# 13. előadás

# SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK 2.

## Hatványok értelmezése

**Pozitív kitevőkre** az $n$ tényezős $a \cdot \ldots \cdot a$ szorzatot $a^n$-nel jelöltük, és **az $a$ szám $n$-edik hatványának** neveztük. Nyilvánvaló, hogy bármely $a, b$ valós és $x, y$ pozitív egész számra fennállnak a hatványozás alapazonosságai:

$$(*) \qquad (ab)^x = a^x \cdot b^x, \qquad a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

A hatványozás műveletének kiterjesztését egyéb $x, y$ valós kitevőkre úgy célszerű definiálni, hogy a fenti alapazonosságok érvényben maradjanak.

**Egész kitevőkre** $a \neq 0$ esetén az $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ azonosság csak úgy maradhat érvényben, ha $a^0$-t 1-nek, $a^{-n}$-et pedig $1/a^n$-nek értelmezzük, ahol $n \in \mathbb{N}$, azaz

$$a^0 := 1 \quad \text{és} \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ezeket a definíciókat elfogadva könnyen igazolható, hogy $(*)$ mindhárom azonossága érvényben marad minden $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén.

**Racionális kitevőkre** a hatványok értelmezése is egyszerűen megoldható. A továbbiakban csak nemnegatív $a$ számok hatványaival foglalkozunk. Viszonylag egyszerűen meg lehet mutatni azt, hogy az imént jelzett célnak megfelelően egy $a > 0$ valós szám $r = p/q$ ($p, q$ relatív prím egészek és $q > 0$) racionális kitevős hatványát így kell definiálnunk:

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

Az is viszonylag könnyen megmutatható, hogy a $(*)$ azonosságok minden $a, b > 0$ és $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén teljesülnek.

**Irracionális kitevőkre** a hatványok értelmezése már jóval bonyolultabb feladat. Hogyan értelmezzük egy pozitív $a$ valós szám irracionális kitevőjű hatványát, például $2^{\sqrt{2}}$-őt?

A felvetett kérdés megválaszolására két lehetőség is kínálkozik.

**1. lehetőség.** Felhasználva a valós számok struktúrájának a tulajdonságait, valamint azt, hogy pozitív valós szám racionális kitevőjű hatványait már értelmeztük, megállapodhatnánk a következő definícióban:

Legyen $x$ egy valós szám.

- Ha $a > 1$, akkor $a^x := \sup\{a^r \mid r \leq x \text{ és } r \in \mathbb{Q}\}$.
- Ha $0 < a < 1$, akkor $a^x := \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$.
- Ha $a = 1$, akkor $1^x := 1$.

Ezt a definíciót elfogadva már be lehetne bizonyítani a $(*)$ azonosságokat.

**2. lehetőség.** A továbbiakban pozitív valós szám irracionális kitevőjű hatványainak értelmezéséhez mi a következő utat követjük. Az első lépésként az $e$ szám tetszőleges valós kitevőjű hatványait értelmezzük. Ezt korábban az exp függvény bevezetésénél már meg is tettük. Az exp függvény inverzeként vezetjük be a *természetes alapú logaritmusfüggvényt.* Ezek felhasználásával fogjuk definiálni az $a^x$ hatványokat tetszőleges $a > 0$ és $x, y \in \mathbb{R}$ számokra.

## Az $e$ szám irracionalitása

Emlékeztetünk arra, hogy az $e$ számot a szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos (tehát konvergens)

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat határértékeként definiáltuk, és akkor megjegyeztük azt, hogy ez a határérték egy irracionális szám. Most bebizonyítjuk ezt az állítást.

**1. tétel.** *Az $e$ szám irracionális.*

**Bizonyítás.** Azt már tudjuk, hogy

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $e$ racionális, azaz

$$e = \frac{p}{q}, \quad \text{ahol} \quad p, q \in \mathbb{N}^+ \ \text{ és } \ q \geq 2$$

(a $q \geq 2$ feltehető, egyébként bővítjük a törtet). Az

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekvő módon tart $e$-hez, ha $n \to +\infty$. Legyen $n > q$ tetszőleges egész. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 < q! \cdot (s_n - s_q) &= q! \cdot \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \\
&= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(q+1) \cdot \ \ldots \ \cdot n} \leq \\
&\leq \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ebből az $n \to +\infty$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy

$$(\#) \qquad 0 < q! \cdot (e - s_q) \leq \frac{1}{2},$$

hiszen $q! \cdot (e - s_q) \neq 0$, mert $s_q < e$.

Az indirekt feltételből az következik, hogy

$$q! \cdot \left(e - s_q\right) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - s_q\right) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right)$$

egész szám. Ez viszont (#) alapján nem lehetséges.

**Megjegyzés.** A bizonyításban alkalmazott módszerrel igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n \cdot n!},$$

és ez (elvben) lehetőséget ad arra, hogy $e$ értékét tetszőlegesen előírt pontossággal kiszámítsuk. Például $n = 6$-ot véve azt kapjuk, hogy

$$2,7180 < e < 2,7183. \blacksquare$$

## 4. Az exponenciális- és a logaritmusfüggvény

Most emlékeztetünk az exp függvény értelmezésére. Láttuk, hogy a $\sum \frac{x^n}{n!}$ hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens. Ennek a hatványsornak az összegfüggvényeként definiáltuk az exp függvényt:

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

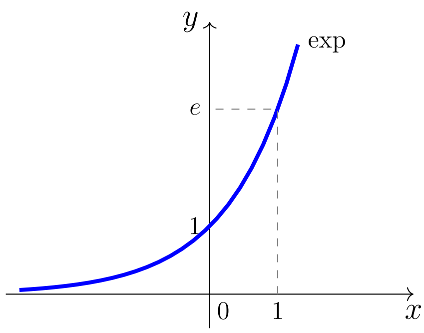
és megállapítottuk számos fontos tulajdonságát. Ezek alapján az $e$ szám hatványait tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ kitevő esetén így *értelmeztük*: legyen

$$e^x := \exp(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért az exp függvényt ***e* alapú exponenciális függvénynek** is nevezzük.

Most felsoroljuk az exp függvény tulajdonságait.

- $\exp(0) = 1$ és $\exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e,$
- exp $\uparrow$ és folytonos $\mathbb{R}$-en,
- $\lim_{-\infty} \exp = 0$ és $\lim_{+\infty} \exp = +\infty,$
- exp szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en,
- $\mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty),$
- $\exp(-x) = \frac{1}{e^x} \quad (x \in \mathbb{R}),$
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ és $(e^x)^y = e^{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$




**Megjegyzés.** A fenti tulajdonságokból csak kettőt nem igazoltuk még idáig. Az $(e^x)^y = e^{xy}$ azonossággal most nem tudunk foglalkozni, mert még nem értelmeztük a hatványozást bármely pozitív szám irracionális kitevőre. Ellenben az exp függvény konvexitását igazolni tudnánk az eddigi ismereteink alapján, de így a bizonyítás elég összetett lenne. Később a differenciálszámítás eszköztárának a felhasználásával ezt az állítást jóval egyszerűbben fogjuk igazolni. $\blacksquare$

A logaritmusfüggvényt az exponenciális függvény inverzeként definiáljuk.

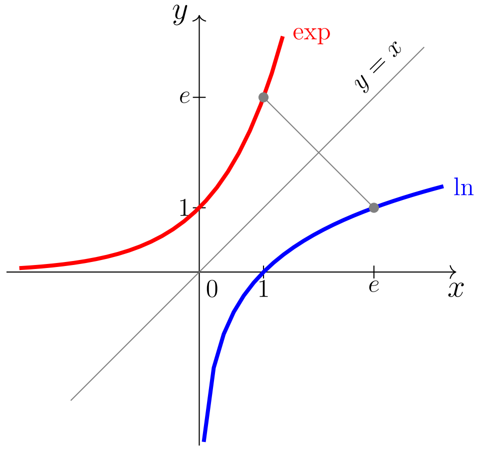
**1. definíció.** *Az* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan monoton növekvő* $\mathbb{R}$*-en, ezért létezik inverze. Legyen*

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

*a (természetes alapú vagy* $e$ *alapú)* ***logaritmusfüggvény****.*

A definíció közvetlen következményei az alábbi állítások:

- Az $\ln$ függvény grafikonja az $\exp$ függvény grafikonjának az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe.
- $\mathcal{D}_{\ln} = \mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$ és $\mathcal{R}_{\ln} = \mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$.
- Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $\ln e^x = x$.
- $\ln \uparrow$ és folytonos $(0, +\infty)$-n,
- 1 zérushely, azaz $\ln 1 = 0$.
- $\lim\limits_{0+0} \ln = -\infty$ és $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$,
- szigorúan konkáv $(0, +\infty)$-n.




Ha $x > 0$, akkor

$$\ln x := \ln(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^y = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{\ln x} = x.$$

$\ln x$ tehát az a kitevő, amire az alapot (vagyis az $e$ számot) emelve $x$-et kapunk. Ez azt jelenti, hogy a fenti módon értelmezett logaritmus a középiskolai definícióval egyezik meg.

**Megjegyzés.** Az $\exp x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (elvileg) tetszőleges pontossággal számolható, mert $\exp x$ egy végtelen sor összege. Az $\ln x$ minden $x > 0$ számra értelmezve van, de az értéke (bizonyos speciális értékektől eltekintve) így nem számolható. A differenciálszámítás alkalmazásainál mutatjuk majd meg, hogyan tudjuk az $\ln$ függvény értékeit sorösszeggel előállítani. ■

## 5. Az $a$ alapú exponenciális- és logaritmusfüggvény

Először tetszőleges $0 < a \in \mathbb{R}$ alap és tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ kitevő esetén értelmezzük az $a^b$ hatványt. Ha $b$ racionális, akkor $a^b$-t már definiáltuk, és ekkor a hatványozás „megszokott” tulajdonságai érvényben maradnak.

Az $e$ szám tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványait, valamint pozitív szám logaritmusát már értelmeztük. Az $a^b$ értelmezéséhez abból indulunk ki, hogy az $a > 0$ valós számot felírhatjuk $e$ hatványaként: $a = e^{\ln a}$. A hatvány hatványozására vonatkozó azonosság csak úgy marad érvényben, ha $a^b$-t így definiáljuk:

$$a^b = \left(e^{\ln a}\right)^b = e^{b \cdot \ln a}.$$

**2. definíció.** *Legyen $a > 0$ valós szám. Tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ esetén az* ***a szám b-edik hatványát*** *így értelmezzük:*
$$a^b := e^{b \cdot \ln a}.$$

**Megjegyzések.**

**1°** Korábban már igazoltuk, hogy $e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}$ minden $p/q \in \mathbb{Q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$) esetén. Ugyanazzal a technikával igazolható, hogy

$$e^{\frac{p \ln a}{q}} = \sqrt[q]{e^{p \ln a}} \qquad \Longrightarrow \qquad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $b$ racionális, akkor a fenti definíció által adott érték megegyezik a korábbi definícióból kapott számmal.

**2°** Most már igazolni tudjuk tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetére is az $(e^x)^y = e^{xy}$ azonosságot. Legyen $a := e^x > 0$. Ekkor

$$(e^x)^y = a^y = e^{y \cdot \ln a} = e^{y \cdot \ln e^x} = e^{y \cdot x} = e^{xy}. \ \blacksquare$$

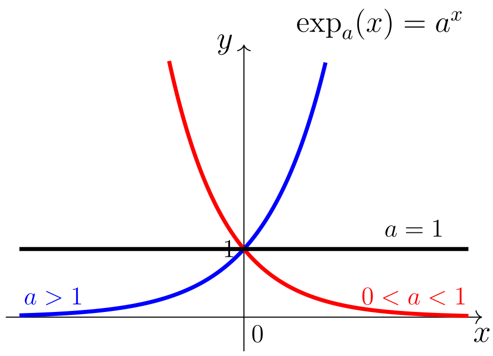
**3. definíció.** *Legyen $a > 0$ valós szám. Az* ***a alapú exponenciális függvényt*** *így értelmezzük:*
$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) = a^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Világos, hogy $\exp_e = \exp$ és $\exp_1$ az azonosan 1 konstans függvény.

Ha $a \neq 1$, akkor a definíció értelmében az $\exp_a$ függvény grafikonját megkapjuk exp grafikonjából egy $x$ tengely irányú, az $y$ tengelytől számított $\frac{1}{|\ln a|}$-szoros nyújtásával/zsugorításával, és ha $\ln a < 0$, akkor a grafikont az $y$ tengelyre is tükrözzük. Ezért sok közös vonásuk van, de szükséges megkülönböztetnünk az $a > 1$ és a $0 < a < 1$ eseteket.

Minden $0 < a \neq 1$ valós szám esetén

- $\exp_a(0) = 1$ és $\exp_a(1) = a$,
- $\exp_a$ folytonos $\mathbb{R}$-en,
- $\exp_a$ szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en,
- $\mathcal{R}_{\exp_a} = (0, +\infty)$,
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x \qquad (x \in \mathbb{R})$,
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ és $(a^x)^y = a^{xy} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$.




Minden $a > 1$ esetén

- $\exp_a \uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- $\lim\limits_{-\infty} \exp_a = 0$ és $\lim\limits_{+\infty} \exp_a = +\infty$.

Minden $0 < a < 1$ esetén

- $\exp_a \downarrow$ $\mathbb{R}$-en,
- $\lim\limits_{-\infty} \exp_a = +\infty$ és $\lim\limits_{+\infty} \exp_a = 0$.

**Megjegyzés.** A fenti azonosságok az $a^x := e^{x \cdot \ln a}$ felhasználásával egyszerűen igazolhatók. $\blacksquare$

**4. definíció.** *Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor az $\exp_a$ szigorúan monoton $\mathbb{R}$-en, ezért van inverze, amelyet **a alapú logaritmusfüggvénynek** nevezünk és $\log_a$-val jelölünk, azaz*

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}, \quad \textit{ha } a > 0 \textit{ és } a \neq 1.$$

Világos, hogy $\log_e = \ln$, ezért szokás az ln függvényt a log szimbólummal is jelölni.

A logaritmus és az exponenciális függvény között fennálló inverz-kapcsolat miatt:

$$\mathcal{D}_{\log_a} = \mathcal{R}_{\exp_a} = (0, +\infty) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}_{\log_a} = \mathcal{D}_{\exp_a} = \mathbb{R}.$$

Ha $x \in (0, +\infty)$, akkor

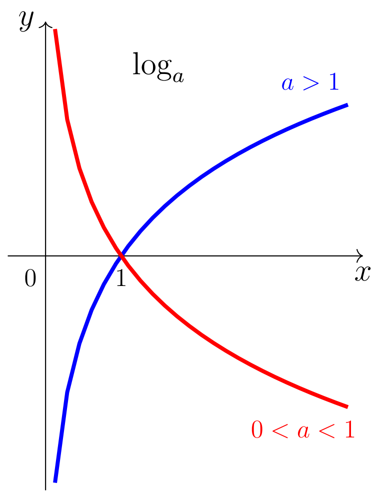
$$\log_a x := \log_a(x) = y \qquad \iff \qquad \exp_a y = a^y = x,$$

azaz $\log_a x$ tehát az a kitevő, amire az alapot (vagyis az $a$ számot) emelve $x$-et kapunk.

Az inverz-kapcsolat alapján nem nehéz megadni a $\log_a$ függvény tulajdonságait:

Minden $0 < a \neq 1$ esetén

- Ha $x > 0$, akkor $\log_a a^x = x$,
- $\log_a$ folytonos $(0, +\infty)$-n,
- 1 zérushely, azaz $\log_a 1 = 0$.
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0)$,
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (x, y > 0)$
- $\log_a (x^y) = y \log_a x \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R})$,
- $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a} \quad (a, c > 0,\ a, c \neq 1,\ x > 0)$.




Minden $a > 1$ esetén

- $\log_a \uparrow (0, +\infty)$-n,
- $\lim\limits_{0+0} \log_a = -\infty \quad$ és $\quad \lim\limits_{+\infty} \log_a = +\infty$,
- szigorúan konkáv $(0, +\infty)$-n.

Minden $0 < a < 1$ esetén

- $\log_a \downarrow (0, +\infty)$-n,
- $\lim\limits_{0+0} \log_a = +\infty \quad$ és $\quad \lim\limits_{+\infty} \log_a = -\infty$,
- szigorúan konvex $(0, +\infty)$-n.

A logaritmusazonosságok igazolásához azt használjuk fel, hogy $\log_a b$ az a kitevő, amire az $a$ számot emelve $b$-et kapunk, tehát ha $z = \log_a b$, akkor $a^z = b$. Másrészt alkalmazzuk az exponenciális függvény szigorú monotonitását amiből: $a^u = a^v \implies u = v$.

- $\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$ Ha $z = \log_a(x \cdot y)$, $u = \log_a x$ és $v = \log_a y$, akkor

$$a^z = xy,\ a^u = x,\ a^v = y \quad \implies \quad a^z = xy = a^u a^v = a^{u+v} \quad \implies \quad z = u + v.$$

- $\boxed{\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$ Ha $z = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$, $u = \log_a x$ és $v = \log_a y$, akkor

$$a^z = \frac{x}{y},\ a^u = x,\ a^v = y \quad \implies \quad a^z = \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \quad \implies \quad z = u - v.$$

- $\boxed{\log_a(x^y) = y\log_a x}$ Ha $z = \log_a(x^y)$ és $u = \log_a x$, akkor

$$a^z = x^y,\ a^u = x \quad\Longrightarrow\quad a^z = x^y = (a^u)^y = a^{yu} \quad\Longrightarrow\quad z = yu.$$

- $\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}}$ Ha $z = \log_a x$, $u = \log_c x$ és $v = \log_c a$, akkor

$$a^z = x,\ c^u = x,\ c^v = a \quad\Longrightarrow\quad c^u = x = a^z = (c^v)^z = c^{vz} \quad\Longrightarrow\quad u = vz \quad\Longrightarrow\quad z = \frac{u}{v}.$$

**Megjegyzés.** Az exponenciális és logaritmus függvény konvexitását később, a differenciálszámítás eszköztárával fogjuk igazolni. ■

## 6. Általános hatványfüggvények

Ha az $a^b$ hatványban az alapot rögzítettnek, a kitevőt pedig változónak tekintjük, akkor megkapjuk az **exponenciális függvényeket**. Ha a kitevőt tekintjük rögzítettnek és az alapot változónak, akkor megkapjuk a **hatványfüggvényeket**. Ez utóbbi függvényeket csak a $(0, +\infty)$ intervallumon fogjuk tekinteni. Az előzőek alapján már tetszőleges $b$ valós kitevő és $a > 0$ esetén értelmezni tudjuk az $a^b$ hatványt.

**5. definíció.** *Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén az $\alpha$* ***kitevőjű hatványfüggvényt*** *így értelmezzük:*

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

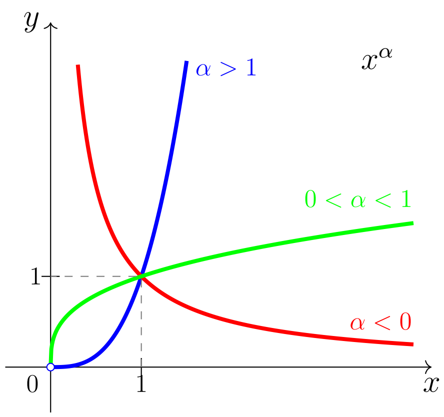
Az általános hatványfüggvények tulajdonságai különböző $\alpha$ értékek esetén különbözők. Ha $\alpha = 0$, illetve $\alpha = 1$, akkor a

$$h_0(x) = 1, \qquad \text{illetve a} \qquad h_1(x) = x \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

függvényeket kapjuk. Egyéb $\alpha$ kitevőkre az általános hatványfüggvényeket három olyan csoportra osztjuk, amelyekben a függvények már hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek:

Minden $\alpha > 1$ esetén

- $\uparrow$ $(0, +\infty)$-n,
- folytonos $(0, +\infty)$-n,
- $\lim\limits_{0+0} h_\alpha = 0$ és $\lim\limits_{+\infty} h_\alpha = +\infty$,
- szigorúan konvex $(0, +\infty)$-n,
- $\mathcal{R}_{h_\alpha} = (0, +\infty)$,
- ha $\alpha = n$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$, akkor megkapjuk az eredeti hatványfüggvényeket.



Minden $0 < \alpha < 1$ esetén

- $\uparrow$ $(0, +\infty)$-n,
- folytonos $(0, +\infty)$-n,
- $\lim\limits_{0+0} h_\alpha = 0$ és $\lim\limits_{+\infty} h_\alpha = +\infty$,
- szigorúan konkáv $(0, +\infty)$-n,
- $\mathcal{R}_{h_\alpha} = (0, +\infty)$,
- ha $\alpha = \frac{1}{n}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$, akkor megkapjuk a gyökfüggvényeket.

Minden $\alpha < 0$ esetén

- $\downarrow$ $(0, +\infty)$-n,
- folytonos $(0, +\infty)$-n,
- $\lim\limits_{0+0} h_\alpha = +\infty$ és $\lim\limits_{+\infty} h_\alpha = 0$,
- szigorúan konvex $(0, +\infty)$-n,
- $\mathcal{R}_{h_\alpha} = (0, +\infty)$,
- ha $\alpha = -n$ $(1 \le n \in \mathbb{N})$, akkor megkapjuk a reciprokfüggvényeket.

**Megjegyzés.** Az általános hatványfüggvények konvexitását később, a differenciálszámítás eszköztárával fogjuk igazolni. ■

## 7. A szinusz- és a koszinuszfüggvény

A szinusz- és a koszinuszfüggvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Most összefoglaljuk azokat az állításokat, amelyeket korábban már megismertünk:

- **Paritás:** a sin függvény páratlan, és a cos függvény páros, azaz
$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
- **Addíciós képletek:** minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$
- Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$
- **Négyzetes összefüggés:**
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
- **Folytonosság:** A sin és a cos függvény folytonos $\mathbb{R}$-en.

Az addíciós képletekből nem nehéz igazolni azt a nagyon hasznos tényt, hogy **két szinusz, illetve koszinusz összege és különbsége szorzattá alakítható**. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \qquad \sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

Az igazolásukhoz legyen

$$\alpha := \frac{x+y}{2} \quad \text{és} \quad \beta := \frac{x-y}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \alpha+\beta \quad \text{és} \quad y = \alpha - \beta.$$

Az első azonosság esetében azt kapjuk, hogy

$$\sin x + \sin y = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

A többi három azonosság hasonlóan látható be.

**Megjegyzés.** Az addíciós képleteket két szám különbségére is felírhatjuk:

$$\sin(x-y) = \sin\big(x+(-y)\big) = \sin x\cos(-y) + \cos x\sin(-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$$

$$\cos(x-y) = \cos\big(x+(-y)\big) = \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y. \blacksquare$$

Most a sin és a cos függvények hatványsoros definícióiból kiindulva, bevezetjük az egész matematika egyik fontos állandóját, a $\boldsymbol{\pi}$ **számot**.

**2. tétel (A $\boldsymbol{\pi}$ szám értelmezése).** *A* cos *függvénynek a* $[0,2]$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz* $[0,2]$*-nek pontosan egy* $\xi$ *pontjában áll fenn a* $\cos\xi = 0$ *egyenlőség. Ennek a* $\xi$ *számnak a kétszereseként* ***értelmezzük a*** $\boldsymbol{\pi}$ ***számot****:*

$$\pi := 2\xi.$$

**Bizonyítás.** A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos \in C[0,2]$ és $\cos 0 = 1$. Másrészt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \cdots =$$

$$= \underbrace{1 - 2 + \frac{2}{3}}_{=-1/3} - \frac{2^6}{6!}\cdot\underbrace{\left(1 - \frac{2^2}{7\cdot 8}\right)}_{>0} - \frac{2^{10}}{10!}\cdot\underbrace{\left(1 - \frac{2^2}{11\cdot 12}\right)}_{>0} - \cdots < -\frac{1}{3} < 0.$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists \xi \in (0,2)\colon \cos\xi = 0$.

A $\xi$ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos\downarrow$ a $[0,2]$ intervallumban, azaz

$$(*) \qquad \text{ha} \quad 0 \le x < y \le 2, \quad \text{akkor} \quad \cos x > \cos y.$$

Ezt fogjuk most igazolni. Az eddigiekből következik, hogy

$$\cos x > \cos y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos x - \cos y = -2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} =$$

$$= 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2} > 0.$$

Mivel

$$0 \le x < y \le 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \frac{x+y}{2} < 2 \quad \text{és} \quad 0 < \frac{y-x}{2} < 2,$$

ezért a $(*)$ állítás a

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = z \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{2\cdot 3}\right)}_{>0} + \frac{z^5}{5!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{6\cdot 7}\right)}_{>0} + \cdots > 0 \quad \big(z \in (0,2)\big)$$

egyenlőtlenség következménye.

**Megjegyzések.**

**1°** A *Bolzano-féle felezési eljárással* $\pi$ közelítő értéke meghatározható. $\pi$ értelmezéséből következik, hogy $0 < \pi < 4$. Az is megmutatható, hogy $3,141 < \pi < 3,142$, ezért gyakran használhatjuk a

$$\boxed{\pi \approx 3,14}$$

közelítést.

**2°** Igazolható, hogy $\pi$ *irracionális* és *transzcendens* szám.

**3°** Az integrálszámítás alkalmazásainál értelmezni fogjuk a körív hosszát, és megmutatjuk, hogy az egységsugarú kör kerülete $2\pi$. Ez azt jelenti, hogy az előző tételben definiált $\pi$ szám valóban megegyezik a korábbi tanulmányainkban megismert $\pi$ számmal. ■

Az addíciós képletek, valamint a négyzetes összefüggés felhasználásával a sin és a cos függvény értékét számos nevezetes helyen pontosan ki tudjuk számolni. Például:

- $\underline{\sin(\pi/2) = 1}$, mert a négyzetes összefüggés miatt:

  $$\sin^2\frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{vagy} \quad \sin\frac{\pi}{2} = -1$$

  de $\pi/2 \in (0,2) \implies \sin(\pi/2) > 0$, azaz $\sin(\pi/2) = 1$.

- $\underline{\sin(\pi/6) = 1/2}$. Az addíciós képletek miatt

  $$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x = \\ &= (1 - \sin^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = (1 - 4\sin^2 x)\cos x.\end{aligned}$$

  Legyen $x = \pi/6$. Ekkor

  $$\cos 3x = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{és} \qquad \cos x = \cos\frac{\pi}{6} \neq 0,$$

  mert a cos függvénynek nincs $\pi/2$-től különböző zérushelye $(0,2)$-n. Ezért a fenti egyenlőségből következik, hogy

  $$1 - 4\sin^2\frac{\pi}{6} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\frac{\pi}{6} = 1/2,$$

  mert $\pi/6 \in (0,2)$, és így $\sin(\pi/6) > 0$.

**Megjegyzés.** A fentihez hasonló számításokkal igazolni tudjuk, hogy a sin és a cos függvény a nevezetes helyeken vett értékei megegyeznek a középiskolai és más korábbi tanulmányokban már megismert értékekkel. Sőt, ilyen technikákkal pontosan meg tudjuk határozni a függvényértéket két, már kiszámolt hely számtani közepén lévő pontnál. Így a folytonosság figyelembevételével mondhatjuk, hogy ha a most értelmezett $\pi$ szám megegyezik a korábbi tanulmányainkban megismert $\pi$ számmal, akkor a sin és a cos függvény hatványsoros, és a korábban megismert geometriai eredetű értelmezése megegyezik. ■

A trigonometrikus függvényekkel kapcsolatos alapvető fogalom a következő: az $f$ valós-valós függvény **periodikus**, ha van olyan $p > 0$ valós szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre $x \pm p \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x+p) = f(x).$$

A $p$ számot $f$ **periódusának**, az $f$ függvényt pedig $p$ **szerint periodikus** függvénynek nevezzük.

Ha az $f$ függvény $p$ szerint periodikus, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén $x \pm kp \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x+kp) = f(x).$$

Vagyis, ha $p$ az $f$ függvénynek periódusa, akkor minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén $kp$ is periódusa $f$-nek. Egy függvény periódusának megadásán általában a legkisebb pozitív periódus megadását értjük, amennyiben ilyen létezik.

Érdekes, hogy nem minden periodikus függvénynek van legkisebb pozitív periódusa. Az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Dirichlet-függvénynek minden *racionális* szám periódusa, és ezek között nyilván nincs legkisebb pozitív szám.

**3. tétel.** *A* sin *és a* cos *függvény* $2\pi$ *szerint periodikus, azaz*

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

**Bizonyítás.** Világos, hogy

$$\cos\pi = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = 0^2 - 1^2 = -1,$$

$$\sin\pi = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 2\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

Ebből

$$\cos 2\pi = \cos^2\pi - \sin^2\pi = 1^2 - 0^2 = 1,$$
$$\sin 2\pi = 2\sin\pi\cos\pi = 2\cdot 0\cdot(-1) = 0.$$

Ekkor az addíciós képletekből

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\cos 2\pi - \sin x\sin 2\pi = \cos x\cdot 1 - \sin x\cdot 0 = \cos x,$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x\cos 2\pi + \cos x\sin 2\pi = \sin x\cdot 1 + \cos x\cdot 0 = \sin x.$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Az addíciós képletekből könnyen igazolhatók az alábbi azonosságok:

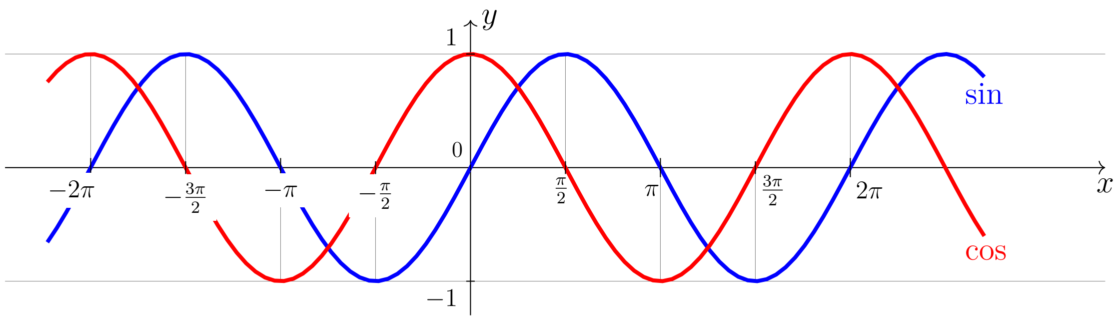
$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x, & \sin(\pi + x) &= -\sin x, \\ \cos(2\pi - x) &= \cos x, & \sin(2\pi - x) &= -\sin x. \end{aligned}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Tudjuk, hogy $\cos \downarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-n. Ebből a fenti azonosságokkal nem nehéz igazolni, hogy $\cos \downarrow [0, \pi]$-n és $\cos \uparrow [\pi, 2\pi]$-n. Ezért $2\pi$ a cos függvény legkisebb periódusa. Másrészt az addíciós képletekből szintén igazolható, hogy

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \text{illetve a} \qquad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez azt jelenti, hogy a sin és a cos függvények grafikonjai egymásból eltolással származtathatók, és így $2\pi$ szintén a sin függvény legkisebb periódusa.

A sin és a cos függvények konvexitási tulajdonságainak a vizsgálatához a differenciálszámítás eszköztárára lesz szükségünk. Ezeket az ismereteket megelőlegezve most az alábbi ábrán szemléltetjük a sin és a cos függvények „jól ismert” grafikonjait:




**Megjegyzés.** Emlékeztetünk arra, hogy ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és

$$f(x) := g(x + a) \qquad (x \in \mathcal{D}_g),$$

akkor az $f$ függvény grafikonját $g$ grafikonjának $x$ tengely irányú eltolásával kapjuk meg:

- $a > 0$ esetén az eltolást $a$ egységgel „balra” kell elvégezni,
- $a < 0$ esetén pedig $a$ egységgel „jobbra” kell elvégezni. ■

**Érdekesség.** A hatványsorok alkalmazásának egyik lényeges tulajdonsága, hogy az összegük képzésében csak az alapműveletek és a határátmenet szerepelnek. Ezért a hatványsorok összegfüggvényeit komplex számokra is értelmezhetjük. Például, számoljuk ki az $e^{\pi\imath}$ értékét, ahol $\imath^2 = -1$ a képzetes egység.

$$
\begin{aligned}
e^{\imath\pi} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\imath\pi)^k}{k!} = 1 + \imath\pi + \frac{(\imath\pi)^2}{2!} + \frac{(\imath\pi)^3}{3!} + \frac{(\imath\pi)^4}{4!} + \frac{(\imath\pi)^5}{5!} + \frac{(\imath\pi)^6}{6!} + \frac{(\imath\pi)^7}{7!} + \cdots = \\
&= (\ \imath^2 = -1,\ \imath^3 = -\imath,\ \imath^4 = 1,\ \imath^5 = \imath,\ \imath^6 = -1,\ \imath^7 = -\imath,\ \imath^8 = 1,\ \ldots\ ) = \\
&= 1 + \pi\imath - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3}{3!}\imath + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^5}{5!}\imath - \frac{\pi^6}{6!} - \frac{\pi^7}{7!}\imath + \frac{\pi^8}{8!} + \frac{\pi^9}{9!}\imath + \cdots = \\
&= \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} + \cdots\right) + \left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^9}{9!} + \cdots\right)\imath = \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\pi^{2k} + \imath \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k+1} = \cos\pi + \imath\sin\pi = -1 + \imath\cdot 0 = -1.
\end{aligned}
$$

Ezzel igazoltuk a híres

$$\boxed{e^{\imath\pi} + 1 = 0}$$

ún. **Euler-féle összefüggést**, ami azért is érdekes, mert összekapcsolja a legfontosabb matematikai állandókat: a nulla, az 1, az $e$, a $\pi$ és az $\imath$ számokat.

Vegyük még észre, hogy hasonló számításokkal az

$$e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ún. **Euler-féle formulát** kapjuk meg, ami fontos szerepet játszik a komplex számoknál, hiszen vele egy komplex szám trigonometrikus alakját $z = re^{\imath\varphi}$ módon írhatjuk fel. Ebből például könnyen igazolható a

$$z^n = r^n(e^{\imath\varphi})^n = r^n e^{\imath n\varphi} = r^n(\cos n\varphi + \imath \sin n\varphi)$$

ún. **De Moivre azonosság.**