RELÁCIÓK /2

2023-03-22

TÉTEL: A RELÁCIÓK KOMPOZÍCIÓJA ASSZOCIATÍV:

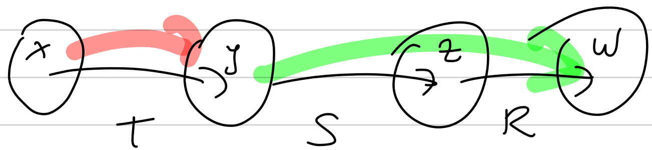
$\forall R, S, T$ relációk:

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

MEGJ: ha R, S, T: „gyereke"

gyerek unokája = unoka gyereke

BIZ:



$T \quad S \quad R$

$$(x,w) \in (R \circ S) \circ T \overset{?}{\Longleftrightarrow} (x,w) \in R \circ (S \circ T)$$

$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$\exists y: (x,y) \in T \wedge (y,w) \in R \circ S \qquad\qquad \exists z: (x,z) \in S \circ T \wedge (z,w) \in R$

$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

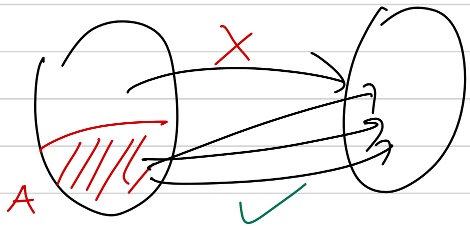
$$\exists y\ (x,y) \in T \wedge \exists z: (y,z) \in S \wedge (z,w) \in R \Longleftrightarrow \exists z \exists y: (x,y) \in T \wedge (y,z) \in S \wedge (z,w) \in R$$

✓

DEF.: RELÁCIÓ MEGSZORÍTÁSA EGY HALMAZRA:

R rel. A halmaz

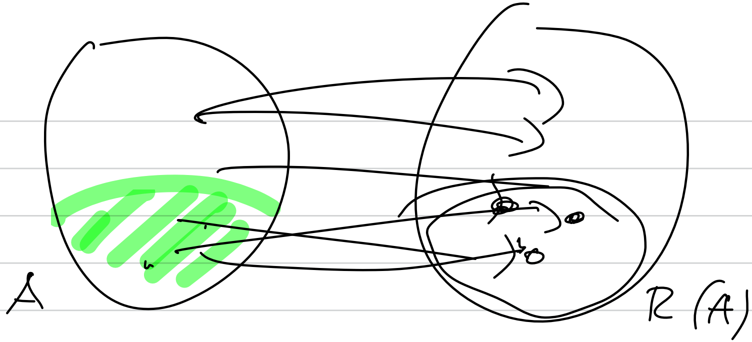
$$R|_A := \{(x,y)\in R \mid x\in A\}$$



DEF R szerinti kép / inverz kép:

R szerinti képe A-nak: $R(A) := \{y \mid \exists x\in A : (x,y)\in R\}$

R f. inverz kép: $R^{-1}(B) := \{x \mid \exists y\in B : (x,y)\in R\}$



R(A) : A-ból induló összes nyíl végpontja.

Pl. „prímszámok hatványai"

$\mathbb{P}$ — R rel.: y az x-nek hatványa reláció

$R(\mathbb{P})$

RELÁCIÓTULAJDONSÁGOK:

pl.: $(x<y \wedge y<z) \Rightarrow x<z$

$(e \parallel f \wedge f \parallel g) \Rightarrow e \parallel g$

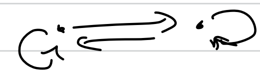
MINTA: TRANZITÍV

<u>DEF.</u> Egy R reláció ...

- TRANZITÍV, ha $\forall x, y, z$:

$$\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R\big) \Rightarrow (x,z) \in R$$

Ha $x \longrightarrow y \longrightarrow z$, akkor
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

<u>MEGJ.</u>: $x = z$: $x \rightleftarrows y \Rightarrow$ 

<u>Pl.</u>: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $=$, $\|$, osztója, $\subseteq$ stb.

- SZIMMETRIKUS, ha $\forall x, y$:

$$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

Ha $\bullet \longrightarrow \bullet$ akkor $\bullet \rightleftarrows \bullet$

$$\big(\text{azaz} \quad (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R\big)$$

$=$, $\|$, testvére, szomszédok, $\perp$

<u>vs</u>: KOMMUTATÍV

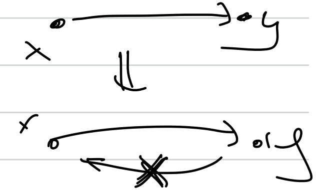
Pl: $\leq$, $\subseteq$

- ANTISZIMMETRIKUS, ha $\forall x,y$:

$$((x,y)\in R \wedge (y,x)\in R) \Rightarrow x=y$$

(MÁSKÉPP): $\forall x,y,\ x\neq y$:

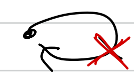
$$(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\notin R$$



MEGJ:  se SZIMM, se ANTISZ.

$=$: SZIMM, ANTISZ.

- IRREFLEXÍV: $\forall x$: $(x,x)\notin R$



Pl. $<$, $\subsetneq$

- SZIGORÚAN ANTISZIMMETRIKUS, ha $\forall (x,y)$: $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\notin R$

ANTISZ + IRREFLEXÍV

$<$, $\subsetneq$

DEF.: Egy R reláció az A halmazon

- REFLEXÍV, ha $\forall x \in A: (x,x) \in R$

  pl. $(=, \mathbb{R})$, $(\leq, \mathbb{N})$

- DICHOTOM, ha $\forall x,y \in A:$

  $(x,y) \in R \vee (y,x) \in R$

  Pl. $(\leq, \mathbb{N})$

- TRICHOTOM, ha $\forall x,y \in A:$

  1) $x = y$ 2) $(x,y) \in R$ 3) $(y,x) \in R$

  közül PONTOSAN 1 teljesül.

  $(<, \mathbb{Z})$

  Pl.: összehasonlítás

  körmérkőzés

DEF: Egy R reláció ...

- ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNYA

$$dmn(R) := \{x \mid \exists y : (x,y) \in R\}$$

„AHONNAN INDUL NYÍL"

domain

- ÉRTÉKKÉSZLETE

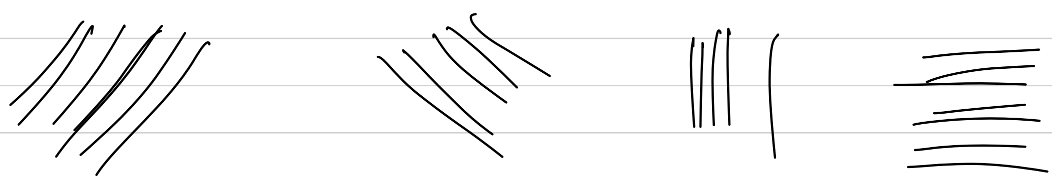
$$rng(R) := \{y \mid \exists x : (x,y) \in R\}$$

„AHOVÁ BEFUT NYÍL"

range

GEO. PÉLDA: $\parallel$ $\therefore$ SZIMM., TRANZ., REFL. (Sík egyenesei)

VANNAK EGYENESSEREGEK, HOGY MINDEN ELEMÜK $\parallel$?



stb.

Ezeknek (sereg(e)n belül) mi(jük) ugyanaz? IRÁNYUK

PÁRHUZAMOS ⟶ IRÁNY

ekvivalenciaosztály

DEF.: Egy R reláció az A halmazon ekvivalenciareláció, ha

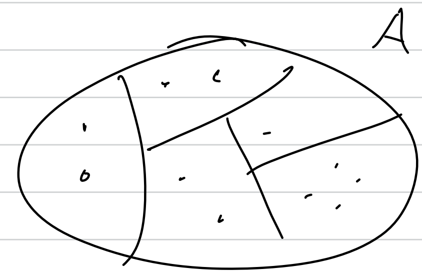
- TRANZITÍV
- SZIMMETRIKUS
- (A-N) REFLEXÍV

„RST"

DEF.: Egy A halmaz (ekvivalencia)osztályozása:

felbontása olyan halmazokra, melyek:

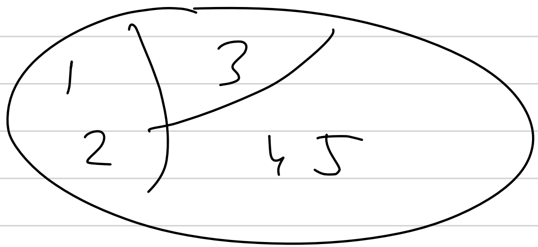
- páronként diszjunktak
- uniójuk A
- nem üresek



osztályozás: $\mathcal{X}$:

- $\forall G, H \in \mathcal{X}$: $G \neq H \Rightarrow G \cap H = \emptyset$
- $\bigcup \mathcal{X} = A$
- $\forall H \in \mathcal{X}$: $H \neq \emptyset$

Pl.:



$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\mathcal{X} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$

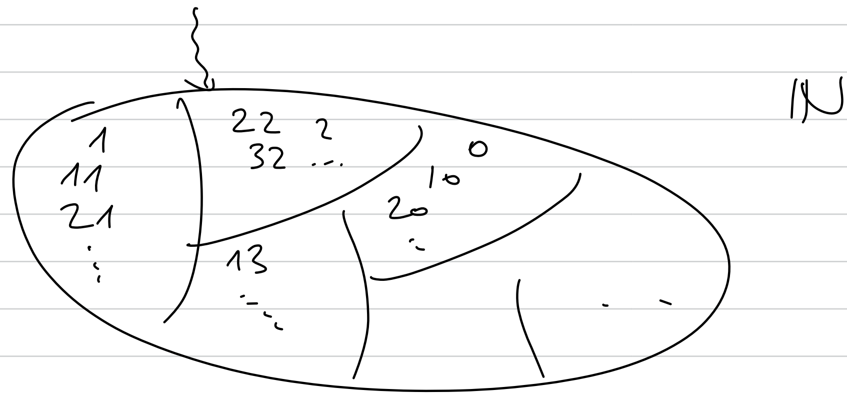
TÉTEL: MINDEN EKVIVALENCIARELÁCIÓ MEGHATÁROZ EGY OSZTÁLYOZÁST ÉS VISZONT.

(és visszakapjuk az eredetit.)

ALKALMAZÁS:

• Pl. MAT: maradékosztályok

$(x,y) \in R \iff x-y$ osztható 10-zel:



$\hookrightarrow$ CSAK A 10-es maradékokkal számolunk,

moduláris számolás $\rightsquigarrow$ kriptográfia

• TESZTELÉS: EKVIVALENCIAOSZTÁLYOZÁS

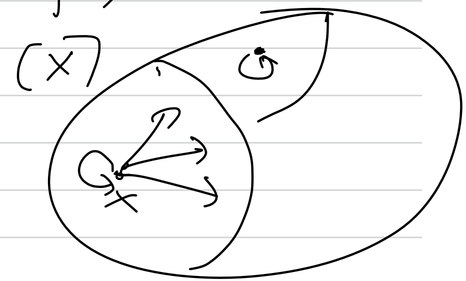
< 20 $\quad$ $20 \leq .. \leq 30$ $\quad$ > 30

BIZ (T.) R ekv. rel. (SZ., T., R.)

$\rightsquigarrow$ oszt.?

$x \in A$ alaph. $[x]$ (x osztálya):

$[x] := \{ y \mid (x,y) \in R \}$



állítás: ezek az osztályok („jó")

osztályozását adják A-nak.

- nem üres: REFL $\Rightarrow \forall x: x \in [x]$

+

$\bigcup [x] = A$

- DISZJUNKTSÁG: $[x] \cap [y] \Rightarrow [x] = [y]$ elég.

nem üres

Legyen $z \in [x] \cap [y]$: $(x,z) \in R \wedge (y,z) \in R$.

ÉS legyen $w \in [x]$. KELL: $w \in [y]$.

TUDJUK:

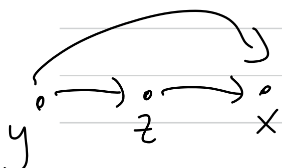
$(x,z)\in R \xRightarrow{SZ.} (z,x)\in R \xRightarrow{TR.} (y,x)\in R$

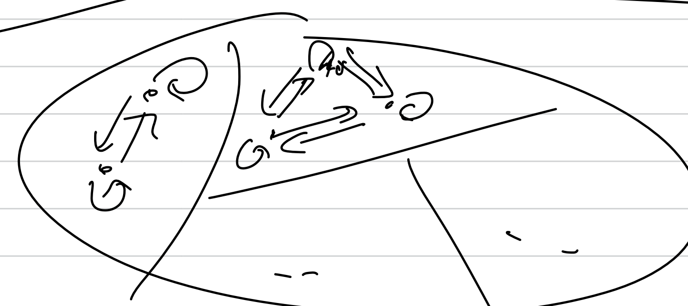
$(y,z)\in R \xRightarrow{SZ.} (z,y)\in R$

$(x,w)\in R \xRightarrow{SZ.} (w,x)\in R$

$\overset{?}{\Longrightarrow} (y,w)\in R$

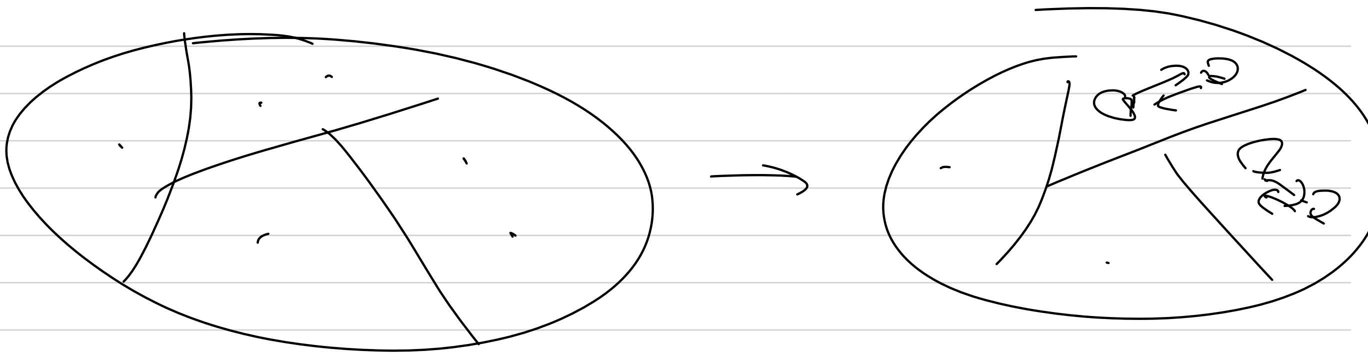
MIVEL: $(y,x)\in R \wedge (x,w)\in R \xRightarrow{TR.}$





MÁSIK IRÁNY (OSZT. → EKV. REL.):

$R := \{ (x,y) \mid$ x és y ugyanabban az osztályban szerepel $\}$



HF.: $R+S+T$

ALK.: KOMBINATORIKA: „TRÜKK":

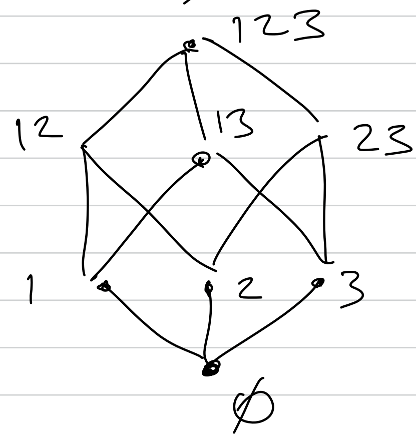
A mérete = „osztályok száma" $*$ „osztályok mérete"

DEF: R RÉSZBENRENDEZÉS A-N, ha

- REFLEXÍV
- TRANZITÍV
- ANTISZIMMETRIKUS

PL.: $A: \mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

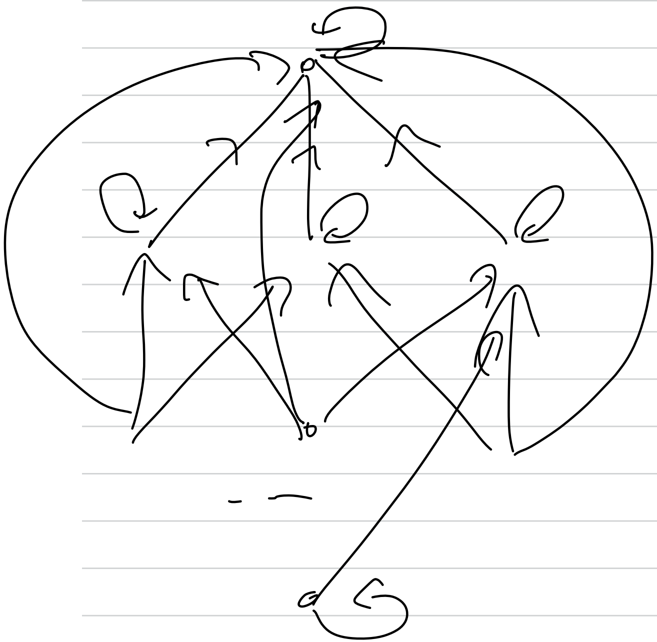
„$\subseteq$": R

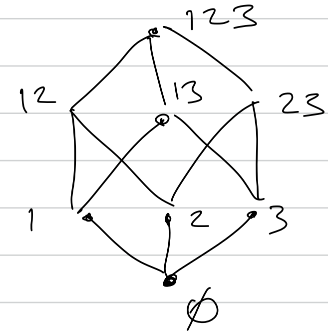


$\uparrow$ IU

HASSE-DIAGRAMM

IGAZÁBÓL: R:

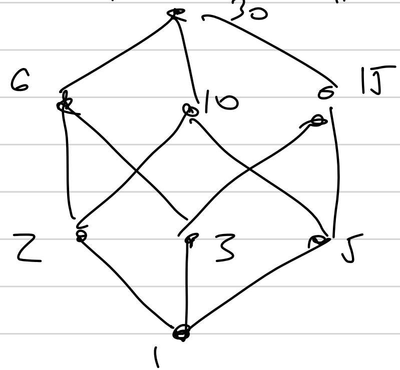




HASSE DIAGRAM:

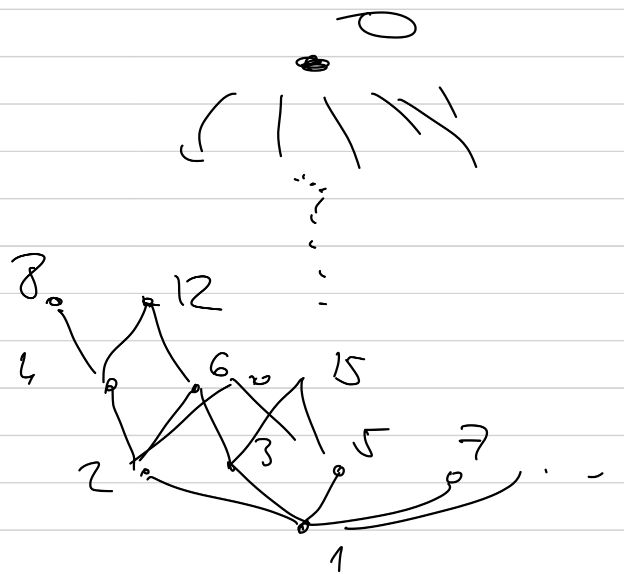
- HUROK NINCS JELÖLVE
- AMI A TRANZ.-BÓL KÖV: KIHAGYJUK
- NYÍL → VONAL (FELFELÉ IRÁNYÚ)

Pl.: $\mathbb{N}$-en „osztója"



Alaph.: $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

ÖSSZES: $(\mathbb{N})$;



P