10. előadás

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 2.

Függvények határértéke 2.

Hatványsor összegfüggvényének a határértéke

Igazolni fogjuk, hogy egy hatványsor összegfüggvényének van határértéke a konvergenciahalmaza minden belső pontjában, és a határérték megegyezik a pont behelyettesítésével kapott sor összegével.

1. tétel (Hatványsor összegfüggvényének a határértéke).
Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ *hatványsor* R *konvergenciasugara pozitív. Jelölje*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvényét. Ekkor $\forall b \in K_R(a)$ *pontban létezik a* $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ *határérték, és*

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy

$$(*) \qquad r \in (0,R) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{a } \sum_{n=1} n\alpha_n r^{n-1} \quad \text{sor abszolút konvergens.}$$

Legyen $\varrho \in (r,R)$. Ekkor $a+\varrho \in (a-R, a+R)$ a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciahalmazának belső pontja, ezért a hatványsor konvergens az $x = a+\varrho$ pontban. Az $x - a = \varrho$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy a $\sum \alpha_n \varrho^n$ sor konvergens, és így $\lim(\alpha_n \varrho^n) = 0$. Emiatt az $(\alpha_n \varrho^n)$ sorozat korlátos, azaz

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |\alpha_n \varrho^n| \le M.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$|\alpha_n| \le \frac{M}{\varrho^n} \qquad \Longrightarrow \qquad |n\alpha_n r^{n-1}| = \frac{1}{r} n |\alpha_n| r^n \le \frac{M}{r} n \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n = Anq^n,$$

ahol $A := \frac{M}{r}$ és $0 < q := \frac{r}{\varrho} < 1$. A gyökkritérium szerint

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{Anq^n} = q < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1} Anq^n \quad \text{sor konvergens.}$$

Így a majoráns kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1} n\alpha_n r^{n-1}$ sor abszolút konvergens, tehát a $(*)$ állítást igazoltuk.

Vegyünk most egy tetszőleges $b \in K_R(a)$ pontot. Válasszuk meg r-et úgy, hogy

$$0 \le |b-a| < r < R \qquad \Longrightarrow \qquad b \in K_r(a).$$

Legyen

$$C := \sum_{n=1}^{+\infty} n|\alpha_n| r^{n-1} < +\infty,$$

hiszen $(*)$ miatt a fenti sor konvergens. Ekkor minden $x \in K_r(a)$ helyen a következő becslések érvényesek:

$$\Big|f(x)-f(b)\Big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \Big((x-a)^n - (b-a)^n\Big)\right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \cdot |x-b| \cdot \Big(|x-a|^{n-1} + |x-a|^{n-2} \cdot |b-a| + \cdots + |b-a|^{n-1}\Big) \le$$

$$\le \Big(\text{felhasználva, hogy } |x-a|<r,\ |b-a|<r\Big) \le |x-b| \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| n r^{n-1} = C \cdot |x-b|.$$

Így

$$0 \le \Big|f(x)-f(b)\Big| \le C \cdot |x-b| \xrightarrow[x\to b]{} 0.$$

A függvényhatárértékre vonatkozó közrefogási elv szerint

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b).$$

Nevezetes határértékek 2.

$\boxed{7.}$ **Az** exp**, a** sin **és a** cos **függvény végesben vett határértéke.**

Az exp, a sin és a cos függvényt $\mathbb{R}$-en hatványsorok összegfüggvényeként értelmeztük. Ezért az előző tétel szerint a függvényeknek minden $a \in \mathbb{R}$ pontban van határértéke, és azok egyenlők az a-ban vett helyettesítési értékekkel:

$$\lim_{x\to a} e^x = e^a, \qquad \lim_{x\to a} \sin x = \sin a, \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a.$$

$\boxed{8.}$ **Az** exp **függvény határértéke** $(\pm\infty)$**-ben.**

Mivel

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots > x \qquad (x \ge 0)$$

és $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, ezért

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, ezért

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \Big(\text{az } y=-x \text{ helyettesítéssel}\Big) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Így

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Megjegyzés. A helyettesítéssel történő határértékszámítást később fogjuk bevezetni. ■

$\boxed{9.}$ **Az $\dfrac{\sin x}{x}$ határértéke a 0 pontban.**

2. tétel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bizonyítás. A definíció szerint

$$\sin x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért

$$\mathbb{R} \ni \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

De a fenti hatványsor az $x = 0$ pontban is konvergens, hiszen ekkor a sor összege nyilvánvalóan 1. Ezért a hatványsor az egész $\mathbb{R}$-en konvergens, azaz konvergenciasugara $R = +\infty$. Így a hatványsor összegfüggvényének a határértéke szerint

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) = 1,$$

hiszen a hatványsornak a 0 pontban vett határértéke megegyezik az $x = 0$ pont behelyettesítésével kapott sor összegével, ami 1-gyel egyenlő.

Monoton függvények határértéke

Először emlékeztetünk függvények monotonitásainak a fogalmaira. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathcal{D}_f$. Az f függvény

- **monoton növekvő $\boldsymbol{H}$-n** (jelben $f \nearrow H$-n), ha

$$\forall x_1, x_2 \in H,\ x_1 < x_2 \ \text{ esetén } \ f(x_1) \leq f(x_2),$$

- **szigorúan monoton növekvő $\boldsymbol{H}$-n** (jelben $f \uparrow H$-n), ha

$$\forall x_1, x_2 \in H,\ x_1 < x_2 \ \text{ esetén } \ f(x_1) < f(x_2),$$

- **monoton csökkenő $\boldsymbol{H}$-n** (jelben $f \searrow H$-n), ha

$$\forall x_1, x_2 \in H,\ x_1 < x_2 \ \text{ esetén } \ f(x_1) \geq f(x_2),$$

- **szigorúan monoton csökkenő $\boldsymbol{H}$-n** (jelben $f \downarrow H$-n), ha

$$\forall x_1, x_2 \in H,\ x_1 < x_2 \ \text{ esetén } \ f(x_1) > f(x_2).$$

Az f függvény **monoton $\boldsymbol{H}$-n**, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.

Megjegyzés. A $H = \mathcal{D}_f = \mathbb{N}$ speciális esetben visszakapjuk a monoton sorozatok korábbi definícióit. ■

3. tétel. *Legyen $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az f függvény monoton (α, β)-n, akkor f-nek $\forall a \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és ezek végesek.*

a) *Ha $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x > a\Big\},$$

$$\lim_{a-0} f = \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x < a\Big\}.$$

b) *Ha $f \searrow (\alpha, \beta)$-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f = \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x > a\Big\},$$

$$\lim_{a-0} f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x < a\Big\}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n. A jobb oldali határértékre vonatkozó állítást igazoljuk.

Legyen

$$m := \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x > a\Big\}.$$

Világos, hogy $m \in \mathbb{R}$. Az infimum definíciójából következik, hogy

i) $\forall x \in (\alpha, \beta),\ x > a \colon m \le f(x)$,

ii) $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_1 \in (\alpha, \beta),\ x_1 > a \colon f(x_1) < m + \varepsilon$.

Így $m \le f(x_1) \le m + \varepsilon$. Mivel $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n, ezért

$$m \le f(x) \le f(x_1) < m + \varepsilon \qquad \big(x \in (a, x_1)\big).$$

A $\delta := x_1 - a > 0$ választással tehát azt mutattuk meg, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in (\alpha, \beta),\ a < x < a + \delta \colon \underbrace{0 \le f(x) - m < \varepsilon}_{f(x) \in K_\varepsilon(m)}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy f-nek a-ban van jobb oldali határértéke, és az m-mel egyenlő, azaz

$$\lim_{a+0} f = m = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x > a\Big\}.$$

A tétel többi állítása hasonlóan bizonyítható.

Megjegyzés. Legyen f monoton növekvő. Ha $+\infty \in \mathcal{D}'_f$, akkor létezik a $\lim\limits_{x \to +\infty} f$ határérték, és

$$\lim_{x \to +\infty} f = \sup \mathcal{R}_f \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ha $-\infty \in \mathcal{D}'_f$, akkor létezik a $\lim\limits_{x \to -\infty} f$ határérték, és

$$\lim_{x \to -\infty} f = \inf \mathcal{R}_f \in \overline{\mathbb{R}}. \blacksquare$$

Függvények folytonossága 1.

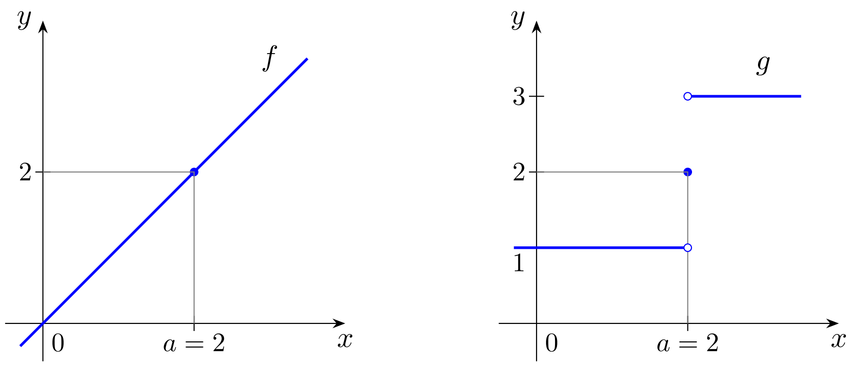
A „folytonos” kifejezést a mindennapi életben is gyakran használjuk. A folytonosságról alkotott intuitív képünk alapján pl. egy intervallumon értelmezett valós értékű függvényt akkor célszerű **folytonosnak** nevezni, ha a függvény grafikonját az íróeszköz felemelése nélkül meg tudjuk rajzolni. Ebben a szakaszban arról lesz szó, hogy valós-valós függvényekre a szemléletünk alapján adódó ezzel kapcsolatos tulajdonságot hogyan lehet matematikai szempontból precíz formában megfogalmazni. Első lépésként azonban a **pontbeli folytonosság** fogalmát kell megismerni.

A pontbeli folytonosság fogalmának a motivációja

Tegyük fel, hogy egy képlettel megadott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény helyettesítési értékét akarjuk kiszámítani egy adott $a \in \mathcal{D}_f$ pontban. Előfordulhat, hogy a-nak csak közelítő értékeivel számolhatunk. Ez a helyzet például akkor, ha a értékeit mérés segítségével határozzuk meg, tehát a-nak csak a műszerek pontosságától függően jobb vagy rosszabb x közelítő értékeit ismerjük. A mért x értékből kiszámítva $f(x)$-et azt reméljük, hogy ha a-t jó közelítéssel, vagyis kis hibával adtuk meg, akkor $f(a)$ értékét is jó közelítéssel fogjuk megkapni $f(x)$-ből. Ilyenkor feltételezzük azt, hogy ha a mérési adatok kevéssel térnek el a tényleges értéktől, akkor a mérési adatokból számított érték is csak kevéssé tér el a ténylegestől.

Ezekben az esetekben tehát *adva van egy f függvény, és feltételezzük, hogy $f(x)$ közel lesz $f(a)$-hoz, feltéve, hogy x elég kevéssé tér el a-tól.* Valós-valós függvénynek ezt a tulajdonságát nevezzük **pontbeli folytonosságnak**.

Tekintsük például a következő két egyszerű függvényt:



Azt fogjuk mondani, hogy az f függvény **folytonos az $a = 2$ pontban**, a g függvény pedig **nem folytonos az $a = 2$ pontban**.

Figyeljük meg, hogy hasonló problémával találkoztunk már függvények *végesben vett véges határérték* fogalmának a definíciójánál. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy *az f függvénynek az a pontban vett határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám*, ha

$$(\triangle) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta\colon\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

A pontbeli folytonosság fogalmának a definíciója

1. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban****, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta\colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\boldsymbol{f \in C\{a\}}$.

Fontos! A függvény pontbeli folytonosságát csak értelmezési tartománybeli pontokra értelmezzük! Ezért csak ilyen pontokban lehet vizsgálni a folytonosságot. Azokat az értelmezési tartománybeli pontokat, ahol a függvény nem folytonos **szakadási helyeknek** nevezzük.

A definícióból rögtön következik, hogy ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$, akkor

$$f \notin C\{a\} \quad \iff \quad \exists\, \varepsilon > 0,\ \ \forall\, \delta > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta:\ \ \big|f(x) - f(a)\big| \geq \varepsilon.$$

Figyeljük meg, hogy mi a különbség a *pontbeli folytonosság* és a hozzá nagyon hasonló *végesben vett véges határérték* között! A folytonosságnál megköveteljük azt, hogy $a \in \mathcal{D}_f$ legyen (az értelmezési tartományon kívüli pontokban nem beszélhetünk folytonosságról). A határértéket viszont az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontokban értelmeztük. A két fogalom közötti kapcsolatról csak azokban a pontokban lehet szó, amelyekre $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f$, de $a \notin \mathcal{D}'_f$, azaz $a \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}'_f$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $r > 0$, hogy

$$K_r(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}.$$

Az ilyen a pontokat az értelmezési tartomány **izolált pontjainak** nevezzük.

A folytonosság definíciójából rögtön következik, hogy ha a izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in C\{a\}$, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett a $\delta := r$ megfelelő választás.

A definíciók alapján az is világos, hogy ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor az f függvény akkor és csak akkor folytonos a-ban, ha f-nek a-ban van határértéke, és az egyenlő az a-ban felvett $f(a)$ függvényértékkel.

4. tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1º *Ha $a \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}'_f$, azaz az a pont izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in C\{a\}$.*

2º *Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, azaz az a pont torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor*

$$f \in C\{a\} \quad \iff \quad \exists \lim_a f \quad \textit{és} \quad \lim_a f = f(a).$$

Példák. A pontbeli folytonosság definíciója, vagyis

$$f \in C\{a\} \quad :\iff \quad a \in \mathcal{D}_f \ \text{ és } \ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta\colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon$$

alapján igazoljuk az alábbi állításokat. Azt kell megmutatni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik „alkalmas” $\delta > 0$ valós szám.

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := c$ $(c \in \mathbb{R})$ konstans függvény folytonos $\forall a \in \mathcal{D}_f$ pontban, hiszen

  $$\big|f(x) - f(a)\big| = |c - c| = 0 < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

  miatt minden $\varepsilon > 0$-hoz minden pozitív δ jó választás.

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := cx$ $(c \neq 0)$ függvény folytonos $\forall a \in \mathcal{D}_f$ pontban, hiszen tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$-hoz a $\delta := \varepsilon/|c|$ választással

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(a)\big| = |cx - ca| = |c| \cdot |x-a| < |c| \cdot \delta = \varepsilon.$$

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ függvény folytonos $\forall a \in \mathcal{D}_f$ pontban, hiszen tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$-hoz a $\delta := \varepsilon$ választással

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(a)\big| = \big||x| - |a|\big| \le |x-a| < \delta = \varepsilon.$$

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ függvény folytonos $\forall a \in \mathcal{D}_f$ pontban, hiszen tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$-hoz a $\delta := \sqrt{a^2 + \varepsilon} - |a| > 0$ választással $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta$ esetén

$$\big|f(x) - f(a)\big| = |x^2 - a^2| = |x-a| \cdot |x+a| = |x-a| \cdot \big|(x-a) + 2a\big| < \delta\big(\delta + 2|a|\big) =$$
$$= \delta^2 + 2\delta|a| = \big(\delta + |a|\big)^2 - a^2 = \varepsilon.$$

Megjegyzések.

1° Vegyük észre, hogy az előbbi példákban a függvény értelmezési tartománya bármilyen számhalmaz lehet.

2° Az utolsó példából látható, hogy δ nem csak az ε-tól függhet, hanem attól az a ponttól is, ahol a folytonosságot vizsgáljuk. ■

Folytonos függvények alaptulajdonságai

„Összetettebb" függvények esetében az előző példákhoz képest jóval nehezebb a folytonosságot igazolni a definíció alapján. Ezért olyan állításokat fogunk megfogalmazni és igazolni, amelyek lényegesen leegyszerűsítik a folytonosság vizsgálatát.

5. tétel (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv). *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \ \ \textit{esetén} \ \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a).$$

Bizonyítás. Ha a izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor egyrészt $f \in C\{a\}$, másrészt

$$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim(x_n) = a \quad \Longrightarrow \quad x_n = a \ \text{ m.m. } n\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) = f(a) \text{ m.m. } n\text{-re},$$

és így $\lim\big(f(x_n)\big) = f(a)$. A két állítás tehát ekvivalens.

Ha a torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in C\{a\} \iff \exists \lim_a f = f(a)$. A határértékre vonatkozó átviteli elv szerint ez ekvivalens azzal, hogy

$$\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \ \text{ esetén } \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A = f(a).$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ez ekvivalens a tételben szereplő feltétellel.

Megjegyzés. Az előző tétel a határértékre vonatkozó átviteli elv bizonyításához hasonlóan is igazolható. Ehhez a pontbeli folytonosság fogalmát környezetekkel írjuk fel:

$$f \in C\{a\} \quad :\Longleftrightarrow \quad a \in \mathcal{D}_f \ \text{ és } \ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x) \in K_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

A különbség lényegében az, hogy most a „rendes” és nem a pontozott környezetekkel dolgozunk. ■

6. tétel (Az algebrai műveletek és a folytonosság kapcsolata). *Tegyük fel, hogy $f, g \in C\{a\}$. Ekkor a*

$$\lambda f \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \qquad f+g, \qquad f \cdot g, \qquad \frac{f}{g} \quad (\text{ha } g(a) \neq 0)$$

függvények is folytonosak a-ban.

Bizonyítás. A tétel állítása a folytonosságra vonatkozó átviteli elvnek, valamint a műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételnek közvetlen következménye.

A tétel következménye, hogy **a hatványfüggvények, a polinomok**, valamint **a racionális törtfüggvények az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak**.

A gyökfüggvények is folytonosak az értelmezési tartományuk minden pontjában. Ez az állítás a folytonosságra vonatkozó átviteli elvnek, és a sorozatok m-edik gyökének a határértékére vonatkozó állítás közvetlen következménye, hiszen

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{a} \qquad (a \geq 0,\ m = 2, 3, \dots).$$

7. tétel (Hatványsor összegfüggvényének folytonossága).
Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a hatványsor teljes konvergenciahalmazán.

Bizonyítás. Legyen R, ill. f a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara, ill. összegfüggvénye. Ekkor

- Ha $R = 0$, akkor $\mathcal{D}_f = \{a\}$, hiszen ekkor a hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens. Tehát a izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, és így $f \in C\{a\}$.
- Ha $0 < R \leq +\infty$, akkor a szóban forgó hatványsor konvergenciahalmazának belseje az $(a-R, a+R)$ intervallum. A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel szerint egy hatványsor összegfüggvényének van határértéke a konvergenciahalmazának minden b belső pontjában, és a határérték megegyezik a pont behelyettesítésével kapott sor összegével, ami nem más, mint $f(b)$, azaz

  $$\exists \lim_{n\to+\infty} f(x) = f(b) \qquad \Longrightarrow \qquad f \in C\{b\}.$$

  Tehát a hatványsor folytonos a konvergenciahalmaz minden belső pontjában.
- Ha $0 < R < +\infty$ és a hatványsor konvergens a konvergenciahalmaz valamelyik határpontjában, akkor is igazolható az összegfüggvény folytonossága ezekben a pontokban. Ennek bizonyítása elég hosszadalmas, ezért azt nem részletezzük.

Az előző tétel következménye, hogy **az exp, a sin és a cos függvény minden $\mathbb{R}$-beli pontban folytonos**, hiszen mindegyik az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvénye.

8. tétel (Előjeltartás). *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Ekkor*

$$\exists K(a),\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap K(a)\colon f(x) > 0,$$

azaz $f(a)$ előjelét egy alkalmas $K(a)$ környezetben felvett függvényértékek is öröklik.

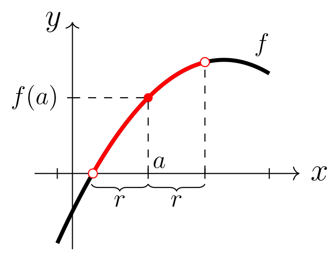
Bizonyítás. Alkalmazzuk a folytonosság definícióját az $\varepsilon := f(a) > 0$ számmal. Ekkor $\exists \delta > 0$, hogy

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < \delta \ \text{ esetén } \ \big|f(x) - f(a)\big| < f(a),$$

azaz, ha $x \in \mathcal{D}_f$ és $x \in K_\delta(a)$, akkor

$$-f(a) < f(x) - f(a) < f(a) \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < f(x) \quad \big(< 2f(a)\big).$$

Az előjeltartást úgy tudjuk jól szemléltetni, ha veszünk egy intervallumon értelmezett folytonos függvényt. Az ábrán is látható, hogy ha a az intervallum olyan belső pontja, amire $f(a) > 0$ teljesül, akkor f pozitív értékeket vesz fel az $(a - r, a + r)$ környezetben .



Halmazon folytonos függvények

Eddig a folytonosságot a határértékhez hasonlóan pontban értelmeztünk. A folytonosság értelmezhető az egész függvényre is.

2. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **függvény folytonos**, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. Jelölés: $\boldsymbol{f \in C}$.*

Ez azt jelenti, hogy a racionális törtfüggvények, a gyökfüggvények, illetve az exp, a sin és a cos függvények folytonosak.

Megjegyzés. Úgy tűnik, hogy a most bevezetett fogalom eltér a folytonosságról alkotott intuitív képünktől. Például az

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}$$

reciprokfüggvény folytonos, hiszen $0 \notin \mathcal{D}_f$, és ezért ott nem vizsgálhatjuk meg a folytonosságot. A többi pontban folytonos a hányadosra vonatkozó műveleti tétel alapján. A grafikonja azonban nem rajzolható meg az íróeszköz felemelése nélkül. **Intervallumon értelmezett** függvények esetében ez az intuitív kép azonban megmarad. ■

A folytonosságot egy $A \subset \mathcal{D}_f$ halmazon is értelmezhetjük.

3. definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $A \subset \mathcal{D}_f$. Az f függvény* ***folytonos az A halmazon*** *$\big($jelben $\boldsymbol{f \in C(A)}\big)$, ha*

$$\forall a \in A \text{ esetén } f|_A \in C\{a\},$$

ahol $f|_A$ jelöli az f függvény A halmazra való leszűkítését, vagyis az

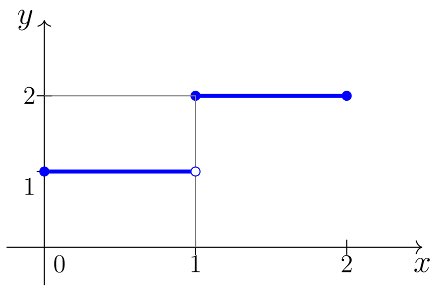
$$f|_A : A \to \mathbb{R}, \quad f|_A(x) := f(x)$$

függvényt.

Vigyázat! az „f folytonos A-n" nem jelenti azt, hogy f az A halmaz minden pontjában folytonos, hanem az, hogy $f|_A$ az A halmaz minden pontjában folytonos, ami nem ugyanaz. Például az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 2 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

függvény folytonos az $[1, 2]$ halmazon, de $f \notin C\{1\}$.



A összetett függvény folytonossága és határértéke

A függvények közötti kompozíció műveletére a folytonosság és a határérték esetén lényegesen különböző tételeket kell megfogalmaznunk. Kezdjük a folytonosság és a kompozíció kapcsolatával.

9. tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, azaz az összetett függvény „örökli" a belső- és a külső függvény folytonosságát.*

Bizonyítás. A feltételek szerint $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $g(a) \in \mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f$, azaz $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Így valóban beszélhetünk az $f \circ g$ összetett függvényről, és $a \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ is igaz.

Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{D}_g$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = a$. Mivel $g \in C\{a\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim\big(g(x_n)\big) = g(a)$. Jelölje

$$b := g(a) \qquad \text{és} \qquad y_n := g(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ és $\lim(y_n) = b$. Mivel $f \in C\{b\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim\big(f(y_n)\big) = f(b)$. Ugyanakkor

$$f(b) = f\big(g(a)\big) = (f \circ g)(a) \qquad \text{és} \qquad f(y_n) = f\big(g(x_n)\big) = (f \circ g)(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Azt igazoltuk tehát, hogy $\forall(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g}$, $\lim(x_n) = a$ sorozat esetén igaz, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \big(f(y_n)\big) = f(b) = (f \circ g)(a).$$

Ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $f \circ g \in C\{a\}$.

Az előző tétel értelmében a

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sin(x^2)$$

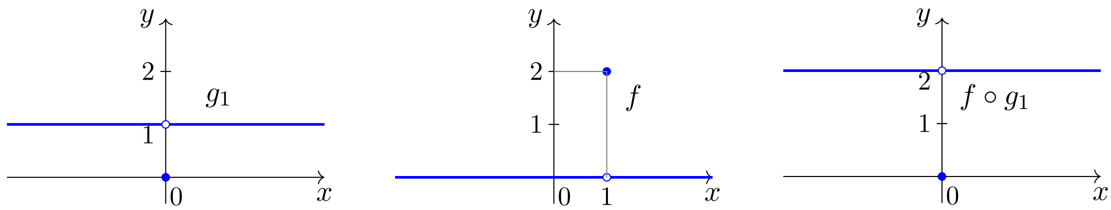
függvény folytonos minden $a \in \mathbb{R}$ pontban, hiszen

$$h = f \circ g, \qquad \text{ahol} \qquad f(x) := \sin x \ (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad g(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R}),$$

és f, g folytonos minden $\mathbb{R}$-beli pontban.

Függvényhatárérték esetében más a helyzet. Az összetett függvény általában nem „örökli" a külső függvény határértékét. Nézzük két példát!

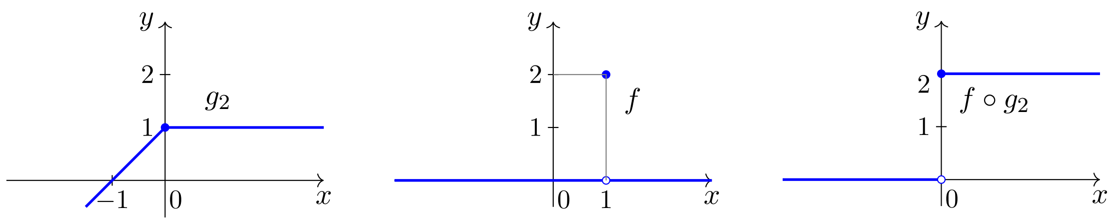
1. példa.



$\lim\limits_{0} g_1 = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{1} f = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{0} (f \circ g_1) = 2$

Ebben az esetben $\boxed{\lim\limits_{0}(f \circ g_1) = 2 \neq 0 = \lim\limits_{1} f}$.

2. példa.



$\lim\limits_{0} g_2 = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{1} f = 0$ $\qquad$ $\nexists \lim\limits_{0} (f \circ g_2)$

Ebben az esetben $\boxed{\nexists \lim\limits_{0}(f \circ g_2)}$.

Vegyük észre, hogy a példákban mindkét g_1, g_2 függvény felveszi az $y = 1$ értéket a 0-nak minden pontozott környezetében, valamint az f függvény nem folytonos az 1 pontban. A következő tétel azt állítja, hogy ez okozza a problémát.

10. tétel (Az összetett függvény határértéke). *Legyen* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *két valós függvény, amire* $R_g \subset \mathcal{D}_f$ *teljesül, és* $a \in \overline{\mathbb{R}}$. *Tegyük fel, hogy*

$$a \in \mathcal{D}_g', \quad \exists \lim_a g =: b \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad b \in \mathcal{D}_f', \quad \exists \lim_b f =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1° *ha* $b \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $f \in C\{b\}$, *akkor az* $f \circ g$ *függvénynek van határértéke az* a *pontban, és*

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to a} g(x)\Big) = A,$$

azaz a kompozíció- és a határérték képzés sorrendje felcserélhető.

2° *ha a* g *függvény nem veszi fel a* b *értéket az* a *egy pontozott környezetében, akkor az* $f \circ g$ *függvénynek van határértéke az* a *pontban, és*

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{y \to b} f(y) = A.$$

Bizonyítás. Az $R_g \subset \mathcal{D}_f$ feltételből következik, hogy $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g$.

Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_g \setminus \{a\}$ egy olyan sorozat, amire $\lim(x_n) = a$ teljesül. Jelölje

$$y_n := g(x_n) \in \mathcal{D}_f \quad \text{és} \quad z_n := f(y_n) = f\big(g(x_n)\big) = (f \circ g)(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha igazolni tudjuk, hogy $\lim(z_n) = A$, akkor a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint a tétel mindkét állítása teljesül.

A tétel feltétele szerint $\exists \lim_a g = b$. Mivel $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_g \setminus \{a\}$, $\lim(x_n) = a$ teljesül, így a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint

$$(\star) \qquad (y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \qquad \lim_{n \to +\infty} y_n = b$$

teljesül. Ekkor

1. ha $f \in C\{b\}$, akkor $(\star)$ miatt a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = f(b) = A.$$

2. tegyük fel, hogy g nem veszi fel a b értéket egy $\dot{K}(a)$ pontozott környezetben, azaz

$$\forall x \in \dot{K}(a) \cap \mathcal{D}_g \colon g(x) \neq b, \quad \text{ahol} \quad \dot{K}(a) := K(a) \setminus \{a\}.$$

Mivel $\lim(x_n) = a$, így véges sok index kivételével $x_n \in K(a)$. Véges sok tag elhagyása nem befolyásolja a határértéket, ezért feltételezhető, hogy $x_n \in K(a)$ minden n-re. De $x_n \neq a$, ezért $x_n \in \dot{K}(a)$ minden n-re. Ekkor a g feltétele miatt $y_n = g(x_n) \neq b$ minden n-re. Ezzel $(\star)$-ot átírhatjuk az alábbi módon:

$$(\star\star) \qquad (y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{b\}, \qquad \lim_{n \to +\infty} y_n = b.$$

Mivel $\exists \lim\limits_{b} f = A$, így $(\star\star)$ miatt a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = A.$$

Mindkét esetben igazoltuk, hogy $\lim(z_n) = A$.

Megjegyzések.

1^o Ha $b \notin \mathcal{D}_f'$, akkor $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$, hiszen ekkor $f \in C\{b\}$, és csak a folytonosságot használtuk fel a bizonyítás 1. pontjában.

2^o Vegyük észre, hogy ha $b = \pm\infty$, akkor b nem egy számérték, amit a g függvény fel tud venni. Ezért ebben az esetben a tétel 2. állítása szerint az összetett függvény mindig „örökölni" fogja a külső függvény határértékét. ■

A tétel mindkét állításának eredménye a

$$\boxed{\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{y\to b} f(y) \qquad \big(y = g(x) \to b,\ \text{ha } x \to a\big)}$$

módon is írható, ami úgy tekinthető, mint a $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big)$ határértékben alkalmazott $y = g(x)$ helyettesítés. A tétel értelmében ez a helyettesítés akkor alkalmazható, ha

- f folytonos a b pontban,

vagy

- g nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében (pl. ha g invertálható, mondjuk nem állandó, lineáris függvény).

Megjegyzés. Már korábban alkalmaztuk a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} \qquad (y = -x \to \infty,\ \text{ha } x \to -\infty)$$

helyettesítést. Ebben $a = -\infty$, $b = +\infty$,

$$g(x) := -x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f(y) := \frac{1}{e^y} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel g nem veheti fel a $b = +\infty$ elemet, ezért a helyettesítés alkalmazható. ■