

9. előadás

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 1.

Ebben a fejezetben valós-valós függvények határértékével és folytonosságával foglalkozunk.

Függvények határértéke 1.

A függvényhatárérték motivációja

Egy f függvény valamely $a \in \mathbb{R}$ pontbeli határértékével a függvénynek azt a tulajdonságát fogjuk precíz módon megfogalmazni, hogy „ha $x \neq a$ tetszőlegesen közel van a -hoz, akkor az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel vannak valamely $A \in \mathbb{R}$ értékhez”. A szóban forgó tulajdonságot többek között a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

szimbólummal fogjuk jelölni, és azt mondjuk, hogy „az f függvény határértéke a -ban A -val egyenlő”. Az $x \neq a$ feltétel **rendkívül fontos!** A függvényértékeket ti. az a -hoz közeli pontokban fogjuk vizsgálni függetlenül attól, hogy a függvény értelmezve van-e az a pontban, és ha igen, akkor mennyi ott a függvény értéke.

Tekintsük például az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

függvényt. A 0-tól különböző x pontokban a függvény az x^2 értéket veszi fel, ezért az $a = 0$ pont közelében a függvényértékek akármilyen közel lehetnek a 0-hoz. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Azonban $f(0) \neq 0$, azaz a 0 pontban a függvény értéke nem 0.

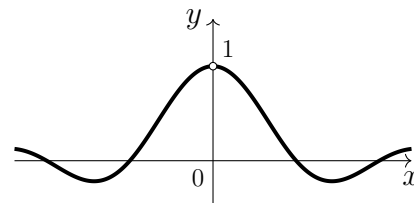
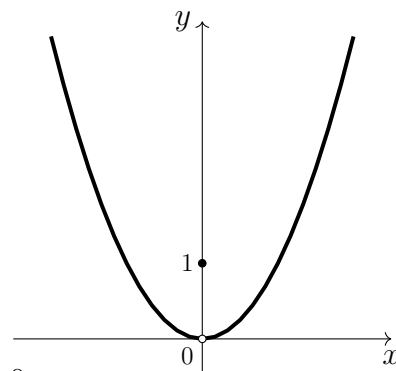
Nézzük most egy másik példát! Legyen

$$f(x) := \frac{\sin x}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

A függvény az $a = 0$ pontban ezzel a képlettel nem értelmezhető. A 0 pont közelében nem tudjuk megállapítani a függvényértékek viselkedését, mert két nagyon kicsi szám hányadosáról van szó. Ha a függvényt valamely komputeralgebrai rendszerrel ábrázoljuk, akkor azt látjuk, hogy a szóban forgó függvényértékek 1 közelében vannak. Hamarosan igazolni fogjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A függvényértékek viselkedését tetszőlegesen nagy x értékekre is vizsgálhatjuk, és ekkor legyen $a := +\infty$. Az a tulajdonság, hogy „ x tetszőlegesen közel van $a = +\infty$ -hez” azt jelenti, hogy „ x értéke tetszőlegesen nagy lehet”. Az $a := -\infty$ is lehet, és ekkor a függvényértékek viselkedését tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív x -ekre vizsgáljuk.



Hasonlóan megengedhetjük azt is, hogy A szintén akár $-\infty$ vagy $+\infty$ is legyen. Például, a

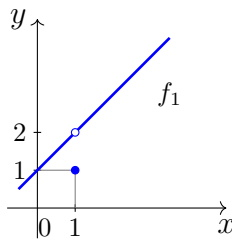
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

tulajdonság azt jelenti, hogy ha $2 \neq x \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen közel van 2-höz, akkor az $f(x)$ függvényértékek akármilyen nagy értékeket vesznek fel, illetve ha x értéke tetszőlegesen nagy, akkor a $g(x)$ függvényértékek akármilyen nagy abszolút értékű negatív értékeket vesznek fel.

Lássunk néhány konkrét példát!

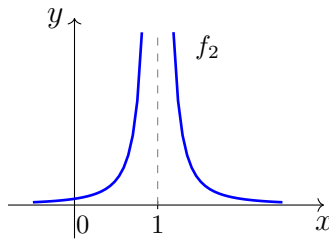
Legyen $\boxed{a = 1}$ és tekintsük a következő függvényeket:

$$f_1 := \begin{cases} x+1 & (1 \neq x \in \mathbb{R}) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$



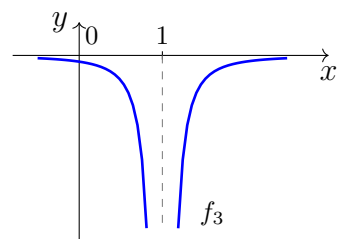
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = 2}$$

$$f_2 := \frac{1}{(x-1)^2} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$



$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = +\infty}$$

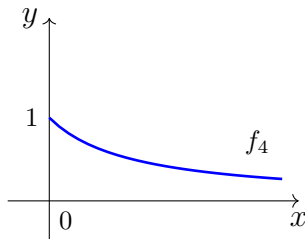
$$f_3 := -\frac{1}{(x-1)^2} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$



$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f_3(x) = -\infty}$$

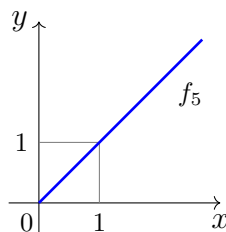
Legyen most $\boxed{a = +\infty}$ és tekintsük a következő függvényeket:

$$f_4(x) = \frac{1}{x+1} \quad (x \geq 0)$$



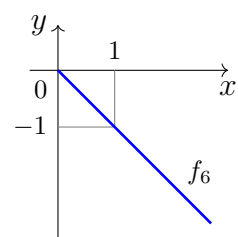
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = 0}$$

$$f_5(x) = x \quad (x \geq 0)$$



$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = +\infty}$$

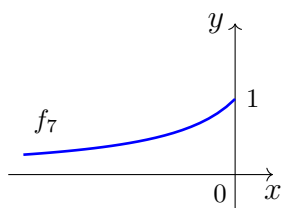
$$f_6(x) = -x \quad (x \geq 0)$$



$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = -\infty}$$

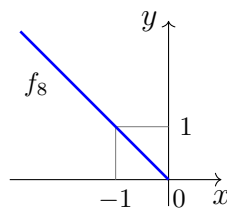
Végül $\boxed{a = -\infty}$ esetén tekintsük a következő függvényeket:

$$f_7(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x \leq 0)$$



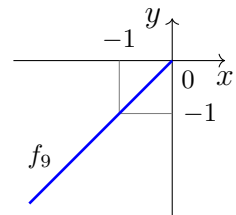
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_7(x) = 0}$$

$$f_8(x) = -x \quad (x \leq 0)$$



$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_8(x) = +\infty}$$

$$f_9(x) = x \quad (x \leq 0)$$



$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_9(x) = -\infty}$$

Összefoglalva: függvény határértékét az alábbi $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontokban vizsgálhatjuk:

$$a \in \mathbb{R} \quad (\text{végesben}) \quad \text{vagy} \quad \left. \begin{array}{l} a = +\infty \\ a = -\infty \end{array} \right\} \quad (\text{végtelenben}),$$

és ekkor az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték lehet:

$$A \in \mathbb{R} \quad (\text{véges}) \quad \text{vagy} \quad \left. \begin{array}{l} A = +\infty \\ A = -\infty \end{array} \right\} \quad (\text{végtelen}).$$

Ez összesen 9-féle lehetőséget jelent. Azonban mindegyik mögött ugyanaz az alap gondolat áll. Ezért a sorozatok határértékéhez hasonlóan, környezetek segítségével egy egységes definíciót tudunk megadni. Mivel az a pontbeli határértéknél az a -hoz tetszőlegesen közeli pontokban felvett függvényértékek viselkedését vizsgáljuk, ezért fel fogjuk tenni azt, hogy a függvény az a pont tetszőleges környezetében végtelen sok helyen van értelmezve. Ezzel kapcsolatos a **torlódási pont** fogalma.

Számhalmaz torlódási pontja

Emlékeztetünk arra, hogy az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $\varepsilon > 0$ sugarú **környezetét** így értelmeztük:

$$K_\varepsilon(a) := \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon), & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right), & \text{ha } a = +\infty \\ \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right), & \text{ha } a = -\infty. \end{cases}$$

Célszerű még a

$$\dot{K}_\varepsilon(a) := K_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \quad (a \in \overline{\mathbb{R}})$$

ún. **pontozott környezet** fogalmát is bevezetni. Ez csak akkor különbözik a **környezet** fogalmától, ha $a \in \mathbb{R}$, és ekkor

$$\dot{K}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

A fogalom bevezetése azért célszerű, mert az a pontbeli függvényhatárérték értelmezéséhez nem szükséges, hogy a függvény értelmezve legyen az a pontban. Ezzel szemben nélkülözhetetlen, hogy a függvény értelmezve legyen az a minden pontozott környezetének legalább az egyik pontjában, mivel az a -hoz tetszőlegesen közeli pontokban felvett függvényértékek viselkedését vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatos a következő fogalom.

1. definíció. Azt mondjuk, hogy a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak $a \in \overline{\mathbb{R}}$ **torlódási pontja**, ha az $a \in \mathbb{R}$ minden környezete végtelen sok H -beli elemet tartalmaz, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{esetén} \quad K_\varepsilon(a) \cap H \quad \text{végtelen halmaz.}$$

A H halmaz torlódási pontjainak a halmazát a $\boxed{H'}$ szimbólummal jelöljük.

1. tétel. Az $a \in \mathbb{R}$ elem akkor és csak akkor torlódási pontja a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha a -nak minden környezete tartalmaz a -tól különböző H -beli elemet, azaz

$$a \in H' \iff \forall \varepsilon > 0: \dot{K}_\varepsilon(a) \cap H \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. \Rightarrow Az állítás nyilvánvaló, mert ha $a \in H'$, akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$K_\varepsilon(a) \cap H \text{ végtelen halmaz} \implies (K_\varepsilon(a) \cap H) \setminus \{a\} \text{ végtelen halmaz,}$$

és így $\dot{K}_\varepsilon(a) \cap H$ nem üres.

\Leftarrow Indirekt módon tegyük fel, hogy $a \notin H'$. Ekkor $\exists \varepsilon > 0: K_\varepsilon(a) \cap H$ véges halmaz. Ha $K_\varepsilon(a) \cap H = \emptyset$, akkor nyilván $\dot{K}_\varepsilon(a) \cap H = \emptyset$. Ellenkező esetben

$$K_\varepsilon(a) \cap H =: \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \implies \exists r_k > 0: a_k \notin \dot{K}_{r_k}(a) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Legyen $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} > 0$. Ekkor $\dot{K}_r(a) \cap H = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $\forall \varepsilon > 0: \dot{K}_\varepsilon(a) \cap H \neq \emptyset$.

Példák:

- $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ és $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$,
- $(0, 1)' = [0, 1]$ és $[0, 1]' = [0, 1]$,
- $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}' = \{0\}$, $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$,
- ha H véges halmaz, akkor $H' = \emptyset$.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy ha $a \in \mathbb{R}$ és $a \in H'$, akkor

lehet, hogy $a \in H$ és az is előfordulhat, hogy $a \notin H$.

Például, ha $H = (-1, 1)$ és $a = 0$, akkor $0 \in H'$ és $0 \in H$, de $1 \in H'$ esetén $1 \notin H$. ■

A következő tétel azt állítja, hogy a torlódási pontokat halmazbeli sorozatok határértékével lehet jellemezni.

2. tétel. Az $a \in \mathbb{R}$ elem akkor és csak akkor torlódási pontja a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha van olyan $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow H \setminus \{a\}$ sorozat, amelynek létezik \mathbb{R} -beli határértéke, és $\lim(x_n) = a$.

Bizonyítás. \Rightarrow Ha $a \in H'$, akkor $\forall \varepsilon > 0: \dot{K}_\varepsilon(a) \cap H \neq \emptyset$, és így

$$\forall n \in \mathbb{N}^+: \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap H \neq \emptyset.$$

Legyen $x_0 \in H \setminus \{a\}$ tetszőleges, és jelölje x_n a fenti nem üres halmaznak egy tetszőleges elemét. Így $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow H \setminus \{a\}$, és $x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a)$ ($n \in \mathbb{N}^+$). Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és $n_0 := [1/\varepsilon]$. Ekkor $\forall n > n_0 \geq 0$ index esetén $n > 1/\varepsilon$, és így $1/n < \varepsilon$. Ezért

$$x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \subset K_\varepsilon(a),$$

ami a sorozatok határértékének az egységes definíciója szerint azt jelenti, hogy $\lim(x_n) = a$.

◁ Tegyük fel, hogy valamilyen $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow H \setminus \{a\}$ sorozatra $\lim(x_n) = a$ teljesül. Ekkor bármely $K_\varepsilon(a)$ környezetet véve találunk olyan x_n sorozatbeli tagot, amire $x_n \in K_\varepsilon(a)$. Azonban $x_n \in H \setminus \{a\}$, ezért

$$\forall \varepsilon > 0: \dot{K}_\varepsilon(a) \cap H \neq \emptyset. \implies a \in H'.$$

A függvényhatárérték fogalma

Most **környezetek** segítségével adjuk meg a függvényhatárérték egységes definícióját.

2. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban **van határértéke**, ha

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A -t a függvény a -beli **határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_a f = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad f(x) \rightarrow A, \quad \text{ha } x \rightarrow a.$$

Megjegyzések.

1° A $\lim_a f = A$ egyenlőség valóban azt fejezi ki, hogy „az a -hoz közeli x pontokban felvett függvényértékek közel vannak A -hoz”.

2° Függvény határértékét csak a függvény értelmezési tartományának a torlódási pontjaiban, vagyis az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontokban értelmezzük. Ekkor $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}_f$ is lehetséges. Ezért a határérték szempontjából érdektelen, hogy a függvény értelmezve van-e az a pontban, és ha igen, akkor ott mi a függvény helyettesítési értéke.

3° Az $a \in \mathcal{D}'_f$ lehet véges (vagyis $a \in \mathbb{R}$), de lehet $\pm\infty$ is. A függvény határértéke is lehet véges (ha $A \in \mathbb{R}$), de ez is lehet $\pm\infty$ is.

4° Pontozott környezetekkel a fenti definíció így is írható

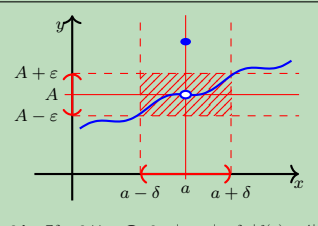
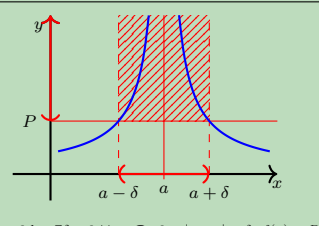
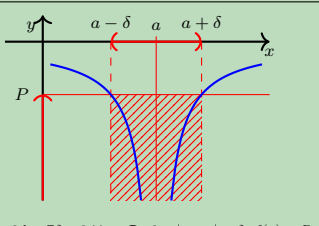
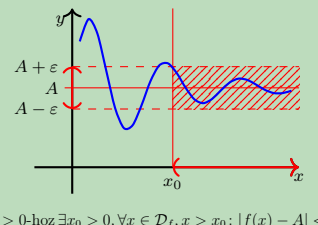
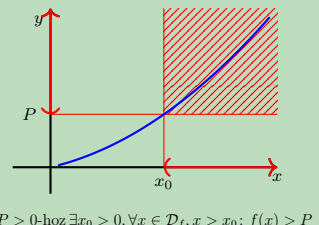
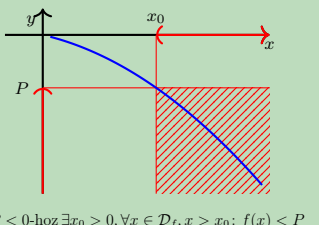
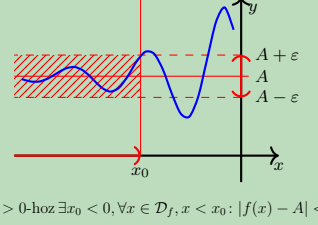
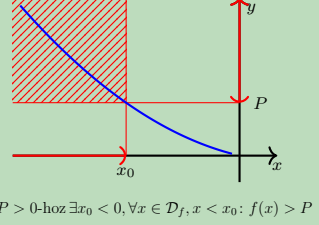
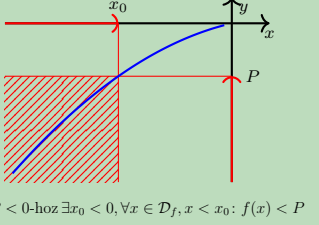
$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A). \blacksquare$$

A határérték definíciójának speciális esetei

A $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ egyenlőségre a -tól, illetve A -tól függően a következő szóhasználatokat vezetjük be.

- Végesben vett véges határérték, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{R}$.
- Végesben vett végtelen határérték, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A = \pm\infty$.
- Végtelenben vett véges határérték, ha $a = \pm\infty$ és $A \in \mathbb{R}$.
- Végtelenben vett végtelen határérték, ha $a = \pm\infty$ és $A = \pm\infty$.

Fontos megjegyezni, hogy a $\lim_{x \rightarrow a} f = A$ -ra a **környezetekkel** megadott egységes definíciót a speciális esetekben **egyenlőtlenségekkel** is megfogalmazhatjuk.

$A = \lim_a f$	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$a \in \mathbb{R}$	 $\forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < x - a < \delta: f(x) - A < \varepsilon$	 $\forall P > 0 \text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < x - a < \delta: f(x) > P$	 $\forall P < 0 \text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < x - a < \delta: f(x) < P$
$a = +\infty$	 $\forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0: f(x) - A < \varepsilon$	 $\forall P > 0 \text{-hoz } \exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0: f(x) > P$	 $\forall P < 0 \text{-hoz } \exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0: f(x) < P$
$a = -\infty$	 $\forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0: f(x) - A < \varepsilon$	 $\forall P > 0 \text{-hoz } \exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0: f(x) > P$	 $\forall P < 0 \text{-hoz } \exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0: f(x) < P$

Megjegyzés. Ha $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ egy sorozat, és így $\mathcal{D}'_f = \mathbb{N}' = \{+\infty\}$, akkor a táblázat $a = +\infty$ sorából látható, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = A,$$

tehát ebben a speciális esetben a függvényhatárérték megegyezik a sorozatok határértékének korábbi definíciójával. ■

A függvényhatárérték alaptételei

3. tétel (A határérték egyértelműsége). Ha az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban van határértéke, akkor a definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ egyértelműen létezik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy két különböző $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ elem is eleget tesz a definíció feltételeinek. Mivel két különböző $\overline{\mathbb{R}}$ -beli elem diszjunkt környezetekkel szétválasztható, ezért

$$\exists \varepsilon > 0: K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset.$$

A határérték definíciója szerint egy ilyen ε -hoz

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in \dot{K}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A_1),$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in \dot{K}_{\delta_2}(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A_2).$$

Legyen $\delta := \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor

$$\forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset, \quad \text{de } \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset, \text{ mert } a \in \mathcal{D}'_f.$$

Ellentmondásra jutottunk, és ezzel a határérték egyértelműségét igazoltuk.

A következő tétel azt állítja, hogy a függvényhatárérték sorozatok határértékével jellemezhető.

4. tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv). Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$ és $A \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Bizonyítás.

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \lim_a f = A \implies \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Legyen (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, és $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges rögzített érték.

$$\lim (x_n) = a \implies \delta\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: x_n \in \dot{K}_\delta(a).$$

Mivel $x_n \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, így $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f$, ezért $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$ teljesül minden $n > n_0$ indexre. Ez azt jelenti, hogy az $(f(x_n))$ sorozatnak van határértéke, és $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy

$$\forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_a f = A$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy a $\lim_a f = A$ egyenlőség nem igaz. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0\text{-hoz } \exists x_\delta \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(A).$$

A $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) választással azt kapjuk, hogy

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+\text{-hoz } \exists x_n \in \dot{K}_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Legyen $x_0 \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tetszőleges. Az $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozat nyilván a -hoz tart (hiszen $x_n \in K_{1/n}(a)$), de a függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata nem tart A -hoz (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$), ami ellentmond a feltételünknek.

A függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó közrefogási elv közvetlen következménye az alábbi állítás.

5. tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó közrefogási elv). Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : H \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in H'$, és tegyük fel, hogy

$$\exists K(a), \forall x \in (K(a) \setminus \{a\}) \cap H: f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Ha

$$\exists \lim_a f, \quad \exists \lim_a g \quad \text{és} \quad \lim_a f = \lim_a g = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

akkor

$$\exists \lim_a h \quad \text{és} \quad \lim_a h = A.$$

A sorozatoknál láttuk, hogy a három algebrai művelet és a határérték képzés sorrendje a „legtöbb esetben” felcserélhető. A következő tétel azt állítja, hogy ez igaz függvényhatárértékre is.

6. tétel (A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolata). Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)'$ és léteznek az $A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $B := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}$ határértékek. Ekkor

1° az $f + g$ összegfüggvénynek is van határértéke a -ban és

$$\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g = A + B,$$

feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van,

2° az $f \cdot g$ szorzatfüggvénynek is van határértéke a -ban és

$$\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g = A \cdot B,$$

feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van,

3° az f/g hányadosfüggvénynek is van határértéke a -ban és

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $\frac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

Bizonyítás. A függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó analóg állítás közvetlen következménye.

Kritikus határértékekről beszélünk akkor, ha az előbbi tétel nem alkalmazható. A sorozatokhoz hasonlóan ilyenek például a

$$(+\infty) + (-\infty) \quad (\text{vagy } (+\infty) - (+\infty)), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{c}{0} \quad (c \in \overline{\mathbb{R}})$$

típusú kritikus határértékek.

Egyoldali határértékek

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor a

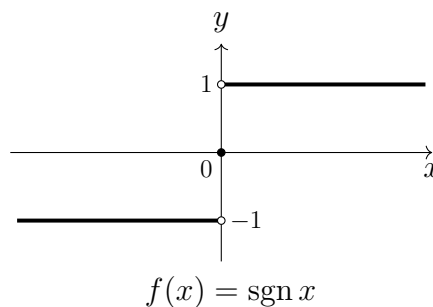
$$\dot{K}_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

pontozott környezetnek van egy $(a - \varepsilon, a)$ bal oldali és egy $(a, a + \varepsilon)$ jobb oldali része. Előfordulhat, hogy az f függvénynek nincs határértéke az a pontban, de ha leszűkítjük a függvényt a pont egy bal- vagy jobb oldali környezetére, akkor az így kapott függvénynek már van határértéke az a pontban.

Például, a szignumfüggvény esetében a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$$

határérték nem létezik. Ennek az az oka, hogy tetszőleges pozitív tagokból álló 0-hoz tartó (x_n) sorozat esetén $\operatorname{sgn}(x_n) = 1$; ugyanakkor minden negatív tagokból álló 0-hoz tartó (x_n) sorozat esetén $\operatorname{sgn}(x_n) = -1$. Megadható tehát két 0-hoz tartó sorozat, amelyek képsorozatának a határértéke nem egyenlő, és így az átviteli elv szerint a határérték nem létezik a 0 pontban. Azonban más a helyzet, ha a szignum függvény 0 pont körüli viselkedését csak a pont bal- vagy jobb oldali környezetében vizsgáljuk. Világos, hogy



$$f_1 := \operatorname{sgn}|_{(-\infty, 0)} \equiv -1 \quad \text{és} \quad f_2 := \operatorname{sgn}|_{(0, +\infty)} \equiv 1.$$

Ebből nem nehéz igazolni, hogy

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -1 \quad \text{és} \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 1.$$

Az előző gondolatmenet alkalmazható bármilyen halmazon értelmezett f függvényre. Ha $a \in \mathcal{D}_f$, akkor a torlódási pontja a $\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)$ vagy a $\mathcal{D}_f \cap (a, \infty)$ halmaznak (vagy mindkettőnek). Ekkor azt mondjuk, hogy a **jobb-** vagy **bal oldali torlódási pontja** \mathcal{D}_f -nek. Most is vizsgálhatjuk az

$$f_1 := f|_{\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)} \quad \text{vagy az} \quad f_2 := f|_{\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)}$$

függvények határértékeit az a pontban, de célszerűbb ehhez egy külön jelölést bevezetni.

3. definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}$ és $a \in (\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty))'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen (vagy a -ban) **van jobb oldali határértéke**, ha

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, a < x < a + \delta: f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A egyértelmű, és ezt az f függvény a -ban vett **jobb oldali határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{a+0} f = A, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A, \quad f(a+0) = A.$$

4. definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}$ és $a \in (\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a))'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen (vagy a -ban) **van bal oldali határértéke**, ha

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, a - \delta < x < a: f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A egyértelmű, és ezt az f függvény a -ban vett **bal oldali határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{a-0} f = A, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A, \quad f(a-0) = A.$$

Megjegyzés. A definíciókból könnyen látható, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

ahol

$$f_1 := f|_{\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)} \quad \text{és} \quad f_2 := f|_{\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)}.$$

Ez azt jelenti, hogy egy függvény pontbeli bal-, ill. jobb oldali határértéke speciális függvények pontbeli határértékei. Ezért az új határértékekre is alkalmazhatók a tanult alaptételek a megfelelő módosításokkal. Például az átviteli elv alapján

$$\lim_{a+0} f = A \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \cap (a, +\infty), \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A. \blacksquare$$

Természetesen előfordulhat, hogy egy függvénynek valamely pontban egyszerre létezik a bal- és a jobb oldali határértéke. A definíciókból könnyen igazolható a következő állítás.

7. tétel. Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és az a pont egyszerre jobb- és bal oldali torlódási pontja \mathcal{D}_f -nek. Ekkor

$$\exists \lim_a f \iff \exists \lim_{a-0} f, \exists \lim_{a+0} f \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f (= \lim_a f).$$

Példák:

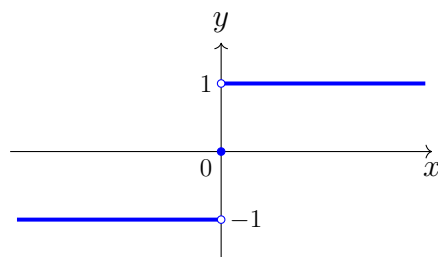
- $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ és $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0 \implies \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0,$ ahol

$$f(x) := \begin{cases} x-1 & (x < 1) \\ x^2 - x & (x \geq 1). \end{cases}$$

Nevezetes határértékek 1.

1. Az előjel-függvény (vagy szignum-függvény) határértéke a 0 pontban.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & (x \in (0, +\infty)) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x \in (-\infty, 0)) \end{cases}.$$



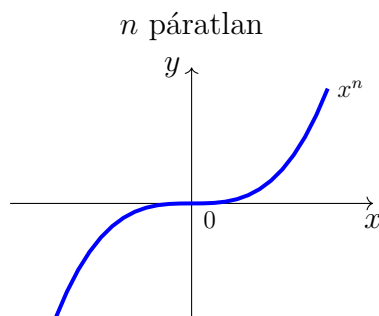
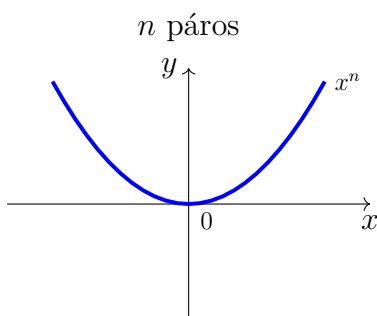
szignum-függvény

Már igazoltuk, hogy

$$\lim_{0-0} \operatorname{sgn} = -1, \quad \lim_{0+0} \operatorname{sgn} = 1 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_0 \operatorname{sgn}.$$

2. Hatvány-függvények határértéke.

$$f(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határérték minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálható.

A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből következnek az alábbi állítások:

2. (a)

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

2. (b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

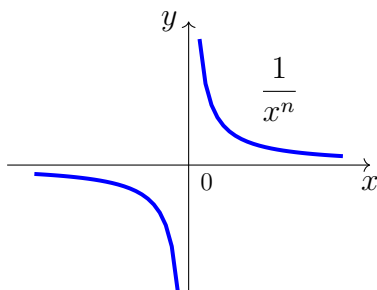
2. (c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ -\infty & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

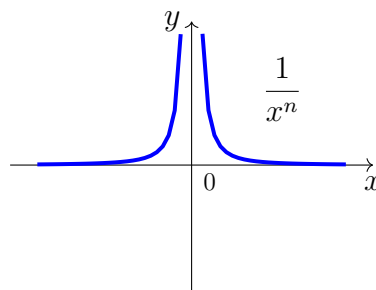
3. Reciprokfüggvények határértéke.

$$f(x) := \frac{1}{x^n} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

n páratlan



n páros



Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \mathcal{D}'_f = (\mathbb{R} \setminus \{0\})' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határérték minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálható.

A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből következnek az alábbi állítások:

3. (a)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}, \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ és } \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

3. (b)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Az átviteli elvvel igazolható, hogy

3. (c)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} = +\infty & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ \neq & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

Ha n páratlan, akkor

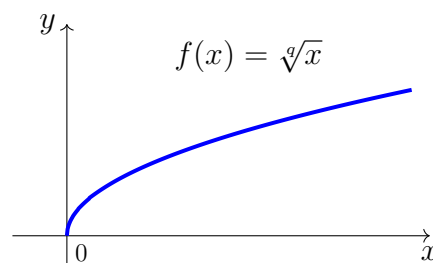
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$

4. Gyökfüggvények határértéke.

$$f(x) := \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \quad (x \in [0, +\infty)), \quad q = 2, 3, \dots$$

Mivel $\mathcal{D}_f = [0, +\infty)$, ezért $\mathcal{D}'_f = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Az átviteli elvből következnek az alábbi állítások:



4. (a)
$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[q]{x} = \sqrt[q]{a} \quad \forall a \in [0, +\infty) \text{ és } \forall q = 2, 3, \dots$$

4. (b)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[q]{x} = +\infty \quad \forall q = 2, 3, \dots$$

5. Polinomfüggvények határértéke. Legyen

$$P(x) := \alpha_r x^r + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}, 1 \leq r \in \mathbb{N})$$

egy pontosan r -edfokú polinom (azaz $\alpha_r \neq 0$). Mivel $\mathcal{D}_P = \mathbb{R} \implies \mathcal{D}'_P = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határértéket minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálhatjuk.

A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel, továbbá a hatványfüggvények határértékére vonatkozó állítások alapján

4. (a) $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}},$

4. (b) $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \operatorname{sgn}(\alpha_r) \cdot (+\infty)},$

4. (c) $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = (-1)^r \cdot \operatorname{sgn}(\alpha_r) \cdot (+\infty)}.$

Az utolsó két állítás igazolásához tekintsük az alábbi átalakítást:

$$P(x) = x^r \left(\alpha_r + \frac{\alpha_{r-1}}{x} + \frac{\alpha_{r-2}}{x^2} + \cdots + \frac{\alpha_0}{x^r} \right).$$

6. Racionális törtfüggvények

Racionális törtfüggvénynek nevezzük az $R := P/Q$ alakú függvényeket, ahol P, Q polinomok. Feltesszük, hogy Q legalább elsőfokú.

Az R függvény ott van értelmezve, ahol a nevező nem nulla, tehát véges sok pont kivételével mindenütt. Ezért $\mathcal{D}'_R = \overline{\mathbb{R}}$, tehát R határértékét minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálhatjuk.

Az alábbi eseteket fogjuk megkülönböztetni.

1. eset. $a \in \mathbb{R}$ és $Q(a) \neq 0$. Ekkor a polinomok határértékből tanultak és a műveleti tételek alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_a R = \lim_a \frac{P}{Q} = \frac{\lim_a P}{\lim_a Q} = \frac{P(a)}{Q(a)} = R(a).$$

2. eset. $a \in \mathbb{R}, Q(a) = 0$ és $P(a) \neq 0$. Ekkor a Q polinomot felírhatjuk

$$Q(x) = (x - a)^m \cdot q(x)$$

alakban, ahol $m = 1, 2, 3 \dots$ és q olyan polinom, amelyre $q(a) \neq 0$ teljesül. Így

$$(*) \quad \lim_a R = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{P(x)}{q(x)} \cdot \frac{1}{(x - a)^m} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{q(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^m} = A \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^m},$$

ahol

$$A := \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm a} \frac{P(x)}{q(x)} = \frac{P(a)}{q(a)} \neq 0.$$

- Ha $m = 2k$ páros, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^{2k}} = +\infty,$$

ezért (*) alapján

$$\lim_a R = A \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^{2k}} = \operatorname{sgn}(A) \cdot (+\infty).$$

- Ha $m = 2k + 1$ páratlan, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = +\infty.$$

Ezért (*) megfelelő oldali határértéke:

$$\lim_{a-0} R = A \cdot \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = \operatorname{sgn}(A) \cdot (-\infty) \quad \text{és}$$

$$\lim_{a+0} R = A \cdot \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = \operatorname{sgn}(A) \cdot (+\infty). \quad \text{ezért}$$

$$\nexists \lim_a R.$$

3. eset. $a \in \mathbb{R}$, $Q(a) = 0$ és $P(a) = 0$. Ekkor a P és Q polinomokat felírhatjuk

$$P(x) = (x-a)^s \cdot p(x) \quad \text{és} \quad Q(x) = (x-a)^m \cdot q(x)$$

alakban, ahol $s, m = 1, 2, 3, \dots$ és p, q olyan polinomok, amelyekre $p(a) \neq 0$ és $q(a) \neq 0$ teljesül. Így

$$(\#) \lim_a R = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{(x-a)^s}{(x-a)^m} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{s-m} = A \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{s-m},$$

ahol

$$A := \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} \neq 0.$$

Így (#)-ből az előző esethez hasonlóan a következő eseteket kapjuk:

- ha $s > m$, akkor $\lim_a R = A \cdot 0 = 0$.
- ha $s = m$, akkor $\lim_a R = A \cdot 1 = A$.
- ha $s < m$ és $m - s = 2k$ páros, akkor $\lim_a R = \operatorname{sgn}(A) \cdot (+\infty)$.
- ha $s < m$ és $m - s = 2k + 1$ páratlan, akkor $\lim_{a \pm 0} R = \operatorname{sgn}(A) \cdot (\pm\infty)$.

4. eset. $a = \pm\infty$. Ekkor a polinomok határértéke szerint $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó, amelyet a sorozatoknál megismert technikák segítségével vissza lehet vezetni nem kritikus határértékre. Valóban, ha

$$P(x) = \alpha_s x^s + \alpha_{s-1} x^{s-1} + \dots + \alpha_0 \quad \text{és} \quad Q(x) = \beta_r x^r + \beta_{r-1} x^{r-1} + \dots + \beta_0,$$

ahol $\alpha_s, \beta_r \neq 0$, akkor

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} = x^{s-r} \cdot \frac{\overbrace{\alpha_s + \frac{\alpha_{s-1}}{x} + \dots + \frac{\alpha_0}{x^s}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\beta_r + \frac{\beta_{r-1}}{x} + \dots + \frac{\beta_0}{x^r}}_{\rightarrow 0}},$$

így ha $A := \frac{\alpha_s}{\beta_r} \neq 0$, akkor

- ha $\underline{s < r}$, akkor $\lim_{\pm\infty} R = 0 \cdot A = 0$.
- ha $\underline{s = r}$, akkor $\lim_{\pm\infty} R = 1 \cdot A = A$.
- ha $\underline{s > r}$ és $\underline{s - r = 2k}$ páros, akkor $\lim_{\pm\infty} R = \operatorname{sgn}(A) \cdot (+\infty)$.
- ha $\underline{s > r}$ és $\underline{s - r = 2k + 1}$ páratlan, akkor $\lim_{\pm\infty} R = \operatorname{sgn}(A) \cdot (\pm\infty)$.