Diszkrét matematika 1.

Kombinatorika

Juhász Zsófia
jzsofia@inf.elte.hu
jzsofi@gmail.com
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2020 tavasz

Kombinatorika

Kombinatorika fő célja:

- véges halmazok elemeinek elrendezése;
- elrendezések különböző lehetőségeinek megszámlálása.

Példák:

- Nyolc ember közül van legalább kettő, aki a hét ugyanazon napján született.
- Minimálisan hány ember esetén lesz legalább két embernek ugyanazon a napon a születésnapja?
- Mennyi a lehetséges rendszámok / telefonszámok / IP címek száma?
- Legalább hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan nyerjünk a lottón / totón?

Elemi leszámlálások: az összeadási szabály

Adott két véges, diszjunkt halmaz:
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Hányféleképpen tudunk választani egy elemet A-ból vagy B-ből?

Lehetséges választások: $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Számuk: $n + m$.

Példa

Egy cukrászdában 3-féle édes sütemény (isler, zserbó, kókuszkocka) és 2-féle sós sütemény (pogácsa, perec) van. Hányféleképpen tudunk egy édes vagy egy sós sütemény enni? Megoldás: $3 + 2 = 5$.

Elemi leszámlálások: a szorzási szabály

Adott két véges, diszjunkt halmaz:
$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Hányféleképpen tudunk választani elemet A-ból és B-ből?

Lehetséges választások:

$$\begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ \hline a_1 & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \dots & (a_1, b_m) \\ a_2 & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \dots & (a_2, b_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & \dots & (a_n, b_m) \end{array}$$

Számuk: $n \cdot m$.

Példa

Egy cukrászdában 3-féle édes sütemény (isler, zserbó, kókuszkocka) és 2-féle sós sütemény (pogácsa, perec) van. Hányféleképpen tudunk egy édes és egy sós süteményt enni? Megoldás: $3 \cdot 2 = 6$.

Összefoglaló: Leszámlálási alapesetek

Ismétlés nélküli permutáció $n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

Ismétléses permutáció $\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$ elem lehetséges sorrendje, ahol az i típusú elemet k_i-szer választjuk (sorrend számít, egy elem többször).

Ismétlés nélküli variáció $n!/(n-k)!$, n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses variáció n^k, n elemből k-szor választunk (sorrend számít, egy elem többször is).

Ismétlés nélküli kombináció $\dbinom{n}{k}$, n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses kombináció $\dbinom{n+k-1}{k}$, n elemből k-szor választunk (sorrend nem számít, egy elem többször is).

Permutáció

Definíció (permutáció)

Egy A véges halmaz egy permutációja egy olyan, A elemeiből álló sorozat, amely A minden elemét *pontosan egyszer* tartalmazza. (Úgy is mondhatjuk, hogy A elemeinek egy lehetséges sorrendje.)

Ekvivalens definíció: Az A halmaz egy permutációja egy $A \to A$ bijekció.

Tétel (Permutációk száma)

Egy n elemű halmaz permutációinak száma:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

($n!$ kiolvasva: n faktoriális).

Megjegyzés: definíció szerint: $0! = 1$.

Bizonyítás

Az n elemből az első helyre n-féleképpen választhatunk, a második helyre $n-1$-féleképpen választhatunk, ... Így az összes lehetőségek száma $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. $\square$

Permutáció

Példa

1. Egy lóversenyen 70 induló vett részt. Hányféle különböző sorrendben érhetnek célba? (Feltételezzük, hogy nincs döntetlen és mindenki célbaér.)
2. Reggelire a
   2 különböző szendvicset $2! = 2 \cdot 1 = 2$ -féle sorrendben lehet megenni.
   3 különböző szendvicset $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féle sorrendben lehet megenni.
   4 különböző szendvicset $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle sorrendben lehet megenni.
3. A 200 fős évfolyam $200! = 200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \approx 7,89 \cdot 10^{374}$-féle sorrendben írhatja alá a jelenléti ívet.

Ismétléses permutáció

Példa

Egy vizsgán 5 hallgató vett részt, 2 darab 4-es, 3 darab 5-ös született. Hány sorrendben írhatjuk le az eredményeket, ha az azonos jegyeket nem különböztetjük meg egymástól?

Megoldás

Ha figyelembe vesszük a hallgatókat is: $(2+3)! = 5!$ lehetséges sorrend van.
Ha a hallgatókat nem tüntetjük fel, egy lehetséges sorrendet többször is figyelembe vettünk:

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	...
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

Az 5-ösöket $3! = 6$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.
Hasonlóan a 4-eseket $2! = 2$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.
Összes lehetőség: $\dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{120}{2 \cdot 6} = 10.$

Ismétléses permutáció

Tétel (Ismétléses permutációk száma)

k_1 darab első típusú, k_2 második típusú, $\dots$, k_m m-edik típusú elem lehetséges sorrendjét az elemek egy ismétléses permutációjának nevezzük, és ezek száma $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ esetén

$$^{i}P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Bizonyítás

Ha minden elem között különbséget teszünk: $n!$ lehetséges sorrend létezik.
Ha azonban az azonos típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor ebben a számításban többször számoltuk az egyes sorrendeket.
Mivel minden $1 \leq i \leq m$-re, adott k_i db. pozíción $k_i!$ különböző sorrendben helyezhetjük el az i-edik típusú elemeket, ezért minden sorrendet $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$-szor számultunk. Így a különböző sorrendek száma: $n!/(k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!)$. $\square$

Variáció

Példa

1. Egy lóversenyen 70 induló vesz részt. Hányféleképpen alakulhat az elsö 5 helyezés? (Feltételezzük, hogy nincs döntetlen.)
   $70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66$
2. Az egyetemen 10 tárgyunk van, ezek közül 3-at szeretnénk hétfőre tenni. Hányféleképpen tehetjük meg ezt?

   ## Megoldás

   Hétfőn az első óránk 10-féle lehet. A második 9-féle, a harmadik 8-féle lehet.
   Így összesen $10 \cdot 9 \cdot 8$-féleképpen tehetjük meg.

Definíció (variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}$. Az A elemiből képezhető k hosszúságú sorozatokat, melyek A bármely elemét *legfeljebb egyszer* tartalmazzák, az A halmaz k-ad osztályú variációinak nevezzük.

Variáció

Tétel (Variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Egy n elemű halmaz k-ad osztályú variációinak száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

ha $k \leq n$ és 0 egyébként.

Bizonyítás

Tfh. $k \leq n$. A sorozat első elemét n-féleképpen választhatjuk ki, ezután a második elemét $(n-1)$-féleképpen választhatjuk (nem lehet ismétlődés), ..., a k-adik elemet $n-k+1$-féleképpen választhatjuk ki. Így a k-ad osztályú variációk száma: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.
Ha $k > n$, akkor nyilván nem lehet k hosszúságú sorozatot képezni n különböző elem segítségével úgy, hogy ne legyen ismétlődés.

$\square$

Ismétléses variáció

Példa

Az 1, 2, 3 számjegyekből hány kétjegyű szám képezhető?

Megoldás

Az első helyiértékre 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

A második helyiértékre szintén 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{ccc} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{array}$$

Összesen:

$$3 \cdot 3 \quad = 9$$

Ismétléses variáció

Definíció (ismétléses variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}$. Egy, az A elemiből készíthető k hosszúságú sorozatokat az A halmaz k-ad osztályú ismétléses variációinak nevezzük.

Tétel (Ismétléses variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy n elemű k-ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$ {}^{i}V_n^k = n^k. $$

Bizonyítás

A sorozat első elemét n-féleképpen választhatjuk, a második elemét n-féleképpen választhatjuk, . . . □

Ismétléses variáció

Példák

1. Egy totószelvényt ($13 + 1$ helyre 1, 2 vagy X kerülhet) $3^{14} = 4\,782\,969$-féleképpen lehet kitölteni.

2. Hány 5 hosszúságú $0 - 1$ sorozat létezik?

3. Hány n hosszúságú $0 - 1$ sorozat létezik?

4. Hány 12 jegyű szám készíthető csak az $1 - 9$ számjegyek felhasználásával? (Nem kell minden jegyet felhasználni, és egy jegy többször is felhasználható.)

Kombináció

Definíció (kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az A halmaz k elemű részhalmazait az A halmaz k-ad osztályú kombinációinak nevezzük.

Tétel (Kombinációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy n elemű halmaz k-ad osztályú kombinációinak száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ha $k \leq n$ (és 0 egyébként).

Bizonyítás

Először válasszunk a halmez elemei közül k darabot a sorrendet figyelembevéve. Ezt $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$-féleképpen tehetjük meg.
Ha a sorrendtől eltekintünk, akkor az előző leszámlálásnál minden k elemű részhalmaz pontosan $k!$-szor szerepel. Ezzel leosztva kapjuk a k elemű részhalmazok számát. $\square$

Kombináció

Példák

1. Egy lottószelvény (90 számból 5) lehetséges kitöltéseinek száma:
$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\,949\,268.$$

2. Hány olyan, 20 hosszúságú $0 - 1$ sorozat van, amelyik pontosan 7 db 1-est tartalmaz?
A 20 pozíció közül $\binom{20}{7}$-féleképpen választhatjuk ki az a 7 pozíciót, ahova az 1-esek kerülnek.

Ismétléses kombináció

Definíció (ismétléses kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy A halmazból k-szor választva, ismétléseket is megengedve, de a sorrendet figyelmen kívül hagyva, az A halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációit kapjuk.

Megjegyzés: Az ismétléses kombinációknál tehát csak az számít, hogy az A halmaz egyes elemeit hányszor választottuk (sorrend nem számít).

Tétel (Ismétléses kombinációk száma)

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ismétléses kombináció

Tétel (Ismétléses kombinációk száma)

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás

Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ekkor minden egyes lehetőségnek megfeleltetünk egy $0-1$ sorozatot:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_1\text{-ek száma}}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_2\text{-k száma}}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_n\text{-ek száma}}.$$

Ekkor a sorozatban k darab 1-es van (választott elemek száma), $n-1$ darab 0 van (szeparátorok száma). Összesen $n-1+k$ pozíció, ezekből k-t választunk. Ilyen sorozat $\binom{n+k-1}{k}$ darab van. $\square$

Ismétléses kombináció

Példák

1. 5-féle sütemény van a cukrászdában, 8 darabot szeretnénk vásárolni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
   Itt $n = 5$, $k = 8$:
   $$\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495.$$

2. Hányféleképpen dobhatunk 5 dobókockával, ha csak a dobott számok számítanak, az nem, hogy melyik kockán dobtuk az egyes számokat?

   Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból 5-ször választunk (sorrend nem számít, egy elemet többször is választhatunk). Ismétléses kombináció $n = 6$, $k = 5$ választással:
   $$\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Összefoglaló: Leszámlálási alapesetek

Ismétlés nélküli permutáció $n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

Ismétléses permutáció $\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$ elem lehetséges sorrendje, ahol az i típusú elemet k_i-szer választjuk (sorrend számít, egy elem többször).

Ismétlés nélküli variáció $n!/(n-k)!$, n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses variáció n^k, n elemből k-szor választunk (sorrend számít, egy elem többször is).

Ismétlés nélküli kombináció $\dbinom{n}{k}$, n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses kombináció $\dbinom{n+k-1}{k}$, n elemből k-szor választunk (sorrend nem számít, egy elem többször is).

Binomiális tétel

Tétel (Binomiális tétel)

Adott $x, y \in \mathbb{R}$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás

$$(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)$$

Ha elvégezzük a beszorzást, akkor $x^k y^{n-k}$ alakú tagokat kapunk, és ezen tagot annyiszor kapjuk meg, ahányszor az n tényezőből k darab x-et választunk. □

Definíció (Binomiális együtthatók)

Az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ alakú számokat $(n, k \in \mathbb{N}, k \leq n)$ binomiális együtthatónak nevezzük.

Binomiális együtthatók

Tétel (A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága)

Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ *esetén:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, *ha* $k \geq 1, n \geq k+1$.

Bizonyítás

$\binom{n}{k}$ azon n hosszú $0-1$ sorozatok száma, melyben k darab 1-es van.

1. Az n hosszú $0-1$ sorozatok közül azok száma, melyek k darab 1-est tartalmaznak megegyezik azok számával, melyek $n-k$ darab 1-est tartalmaznak.
2. Azon n hosszú, k darab 1-est tartalmazó $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja 1: $\binom{n-1}{k-1}$.
   Azon n hosszú, k darab 1-est tartalmazó $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja 0: $\binom{n-1}{k}$.

Binomiális együtthatók és a Pascal-háromszög

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}: \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n	$\binom{n}{k}$	$(x+y)^n$
0	1	1
1	1 1	$x+y$
2	1 2 1	$x^2+2xy+y^2$
3	1 3 3 1	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
4	1 4 6 4 1	$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
5	1 5 10 10 5 1	$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

Polinomiális tétel

Példa

Mennyi lesz?

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$ $\qquad (x+y+z)^3 = \ldots$

Tétel (Polinomiális tétel)

Tetszőeges $r,\ n \in \mathbb{N}$ *esetén:*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r=n} \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots\cdot i_r!} x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot x_r^{i_r}.$$

Bizonyítás

$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n =$

$(x_1+x_2+\ldots+x_r)(x_1+x_2+\ldots+x_r)\cdots(x_1+x_2+\ldots+x_r).$

Az $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_r^{i_r}$ együtthatója:

$$\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3}\cdots\binom{n-i_1-i_2-\ldots-i_{r-1}}{i_r} =$$

$$\frac{n!}{i_1!(n-i_1)!}\,\frac{(n-i_1)!}{i_2!(n-i_1-i_2)!}\cdots\frac{(n-i_1-i_2-\ldots-i_{r-1})!}{i_r!(n-i_1-\ldots-i_{r-1}-i_r)!} = \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_r!} \qquad \square$$

Polinomiális tétel

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_r!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r}$$

$$(x + y + z)^3 = \ldots$$

i_1	i_2	i_3	$\frac{3!}{i_1!i_2!i_3!}$	$(x+y+z)^3 =$
3	0	0	$\frac{3!}{3!0!0!} = 1$	x^3
2	1	0	$\frac{3!}{2!1!0!} = 3$	$+3x^2y$
2	0	1	$\frac{3!}{2!0!1!} = 3$	$+3x^2z$
1	2	0	$\frac{3!}{1!2!0!} = 3$	$+3xy^2$
1	1	1	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$+6xyz$
1	0	2	$\frac{3!}{1!0!2!} = 3$	$+3xz^2$
0	3	0	$\frac{3!}{0!3!0!} = 1$	$+y^3$
0	2	1	$\frac{3!}{0!2!1!} = 3$	$+3y^2z$
0	1	2	$\frac{3!}{0!1!2!} = 3$	$+3yz^2$
0	0	3	$\frac{3!}{0!0!3!} = 1$	$+z^3$

Skatulya-elv

Skatulya-elv

Ha n darab gyufásdobozunk és $n+1$ gyufaszálunk van, akkor akárhogyan rakjuk bele az összes gyufát a skatulyákba, valamelyikben legalább kettő gyufa lesz.

Példa

Nyolc ember közül van legalább kettő, aki a hét ugyanazon napján született.

Az $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ halmazból bárhogyan választunk ki ötöt, akkor lesz közülük kettő, melyek összege 9.

Tekintsük az $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$ halmazokat. Ekkor a kiválasztott öt elem közül lesz kettő, melyek azonos halmazban lesznek, így összegük 9.

Szita módszer

Példa

Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

Először: Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely osztható 2-vel, 3-mal vagy 5-tel?

$A_1 = \{1 \leq n \leq 999 : 2|n\} \to |A_1| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor$;
$A_2 = \{1 \leq n \leq 999 : 3|n\} \to |A_2| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor$;
$A_3 = \{1 \leq n \leq 999 : 5|n\} \to |A_3| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor$.

Hasonlóan $|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor$, $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor$.

2-vel, 3-mal vagy 5-tel osztható számok száma:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$= \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor.$$

Szita módszer

Példa (folytatás)

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$= \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2 \cdot 3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor =$$

$$= 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733.$$

Az 1000-nél kisebb sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható pozitív egészek száma: $999 - 733 = 266$

Szita módszer

Tétel (Szita-formula)

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *véges halmazok. Ekkor*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| - \ldots$$

$$+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

Bevezetve a jelölést: $S_r = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}|$ (ahol $1\le r\le n$)

a Szita-formula a következő alakba írható:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n+1} S_n$$

Szita módszer

Bevezetve a jelölést: $S_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_r \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}|$ (ahol $1 \leq r \leq n$)

a Szita-formula a következő alakba írható:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n+1} S_n$$

Bizonyítás.

Legyen $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy x-et pontosan egyszer számoltuk az $S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n$ összegben. Jelölje t azon halmazok számát az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok közül, amelyeknek x eleme és jelölje $A_{j_1}, \ldots, A_{j_t}$ azokat a halmazokat, amelyeknek x eleme. Tetszőleges $1 \leq r \leq n$ esetén x-et annyiszor számoltuk S_r-ben, ahányféleképpen ki tudunk választani r db-ot az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_t}$ halmazok közül, azaz $\binom{t}{r}$-szer. Tehát a $S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n$ összegben $\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \ldots (-1)^{t+1} \binom{t}{t}$-szer számoltuk. $\square$

Bizonyítás folytatása.

Számítsuk ki $\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \ldots + (-1)^{t+1}\binom{t}{t}$ értékét!
Ötlet: Vegyük észre, hogy a binomiális tételt alkalmazva $x = 1$ és $y = -1$-re:
$0 = (1-1)^t = \binom{t}{0}1^t(-1)^0 + \binom{t}{1}1^{t-1}(-1)^1 + \ldots \binom{t}{t}1^0(-1)^t =$
$\binom{t}{0} - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \ldots + \binom{t}{t}(-1)^t = 1 - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \ldots + \binom{t}{t}(-1)^t$.
Az $0 = 1 - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \ldots + \binom{t}{t}(-1)^t$ egyenletet átrendezve:
$\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \ldots + \binom{t}{t}(-1)^{t+1} = 1$. Így x-et valóban egyszer vettük számításba az $S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n+1}S_n$ összegben. □