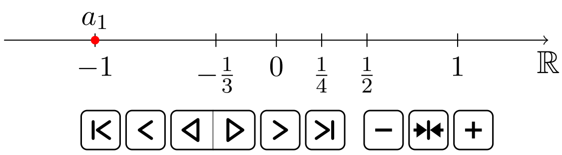
3. előadás

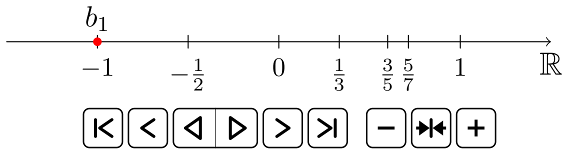
VALÓS SOROZATOK 2.

Sorozat konvergenciájának a fogalma

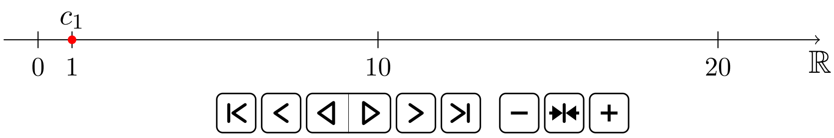
Most a sorozatok *kevésbé egyszerű*, de igen fontos tulajdonságával, a **konvergencia** fogalmával fogunk megismerkedni. Ábrázoljuk a számegyenesen például a következő sorozatokat:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \qquad\qquad b_n = (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$





$$c_n = n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$



Szemléletesen világos, hogy az (a_n) sorozat tagjai 0 körül „sűrűsödnek”, amit kifejezhetünk úgy is, hogy „a nagy indexű tagok közel vannak 0-hoz”. A (b_n) sorozat tagjainak egyik része -1 körül, a másik része 1 körül „sűrűsödik”, a (c_n) sorozatnak pedig egyetlen valós sűrűsödési helye sincs.

Egy sorozatot akkor fogunk **konvergensnek** nevezni, ha a tagjai egyetlen szám körül sűrűsödnek. Ez igaz az (a_n) sorozatra, amelyiknél azt látjuk, hogy ha n „nagy”, akkor $(-1)^n/n$ értéke „nagyon kicsi”, azaz nagyon közel van 0-hoz. Pontosabban: *ha 0-nak bármilyen (kicsi) környezetét vesszük, akkor $(-1)^n/n$ „bele esik” ebbe környezetbe, ha n elég nagy.* Vegyük észre, hogy ez pontosan azt is jelenti, hogy *ha 0-nak bármilyen környezetét vesszük, akkor azon kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja eseik.*

1. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat* ***konvergens****, ha*

$(*)$ $\quad \exists\, A \in \mathbb{R},$ *hogy* $\forall\, \varepsilon > 0$ *számhoz* $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > n_0$ *indexre* $|a_n - A| < \varepsilon.$

Ekkor az A számot a sorozat ***határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim\,(a_n) := A, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n := A, \qquad a_n \to A \ (n \to +\infty).$$

Az (a_n) sorozatot ***divergensnek*** *nevezzük, ha nem konvergens*

Megjegyzések.

1° Az $\varepsilon > 0$ számot **hibakorlátnak**, n_0-at pedig **küszöbindexnek** nevezzük. Világos, hogy n_0 függ az ε-tól, ezért szokás ezt az *ε-hoz tartozó küszöbindexnek* is nevezni és $n_0(\varepsilon)$-nal jelölni. Egy adott ε hibakorláthoz tartozó küszöbindex nem egyértelmű, ui. bármely n_0-nál nagyobb természetes szám is egy „jó” küszöbindex.

2° Megállapodunk abban, hogy $(*)$-ot így rövidítjük:

$$\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

3° Ha egy sorozat divergens, akkor $(*)$ nem teljesül, ami pozitív állítás formájában azt jelenti, hogy:

$$\forall\, A \in \mathbb{R}\text{-hez}\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez}\ \exists\, n > n_0\colon |a_n - A| \geq \varepsilon. \ \blacksquare$$

1. tétel (A határérték egyértelműsége). *Ha az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő A szám egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra $(*)$ az A_1 és az A_2 számokkal is teljesül. Indirekt módon tegyük fel azt is, hogy $A_1 \neq A_2$. Ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon |a_n - A_1| < \varepsilon, \quad \text{és}$$

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2\colon |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

(pozitív) számot. Az ennek megfelelő n_1, n_2 indexeket figyelembe véve legyen

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > n_0$, akkor nyilván $n > n_1$ és $n > n_2$ is fennáll, következésképpen

$$|A_1 - A_2| = \Big|(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)\Big| \leq |a_n - A_1| + |a_n - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $\Big|A_1 - A_2\Big| < \Big|A_1 - A_2\Big|$ következne. Ezért csak $A_1 = A_2$ lehet.

Az előzőekből következik, hogy

$$(1) \qquad \boxed{\lim\,(a_n) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n > n_0: \quad |a_n - A| < \varepsilon}\,.$$

Az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, vagyis $a_n \in K_\varepsilon(A)$, azaz a_n eleme az A középpontú ε sugarú környezetnek. Ezért

$$(2) \qquad \lim\,(a_n) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n > n_0: \quad a_n \in K_\varepsilon(A)\,.$$

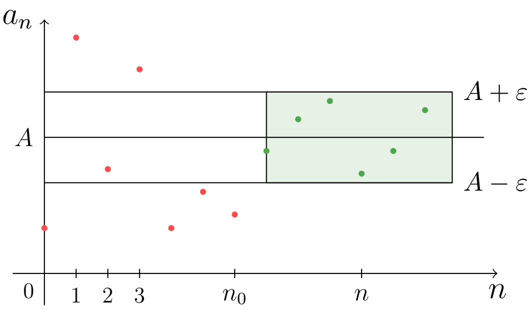
Mivel a küszöbindex előtt csak véges sok index van, ezért

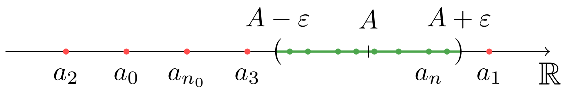
$$(3) \qquad \lim\,(a_n) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ esetén az } \Big\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin K_\varepsilon(A)\Big\} \text{ véges halmaz.}$$

Az (a_n) sorozat pedig pontosan akkor divergens, ha

$$\forall A \in \mathbb{R}\text{-hoz} \;\; \exists \varepsilon > 0, \;\; \forall n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez} \;\; \exists n > n_0: \;\; |a_n - A| \ge \varepsilon. \tag{4}$$

A határérték fogalmát szemléltetik az alábbi ábrák:





Megjegyzések.

1^o A fentieket célszerű szavakkal is megfogalmazni.

(2)-őt például így: „Az (a_n) sorozatnak akkor és csak akkor határértéke A, ha ennek tetszőleges környezete tartalmazza a sorozat minden, alkalmas küszöbindex utáni tagját."

(3)-at például így: „Az (a_n) sorozatnak a határértéke A pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén a sorozatnak csak véges sok tagja esik a $K_\varepsilon(A)$ környezeten kívül."

Szemléletesen, de „pongyolán" fogalmazva modhatjuk ezt is: „Az a tény, hogy az (a_n) sorozatnak A a határértéke, azt jelenti, hogy *a sorozat nagy indexű tagjai közel vannak az A számhoz*". Ha tehát egy sorozat határértékét keressük, akkor azt kell megvizsgálnunk, hogy a sorozat nagy indexű tagjai hogyan „viselkednek".

(4)-et pedig így fogalmazhatjuk meg: „Az (a_n) sorozat pontosan akkor divergens, ha minden $A \in \mathbb{R}$ számnak van olyan $K_\varepsilon(A)$ környezete, hogy a sorozat tetszőlegesen nagy n_0 indexű tagjánál van olyan nagyobb n indexű tag, amelyik nincsen benne a $K_\varepsilon(A)$ környezetben."

2^o Sorozatok konvergenciájának a vizsgálata és határértékének a meghatározása a *definíció alapján* igen sok esetben nem egyszerű feladat. Hamarosan ismertetünk olyan eredményeket, amelyek megkönnyítik az ilyen feladatok megoldását.

3^o A konvergencia fogalmáról, történeti megjegyzések. ■

1. feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat konvergens és 0 *a határértéke!*

Megoldás. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz} \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n > n_0 \colon |a_n - 0| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$|a_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < n\varepsilon.$$

A valós számok arkhimédészi tulajdonságából következik, hogy ε-hoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}^+$ természetes szám, amelyre $1 < n_0\varepsilon$ (például az $1/\varepsilon$ szám $\left[1/\varepsilon\right]$-nal jelölt *egész része* rendelkezik ezzel a tulajdonsággal). Ha $\mathbb{N}^+ \ni n > n_0$, akkor az $1 < n_0\varepsilon < n\varepsilon$ egyenlőtlenség is fennáll. Azt kaptuk tehát, hogy adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \mathbb{N} \ni n > n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

így $\varepsilon > 0$-hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex.

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért $(*)$ valóban teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

(Világos, hogy adott $\varepsilon > 0$-hoz az imént megadott n_0 küszöbindexnél nagyobb természetes szám is jó küszöbindex. A küszöbindex megadásánál nem törekszünk a legkisebb küszöbindex meghatározására.)

2. feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$a_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat divergens!

Megoldás. Az állítással ellentétben tegyük fel azt, hogy a sorozat konvergens és $A \in \mathbb{R}$ a határértéke. A konvergencia definíciója szerint ez azt jelenti, hogy

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon = 1$. Ekkor

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - A| < 1.$$

Így,

$$\text{ha } n > n_0 \text{ páratlan} \implies a_n = (-1)^n = -1 \implies |(-1) - A| = |1 + A| < 1,$$

$$\text{ha } n > n_0 \text{ páros} \implies a_n = (-1)^n = 1 \implies |1 - A| < 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az A határértékre $|1 + A| < 1$ és $|1 - A| < 1$ is teljesül. Ebből az következik, hogy

$$2 = \Big|(1 - A) + (A + 1)\Big| \le |1 - A| + |A + 1| < 1 + 1 = 2, \text{ azaz } 2 < 2.$$

Ez az ellentmondás azt bizonyítja, hogy az (a_n) sorozat divergens.

Konvergens sorozatok néhány alaptulajdonsága

2. tétel. *Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és a* (b_n) *sorozatokra igaz a következő:*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \textit{hogy}\ \ \forall n > N\ \textit{indexre}\ a_n = b_n.$$

Ekkor az (a_n) *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha* (b_n) *is konvergens, továbbá az utóbbi esetben* $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

Bizonyítás. $\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) = A$. Ekkor

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1 \colon a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Tekintsünk egy rögzített $\varepsilon > 0$ valós számot, és legyen $n_0 := \max\{n_1, N\}$. Ha $n > n_0$, akkor $b_n = a_n \in K_\varepsilon(A)$ is igaz, ezért a (b_n) sorozat is konvergens, és $\lim(b_n) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Hasonlóan igazolható.

Megjegyzések.

1° Az állítás azt fejezi ki, hogy egy sorozat konvergenciáját és a határértékét a sorozat „első néhány” (akár az első százezer) tagja nem befolyásolja. Másként fogalmazva: ha egy sorozat (legfeljebb) véges sok tagját megváltoztatjuk, akkor ez sem a konvergencia tényén, sem pedig (ha konvergens sorozatból indulunk ki) a határértékén nem változtat.

2° A fentiek motiválják az alábbi elnevezések bevezetését. Ha valamely sorozat tagjaira vonatkozó állítás a sorozat véges sok tagját kivéve teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó állítás a sorozat **majdnem minden tagjára** (vagy majdnem minden indexre) teljesül. Ha tehát minden $n \in \mathbb{N}$-re $T(n)$ egy állítás, akkor megállapodunk abban, hogy a „$T(n)$ *majdnem minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén igaz*” megfogalmazás azt jelenti, hogy

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \ \forall\, n > N\ \ \text{indexre}\ \ T(n)\ \text{igaz}.$$

A „majdnem minden” kitételt a legtöbbször így rövidítjük: **m.m.**

Ezt a tényt egy másik szóhasználattal úgy fejezhetjük ki, hogy $T(n)$ **minden elég nagy** n**-re teljesül**. Például az előző tétel feltételét röviden így írhatjuk le: *Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és a* (b_n) *sorozatokra*

$$\boxed{a_n = b_n \quad (m.m.\ n \in \mathbb{N})},$$

vagy

$$\boxed{a_n = b_n \ \ \textit{minden elég nagy } n\textit{-re}}. \ \blacksquare$$

A következő állítás a konvergencia és a korlátosság kapcsolatára vonatkozik. Azt fejezi ki, hogy a **korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.**

3. tétel. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. Válasszuk a konvergencia definíciója szerinti jelöléssel ε-t 1-nek. Ehhez a hibakorláthoz

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 \colon |a_n - A| < 1.$$

Így

$$|a_n| = \big|(a_n - A) + A\big| \le |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \qquad (n > n_0).$$

Ha $n \le n_0$, akkor

$$|a_n| \le \max\big\{|a_0|,\, |a_1|,\, \ldots,\, |a_{n_0}|\big\}.$$

Legyen

$$K := \max\big\{|a_0|,\, |a_1|,\, \ldots,\, |a_{n_0}|,\, 1 + |A|\big\}.$$

Ekkor $|a_n| \le K$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat korlátos.

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz. Például a $\big((-1)^n\big)$ sorozat korlátos, de nem konvergens. A konvergenciának tehát a korlátosság *szükséges, de nem elégséges* feltétele. ■

Tágabb értelemben vett határérték

Fordítsuk a figyelmünket most a **divergens** sorozatokra. Ezek között vannak olyanok, amelyek bizonyos „maghatározott tendenciát mutatnak”.

Például az

$$a_n := n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat divergens, de „nagy” n-ekre az a_n értékek „nagyok”. Pontosabban: tetszőlegesen (nagy) pozitív P számra a sorozat tagjai bizonyos indextől kezdve P-nél nagyobbak (vagy másként fogalmazva: legfeljebb véges sok tag lesz P-nél kisebb). Az ilyen sorozatokat „$+\infty$-hez tartó” sorozatoknak fogjuk nevezni, vagy azt is mondjuk, hogy a sorozat „határértéke $+\infty$”.

Hasonló a helyzet a

$$b_n := -n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

divergens sorozat esetén is. Itt tetszőleges $P < 0$ számra a sorozat tagjai bizonyos indextől kezdve P-nél kisebbek (azaz legfeljebb véges sok tag lesz P-nél nagyobb). Az ilyen sorozatokat „$-\infty$-hez tartó” sorozatoknak fogjuk nevezni, vagy azt is mondjuk, hogy a sorozat „határértéke $-\infty$”.

2. definíció.

1^o *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **határértéke** $+\infty$ (vagy a sorozat **$+\infty$-hez tart**), ha*

$$\forall\, P > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon a_n > P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim\,(a_n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \qquad a_n \to +\infty, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

2^o *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **határértéke** $-\infty$ (vagy a sorozat **$-\infty$-hez tart**), ha*

$$\forall\, P < 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon a_n < P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim\,(a_n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \qquad a_n \to -\infty, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

3. feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty\,.$$

Megoldás. Azt kell bebizonyítani, hogy

$$(*) \qquad \forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P.$$

Legyen $P > 0$ egy adott valós szám, és vizsgáljuk az

$$(\triangle) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P$$

egyenlőtlenséget. Azt kell megmutatni, hogy ez bizonyos n_0 küszöbindextől kezdve minden n indexre igaz. A bizonyításhoz a következő **ötletet** alkalmazzuk: **a bal oldalnál kisebb, de jóval egyszerűbb kifejezésről mutatjuk meg, hogy az P-nél nagyobb bizonyos indextől kezdve**. A bal oldalt a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával *csökkentjük*:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n} = 1 + n > n.$$

Így $(\triangle)$ helyett a következőt kapjuk:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > n > P.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nyilván teljesül, ha $n > n_0 := [P]$, és ez azt jelenti, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P, \quad \text{ha} \quad n > n_0 = [P].$$

Következésképpen P-hez (például) $n_0 = [P]$ egy jó küszöbindex. Mivel P tetszőleges, ezért a fentiekből $(*)$ következik.

4. feladat. *A definíció alapján lássuk be, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7-2n^2}{n+10} = -\infty\,.$$

Megoldás. Azt kell bebizonyítani, hogy

$$(*) \qquad \forall P<0\text{-hoz } \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0\colon \frac{7-2n^2}{n+10}<P.$$

Legyen $P<0$ egy adott valós szám, és vizsgáljuk a

$$(\triangle) \qquad \frac{7-2n^2}{n+10}<P$$

egyenlőtlenséget. Azt kell megmutatni, hogy ez bizonyos n_0 küszöbindextől kezdve minden n indexre igaz. Szorozzunk be (-1)-gyel:

$$(\circ) \qquad \frac{2n^2-7}{n+10}>-P,$$

így a folytatás hasonló lesz az előző példánál leírtakhoz. Ezt az egyenlőtlenséget most meg tudnánk oldani. Jóval egyszerűbb azonban, ha az előző példánál alkalmazott ötletet követjük, ti. a bal oldalt *csökkentjük:*

$$\frac{2n^2-7}{n+10} = \frac{n^2+(n^2-7)}{n+10} > \ (\text{ha } n>2, \text{ akkor } n^2-7>0)\ >$$
$$> \frac{n^2}{n+10} > \ (\text{ha } n>10)\ > \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}.$$

Így $(\circ)$ helyett azt kapjuk, hogy

$$\frac{2n^2-7}{n+10} > \frac{n}{2} > -P, \qquad \text{ha } n>10.$$

Az $\frac{n}{2}>-P$, azaz az $n>-2P$ egyenlőtlenség igaz minden olyan n indexre, amelyre $n>[-2P]$.

A fentieket összefoglalva $(\circ)$, illetve a vele ekvivalens $(\triangle)$ egyenlőtlenségre az adódik, hogy

$$\frac{7-2n^2}{n+10}<P, \quad \text{ha } n>10 \text{ és } n>[-2P].$$

Következésképpen P-hez (például) $n_0 := \max\big\{10,\,[-2P]\big\}$ egy jó küszöbindex. Mivel $P<0$ tetszőleges, ezért a fentiekből $(*)$ következik.

Emlékeztetünk arra, hogy egy $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $r > 0$ sugarú környezete a következő nyílt intervallum:

$$K_r(A) := \begin{cases} (A-r, A+r), & \text{ha } A \in \mathbb{R} \\ \left(\dfrac{1}{r}, +\infty\right), & \text{ha } A = +\infty \\ \left(-\infty, -\dfrac{1}{r}\right), & \text{ha } A = -\infty. \end{cases}$$

A $(\pm\infty)$-hez tartás fogalmát környezetekkel is le tudjuk írni. Tekintsük pl. a $\lim (a_n) = +\infty$ esetet! A definíció szerint ez azt jelenti, hogy

$$\forall\, P > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 \colon a_n > P.$$

Legyen $A = +\infty$, $\varepsilon > 0$ és $P = 1/\varepsilon$. Ekkor

$$K_\varepsilon(A) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right) = (P, +\infty), \qquad \text{és így} \qquad a_n > P \iff a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Tehát

$$\lim (a_n) = +\infty \quad\iff\quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 : \ a_n \in K_\varepsilon(+\infty).$$

A $(-\infty)$-hez tartás fogalmát környezetekkel hasonló módon adhatjuk meg:

$$\lim (a_n) = -\infty \quad\iff\quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 : \ a_n \in K_\varepsilon(-\infty).$$

Az előzőek alapján tehát a konvergencia, illetve a $(\pm\infty)$-hez tartás fogalmakat környezetekkel **egységes** formában is megadhatjuk.

3. definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozatnak **van határértéke**, ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 : \ a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Megjegyzés. Szavakkal megfogalmazva azt is mondhatjuk, hogy „az (a_n) sorozatnak van határértéke, ha van olyan $\overline{\mathbb{R}}$-beli A elem, hogy ennek tetszőleges környezete tartalmazza a sorozat minden, alkalmas küszöbindex utáni tagját”. ■

A szóhasználatunkat illetően megállapodunk abban, hogy ha a továbbiakban azt mondjuk, hogy az (a_n) **sorozatnak van határértéke**, akkor ezen a következőt értjük:

- az (a_n) sorozat konvergens, vagyis a határértéke véges,
- vagy $\lim (a_n) = +\infty$,
- vagy $\lim (a_n) = -\infty$.

A továbiakban

$$\boxed{\lim (a_n) \in \mathbb{R}}$$

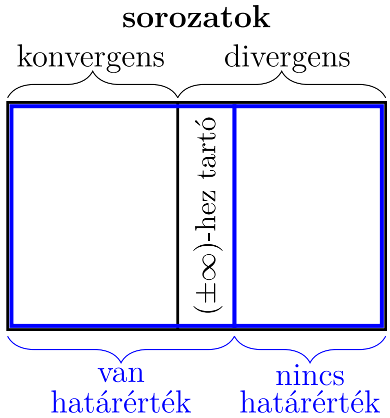
jelöli azt, hogy az (a_n) sorozat **konvergens**, vagyis véges a határértéke, a

$$\boxed{\lim (a_n) \in \overline{\mathbb{R}}}$$

jelölés pedig azt fejezi ki, hogy az (a_n) sorozatnak **(tágabb értelemben) van határértéke**, azaz a sorozat vagy konvergens, vagy $+\infty$ vagy pedig $-\infty$ a határértéke.

Megjegyzés. **Vigyázzunk!** A *konvergens* és a *határértékkel rendelkező* sorozatok fogalma között alig van különbség, ha ezeket környezetekkel írjuk le. Csak annyi a különbség, hogy konvergens sorozatoknál $A \in \mathbb{R}$, és a határértékkel rendelkező sorozatoknál pedig $A \in \overline{\mathbb{R}}$. **A határértékkel rendelkező sorozatok halmaza tágabb a konvergens sorozatok halmazánál**.

A korábbi megállapodásunk alapján egy (a_n) sorozat vagy **konvergens** vagy **divergens**. A fentiekben bizonyos divergens sorozatoknak is értelmeztük a határértékét, ezzel a sorozatok konvergens/divergens osztályozását tovább „finomítottuk”. Ezt az osztályozást illusztrálja a következő ábra:



A konvergenciához hasonlóan erre a határérték-fogalomra is igaz az egyértelműség.

4. tétel (A tágabb értelemben vett határérték egyértelműsége). *Ha az (a_n) sorozatnak van határértéke, akkor az előző definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem egyértelműen létezik; ezt a sorozat **határértékének** nevezzük, és így jelöljük:*

$$\lim\,(a_n) := A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n := A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad a_n \to A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \textit{ha} \quad n \to +\infty.$$

Részsorozatok

Most bevezetjük a **részsorozat** fogalmát. Egy sorozat részsorozatát úgy kapjuk, hogy az eredeti sorozatból elhagyunk néhány (esetleg végtelen sok) tagot, végtelen sokat megtartva az eredeti sorrendben.

4. definíció. *Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós sorozat és $\nu = (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekedő sorozat (röviden: ν egy **indexsorozat**). Ekkor az $a \circ \nu$ függvény is sorozat, amelyet az (a_n) sorozat ν indexsorozat által meghatározott **részsorozatának** nevezünk. Az $a \circ \nu$ sorozat n-edik tagja:*

$$\big(a \circ \nu\big)(n) = a(\nu_n) = a_{\nu_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$a \circ \nu = (a_{\nu_n}).$$

Megjegyzések.

1° A függvények kompozíciójának a definíciója alapján

$$\mathcal{D}_{a\circ\nu} = \Big\{n \in \mathcal{D}_\nu \mid \nu(n) \in \mathcal{D}_a\Big\} = \Big\{n \in \mathbb{N} \mid \nu(n) \in \mathbb{N}\Big\} = \mathbb{N},$$

ezért az $a \circ \nu$ függvény valóban sorozat.

2° Szemléletesen szólva, az $a = (a_n)$ sorozatból az $a \circ \nu = (a_{\nu_n})$ részsorozatot úgy kapjuk, hogy az $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ sorozatból kiválasztjuk (kiszedjük) az egyre nagyobb indexű $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ tagokat. Az (a_{ν_n}) jelölésben az is tükröződik, hogy a_{ν_n} az $a \circ \nu$ sorozat n-edik tagja, az „eredeti" $a = (a_n)$ sorozatnak pedig ν_n-edik tagja.

Például, ha

$$a = \Big(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \ldots\Big)$$

és

$$\nu = (2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots),$$

akkor

$$a \circ \nu = \Big(a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8, \ldots\Big).$$

Más szavakkal, részsorozathoz jutunk, ha egy sorozatból az index szerint növekvő sorrendben választunk ki végtelen sok tagot, azaz ha kiválasztunk egy tagot, akkor ezután csak magasabb indexű tagokból választhatunk. Részsorozatot kapunk akkor is, ha egy sorozatból kihagyunk tagokat úgy, hogy végtelen sok tagot megtartunk az eredeti sorrendben.

Nézzük még egy példát! Az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatnak

$$b_n := a_{n^2} = \frac{2n^2-1}{n^2+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad c_n := a_{2n-1} = \frac{4n-3}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

két különböző részsorozata, amelyet a $\nu_n = n^2$ és a $\nu_n = 2n-1$ indexsorozatok generálják.

3° Felvetődik a kérdés, hogy a részsorozatok öröklik-e az eredeti sorozat tulajdonságait. Abból a tényből, hogy egy részsorozat tagjai az eredeti sorozattal azonos sorrendben követik egymást nyilvánvalóan következik, hogy a részsorozatok monotonitása azonos az eredeti sorozat monotonitásával. Másrészt, a $\mathcal{R}_{a\circ\nu} \subset \mathcal{R}_a$ tartalmazásból következik, hogy minden felülről vagy alulról korlátos sorozat bármely részsorozata is ugyanilyen korlátosságú. Azonban egy részsorozat infimuma, ill. szuprémuma már nem feltétlenül egyezik meg az eredeti sorozat infimumával, ill. szuprémumával. ■

A részsorozatok határértékére vonatkozik következő állítás.

5. tétel. *Egy sorozatnak akkor és csak akkor van határértéke, ha minden részsorozatának van határértéke és mindegyike ugyanahhoz a határértékhez tart.*

Bizonyítás. $\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak van határértéke, és $\lim(a_n) = A$, ahol $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor a definíció szerint

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ esetén a } \ \Big\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \notin K_\varepsilon(A)\Big\} \ \text{ halmaz véges.}$$

Ha tetszőleges $a \circ \nu$ részsorozat, akkor $\mathcal{R}_{a\circ\nu} \subset \mathcal{R}_a$ miatt az

$$\Big\{n \in \mathbb{N} \mid a_{\nu_n} \notin K_\varepsilon(A)\Big\} \ \text{ halmaz is véges,}$$

és ez azt jelenti, hogy az $a \circ \nu$ részsorozatnak is van határértéke, és $\lim a \circ \nu = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Az állítás azonnal következik abból, hogy minden (a_n) sorozat saját magának részsorozata a $\nu_n = n$ indexsorozat megválasztása mellett.

Az előző állításból következik, hogy ha van olyan ν és μ indexsorozat, amelyre

$$\lim(a_{\nu_n}) \neq \lim(a_{\mu_n}),$$

akkor az (a_n) sorozatnak **nincs határértéke**. Ez a állítás jól alkalmazható a gyakorlatban. Pl. a definíció alapján már igazoltunk, hogy az

$$a_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

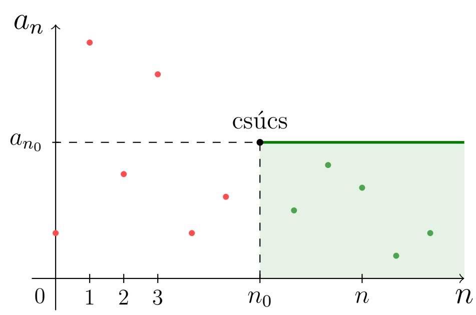
sorozat divergens. Az előzőek szerint ezt jóval egyszerűbben is meg tudjuk mutatni. Valóban, (a_n) páros indexű részsorozata $a_{2n} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $(1, 1, 1, \ldots)$, az 1-hez konvergál. A páratlan indexű részsorozata pedig $a_{2n+1} = -1$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $(-1, -1, -1, \ldots)$, a -1-hez konvergál. Tehát a sorozatnak nincs határértéke, és így divergens.

6. tétel. *Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik **monoton részsorozata**, azaz létezik olyan $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.*

Bizonyítás.

Az állítás igazolásához bevezetjük egy sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy a_{n_0} az (a_n) sorozat **csúcsa** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall\, n \geq n_0 \ \text{ indexre } \ a_n \leq a_{n_0}.$$



Két eset lehetséges.

<u>**1. eset.**</u> A sorozatnak **végtelen** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\colon a_{\nu_0} \text{ csúcselem, azaz } \ \forall\, n \geq \nu_0\colon a_n \leq a_{\nu_0};$$

$$\exists\, \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} \text{ csúcselem, azaz } \ \forall\, n \geq \nu_1\colon a_n \leq a_{\nu_1} \ (\leq a_{\nu_0});$$

$$\vdots$$

Ezek a lépések folytathatók, mert végtelen sok csúcselem van. Így olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} \geq a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq \cdots,$$

ezért a csúcsok (a_{ν_n}) sorozata (a_n)-nek egy monoton csökkenő részsorozata.

2. eset. A sorozatnak legfeljebb **véges** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \ \text{ esetén } \ a_n \ \text{ már nem csúcs.}$$

Mivel a_N nem csúcselem, ezért

$$\exists\, \nu_0 > N \colon a_{\nu_0} > a_N.$$

Azonban az a_{ν_0} sem csúcselem, ezért

$$\exists\, \nu_1 > \nu_0 \colon a_{\nu_1} > a_{\nu_0} \ (> a_N).$$

Az eljárást folytatva most olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} < a_{\nu_1} < a_{\nu_2} < \cdots.$$

Ebben az esetben tehát az (a_{ν_n}) sorozat (a_n)-nek egy (szigorúan) monoton növekedő részsorozata.

A rendezés és a határérték kapcsolata

7. tétel (A közrefogási elv). *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n > N \colon a_n \leq b_n \leq c_n,$
- *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim\,(a_n) = \lim\,(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

Bizonyítás. Három eset lehetséges.

1. eset. $\boxed{A \in \mathbb{R}}$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. $\lim(a_n) = \lim(c_n) = A$ azt jelenti, hogy (a_n) és (c_n) azonos A határértékkel rendelkező konvergens sorozatok. A konvergencia definíciója szerint tehát

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1 \colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2 \colon A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|b_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_0,$$

azaz a (b_n) sorozat konvergens, tehát van határértéke, és $\lim(b_n) = A$.

<u>2. eset.</u> $\boxed{A = +\infty}$ Tegyük fel, hogy $P > 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim(a_n) = +\infty$ értelmezése szerint

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1 \colon a_n > P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$P < a_n \le b_n,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = +\infty$.

<u>3. eset.</u> $\boxed{A = -\infty}$ Tegyük fel, hogy $P < 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim(c_n) = -\infty$ értelmezése szerint

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1 \colon c_n < P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$, akkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$P > c_n \ge b_n.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = -\infty$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a bizonyítás 2. esetében a (c_n) sorozat nem játszik szerepet. Ezért ebben az esetben közrefogás helyett egy **minoráns** jellegű tulajdonságot kapunk:

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n > N \colon a_n \le b_n \quad \text{és} \quad \lim(a_n) = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(b_n) = +\infty.$$

Hasonlóan, a bizonyítás 3. esetében az (a_n) sorozat nem játszik szerepet. Ezért ebben az esetben közrefogás helyett egy **majoráns** jellegű tulajdonságot kapunk:

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n > N \colon b_n \le c_n \quad \text{és} \quad \lim(c_n) = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(b_n) = -\infty. \blacksquare$$

A következő tétel azt állítja, hogy a határértékek közötti nagyságrendi kapcsolatok öröklődnek a sorozatok elég nagy indexű tagjaira. Sőt, bizonyos értelemben „fordítva": a tagok nagyságrendi kapcsolataiból következtethetünk a határértékek közötti nagyságrendi viszonyokra.

8. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

1° $A < B \quad \Longrightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\, n > N \colon a_n < b_n$.

2° $\exists\, N \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\, n > N \colon a_n \le b_n \quad \Longrightarrow \quad A \le B$.

Bizonyítás.

1^o Azt már tudjuk, hogy bármely két $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem szétválasztható diszjunkt környezetekkel, azaz

$$\forall\, A, B \in \overline{\mathbb{R}},\ A \neq B\text{-hez } \exists\, r_1, r_2 > 0\colon K_{r_1}(A) \cap K_{r_2}(B) = \emptyset.$$

Világos, hogy ha $A < B$, akkor $\forall\, x \in K_{r_1}(A), \forall\, y \in K_{r_2}(B)\colon x < y$.

Mivel $\lim\,(a_n) = A$ és $\lim\,(b_n) = B$, ezért a határérték definíciója szerint

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon a_n \in K_{r_1}(A),$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2\colon b_n \in K_{r_2}(B).$$

Legyen $N := \max\,\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > N$ esetén

$$a_n \in K_{r_1}(A) \quad \text{és} \quad b_n \in K_{r_2}(B) \qquad \Longrightarrow \qquad a_n < b_n.$$

2^o Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $A > B$. Ekkor a már igazolt **1^o** állítás szerint $\exists\, N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ indexre $b_n < a_n$, ami ellentmond a feltételnek.

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy tétel állításai „majdnem” egymás megfordításai. Azonban egyik állítás sem fordítható meg.

- Az **1^o** állítás megfordítása nem igaz, azaz az $a_n < b_n$ feltételből nem következtethetünk az $A < B$ egyenlőtlenségre. Tekintsük például az

$$a_n := -\frac{1}{n} \quad \text{és} \quad b_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozatokat.

- A **2^o** állítás megfordítása sem igaz. Legyen például

$$a_n := \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad b_n := -\frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+). \ \blacksquare$$