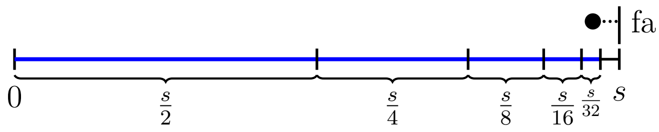
6. előadás

VÉGTELEN SOROK 1.

Megjegyzés. Történeti utalások.

A végtelen fogalma és ehhez kapcsolódva a **végtelen összegek** problémaköre nehezen épült be a matematikába. Végtelen összegek már az ókori görögöknél is megjelentek.

- Zénón (i.e. 490-–430) híres paradoxonjai: a fának hajított kő, Akhilleusz és a teknős, stb.



A megtett távolság tart s-hez

- Arisztotelész (i.e. 384–322)
- Arkhimédész (i.e. 287–212)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
- Brook Taylor (1685–1731)
- Leonhard Euler (1707–1783)

Összességében az mondható, hogy még a XVIII. században is csak „gyerekcipőben járt” a végtelen összegek vizsgálata, aminek oka az volt, hogy nem voltak meg a szükséges eszközök, a pontos definíciók és tételek.

Az analízis alapfogalmainak szükségessé vált precízebb és elvontabb megalkotásában Augustin Louis Cauchy (1789–1857) tette meg az első jelentős lépéseket (1823): neki köszönhető a sorozat konvergenciájának és határértékének ma is elfogadott szigorú definíciója. Ezután a végtelen összegek problémája is elérte a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel. ■

A végtelen sor fogalma, konvergenciája és összege

Probléma. *Hogyan lehet értelmezni végtelen sok szám, pontosabban valamely $a_0, a_1, a_2, \dots$ számok egy végtelen sorozatának az*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

szimbólummal jelölt összegét?

A sorozatokkal kapcsolatban megszerzett ismereteink alapján erre a következő eléggé „természetes" lehetőség kínálkozik: Tekintsük az $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ végtelen sorozatot, és képezzük azt az újabb sorozatot, amelynek n-edik tagja

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha ez a sorozat mondjuk az $A \in \mathbb{R}$ számhoz tart, akkor ez azt jelenti, hogy nagy n-ekre az s_n értékek közel vannak A-hoz. Ebben az esetben kézenfekvő a végtelen sok tagú

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

összeget az (s_n) sorozat határértékével értelmezni.

Lássuk ezután a pontos definíciókat!

1. definíció. *Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett*

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot az $\boldsymbol{(a_n)}$ ***által generált végtelen sornak*** *(röviden* ***sornak****) nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum a_n, \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=0} a_n, \quad \text{vagy} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{s_n}$ *a $\sum a_n$ sor* ***n-edik részletösszege****, illetve* $\boldsymbol{a_n}$ *a $\sum a_n$ sor* ***n-edik tagja****, ahol $n \in \mathbb{N}$.*

A végtelen sor is tehát egy speciális képzésű sorozat. Ennek megfelelően beszélhetünk arról, hogy egy sor konvergens vagy divergens, és van-e határértéke.

2. definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$* ***sor konvergens****, ha részletösszegeinek az (s_n) sorozata konvergens, azaz ha létezik és véges a $\lim (s_n)$ határérték. Ekkor ezt a határértéket a $\sum a_n$* ***végtelen sor összegének*** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim (s_n).$$

A $\sum a_n$ ***sor divergens****, ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens. Ebben az esetben az (s_n) sorozatnak vagy nincs határértéke, vagy*

- *$\lim (s_n) = +\infty$, és ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$* ***végtelen sor összege*** $\boldsymbol{+\infty}$*,*

vagy

- *$\lim (s_n) = -\infty$, és ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$* ***végtelen sor összege*** $\boldsymbol{-\infty}$*.*

Ezeket úgy jelöljük, hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := +\infty, \qquad \text{illetve} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := -\infty.$$

Megjegyzések.

1^o Figyeljük meg a bevezetett jelölések közötti különbséget!

- A $\boxed{\sum_{n=0} a_n}$ szimbólum jelöli a **végtelen sort**, ami egy **sorozat**, mégpedig az (a_n) részletösszegeinek a sorozata. Ha a $\sum_{n=0} a_n$ szimbólumra tekintünk, akkor arra gondolunk, hogy össze akarjuk adni az (a_n) sorozat tagjait. A *sor konvergenciája* azt jelenti, hogy ez a végtelen sok szám „összeadható” és eredménye egy valós szám.

- A $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$ szimbólum pedig az (s_n) részletösszeg-sorozat határértékét, azaz a végtelen sor **összegét**, vagyis **egy $\mathbb{R}$-beli elemet** jelöl abban az esetben, ha a szóban forgó határérték létezik. Ha ez a határérték nem létezik, akkor a sor összegét nem értelmezzük.

2^o A sor összegét különböző alakban írhatjuk fel:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right),$$

de időnként az

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

jelölést is használjuk annak ellenére, hogy ugyanígy jelöltük a $\sum a_n$ sort is. Az adott szövegkörnyezetben azonban világos lesz majd, hogy a végtelen sorról, vagy pedig annak az összegéről van szó.

3^o A bemutatott Zénón-féle paradoxonban a kő mozgását végtelen sok szakaszra bontottuk. Az n-edik szakasz hossza $a_n := s/2^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol s a dobás helye és a fa távolsága. Az (a_n) sorozatból készített végtelen sor tehát

$$\sum a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s}{8} + \cdots = \sum_{n=0} \frac{s}{2^{n+1}}.$$

Hamarosan igazolni fogjuk, hogy a fenti sor konvergens, és az összege s.

4^o A korábbi megállapodásunknak megfelelően az $(a_n) : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq M\} \to \mathbb{R}$ függvények is sorozatok minden $M \in \mathbb{Z}$ esetén. Az ilyenekből képzett

$$s_n := a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_n \qquad (M \leq n \in \mathbb{N})$$

sorozatot is **végtelen sornak tekintjük**, és jelölésükre a

$$\sum_{n=M} a_n$$

szimbólumot fogjuk használni. Ekkor a **sor összege** ugyanúgy legyen a $\lim (s_n)$ határérték. A további definíciók és tételek (az értelemszerű módosításokkal) ezekre a sorokra is érvényesek lesznek, de ezt nem fogjuk külön hangsúlyozni. Ennek alapvető oka, hogy az

$$(a_n) \quad (n = M,\ M+1,\ M+2,\ \ldots) \qquad \text{és az} \qquad (a_{n+M}) \quad (n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

sorozatok megegyeznek, ezért ugyanazt a sort generálják megegyező

$$\sum_{n=M}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+M}$$

sorösszegekkel. Az előző átalakítást **átindexelésnek** hívjuk. ■

Nevezetes sorok

$\boxed{1.}$ A geometriai/mértani sor.

1. tétel. *Legyen $q \in \mathbb{R}$. A (q^n) sorozatból képzett $\sum\limits_{n=0} q^n$ **geometriai** vagy **mértani sor** akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big).$$

Ha $q \geq 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0} q^n$ sornak van összege, és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$.

Bizonyítás. Az

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(a^n + a^{n-1}\,b + \cdots + a\,b^{n-1} + b^n\right) \qquad \big(a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\big)$$

azonosság alapján ($a = 1$ és $b = q$) a $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor részletösszegeit $q \neq 1$ esetén az alábbi „zárt alakban” írhatjuk fel:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Ha $q \neq 1$ valós szám, akkor a (q^{n+1}) geometriai sorozat pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor 0 a határértéke, ezért a $\sum\limits_{n=0} q^n$ sor konvergens, és az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big).$$

Ha $q \geq 1$, akkor az állítás következik abból, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$.

Megjegyzés. A kilőtt nyílt mozgásából kapott végtelen sor összege:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s}{2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \cdots + \frac{s}{2^{n+1}}\right) = \frac{s}{2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) =$$
$$= \frac{s}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = s. \ \blacksquare$$

$\boxed{2.}$ A teleszkopikus sor.

2. tétel. *A* $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ *ún.* ***teleszkopikus sor*** *konvergens, és összege* 1*, azaz*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots = 1.$$

Bizonyítás. A sor n-edik részletösszege:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \overbrace{\frac{1}{k\cdot(k+1)}}^{\textbf{ötlet: } \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{k}} - \cancel{\frac{1}{k+1}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Megjegyzés. Egy sornak, vagyis a részletösszeg-sorozatának a konvergenciavizsgálatához nem használhatjuk a műveletek és a határátmenet felcserélhetőségéről szóló tételt, ui. ez csak **rögzített számú** sorozatok összegére érvényes. Az n index növekedésével azonban s_n-t egyre nagyobb számú sorozat összegeként foghatjuk fel.

A teleszkopikus sornál ezt a problémát egy ügyes átalakítással meg tudtuk oldani. Az s_n részletösszeget olyan zárt alakra hoztuk, ahol csak véges sok tag maradt az összeg elejéből és a végéből, de a közepe „kiesett”. Vannak még olyan sorok, ahol ezt meg lehet tenni, és ezeket **teleszkopikus típusú soroknak** nevezzük. Elnevezésüket a régi hordozható egyszemes távcsövek (teleszkópok) után kapta, amelyek egymásba csúsztatható csövekből áll a könnyebb tárolásuk érdekében. Ebben az állapotban csak az első és az utolsó cső látható. ■

$\boxed{3.}$ Hiperharmonikus sorok.

Tekintsük az alábbi sorokat:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .$$

Az első sort **harmonikus sornak**, míg a másodikat **szuperharmonikus sornak** nevezzük.

Számítógépes kísérleteket végezhetünk a részletösszeg-sorozat tulajdonságainak a vizsgálatára (pl. https://www.wolframalpha.com/).

A harmonikus sor esetén azt kapjuk, hogy

n	10	10^2	10^5	10^{10}	10^{15}	10^{20}	10^{30}	10^{40}	10^{50}
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$2,9\ldots$	$5,1\ldots$	$12,0\ldots$	$23,6\ldots$	$35,1\ldots$	$46,6\ldots$	$69,6\ldots$	$92,6\ldots$	$115,7\ldots$

Azt a **sejtést** alakíthatjuk ki, hogy *a harmonikus sor divergens, de $+\infty$ az összege.*

A szuperharmonikus sor esetén pedig azt kapjuk, hogy

n	5	10	10^2	10^5	10^{10}	10^{20}
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$	$1,4\ldots$	$1,5\ldots$	$1,634\ldots$	$1,644\,924\ldots$	$1,644\,934\ldots$	$1,644\,934\ldots$

Most azt a **sejtést** alakíthatjuk ki, hogy *a szuperharmonikus sor konvergens.*

3. tétel. *Legyen α rögzített valós szám. Ekkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

ún. ***hiperharmonikus sor***

- *divergens, ha $\alpha \le 1$, de ekkor van összege:* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$
- *konvergens, ha $\alpha > 1$.*

Bizonyítás. A hiperharmonikus sor pozitív tagokból áll. Ez jelentősen leegyszerűsíti a sor konvergenciájának vizsgálatát, hiszen ekkor az s_n részletösszegei monoton növekvő sorozatot alkotnak, és így elegendő (s_n) korlátosságát megvizsgálni.

$\boxed{\alpha \le 1}$ Először az $\underline{\alpha = 1}$ esetet, azaz a harmonikus sor divergenciáját bizonyítjuk be. Az s_n összegnek egy **ötletes** csoportosításával egyszerűen igazolhatjuk, hogy az (s_n) sorozat felülről nem korlátos. Legyen $P > 0$ tetszőleges, és válasszunk egy $k > 2P$ egész számot. Ekkor $\forall\, n \ge 2^k$ index esetén

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \ge \\
&\ge 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) > \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}_{4\text{-szer}}\Bigg) + \cdots + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{-szer}}\Bigg) = \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{4}}_{=1/2} + \underbrace{4 \cdot \frac{1}{8}}_{=1/2} + \cdots + \underbrace{2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k}}_{=1/2} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} > \frac{k}{2} > P.
\end{aligned}$$

Ezért (s_n) nem korlátos, tehát $\lim(s_n) = +\infty$, és így a harmonikus sor divergens.

Legyen most $\underline{\alpha < 1}$. Ekkor

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

és így a hiperharmonikus sor részletösszegeire $\lim(s_n) = +\infty$ teljesül, hiszen a harmonikus sor divergenciája miatt

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Összefoglalva: minden $\alpha \le 1$ esetén a hiperharmonikus sor divergens, és az összege $+\infty$.

$\boxed{\alpha > 1}$ Megmutatjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor részletösszegeinek a sorozata felülről korlátos. Ennek igazolásához az $\alpha = 1$ esetben mutatott **ötletet** használjuk, ti. kettőhatványok közötti csoportokat képezünk. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor $\forall\, n < 2^{k+1}$ index esetén

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} \leq \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^k)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha}\right) < \\
&< 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{4^\alpha}}_{\text{4-szer}}\right) + \cdots + \left(\underbrace{\frac{1}{(2^k)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^\alpha}}_{2^k\text{-szor}}\right) = \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^{\alpha-1}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k =: s_k^{(q)},
\end{aligned}
$$

ahol $q = 1/2^{\alpha-1}$. Mivel $\alpha > 1$, így $0 < q < 1$, amiből következik, hogy a $\sum q^n$ mértani sor konvergens. Ezért a részletösszegeinek a sorozata, vagyis az $s_k^{(q)}$ $(k \in \mathbb{N})$ sorozat felülről korlátos, és így az igazolt

$$s_n < s_k^{(q)} \qquad (n < 2^{k+1},\ k \in \mathbb{N})$$

becslés miatt az (s_n) sorozat is felülről korlátos. Mivel monoton növekedő is, ezért konvergens, és így a hiperharmonikus sor konvergens, ha $\alpha > 1$.

Megjegyzés. Az előző tétel $\alpha > 1$ esetén a hiperharmonikus sornak **csak** a konvergenciáját állítja. A bizonyításból a sor összegére **csak** egy felső becslést kapunk. Nevezetesen:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} s_n \leq \lim_{k\to+\infty} s_k^{(q)} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}.$$

A XVII. században és a XVIII. század elején sokan próbálták az $\alpha = 2$ esetben adódó szuperharmonikus sor összegét meghatározni. Végül *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikus 1735-ben fedezte fel azt, hogy

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644\,934\,066\,848\ \ldots\,.$$

A hiperharmonikus sor összegére csak néhány további speciális α esetén ismerünk formulát. A nehézségeket jól mutatja az a tény, hogy pl. $\alpha = 3$ esetén a sor összegére eddig nem sikerült semmilyen zárt alakot találni és lehet, hogy ilyen alak nem is létezik. Csak az 1970-es években bizonyították be, hogy a szóban forgó összeg irracionális. Sőt, továbbra is megoldatlan azonban az, hogy pl. a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$ szám racionális-e vagy sem. ■

$\boxed{4.}$ Az e szám sorösszeg előállítása.

4. tétel. *A* $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}$ *végtelen sor konvergens, és az összege az* $e := \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *számmal egyenlő:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

Bizonyítás. Először a sor konvergenciáját igazoljuk. Mivel a sor pozitív tagokból áll, ezért az s_n részletösszegei monoton növekvő sorozatot alkotnak. Elegendő tehát igazolni, hogy az (s_n) sorozat felülről korlátos. Minden $2 \le n \in \mathbb{N}$ esetén

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 2 + s^*_{n-1},$$

ahol s^*_n a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ teleszkopikus sor n-edik részletösszege. Már igazoltuk, hogy ez a sor konvergens, és összege 1. Ezért (s^*_n) felülről korlátos, és így a fenti becslés miatt (s_n) is felülről korlátos, és

$$s := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} s_n \le 2 + \lim_{n\to+\infty} s^*_{n-1} = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2 + 1 = 3.$$

Most kiszámítjuk a sor összegét. A binomiális tétel alapján

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)\,\cdot\ldots\cdot\,(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1} \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1} \cdot\ldots\cdot \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{<1} \cdot \frac{1}{k!} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n,$$

így

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} s_n = s \quad \text{azaz} \quad \underline{e \le s}.$$

Rögzítsük most egy $m \ge 2$ természetes számot, és legyen $n > m$. Ekkor az előbbiekből

$$a_n \ge 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{m} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\to 1} \cdot\ldots\cdot \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot \frac{1}{k!}. \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m.$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőtlenségben véges számú alapművelet szerepel (m rögzített), ezért tudtuk a műveletek és a határérték kapcsolatáról szóló tételt alkalmazni.

A fentiek szerint $\lim (a_n) \ge s_m$ minden $m \ge 2$ esetén, amiből $m \to +\infty$ határátmenetet véve kapjuk, hogy

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \ge \lim_{m\to+\infty} s_m = s \quad \text{azaz} \quad \underline{e \ge s}.$$

Ezt a korábbi egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk, hogy $s = e$.

$\boxed{5.}$ **A Leibniz-sor.**

5. tétel. *A*

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor *konvergens.*

Az állítást később fogjuk igazolni.

Néhány alapvető tétel végtelen sorok konvergenciájára

A definíció szerint egy **végtelen sor** a részletösszegeinek a **sorozata**. Sorok konvergenciájának a vizsgálatához tehát alkalmazhatók a sorozatokra eddig megismert állítások.

Ebben a pontban felsoroljuk a szóban forgó állítások néhány következményét. Fontos megjegyezni azonban azt, hogy ezek a tételek a gyakorlatban sokszor jól használható feltételeket adnak végtelen sorok konvergenciájának, illetve divergenciájának az eldöntésére. Végtelen sorok összegének a meghatározása azonban általában nehéz feladat.

Cauchy-féle konvergenciakritérium sorokra

A valós sorozatokra vonatkozó Cauchy-tulajdonság ekvivalens a konvergenciával, de a véges határérték definíciójával ellentétben annak eldöntésére, hogy egy adott sorozat Cauchy-sorozat-e vagy sem, nem szükséges ismerni a sorozat határértékét, hiszen ez utóbbi nem szerepel a Cauchy-tulajdonságban. A sorösszeg elég összetett fogalom, de lényegében egy határérték, a sor részletösszegeinek a határértéke. Ezért, ha a Cauchy-tulajdonságot felírjuk a sor részletösszegeinek sorozatára, akkor olyan tulajdonságot kapunk, ami ekvivalens a sor konvergenciájával, de nem tartalmazza a sor összegét.

6. tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium sorokra). *A* $\sum a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, m > n > n_0 \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\sum a_n \text{ konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad (s_n) \text{ konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad (s_n) \text{ Cauchy-sorozat},$$

azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n, m > n_0 \colon |s_m - s_n| < \varepsilon$$

teljesül. Állításunk abból következik, hogy ha $m > n$, akkor

$$s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m.$$

Megjegyzések.

1° A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot így is felírhatjuk:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0, \forall k \in \mathbb{N}^+ : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Valóban: legyen az előző tételben szereplő m index $m := n + k$.

2° A kritérium azt jelenti, hogy konvergens sorok esetén, ha elég nagy indextől adunk össze akármennyi véges sok tagot, akkor az összeg abszolút értéke kisebb, mint bármely előre meghatározott kicsi szám.

3° Ha a kritérium nem teljesül, akkor a sor divergens. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists n > n_0,\ \exists k \in \mathbb{N}^+ : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \geq \varepsilon.$$

A harmonikus sor divergenciája ennek alkalmazásával is igazolható. Valóban legyen $\varepsilon = 1/2$ és $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges index. A harmonikus sor általános tagja $a_n = 1/n$. Így minden $k \in \mathbb{N}^+$ szám esetén

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k} \geq \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k} + \cdots + \frac{1}{n+k}}_{k\text{-szor}} = \frac{k}{n+k}. \end{aligned}$$

Ekkor $k = n$ esetén

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \geq \frac{k}{k+k} = \frac{1}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Nézzük meg a kritérium három fontos következményét!

7. tétel. *Tekintsük a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorokat, és tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N : a_n = b_n.$$

Ekkor a két sor ***ekvikonvergens****, azaz a $\sum a_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum b_n$ végtelen sor is konvergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sor konvergens. Ekkor a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n > n_0 : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Ha $n_1 := \max\{n_0, N\}$, akkor $\forall m > n > n_1$ indexre

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_m| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

teljesül, így a $\sum b_n$ sor is kielégíti a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot, tehát konvergens.

Hasonlóan igazolható, hogy ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.

Megjegyzés. A tétel azt állítja, hogy ha két sor legfeljebb véges sok tagban különbözik egymástól, akkor a két sor egyszerre konvergens vagy divergens. Ennek következménye, hogy **egy sor véges sok tagjának a megváltoztatásával nem változik a sor konvergenciája**.

Vigyázat! Itt csak a konvergencia/divergencia tényéről van szó, és ez nem jelenti azt, hogy a sorösszegek is megegyeznek. Ekvikonvergens sorok összege különböző is lehet. ■

8. tétel (Sorok konvergenciájának egy szükséges feltétele). *Ha a* $\sum a_n$ *végtelen sor konvergens, akkor az* (a_n) *generáló sorozat nullasorozat, azaz* $\lim(a_n) = 0$.

Bizonyítás. A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumban legyen $m := n+1$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim(a_{n+1}) = 0$, és így $\lim(a_n) = 0$.

Ebből az állításból rögtön kapunk egyszerű **elégséges** feltételeket sorok divergenciájára:

Ha az (a_n) *sorozat nem nullasorozat, vagy divergens, akkor a* $\sum a_n$ *végtelen sor divergens.*

Például: A $\sum \dfrac{3n}{n+1}$ sor divergens, mert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = 3 \neq 0.$$

A $\sum(-1)^n$ sor is divergens, mert a $(-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat divergens.

Megjegyzések.

1° Az előző szükséges feltétel így is igazolható: ha a sor összege s, akkor

$$a_n = \big(a_0 + a_1 + \cdots + a_n\big) - \big(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}\big) = s_n - s_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} s - s = 0.$$

2° A $\lim(a_n) = 0$ csak **szükséges, de nem elégséges feltétele** a $\sum a_n$ sor konvergenciájának, hiszen tudjuk, hogy a harmonikus sor divergens, de a tagjai nullához tartanak.

Végtelen sorok lineáris kombinációi

9. tétel (Sorok lineáris kombinációi). *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ és a $\sum b_n$ soroknak van összege. Legyen*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n =: A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \textit{és} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ha a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyekre $(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) \in \overline{\mathbb{R}}$ értelmezve van, akkor a sorok $\sum \Big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\Big)$ lineáris kombinációjának is van összege, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\Big) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B.$$

Bizonyítás. Jelölje s_n, illetve t_n a $\sum a_k$, illetve a $\sum b_k$ sor n-edik részletösszegét. Ekkor a sorok lineáris kombinációjának n-edik részletösszege:

$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\lambda\, a_k + \mu\, b_k\Big) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k + \mu \sum_{k=0}^{n} b_k = \lambda\, s_n + \mu\, t_n.$$

Így az állítás abból következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\lambda\, s_n + \mu\, t_n\Big) = \lambda \cdot \lim_{n\to+\infty} s_n + \mu \cdot \lim_{n\to+\infty} t_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lambda \cdot A + \mu \cdot B.$$

Megjegyzések.

1^o Ha a $\sum a_n$ és a $\sum b_n$ sorok konvergensek, akkor $A, B \in \mathbb{R}$, és így a $\sum(\lambda\, a_n + \mu\, b_n)$ sor konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\Big) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B \in \mathbb{R}.$$

2^o Teljes indukcióval igazolható, hogy az állítás véges sok sor lineáris kombinációjára is. kiterjeszthető. ■

Nemnegatív tagú sorok

A nevezetes soroknál látunk, hogy a pozitív tagokkal rendelkező sorok konvergenciának vizsgálata leegyszerűsödik. Ugyanez érvényes azokra a sorokra is, amelyeknek minden tagja nagyobb vagy egyenlő mint nulla. Ezeket **nemnegatív tagú soroknak** nevezzük.

10. tétel. *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeiből álló sorozat korlátos.*

Bizonyítás. A $\sum a_n$ nemnegatív tagú sor (s_n) részletösszegeinek a sorozata monoton növekvő, hiszen $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor csak két eset lehetséges:

- (s_n) korlátos, és így a monotonitás miatt konvergens. Ekkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.
- (s_n) nem korlátos, és így a monotonitás miatt $(+\infty)$-hez tart. Ekkor a sor divergens.

Megjegyzések.

1^o A tétel bizonyításából látható, hogy ha a $\sum a_n$ nemnegatív tagú sor divergens, akkor az összege $+\infty$, azaz $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.

2^o Az előző tétel állítása érvényben marad, ha a sor csak véges sok negatív tagot tartalmaz, mert ekkor (s_n) egy index után már monoton növekvő sorozat lesz. Hasonló állítás fogalmazható meg nempozitív tagú végtelen sorokra. Más a helyzet akkor, ha a sor végtelen sok pozitív és negatív tagot is tartalmaz. ■

11. tétel (Összehasonlító kritériumok). *Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N\colon 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

1^o *Majoráns kritérium:* *ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.*

2^o *Minoráns kritérium:* *ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen véges sok tag megváltozásával egy sor konvergenciája nem változik. Jelölje (s_n), illetve (t_n) a $\sum a_k$, illetve a $\sum b_k$ sorok részletösszegeiből álló sorozatokat. A feltevésünk miatt $s_n \leq t_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a nemnegatív tagú sorok konvergenciáról szóló tétel szerint

1^o ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor (t_n) korlátos, így (s_n) is az. Ezért a $\sum a_n$ sor is konvergens.

2^o ha $\sum a_n$ sor divergens, akkor (s_n) nem korlátos, így (t_n) sem az. Ezért a $\sum b_n$ sor is divergens.

Megjegyzés. A szuperharmonikus sor konvergenciája a majoráns kritériummal is igazolható. Valóban: a szóban forgó pozitív tagú sor tagjaira az

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} \qquad (n \geq 2)$$

egyenlőtlenségek teljesülnek, ezért a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}$ sor majorálható a $\sum\limits_{n=2} \frac{1}{(n-1)n} = \sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens teleszkopikus sorral. ■

Abszolút és feltételesen konvergens sorok

Említettük azt, hogy ha egy sor végtelen sok pozitív és negatív tagot is tartalmaz, akkor a konvergenciája már nem csak az (s_n) sorozat korlátosságán fog múlni, mint a nemnegatív tagú sorok esetében. Ilyen sorok konvergenciájának a vizsgálatánál segítségünkre lehet a $\sum |a_n|$ nemnegatív tagú sor, amelyet a $\sum a_n$ sor **abszolút sorának** nevezünk.

3. definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor* ***abszolút konvergens****, ha a $\sum |a_n|$ abszolút sora konvergens.*

12. tétel. *Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Bizonyítás. Ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens, akkor a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, m > n > n_0\colon \Big| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| \Big| < \varepsilon.$$

Mivel

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon,$$

ezért a Cauchy-féle konvergenciakritérium teljesül a $\sum a_n$ sorra is.

Megjegyzések.

1^o Az előző tételből következik, hogy ha egy konvergens pozitív tagú sor tetszőleges számú tagjainak előjelét negatívra cseréljük, akkor abszolút konvergens sort kapunk. Így például az

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

sor abszolút konvergens, hiszen abszolút sora az

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

konvergens szuperharmonikus sor.

2^o Vezessük be a következő jelöléseket. Adott a $\sum a_n$ sor legyen

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & (a_n > 0) \\ 0 & (a_n \leq 0), \end{cases} \qquad a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n > 0) \\ -a_n & (a_n \leq 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Képezzük a $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ nemnegatív tagú sorokat! Vegyük észre, hogy

$$(1) \qquad a_n = a_n^+ - a_n^- \qquad \text{és} \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^- \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\sum a_n$ sor abszolút konvergenciája ekvivalens azzal, hogy a $\sum a_n^+$ és a $\sum a_n^-$ sorok mindegyike konvergens. Valóban ha $\sum |a_n|$ konvergens, akkor a

$$a_n^+ \leq |a_n| \qquad \text{és} \qquad a_n^- \leq |a_n| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

relációkból a majoráns kritérium alapján $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ is konvergens. Fordítva, az előző két sor konvergenciájából következik a $\sum |a_n|$ és $\sum a_n$ sor konvergenciája az (1) egyenlőségek miatt, hiszen már igazoltuk, hogy két konvergens sor tagonkénti összegéből képzett sor is konvergens. ■

A tétel állításának a megfordítása nem igaz: egy konvergens sor nem feltétlenül abszolút konvergens. Meg fogjuk majd mutatni azt, hogy a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor konvergens. Azt viszont mátudjuk, hogy az abszolút értékeiből képzett

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

harmonikus sor divergens.

4. definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$* ***sor feltételesen konvergens****, ha $\sum a_n$ konvergens, de nem abszolút konvergens.*

A Leibniz-sor tehát egy feltételesen konvergens sor.

Megjegyzés. Ha egy sor feltételesen konvergens, akkor legalább a $\sum a_n^+$ és a $\sum a_n^-$ sorok egyike divergens. Mivel $\sum a_n$ konvergens, ezért az (1) első egyenlősége miatt a $\sum a_n^+$ és a $\sum a_n^-$ mindegyike divergens. Másrészt, a konvergencia szükséges feltétele szerint $\lim (a_n) = 0$, ezért $\lim (a_n^+) = 0$ és $\lim (a_n^-) = 0$ is igaz.

A $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ sorok divergenciája, és a $\lim(a_n^+) = 0$, $\lim(a_n^-) = 0$ feltételek szükségesek, de együttes teljesülésük sem elegendő a $\sum a_n$ sor feltételes konvergenciájához. ■