_M(\lambda) = 0$ teljesül:

$$\lambda \in \sigma(M) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_M(\lambda) = 0.$$

Példák. Az

1. $M := \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix esetén a p_M függény a következő:

$$p_M(z) := (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2-z & -2 \\ 2 & -3-z \end{bmatrix} = (2-z)(-3-z)+4 = z^2+z-2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

így az 1, ill. -2 számra

$$p_M(1) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(-2) = 0.$$

2. $M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix esetén a p_M függény a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} -z & 1 & 0 \\ 1 & 1-z & -1 \\ 0 & -1 & -z \end{bmatrix} = \\ &= z \cdot \{(1-z)\cdot(-z) - 1\} + 1 \cdot \{-z - 0\} + 0 = \\ &= z \cdot \left\{z^2 - z - 2\right\} = z(z+1)(z-2) \qquad (z \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

így a 0, -1, ill. a 2 számra

$$p_M(0) = 0, \qquad p_M(-1) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(2) = 0.$$

Példa. Egy fenti példa esetén pedig a p_M függény a következő:

$$p_M(z) := \det(zE_d - \alpha E_d) = \det((z-\alpha)E_d) = (z-\alpha)^d \det(E_d) = (z-\alpha)^d \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

így az α számra $p_M(\alpha) = 0$.

Példa. Ha

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

akkor a p_M függény a következő:

$$\begin{aligned}
p_M(z) &:= (z-1)\cdot\{(1-z)\cdot(-z)-1\}-1\cdot\{1\cdot(-z)+2\}-1\cdot\{-1-2(1-z)\}= \\
&= (z-1)\left\{z^2-z-1\right\}+1-z=(z-1)\left\{z^2-z-2\right\}= \\
&= (z-1)(z+1)(z-2) \qquad (z\in\mathbb{C}),
\end{aligned}$$

így a -1, 1, ill. a 2 számra

$$p_M(-1)=0, \qquad p_M(1)=0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(2)=0.$$

Feladat. Határozzuk meg a p_M függvényt az

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében!

Útm.

$$\begin{aligned}
p_M(z) &:= (-1)^4\cdot\det\begin{bmatrix} 2-z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1-z & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1-z \end{bmatrix} = \\
&= (2-z)\cdot\det\begin{bmatrix} -z & -1 & 1 \\ 2 & 1-z & 0 \\ 2 & 2 & 1-z \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1-z & 0 \\ -1 & 2 & 1-z \end{bmatrix} = \\
&= (2-z)\left\{-z(1-z)^2+2(1-z)+2+2z\right\}-\{1-z+2+1-z\}= \\
&= (2-z)\left\{-z(1-z)^2+4\right\}-(4-2z)= \\
&= (2-z)\left\{-z+2z^2-z^3+4-2\right\}=(2-z)\left\{z^2(2-z)+2-z\right\}= \\
&= (2-z)^2(z^2+1)=(2-z)^2(z+\imath)(z-\imath) \quad (z\in\mathbb{C}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definíció. A fenti definícióbeli p_M függvényt, azaz a

$$p_M(z) := (-1)^d \cdot \det \begin{bmatrix} m_{11}-z & m_{12} & \dots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22}-z & \dots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{d1} & m_{d2} & \dots & m_{dd}-z \end{bmatrix} \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{6}$$

polinomot az M mátrix **karakterisztikus polinom**jának nevezzük. A p_M karakterisztikus polinom λ gyökének multiplicitását a λ sajátérték **algebrai mulitiplicitás**ának nevezzük, és erre az $a(\lambda)$ jelölést használjuk. Ha valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ szám nem gyöke a p_M karakterisztikus polinomnak, akkor legyen $a(\lambda) := 0$.

A (6)-beli determináns első oszlop szerinti kifejtését végiggondva látható, hogy a p_M polinom főegyütthatója 1, z^{d-1} tag együtthatója pedig

$$-(m_{11} + \dots + m_{dd}) = -\operatorname{Sp}(M).$$

A

$$p_M(0) = (-1)^d \det(M)$$

egyenlőségből pedig az adódik, hogy p_M konstans tagja $(-1)^d \det(M)$. Összefoglalva:

$$p_M(z) = z^d - \operatorname{Sp}(M) z^{d-1} + \dots + (-1)^d \det(M) \qquad (z \in \mathbb{K}). \tag{7}$$

Tétel. Ha $M \in \mathbb{K}^{2\times 2}$, ill. $M \in \mathbb{K}^{3\times 3}$, akkor

$$\boxed{p_M(z) = z^2 - \operatorname{Sp}(M) z + \det(M) \qquad (z \in \mathbb{K}),} \tag{8}$$

ill. tetszőleges $z \in \mathbb{K}$ esetén

$$\boxed{p_M(z) = z^3 - \operatorname{Sp}(M) z^2 + \left\{\det(M_{(12)}) + \det(M_{(13)}) + \det(M_{(23)})\right\} z - \det(M).} \tag{9}$$

Megjegyezzük, hogy

1. a $d = 2$ esetben a karakterisztikus polinom a (8) formula ismeretében szinte ránézésre felírható (megspórolva nélmi időt, ill. elkerülve a számoláskor fellépő esetleges tévesztéseket).

2. a $d = 3$ esetben a karakterisztikus polinom a (8) formula ismeretében szinte ránézésre felírható (megspórolva nélmi időt, ill. elkerülve a számoláskor fellépő esetleges tévesztéseket):

   - a z^2-es tag együtthatójának (-1)-szeresét a mátrix főátlóban lévő elemeinek összeadásával kapjuk;
   - a konstans tag nem más, mint $-\det(M)$, ahol $\det(M)$ számítását gyorsan úgy érdemes végrehajtani, hogy egy eliminációs lépés után (2×2)-es mátrix determinánsának kiszámítására vezetjük

vissza;

- a lineáris tag együtthatója meg nem más, mint M assziciáltjának, azaz $\widetilde{M}$-nak a nyoma. Ehhez nem kell az egész $\widetilde{M}$-ot kiszámítanunk, ui. a

$$\mathrm{Sp}(\widetilde{M}) = \begin{array}{l} \det(M_{(12)}) + \det(M_{(13)}) + \det(M_{(23)}) = \\ = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \end{array}$$

összeg kiszámítása a legegyszerűbben úgy történik, hogy M főátlójábann minden elemet összeszorzunk minden elemmel (egyszer) és ebből kivonjuk a főátlón kívüli egymással tükrös elemek szorzatának összegét.

Példa. A szilárdságtanban gyakran előforduló

$$S := \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

mátrix (**feszültségtenzor mátrixa**) esetében például a

$$p_S(z) := z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom együtthatóira

$$\begin{aligned} c_2 &= -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \\ c_1 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xz}^2, \\ c_0 &= -\det(S) \end{aligned}$$

teljesül.

Példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

(ún.) **telefonmátrix** esetében

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 6 & 7 & -6 \end{bmatrix} = 0,$$

így

$$p_M(z) = z^3 - 12z^2 - 18z = z\left(z - 6 + 3\sqrt{6}\right)\left(z - 6 - 3\sqrt{6}\right) \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0,$$

így

$$p_M(z) = z^3 - 12z^2 - 27z = z\left(z - 6 + 3\sqrt{7}\right)\left(z - 6 - 3\sqrt{7}\right) \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Tétel. Ha $M = [m_{ij}] \in \mathbb{K}^{d\times d}$ háromszögmátrix, azaz

$$m_{ij} = 0 \quad (i > j) \qquad \text{vagy} \qquad m_{ij} = 0 \quad (i < j),$$

akkor M sajátétékei: $m_{11}, \ldots, m_{dd}$.
Biz. Mivel M karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) := \det(zE_d - M) = (-1)^d \det(M - zE_d) = (-1)^d \prod_{k=1}^{d} (m_{kk} - z) \qquad (z \in \mathbb{K}),$$

ezért

$$\lambda \in \sigma(M) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_M(\lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, k \in \{1, \ldots, d\} : \ \lambda = m_{kk}. \quad \blacksquare$$

Tétel. Egy adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak.
Biz.
Ha valamely $d \in \mathbb{N}$ esetén $M \in \mathbb{K}^{d\times d}$ és $\lambda \in \sigma(M)$, akkor alkalmas $0 \neq u \in \mathbb{K}^d$ vektorral

$$M\mathbf{u} = \lambda u \qquad \Longleftrightarrow \qquad (M\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{vagy} \quad \lambda\mathbf{u} - M\mathbf{u} = 0),$$

azaz

$$(M - \lambda E_d)\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{vagy} \qquad (\lambda E_d - M)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

A sajátvektorok tehát a

$$W_\lambda := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d : \ M\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d : \ \lambda\mathbf{x} - M\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$$

halmaz – ún. **sajátaltér** – nullvektortól különböző elemei. Mivel

$$W_\lambda = \ker(M - \lambda E_d) = \ker(\lambda E_d - M),$$

ezért W_λ altér $\mathbb{K}^d$-ben. ■

Tétel. Ha $d \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{K}^{d\times d}$, és valamely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az M mátrix páronként különböző sajátértékei, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ sajátvektorok függetlenek.
Biz. Ha $k = 1$, akkor $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ miatt az állítás teljesül. Ha valamely $2 \leq k \in \{1, \ldots, d-1\}$ esetén az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$ vektorok lineárisan függetlenek és

$$(*) \qquad \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \mathbf{u}_l = 0,$$

akkor

$$0 = (\lambda_k E_d - M)\sum_{l=1}^{k} \alpha_l \mathbf{u}_l = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l(\lambda_k - \lambda_l)\mathbf{u}_l = \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l(\lambda_k - \lambda_l)\mathbf{u}_l.$$

Így az indukciós feltevésből

$$\alpha_l(\lambda_k - \lambda_l) = 0 \qquad (l \in \{1, \ldots, k-1\}),$$

azaz tetszőleges $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ esetén $\alpha_l = 0$ következik. Tehát $(*)$ az $\alpha_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségre redukálódik. Mivel $\mathbf{u}_k$ sajátvektor, ezért $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$, így $\alpha_k = 0$, azaz az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vektorok függetlenek. ■

Megjegyezzük, hogy

1. valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ szám pontosan akkor sajátértéke M-nek, ha a $W_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$ teljesül.

2. ha az $\mathbf{u}$ vektor az M mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora: $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, akkor bármely $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ esetén $\alpha\mathbf{u}$ is sajátvektora M-nak (a λ sajátértékkel), hiszen

$$M(\alpha\mathbf{u}) = \alpha M\mathbf{u} = \alpha(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\alpha\mathbf{u}).$$

Minden sajátértékhez tehát végtelen sok sajátvektor tartozik: $W_\lambda \backslash \{0\}$ végtelen halmaz, ami persze abból is látható, hogy

$$\dim W_\lambda = d - \text{rang}(M - \lambda E_d) = d - \text{rang}(\lambda E_d - M) \geq 1.$$

Ezért minden esetben **lineárisan független sajátvektorok**at keresünk.

3. a W_λ sajátaltér dimenzióját a λ sajátérték **geometriai multiplicitás**ának nevezzük: $g(\lambda) := \dim W_\lambda$. Az algebrai és a gemometriai multiplicitás kapcsolatára igaz a

$$\lambda \in \sigma(M) \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda) \leq d.$$

állítás.

4. Pontosan akkor van $\mathbb{K}^d$-ben az M sajátvektoraiból álló bázis (**sajátbázis**), ha a sajátértékek geometriai multiplicitásainak összege kiadja a mátrix rendjét:

$$\exists SB \subset \mathbb{K}^d \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{\lambda \in \sigma(M)} g(\lambda) = d$$

5. A sajátbázis létezésére vonatkozóan megfogalmazható az alábbi szükséges és elégséges feltétel:

$$\exists SB \subset \mathbb{K}^d \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\sum_{\lambda \in \sigma(M)} a(\lambda) = d \quad \wedge \quad \forall \lambda \in \sigma(M): \; g(\lambda) = a(\lambda) \right).$$

Feladat Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}, \qquad D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Útm Az A mátrix sajátértékei a

$$p_A(z) := z^2 - \text{Sp}(A)z + \det(A) = z^2 - 6z + 5 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

- A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

- a $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}).$$

A B mátrix sajátértékei a

$$p_B(z) := z^2 - \mathrm{Sp}(B)z + \det(B) = z^2 - 4z + 6 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}\imath$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}\imath$.

- A $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}\imath$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -2-\sqrt{2}\imath & -3 & 0 \\ 2 & 2-\sqrt{2}\imath & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\imath - \sqrt{2})\alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{C}),$$

- a $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}\imath$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -2+\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 2 & 2+\sqrt{2}\imath & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (-\sqrt{2} - \imath)\alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{C}).$$

A C mátrix sajátértékei a

$$p_C(z) := z^2 - \mathrm{Sp}(C)z + \det(C) = z^2 - 25z + 150 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 10$.

- A $\lambda_1 = 15$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

- a $\lambda_2 = 10$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}).$$

A D mátrix sajátértékei a

$$p_D(z) := z^3 - \mathrm{Sp}(D)z^3 + \mathrm{Sp}(\widetilde{D})z - \det(D) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei. Ha p_D-nek van egész gyöke, akkor az csak -6 osztója lehet. Könnyen észrevehető azonban az is, hogy a $\lambda := 1$ gyök. Így a Horner-módszert alkalmazva azt kapjuk, hogy

	1	-6	11	-6
1	$\boxed{1}$	$\boxed{-5}$	$\boxed{6}$	0

Következésképpen a

$$p_M(z) = (z-1)(z^2 - 5z + 6) = (z-1)(z-2)(z-3) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda := 1$, $\mu := 2$, $\nu := 3$.

- A $\lambda := 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

- a $\mu := 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -1\alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

- a $\nu := 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az M mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

1. $M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

2. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

3. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

4. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Útm. 1/a-1/d feladatok).

Tétel. Ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az M (nem feltétlenül különböző) sajátértékei, akkor

$$\mathrm{Sp}(M) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n, \qquad \text{ill.} \qquad \det(M) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$

azaz M nyoma éppen M sajátértékeinek összege, M determinánsa éppen M sajátértékeinek szorzata.

Biz. Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az M (nem feltétlenül különböző) sajátértékei, akkor az M karakterisztikus polinomjára

$$p_M(z) = (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

teljesül. Beszorzással látható, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$p_M(z) = z^n - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \cdot z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$

ezért (7) felhasználásával az igazolandó állítást kapjuk. ■

Tétel. Ha M négyzetes, reguláris mátrix, akkor M és M^{-1} sajátvektorai azonosak, sajátértékeik pedig egymás reciprokai.

Biz. Ha a $\lambda \in \mathbb{K}$ szám az M mátrixnak sajátéertéke: $\lambda \in \sigma(M)$, $\mathbf{u}$ pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ és $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Innen

$$M^{-1}(M\mathbf{u}) = M^{-1}(\lambda\mathbf{u}),$$

és ebből

$$\mathbf{u} = \lambda(M^{-1}\mathbf{u})$$

következik. $\lambda \neq 0$, hiszen ellenkező esetben $\det(M) = 0$ lenne, ezért oszthatunk vele:

$$M^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{u}.$$

Eszerint $\mathbf{u}$ sajátvektora M^{-1}-nek is, az $\dfrac{1}{\lambda}$ sajátértékkel. ■

0.10. 10. oktatási hét)

Definíció. Azt mondjuk, hogy $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$ **hasonló mátrixok** – jelben: $A \sim B$ –, ha van olyan $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ reguláris mátrix, hogy $B = T^{-1}AT$.

Definíció. Igazoljuk, hogy bármely $A, B, C \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix esetén igazak az alábbi állítások!

1. $A \sim A$;
2. $A \sim B \quad \Longrightarrow \quad B \sim A$;
3. $(A \sim B, B \sim C) \quad \Longrightarrow \quad A \sim C$.

Útm.

1. Ha $T := E_d$, akkor $T^{-1}AT = A$.
2. Ha $A \sim B$, akkor alkalmas $T \in \mathbb{K}^{d\times d}$ reguláris mátrix esetén $B = T^{-1}AT$, azaz
$$(T^{-1})^{-1}BT^{-1} = TBT^{-1} = A,$$
ahonnan $B \sim A$ következik.
3. Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor alkalmas $T, S \in \mathbb{K}^{d\times d}$ reguláris mátrixok esetén
$$B = T^{-1}AT, \qquad C = S^{-1}BS,$$
azaz
$$(TS)^{-1}A(TS) = S^{-1}(T^{-1}AT)S = S^{-1}BS = C,$$
ahonnan $A \sim C$ következik. ■

Tétel. Ha az $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrixok hasonlóak, akkor karakterisztikus polinomjai megyegyeznek.
Biz. Ha A hasonló B-hez, akkor alkalmas $T \in \mathbb{K}^{d\times d}$ reguláris mátrix esetén $B = T^{-1}AT$. Így tetszőleges $z \in \mathbb{K}$ esetén
$$1 = \det(E_d) = \det\left(T^{-1} \cdot T\right) = \det\left(T^{-1}\right) \cdot \det(T)$$
és így
$$\begin{aligned}\det(B - zE_d) &= \det\left(T^{-1}AT - zE_d\right) = \det\left(T^{-1}AT - zT^{-1}T\right) = \\ &= \det\left(T^{-1} \cdot (A - zE_d) \cdot T\right) = \det(T^{-1}) \cdot \det(A - zE_d) \cdot \det(T) = \\ &= \det(A - zE_d),\end{aligned}$$

azaz, ha p_A, ill. p_B jelöli az A, ill. a B mátrix karajkterisztikus polinomját, akkor bármely $z \in \mathbb{K}$ esetén

$$p_B(z) = \det(zE_d - B) = (-1)^d \det(B - zE_d) = (-1)^d \det(A - zE_d) = \det(zE_d - A) = p_A(z). \quad \blacksquare$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix **diagonalizálható** ($\mathbb{K}$-ra vonatkozóan), ha van olyan D diagonálmátrix, amelyhez M hasonló, azaz

$$\exists T \in \mathbb{K}^{d\times d},\ \det(T) \neq 0 : \quad D = T^{-1}MT \text{ diagonális.}$$

A T mátrixot **diagonalizáló mátrix**nak, a $D = T^{-1}MT$ diagonálmátrixot, pedig az M mátrix **diagonális alak**jának nevezzük.

Megjegyzés. Ha az M mátrix diagonalizálható, akkor diagonális alakjának főátlójában M sajátértékei állnak, továbbá mindegyik sajátérték annyiszor szerepel a főátlóban, amennyi annak algebrai multiplicitása.

Tétel. Valamely $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{K}^d$-ben van A sajátvektoraiból álló bázis.
Biz.

1. lépés. Ha A diagonalizálható, akkor alkalmas $T \in \mathbb{K}^{d\times d}$ reguláris mátrix esetén a $T^{-1}AT$ mátrix diagonális. Jelöljék $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{K}^d$ vektorok a T diagonalizáló mátrix oszlopait:

$$T =: [t_1, \ldots, t_d].$$

Ekkor a $t_1, \ldots, t_d$ vekotrrendszer az A sajátvektoraiból álló $\mathbb{K}^d$-beli bázis, ui.

- T invertálhatósága következtében lineárisan független, így maximálisan független rendszer, azaz bázis $\mathbb{K}^d$-ben;
- a $T^{-1}AT$ mátrix a következő alakú:

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}, \qquad \text{ahol} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \sigma(A),$$

továbbá az iménti egyenlőséget balról T-vel szorozva

$$A[t_1, \ldots, t_d] = T\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\} = [t_1, \ldots, t_d]\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\},$$

azaz

$$[At_1,\ldots,At_d]=[\lambda_1 t_1,\ldots,\lambda_d t_d] \qquad \Longleftrightarrow \qquad At_j=\lambda_j t_j \quad (j\in\{1,\ldots,d\})$$

adódik.

2. lépés. Ha az A mátrix $t_1,\ldots,t_d$ sajátvektorai bázist alkotnak $\mathbb{K}^d$-ben, akkor függetlenségük következtében a

$$T:=[t_1,\ldots,t_d]$$

mátrix reguláris, továbbá

$$At_j=\lambda_j t_j \qquad (j\in\{1,\ldots,d\})$$

következtében

$$[At_1,\ldots,At_d]=[\lambda_1 t_1,\ldots,\lambda_d t_d],$$

ahonnan

$$A[t_1,\ldots,t_d]=T\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_d\}, \qquad \text{ill.} \qquad T^{-1}AT=\underbrace{T^{-1}T}_{E_d}\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_d\}$$

következik. ■

Feladat. Határozzuk meg az

$$\text{(a) } M:=\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b) } M:=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixokat diagonalizálhatóság szempontjából (ha lehet adjuk meg a diagonalizáló mátrixot, ill. a diagonális alakot)!

Útm.

1. Mivel

$$\mathrm{Sp}(M)=7+3=10 \qquad \text{és} \qquad \det(M)=21+4=25,$$

ezért A karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z):=z^2-\mathrm{Sp}(M)z+\det(M)=z^2-10z+25=(z-5)^2 \qquad (z\in\mathbb{K}).$$

Az M mátrixnak tehát egyetlen sajátértéke van: 5, amelyhez tartozó sajátvektort az

$$[M-5E_2|0]=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

karakterisztikus egyenletrendszer megoldásával nyerjük: $\mathbf{u} := (1,2)$. Az M mátrix nem diagonalizálható, hiszen a sajátértékének algebrai multiplicitása: 2, geometriai multiplicitása viszont csak 1.

2. Mivel

$$\mathrm{Sp}(M) = 2+3+3 = 7, \qquad \text{és} \qquad \mathrm{Sp}(\widetilde{M}) = 2\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 2-(2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 2) = 16-5 = 11,$$

továbbá

$$\det(M) = \det\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2+3 = 5,$$

ezért M karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) := z^3 - \mathrm{Sp}(M) + \mathrm{Sp}(\widetilde{M}) - \det(M) = z^3 - 7z^2 + 11z - 5 \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Mivel

	1	−7	11	−5
1	$\boxed{1}$	$\boxed{-6}$	$\boxed{5}$	0

ezért

$$p_A(z) = (z-1)(z^2-6z+5) = (z-1)(z-1)(z-5) \qquad (z \in \mathbb{K}),$$

azaz $\sigma(M) = \{1;5\}$.

- A $\lambda := 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor az $[M - E_3|0]$ karaktrisztikus egyenletrendszer megoldása:

$$[M - E_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

azaz

$$\begin{bmatrix} -2s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =: s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \qquad (s,t \in \mathbb{R},\ st \neq 0).$$

- A $\mu := 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor az $[M - 5E_3|0]$ karaktrisztikus egyenletrendszer megoldása: $[M - 5E_3|0] =$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right],$$

azaz

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =: s\mathbf{w} \qquad (0 \neq s \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ függetlenek, ezért bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban, tehát $T := [\mathbf{uvw}]$ diagonalizáló mátrix, továbbá

$$T^{-1}MT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

diagonális alak.

Feladat. Határozzuk meg az

$$\text{(a)}\ M := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)}\ M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixokat diagonalizálhatóság szempontjából (ha lehet adjuk meg a diagonalizáló mátrixot, ill. a diagonális alakot)!
Útm.

1. Mivel

$$\mathrm{Sp}(M) = 1 + 1 = 2 \qquad \text{és} \qquad \det(M) = 1 + 1 = 2,$$

ezért M karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) := z^2 - \mathrm{Sp}(M)z + \det(M) = z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

$$p_M(z) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (z-1)^2 = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad z \in \{1 - \imath,\ 1 + \imath\}$$

Az M mátrixnak $1 - \imath$ sajátértékéhez tartozó sajátvektort az

$$[M - 5E_2|0] = \left[\begin{array}{cc|c} \imath & 1 & 0 \\ -1 & \imath & 0 \end{array}\right]$$

karakterisztikus egyenletrendszer megoldásával nyerjük: $\mathbf{u} := (\imath, 1)$. Az M mátrix $1+\imath$ sajátértékéhez tartozó $\mathbf{v}$ sajátvektorra $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}} = (-\imath, 1)$. Így A diagonalizálható és a $T := [\mathbf{uv}]$ diagonalizáló mátrixszal

$$T^{-1}MT = \begin{bmatrix} 1-\imath & 0 \\ 0 & 1+\imath \end{bmatrix}.$$

2. Mivel

$$\mathrm{Sp}(M) = 0 + 0 + 3 = 3, \qquad \text{és} \qquad \mathrm{Sp}(\widetilde{M}) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 - (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)) = 3,$$

továbbá

$$\det(M) = 1 \cdot 1 = 1,$$

ezért M karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) := z^3 - \mathrm{Sp}(M)z^2 + \mathrm{Sp}(\widetilde{M})z - \det(M) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z-1)^3 \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Így M spektruma: $\sigma(M) = \{1\}$, ahol az 1 sajátérték algebrai multiplicitására: $a_1 = 3$. A $z = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a

$$[M - 1 \cdot E_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

egyenletrendszer megoldásai:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} \qquad (0 \neq t \in \mathbb{R}).$$

Ennélfogva a $z = 1$ sajátérték geometriai multiplicitása $g_1 = 1$, így a mátrix nem diagonalizálható. ■

Feladat. Vizsgáljuk diagonalozálhatóság szempontjából az M mátrixot a $K = \mathbb{R}$ és a $K = \mathbb{C}$ esetben!

1. $M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

2. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

3. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

4. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Útm. 1/a-1/d feladatok).

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, akkor A az alábbi három mátrix valamelyikéhez hasonló:

$$\textbf{1)}\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad \textbf{2)}\ \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \textbf{3)}\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

ahol $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) ha $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ és A-nak két lineárisan független sajátvektora van: $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ (akkor is ha $\lambda = \mu$), akkor $T := [\mathbf{s}, \mathbf{t}] \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} A \sim T^{-1}AT &= T^{-1}A[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = T^{-1}[A\mathbf{s}, A\mathbf{t}] = T^{-1}[\lambda\mathbf{s}, \mu\mathbf{t}] = \\ &= \frac{1}{s_1t_2 - s_2t_1} \begin{bmatrix} t_2 & -t_1 \\ -s_2 & s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda s_1 & \mu t_1 \\ \lambda s_2 & \mu t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Példa.

a) Ha

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

akkor $\sigma(A) = \{-1, 2\}$ és

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

így

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Ha

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

akkor $\sigma(A) = \{1\}$ és

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

így

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) ha $\sigma(A) = \{\lambda\}$ és A-nak egy sajátvektora van $\mathbf{s}$, és $\mathbf{t}$ fővektor, azaz $A\mathbf{t} = \mathbf{s} + \lambda\mathbf{t}$, akkor $T := [\mathbf{s}, \mathbf{t}]$ reguláris és

$$\begin{aligned} A \sim T^{-1}AT &= T^{-1}A[s,t] = T^{-1}[As, At] = T^{-1}[\lambda\mathbf{s}, \mathbf{s} + \lambda\mathbf{t}] = \\ &= \frac{1}{s_1t_2 - s_2t_1} \begin{bmatrix} t_2 & -t_1 \\ -s_2 & s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda s_1 & s_1 + \lambda t_1 \\ \lambda s_2 & s_2 + \lambda t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Példa. Ha

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

akkor $\sigma(A) = \{-4\}$ és

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

így

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

3) ha $\sigma(A) = \{\alpha + \imath\beta, \alpha - \imath\beta\}$ $(\beta \neq 0)$ és A sajátvektorai: $\mathbf{s} = \mathbf{u} + \imath\mathbf{v}$ és $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \imath\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, akkor $T := [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ reguláris és

$$\begin{aligned} A \sim T^{-1}AT &= T^{-1}A[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = T^{-1}[A\mathbf{u}, A\mathbf{v}] = T^{-1}[\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}, \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}] = \\ &= \frac{1}{u_1v_2 - u_2v_1} \begin{bmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha u_1 - \beta v_1 & \beta u_1 + \alpha v_1 \\ \alpha u_2 - \beta v_2 & \beta u_2 + \alpha v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha $T := [\mathbf{v}, \mathbf{u}]$, akkor

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Példa.

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(A) = \{2 + \imath, 2 - \imath\} \quad \text{és} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Így

$$T := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definíció. Adott valós V vektortér esetén azt mondjuk, hogy a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

leképezés **skaláris szorzás**, ill. a $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ rendezett pár **euklideszi tér**, ha tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vektorok, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ szám esetén

- $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \in [0,+\infty) \quad$ és $\quad \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \in V$;
- $\langle\alpha\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \alpha\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$;
- $\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$.
- $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$.

Megjegyzések.

1. Bármely $\mathbf{u} \in V$ vektorra és $\beta \in \mathbb{K}$ számra

$$\langle\mathbf{u},\beta\mathbf{v}\rangle = \langle\beta\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \beta\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \beta\cdot\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \beta\cdot\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle.$$

2. Bármely $\mathbf{u} \in V$ vektorra

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{0}\rangle = 0 = \langle\mathbf{0},\mathbf{u}\rangle,$$

hiszen

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{0}\rangle = \langle\mathbf{u},0\cdot\mathbf{0}\rangle = 0\cdot\langle\mathbf{u},\mathbf{0}\rangle = 0 = 0\cdot\langle\mathbf{0},\mathbf{u}\rangle = \langle 0\cdot\mathbf{0},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{0},\mathbf{u}\rangle.$$

3. Bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vektorok esetén

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle.$$

4. Bármely $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m,\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_n \in V$ vektorok, ill. $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{K}$ számok esetén

$$\left\langle \sum_{k=1}^m \alpha_k\mathbf{u}_k, \sum_{l=1}^n \beta_l\mathbf{v}_l \right\rangle = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \alpha_k\beta_l\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{v}_l\rangle.$$

5. Ha $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, akkor a

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle} \qquad (\mathbf{u} \in V)$$

leképezést **normá**nak nevezzük, és a $(V,\|\cdot\|)$ rendezett pár neve: **normált tér**.

6. **Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**. Ha $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, továbbá $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, akkor

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|,$$

   és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \exists\lambda \in \mathbb{K}: \ \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}.$$

7. Adott $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér esetén a $\mathbf{0} \neq \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vektorok szögének nevezzük a

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})\sphericalangle := \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}\right) \in [0, \pi]$$

   számot.

Példák.

1. Ha $d \in \mathbb{N}$, akkor az

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle := \sum_{k=1}^{d} u_k v_k \qquad (\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d),\ \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d)$$

   leképezés skaláris szorzás.

2. Tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\langle M, N\rangle := \mathrm{Sp}(MN^T) = \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} m_{kl} n_{lk} \qquad (M, N \in \mathbb{K}^{d\times d})$$

   leképezés skaláris szorzás.

Tétel. A norma elemi tulajdonságai:

(N1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0 \quad$ és $\quad \|\mathbf{u}\| = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$;

(N2) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\|$;

(N3) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Az **(N1)** − **(N3)** tulajdonságok a norma **alaptulajdonság**ai (axiómái). Az **(N2)** tulajdonság a norma **abszolút homogenitás**át fejezi ki, **(N3)** pedig az ún. **háromszög-egyenlőtlenség**.

Definíció. Ha $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V$, akkor az

$$\mathbf{u}^0 := \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \mathbf{u}$$

vektort **u irányú egységvektor**nak nevezzük.

Megjegyzés. A fenti elnevezés oka a következő:

$$\|\mathbf{u}^0\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \mathbf{u} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \|\mathbf{u}\| = 1.$$

Definíció. Adott $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $\| \cdot \| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ és $\emptyset \neq M \subset V$ esetén azt mondjuk, hogy

1. az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vektorok **ortogonális**ak vagy **merőleges**ek **/**$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$**/**, ha skaláris szorzatuk zérus:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0;$$

2. M **ortogonális** (vagy **ortogonális rendszer**)**/OR/**, ha

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M);$$

3. M **ortonormált** (vagy **ortonormált rendszer**) **/ONR/**, ha M ortogonális és bármely $\mathbf{u} \in M$ esetén $\|\mathbf{u}\| = 1$, azaz

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \delta_{\mathbf{uv}} := \begin{cases} 0 & (\mathbf{u} \neq \mathbf{v}), \\ \\ 1 & (\mathbf{u} = \mathbf{v}) \end{cases} \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M).$$

4. az $\mathbf{u} \in V$ vektor merőleges a $H \subset V$ halmazra (jelben $\mathbf{u} \perp H$), ha annak minden elemére merőleges, azaz

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{h} \rangle = 0 \quad (\mathbf{h} \in H)$$

teljesül.

Tétel (Pitagorasz). Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ ortogonális rendszer. Ekkor fennáll a

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{u}_k\|^2$$

egyenlőség.

Biz.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\mathbf{u}_k\right\|^2=\left\langle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{u}_k,\sum_{l=1}^{n}\mathbf{u}_l\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_l\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{u}_k\|^2. \quad \blacksquare$$

Példák.

1. Az $(\mathbb{R}^2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi térben az
$$\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$$
rendszer ortonormált, hiszen
$$\langle\mathbf{i},\mathbf{j}\rangle=\langle\mathbf{j},\mathbf{i}\rangle=0 \qquad \text{és} \qquad \langle\mathbf{i},\mathbf{i}\rangle=\langle\mathbf{j},\mathbf{j}\rangle=1.$$

2. Az $(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi térben az
$$\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$$
rendszer ortonormált, hiszen
$$\langle\mathbf{i},\mathbf{j}\rangle=\langle\mathbf{i},\mathbf{k}\rangle=\langle\mathbf{j},\mathbf{k}\rangle=0 \qquad \text{és} \qquad \langle\mathbf{i},\mathbf{i}\rangle=\langle\mathbf{j},\mathbf{j}\rangle=\langle\mathbf{k},\mathbf{k}\rangle=1.$$

Feladat. 2; 3).

Tétel. Ha V vektortér, $k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ vektorrendszer, továbbá $\mathbf{u}\in V$, akkor

$$\mathbf{u}\perp W:=\operatorname{span}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{u}\perp\mathbf{x}_i \quad (i\in\{1,\ldots,k\}).$$

Biz.

1. lépés. Ha $\mathbf{u}\perp W$, akkor bármely $\mathbf{w}\in W$ esetén $\mathbf{u}\perp\mathbf{w}$. Mivel tetszőleges $i\in\{1,\ldots,k\}$ esetén $\mathbf{x}_i\in W$, ezért $\mathbf{u}\perp\mathbf{x}_i$.

2. lépés. Ha minden $i\in\{1,\ldots,k\}$ esetén $\mathbf{u}\perp\mathbf{x}_i$, azaz $\langle\mathbf{u},\mathbf{x}_i\rangle=0$, és $\mathbf{w}\in W$, akkor alkalmas $\lambda_1,\ldots,\lambda\in\mathbb{K}$ skalárokkal $\mathbf{w}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\ldots+\lambda_k\mathbf{x}_k$, ahonnan
$$\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{u},\lambda_1\mathbf{x}_1+\ldots+\lambda_k\mathbf{x}_k\rangle=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\langle\mathbf{u},\mathbf{x}_i\rangle=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{0}=\mathbf{0},$$
ennélfogva $\mathbf{u}\perp\mathbf{w}$ és így $\mathbf{u}\perp W$ következik. $\blacksquare$

Tétel. Ha V vektortér, $2\leq k\in\mathbb{N}$ és az $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in V\backslash\{\mathbf{0}\}$ vektorrendszer ortogonális, akkor $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ lineárisan független vektorrendszer.

Biz. Ha valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ skalárokkal

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}_k = 0,$$

akkor bármely $j \in \{1, \ldots, k\}$ esetén

$$0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_j \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle.$$

Így a tetszőleges $j \in \{1, \ldots, k\}$ esetén fennálló $\mathbf{x}_j \neq 0$ következtében $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle \neq 0$, ahonnan

$$\lambda_j = 0 \qquad (j \in \{1, \ldots, k\}),$$

azaz az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ vektorrendszer függetlensége következik. ■

Tétel. Ha $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $\| \cdot \| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ és $B \subset V$ olyan lineárisan független rendszer, amely legfeljebb megszámlálható, azaz alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ esetén

$$B = \{\mathbf{u}_n \in V : \; n \in \mathcal{N}\},$$

akkor a

$$\mathbf{v}_1 := \mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{v}_{k+1} := \mathbf{u}_{k+1} - \sum_{l=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_l \rangle}{\|\mathbf{v}_l\|^2} \mathbf{v}_l \quad (k \in \mathcal{N},\ B \neq \{\mathbf{u}_1 \ldots, \mathbf{u}_k\}),$$

ill. a

$$\mathbf{z}_k := \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \qquad (k \in \mathcal{N})$$

vektorok ortogonális, ill. ortonormált rendszert alkotnak (**Gram-Schmidt-algoritmus**), továbbá fennálnak a

$$\mathrm{span}(B) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_n \in V : \; n \in \mathcal{N}) = \mathrm{span}(\mathbf{z}_n \in V : \; n \in \mathcal{N})$$

egyenlőségek.

Feladat. Ortonormalizáljuk az $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi térben az

$$\mathbf{u}_1 := (1, 1, 1), \qquad \mathbf{u}_2 := (2, -1, -1), \qquad \mathbf{u}_3 := (2, 3, 1)$$

vektorrendszert!

Útm.

1. lépés. Az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ rendszer lineárisan független, ui. az $M := [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ mátrixra

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} = 3 + 3 = 6 \neq 0.$$

2. lépés. Az alábbi vektorok ortogonálisak:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &:= \mathbf{u}_1 = (1,1,1), \\
\mathbf{v}_2 &:= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 = (2,-1,-1) - \frac{0}{3}(1,1,1) = (2,-1,-1), \\
\mathbf{v}_3 &:= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 = (2,3,1) - \frac{6}{3}(1,1,1) - \frac{0}{6}(2,-1,-1) = \\
&= (0,1,-1)\,.
\end{aligned}$$

3. lépés. A keresett ortonormát rendszer tehát a következő:

$$\mathbf{z}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \qquad \mathbf{z}_2 := \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1), \qquad \mathbf{z}_3 := \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1). \quad \blacksquare$$

Feladat. Ortonormalizáljuk az $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi térben az

$$\mathbf{u}_1 := (1,1,2), \qquad \mathbf{u}_2 := (2,1,1), \qquad \mathbf{u}_3 := (1,-1,2)$$

vektorrendszert!

Útm.

1. lépés. Az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ rendszer lineárisan független, ui. az $M := [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ mátrixra

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0.$$

2. lépés. Az alábbi vektorok ortogonálisak:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &:= \mathbf{u}_1 = (1,1,2),\\
\mathbf{v}_2 &:= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 = (2,1,1) - \frac{5}{6}(1,1,2) = \frac{1}{6}(7,1,-4),\\
\mathbf{v}_3 &:= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2 = (1,-1,2) - \frac{2}{3}(1,1,2) + \frac{1}{33}(7,1,-4) =\\
&= \frac{1}{33}(18,-54,18) = \frac{6}{11}(1,-3,1).
\end{aligned}$$

3. lépés. A keresett ortonormát rendszer tehát a következő:

$$\mathbf{z}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2), \qquad \mathbf{z}_2 := \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{66}}(7,1,-4), \qquad \mathbf{z}_3 := \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,-3,1). \quad \blacksquare$$

Feladat. Ortonormalizáljuk az $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi térben az

$$\mathbf{u}_1 := (-4,-18,-9,14), \qquad \mathbf{u}_2 := (20,-14,-7,8), \qquad \mathbf{u}_3 := (1,-2,0,1)$$

vektorrendszert!
Útm.

1. lépés. Az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ rendszer lineárisan független, ui. az $M := [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ mátrixra

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(M) &= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} -4 & 20 & 1\\ -18 & -14 & -2\\ -9 & -7 & 0\\ 14 & 8 & 1\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 20 & -4\\ -2 & -14 & -18\\ 0 & -7 & -9\\ 1 & 8 & 14\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 20 & -4\\ 0 & 26 & -26\\ 0 & -7 & -9\\ 0 & -12 & 18\end{bmatrix} =\\
&= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 20 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -7 & -9\\ 0 & -12 & 18\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 20 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -18\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 20 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -18\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 3.
\end{aligned}$$

2. lépés. Az alábbi vektorok ortogonálisak:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &:= \mathbf{u}_1 = (-4,-18,-9,14),\\
\mathbf{v}_2 &:= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 \overset{\boxed{\mathbf{HF}}}{\underset{\cdots}{=}} \frac{1}{617}(13728,-2392,-1196,78),\\
\mathbf{v}_3 &:= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3,\mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2 \overset{\boxed{\mathbf{HF}}}{\underset{\cdots}{=}} \frac{1}{469}(-3,-202,368,24).
\end{aligned}$$

3. lépés. A keresett ortonormát rendszer tehát a következő:

$$\mathbf{z}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}}, \qquad \mathbf{z}_2 := \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2\rangle}}, \qquad \mathbf{z}_3 := \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{\mathbf{v}_3}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_3,\mathbf{v}_3\rangle}},$$

ahol

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{617}, \qquad \|\mathbf{v}_2\| = 26\sqrt{\frac{469}{617}}, \qquad \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{\frac{377}{469}}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Ortogonalizáljuk az $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi térben az

$$\mathbf{u}_1 := (1,1,1,1), \qquad \mathbf{u}_2 := (3,3,-1,-1), \qquad \mathbf{u}_3 := (-2,0,6,8)$$

vektorrendszert!

Útm.

1. lépés. Az $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ rendszer lineárisan független, ui. az $M := [\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3]$ mátrixra

$$\begin{aligned}
\mathrm{rang}(M) &= \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 6\\ 1 & -12 & 8\end{bmatrix} = \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & -15 & 10\end{bmatrix} = \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -15 & 10\end{bmatrix} =\\
&= \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -20\end{bmatrix} = \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 3.
\end{aligned}$$

2. lépés. Az alábbi vektorok ortogonálisak:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &:= \mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \\
\mathbf{v}_2 &:= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 = (3,3,-1,-1) - \frac{4}{4}(1,1,1,1) = (2,2,-2,-2), \\
\mathbf{v}_3 &:= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2 = (-2,0,6,8) - \frac{12}{4}(1,1,1,1) - \frac{-32}{16}(2,2,-2,-2) = \\
&= (-1,1,-1,1). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Feladat. Ortogonalizáljuk az $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi térben az

$$\mathbf{u}_1 := (1,-1,2,1), \qquad \mathbf{u}_2 := (-2,1,-1,2), \qquad \mathbf{u}_3 := (0,-1,3,1)$$

vektorrendszert!

Útm.

1. lépés. Az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ rendszer lineárisan független, ui. az $M := [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ mátrixra

$$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3.$$

2. lépés. Az alábbi vektorok ortogonálisak:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &:= \mathbf{u}_1 = (1,-1,2,1), \\
\mathbf{v}_2 &:= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 = (-2,1,-1,2) - \frac{-3}{7}(1,-1,2,1) = \frac{1}{7}(-11,4,-1,17), \\
\mathbf{v}_3 &:= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2 = (0,-1,3,1) - \frac{8}{7}(1,-1,2,1) - \frac{10}{61\cdot 7}(-11,4,-1,17) = \\
&= \ldots = \frac{1}{61\cdot 7}(-378,21,315,-231). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Tétel. Ha V vektortér, $2 \leq k \in \mathbb{N}$ és az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in V \backslash \{\mathbf{0}\}$ vektorrendszer ortogonális, továbbá $W := \text{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$, akkor bármely $\mathbf{w} \in V$ vektor felírható $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ alakban, ahol

$$\mathbf{u} \in W \qquad \textbf{és} \qquad \mathbf{v} \perp W.$$

Biz.

1. lépés. Ha valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ skalárokkal

$$\mathbf{u} := \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}_k \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v} := \mathbf{w} - \mathbf{u},$$

akkor $\mathbf{u} \in W$ és $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy az imént definiált $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{v} \perp W$ teljesül. Valóban, bármely $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_i \rangle &= \langle \mathbf{w} - \mathbf{u}, \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i \right\rangle = \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle - \lambda_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle,\end{aligned}$$

így a tetszőleges $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexekre fennálló

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_i \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i = \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle}{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle}$$

ekvivalencia következtében elmondható, hogy $\mathbf{v} \perp W$. ■

Megjegyzés. A fenti $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorra tehát

$$\mathbf{u} = P(\mathbf{w}) := \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle}{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \cdot \mathbf{x}_i = \frac{\langle w, x_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} \cdot x_1 + \ldots + \frac{\langle w, x_k \rangle}{\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle} \cdot \mathbf{x}_k \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v} = Q(\mathbf{w}) := \mathbf{w} - P(\mathbf{w})$$

Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{x}_1 := (1, 1, 1, 1), \qquad \mathbf{x}_2 := (1, -1, 1, -1), \qquad \mathbf{x}_3 := (-1, 1, 1, -1)$$

vektorrenszer ortogonális $\mathbb{R}^4$-ben, majd bontsuk fel az $\mathbf{u} := (1, 1, 2, 1)$ vektort az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ vektorok lineáris burka szerinti párhuzamos és merőleges komponensre!

Útm. Mivel

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \qquad \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 \rangle = -1 + 1 + 1 - 1 = 0, \qquad \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = -1 - 1 + 1 + 1 = 0,$$

ezért $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ortogonális rendszer. Ha $W := \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, akkor az

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &:= \mathsf{P}(\mathbf{u}) := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1\rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle}\mathbf{x}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2\rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2\rangle}\mathbf{x}_2 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_3\rangle}{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3\rangle}\mathbf{x}_3 = \\
&= \frac{5}{4}(1,1,1,1) + \frac{1}{4}(1,-1,1,-1) + \frac{1}{4}(-1,1,1,-1) = \\
&= \frac{1}{4}(5,5,7,3)
\end{aligned}$$

és az

$$\mathbf{u}_2 := \mathbf{u} - \mathsf{P}(\mathbf{u}) = \frac{1}{4}(4,4,8,4) - \frac{1}{4}(5,5,7,3) = \frac{1}{4}(-1,-1,1,1)$$

vektorokra

$$\mathbf{u}_2 \perp W, \qquad \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}. \quad \blacksquare$$

Fealdat. 1/c; 2.; 3.; 4. feladatok).

0.11. $\boxed{\text{11. oktatási hét)}}$

Feladat. Mely $x \in \mathbb{R}$ esetén áll fenn az $f(x) \in \mathbb{R}$ tartalmazás?

1. $f(x) := \sqrt{\dfrac{2x^3 - 1}{x}}$
2. $f(x) := \dfrac{|x| + 10}{|x| - 10}$
3. $f(x) := \sqrt{\lg(x^2 - 5x + 7)}$
4. $f(x) := \dfrac{\sqrt{1 + 2x}}{\lg(x^2 + 1)}$
5. $f(x) := \sqrt{x^3 - x^2 - 2x}$
6. $f(x) := \dfrac{\sqrt{5x - 4 - x^2}}{\lg(2\sin(x) - 1)}$
7. $f(x) := \dfrac{\sqrt{-\cos^2(x)}}{\sin(x) + 1}$
8. $f(x) := \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x^4 - 25}$
9. $f(x) := \sqrt[3]{5^{\log_{\sqrt{3}}(23 - 4x - x^2)}}$
10. $f(x) := \dfrac{\sqrt{2\sin^2(x) + \cos(x) - 1}}{\sin(2x) - 1}$
11. $f(x) := \sqrt{\dfrac{-x^2 + 16x - 55}{x - 7}}$
12. $f(x) := \dfrac{\sqrt{-x^2 + 16x - 55}}{\sqrt{x - 7}}$
13. $f(x) := \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x - 4) - 3}$
14. $f(x) := \dfrac{\sqrt{2\cos^2(x) - 1}}{\sin(x)}$.

Útm.

1. Látható, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad ((2x^3 - 1 \geq 0 \quad \text{és} \quad x > 0) \quad \text{vagy} \quad (2x^3 - 1 \leq 0 \quad \text{és} \quad x < 0)),$$

azaz

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right) \cup (-\infty, 0).$$

2. $f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash \{-10, 10\}$.

3. Látható, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lg(x^2 - 5x + 7) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 5x + 7 \geq 1,$$

azaz

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \neq x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty).$$

4. $f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (1 + 2x \geq 0 \text{ és } x \neq 0) \Longleftrightarrow 0 \neq x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right).$

5. Világos, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x^2 - 1 - x - 1) = x(x+1)(x-2) \geq 0.$$

Így tehát

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-1, 0] \cup [2, +\infty).$$

6. Világos, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(5x - 4 - x^2 \geq 0 \quad \text{és} \quad 1 \neq 2\sin(x) - 1 > 0\right).$$

Mivel

$$5x - 4 - x^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{\pm} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 26}}{-2} \in \{1, 4\},$$

ezért

$$5x - 4 - x^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [1, 4].$$

Az is könnyen látható, hogy

$$2\sin(x) - 1 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

továbbá

$$1 \neq 2\sin(x) - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2l\pi \in \mathbb{R} : \ l \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{\pi}{6} < 1, \qquad \frac{5\pi}{6} \approx 2.61, \qquad \frac{\pi}{2} \approx 1.57,$$

azt kapjuk, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\pi}{2} \neq x \in \left(1, \frac{5\pi}{6}\right).$$

7. Világos, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(1 - \cos^2(x) \geq 0 \quad \text{és} \quad \sin(x) + 1 \leq 0\right),$$

azaz

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

8. Könnyen belátható, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(25 - x^2 \geq 0 \quad \text{és} \quad x^4 - 25 > 0\right),$$

azaz

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-5, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 5].$$

9. Látható, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 23 - 4x - x^2 > 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-2 - 3\sqrt{3}, -2 + 3\sqrt{3}).$$

10. Világos, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(2\sin^2(x) + \cos(x) - 1 \geq 0 \quad \text{és} \quad \sin(2x) - 1 \neq 0\right),$$

azaz

$$\frac{\pi}{4} + l\pi \neq x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] \qquad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

11. Nem nehéz belátni, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{-x^2 + 16x - 55}{x - 7} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 5] \cup (7, 11].$$

12. Könnyen ellenárizhető, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(-x^2 + 16x - 55 \geq 0 \quad \text{és} \quad x - 7 > 0\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (7, 11].$$

13. Elemi megfontolásokból következik, hogy

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(2\cos^2(x) - 1 \geq 0 \quad \text{és} \quad \sin(x) \neq 0\right),$$

azaz azaz

$$l\pi \neq x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] \qquad (k, l \in \mathbb{Z}). \quad \blacksquare$$

Megjegyzések.

- Ha $\emptyset \neq A, B$, akkor az A halmazból a B halmazba leképező függvényt úgy adunk meg, hogy A bizonyos elemeihez hozzárendeljük a B valamelyik elemét. Jelölés: $f \in A \to B$. Pl.

$$\sqrt{} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sin \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

- Az $f \in A \to B$ függvény **értelmezési tartomány**a, ill. **értékkészlet**e:

$$\mathcal{D}_f := \{x \in A \mid \exists y \in B : \ y = f(x)\}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{R}_f := \{y \in B \mid \exists x \in A : \ y = f(x)\}.$$

A B halmaz neve: **képhalmaz**. Pl.

$$\mathcal{D}_{\sqrt{}} = [0, +\infty), \quad \mathcal{R}_{\sqrt{}} = [0, +\infty), \qquad \mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\sin} = [-1, 1].$$

- Tegyük fel, hogy $c \in \mathbb{R}$, továbbá az $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények esetén

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset.$$

Ekkor az

1. $cf : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \quad (cf)(x) := cf(x)$,
2. $f \pm g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad (f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$,
3. $f \cdot g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

függvényeket rendre az f függvény **skalárszoros**ának, az f és g függvények **összeg**ének/**különbség**ének, illetve **szorzat**ának nevezzük. Ha

$$\mathcal{H} := \{x \in \mathcal{D} : \ g(x) \neq 0\} \neq \emptyset,$$

akkor az

$$\frac{f}{g} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

függvényt pedig az f és a g függvény hányadosának nevezzük.

Feladat. Határozzuk meg az f függvény értékkészletét!

1. $f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (x \in [-1, 6])$;
3. $f(x) := 1 - x^2 \quad (x \in [-2, 3])$.

Útm.

1. Az értékkészlet definíciója alapján

$$\mathcal{R}_f = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : \ y = x^2 - 6x + 5\right\}.$$

Mivel

$$y = x^2 - 6x + 5 \iff x^2 - 6x + (5 - y) = 0 \iff x_\pm = 3 \pm \sqrt{9 - (5 - y)} = 3 \pm \sqrt{4 + y},$$

ezért

$$x_\pm \in \mathbb{R} \iff y \in [-4, +\infty).$$

Következésképpen $\mathcal{R}_f = [-4, +\infty)$. Megjegyezzük, hogy

$$y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ennélfogva

$$0 \le (x - 3)^2 = y + 4 \iff y \ge 4.$$

2. Az értékkészlet definíciója alapján

$$\mathcal{R}_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-1, 6] : y = x^2 - 6x + 5 \right\}.$$

A fentiek alapján

$$y = x^2 - 6x + 5 \iff x_\pm = 3 \pm \sqrt{9 - (5 - y)} = 3 \pm \sqrt{4 + y},$$

és

$$x_- \in [-1, 6] \qquad \vee \qquad x_+ \in [-1, 6]$$

azzal egyenértékű, hogy

$$x_- \in [-1, 6] \iff -1 \le 3 - \sqrt{4 + y} \le 6 \iff -3 \le \sqrt{4 + y} \le 4 \iff y \in [-4, 12]$$

$$\left(\text{hiszen} \quad \sqrt{4 + y} \le 4 \iff 4 + y \le 16 \iff y \le 12\right)$$

vagy

$$x_+ \in [-1, 6] \iff -1 \le 3 + \sqrt{4 + y} \le 6 \iff -4 \le \sqrt{4 + y} \le 3 \iff y \in [-4, 5]$$

$$\left(\text{hiszen} \quad \sqrt{4 + y} \le 3 \iff 4 + y \le 9 \iff y \le 5\right)$$

Következésképpen

$$\mathcal{R}_f = [-4, 12] \cup [-4, 5] = [-4, 12].$$

3. Az értékkészlet definíciója alapján

$$\mathcal{R}_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-2, 3] : y = 1 - x^2 \right\}.$$

Mivel

$$y = 1 - x^2 \quad (x \in [-2,3]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = 1 - y \quad (x \in [-2,3]) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \left(1 - y \geq 0 \quad \wedge \quad x_\pm = \pm\sqrt{1-y}\right) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \left(y \leq 1 \quad \wedge \quad \left(-2 \leq -\sqrt{1-y} \leq 3 \quad \vee \quad -2 \leq \sqrt{1-y} \leq 3\right)\right),$$

Most a logikából ismert (vö. 4. oktatási hét)

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

azonosságot fogjuk felhasználni. Mivel

$$-2 \leq -\sqrt{1-y} \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -3 \leq \sqrt{1-y} \leq 2, \qquad \text{ill.} \qquad \sqrt{1-y} \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad y \geq -3$$

és

$$\sqrt{1-y} \leq 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \geq -8,$$

ezért

$$\mathcal{R}_f = (-\infty, 1] \cap ([-3, +\infty) \cup [-8, +\infty)) = \{(-\infty, 1] \cap [-3, +\infty)\} \cup \{(-\infty, 1] \cap [-8, +\infty)\} =$$

$$= [-3, 1] \cup [-8, 1] = [-8, 1].$$

Megjegyzés (függvénytranszformációk). Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad 0 \neq c, d, e \in \mathbb{R}: \quad cx, x + c, dx + e \in \mathcal{D}_f.$$

Hogyan kapható meg f derékszögű koordináta-rendszerbeli grafikonjából az φ függvény grafikonja?

1. $\varphi(x) := f(x) + c \ (x \in \mathcal{D}_f)$;
2. $\varphi(x) := cf(x) \ (x \in \mathcal{D}_f)$;
3. $\varphi(x) := f(x + c) \ (x \in \mathcal{D}_f)$;
4. $\varphi(x) := f(cx) \ (x \in \mathcal{D}_f)$;
5. $\varphi(x) := f(dx + e) \ (x \in \mathcal{D}_f)$.

Útm.

1. f grafikonját c egységgel eltoljuk az y-tengely mentén;

2. f grafikonját az y-tengely mentén c-szeresére nyújtjuk (vagyis mindegyik pont oordinátáját megszorozzuk c-vel);

3. f grafikonját $-c$ egységgel eltoljuk az x-tengely mentén;

4. f grafikonját az x-tengely mentén c-szeresen zsugorítjuk (vagyis mindegyik pont abszcisszáját elosztjuk c-vel).

Feladat. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!

1. $f(x) := \dfrac{\sqrt{5x-1}}{4} + 2 \quad \left(\dfrac{1}{5} \leq x \in \mathbb{R}\right);$
2. $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R});$
3. $f(x) := ax^2 + bx + c \quad (a, b, c, x \in \mathbb{R} : \ a \neq 0);$
4. $f(x) := |x^2 - 5x + 6| \quad (x \in \mathbb{R});$
5. $f(x) := \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (a, b, c, d, x \in \mathbb{R} : \ c \neq 0, x \neq -d/c).$

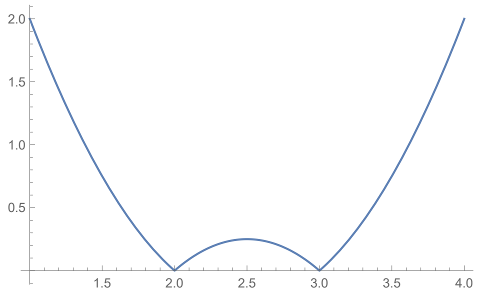
Útm.

1. $\sqrt{x} \quad \to \quad \sqrt{x - \dfrac{1}{5}} \quad \to \quad \sqrt{5x-1} \quad \to \quad \dfrac{\sqrt{5x-1}}{4} \quad \to \quad \dfrac{\sqrt{5x-1}}{4} + 2$

2. Mivel minden $0 \neq x, c \in \mathbb{R}$ esetén
$$cf(x) = \frac{c}{x} = \frac{1}{\frac{x}{c}} = f\left(\frac{x}{c}\right),$$
ezért f grafikonját akár az x, akár az y-tengely mentén c-szeresen megnyújtva ugyanazt a görbét kapjuk.

3. Mivel
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ezért
$$x^2 \quad \longrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

4. Mivel $f(x) = |(x-2)(x-3)|$ $(x \in \mathbb{R})$, és tudjuk, hogy az $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x-2)(x-3)$ függvény grafikonja egy az x-tengelyt 2-ben és 3-ban metsző, felfelé nyitott parabola, ezért f grafikonját úgy kapjuk, hogy ennek a parabolának a $(2, 3)$ intervallumba eső részét tükrözzük az x-tengelyre (vö. 11 ábra).



11. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x-2)(x-3)$ grafikonjának egy részlete.

5. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$: $x \neq -d/c$ esetén

$$f(x) = \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \left[1 + \frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x + \frac{d}{c}}\right] = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}},$$

ezért

$$\frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x + \frac{d}{c}} \quad \longrightarrow \quad \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} \longrightarrow \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Definíció. Valamely $f \in A \to B$ függvény és H halmaz esetén a H halmaz f szerinti képének, ill. ősképének nevezzük az

$$f[H] := \{f(x) \in B : \in H \cap \mathcal{D}_f\}, \qquad \text{ill.} \qquad f^{-1}[H] := \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in H\}$$

halmazt.
Példa.

$$\text{abs}[(1,2)] = (1,2) \quad \text{és} \quad \text{abs}^{-1}[(1,4)] = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| \in (1,4)\} = (-4,-1) \cup (1,4). \quad \Diamond$$

Feladat. Az

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény és a $H := \{0\}$ halmaz esetében határozzuk meg az $f[H]$ és az $f^{-1}[H]$ halmazt!
Útm. Mivel $0 \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ezért

$$f[\{0\}] = \left\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \ x \in \{0\}\right\} = \left\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \ x = 0\right\} = \{3\},$$

továbbá

$$f^{-1}[\{0\}] = \left\{x \in \mathbb{R} :\ 3 + 2x - x^2 \in \{0\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} :\ 3 + 2x - x^2 = 0\right\} = \{-1; 3\},$$

hiszen

$$3 + 2x - x^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 \pm \sqrt{1+3}.$$

Megjegyzés. Adott $f \in A \to B$ függvény és $b \in B$ esetén az

$$f(x) = b \quad (x \in A)$$

*egyenlet megoldásai*nak nevezzük az $f^{-1}[\{b\}]$ halmaz elemeit. *Nincs megoldás*a az egyenletnek vagy az egyenlet *nem oldható meg*, ha $f^{-1}[\{b\}] = \emptyset$. *Egyértelmű* a megoldás, ha $f^{-1}[\{b\}]$ egyelemű halmaz.

Definíció. Valamely $f \in A \to B$ függvény **invertálható** (**injektív**), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f : \qquad (x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y)).$$

Ekkor az

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f, \quad f^{-1}(y) = x : \quad f(x) = y$$

függvényt f **inverz**ének nevezzük.

Megjegyzés.

1. f pontosan akkor invertálható, ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f : \qquad (f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y),$$

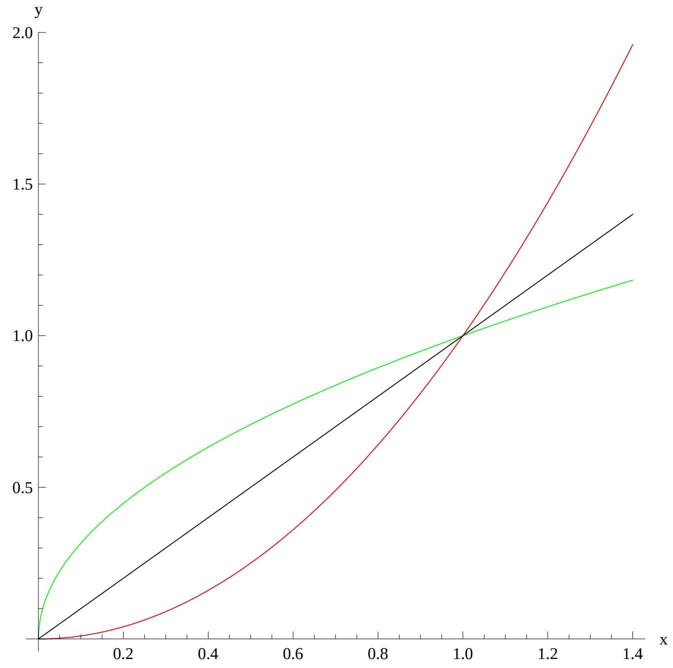
   ill. ha minden $y \in \mathcal{R}_f$-hez pontosan egy olyan $x \in \mathcal{D}_f$ van, amelyre $f(x) = y$.

2. Ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton (növekvő/csökkenő), akkor invertálható, és f^{-1} is szigorúan monoton (növekvő/csökkenő).

3. Az f és az f^{-1} grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükörképei. Vö. (12). ábra

4. Ha $\mathcal{D}_f$ nem egyelemű, viszont $\mathcal{R}_f$ egyelemű (valódi konstans függvény), akkor f nem invertálható, hiszen

$$\exists x, y \in \mathcal{D}_f,\ x \neq y : \quad f(x) = f(y).$$



12. ábra. Az $x \mapsto \sqrt{x}, \quad x, \quad x^2$ függvények grafikonjai.

Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók!

1. $f(x) := 3x + 2 \ (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := \sqrt{9 - x^2} \quad (x \in [-3, 3])$;
4. $f(x) := \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 \ (x \in (-1, 1))$.

Útm.

1. f invertálható, hiszen szigorúan monoton (növekedő).
2. f nem invertálható, hiszen $f(-1) = f(1)$.
3. f nem invertálható, hiszen $f(-1) = f(1)$.
   Megjegyzés. Ha f páros függvény, akkor f nyilvánvalóan nem invertálható.

4. f invertálható, hiszen tetszőleges $x, y \in (-1, 1)$ esetén

$$f(x) = f(y) \iff \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 = \left(\frac{y-1}{1+y}\right)^2 - 1 \iff$$

$$\iff \left[\frac{x-1}{1+x} - \frac{y-1}{1+y}\right] \cdot \left[\frac{x-1}{1+x} + \frac{y-1}{1+y}\right] = 0$$

és

$$\frac{x-1}{1+x} - \frac{y-1}{1+y} = \frac{(x-1)(1+y)-(y-1)(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2(x-y)}{(1+x)(1+y)}$$

ill.

$$\frac{x-1}{1+x} + \frac{y-1}{1+y} = \frac{(x-1)(1+y)+(y-1)(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2(xy-1)}{(1+x)(1+y)} \neq 0,$$

így

$$f(x) = f(y) \qquad \iff \qquad x = y.$$

Feladat. Invertálhatóak-e az alábbi fügvények? Ha igen, akkor számítsuk ki f^{-1}-et!

1. $f(x) := \dfrac{1}{1+|x-1|} \quad (x \in \mathbb{R});$
2. $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b \quad (x \in \mathbb{R});$
3. $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2} \quad (2 \neq x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Az f függvény nem injektív, ui.

$$f(0) = \frac{1}{1+|0-1|} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+|2-1|} = f(2).$$

2. Ha

- $a = 0$, akkor $\mathcal{R}_f = \{b\}$, de $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, így f nem invertálható.
- $a \neq 0$, akkor nyilván $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$ és

$$f(x) = f(y) \qquad \iff \qquad ax + b = ay + b \qquad \iff \qquad x = y,$$

azaz f invertálható és

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a},$$

hiszen

$$ax + b = y \qquad \iff \qquad x = \frac{y-b}{a}.$$

3. Mivel minden $2 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(*) \qquad f(x) = \frac{x-2+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2},$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{y-2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $1 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $2 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\frac{3}{x-2} \neq 0$, így $(*)$ alapján

$$\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R}\backslash\{1\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, akkor

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \frac{3}{x-2} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2 + \frac{3}{y-1} = \frac{2y+1}{y-1}$$

  és $x \neq 2$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{2y+1}{y-1}. \quad \blacksquare$$

Emlékeztető. Legyen $f \in A \to B$, $g \in C \to D$, ill.

$$H := \{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

Ekkor f és g **kompozíció**ja az

$$f \circ g : H \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

függvény.

Megjegyzések.

- Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható függvény, akkor

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad (x \in \mathcal{D}_f), \qquad\qquad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \qquad (y \in \mathcal{R}_f).$$

- Ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan invertálható függvények, amelyekre $\mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f$ és $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_g$ teljesül, akkor $f \circ g$ is invertálható és
$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Feladat. Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében, amennyiben az képezhető!

1. $f(x) := 1 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(x) := \sqrt{x}$ $(0 \leq x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(x) := 2^x$ $(x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := -x^2$ $(0 < x \in \mathbb{R})$, $g(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(0 < x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel
$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in [0, +\infty) : \ \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = [0, +\infty),$$
ill.
$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ 1 - x^2 \in [0, +\infty)\right\} = [-1, 1],$$
ezért
$$f \circ g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x,$$
ill.
$$g \circ f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

2. Mivel
$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \ 2^x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$
ill.
$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R},$$
ezért
$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x};$$
ill.
$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{x^2}.$$

3. Mivel

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in (0, +\infty) : \; \frac{1}{x^2} \in (0, +\infty)\right\} = (0, +\infty),$$

ill.

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \; f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (0, +\infty) : \; -x^2 \in (0, +\infty)\right\} = \emptyset,$$

ezért

$$f \circ g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{1}{x^4},$$

ill.

$$g \circ f \quad \text{nem képezhető.} \quad \blacksquare$$

0.12. $\boxed{\text{12. oktatási hét)}}$

Feladat. Határozzuk meg az f függvény legkisebb és legnagyobb helyettesítési értékét (értékkészletének legkisebb és legnagyobb elemét), amennyiben az létezik!

1. $f(x) := x^2 - 4x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := x^2 - 4x + 3 \quad \left(x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]\right)$.

Útm. Mivel

$$f(x) = (x-2)^2 - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

1. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) \geq f(2) = -1$. Az f függvény legkisebb helyettesítáési értéke tehát $f(2) = -1$. Az f függvény felülről nem korlátos. Ellenkező esetben ui. alkalmas $K > 0$ számmal

$$f(x) = (x-2)^2 - 1 \leq K \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesülne, ami nem lehetséges, hiszen az $\alpha := \sqrt{K+2} - 2$ számra

$$f(\alpha) = K + 2 - 1 = k + 1 > K.$$

Következésképpen f-nek nincsen legnagyobb helyettesítési értéke.

2. $\mathcal{R}_f = \left[0, \frac{5}{4}\right]$, hiszen

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq x - 2 \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq (x-2)^2 \leq \frac{9}{4}.$$

Így f legkisebb, ill. legnagyobb helyettesítési értéke

$$f(2) = -1, \qquad \text{ill.} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right)\frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Feladat. 24 m hosszú kerítéssel téglalap alakú részt akarunk elkeríteni úgy, hogy a téglalap egyik oldalát a ház fala alkotja (tehát azon a szakaszon nincs szükség kerítésre). Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, ha maximális területű részt akarunk elkeríteni?
Útm. A feltételekből $2a + b = 24$. Így a téglalap területe:

$$T = ab = a(24 - 2a) = -2(a^2 - 12a) = -2\left((a-6)^2 - 36\right) = -2(a-6)^2 + 72.$$

Ez akkor a lehető legnagyobb, ha $a = 6$, ill. $b = 12$. A maximális terület tehát: $T_{max} = 72$. ■

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy f értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Azt mondjuk, hogy

- az f **határértéke a** $+\infty$**-ben** $+\infty$, ha

$$\forall P > 0\, \exists \omega > 0\, \forall x \in \mathcal{D}_f \qquad (x > \omega \quad \Longrightarrow \quad f(x) > P)\,;$$

- az f **határértéke a** $+\infty$**-ben** $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \omega > 0\, \forall x \in \mathcal{D}_f \qquad (x > \omega \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon)\,;$$

- az f **határértéke a** $+\infty$**-ben** $-\infty$, ha

$$\forall N < 0\, \exists \omega > 0\, \forall x \in \mathcal{D}_f \qquad (x > \omega \quad \Longrightarrow \quad f(x) < N)\,.$$

Feladat. A megfelelő típusú határérték definíciója alapján igazoljuk a következő állításokat!

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 7}{x^3 + x + 1} = +\infty$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 3}{x^3 + 2x - 5} = 2$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{9 - 4x^2} = -\infty$.

Útm.

1. Ha

$$f(x) := \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 7}{x^3 + x + 1} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$

akkor az f függvény értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Mivel bármely $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{S}(x) := x^4 - 2x^3 + x^2 + 7 \geq x^4 - 2x^3 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 = \frac{1}{2}x^4 + x^3\left(\frac{x}{2} - 2\right) \geq \frac{1}{2}x^4 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 4,$$

és

$$\mathcal{N}(x) = x^3 + x + 1 \leq x^3 + x^3 + x^3 \leq 3x^3,$$

ezért

$$f(x) = \frac{\mathcal{S}(x)}{\mathcal{N}(x)} \geq \frac{\frac{1}{2}x^4}{3x^3} = \frac{x}{6} \quad ([4, +\infty)).$$

Így

$$\frac{x}{6} > P \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 6P$$

következtében tetszőleges $P > 0$ számhoz van olyan $\omega := \max\{4; 6P\}$, hogy ha $x \in (\omega, +\infty)$, akkor $f(x) > P$.

2. Ha

$$f(x) := \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^3 + 2x - 5} \qquad (2 \leq x \in \mathbb{R}),$$

akkor az f függvény értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Mivel bármely $3 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{-x^2 - 4x + 13}{x^3 + 2x - 5}\right| = \frac{x^2 + 4x - 13}{x^3 + 2x - 5},$$

továbbá

$$\mathcal{S}(x) := x^2 + 4x - 13 \leq x^2 + 4x \leq x^2 + 4x^2 = 5x^2$$

és

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &:= x^3 + 2x - 5 \geq x^3 - x^2 - 5 = x^3 - (x^2 + 5) \geq x^3 - (x^2 + 5x^2) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} - 6x^2 = \\ &= \frac{x^3}{2} + x^2\left(\frac{x}{2} - 6\right) \geq \frac{x^3}{2} \quad (12 \leq x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért

$$|f(x) - 2| = \frac{\mathcal{S}(x)}{\mathcal{N}(x)} \leq \frac{5x^2}{\frac{x^3}{2}} = \frac{10}{x}.$$

Így

$$\frac{10}{x} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \frac{10}{\varepsilon}$$

következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha $\omega := \max\left\{12, \frac{10}{\varepsilon}\right\}$, akkor

$$x \in (\omega, +\infty) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

3. Ha

$$f(x) := \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{9 - 4x^2} \qquad (2 \leq x \in \mathbb{R}),$$

akkor az f függvény értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Mivel bármely $4 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{S}(x) := x^3 + x^2 - 2x - 3 \geq x^3 - 5x = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} - 5x = \frac{x^3}{2} + x\left(\frac{x^2}{2} - 5\right) \geq \frac{x^3}{2}$$

és

$$\mathcal{N}(x) := 4x^2 - 9 \leq 4x^2,$$

ezért

$$-f(x) = \frac{\mathcal{S}(x)}{\mathcal{N}(x)} \geq \frac{\frac{x^3}{2}}{4x^2} = \frac{x}{8} \qquad (x \in [4, +\infty)).$$

Így

$$f(x) \leq -\frac{x}{8} < N \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > -8N$$

következtében tetszőleges $N < 0$ számhoz van olyan $\omega := \max\{4, -8N\}$, hogy ha $x \in (\omega, +\infty)$, akkor $f(x) < N$.

Feladat. A definíció alapján igazoljuk az alábbi egyenlőség fennállását!

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - x^2 - x + 3} = \frac{1}{2}.$$

Útm. Ha

$$f(x) := \frac{x^3 + 1}{2x^3 - x^2 - x + 3} \qquad (-1 \leq x \in \mathbb{R}),$$

akkor az f függvény értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Mivel bármely $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$2x^3 - x^2 - x + 3 = x(2x^2 - x - 1) + 3 = x(x-1)(2x+1) + 3,$$

ezért ezekre az x-ekre

$$\begin{aligned} \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{x^3 + 1}{2x^3 - x^2 - x + 3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\left|2x^3 + 2 - 2x^3 + x^2 + x - 3\right|}{4x^3 - 2x^2 - 2x + 6} = \\ &= \frac{\left|x^2 + x - 1\right|}{4x^3 - 2x^2 - 2x + 6} \leq \frac{x^2 + x + 1}{4x^3 - 2x^2 - 2x + 6}, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} 4x^3 - 2x^2 - 2x + 6 &\geq 4x^3 - 2x^2 - 2x = 4x^3 - (2x^2 + 2x) \geq 4x^3 - 4x^2 = 2x^3 + 2x^3 - 4x^2 = \\ &= 2x^3 + 2x^2(x - 2). \end{aligned}$$

Így tetszőleges $x \in [2, +\infty)$ esetén

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3x^2}{2x^3} = \frac{3}{2x}.$$

Ha $\varepsilon > 0$, akkor

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2x} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3}{2\varepsilon} < x,$$

ami azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz esetén, ha $\omega := \max\left\{2, \frac{3}{2\varepsilon}\right\}$, akkor

$$x \in (\omega, +\infty) \qquad \Longrightarrow \qquad \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Feladat. A definíció alapján igazoljuk az alábbi egyenlőség fennállását!

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5 - x^4 - 3}{x^4 + 3x^2 + 1} = +\infty.$$

Útm. Ha

$$f(x) := \frac{2x^5 - x^4 - 3}{x^4 + 3x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az f függvény értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Mivel bármely $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{S}(x) := 2x^5 - x^4 - 3 = 2x^5 - (x^4 + 3) \geq 2x^5 - 4x^4 = x^5 + x^5 - 4x^4 = x^5 + x^4(x-4) \geq x^5 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 4,$$

és

$$\mathcal{N}(x) = x^4 + 3x^4 + x^4 \leq x^4 + 3x^4 + x^4 \leq 5x^4,$$

ezért

$$f(x) = \frac{\mathcal{S}(x)}{\mathcal{N}(x)} \geq \frac{x^5}{5x^4} = \frac{x}{5} \quad ([4, +\infty)).$$

Így

$$\frac{x}{5} > P \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 5P$$

következtében tetszőleges $P > 0$ számhoz van olyan $\omega := \max\{4; 5P\}$, hogy ha $x \in (\omega, +\infty)$, akkor $f(x) > P$. $\blacksquare$

0.13. $\boxed{\text{13. oktatási hét)}}$

Ismétlés

0.14. A zárthelyik feladatainak megoldása

Az 1. zh feladatai

1. Legyen $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ Hozza a legegyszerűbb alakra az alábbi szorzatot!

$$\Pi := \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{4a}{a^2-1}\right) \cdot \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4a}{a^2-1}\right).$$

2. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x} = \sqrt{2x+8}$$

egyenletet!

3. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$3 \cdot (1 - \sin(x)) = 1 + \cos(2x)$$

egyenletet!

4. Az $u := \imath + 2$, ill. $v := 1 - 3\imath$ komplex számok esetén számítsa ki a

$$\frac{(u+v)^2}{|u|^2} + \frac{v}{\overline{u}}$$

komplex szám valós és képzetes részét!

5. Lássa be teljes indukcióval, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

egyenlőség!

6. Legyen $p \in \mathbb{R}$. Tekintse az

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad B := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mátrixokat.

   (a) Számítsa ki a $D := A \cdot B^T - 2 \cdot C^2$ mátrixot!

   (b) Mely p esetén lesz a fenti D mátrix szinguláris?

   (c) Adja meg a D^{-1} mátrixot a $p := -5$ paraméterérték esetén!

   (d) A $p := 1$ paraméterérték esetén számítsa ki a $B^T \cdot A$ mátrix determinánsát!

Útm.

1. Mivel
$$\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}+\frac{4a}{a^2-1} = \frac{2a(a-1)+2(a+1)+4a}{a^2-1}=\frac{2a^2-2a+2a+2+4a}{a^2-1}=$$
$$= \frac{2(a^2+2a+1)}{a^2-1}=\frac{2(a+1)^2}{(a-1)(a+1)}=\frac{2(a+1)}{a-1}$$

és
$$\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}-\frac{4a}{a^2-1} = \frac{2a(a-1)+2(a+1)-4a}{a^2-1}=\frac{2a^2-2a+2a+2-4a}{a^2-1}=$$
$$= \frac{2(a^2-2a+1)}{a^2-1}=\frac{2(a-1)^2}{(a-1)(a+1)}=\frac{2(a-1)}{a+1},$$

ezért
$$\Pi=\frac{2(a+1)}{a-1}\cdot\frac{2(a-1)}{a+1}=4.$$

2. Világos, hogy ha valamely x szám megoldása ennek az egyenletnek, akkor arra
$$x\in(-\infty,5]\cap[-5,+\infty)\cap[-4,+\infty)\cap=[-4,5]\neq\emptyset$$
teljesül. Négyzetre emelve azt kapjuk, hogy
$$5-x+2\sqrt{(5-x)(5+x)}+5+x=2x+8,\qquad \text{azaz}\qquad \sqrt{25-x^2}=x-1.$$
Ismételt négyzetre emelés után pedig
$$25-x^2=x^2-2x+1,\qquad \text{azaz}\qquad 2(x^2-x-12)=2(x+3)(x-4)=0$$
adódik. Mivel
   - $x=-3$ esetén $\sqrt{8}+\sqrt{2}\neq\sqrt{2}$, ezért a -3 nem megoldás.
   - $x=4$ esetén $\sqrt{1}+\sqrt{9}=1+3=4=\sqrt{16}$, ezért a 4 megoldás.

3. Mivel
$$1+\cos(2x)=1+\cos^2(x)-\sin^2(x)=1+(1-\sin^2(x))-\sin^2(x)=2-2\sin^2(x)$$
és
$$3\cdot(1-\sin(x))=2-2\sin^2(x)\qquad\Longleftrightarrow\qquad 2\sin^2(x)-3\sin(x)+1=0,$$
ezért az $u:=\sin(x)$ jelölés bevezetésével az egyenlet nem más, mint $2u^2-3u+1=0$. Ennek megoldása:
$$u_\pm=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4}\in\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}.$$

Lévén, hogy

$$\sin(x)=1 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}),$$

ill.

$$\sin(x)=\frac{1}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad x\in\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\},$$

az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

4. Mivel

$$\overline{u}=2-\imath, \qquad u+v=3-2\imath \quad , \qquad |u|^2=4+1=5,$$

és

$$(u+v)^2=9-12\imath-4=5-12\imath$$

ill.

$$\frac{(u+v)^2}{|u|^2}=\frac{9-12\imath-4}{5}=\frac{5-12\imath}{5}$$

és

$$\frac{v}{\overline{u}}=\frac{1-3\imath}{2-\imath}\cdot\frac{2+\imath}{2+\imath}=\frac{2+\imath-6\imath+3}{4+1}=\frac{5-5\imath}{5}=1-\imath,$$

ezért

$$\frac{(u+v)^2}{|u|^2}+\frac{v}{\overline{u}}=\frac{5-12\imath}{5}+\frac{5-5\imath}{5}=\frac{10-17\imath}{5}=2+\left(-\frac{17}{5}\right)\imath.$$

5. Teljes indukcióval bizonyítunk.

- Ha $n=1$, akkor

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}=\frac{1}{2\cdot 1+1}.$$

- Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén fennáll a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

egyenlőség. Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}=\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\end{aligned}$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} =$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1)+1}.$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right\},$$

ezért a teljes indukció módszernél jóval egyszerűbb módon is eljárhatunk:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \frac{1}{2n+1}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}.$$

6. (a) Jól látható, hogy

$$D := A \cdot B^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12+2p \\ 1 & -6-p \end{bmatrix}$$

és

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért

$$D = A \cdot B^T - 2 \cdot C^2 = \begin{bmatrix} 6 & 12+2p \\ -7 & -8-p \end{bmatrix}.$$

(b) Következésképpen

$$\det(D) = 6 \cdot (-8-p) + 7 \cdot (12+2p) = -48 - 6p + 84 + 14p = 8p - 36 = 4(2p+9).$$

Tehát D pontosan akkor szinguláris, ha $\frac{9}{2} \neq p \in \mathbb{R}$.

(c) Ha $p = -5$, akkor

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} \cdot D^{\sharp} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -8+5 & -12+10 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

(d) Ha $p = 1$, akkor

$$B^T \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 6 & -2 & -1 \\ p-3 & -4-2p & -2-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 6 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & -3 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\begin{aligned} \det(B^T \cdot A) &= 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} = 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 0 & -10 & -10 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= 4 \cdot (-1) \cdot (50 - 50) = 0. \end{aligned}$$

A 2. zh feladatai

1. Határozza meg az
$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, adja meg a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását, majd vizsgálja meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (a diagonalizáló mátrix és a diagonális alak megadásával)!

2. Jelölje $\mathcal{A}$ az
$$\mathbf{b}_1 := (-1, 0, 1, 2), \qquad \mathbf{b}_2 := (0, 1, 0, 1), \qquad \mathbf{b}_3 := (1, 1, 1, 1)$$
lineárisan független vektorrendszer által generált alteret $\mathbb{R}^4$-ben.

   (a) Adjon meg ortogonális és ortonormált bázist az $\mathcal{A}$ altérben!

   (b) Bontsa fel az $x := (-1, 2, 2, 0)$ vektort az $\mathcal{A}$ altér szerinti párhuzamos és merőleges komponensekre!

3. Az
$$f(x) := x^2 - 4x + 5 \qquad (x \in [3, +\infty))$$
függvény esetében igazoljuk, hogy f invertálható, adjuk meg a $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ halmazokat, majd $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket!

4. A definíció alapján igazoljuk a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5}{x^4 - 2x^2 + 3} = 3$$
határérték-reláció fennállását!

5. Döntse el, hogy az
$$\mathbf{u}_1 := (2, 2, 1, 4), \qquad \mathbf{u}_2 := (1, -1, 1, -1), \qquad \mathbf{u}_3 := (1, 1, 1, 1), \qquad \mathbf{u}_4 := (2, 1, 1, 3)$$
vektorrendszer bázist alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben!

Útm.

1. Mivel
$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \{-3 + 1\} = -2,$$
ezért az M mátrix sajátértékei a
$$\begin{aligned} p_M(z) &= \det(zE_3 - M) = (-1)^3 \det(M - zE_3) = z^3 - \mathrm{Sp}(M)z^2 + \mathrm{Sp}(\widetilde{M})z - \det(M) = \\ &= z^3 - 3z + 2 \qquad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

polinom gyökei. Ha p_M-nek van egész gyöke, akkor az csak 2 osztója lehet. Könnyen észrevehető azonban az is, hogy a $\lambda := 1$ gyök. Így a Horner-módszert alkalmazva azt kapjuk, hogy

	1	0	-3	2
1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{-2}$	0

Következésképpen

$$p_M(z) = (z-1)(z^2+z-2) = (z-1)^2(z+2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

azaz $a(\lambda) = 2$ és a másik gyök: $\mu := -2$, $a(\mu) = 1 = g(\mu)$.

- A $\mu := -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

  egyenletrendszer megoldása:

  $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

- a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

  egyenletrendszer megoldása:

  $$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \qquad (s, t \in \mathbb{R}:\ st \neq 0).$$

Mivel **u**, **v**, **w** függetlenek:

$$T := [\mathbf{uvw}] \qquad \Longrightarrow \qquad \det(T) = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3 \neq 0,$$

ezért bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban, tehát $g(\lambda) = 2$ és T diagonalizáló mátrix. Igaz továbbá

$$
\begin{aligned}
T^{-1} \cdot M \cdot T &= \frac{1}{\det(T)} \cdot \widetilde{T} \cdot M \cdot T = \\
&= \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

diagonális alak.

2. (a) **1. lépés.** Az alábbi vektorok ortogonálisak (így függetlenek is, tehát ortogonális bázist alkotnak az $\mathcal{A}$ altérben):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &:= \mathbf{b}_1 = (-1, 0, 1, 2), \\
\mathbf{x}_2 &:= \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{x}_1 \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} \mathbf{x}_1 = (0, 1, 0, 1) - \frac{2}{6} \cdot (-1, 0, 1, 2) = \frac{1}{3} \cdot (1, 3, -1, 1), \\
\mathbf{x}_3 &:= \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{x}_1 \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} \mathbf{x}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle} \mathbf{x}_2 = (1, 1, 1, 1) - \frac{2}{6} \cdot (-1, 0, 1, 2) - \frac{1}{3} \cdot (1, 3, -1, 1) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot (3, 0, 3, 0).
\end{aligned}
$$

2. lépés. A keresett ortonormát bázis pedig a következő:

$$
\mathbf{z}_1 := \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle}}, \qquad \mathbf{z}_2 := \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|} = \frac{\mathbf{x}_2}{\sqrt{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle}}, \qquad \mathbf{z}_3 := \frac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|} = \frac{\mathbf{x}_3}{\sqrt{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 \rangle}},
$$

ahol

$$
\|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{6}, \qquad \|\mathbf{x}_2\| = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \|\mathbf{x}_3\| = \sqrt{2}.
$$

(b) Mivel $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ortogonális rendszer és $\mathcal{A} = \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, ezért az

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &:= \mathsf{P}(\mathbf{x}) := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1\rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle}\mathbf{x}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2\rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2\rangle}\mathbf{x}_2 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_3\rangle}{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3\rangle}\mathbf{x}_3 = \\
&= (-1,0,1,2) + \frac{1}{3}\cdot(1,3,-1,1) + \frac{1}{3}\cdot(3,0,3,0) = \\
&= \frac{1}{3}\cdot(1,3,5,7)
\end{aligned}$$

és az

$$\mathbf{u}_2 := \mathbf{x} - \mathsf{P}(\mathbf{x}) = (-1,2,2,0) - \frac{1}{3}\cdot(1,3,5,7) = \frac{1}{3}\cdot(-4,3,1,-7)$$

vektorokra

$$\mathbf{u}_2 \perp \mathcal{A}, \qquad \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{x}.$$

3. Mivel

$$f(x) = (x-2)^2 + 1 \qquad (x \in [3, +\infty)),$$

ezért bármely $x, y \in [3, +\infty)$ számra

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad (x-2)^2 = (y-2)^2 \quad \Longrightarrow \quad x - 2 = y - 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1,$$

azaz f injektív. Mivel

$$\mathcal{R}_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \,|\, x \in \mathbb{R} : \; y = x^2 - 4x + 5 \right\}$$

és

$$y = x^2 - 4x + 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x + (5-y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_\pm = 2 \pm \sqrt{4 - (5-y)} = 2 \pm \sqrt{-1+y},$$

ezért

$$x_\pm \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad y \in [1, +\infty),$$

azaz $\mathcal{R}_f = [1, +\infty)$. Tehát $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [1, +\infty)$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f = [3, +\infty)$. Így bármely $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ esetén

$$y = f(x) = (x-2)^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) := \sqrt{y-1} + 2.$$

4. Ha

$$f(x) := \frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5}{x^4 - 2x^2 + 3} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az f függvény értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Mivel bármely $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x) - 3| = \left| \frac{-x^3 + 8x^2 - 4}{x^4 - 2x^2 + 3} \right| \leq \frac{x^3 + 8x^2 + 4}{x^4 - 2x^2 + 3},$$

továbbá

$$\mathcal{S}(x) := x^3 + 8x^2 + 4 \leq x^3 + 8x^3 + 4x^3 = 13x^3$$

és

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(x) &:= x^4 - 2x^2 + 3 \geq x^4 - x^3 - 2x^2 \geq x^4 - (x^3 + 2x^2) \geq x^4 - 3x^3 = \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{2} - 3x^3 = \\ &= \frac{x^4}{2} + x^3\left(\frac{x}{2} - 3\right) \geq 0 \quad (x \in [6, +\infty)).\end{aligned}$$

ezért

$$|f(x) - 3| = \frac{\mathcal{S}(x)}{\mathcal{N}(x)} \leq \frac{13x^3}{\frac{x^4}{2}} = \frac{26}{x}.$$

Így

$$\frac{26}{x} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \frac{26}{\varepsilon}$$

következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha $\omega := \max\left\{6, \frac{26}{\varepsilon}\right\}$, akkor

$$x \in (\omega, +\infty) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

5. Ha $M := [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_4]$, akkor

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \det\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Következésképpen az $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ vektorrendszer összefüggő, így nem alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben.