Diszkrét matematika 1.

Relációk

Juhász Zsófia
jzsofia@inf.elte.hu
jzsofi@gmail.com
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2020 tavasz

Relációk

A relációk

- a függvényfogalom általánosításai;
- „hagyományos" függvények pontos definiálása;
- „többértékű függvények"
- kapcsolatot ír le
- $=, <, \leq$, oszthatóság, ...

Rendezett pár

Adott $x \neq y$ és (x, y) rendezett pár esetén számít a sorrend:

- $\{x, y\} = \{y, x\}$
- $(x, y) \neq (y, x)$.

Definíció (rendezett pár)

Az (x, y) rendezett párt a $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ halmazzal definiáljuk.
Az (x, y) rendezett pár esetén x az első, y a második koordináta.

Definíció (halmazok Descartes-szorzata)

Az X, Y halmazok Descartes-szorzatán (direkt szorzatán) az

$$X \times Y = \{(x, y) \ : \ x \in X, y \in Y\}$$

rendezett párokból álló halmazt értjük.

Binér relációk

Definíció (binér reláció)

Ha valamely X, Y halmazokra $R \subseteq X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R reláció X és Y között. Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy R X-beli reláció (homogén binér reláció).

Ha R binér reláció, akkor gyakran $(x, y) \in R$ helyett $x\ R\ y$-t írunk.

Példa

1. $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X \ : \ x \in X\}$ az egyenlőség reláció az X halmazon.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x|y\}$ az osztója reláció.
3. $\mathscr{F}$ halmazrendszer esetén az $\{(X, Y) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F} \ : \ X \subseteq Y\}$ a részhalmazként tartalmazás reláció.
4. Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén a függvény grafikonja $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

Relációk értelmezési tartománya, értékkészlete

Ha R reláció X és Y között ($R \subseteq X \times Y$) és $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, akkor R reláció X' és Y' között is!

Definíció (értelmezési tartomány, értékkészlet)

Az $R \subseteq X \times Y$ reláció értelmezési tartománya:

$$dmn(R) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\},$$

értékkészlete:

$$rng(R) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R\}.$$

Példa

1. Ha $R = \{(x, 1/x^2) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$, akkor $dmn(R) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$, $rng(R) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$.
2. Ha $R = \{(1/x^2, x) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$, akkor $dmn(R) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$, $rng(R) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$.

Relációk kitejesztése, leszűkítése, inverze

Definíció (reláció kiterjesztése, leszűkítése)

Egy R binér relációt az S binér reláció kiterjesztésének, illetve S-et az R leszűkítésének (megszorításának) nevezzük, ha $S \subseteq R$. Ha A egy halmaz, akkor az R reláció A-ra való leszűkítése (az A-ra való megszorítása) az

$$R|_A = \{(x, y) \in R \ : \ x \in A\}.$$

Példa

Legyen $R = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(\sqrt{x}, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ x \in \mathbb{R}\}$. Ekkor R az S kiterjesztése, S az R leszűkítése, $S = R|_{\mathbb{R}_0^+}$ (ahol $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valós számok halmaza).

Definíció (reláció inverze)

Egy R binér reláció inverze az $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ reláció.

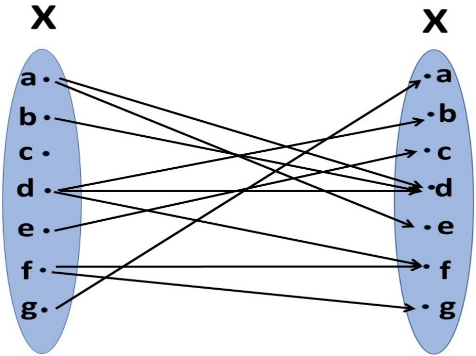
Példa

$R^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Példa

Legyen R az ábrán szemléltetett reláció az $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ halmazon.

- $dmn(R) = \{a, b, d, e, f, g\}$.
- $rng(R) = \{a, b, c, d, e, f, g\} = X$.
- $R|_{\{a,b,c,d\}} = \{(a, d), (a, e), (b, d), (d, b), (d, d), (d, f)\}$.



Halmaz képe, inverz képe

Definíció (halmaz képe, inverz képe)

Legyen $R \subseteq X \times Y$ egy binér reláció, A egy halmaz. Az A halmaz (R szerinti) képe az

$$R(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : (x, y) \in R\}$$

halmaz. Adott B halmaz inverz képe, vagy ősképe a B halmaz R^{-1} szerinti képe, azaz $R^{-1}(B)$. (Ez nem más, mint:

$$R^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B : (x, y) \in R\})$$

Példa

Legyen $R = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

- $R(\{9\}) = \{-3, +3\}$ (vagy röviden $R(9) = \{-3, +3\}$),
- $S(9) = \{+3\}$.

Kompozíció

Definíció (relációk kompozíciója)

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y : (x, y) \in S, (y, z) \in R\}.$$

Kompozíció esetén a relációkat „jobbról-balra írjuk":

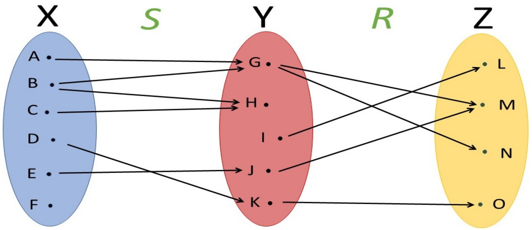
Példa

Legyen $R_{\sin} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sin x = y\}$,
$S_{\log} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \log x = y\}$.

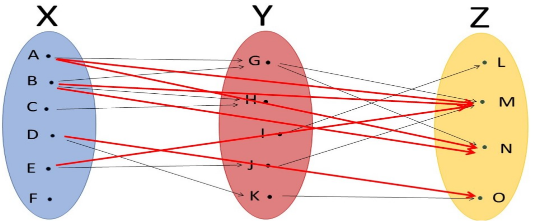
Ekkor
$R_{\sin} \circ S_{log} = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists y : \log x = y, \sin y = z\}$
$= \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sin \log x = z\}$.

Kompozíció

Példa: Legyen $S \subseteq X \times Y$, $R \subseteq Y \times Z$ két reláció. Tekintsük a $T = R \circ S$ kompozíciót:



$T\!=\!R \circ S$



Kompozíció

Állítás (Relációk kompozíciójának tulajdonságai)

Legyenek R, S, T *relációk. Ekkor*

1. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ *(a kompozíció asszociatív).*
2. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ *(kompozíció inverze).*

Bizonyítás.

1. $(x, w) \in R \circ (S \circ T) \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in S \circ T \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow \exists z\ \exists y : (x, y) \in T \wedge (y, z) \in S \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow \exists y\ \exists z : (x, y) \in T \wedge (y, z) \in S \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in T \wedge (y, w) \in R \circ S \Leftrightarrow (x, w) \in (R \circ S) \circ T$
2. $(z, x) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow (x, z) \in R \circ S \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R \Leftrightarrow \exists y : (y, x) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (z, x) \in S^{-1} \circ R^{-1}$

$\square$

Homogén binér relációk tulajdonságai

Példa

Relációk: $=$, $<$, $\leq$ (pl. $\mathbb{R}$-en), $\mid$ (pl. $\mathbb{Z}$-n), $\subseteq$, $T = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < 1\}$.

Definíció (homogén relációk tulajdonságai)

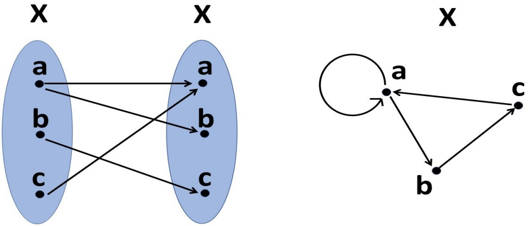
Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (x\ R\ y \wedge y\ R\ z) \Rightarrow x\ R\ z$; ($=$, $<$, $\leq$, $\mid$, $\subseteq$)
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$; ($=$, T)
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (x\ R\ y \wedge y\ R\ x) \Rightarrow x = y$; ($=$, $\leq$, $\subseteq$)
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : x\ R\ y \Rightarrow \neg y\ R\ x$; ($<$)
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : x\ R\ x$; ($=$, $\leq$, $\mid$, $\subseteq$, T)
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg x\ R\ x$; ($<$)
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, $x\ R\ y$ és $y\ R\ x$ közül pontosan egy teljesül; ($<$)
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x\ R\ y$ vagy $y\ R\ x$ (esetleg mindkettő) teljesül. ($\leq$)

Homogén relációk tulajdonságai: példa

A reflexív, trichotóm, dichotóm tulajdonságok nem csak a relációtól függnek, hanem az alaphalmaztól is:
Az $\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ mint $\mathbb{R}$-en értelmezett reláció reflexív, de mint $\mathbb{C}$-n értelmezett reláció nem reflexív.

Példa



tranzitív	×	szigorúan antiszimmetrikus	×	trichotóm	×
szimmetrikus	×	reflexív	×	dichotóm	×
antiszimmetrikus	✓	irreflexív	×		

Ekvivalenciarelációk, ekvivalenciaosztályok

Definíció (ekvivalenciareláció)

Legyen X egy halmaz, R reláció X-en. Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Példák

1. $=$ (pl. az $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ vagy a $\mathbb{C}$ halmazon);
2. $\sim$ a $\mathbb{Z}$-n, ahol $\forall x, y \in \mathbb{Z}$-re: $x \sim y$, ha $5|(x-y)$;
3. párhuzamosság egy sík egyeneseinek halmazán.

Definíció (ekvivalenciaosztály)

Legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén az

$$\tilde{x} = [x] = \{y \mid y \sim x\}$$

halmazt az x ekvivalenciaosztályának nevezzük.

Halmaz osztályozásai

Definíció (halmaz osztályozásai)

Egy (nemüres) X halmaz részhalmazainak egy $\mathscr{O}$ rendszerét az X osztályozásának nevezzük, ha

- $\mathscr{O}$ nemüres halmazokból áll,
- $\mathscr{O}$ páronként diszjunkt halmazrendszer és
- $\cup\mathscr{O} = X$.

Ekkor az $\mathscr{O}$ elemeit (melyek maguk is halmazok) az X osztályainak nevezzük.

Példák

1. $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ egy osztályozása: $\{\{a, c\}, \{b\}, \{e\}, \{d, f, g\}\}$
2. $\mathbb{R}$ egy osztályozása: $\{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$
3. $\mathbb{R}$ egy másik osztályozása: $\{\{a \in \mathbb{R} : |a| = r\} : r \in \mathbb{R}_0^+\}$

Ekvivalenciarelációk, osztályozások

Tétel (Ekvivalenciareláció által meghatározott osztályozás)

Egy nemüres X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok halmaza $\{[x] \mid x \in X\}$ az X egy osztályozása. Ezt az osztályozást $X/\sim$ -mal jelöljük.

Bizonyítás: csak a teljesség kedvéért; **nem kell tudni.**

Legyen $\sim$ egy X-beli ekvivalenciareláció. Azt kell megmutatni, hogy $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$ az X egy osztályozását adja.

- Mivel $\sim$ reflexív, így $x \in [x] \Rightarrow$
  - $\cup\{[x] : x \in X\} = X$ és
  - $[x] \neq \emptyset$
- Különböző ekvivalenciaosztályok páronként diszjunktak. Tfh. $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, legyen $z \in [x] \cap [y]$. Mivel $z \in [x]$, ezért $z \sim x$, ahonnan a szimmetria miatt $x \sim z$. Hasonlóan $z \in [y]$ miatt $z \sim y$. Ha $x_1 \in [x]$, akkor $x_1 \sim x$, így a tranzitivitás miatt $x_1 \sim x \wedge x \sim z \Rightarrow x_1 \sim z$, továbbá $x_1 \sim z \wedge z \sim y \Rightarrow x_1 \sim y \Rightarrow x_1 \in [y]$. Hasonlóan $y_1 \in [y]$-ról megmutatható, hogy $y_1 \in [x]$, így $[x] = [y]$.

$\square$

Ekvivalenciarelációk, osztályozások

Tétel (Osztályozás által meghatározott ekvivalenciareláció)

Tetszőleges X halmaz bármely $\mathscr{O}$ osztályozása esetén az alábbi R reláció ekvivalenciareláció X-en:

$$R = \{(x, y) : x \text{ és } y \text{ ugyanabban az } \mathscr{O}\text{-beli osztályban vannak}\},$$

és az R-hez tartozó ekvivalenciaosztályok halmaza $\mathscr{O}$.

Bizonyítás: csak a teljesség kedvéért; **nem kell tudni**.

R ekvivalenciareláció X-en:

- R reflexív: Minden $x \in X$ ugyanabban az $\mathscr{O}$-beli osztályban van mint saját maga, így $x\ R\ x$.
- R szimmetrikus: Ha $x\ R\ y$, akkor x és y ugyanabban az $\mathscr{O}$-beli osztályban vannak, így nyilván y és x is ugyanabban az osztályban vannak, tehát $y\ R\ x$.
- R tranzitív: Ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$ valamely $x, y, z \in X$-re, akkor x és y, illetve y és z azonos $\mathscr{O}$-beli osztályban vannak, így x és z is azonos $\mathscr{O}$-beli osztályban vannak, tehát $x\ R\ z$.

□

Ekvivalenciarelációk, osztályozások

Az ekvivalenciarelációk illetve osztályozások kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Példák

- $=$ reláció $\mathbb{R}$-en $\leftrightarrow$ $\{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$;
- Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$-re: $x \sim y$, ha $|x| = |y|$ $\leftrightarrow$ $\{\{x, -x\} : x \in \mathbb{R}\}$.
- A síkon két egyenes legyen $\sim$ szerint relációban, ha párhuzamosak. Ekkor az osztályok az irány fogalmát adják.
- A síkon két szakasz legyen $\sim$ szerint relációban, ha egybevágóak. Ekkor az osztályok a hossz fogalmát adják.

Részbenrendezés, rendezés

Definíció (részbenrendezés, rendezés)

- Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$, $\ldots$)
- Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
- Ha valemely $x, y \in X$-re $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$ teljesül, akkor x és y összehasonlítható. (Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
- Ha az X halmazon értelmezett részbenrendezés dichotóm (azaz, ha bármely két elem összehasonlítható), akkor rendezésnek nevezzük.

Példák

- a $\leq$ reláció rendezés $\mathbb{R}$-en ($\mathbb{Q}$-n, $\mathbb{Z}$-n, $\mathbb{N}$-en vagy pl. az $\{1, 2, \ldots, 6\}$ halmazon): $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ vagy $y \leq x$.
- A $\subseteq$ reláció részbenrendezés az $\{a, b, c\}$ hatványhalmazán, $X = \mathscr{P}(\{a, b, c\})$-n, de nem rendezés: $\{a\} \nsubseteq \{b, c\}$, $\{b, c\} \nsubseteq \{a\}$.
- $\mathbb{N}$-en az $|$ (osztója) reláció részbenrendezés, de nem rendezés: $4 \nmid 5$, $5 \nmid 4$.

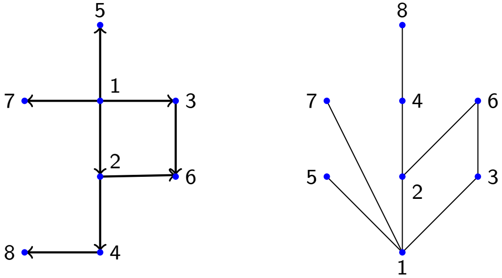
Részbenrendezések Hasse-diagramja

Definíció (közvetlenül megelőző elem)

Legyen $(X, \preceq)$ egy részbenrendezett halmaz. Ha valamely $x \neq y \in X$-re $x \preceq y$, de nem létezik olyan $z \in X$, amelyre $z \neq x$, $z \neq y$ és $x \preceq z \preceq y$, akkor azt mondjuk, hogy x közvetlenül megelőzi y-t.

Ha egy részbenrendezett halmaz elemeit pontokkal ábrázoljuk, és csak azon x, y párok esetén rajzolunk irányított élt, amelyre x közvetlenül megelőzi y-t, akkor a részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját kapjuk. Néha irányított élek helyett irányítatlan élt rajzolunk, és a kisebb elem kerül lejjebb.

Példa: Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:



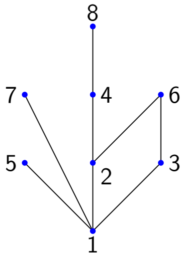
Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem

Definíció (Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem)

Az $(X, \preceq)$ részbenrendezett halmaz
legkisebb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ x \preceq y$;
legnagyobb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ y \preceq x$;
minimális eleme: olyan $x \in X : \neg\exists y \in X, x \neq y,\ y \preceq x$;
maximális eleme: olyan $x \in X : \neg\exists y \in X, x \neq y,\ x \preceq y$.

Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:

legkisebb elem: 1,
legnagyobb elem: nincs,
minimális elem: 1,
maximális elemek: 5, 6, 7, 8.



Szigorú részbenrendezés, szigorú rendezés

Definíció (szigorú részbenrendezés, szigorú rendezés)

Az X halmazon értelmezett tranzitív és irreflexív relációt szigorú részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $<$, $\prec$, $\ldots$)
Ha egy szigorú részbenrendezés trichotóm, akkor szigorú rendezésnek nevezzük.

Példák

- $\mathbb{R}$-en a $<$ reláció szigorú rendezés: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén pontosan egyik teljesül a következő három feltételből: $x = y$, $x < y$ és $y < x$.
- A $\subsetneq$ reláció szigorú részbenrendezés az $\{a, b, c\}$ hatványhalmazán, $X = \mathscr{P}(\{a, b, c\})$-n, de nem szigorú rendezés: $\{a\} = \{b, c\}$, $\{a\} \subsetneq \{b, c\}$ és $\{b, c\} \subsetneq \{a\}$ közül egyik sem teljesül.

Függvények

Definíció (függvény)

Egy $f \subseteq X \times Y$ relációt függvénynek (leképezésnek, transzformációnak, hozzárendelésnek, operátornak) nevezünk, ha

$$\forall x, y, y' : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'.$$

Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett ilyenkor az $f(x) = y$ (vagy $f : x \mapsto y$, $f_x = y$) jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Példák

- $f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ reláció függvény: $f(x) = x^2$.
- Az $f^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ inverz reláció nem függvény: $(4, 2), (4, -2) \in f^{-1}$.
- Legyen F_n a Fibonacci sorozat: $F_0 = 0, F_1 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ha $n \geq 2$: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ Ekkor az $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció függvény, n helyen az értéke $F(n) = F_n$.

Függvények

Definíció (az $X \to Y$ jelölés)

Az $f \subseteq X \times Y$ függvények halmazát $X \to Y$ jelöli, így használható az $f \in X \to Y$ jelölés. Ha $dmn(f) = X$, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk (ez a jelölés csak akkor használható, ha $dmn(f) = X$).

Megjegyzés: Ha $f : X \to Y$, akkor $dmn(f) = X$ és $rng(f) \subseteq Y$.

Példa

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de nem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$.

Függvények

Definíció (injektív, szürjektív és bijektív függvények)

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
- szürjektív, ha $rng(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

Megjegyzés: Egy f függvény pontosan akkor injektív, ha az f^{-1} reláció függvény.

Példák

- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$ függvény nem injektív, és nem szürjektív: $f(-1) = f(1)$, $rng(f) = \mathbb{R}_0^+$.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f : x \mapsto x^2$ függvény nem injektív, de szürjektív.
- Az $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f : x \mapsto x^2$ függvény injektív és szürjektív, tehát bijektív.

Megjegyzés: Az, hogy egy $f : X \to Y$ függvény szürjektív-e, függ Y -tól. Ha $Y \subsetneq Y'$, akkor $rng(f) \subseteq Y \subsetneq Y'$, így az $f : X \to Y'$ függvény biztosan nem szürjektív.

Függvények

Definíció (permutáció)

Egy $f : X \to X$ bijektív függvényt permutációnak nevezünk.

Példa

- Ha $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor az $X \to X$ permutációk száma $n!$: az $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy ismétlés nélküli permutációja.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ a valós számok egy permutációja.
- Az $f(x) = x^2$ függvény nem permutációja $\mathbb{R}$-nek: nem injektív és nem is szürjektív.

Függvények kompozíciója

Emlékeztető

Relációk kompozíciója: $R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}$.

Függvény: Az f reláció függvény, ha $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Tétel (Függvények kompozíciójának tulajdonságai)

1. *Ha f és g függvény, akkor $g \circ f$ is függvény.*
2. *Ha f és g függvény, akkor $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*
3. *Ha f és g injektív, akkor $g \circ f$ is injektív.*
4. *Ha $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ szürjektívek, akkor $g \circ f : X \to Z$ is szürjektív.*

Bizonyítás.

1. Legyen $(x, z) \in g \circ f$ és $(x, z') \in g \circ f$. Ekkor $\exists y : (x, y) \in f, (y, z) \in g$ és $\exists y' : (x, y') \in f, (y', z') \in g$. Mivel f függvény, $y = y'$, mivel g függvény, $z = z'$.

Függvények kompozíciója

Bizonyítás.

2. Legyen $(g \circ f)(x) = z$. Ekkor létezik $y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$. Mivel f és g függvények, ezért $f(x) = y$ és $g(y) = z$, így $g(f(x)) = y$.
3. Legyen $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, vagyis $g(f(x)) = g(f(x'))$. Mivel g injektív, ezért $f(x) = f(x')$. Mivel f injektív, ezért $x = x'$.
4. HF.

□

Műveletek

Definíció (unér és binér műveletek)

Egy X halmazon értelmezett binér (kétváltozós) művelet egy $*: X \times X \to X$ függvény. Gyakran $*(x, y)$ helyett $x * y$-t írunk.
Egy X halmazon értelmezett unér (egyváltozós) művelet egy $*: X \to X$ függvény.

Példák

- $\mathbb{R}$ halmazon az $+$, $\cdot$ binér, $z \mapsto -z$ (ellentett) unér művelet.
- $\mathbb{R}$ halmazon az $\div$ (osztás) nem művelet, mert $dmn(\div) \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon az $\div$ binér, az $x \mapsto \frac{1}{x}$ (reciprok) unér művelet.

Műveletek

Egy véges halmazon bármely binér művelet megadható a műveleti táblájával.

$\wedge$	I	H
I	I	H
H	H	H

$\vee$	I	H
I	I	I
H	I	H

XOR	I	H
I	H	I
H	I	H

	$\neg$
I	H
H	I

Definíció (műveletek függvényekkel)

Legyen X tetszőleges halmaz, Y halmaz a $*$ binér művelettel, $f, g : X \to Y$ függvények. Ekkor

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \quad (\forall x \in X)$$

Példa

A $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre:

$$(\sin + \cos)(x) = \sin x + \cos x \quad (\forall x \in X)$$

Műveleti tulajdonságok

Definíció (asszociatív és kommutatív műveletek)

A $*: X \times X \to X$ művelet

- asszociatív, ha $\forall a, b, c \in X : (a * b) * c = a * (b * c)$;
- kommutatív, ha $\forall a, b \in X : a * b = b * a$.

Példák

- $\mathbb{R}$-en az $+$ ill. a $\cdot$ műveletek asszociatívak, kommutatívak.
- A függvények halmazán a kompozíció művelete asszociatív: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmazán a kompozíció művelete nem kommutatív: $f(x) = x + 1, g(x) = x^2$: $(f \circ g)(x) = x^2 + 1 \neq (x + 1)^2 = (g \circ f)(x)$.
- Az osztás nem asszociatív $\mathbb{R}^*$-on: $(a \div b) \div c = \frac{a}{bc} \neq \frac{ac}{b} = a \div (b \div c)$

Művelettartó leképezések

Definíció (művelettartó leképezések)

Legyen X halmaz a $*$ binér művelettel, Y a $\diamond$ binér művelettel. Az $f : X \to Y$ függvény művelettartó, ha $\forall x_1, x_2 \in X$ esetén

$$f(x_1 * x_2) = f(x_1) \diamond f(x_2).$$

Példák

- Legyen $X = \mathbb{R}$ az $+$ művelettel, $Y = \mathbb{R}^+$ a $\cdot$ művelettel.
  Ekkor $a \in \mathbb{R}^+$ esetén az $x \mapsto a^x$ művelettartó:

  $$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

- Legyen $X = Y = \mathbb{R}$ az $+$ művelettel.
  Ekkor a $x \mapsto -x$ művelettartó:

  $$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : -(x_1 + x_2) = (-x_1) + (-x_2)$$