2. gyakorlat (2023. 03. 09.)

Emlékeztető. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondtuk, hogy

1. a $\mathcal{H}$ halmaz **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $x \geq k$. Az ilyen k számot a $\mathcal{H}$ halmaz **alsó korlát**jának neveztük.
2. a $\mathcal{H}$ halmaz **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $x \leq K$. Az ilyen K számot a $\mathcal{H}$ halmaz **felső korlát**jának neveztük.
3. a $\mathcal{H}$ halmaz **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Megjegyzések.

1. Valamely számhalmazt megadó kifejezésből az esetek többségében nehéz látni a halmaz szerkezetét, ezért a korlátosságának vizsgálata általában nem egyszerű feladat. Ennek megoldásához gyakran használhatjuk a következő ötletet: valamilyen „alkalmas” módon átalakítjuk a szóban forgó kifejezést (ilyen átalakításokra példákat fogunk mutatni). Ezután már számos esetben könnyen megfogalmazható sejtés az alsó, ill. a felső korlátokra vonatkozóan. Ezek bizonyításához (sokszor triviális) egyenlőtlenségek fennállását kell majd belátnunk.
2. Sok esetben hasznos lehet halmazok szerkezetének feltárására az alábbi átalakítás ismerete: bármely $(a, b, c, d, x \in \mathbb{R}\colon c \neq 0, x \neq -d/c)$ esetén

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\cdot\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\left[1+\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}\right] = \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} =$$

$$= \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}$$

vagy

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\cdot\frac{acx+bc}{acx+ad} = \frac{a}{c}\cdot\frac{acx+ad+bc-ad}{acx+ad} = \frac{a}{c}\cdot\left(1+\frac{bc-ad}{acx+ad}\right) =$$

$$= \frac{a}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{bc-ad}{cx+d} = \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}.$$

Példák.

1. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$
halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 0, ill. az 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. A
$$\mathcal{H} := \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$
halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 2, ill. a 3 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

3. A
$$\mathcal{H} := \left\{a + \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : \ 0 < a \in \mathbb{R}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$a + \frac{1}{a} = 2 \cdot \frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \qquad (0 < a \in \mathbb{R}).$$

4. A
$$\mathcal{H} := \left\{\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \in \mathbb{R} : \ a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: ha $ab > 0$, akkor $\frac{a}{b}, \frac{b}{a} > 0$, így
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2;$$
ha pedig $ab < 0$, akkor $\frac{a}{b}, \frac{b}{a} < 0$, így
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2.$$

5. A
$$\mathcal{H} := \left\{\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: az
$$a := |x+1|, \qquad \text{ill.} \qquad b := |x-1|$$
helyettesítéssel látható, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ esetén
$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

6. A
$$\mathcal{H} := \left\{\mathrm{tg}(\alpha) + \mathrm{ctg}(\alpha) \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$\mathrm{tg}(\alpha) + \mathrm{ctg}(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha) + \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha)} \geq 2 \qquad \left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

7. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. a 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

1. módszer. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2;$$

2. módszer. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+1+1 \geq 2\sqrt{x^2+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2 \geq 0.$$

8. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{x^2}{1+x^4} \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\right\}$$
halmaz felülről korlátos, ui. az $\frac{1}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:

1. módszer. ha $x = 0$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül, ha pedig pedig $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2} \leq \frac{1}{2};$$

2. módszer. minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2 \leq 1+x^4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x^2-1\right)^2 \geq 0.$$

9. A

$$\mathcal{H} := \left\{2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. a 0 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x^2-1)^2 + (x^2-x)^2 \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

10. A

$$\mathcal{H} := \{a + b - ab \in \mathbb{R} : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 0, ill. az 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak, hiszen ha $b \in (0,1)$, akkor $1 - b > 0$, így bármely $a \in (0,1)$ esetén

$$0 < a(1-b) < 1-b \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < a + b - ab < 1.$$

11. A

$$\mathcal{H} := \left\{ab - 5a^2 - 3b^2 \in \mathbb{R} : \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

halmaz felülről korlátos, ui. a 0 felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$ab - 5a^2 - 3b^2 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -ab - 4a^2 - 4b^2 - (a-b)^2 \leq 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

12. A

$$\mathcal{H} := \left\{a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \in \mathbb{R} : \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

halmaz felülről alulról, ui. a 0 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

13. A

$$\mathcal{H} := \left\{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} \in \mathbb{R} : \ 0 < a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. a $\frac{128}{65}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} &= \frac{a+b}{a}\cdot\frac{b+c}{b}\cdot\frac{a+c}{c} = \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) = \\ &= \left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) = 1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}+1 = \\ &= 2+\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}}_{\geq 2}\geq 8.\end{aligned}$$

és

$$8\geq\frac{128}{65}\qquad\Longleftrightarrow\qquad 520\geq 128.$$

14. A

$$\mathcal{H}:=\left\{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2+\left(1+\frac{y}{z}\right)^2+\left(1+\frac{z}{x}\right)^2\in\mathbb{R}:\ 0<x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. a 12 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: bármely $a,b\in(0,+\infty)$ esetén

$$\frac{1+\frac{a}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{a}{b}},$$

ezért

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\geq 4\cdot\frac{a}{b}.$$

A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlnség felhasználásával így azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^2+\left(1+\frac{y}{z}\right)^2+\left(1+\frac{z}{x}\right)^2\geq 4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq 4\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}=12.\qquad\blacksquare$$

Feladat. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában azt, hogy a $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}$ halmaz alulról, ill. felülről nem korlátos!

Útm. A definíció szerint valamely $\emptyset\neq\mathcal{H}\subset\mathbb{R}$ halmaz

- **alulról nem korlátos**, ha

$$\neg\,(\exists\,k\in\mathbb{R}\quad\forall\,x\in\mathcal{H}:\qquad x\geq k)\qquad\Longleftrightarrow\qquad(\forall\,k\in\mathbb{R}\quad\exists\,x\in\mathcal{H}:\qquad x<k);$$

- **felülről nem korlátos**, ha

$$\neg\left(\exists K\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathcal{H}:\qquad x\leq K\right)\qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(\forall K\in\mathbb{R}\quad \exists x\in\mathcal{H}:\qquad x>K\right).$$

Feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\mathcal{H}:=\left\{\frac{x^2+2x+3}{x+1}\in\mathbb{R}:\ 1\leq x\in\mathbb{R}\right\}$$

halmaz felülről nem korlátos!

Útm. Mivel bármely $1\leq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2+2x+3}{x+1}\overset{\boxed{x\geq 1}}{\geq}\frac{x^2}{x+1}\geq\frac{x^2}{x+x}=\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2},$$

ezért tetszőleges $0<K\in\mathbb{R}$ esetén igaz az

$$\frac{x}{2}>K\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{x^2+2x+3}{x+1}>K$$

implikáció. Következésképpen az

$$x:=2K+1\in[1,+\infty)$$

jó választás. ■

Emlékeztető. Legyen $\emptyset\neq\mathcal{H}\subset\mathbb{R}$. Azt mondtuk, hogy a $\mathcal{H}$ halmaznak **van**

- **maximuma**, ha

$$\exists\alpha\in\mathcal{H}\ \forall x\in\mathcal{H}:\qquad x\leq\alpha.$$

Ekkor α-t a H halmaz **maximumának** nevezzük és a $\max(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük.

- **minimuma**, ha

$$\exists\beta\in\mathcal{H}\ \forall x\in\mathcal{H}:\qquad x\geq\beta.$$

Ekkor β-t a $\mathcal{H}$ halmaz **minimumának** nevezzük és a $\min(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzések.

1. Ha a $\mathcal{H}$ halmaznak van maximuma, akkor $\max(\mathcal{H})$ egyben felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

2. Ha a $\mathcal{H}$ halmaznak van minimuma, akkor $\min(\mathcal{H})$ egyben alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

3. A $\mathcal{H}$ halmaznak pontosan akkor **nincsen maximuma**, ha bármely $\mathcal{H}$-beli eleménél van nagyobb $\mathcal{H}$-beli elem:
$$\forall \alpha \in \mathcal{H}\ \exists x \in \mathcal{H}: \qquad x > \alpha.$$

4. A $\mathcal{H}$ halmaznak pontosan akkor **nincsen minimuma**, ha bármely $\mathcal{H}$-beli eleménél van kisebb $\mathcal{H}$-beli elem:
$$\forall \beta \in \mathcal{H}\ \exists x \in \mathcal{H}: \qquad x < \beta.$$

Példák.

1. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
halmazn esetén $\max(H) = 1$, ui. $1 \in \mathcal{H}$ ($n = 1$) és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{n} \leq 1$. A $\mathcal{H}$ halmaznak nincsen minimuma, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(n+1)$-re
$$\mathcal{H} \ni \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \in \mathcal{H} \qquad (\text{ui.} \quad \Longleftrightarrow \quad n+1 > n)\,.$$

2. A
$$\mathcal{H} := \left\{1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
halmaz esetén $\min(\mathcal{H}) = 0$, ui. $0 \in \mathcal{H}$ ($n = 1$) és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq 1 - \frac{1}{n}$. A $\mathcal{H}$ halmaznak nincsen maximuma, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(n+1)$-re
$$\mathcal{H} \ni 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} \in \mathcal{H} \qquad (\text{ui.} \quad \Longleftrightarrow \quad n+1 > n)\,. \quad \blacksquare$$

A következő, alapvető fontosságú tétel azt mondja ki, hogy minden (nem-üres)

- felülről korlátos halmaz felső korlátai között van legkisebb, azaz a **felső korlátok halmazának van minimuma**;
- alulról korlátos halmaz alsó korlátai között van legnagyobb, azaz az **alsó korlátok halmazának van maximuma**.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Ha a $\mathcal{H}$ halmaz

1. felülről korlátos, akkor, akkor felső korlátai között van legkisebb: az

$$\mathcal{F} := \{\mathrm{K} \in \mathbb{R}: \quad \mathrm{K} \text{ felső korlátja } \mathcal{H}\text{-nak}\}$$

halmaznak van minimuma.

2. alulról korlátos, akkor, akkor alsó korlátai között van legnagyobb: az

$$\mathcal{A} := \{\mathrm{k} \in \mathbb{R}: \quad \mathrm{k} \text{ alsó korlátja } \mathcal{H}\text{-nak}\}$$

halmaznak van maximuma.

Definíció.

1. A felülről korlátos $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját a számhalmaz **felső határ**ának, más szóval **szuprémum**ának vagy **lényeges felső korlát**jának nevezzük és a $\sup(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük: $\sup(\mathcal{H}) := \min(\mathcal{F}) \in \mathbb{R}$.

2. Az alulról korlátos $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a számhalmaz **alsó határ**ának, más szóval **infimum**ának vagy **lényeges alsó korlát**jának nevezzük és az $\inf(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük: $\inf(\mathcal{H}) := \max(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}$.

Példák.

1. A $\mathcal{H} := [-1, 1]$ halmaz esetében

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = -1, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1;$$

2. A $\mathrm{H} := (-1, 1]$ halmaz esetében

$$\inf(\mathcal{H}) = -1, \ \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1.$$

Megjegyezzük, hogy a $\nexists \min(\mathcal{H})$ állítás a következőképpen látható be. Ha lenne $\mathcal{H}$-nak minimuma: $\xi \in \mathcal{H} \in (-1, 1]$, akkor az

$$\eta := \frac{-1+\xi}{2} < \xi$$

számra $\eta \in (-1, 1] = \mathcal{H}$ teljesülne, ami nem lehetséges.

Megjegyzések.

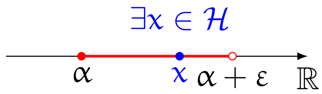
1. Világos, hogy

   (a) $\exists \min(\mathcal{H}) \iff \inf(\mathcal{H}) \in \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H})$.

   (b) $\exists \max(\mathcal{H}) \iff \sup(\mathcal{H}) \in \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H})$.

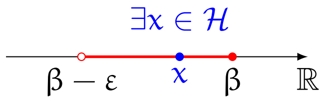
2. Az $\inf(\mathcal{H}) = \alpha$ állítás azt jelenti, hogy

   - α a $\mathcal{H}$ halmaz alsó korlátja:
   $$\forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \geq \alpha,$$
   - bármely α-nál nagyobb szám már nem alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
   $$\forall a > \alpha \; \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < a) \qquad \iff \qquad (\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < \alpha + \varepsilon).$$



3. A $\sup(\mathcal{H}) = \beta$ állítás azt jelenti, hogy

   - β a $\mathcal{H}$ halmaz ferlső korlátja:
   $$\forall x \in \mathcal{H} \qquad x \leq \beta,$$
   - bármely β-nál kisebb szám $\mathcal{H}$-nak már nem felső korlátja:
   $$(\forall b < \beta \; \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > b) \qquad \iff \qquad (\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > \beta - \varepsilon).$$



Feladat. Vizsgáljuk az $\mathcal{H}$ halmazt korlátosság szempontjából! Határozzuk meg $\inf \mathcal{H}$-t és $\sup \mathcal{H}$-t! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

1. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} : \ x \in (0,1] \right\};$
2. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{5n+3}{8n+1} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0 \right\};$
3. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{x+1}{2x+3} \in \mathbb{R} : \ 0 \le x \in \mathbb{R} \right\};$
4. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{2x+3}{3x+1} \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{Z} \right\};$
5. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{2|x|+3}{3|x|+1} \in \mathbb{R} : \ -2 \le x \in \mathbb{R} \right\};$
6. $\mathcal{H} := \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbb{R} : \ 0 \le x \in \mathbb{R} \right\}.$

Útm.

1.
- $\mathcal{H}$ alulról korlátos, ugyanis 0 nyilván alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak, sőt minden $x \in (0,1]$ esetén

$$\frac{1}{x} \ge \frac{1}{1} = 1,$$

ezért 1 is alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. Mivel $x = 1$ esetén

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \in \mathcal{H},$$

ezért $\mathcal{H}$-nak van legkisebb eleme (minimuma):

$$\min \mathcal{H} = 1, \qquad \text{így} \qquad \inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H} = 1.$$

- Ha x elég közel van 0-hoz, akkor $\dfrac{1}{x}$ értéke igen nagy. Így sejthető, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos. Ennek megmutatásához azt kell belátni, hogy

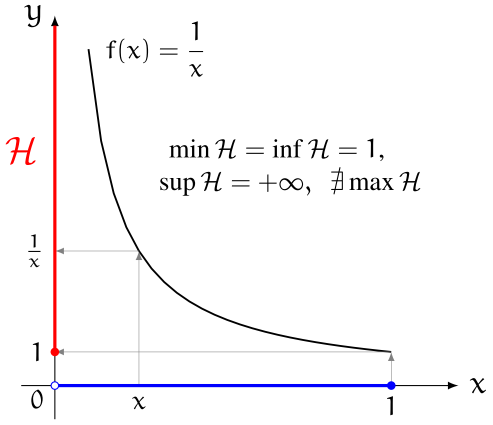
$$\forall K \in \mathbb{R}\text{-hoz } \exists x \in (0,1]: \quad \frac{1}{x} > K.$$

Legyen $K > 0$ tetszőlegesen rögzített szám. Ekkor

$$\frac{1}{x} > K, \qquad \text{ha} \qquad 0 < x < \frac{1}{K}.$$

Így pl. az $x := \frac{1}{K+1} < 1$ megfelelő, ami azt mutatja, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos.

Megjegyzés. A kapott eredmények az $\frac{1}{x}$ $(x > 0)$ függvény grafikonjáról is leolvashatók:



Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, felülről nem,

$$\inf\mathcal{H} = \min\mathcal{H} = 1, \qquad \sup\mathcal{H} = +\infty.$$

2. A $\mathcal{H}$ halmaz szerkezetének feltárásához először az

$$\frac{5n+3}{8n+1}$$

törtet a gyakorlat elején leírt módon átalakítjuk. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8}\cdot\frac{n+\frac{3}{5}}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8}\cdot\frac{n+\frac{1}{8}+\frac{3}{5}-\frac{1}{8}}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{19}{40}\cdot\frac{1}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8}+\frac{19}{8}\cdot\frac{1}{8n+1} > \frac{5}{8}$$

vagy

$$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8}\cdot\frac{40n+24}{40n+5} = \frac{5}{8}\cdot\frac{40n+5+19}{40n+5} = \frac{5}{8}\cdot\left(1+\frac{19}{40n+5}\right) =$$

$$= \frac{5}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{19}{40n+5} = \frac{5}{8}+\frac{19}{8}\cdot\frac{1}{8n+1} > \frac{5}{8}.$$

- Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

  $$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8}+\frac{19}{8}\cdot\frac{1}{8n+1} \leq \frac{5}{8}+\frac{19}{8}\cdot\frac{1}{8\cdot 0+1} = 3,$$

  ezért

  $$\max\mathcal{H} = \sup\mathcal{H} = 3,$$

  ui. 3 felső korlát és $3 \in \mathcal{H}$.

- $\inf \mathcal{H} = \frac{5}{8}$, ui. $\frac{5}{8}$ alsó korlát és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$\frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8N+1} < \frac{5}{8} + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad N > \frac{1}{8}\left(\frac{19}{8\varepsilon} - 1\right)$$

és

$$N := \max\left\{0, \left[\left(\frac{19}{8\varepsilon} - 1\right)\frac{1}{8}\right] + 1\right\}$$

ilyen. Világos, hogy $\nexists \min \mathcal{H}$, mivel

$$\forall a \in \mathcal{H}: \quad a > \inf \mathcal{H} = \frac{5}{8}.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, felülről nem,

$$\inf \mathcal{H} = \frac{5}{8}, \quad \min \mathcal{H} = 1, \qquad \max \mathcal{H} = \sup \mathcal{H} = 3.$$

3.
- Világos, hogy bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+3-1}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2x+3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3}.$$

- Mivel

$$\mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot 0 + 6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

ezért

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}.$$

- Mivel bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{2x+3} > 0,$$

ezért

$$\mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} < \frac{1}{2},$$

azaz $\frac{1}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Mivel nagy x-ekre $\frac{1}{2x+3}$ igen kicsi, ezért sejthető, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{1}{2}$-nél kisebb felső korlátja:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in [0, +\infty): \qquad \mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Ez azzal egyenértékű, hogy $\dfrac{1}{4x+6} < \varepsilon$, azaz hogy $\dfrac{1}{\varepsilon} - 6 < 4x$. Ilyen $x \geq 0$ nyilván létezik. Következésképpen $\sup(\mathcal{H}) = \dfrac{1}{2}$. Világos, hogy $\nexists \max(\mathcal{H})$, mivel $\dfrac{1}{2} \notin \mathcal{H}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}, \quad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

4. • Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6x+9}{6x+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6x+2+7}{6x+2} = \frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{7}{6x+2}\right) = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6x+2} = \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3x+1}.$$

• Ha $x < 0$, akkor $\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{1}{3x+1} < 0$, míg $x \geq 0$ esetén

$$0 \leq \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3x+1} \leq \frac{7}{3}.$$

Ezért

$$\frac{2x+3}{3x+1} \leq \frac{2}{3}+\frac{7}{3} = 3$$

és $x = 0$-ra

$$\frac{2\cdot 0+3}{3\cdot 0+1} = 3.$$

Tehát a $\mathcal{H}$ halmaznak van maximuma és $\max(\mathcal{H}) = 3$, következésképpen $\sup(\mathcal{H}) = 3$.

• Ha $x = -1$, akkor

$$\frac{2(-1)+3}{3(-1)+1} = -\frac{1}{2}.$$

Lássuk be, hogy

$$\frac{2x+3}{3x+1} \geq -\frac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{Z})$$

teljesül. Ui. ez azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{2x+3}{3x+1}+\frac{1}{2} = 7\cdot\frac{x+1}{3x+1} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{Z}),$$

ami igaz. Tehát

$$\min(\mathcal{H}) = \inf(\mathcal{H}) = -1/2.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 3.$$

5. • Világos, hogy bármely $-2 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6|x|+9}{6|x|+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6|x|+2+7}{6|x|+2} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{7}{6|x|+2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1}.$$

• Mivel tetszőleges $-2 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1} > 0,$$

ezért

$$\mathcal{H} \ni \frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1} > \frac{2}{3},$$

azaz a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, és $\frac{2}{3}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

• Látható, hogy az

$$\frac{1}{3|x|+1}$$

tört az x nagy értékeire igen közel van 0-hoz, ezért a $\mathcal{H}$ halmaz elemei nagy x-ekre $\frac{2}{3}$-hoz közeli értékeket vesznek fel. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{2}{3}$-nál nagyobb alsó korlátja:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists x \in [-2, +\infty) : \qquad \mathcal{H} \ni \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1} < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Valóban, a tetszőleges $x \in [-2, +\infty)$ esetén fennálló

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1} < \frac{2}{3}+\varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1} < \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{7}{\varepsilon} < 9|x|+3 \quad\Longleftrightarrow\quad |x| > \frac{7}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}$$

ekvivalencia-lánc következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $h \in \mathcal{H}$, amelyre

$$h < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Így

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{2}{3} \qquad \text{és} \qquad \nexists \min(\mathcal{H}), \quad \text{ui.} \quad \frac{2}{3} \notin \mathcal{H}.$$

• Mivel bármely $x \in [-2, +\infty)$ esetén

$$\mathcal{H} \ni \frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1} \leq \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|0|+1} = \frac{2|0|+3}{3|0|+1} = \frac{3}{1},$$

ezért $\mathcal{H}$-nak van legnagyobb eleme: $\max(\mathcal{H}) = 3$. Következésképpen

$$\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 3.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{2}{3}, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 3.$$

Megjegyezzük, hogy az $y := |x|$ helyettesítéssel jól látható, hogy

$$\left\{ \frac{2|x|+3}{3|x|+1} \in \mathbb{R} : \ -2 \leq x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{2y+3}{3y+1} \in \mathbb{R} : \ 0 \leq y \in \mathbb{R} \right\}$$

ami némileg egyszerűsíti a megoldást.

6. • Mivel bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot 1 = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

és

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq 1 \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq 1 \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz korlátos, továbbá 0, ill. 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

• Mivel $x = 0$ esetén $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$ ezért $1 \in \mathcal{H}$, következésképpen $\max(\mathcal{H}) = 1$, és így $\sup(\mathcal{H}) = 1$.

• Látható, hogy ha x elég nagy, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

igen kicsi. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen 0-nál nagyobb alsó korlátja:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x \in [0, +\infty) : \qquad \mathcal{H} \ni \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Mivel tetszőleges $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \frac{1}{4\varepsilon^2},$$

ezért $\inf(\mathcal{H}) = 0$. Mivel $0 \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = 0, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Van-e a

$$\mathcal{H} := \left\{2 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\right\}$$

halmaznak maximuma, ill. minimuma?

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy

$$\sup \mathcal{H} = 2 \qquad \text{és} \qquad \inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H} = 1.$$

Valóban,

- a 2 szám felső korlátja $\mathcal{H}$-nak, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $2 - \frac{1}{n} < 2$. A 2 a legisebb felső korlát, ui. ha $\varepsilon > 0$, akkor van a $2 - \varepsilon$ számnál nagyobb H-beli elem, azaz alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\varepsilon} < n.$$
Ez pedig igaz, hiszen $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos.
- az 1 szám alsó korlátja H-nak, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$1 \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq 1 - \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{n} \leq 1.$$
Mivel $1 \in H$ (hiszen $n = 1$ esetén $2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$), ezért
$$\inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H} = 1.$$

2. lépés. Mivel $2 \notin \mathcal{H}$ (nincsen olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

$$2 - \frac{1}{n} = 2$$

volna), ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen maximuma.

Megjegyezzük, hogy ez így is belátható: ha $h \in \mathcal{H}$ tetszőleges, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$h = 2 - \frac{1}{n}.$$

Ha most $m := n + 1$ akkor a $k := 2 - \frac{1}{m} \in \mathcal{H}$ elemre

$$k = 2 - \frac{1}{m} > 2 - \frac{1}{n} = h.$$

Gyakorló feladat. Vizsgáljuk az $\mathcal{H}$ halmazt korlátosság szempontjából! Határozzuk meg $\inf \mathcal{H}$-t és $\sup \mathcal{H}$-t! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

1. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{x^2+1}{4x^2+3} \in \mathbb{R} :\ x \in [2, +\infty) \right\}$;
2. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N} \right\}$;
3. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{\sqrt{x}-1}{5\sqrt{x}+2} \in \mathbb{R} :\ x \in [4, +\infty) \right\}$;
4. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{R} :\ x \in (0,1), y \in (0,x) \right\}$;
5. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} \in \mathbb{R} :\ x \in [1/9, +\infty) \right\}$.
6. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{5x-1}{2x+3} \in \mathbb{R} :\ x \in [3, +\infty) \right\}$.

Útm.

1.
   - Mivel minden $x \in [2, +\infty)$ esetén

     $$(*) \quad \frac{x^2+1}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2+4}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2+3+1}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4x^2+3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2+12}$$

     és

     $$\frac{1}{16x^2+12} > 0,$$

     ezért

     $$\mathcal{H} \ni \frac{x^2+1}{4x^2+3} > \frac{1}{4},$$

     azaz $\frac{1}{4}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.
   - Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{4}$ a legnagyobb alsó korlát: $\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{4}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám

esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h < \frac{1}{4} + \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [2, +\infty)$ számra

$$\frac{1}{4} + \varepsilon > h := \frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2 + 12} \iff \varepsilon > \frac{1}{16x^2 + 12} \iff x^2 > \frac{1}{16\varepsilon} - \frac{3}{4}.$$

Világos, hogy pl. az

$$x := \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon}} + 2 = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} + 2 > 2$$

szám ilyen.

- Mivel $\frac{1}{4} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [2, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2 + 12} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{16 \cdot 2^2 + 12} = \frac{5}{19} \in \mathcal{H}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{5}{19}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{4}, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{5}{19}.$$

2. - Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5^n + 2}{10 \cdot 5^n + 15} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5^n + 15 - 13}{10 \cdot 5^n + 15} = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{13}{10 \cdot 5^n + 15}\right) =$$

$(*)$

$$= \frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6}$$

és

$$\frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} > 0,$$

ezért

$$\frac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} < \frac{5}{2},$$

azaz $\frac{5}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\frac{5}{2}$ a legkisebb felső korlát: $\sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > \frac{5}{2} - \varepsilon$, ha alkalmas $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\frac{5}{2} - \varepsilon < a := \frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} \iff \varepsilon > \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} \iff 5^n > \frac{13}{4\varepsilon} - \frac{6}{4}.$$

Nem nehéz belátni, hogy van ilyen n.

- Mivel $\frac{5}{2} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legnagyobb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} \geq \frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^0 + 6} = \frac{6}{5} \in \mathcal{H}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{6}{5}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{6}{5}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}, \quad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

3. - Mivel minden $x \in [4, +\infty)$ esetén

$$(*) \quad \frac{\sqrt{x}-1}{5\sqrt{x}+2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5\sqrt{x}-5}{5\sqrt{x}+2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5\sqrt{x}+2-7}{5\sqrt{x}+2} = \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{7}{5\sqrt{x}+2}\right) = \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x}+10}$$

és

$$\frac{7}{25\sqrt{x}+10} > 0,$$

ezért

$$\frac{\sqrt{x}-1}{5\sqrt{x}+2} < \frac{1}{5},$$

azaz $\frac{1}{5}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{5}$ a legkisebb felső korlát: $\sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{5}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > \frac{1}{5} - \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [4, +\infty)$ számra

$$\frac{1}{5} - \varepsilon < h := \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} > \frac{7}{25\varepsilon} - \frac{2}{5}.$$

Világos, hogy pl. az

$$x := \left(\frac{7}{25\varepsilon}\right)^2 + 4 = \frac{49}{225\varepsilon^2} + 4 > 4$$

szám ilyen.

- Mivel $\frac{1}{5} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legnagyobb eleme.

- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [4, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \geq \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{4}+10} = \frac{1}{12} \in \mathcal{H}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \dfrac{1}{12}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{12}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{5}, \qquad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

4. - A $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos, ugyanis tetszőleges $K \geq 1$ számhoz van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > K$, hiszen $h := \dfrac{x}{y}$:

$$x := \frac{1}{2}, \quad y \in \left(0, \frac{1}{2K}\right) \qquad \text{esetén} \qquad h = \frac{\frac{1}{2}}{y} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2K}} = K.$$

Ezért

$$\sup(\mathcal{H}) = +\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

- A $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, ugyanis 0 alsó korlátja, sőt minden $x \in (0,1)$ esetén $\dfrac{x}{y} > \dfrac{x}{x} = 1$, ezért az 1 is alsó korlát.
- $\inf(\mathcal{H}) = 1$, ugyanis minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x \in (0,1)$, $y \in (0,x)$, hogy $\dfrac{x}{y} < 1+\varepsilon$, hiszen

$$\frac{x}{y} < 1+\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad y > \frac{x}{1+\varepsilon}$$

és $\dfrac{x}{1+\varepsilon} < x$, ezért tetszőleges $x \in (0,1)$ esetén y legyen olyan, hogy $\dfrac{x}{1+\varepsilon} < y < x$.
- $\nexists \min(\mathcal{H})$, mivel $\inf(\mathcal{H}) = 1 \notin \mathcal{H}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, felülről nem korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = 1, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = +\infty.$$

5. - Mivel minden $x \in [1/9, +\infty)$ esetén

$$(*) \quad \frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{x}+6}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{x}+1+5}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{5}{3\sqrt{x}+1}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3}$$

és
$$\frac{5}{9\sqrt{x}+3} > 0,$$
ezért
$$\frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} > \frac{1}{3},$$
azaz $\frac{1}{3}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{3}$ a legnagyobb alsó korlát: $\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $a < \frac{1}{3} + \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [1/9, +\infty)$ számra
$$\frac{1}{3} + \varepsilon > h := \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \quad\Longleftrightarrow\quad \varepsilon > \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{x} > \frac{1}{9}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 3\right) = \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$
Világos, hogy pl. az
$$x := \frac{25}{81\varepsilon^2} + \frac{1}{9}$$
szám ilyen.
- Mivel $\frac{1}{3} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [1/9, +\infty)$ esetén
$$\frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{1/9}+3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \in A.$$
Ez azt jelenti, hogy
$$\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{7}{6}.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,
$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{7}{6}.$$

6.
- Világos, hogy bármely $3 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{5x-1}{2x+3} = \frac{5}{2}\cdot\frac{10x-2}{10x+15} = \frac{5}{2}\cdot\frac{10x+15-17}{10x+15} = \frac{5}{2}\cdot\left(1 - \frac{17}{10x+15}\right) = \frac{5}{2} - \frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2x+3}.$$
- Mivel tetszőleges $3 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{14}{9} = \frac{5}{2} - \frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3+3} \leq \frac{5}{2} - \frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2x+3},$$

ezért

$$\inf(A) = \min(A) = \frac{14}{9}.$$

- Látható, hogy $\frac{5}{2}$ felső korlát. Belátjuk, hogy $\sup(A) = \frac{5}{2}$. Ehhez azt kell megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in [3, +\infty): \quad \frac{5}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} > \frac{5}{2} - \varepsilon.$$

  Ez azzal egyenértékű, hogy

$$\frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} < \varepsilon, \qquad \text{azaz hogy} \qquad \frac{17}{2\varepsilon} - 3 < 2x.$$

  Ilyen $x \in \mathcal{H} := [3, +\infty)$ nyilván létezik, hiszen $\mathcal{H}$ felülrőlnem korlátos.

- $\nexists \max(A)$, mivel $\frac{5}{2} \notin A$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \inf(\mathcal{H}) = \frac{14}{9}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}, \quad \nexists \max(\mathcal{H}) = . \quad \blacksquare$$