

## 7. gyakorlat

### VÉGTELEN SOROK 1.

**Emlékeztető.** Egy sort egy olyan sorozatból képzünk, amelynek tagjait szeretnénk „összeadni”.

1. Az  $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sorozatból képzett

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot az  $(a_n)$  által generált **végteles sornak** (röviden **sornak**) nevezzük, és így jelöljük:

$$\sum a_n, \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=0} a_n, \quad \text{vagy} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

$s_n$  a  $\sum a_n$  sor  **$n$ -edik részletösszege**, illetve  $a_n$  a  $\sum a_n$  sor  **$n$ -edik tagja**.

2. A  $\sum a_n$  **sor divergens**, ha a részletösszegekből képzett  $(s_n)$  sorozat divergens. Ebben az esetben az  $(s_n)$  sorozatnak vagy nincs határértéke, vagy

- $\lim(s_n) = +\infty$ , és ekkor azt mondjuk, hogy a  $\sum a_n$  **végteles sor összege**  $+\infty$ ,

vagy

- $\lim(s_n) = -\infty$ , és ekkor azt mondjuk, hogy a  $\sum a_n$  **végteles sor összege**  $-\infty$ .

Ezeket úgy jelöljük, hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := +\infty, \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := -\infty.$$

**Figyeljük meg a bevezetett jelölések közötti különbséget!**

- A  $\sum_{n=0} a_n$  szimbólum jelöli a *végteles sort*, ami egy *sorozat*, mégpedig az  $(a_n)$  részletösszegeinek sorozata. Ha a  $\sum_{n=0} a_n$  szimbólumra tekintünk, akkor arra gondolunk, hogy össze akarjuk adni az  $(a_n)$  sorozat tagjait. A sor konvergenciája azt jelenti, hogy ez a végteles sok szám „összeadható” és eredménye egy valós szám.
- A  $\sum_{n=0}^{+\infty}$  szimbólum pedig az  $s_n$  részletösszeg-sorozat *határértékét*, azaz a *végteles sor összegét*, vagyis egy  $\mathbb{R}$ -beli elemet jelöl abban az esetben, ha a szóban forgó határérték létezik. Ha ez a határérték nem létezik, akkor a sor összegét nem értelmezzük. A sor összege különböző alakban írható fel:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \right).$$

Sőt, ezt időnként az  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$  alakban is írjuk.

Az  $(a_n) : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq M\} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények is sorozatok minden  $M \in \mathbb{Z}$  esetén. Az ilyenekből képzett

$$s_n := a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_n \quad (M \leq n \in \mathbb{N})$$

sorozatot is **végteles sornak tekintjük**, és jelölésükre a

$$\sum_{n=M} a_n$$

szimbólumot fogjuk használni. A **sor összege** ugyanúgy legyen a  $\lim(s_n)$  határérték. A további definíciók és tételek (az értelemszerű módosításokkal) ezekre a sorokra is érvényesek lesznek, de ezt nem fogjuk külön hangsúlyozni. Ennek alapvető oka, hogy az

$$(a_n) \quad (n = M, M+1, M+2, \dots) \quad \text{és az} \quad (a_{n+M}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

sorozatok megegyeznek, ezért ugyanazt a sort generálják megegyező

$$\sum_{n=M}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+M}$$

sorösszegekkel. Az előző átalakítást **átindexelésnek** hívjuk.

### Nevezetes sorok

1. **A geometriai/mértani sor.** Legyen  $q \in \mathbb{R}$ . A  $(q^n)$  sorozatból képzett  $\sum_{n=0} q^n$  **geometriai vagy mértani sor** akkor és csak akkor konvergens, ha  $|q| < 1$ , és ekkor az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Ha  $q \geq 1$ , akkor a  $\sum_{n=0} q^n$  sornak van összege, és  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$ .

2. **A teleszkopikus sor.** A  $\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$  ún. **teleszkopikus sor** konvergens, és összege 1, azaz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1.$$

3. **A hiperharmonikus sor.** Legyen  $\alpha$  rögzített valós szám. Ekkor a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots$$

ún. **hiperharmonikus sor**

- divergens, ha  $\alpha \leq 1$ , de ekkor van összege:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ .
- konvergens, ha  $\alpha > 1$ .

Két speciális eset:

- $\alpha = 1$  esetén **harmonikus sorról** beszélünk:  $\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ , ami divergens,
- $\alpha = 2$  esetén **szuperharmonikus sorról** beszélünk:  $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ , ami konvergens.

4. **Az  $e$  szám sorösszeg előállítása.** A  $\sum_{n=0} \frac{1}{n!}$  végtelen sor konvergens, és az összege az  $e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  számmal egyenlő:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e.$$

5. **A Leibniz-sor.** A

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

**Leibniz-sor konvergens.**

### Felhasználható eredmények

1. **Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra.** A  $\sum a_n$  sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n > n_0: |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon.$$

2. **Sorok ekvikonvergenciája.** Ha két sor legfeljebb véges sok tagban különbözik egymástól, akkor a két sor egyszerre konvergens vagy divergens.

**3. Sorok konvergenciájának szükséges feltétele.** Ha a  $\sum a_n$  végtelen sor konvergens, akkor az  $(a_n)$  generáló sorozat nullsorozat, azaz  $\lim(a_n) = 0$ .

Ebből az állításból rögtön kapunk egyszerű elégséges feltételeket sorok divergenciájára: „Ha az  $(a_n)$  sorozat nem nullsorozat, vagy divergens, akkor a  $\sum a_n$  végtelen sor divergens.”

**4. Sorok lineáris kombinációi.** Tegyük fel, hogy a  $\sum a_n$  és a  $\sum b_n$  sorok összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n =: A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ha a  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  olyan számok, amelyekre  $\lambda \cdot A + \mu \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$  értelmezve van, akkor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B.$$

**5. Nemnegatív tagú sorok.** Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeiből álló sorozat korlátos.

**6. Összehasonlító kritériumok.** Legyenek  $\sum a_n$  és  $\sum b_n$  nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

(a) **Majoráns kritérium:** ha a  $\sum b_n$  sor konvergens, akkor  $\sum a_n$  sor is konvergens.

(b) **Minoráns kritérium:** ha a  $\sum a_n$  sor divergens, akkor a  $\sum b_n$  sor is divergens.

**7. Abszolút és feltételesen konvergens sorok.** Azt mondjuk, hogy a  $\sum a_n$  sor

- **abszolút konvergens**, ha a  $\sum |a_n|$  abszolút sora konvergens,
- **feltételesen konvergens**, ha a  $\sum a_n$  sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

Ha a  $\sum a_n$  sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

**1. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és számítsuk ki az összegüket!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sum_{n=2} \frac{(-5)^n}{3^{2n}}, & \text{b)} \quad \sum_{n=0} \frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}}, \\ \text{c)} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{4n^2 - 1}, & \text{d)} \quad \sum_{n=0} \frac{n^2 + 3n}{(n+2)!}. \end{array}$$

**Megoldás.**

a) Alakítsuk át a sort:

$$\sum_{n=2} \frac{(-5)^n}{3^{2n}} = \sum_{n=2} \frac{(-5)^n}{9^n} = \sum_{n=2} \left(-\frac{5}{9}\right)^n.$$

Ez ekvikonvergens a  $\sum_{n=0} \left(-\frac{5}{9}\right)^n$  mértani sorral, mert csak az első két tagban különböznek egymástól.  $q = -\frac{5}{9}$  hányadosú mértani sorról van szó, ami konvergens, mert  $|q| = \frac{5}{9} < 1$ . Ezért a megadott sor konvergens. A sor összege:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{3^{2n}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(-\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^n\right) = \\ &= \left(-\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n = \frac{25}{81} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{5}{9}\right)} = \frac{25}{81} \cdot \frac{9}{14} = \underline{\underline{\frac{25}{126}}}. \end{aligned}$$

**Megjegyzés.** A  $\sum_{n=r} aq^n$  alakú sorokat is mértani sornak szokás nevezni, ahol  $a \in \mathbb{R}$  és  $r \in \mathbb{Z}$ . Könnyű meggondolni, hogy ez ekvikonvergens a  $\sum_{n=0} q^n$  sorral. Ezért, ha  $|q| < 1$ , akkor a  $\sum_{n=r} aq^n$  sor konvergens, és

$$\sum_{n=r}^{+\infty} aq^n = \sum_{n=0}^{+\infty} aq^{n+r} = \sum_{n=0}^{+\infty} aq^r q^n = aq^r \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{aq^r}{1-q}.$$

Vegyük észre, hogy  $aq^r$  a  $\sum_{n=r} aq^n$  sor kezdőtagja.

b) Először átalakítjuk a sor tagjait megadó képletet:

$$\frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}} = \frac{1 + 2 \cdot (-2)^n + 4^n}{5^2 \cdot 5^n} = \frac{1}{5^2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{2}{5^2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{5^2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

A  $q = \frac{1}{5}$ ,  $q = -\frac{2}{5}$  és  $q = \frac{4}{5}$  hányadosú geometriai sorok lineáris kombinációjáról van szó. Mindegyik esetben  $|q| < 1$ , ezért a szóban forgó sorok, következésképpen a lineáris kombinációjuk is konvergens. A megadott sor tehát valóban konvergens. A sor összege:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}} &= \frac{1}{5^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{2}{5^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{5^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \\ &= \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{2}{5^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)} + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{20} + \frac{2}{35} + \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{43}{140}}}. \end{aligned}$$

c) A  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  teleszkopikus sornál bemutatott ötletet alkalmazzuk, ti. a sor  $n$ -edik tagját két egyszerűbb alakú tört összegére bontjuk. Olyan  $A, B \in \mathbb{R}$  keresünk, amelyekre

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

$A$  és  $B$  meghatározása: Közös nevezőre hozás után

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{A \cdot (2n+1) + B \cdot (2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2(A+B) \cdot n + (A-B)}{(2n-1)(2n+1)} \implies \\ \implies 2(A+B) &= 0 \text{ és } A-B = 1 \implies A = \frac{1}{2} \text{ és } B = -\frac{1}{2}, \text{ azaz} \\ \frac{1}{4n^2 - 1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

(Ezt az eljárást a **parciális törtekre bontás** módszerének nevezzük.)

A  $\sum \frac{1}{4n^2-1}$  sor  $n$ -edik részletösszege tehát

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

d) A sor  $n$ -edik tagját az

$$n^2 + 3n = (n+1)(n+2) - 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

azonosság alapján átalakítjuk:

$$\frac{n^2 + 3n}{(n+2)!} = \frac{(n+1)(n+2) - 2}{(n+2)!} = \frac{1}{n!} - 2 \cdot \frac{1}{(n+2)!}.$$

Tudjuk, hogy a  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  végtelen sor konvergens, ezért a  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$  sor is konvergens. Mivel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} - 2 \cdot \frac{1}{(n+2)!} \right),$$

ezért a  $\sum \frac{n^2+3n}{(n+2)!}$  sor két konvergens sor lineáris kombinációja, tehát valóban konvergens.

Az összeg kiszámításához alkalmazzuk a  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$  nevezetes sor összegét:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{(n+2)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 - \frac{1}{1!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 \right) = e - 2(e - 2) = \underline{\underline{4 - e}}. \end{aligned}$$

## 2. Feladat. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$$

sorösszeget, ha  $q \in (-1, 1)$ .

**Megoldás.** A  $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$  sor  $n$ -edik részletösszege:

$$s_n := q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Az  $(s_n)$  sorozat határértékét keressük. A mértani sornál alkalmazott ötlethez hasonlóan megpróbáljuk a fenti összeget „zárt” alakban felírni. Vegyük észre, hogy ha vesszük a

$$\begin{aligned} s_n &= q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n \\ q \cdot s_n &= q^2 + 2q^3 + \cdots + (n-1)q^n + nq^{n+1} \end{aligned}$$

összegek különbségét, akkor

$$s_n - q \cdot s_n = q + q^2 + \cdots + q^n - nq^{n+1} = (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) - nq^{n+1} - 1$$

A mértani sor bizonyításában igazoltuk, hogy ha  $q \neq 1$ , akkor

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

és így

$$(1-q)s_n = s_n - qs_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1} - 1.$$

Mivel  $|q| < 1$ , ezért a  $\lim(q^{n+1}) = 0$  és  $\lim(nq^{n+1}) = 0$  határértékek alapján

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-q} \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1} - 1 \right) = \frac{1}{1-q} \left( \frac{1-0}{1-q} - 0 - 1 \right) = \frac{q}{(1-q)^2},$$

azaz

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}}}$$

**3. Feladat.** Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorokat!

a)  $\sum_{n=1} \sqrt[n]{0,1},$

b)  $\sum_{n=1} \frac{n}{2n-1},$

c)  $\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}},$

d)  $\sum_{n=1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2}.$

**Megoldás.** Mindegyik feladat megoldásában a végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó *szükséges feltételt* alkalmazzuk. Ez azt állítja, hogy ha a sort generáló  $(a_n)$  sorozat divergens, vagy konvergens, de nem tart nullához, akkor a sor divergens.

a) A sor általános tagja nem tart nullához, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{0,1} = 1 \neq 0.$$

Ezért a sor divergens.

b) A sor általános tagja nem tart nullához, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ezért a sor divergens.

c) A sor általános tagja nem tart nullához, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0.$$

Ezért a sor divergens.

d) A sor általános tagja nem tart nullához, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \right] = e^{-1} \cdot (1-0)^2 = e^{-1} \neq 0.$$

Ezért a sor divergens.

**4. Feladat.** Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorokat!

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1},$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1},$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$

**Megoldás.** Az összehasonlító kritériumokat alkalmazzuk, azaz a megadott sorhoz keressünk egy konvergens majoráló vagy egy divergens minoráló sort. Akkor mondjuk, hogy  $\sum b_n$  a megadott  $\sum a_n$  sor

- **majoráló sora**, ha véges sok indextől eltekintve  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Ekkor, ha  $\sum b_n$  konvergens, akkor  $\sum a_n$  is konvergens (**majoráns kritérium**).
- **minoráló sora**, ha véges sok indextől eltekintve  $a_n \geq b_n \geq 0$ . Ekkor, ha  $\sum b_n$  divergens, akkor  $\sum a_n$  is divergens (**minoráns kritérium**).

Ahhoz, hogy eldöntsük melyik kritériumot alkalmazzunk, először meg kell sejttenünk, hogy a sor konvergens vagy divergens, hiszen ettől függően felülről vagy alulról kell becsülni az  $a_n$  tagokat. Ehhez figyelembe kell venni az  $a_n$  képletében szereplő kifejezések nagyságrendjét.

a) Sejtés: a sor divergens, mert

$$\frac{1}{2n+1} \approx \frac{1}{2n}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, és a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ sor divergens.}$$

A sejtés igazolása:

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n} =: b_n \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \text{ divergens,}$$

hiszen a harmonikus sor divergenciája szerint

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Ezért a minoráns kritérium szerint a megadott sor divergens.

b) Sejtés: a sor konvergens, mert

$$\frac{1}{n^2 - n + 1} \approx \frac{1}{n^2}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, és a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sor konvergens.}$$

A sejtés igazolása: mivel  $n \geq 1$ , így

$$a_n = \frac{1}{n^2 - n + 1} \leq \frac{1}{n^2 - n} = \frac{2}{2n^2 - 2n} = \frac{2}{n^2 + n(n-2)} \leq \left( \text{ha } n \geq 2 \right) \leq \frac{2}{n^2} =: b_n,$$

és  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  konvergens, mert a szuperharmonikus sor konvergenciája szerint

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}.$$

Ezért a majoráns kritérium szerint a megadott sor konvergens.

c) Sejtés: a sor divergens, mert

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, és a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ sor divergens.}$$

A sejtés igazolása:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}n} =: b_n \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n} \text{ div.},$$

hiszen a harmonikus sor divergenciája szerint

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Ezért a minoráns kritérium szerint a megadott sor divergens.

d) Sejtés: a sor konvergens, mert

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, és a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ sor konvergens.}$$

A sejtés igazolása:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} =: b_n \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ konv.},$$

hiszen a hiperharmonikus sor  $\frac{3}{2} =: \alpha > 1$ -re konvergens.

Ezért a minoráns kritérium szerint a megadott sor konvergens.