RÉSZBENRENDEZÉS : ANTISZ. + TRANZ + REFL.

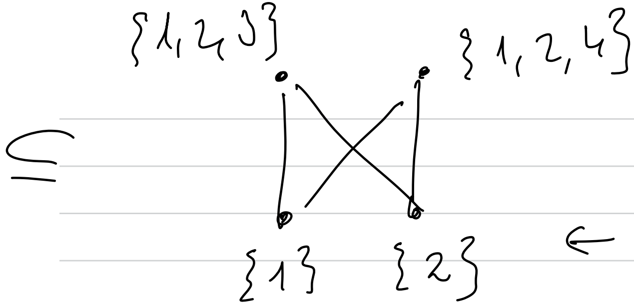
$\leq$, $\subseteq$

DEF. Ha A egy halmaz, R pedig egy részbenrendezés, akkor az A-t és az R-t együtt részbenrendezett halmaznak nevezzük (A, R)

DEF. Ha $(A, \preccurlyeq)$ egy r.r. halmaz, akkor

- $x \in A$ MINIMÁLIS, ha $\nexists y \in A,\ y \neq x,\ y \preccurlyeq x$
- $x \in A$ LEGKISEBB, ha $\forall y \in A:\ x \preccurlyeq y$

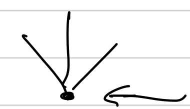
(MAXIMÁLIS / LEGNAGYOBB : ugyanez, rel-jel-fordítva)



← ŐK ITT MINIMÁLISAK, DE NEM LEGKISEBBEK

<u>MIN</u>: „nincs alatta más"

<u>LEGK</u>: „minden fölötte van":



<u>DEF.</u>: Egy $(A, \preccurlyeq)$ r.r.h.-ban

- $x < y$, ha: $x \preccurlyeq y$ és $x \neq y$
- x és y <u>összehasonlíthatóak</u>, ha $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

MEGJ. $x, y \in A$: 4 lehetőség:

1) $x = y$ 2) $x < y$ 3) $y < x$ 4) x és y NEM összehasonlíthatók

DEF: Egy A halmazon egy $\leq$ részbenrendezés TELJES RENDEZÉS (RENDEZÉS), ha DICHOTOM $(\forall x, y: x \leq y \vee y \leq x)$

[azaz ha bármelyik két elem összehasonlítható.]

MINDEN $\leq$-höz tartozik $<$ ún. szigorú párja a relációval:

$<$: $\boxed{\leq, \text{és} \neq}$

FORDÍTVA: $\leq$: $\boxed{< \vee =}$ (gyenge pár)

TUL.:

		$\leq$	$<$		
TELJES R.	R.R	REFL	IRREFLEXÍV	SZIGORÚ RÉSZBENR.	SZIGORÚ RENDEZÉS.
		TRANZ	TRANZ		
		ANTISZ.	SZIG. ANTISZ.		
		DICHOTOM	TRICHOTOM		

MEGJ: TRANZ + IRR $\Rightarrow$ SZIG ANTISZ.

(TRANZ +) SZ. ASZ. $\Rightarrow$ IRR.

FONTOS RENDEZÉS: LEXIKOGRAFIKUS (ábécé szerinti)

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x',y') \in \mathbb{R}^2$: $(x,y) \leq (x',y')$

$\Updownarrow$

1) Ha $x < x'$ vagy ($x = x'$, és $y \leq y'$)

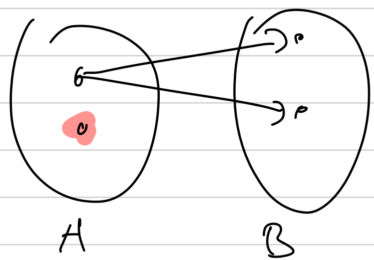
MAGYAR

MEGGY ≥ MEGGYALÁZ

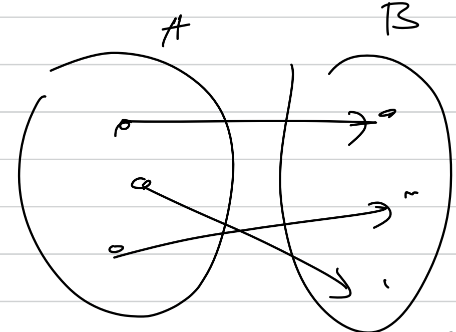
FÜGGVÉNYEK :

INPUT $\xrightarrow{\text{fv.}}$ OUTPUT

REL :



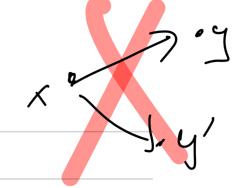
FV. :



CSAK (PONTOSAN) 1 NYÍL.

MEGJ : MEGKÜLÖNBÖZTETJÜK:

„csak úgy fv." ⟷ A → B fv.



DEF: Egy f reláció függvény, ha $\forall x, y, y'$ esetén

$$\big((x,y) \in f \land (x,y') \in f\big) \Rightarrow y = y'$$

MEGJ: Azaz, minden x csak egy y-nal állhat relációban.

(Mindenhonnan max 1 nyíl megy kifelé)

JELÖLÉS: $x \in dmn(f)$ (ilyenkor PONTOSAN 1 y van)

arra az y-ra, amire $(x,y) \in f$ azt írjuk, hogy

$$y = f(x).$$

VAGY: $x \mapsto y$ $\qquad x \overset{f}{\longmapsto} y$

DEF: A és B halmazok, ekkor az

$\boxed{f : A \to B}$ jelölés azt jelenti, hogy

1) f függvény

2) $\mathrm{dmn}(f) = A$

3) $\mathrm{rng}(f) \subseteq B$

f az A-ból B-be képező függvény

[Azaz pontosan az A elemeinek van képe, és az B-beli.]

Pl.: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^2$

DEF: $f \in A \to B$:

1) f fv.

2) $\mathrm{dmn}(f) \subseteq A$

3) $\mathrm{rng}(f) \subseteq B$

f parciális fv. A-ból B-be

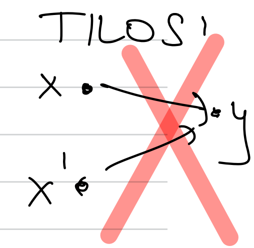
Pl. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$

v.ö.:

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$

DEF.: Egy f függvény INJEKTÍV, ha

$\forall x, x' : \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$



MEGJ: f inj $\iff f^{-1}$ fv.

MEGJ: MINDEN fv. érték más.

DEF. Egy $f : A \to B$ fv. SZÜRJEKTÍV, ha

$\forall y \in B : \exists x : f(x) = y$ [AZAZ $\mathrm{Rng}(f) = B$.]

DEF.: $f: A \to B$ BIJEKTÍV, ha INJ + SZÜRJ.

(MEGJ: ilyenkor $f^{-1}: B \to A$ fv.)

Pl.: NÉGYZETRE EMELÉS $x \mapsto x^2$

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

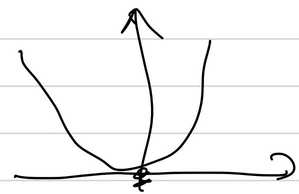
BIJEKTÍV

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

NEM INJ

NEM SZÜRJ

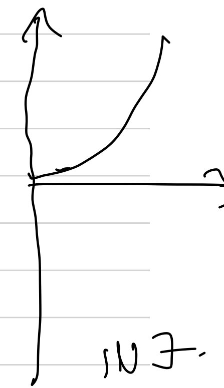
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$



NEM INJ.

SZÜRJ

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$



INJ.

NEM SZ.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ INJ: MINDEN VÍZSZINTES EGYENES ≤ 1 PONTBAN METSZI

SZÜRJ: — // — ≥ 1 — // —

MEGJ: $f: A \to B$: f az A-ból B-be képez

$f: A \to B$ és f SZÜRJ. : f az A-ból B-re képez (ONTO)

FV. KOMPOZÍCIÓ:

ÁLL f és g fv $\Rightarrow$ $f \circ g$ is fv. és $\forall x \in dmn(f \circ g)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Biz: HF.

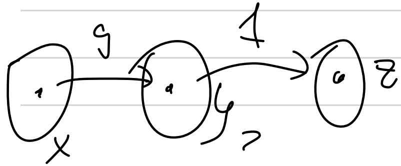
ÁU.

* f INJ, g INJ $\Rightarrow$ $f \circ g$ INJ.
* $f : B \to C$ SZÜRJ és $g : A \to B$ szürj $\Rightarrow$ $f \circ g : A \to C$ szürj.
* $f : B \to C$ BIJ, $g : A \to B$ –||– $\Rightarrow$ $f \circ g : A \to C$ BIJ

Biz INJ: $f(g(x)) = f(g(x')) \xRightarrow[f \text{ INJ}]{} g(x) = g(x') \xRightarrow[g \text{ INJ}]{} x = x'$ ✓

SZÜRJ: $z \in C \xRightarrow{f \text{ szürj}} \exists y \in B : f(y) = z \xRightarrow{g \text{ szürj}} \exists x \in A : g(x) = y$

$$f(g(x)) = z$$ ✓



BIJ ✓

MEGJ.:

$$\begin{array}{ccc} A & \cdots & Z \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ a & & z \end{array}$$

bijekció $\Rightarrow$ ugyanannyi elem

SPEC FV.: MŰVELETEK

KÉTVÁLTOZÓS FV.: $a, b \longrightarrow c$

$$f: A \times A \longrightarrow A$$
$$(3,5) \longrightarrow 8$$

„két input"

DEF.:

Egy $f: A \times A \to A$ fv-t A-n értelmezett kétváltozós műveletnek hívunk.

Pl.: + a $\mathbb{N}$-on:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(x,y) \mapsto x+y$$

$$= \{((x,y),x+y) \mid x,y \in \mathbb{N}\} = \{((3,5),8),((1,1),2),\dots\}$$

$$f : A \times A \to A$$

$f((a,b))$ helyett gyakran

$a+b$
$a \times b$ ezt
$a \triangle b$ írjuk
$a \heartsuit b$
$\vdots$

DEF. (műv. tul.)

- A-n $\star$ asszociatív

$$\forall x,y,z \in A: \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$+, \cdot, \cap, \cup$

- A-n $\star$ kommutatív, ha $\forall x,y \in A$:

$$x \star y = y \star x$$

kiv. mx.

$+, \cdot, \cap, \cup, \Delta, \cap$

:

- A-n $\bullet$ disztributív a $\maltese$-re, ha

$\forall x,y,z$:

$$x \bullet (y \maltese z) = (x \bullet y) \maltese (x \bullet z)$$

$$(y \maltese z) \bullet x = (y \bullet x) \maltese (z \bullet x)$$

$(\cdot, +)$

$(\cap, \cup)$

$(\cup, \cap)$

$(\cap, \Delta)$

MŰVELETTARTÁS : $\star$ A-n művelet

$\bullet$ B-n művelet

$f: A \to B$ művelettartó, ha $\forall a_1, a_2 \in A$

$a_1 \mapsto b_1 \quad a_2 \mapsto b_2$:

$$f(a_1 \star a_2) = b_1 \bullet b_2$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "\bullet"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pl.: $A: \mathbb{R}^+$, szorzás $\cdot$

$B: \mathbb{R}$, összeadás $+$

f: log

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$i^2 = -1$$