3. gyakorlat (2023. 03. 16.)

Emlékeztető.

- Ha $\emptyset \neq A, B$, akkor az A halmazból a B halmazba leképező függvényt úgy adunk meg, hogy A bizonyos elemeihez hozzárendeljük a B valamelyik elemét. Jelölés: $f \in A \to B$. Például

$$\sqrt{} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sin \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

- Az f függvény **értelmezési tartomány**án, ill. **értékkészlet**én: a

$$\mathcal{D}_f := \{x \in A : \exists y \in B : y = f(x)\}, \qquad \text{ill. az} \qquad \mathcal{R}_f := \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

halmazt értjük. B neve: **képhalmaz**. Ha $\mathcal{D}_f = A$, akkor azt írjuk, hogy $f : A \to B$. Valamely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén az $f(x)$ elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési érték**ének nevezzük.

- Ha f és g függvény, akkor

$$f = g \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g =: \mathcal{D} \qquad \text{és} \qquad f(x) = g(x) \quad (x \in \mathcal{D}))\,.$$

Példa.

$$\mathcal{D}_{\sqrt{}} = [0, +\infty), \qquad \mathcal{R}_{\sqrt{}} = [0, +\infty), \qquad \mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}, \qquad \mathcal{R}_{\sin} = [-1, 1].$$

Definíció. Legyen A, B, C halmaz, $C \subset A$, továbbá $f\colon A \to B$ és $g\colon C \to B$ olyan függvények, amelyekre

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in C).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a g függvény az f függvény C halmazra való **leszűkítés**e. Jelben: $g =: f|_C$.

Emlékeztető. Valamely $f \in A \longrightarrow B$ függvény

- és $\mathcal{H} \subset A$ halmaz esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített **kép**én az

$$f[\mathcal{H}] := \{f(x) \in B : x \in \mathcal{H}\} = \{y \in B \mid \exists x \in \mathcal{H} : y = f(x)\}$$

halmazt értettük (speciálisan $f[\emptyset] := \emptyset$).

- és $\mathcal{H} \subset B$ halmaz esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített **őskép**én az

$$f^{-1}[\mathcal{H}] := \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{H}\}$$

halmazt értettük (speciálisan $f^{-1}[\emptyset] := \emptyset$).

Megjegyezések.

1. Szóhasználat:
   - $f[\mathcal{H}]$ az a B-beli halmaz, amelyet az $f(x)$ függvényértékek „befutnak”, ha x „befutja” a $\mathcal{H}$ halmaz elemeit;
   - az $f[\mathcal{H}]$ a B azon y elemeit tartalmazza, amelyekhez van olyan $x \in \mathcal{H}$, hogy $y = f(x)$.
2. Az f függvény értékkészlete értelmezási tartománynak f által létesített képe és f értelmezési tartománya az értékkészletének f által létesített ősképe:

$$f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f.$$

3. Adott $f \in A \longrightarrow B$ függvény és $b \in B$ esetén az

$$f(x) = b \quad (x \in A) \tag{5}$$

egyenlet megoldásainak nevezzük az $f^{-1}[\{b\}]$ halmaz elemeit. Azt mondjuk továbbá, hogy

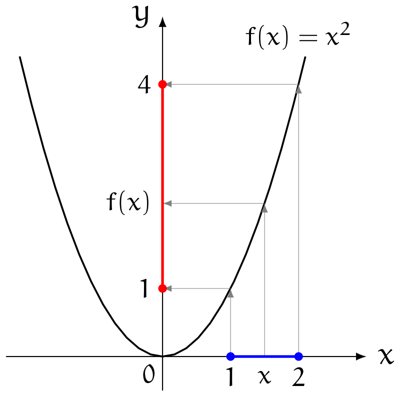
   - a (5) egyenletnek **nincsen megoldása** ((5) **nem oldható meg**), ha $f^{-1}[\{b\}] = \emptyset$;
   - (5) **megoldása egyértelmű**, ha $f^{-1}[\{b\}]$ egyelemű halmaz.

Példa. Meghatározzuk a $\mathcal{H} := [1,2]$ halmaz

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét. Az ábrából sejthető, hogy

$$f\big[[1,2]\big] = [1,4].$$



Biz. A definíció alapján

$$f\big[[1,2]\big] = \big\{x^2 \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 2\big\} = \big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [1,2] : y = x^2\big\}.$$

Azt kell tehát meghatározni, hogy x^2 milyen értékek vesz fel, ha x „befutja” az $[1,2]$ intervallum pontjait. Mivel

$$1 \le x \le 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \le x^2 \le 4, \quad \text{azaz} \quad x^2 \in [1,4],$$

ezért

$$f\big[[1,2]\big] \subset [1,4]. \tag{6}$$

A kérdés ezek után az, hogy az x^2 függvényértékek vajon teljesen „befutják-e” az egész $[1,4]$ intervallumot, ha x „befutja” az $[1,2]$ intervallum pontjait, vagyis igaz-e a fordított irányú

$$[1,4] \subset f\big[[1,2]\big] \tag{7}$$

tartalmazás is. Az előzőek alapján ez azzal egyenértékű, hogy

$$\forall y \in [1,4] \text{ számhoz } \exists x \in [1,2]: \quad \text{hogy} \quad y = x^2. \tag{8}$$

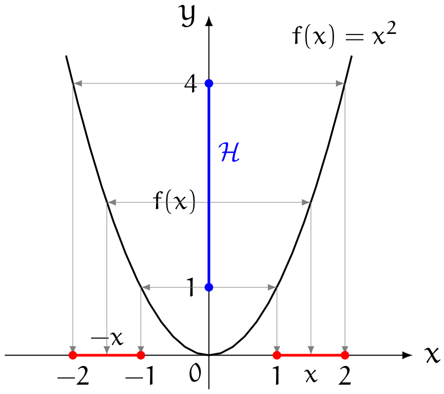
Ennek az egyenletnek a megoldása $x_\pm = \pm\sqrt{y}$. Mivel $1 \le y \le 4$, ezért $1 \le \sqrt{y} \le 2$, így $x_+ \in [1,2]$. Ez pedig azt jelenti, hogy a (8) állítás, tehát a vele egyenértékű (7) tartalmazás is igaz. (6) és (7) alapján a két halmaz egyenlő, azaz $f\big[[1,2]\big] = [1,4]$. ■

Példa. Meghatározzuk a $\mathcal{H} := [1,4]$ halmaz

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét. Az ábrából sejthető, hogy $f^{-1}\big[[1,4]\big] = [-2,-1] \cup [1,2]$.

Biz. A definíció alapján



Így

$$f^{-1}\big[[1,4]\big] = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [1,4]\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 4\big\}.$$

$f^{-1}\big[[1,4]\big]$ az $1 \leq x^2 \leq 4$ egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. Mivel

$$1 \leq x^2 \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq |x| \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 2 \ \text{ vagy } \ -2 \leq x \leq -1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in [-2,-1] \cup [1,2],$$

ezért beláttuk azt, hogy

$$f^{-1}\big[[1,4]\big] = [-2,-1] \cup [1,2]. \quad \blacksquare$$

Példa. Az

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény és a $\mathcal{H} := \{0\}$ halmaz esetében meghatározzuk az $f[\mathcal{H}]$ és az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmazt. Mivel $0 \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ezért

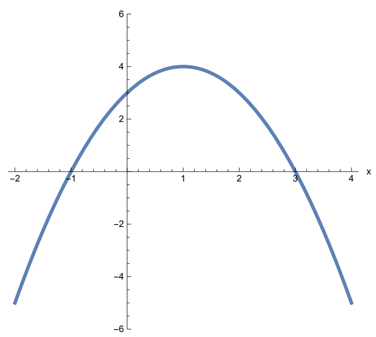
$$f[\{0\}] = \big\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \ x \in \{0\}\big\} = \big\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \ x = 0\big\} = \{3\},$$

továbbá

$$f^{-1}[\{0\}] = \big\{x \in \mathbb{R} : \ 3 + 2x - x^2 \in \{0\}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : \ 3 + 2x - x^2 = 0\big\} = \{-1; 3\},$$

hiszen

$$3 + 2x - x^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 \pm \sqrt{1+3}. \quad \blacksquare$$



1. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3 + 2x - x^2$ függvény grafikonja.

Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{H} := [-2, 2]$ halmaz

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét!

Útm. A definíció alapján

$$f\big[[-2,2]\big] = \{3 + 2x - x^2 \mid x \in [-2,2]\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-2,2] \colon y = 3 + 2x - x^2\}.$$

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = 3 + 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 4,$$

továbbá

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad -3 \leq x - 1 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq (x-1)^2 \leq 9 \quad \Longrightarrow \quad -9 \leq -(x-1)^2 \leq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad -5 \leq -(x-1)^2 + 4 \leq 4,$$

ezért tetszőleges $x \in [-2, 2]$ esetén $-(x-1)^2 + 4 \in [-5, 4]$, azaz

$$f\big[[-2,2]\big] \subset [-5,4]. \tag{9}$$

Megmutajuk, hogy a fordított irányú

$$[-5,4] \subset f\big[[-2,2]\big] \tag{10}$$

tartalmazás is igaz, azaz

$$y \in [-5,4] \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in [-2,2] \colon y = -(x-1)^2 + 4. \tag{11}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása

$$x_1 = 1 - \sqrt{4-y} \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{4-y}.$$

Mivel

$$y \in [-5,4] \iff -5 \le y \le 4 \iff -4 \le -y \le 5 \iff 0 \le 4-y \le 9 \iff$$

$$\iff 0 \le \sqrt{4-y} \le 3,$$

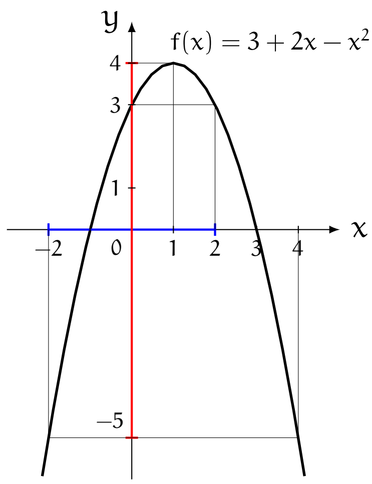
ezért

$$-2 = 1-3 \le x_1 = 1-\sqrt{4-y} \le 1+0 = 1 \qquad \iff \qquad x_1 \in [-2,1] \subset [-2,2].$$

Így a (11) állítást, következésképpen a (10) tartalmazást bebizonyítottuk. (Ezek után az x_2 megoldással már nem is kell foglalkoznunk. Ennek ellenére megjegyezzük, hogy az előzőekhez hasonlóan adódik az, hogy $x_2 \in [1,4]$, ha $y \in [-5,4]$, de $x_2 \in [-2,2]$ is igaz, ha $y \in [3,4]$.) (9) és (10) alapján a szóban forgó halmazok egyenlők, így beláttuk, hogy

$$f\big[[-2,2]\big] = [-5,4].$$

A megoldást szemlélteti a mellékelt ábra:



Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{H} := [1,2]$ halmaz

$$f(x) := |x-1|-1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét!

Útm. Mivel

$$f^{-1}[[1,2]] = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-1|-1 \in [1,2]\} = \{x \in \mathbb{R} : \ 1 \leq |x-1|-1 \leq 2\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \ 2 \leq |x-1| \leq 3\},$$

ezért a

$$2 \leq |x-1| \leq 3 \tag{12}$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazának meghatározása a feladat.

- A $\leq$ megoldása. Mivel

  $$2 \leq |x-1| \iff (x-1 \geq 2 \text{ vagy } x-1 \leq -2) \iff (x \geq 3 \quad \text{vagy} \quad x \leq -1),$$

  ezért

  $$2 \leq |x-1| \iff x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty) =: \mathcal{B}$$

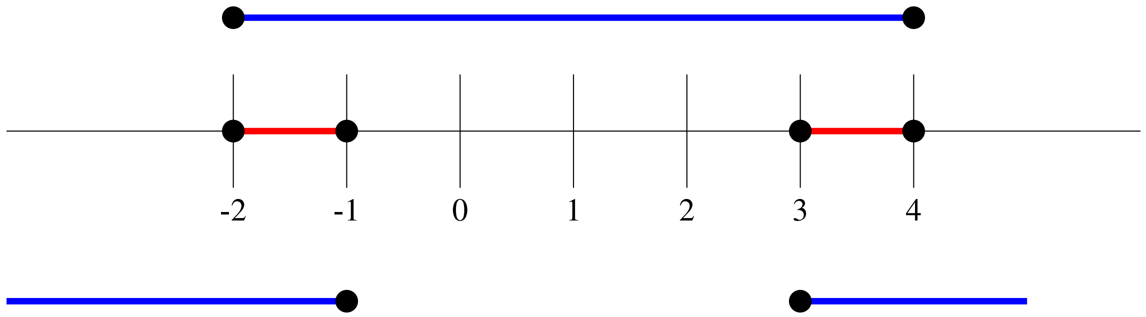
- A $\leq$ megoldása. Mivel

  $$|x-1| \leq 3 \iff -3 \leq x-1 \leq 3 \iff -2 \leq x \leq 4 \iff x \in [-2,4] =: \mathcal{J}.$$

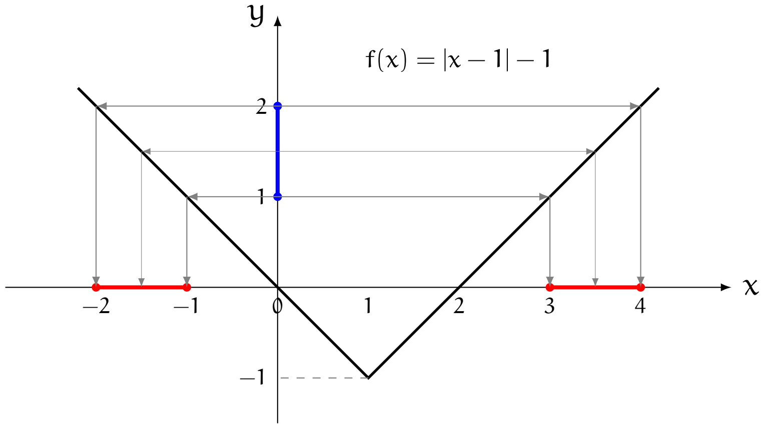
Az (12) egyenlőtlenség megoldáshalmaza és egyben a keresett őskép:

$$f^{-1}[[1,2]] = \mathcal{B} \cap \mathcal{J} = \{(-\infty,-1] \cup [3,+\infty)\} \cap [-2,4] =$$

$$= \{(-\infty,-1] \cap [-2,4]\} \cup \{[3,+\infty) \cap [-2,4]\} = [-2,-1] \cup [3,4]. \quad \blacksquare$$



A megoldást szemlélteti az alábbi ábra.



Emlékeztető. Valamely $f \in A \to B$ függvény

- **invertálható** (**injektív** vagy **egy-egyértelmű**), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f : \qquad (x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y)).$$

  Ekkor az

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f, \quad f^{-1}(y) = x : \quad f(x) = y$$

  függvényt f **inverz**ének nevezzük.

- **szürjektív**, ha $\mathcal{R}_f = B$.
- **bijektív** vagy **kölcsönösen egyértelmű**, ha injektív és szürjektív.

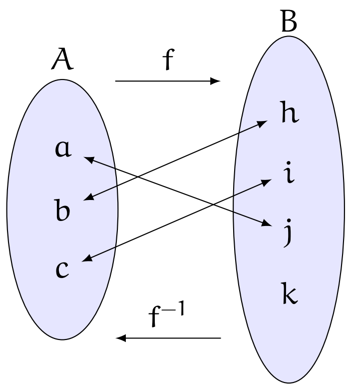
Példa. Az ábrán látható

$$f := \{(a, j), (b, h), (c, i)\}$$

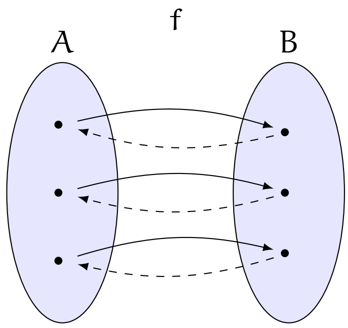
függvény invertálható, és inverze az

$$f^{-1} := \{(j, a), (h, b), (i, c)\}$$

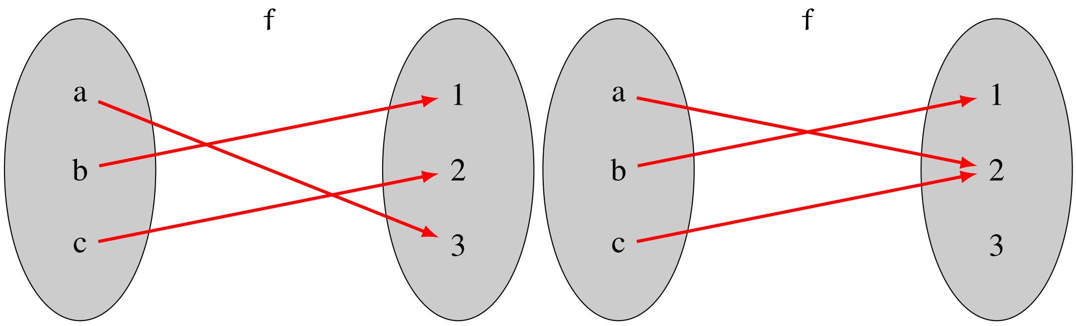
függvény, de az $f : A \to B$ függvény nem bijektív.



Egy $f : A \to B$ bijektív leképezés párba állítja az A és B halmaz elemeit: a két halmaz elemszáma megegyezik. Ekkor



azt mondjuk, hogy az A és B halmaz **azonos számosságú**.



A fenti ábra bal oldala példa injektív függvényre, a jobb oldalán lévő f pedig nem injektív.

Megjegyzések.

1. f pontosan akkor invertálható, ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f : \qquad (f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y),$$

ill. ha minden $y \in \mathcal{R}_f$-hez pontosan egy olyan $x \in \mathcal{D}_f$ van, amelyre $f(x) = y$.

2. Ha alkamas $u, v \in \mathcal{D}_f$, $u \neq v$ esetén $f(u) = f(v)$, akkor f nem invertálható (nem injektív).

3. Ha $\mathcal{D}_f$ nem egyelemű, viszont $\mathcal{R}_f$ egyelemű (valódi konstans függvény), akkor f nem invertálható, hiszen

$$\exists x, y \in \mathcal{D}_f,\ x \neq y : \quad f(x) = f(y).$$

4. A definícióból látható, hogy

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f.$$

5. Ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton (növekvő/csökkenő), akkor invertálható, és f^{-1} is szigorúan monoton (növekvő/csökkenő). Mindez fordítva nem igaz, ui. pl. az

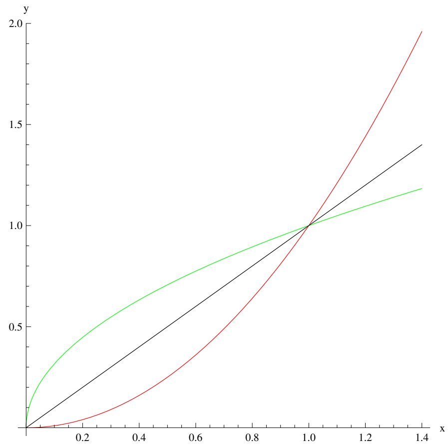
$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x & \left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \\ \frac{3}{2} - x & \left(x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)\right) \end{cases}$$

függvény ugyan injektív, de nem szigorúan monoton.

6. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható függvény, akkor f és az f^{-1} grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükörképei (vö. (2). ábra), hiszen ha valamely $(x, y) \in \mathbb{R}$ pont rajta van f grafikonján:

$$(x, y) \in \text{graph}\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 :\ u \in \mathcal{D}_f,\ v = f(u)\right\},$$

akkor az (y, x) pont rajta van az f^{-1} inverz grafikonján, és ha egy $\mathbb{R}^2$-beli pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pontot az $y = x$ egyenesre tükrözzük.



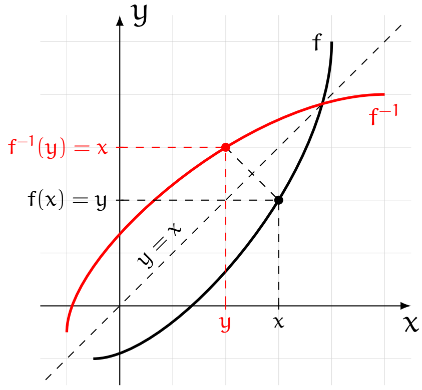
2. ábra. Az $x \mapsto \sqrt{x}, \quad x, \quad x^2$ függvények grafikonjai.

7. Felhívjuk a figyelmet egy, a jelölésekkel kapcsolatos látszólagos következetlenségre. Az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ szimbólum tetszőleges f függvény esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített ősképét jelölte. Azonban, ha f invertálható függvény, akkor ugyanezzel jelöltük – a fogalmilag igencsak különböző dolgot, nevezetesen – a $\mathcal{H}$ halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képét. Ez azért nem vezet félreértéshez – sőt némiképp egyszerűsíti a bevezetett jelelöléseket –, mert minden invertálható f függvény és minden $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}_f$ esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített ősképe – azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{H}\}$ halmaz – megegyezik a $\mathcal{H}$ halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével – azaz az

$$\left\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} : y \in \mathcal{H}\right\}$$

halmazzal.

Megjegyezzük, hogy „átlátszó” papír felhasználásával a tükrözés elkerülhető. Az f grafikonjának megrajzolása után rögtön láthatóvá válik inverzének grafikonja is, ha először elforgatjuk a papírt 90 fokkal az óramutató járásával megegyező irányban, majd függőlegesen megforgatjuk a papírt. Az az ábra, ami a papíron át látható, pont az f^{-1} inverz grafikonja.



Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$f(x) := \frac{3x+2}{x-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény injektív, majd kiszámítjuk inverzét. Mivel minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = 3 \cdot \frac{3x+2}{3x-3} = 3 \cdot \frac{3x-3+5}{3x-3} = 3 \cdot \left(1 + \frac{5}{3x-3}\right) = 3 + \frac{5}{x-1}, \tag{13}$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = 3 + \frac{5}{y-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. (13) alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $3 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\dfrac{5}{x-1} \neq 0$, így (13) alapján $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R}\backslash\{3\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$, akkor

  $$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 + \frac{5}{y-3} = \frac{y+2}{y-3}$$

  és $x \neq 1$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{y+2}{y-3}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók!

1. $f(x) := 3x + 2 \ (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := \sqrt{9 - x^2} \quad (x \in [-3, 3])$;
4. $f(x) := \left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 \ (x \in (-1, 1))$.

Útm.

1. f invertálható, hiszen szigorúan monoton (növekedő):

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R},\ u < v: \qquad 3u < 3v \iff 3u + 2 < 3u + 2 \iff f(u) < f(v).$$

2. f nem invertálható, hiszen $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$.

3. f nem invertálható, hiszen $f(-3) = \sqrt{9 - (-3)^2} = \sqrt{9 - 3^2} = f(3)$.
Megjegyzés. Ha f (nemtrivi) páros függvény, akkor f nyilvánvalóan nem invertálható.

4. f invertálható, hiszen tetszőleges $x, y \in (-1, 1)$ esetén

$$f(x) = f(y) \iff \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 = \left(\frac{y-1}{1+y}\right)^2 - 1 \iff \underbrace{\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{1+y}\right)^2 = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\left[\frac{x-1}{1+x} - \frac{y-1}{1+y}\right] \cdot \left[\frac{x-1}{1+x} + \frac{y-1}{1+y}\right] = 0}$$

és

$$\frac{x-1}{1+x} - \frac{y-1}{1+y} = \frac{(x-1)(1+y) - (y-1)(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2(x-y)}{(1+x)(1+y)}$$

ill.

$$\frac{x-1}{1+x} + \frac{y-1}{1+y} = \frac{(x-1)(1+y) + (y-1)(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2(xy-1)}{(1+x)(1+y)} \neq 0,$$

így

$$f(x) = f(y) \iff x = y. \quad \blacksquare$$

Feladat. Invertálhatóak-e az alábbi fügvények? Ha igen, akkor számítsuk ki f^{-1}-et!

1. $f(x) := \dfrac{1}{1 + |x-1|} \quad (x \in \mathbb{R});$
2. $a, b \in \mathbb{R},\ f(x) := ax + b \quad (x \in \mathbb{R});$
3. $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2} \quad (2 \neq x \in \mathbb{R});$
4. $f(x) := \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 \quad (x \in (-1, 1)).$

Útm.

1. Az f függvény nem injektív, ui.

$$0 \neq 2 \qquad \text{és} \qquad f(0) = \frac{1}{1+|0-1|} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+|2-1|} = f(2).$$

2. Ha

- $a = 0$, akkor $\mathcal{R}_f = \{b\}$, de $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, így f nem invertálható.
- $a \neq 0$, akkor nyilván $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$ és

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax + b = ay + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható és

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a},$$

hiszen

$$ax + b = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{y-b}{a}.$$

3. Mivel minden $2 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(*) \qquad f(x) = \frac{x-2+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2},$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{y-2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $1 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $2 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\frac{3}{x-2} \neq 0$, így $(*)$ alapján

$$\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R}\backslash\{1\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, akkor

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \frac{3}{x-2} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2 + \frac{3}{y-1} = \frac{2y+1}{y-1}$$

és $x \neq 2$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1}:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}\backslash\{2\},\qquad f^{-1}(y):=\frac{2y+1}{y-1}.$$

4. Korábbról tudjuk, hogy f invertálható. Világos, hogy bármely $x\in(-1,1)$ estén $f(x)>-1$, azaz

$$\mathcal{R}_f\subset(-1,+\infty). \tag{14}$$

Mivel $f(x)$ a (-1)-hez közeli x pontokban tetszőlegesen nagy értéket felvesz, ezért sejthető, hogy a fordított irányú

$$\mathcal{R}_f\supset(-1,+\infty). \tag{15}$$

tartalmazás is igaz, azaz

$$\forall y\in(-1,+\infty)\;\exists x\in(-1,1):\quad f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-1=y.$$

Ha tehát $y\in(-1,+\infty)$, akkor

$$f(x)=y\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-1=y\quad\Longleftrightarrow\quad\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\sqrt{y+1}\quad\overset{x\in(-1,1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{x\in(-1,1)}{\Longleftrightarrow}\quad\frac{1-x}{x+1}=\sqrt{y+1}\quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}.$$

Mivel $y\in(-1,+\infty)$, ezért

$$-1<x=\frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}<1\qquad\Longleftrightarrow\qquad-1-\sqrt{y+1}<1-\sqrt{y+1}<1+\sqrt{y+1},$$

ez utóbbi egyenlőtlenség-rendszer pedig nyilvánvaló. Így (14), ill. (15) alapján $\mathcal{R}_f=(-1,+\infty)$. Így $x=f^{-1}(y)$ következtében az inverz függvény:

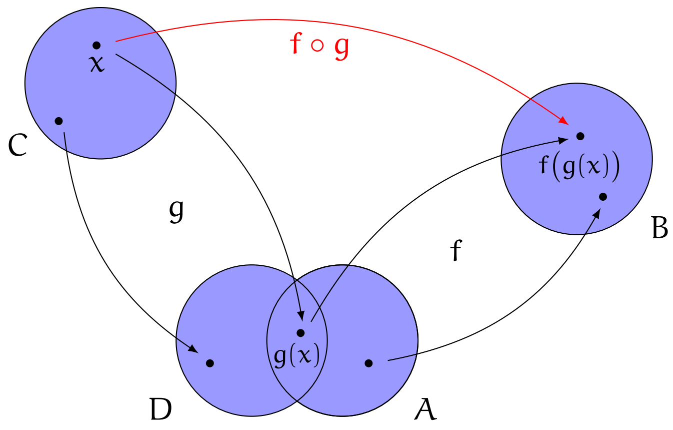
$$f^{-1}(y)=\frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}\qquad(y\in(-1,+\infty)).\quad\blacksquare$$

Emlékeztető. Legyen $f \in A \to B$, $g \in C \to D$, ill.

$$\mathcal{H} := \{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

Ekkor az f (külső) és a g (belső) függvény **összetett függvény**nek (**kompozíció**jának) nevezzük az alábbi függvényt:

$$f \circ g : \mathcal{H} \to D, \qquad (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$



Megjegyzések.

1. A definícióból nyilvánvaló, hogy $\mathcal{D}_{f\circ g} = g^{-1}\left[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f\right]$, illetve $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ esetén $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g$.

2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható függvény, akkor

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad (x \in \mathcal{D}_f), \qquad\qquad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \qquad (y \in \mathcal{R}_f).$$

3. Ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan invertálható függvények, amelyekre $\mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f$ és $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_g$ teljesül, akkor $f \circ g$ is invertálható és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

4. A kompozíció-képzés nem kommutatív, hiszen pl. az

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \qquad \text{és a} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények esetében $f \circ g \neq g \circ f$. Valóban,

- a

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x^2 \in (-\infty, 1]\right\} = [-1, 1] \neq \emptyset$$

halmazzal, ha $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$, akkor

$$(f \circ g)(x) = (f(g(x)) = \sqrt{1-g(x)} = \sqrt{1-x^2},$$

azaz az f és a g kompizíciója:

$$f \circ g : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = \sqrt{1-x^2};$$

- a

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (-\infty, 1] : \ \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\right\} = (-\infty, 1] \neq \emptyset$$

halmazzal, ha $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$, akkor

$$(g \circ f)(x) = (g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2 = 1-x,$$

azaz a g és az f függvény kompozíciója pedig

$$g \circ f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = 1-x.$$

Feladat. Írjuk fel az $f \circ g$ kompozíciót a következő függvények esetében, amennyiben az képezhető!

1. $f(x) := \sqrt{x+1}\ (-1 \leq x \in \mathbb{R}), \quad g(x) := x^2 - 3x + 1\ (x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) := \dfrac{1}{2x+1}\ \left(-\frac{1}{2} \neq x \in \mathbb{R}\right), \quad g(x) := x^2 + 3x + \frac{3}{2}\ (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Világos, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{f\circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 1 \in [-1, +\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 1 \geq -1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 2 \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Mivel

$$x^2 - 3x + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \in \{1; 2\},$$

ezért

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)(x-2) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty).$$

Tehát

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty),$$

és bármely $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ esetén

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) + 1} = \sqrt{(x^2 - 3x + 1) + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Az f és a g függvény kompozíciója így az

$$(f \circ g)(x) := \sqrt{x^2 - 3x + 2} \qquad (x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty))$$

függvény.

2. Látható, hogy

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{f\circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g :\ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 3x + \frac{3}{2} \in \mathbb{R}\backslash\{-1/2\}\right\} = \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 3x + \frac{3}{2} \neq \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 3x + +2 \neq 0\right\} = \\
&= \{x \in \mathbb{R} :\ (x + 1)(x + 2) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-;-2\}.
\end{aligned}$$

Így tetszőleges $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ esetén

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{2g(x) + 1} = \frac{1}{2\left(x^2 + 3x + \frac{3}{2}\right) + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

Mindez azt jelenti, hogy az f és a g függvény kompozíciója így az

$$(f \circ g)(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;-2\})$$

függvény. ■

Feladat. Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében, amennyiben az képezhető!

1. $f(x) := \sqrt{2x+1}$ $\left(\frac{1}{2} \leq x \in \mathbb{R}\right)$, $g(x) := \dfrac{1}{x^2-2}$ $(2 < x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := 1 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(x) := \sqrt{x}$ $(0 \leq x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(x) := 2^x$ $(x \in \mathbb{R})$;
4. $f(x) := -x^2$ $(0 < x \in \mathbb{R})$, $g(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(0 < x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel
$$\{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in (2, +\infty) : \; \frac{1}{x^2-2} \geq \frac{1}{2}\right\} = \emptyset,$$
ui. $x \in (2, +\infty)$ következtében $x^2 - 2 > 0$, így
$$\frac{1}{x^2-2} \geq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2 \geq x^2 - 2 \quad \Longrightarrow \quad 4 \geq x^2 \quad \Longrightarrow \quad |x| < 2.$$
Ez azt jelenti, hogy
$$f \circ g \quad \text{nem képezhető.}$$
Mivel
$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{g\circ f} &= \{x \in \mathcal{D}_f : \; f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) : \; \sqrt{2x+1} \in (2, +\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) : \; 2x+1 \in (4, +\infty)\right\} = \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) : \; x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right\} = \\ &= \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \neq \emptyset, \end{aligned}$$
ezért tetszőleges $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$ esetén
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f^2(x) - 2} = \frac{1}{(\sqrt{2x+1})^2 - 2} = \frac{1}{2x-1}.$$
Mindez azt jelenti, hogy a g és az f függvény kompozíciója így a
$$(g \circ f)(x) := \frac{1}{2x-1} \qquad \left(x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right)$$

függvény.

2. Mivel
$$\mathcal{D}_{f\circ g}=\{x\in\mathcal{D}_g:\ g(x)\in\mathcal{D}_f\}=\left\{x\in[0,+\infty):\ \sqrt{x}\in\mathbb{R}\right\}=[0,+\infty),$$
ill.
$$\mathcal{D}_{g\circ f}=\{x\in\mathcal{D}_f:\ f(x)\in\mathcal{D}_g\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ 1-x^2\in[0,+\infty)\right\}=[-1,1],$$
ezért
$$f\circ g:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\qquad (f\circ g)(x)=f(g(x))=1-(g(x))^2=1-(\sqrt{x})^2=1-x,$$
ill.
$$g\circ f:[-1,1]\to\mathbb{R},\qquad (g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{1-x^2}.$$

3. Mivel
$$\mathcal{D}_{f\circ g}=\{x\in\mathcal{D}_g:\ g(x)\in\mathcal{D}_f\}=\{x\in\mathbb{R}:\ 2^x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R},$$
ill.
$$\{x\in\mathcal{D}_f:\ f(x)\in\mathcal{D}_g\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R},$$
ezért
$$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad (f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2=(2^x)^2=2^{2x};$$
ill.
$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad (g\circ f)(x)=g(f(x))=2^{f(x)}=2^{x^2}.$$

4. Mivel
$$\mathcal{D}_{f\circ g}=\{x\in\mathcal{D}_g:\ g(x)\in\mathcal{D}_f\}=\left\{x\in(0,+\infty):\ \frac{1}{x^2}\in(0,+\infty)\right\}=(0,+\infty),$$
ill.
$$\mathcal{D}_{g\circ f}=\{x\in\mathcal{D}_f:\ f(x)\in\mathcal{D}_g\}=\left\{x\in(0,+\infty):\ -x^2\in(0,+\infty)\right\}=\emptyset,$$
ezért
$$f\circ g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\qquad (f\circ g)(x)=f(g(x))=-\frac{1}{(f(x))^2}=-\frac{1}{x^4},$$
ill.
$$g\circ f\quad \text{nem képezhető.}\quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat. Az

$$f(x) := 3x^2 - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény és a $\mathcal{H} := [0,1]$ halmaz esetén határozzuk meg az $f[\mathcal{H}]$ és az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmazokat! Milyen A halmaz esetén áll fenn az $f[A] = \emptyset$ vagy az $f^{-1}[A] = \emptyset$ egyenlőség?

Útm.

- Világos, hogy

$$f[\mathcal{H}] = \left\{3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| x \in [0,1]\right\}.$$

Mivel minden $x \in [0,1]$ számra

$$3 \cdot 0^2 - 2 = -2 \leq 3x^2 - 2 \leq 3 \cdot 1^2 - 2 = 1,$$

ezért

$$\left\{3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| x \in [0,1]\right\} \subset [-2,1],$$

azaz

$$f[\mathcal{H}] \subset [-2,1].$$

Tegyük fel, hogy $y \in [-2,1]$. Ekkor $3x^2 - 2 = y$, ha $x = \pm\sqrt{\frac{y+2}{3}}$. Mivel

$$\sqrt{\frac{y+2}{3}} \in [0,1] \qquad \text{és} \qquad f\left(\sqrt{\frac{y+2}{3}}\right) = y,$$

ezért $y \in f[\mathcal{H}]$, azaz

$$[-2,1] \subset f[\mathcal{H}].$$

Megjegyzés. Mivel

$$f[\mathcal{H}] = \left\{3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| x \in [0,1]\right\} = 3 \cdot \left\{x^2 \in \mathbb{R} \middle| x \in [0,1]\right\} - 2,$$

és nem nehéz megmutatni, hogy

$$\left\{x^2 \in \mathbb{R} \middle| x \in [0,1]\right\} = [0,1],$$

ezért

$$f[\mathcal{H}] = [-2,1].$$

- Világos, hogy

$$f^{-1}[\mathcal{H}] = \left\{x \in \mathbb{R} | 3x^2 - 2 \in [0,1]\right\}.$$

Az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmaz tehát a

$$0 \le 3x^2 - 2 \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} \le x^2 \le 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza, ezért

$$\begin{aligned} f^{-1}[\mathcal{H}] &= \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)\right) \cap [-1,1] = \\ &= \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cap [-1,1]\right) \cup \left(\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \cap [-1,1]\right) = \\ &= \left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right]. \end{aligned}$$

- A definíció alapján világos, hogy

$$f[A] = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap \mathbb{R} = \emptyset \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[A] = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap [-2, +\infty) = \emptyset. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat. Invertálhatóak-e az alábbi függvények?

1. $f(x) := |x-1| + |x+2| \quad (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := x^3 + 6x^2 + 12x \quad (x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x - x - 2 = -1 - 2x & (x \in (-\infty, -2)), \\ 1 - x + x + 2 = 3 & (x \in [-2, 1)), \\ x - 1 + x + 2 = 2x + 1 & (x \in [1, +\infty)), \end{cases}$$

ezért f nem invertálható.

2. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 2^3 - 6 = (x+2)^3 - 8,$$

ezért f szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható. Sőt, az is könnyen megmutatható, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$, hiszen bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, hogy

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+2)^3 - 8 = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{y+8} - 2.$$

Az f inverze:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) := \sqrt[3]{y+8} - 2$$

3. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 5 = (x-1)^3 + 5,$$

ezért f szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható. Sőt, az is könnyen megmutatható, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$, hiszen bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, hogy

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)^3 + 5 = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{y-5} + 1.$$

Az f inverze:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) := \sqrt[3]{y-5} + 1. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat. Invertálható-e az

$$f(x) := \frac{3x+2}{x-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény? Ha igen, akkor számítsuk ki f^{-1}-et!

Útm. Mivel minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(*) \qquad f(x) = 3 \cdot \frac{3x+2}{3x-3} = 3 \cdot \frac{3x-3+5}{3x-3} = 3 \cdot \left(1 + \frac{5}{3x-3}\right) = 3 + \frac{5}{x-1},$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = 3 + \frac{5}{y-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $3 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\dfrac{5}{x-1} \neq 0$, így $(*)$ alapján

$$\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R}\backslash\{3\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$, akkor

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 + \frac{5}{y-3} = \frac{y+2}{y-3}$$

  és $x \neq 1$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{y+2}{y-3}. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladatok.

1. Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót az

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (c \in (-\infty, 1]), \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények esetében!

2. Írjuk fel az $f \circ g$ kompozíciót a következő függvények esetében!

(a) $f(x) := 2x+1$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(x) := x^2 - 3x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ x & (0 < x < +\infty), \end{cases}$ $g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty); \end{cases}$

(c) $f(x) := \dfrac{1}{2x+1}$ $(-1/2 \neq x \in \mathbb{R})$, $g(x) := x^2 + 3x - 10$ $(x \in \mathbb{R})$.

3. Tekintsük az alábbi függvényeket!

$$f(x) := \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} \quad (x \in [0,1]), \qquad g(x) := -x^2 - 4x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Határozzuk meg az $f \circ g$ függvény!

(b) Invertálható-e az f függvény? Ha igen, akkor határozzuk meg az f^{-1} inverzet!

Útm.

1. Mivel

$$\{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \in (-\infty, 1]\right\} = [-1, 1]$$

ill.

$$\{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (-\infty, 1] : \ \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\right\} = (-\infty, 1],$$

ezért

$$f \circ g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-x^2};$$

ill.

$$g \circ f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{1-x})^2 = 1 - x.$$

2. (a) Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R},$$

továbbá

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(x^2-3x+2)+1=2x^2-6x+5 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

(b) Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f\circ g}=\{x\in\mathcal{D}_g:\ g(x)\in\mathcal{D}_f\}=\{x\in\mathbb{R}:\ g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R},$$

továbbá

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}0 & (-\infty<g(x)\leq 0),\\ \\ g(x) & (0<g(x)<+\infty).\end{cases}$$

Mivel bármely $x\in\mathcal{D}_g$ esetén $-\infty<g(x)\leq 0$, ezért

$$(f\circ g)(x)=0 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

(c) Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f\circ g}=\{x\in\mathcal{D}_g:\ g(x)\in\mathcal{D}_f\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+3x-10\in\mathbb{R}\backslash\{-1/2\}\right\}=$$

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-3-\sqrt{47}}{2},\frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right\},$$

továbbá

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{2(x^2+3x-10)+1}=\frac{1}{2x^2+6x-19} \qquad (x\in\mathcal{D}_{f\circ g}).$$

3. (a) Mivel tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$g(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=-2\pm\sqrt{(-2)^2-3}\in\{-1;-3\},$$

ezért

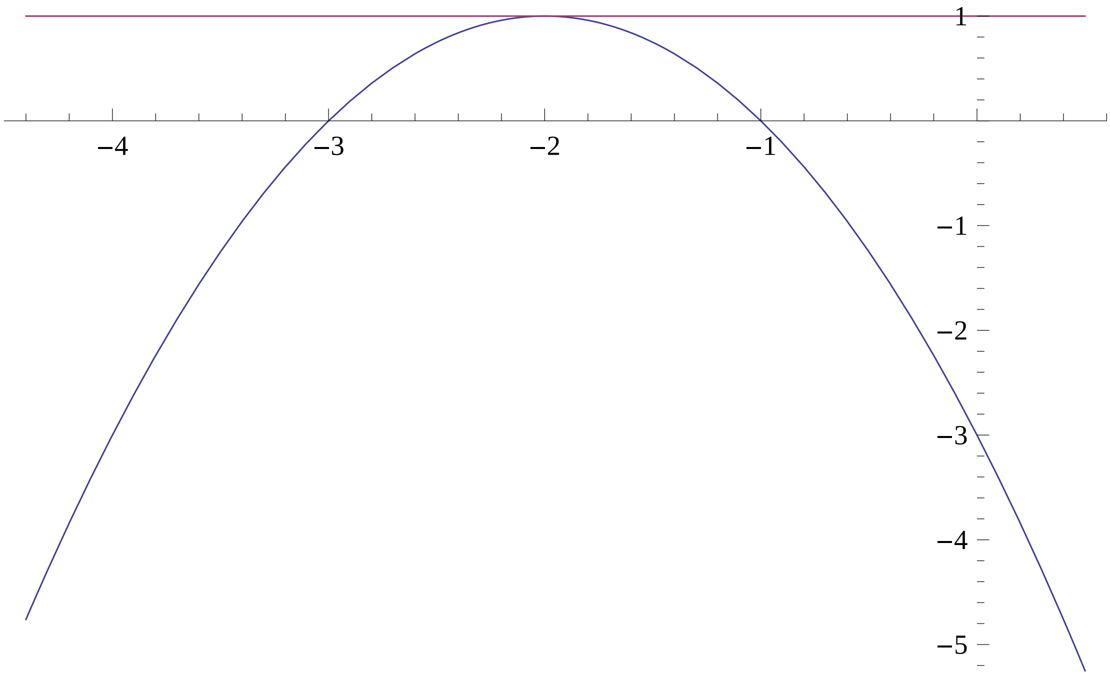
$$g(x)=-(x+1)(x+3) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

(vö. 3. ábra). Így

$$\{x\in\mathcal{D}_g:\ g(x)\in\mathcal{D}_f\}=\{x\in\mathbb{R}:\ -(x+1)(x+3)\in[0,1]\}=[-3,-1]\neq\emptyset$$

következtében

$$f\circ g:[-3,-1]\to\mathbb{R},$$



3. ábra. A g függvény grafikonja.

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1+x^2+4x+3}{-x^2-4x-3+2}} = \sqrt{\frac{x^2+4x+4}{-x^2-4x-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x+2)^2}{3-(x^2+4x+4)}} = \frac{|x+2|}{\sqrt{3-(x+2)^2}}.$$

(b) Mivel

$$(*) \qquad \frac{1-x}{x+2} = -\frac{x-1}{x+2} = -\frac{x+2-3}{x+2} = -1+\frac{3}{x+2} \qquad (x\in[0,1]),$$

ezért bármely $x, y \in [0,1]$ esetén

$$f(x)=f(y) \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{-1+\frac{3}{x+2}} = \sqrt{-1+\frac{3}{y+2}} \quad\Longrightarrow\quad \ldots \quad\Longrightarrow\quad x=y.$$

Mindez azt jelenti, hogy f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = [f(1), f(0)] = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Biz.:

- $\mathcal{R}_f \subset [f(1), f(0)]$, ui. bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$x+2 \in [2,3] \implies \frac{1}{x+2} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \implies \frac{3}{x+2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \implies -1 + \frac{3}{x+2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\implies f(x) = \sqrt{-1 + \frac{3}{x+2}} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

- $[f(1), f(0)] \subset \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $y \in [f(1), f(0)]$ van olyan $x \in \mathcal{D}_f = [0,1]$, hogy $f(x) = y$, ui.

$$f(x) = y \iff \sqrt{-1 + \frac{3}{x+2}} = y \iff x+2 = \frac{3}{y^2+1} \iff x = \frac{3}{y^2+1} - 2 = \frac{1-2y^2}{y^2+1}$$

és

$$0 \leq \frac{1-2y^2}{y^2+1} = -\frac{2y^2-1}{y^2+1} = -2 \cdot \frac{2y^2-1}{2y^2+2} = -2 \cdot \frac{2y^2+2-3}{2y^2+2} = -2 + \frac{3}{y^2+1} \leq 1$$

miatt $x \in [0,1] = \mathcal{D}_f$.

Tehát f invertálható és inverzére

$$f^{-1} : \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{1-2y^2}{y^2+1}.$$