

## ANALYSE NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE BELLMAN

### ASSOCIÉE À DES PROBLÈMES DE CONTRÔLE DE DIFFUSION STOCHASTIQUE

*Jean-Pierre QUADRAT*

Résumé : Nous étudions la résolution numérique des problèmes de contrôle optimal de diffusion stochastique arrêtée ou réfléchie.

Pour cela, nous effectuons l'analyse numérique de l'équation de Bellman correspondante, essentiellement par des méthodes d'éléments finis.

Nous obtenons des majorations d'erreur et la convergence des problèmes discrétisés. Nous donnons l'interprétation probabiliste des problèmes discrets obtenus.

Ce chapitre est inclus dans le Rapport Laboria n° 140, Octobre 1975. Depuis ce travail, des estimations  $L_\infty$  ont été obtenues par Cortey-Dumont sur ce problème (elles sont surtout utiles pour les I.Q.V.) ; d'autres algorithmes ont été étudiés dans Lions-Mercier. Cette dernière étude confirme, nous semble-t-il le choix de l'algorithme utilisé ici. (cf. [23], [24]).

## INTRODUCTION

Considérons les deux exemples de contrôle stochastique suivants :

### - Contrôle d'une diffusion arrêtée

Etant donnée une diffusion stochastique

$$dx_t = b(x_t, u_t)dt + \sigma(x_t)dw_t$$

où  $u_t$  est le contrôle et  $w_t$  un brownien.

$x_t$  est la variable d'état.

et un critère :

$$J(u) = E \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(x_t, u_t) dt + e^{-\lambda \tau} g(x_\tau)$$

où  $\tau$  désigne le temps de sortie d'un ouvert  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ .

On se propose de résoudre le problème  $\min_u J(u)$

$u_t$  étant un processus adapté à  $F_t$ ,  $F_t$  étant la famille de tribus sur laquelle est défini le brownien.

Soit alors l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\lambda V + \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma \sigma^* D^2 V] + \min_u \{ b(x, u) \cdot DV + f(x, u) \} = 0 \\ V|_{\Gamma} = g \end{array} \right.$$

Suivant FLEMING [8], RISHEL [17], supposons que  $V$  soit  $C^2$ .

En appliquant la formule d'Ito à  $e^{-\lambda t} V(x)$  avec  $\hat{u}(x) \in \arg\max_u DV.b + f$  on obtient :

$$E \{ e^{-\lambda \tau} V(x_\tau) \} - V(x) = E \int_0^\tau e^{-\lambda t} (-\lambda V + \frac{1}{2} \text{tr}[D^2 V \sigma \sigma^*] + DV.b) dt$$

$V$  étant solution de (o) on a alors :

$$V(x) = E \int_0^{\tau} e^{-\lambda t} f(x_t, u_t) + e^{-\lambda \tau} g(x_\tau)$$

Si l'on suppose que le système est gouverné par un autre contrôle que  $u^*$

(o)  $\Rightarrow$

$$V(x) \leq E \int_0^{\tau} e^{-\lambda t} f(x_t, u_t) + e^{-\lambda \tau} g(x_\tau)$$

et donc, résout le problème de contrôle stochastique.

Un lemme de RISHEL [17] amélioré par BENOUSSAN-LIONS [4] montre que l'hypothèse de régularité (très restrictive en pratique)  $V \in C^2$  peut être remplacée par :

$$V \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$$

$$-\lambda V + \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\sigma \sigma^* D^2 V] \in L^2(\Omega)$$

On voit donc que le problème de contrôle stochastique revient à résoudre (o).

- Contrôle d'une diffusion réfléchie

Etant donné un ouvert  $\Omega$  convexe de frontière  $\Gamma$  BENOUSSAN-LIONS [4] montre que l'on peut donner un sens à la diffusion.

$$dx_t = b(x_t, u_t)dt + dw_t - n(x_t)d\xi_t$$

où  $n$  désigne la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur, comme une Inéquation Variationnelle statistique.

On peut également se reporter à FELLER [9], MANDL [15], STOOK-VARADHAN [18] CIHMAN-SKOROHOD [11] pour la définition d'un tel processus.

$\xi_t$  est un processus continu croissant sur  $\Gamma$  défini de façon unique.

$u_t$  est le contrôle.

On se pose le problème :

$$\min_u E \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t, u_t) dt + E \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(x_t) d\xi_t$$

Considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$(o') \quad \begin{cases} -\lambda V + \frac{1}{2} \Delta V + \min_u \{ DV.b(x, u) + f(x, u) \} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

Faisons le même raisonnement que pour l'exemple précédent.

Supposons que  $V$  solution de  $(o')$  soit  $C^2(\Omega)$  et appliquons la formule d'Ito à  $e^{-\lambda t} V(x)$ , on obtient avec :

$$\begin{aligned} \hat{u} &\in \arg \min_u DV.b(x, u) + f(x, u) \\ -V(x) &= E \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-\lambda V + \frac{1}{2} \Delta V + DV.b(x, u)) dt + e^{-\lambda t} DV.n d\xi_t \end{aligned}$$

En utilisant  $(o')$  on obtient :

$$V(x) = E \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t, u_t) dt + e^{-\lambda t} g(x_t) d\xi_t$$

et donc, sous l'hypothèse de régularité  $C^2$ ,  $V$  solution de  $(o')$  résoud le problème de contrôle stochastique.

Cette hypothèse peut être affaiblie BENOUSSAN-LIONS [4]

$$\begin{cases} V \in H^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \\ -\lambda V + \Delta V \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Dans la suite nous nous proposons de résoudre numériquement les équations (o) et (o').

KUSHNER-CHEN-FU-YU [10] résout ce problème en approximant les diffusions par des chaînes de Markov et montre la convergence en loi du processus approximant, il en déduit la convergence du coût optimum.

Ici, on prendra l'attitude inverse : on utilise la théorie de l'approximation des équations aux dérivées partielles pour résoudre le problème. En particulier, on étudiera une approximation interne (par éléments finis) des équations aux dérivées partielles (o) et (o') et on donnera un algorithme de résolution du problème discrétilisé. Le contrôle sera approximé par des fonctions constantes par morceaux, la solution par des fonctions linéaires par morceaux et par composantes.

Cette approche nous permet d'obtenir, dans le cadre coercif, des résultats plus forts que ceux obtenus dans KUSHNER CHEN-FU-YU [10] en particulier

- convergence dans  $H^1$  du coût optimal,
- majoration de la norme  $H^1$  de la différence entre la solution du problème continue et du problème discrétilisé.

Ces auteurs obtiennent un feedback meilleur que tout feedback lipschitzien ; ici, cette dernière restriction est supprimée.

Plusieurs exemples numériques confirment les majorations d'erreurs obtenues, et donnent une idée de la rapidité de convergence de l'algorithme de résolution.

On montre également que dans certains cas, pour l'approximation par éléments finis, et toujours pour l'approximation par différence finie, le problème discrétilisé s'interprète de façon probabiliste comme un problème de contrôle de chaîne de Markov et l'algorithme de résolution comme un algorithme de Howard généralisé.

En appliquant des résultats de STROOK-VARADHAN [18] on montre que la méthode exposée dans KUSHNER CHEN-FU-YU [10] s'applique encore aux diffusions réfléchies et à la discrétilisation par éléments finis (nous le faisons en dimension 1).

Nous suivrons le plan suivant :

1. - NOTATION ET FORMULATION PRECISE DU PROBLEME
2. - EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION
3. - CONSTRUCTION D'UN PROBLEME APPROCHE
4. - EXISTENCE ET UNICITE DU PROBLEME APPROCHE
5. - CONVERGENCE DES SOLUTIONS APPROCHEES ET MAJORIZATION D'ERREUR
6. - EXEMPLE D'APPROXIMATION
7. - ALGORITHME DE RESOLUTION DU PROBLEME APPROCHE
8. - TESTS NUMERIQUES
  - 8.1. - Test en dimension 1
  - 8.2. - Test en dimension 2
  - 8.3. - Exemple
  - 8.4. - Application à un modèle de croissance de firme
9. - INTERPRETATION PROBABILISTE

ANNEXE 1 - PROBLEMES DE MESURABILITE

ANNEXE 2 -

ANNEXE 3 - PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

ANNEXE 4 - SUR L'APPROXIMATION EXTERNE

BIBLIOGRAPHIE

### 1. - NOTATIONS ET FORMULATION DU PROBLEME

Dans ce paragraphe, nous allons préciser les hypothèses que nous ferons continuellement dans la suite, et nous définirons précisément l'équation aux dérivées partielles que nous désirons résoudre.

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de frontière  $\Gamma$

$$(1) \quad u : \Omega \dashrightarrow \mathbb{R}^m$$

Multi-application de graphe borélien\*, à valeurs fermées, dans un compact fixe.

$$(2) \quad b : \Omega \times \mathbb{R}^m \dashrightarrow \mathbb{R}^n$$

$x, u \quad b_i(x, u)$  Application boréienne vérifiant :

$$\sup_{x, u} |b_i(x, u)| \leq M \quad i = 1, \dots, n$$

$$|b_i(x, u_1) - b_i(x, u_2)| \leq k |u_1 - u_2|$$

$$(3) \quad \varphi : \Omega \times \mathbb{R}^m \dashrightarrow \mathbb{R} \quad \text{Application boréienne vérifiant :}$$

$$\sup_{x, u} |\varphi(x, u)| \leq M$$

$$|\varphi(x, u_1) - \varphi(x, u_2)| \leq k |u_1 - u_2|$$

On définit alors l'application :

$$(4) \quad F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}$$

$$x, u, p \quad \sum_i b_i(x, u) p_i + \varphi(x, u)$$

\* On peut prendre de graphe souslinien

Alors les hypothèses (1) (2) (3) permettent de définir l'application

$$\Pi : \Omega \times \mathbb{R}^m \dashrightarrow \mathbb{R}$$
$$x, p \quad \Pi(x, p) = \min_{u \in \mathcal{U}(x)} F(x, u, p)$$

En effet,  $u \dashrightarrow F(x, u, p)$  est continue et  $\mathcal{U}(x)$  est compact.

Donnons maintenant quelques propriétés de  $\Pi$ .

Lemme 1 : L'application  $\Pi : \Omega \times \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$  est universellement radon mesurable et lipschitzienne en  $p$  p.p.

De plus, il existe  $u(x, p)$  boréienne vérifiant :

$$\Pi(x, p) = F(x, u(x, p)p) \text{ p.p. ; où } \mu \text{ désigne une mesure de radon quelconque sur } \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

### Démonstration

Les propriétés de mesurabilité proviennent du théorème du maximum. Nous donnons la démonstration tiré d'EKELAND [7] dans l'annexe 1.

$\Pi$  est lipschitzienne en  $p$  sauf sur un  $\mu$  négligeable ; en effet,  $\exists N, \mu$  négligeable, borélien tel que :

$$\forall (x, p) \in N \exists u : \Pi(x, p) = F(x, u, p)$$

Alors, soit  $p$  et  $\bar{p} \notin N$  tels que  $\Pi(x, p) \geq \Pi(x, \bar{p})$

Il existe alors  $u$  et  $\bar{u}$  :

$$\begin{aligned} |\Pi(x, p) - \Pi(x, \bar{p})| &= F(x, u, p) - F(x, \bar{u}, \bar{p}) \\ &\leq F(x, \bar{u}, p) - F(x, \bar{u}, \bar{p}) \\ &= \sum_i (b_i(x, \bar{u})p_i - b_i(x, \bar{u})\bar{p}_i) = M \sum_i |p_i - \bar{p}_i| \end{aligned}$$

Grâce aux propriétés de mesurabilité obtenues dans le lemme 1, on montre (annexe 2) que l'on peut définir l'opérateur :

$$\begin{array}{c} \Pi: L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \dashrightarrow L^p(\Omega) \\ z \quad \quad \quad x \dashrightarrow \Pi(x, z(x)) \end{array}$$

et qu'il est de lipschitz

$$|\Pi(z_1) - \Pi(z_2)|_{L^p(\Omega)} \leq k_1 |z_1 - z_2|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

De même l'opérateur

$$\begin{array}{c} U: L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \dashrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \\ z \quad \quad \quad x \dashrightarrow u(x, z(x)) \end{array}$$

est bien défini et on a :

$$\Pi(x, z(x)) = F(x, u(x, z(x)), z(x)) \text{ p.p.}$$

ce qui montre que

$$\Pi(z) = \min_{u \in \mathcal{U}} F(u, z)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} F: L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \dashrightarrow L^p(\Omega) \\ u \quad \quad \quad z \quad \quad \quad x \dashrightarrow F(x, u(x), z(x)) \end{array}$$

et l'abus de notation :

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \mid u(x) \in \mathcal{U}(x) \right\} \quad \blacksquare$$

Soit alors :

$$\begin{aligned} \lambda &\in \mathbb{R} \\ a_{ij} \quad i=1, \dots, n; \quad j &= 1, \dots, n \quad \in C^1(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

$$(6) \quad f \in L^2(\Omega)$$

$$(7) \quad g \in H^{1/2}(\Omega)$$

et les espaces

$$V \subset H \subset V'$$

$H$  étant  $L^2(\Omega)$ ;  $V = H^1(\Omega)$  ou  $H_0^1(\Omega)$

On définit :

- la forme bilinéaire  $a_\lambda : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$a_\lambda(y, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_j a_{ij,i} \frac{\partial y}{\partial x_j} v \right\} d\Omega$$

$$\text{où } a_{ij,i} = \sum_i \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \Big|_{j,i}$$

et l'on suppose :

$$(8) \quad \exists \alpha > 0 \text{ et } \mu : a_\lambda(y, y) \geq \alpha \|y\|_V^2 + \mu \|y\|_H^2$$

On remarque que si (8) est vérifiée pour  $\lambda$ , elle est vérifiée pour tout  $\lambda' \geq \lambda$ .

$$l(v) = \int_{\Omega} fv d\Omega + \int_{\Gamma} gv d\Gamma \text{ forme linéaire continue sur } V.$$

désignons par  $D$  l'opérateur gradient.

$$D : V \rightarrow H^n$$

$$y \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

On peut alors énoncer le problème :

On cherche  $y \in V$  tel que

$$(9) \quad a_\lambda(y, v) - (\Pi(Dy), v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

En notant  $A_\lambda$  l'opérateur de  $V$  dans  $V'$

$$A_\lambda = \sum_i - a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \lambda I$$

- Si  $g = 0$  et  $V = H_0^1(\Omega)$

le problème (9) équivaut à chercher  $y \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant :

$$(9') A_\lambda y - \Pi(Dy) = f$$

- Si  $V = H^1(\Omega)$

le problème (9) équivaut à chercher  $y \in H^1(\Omega)$  vérifiant :

$$(9'') \begin{cases} A_\lambda y - \Pi(Dy) = f \\ \frac{\partial y}{\partial v_A} \Big|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

où  $\frac{\partial}{\partial v_A}$  désigne la dérivée selon le vecteur  $v_A$  défini au point  $x$  par  $\vec{v}_A = (a_{ij}(x)) \cdot \vec{n}(x)$  où  $\vec{n}(x)$  désigne la normale extérieure à  $\Gamma$ .

## 2. - EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION

Dans ce paragraphe, nous appliquons la méthode de monotonie LIONS [12] pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de (9).

L'étude approfondie de ce problème est faite dans BENSOUSSAN-LIONS [4].

Notons :

$$c_\lambda(y, v) = a_\lambda(y, v) - (\Pi(Dy), v)$$

et étudions les propriétés de cette application.

. MONOTONIE

$$\exists \lambda_0 \text{ et } \beta > 0 : \forall \lambda \geq \lambda_0 \quad c_\lambda(y, y-v) - c_\lambda(v, y-v) \geq \beta |y-v|_V^2$$

En effet,  $\Pi : H^n \rightarrow H$  étant lipschitzienne de constante  $k$ , on a :

$$(\Pi(Dy) - \Pi(Dv), y-v) \leq |y-v|_H |\Pi(Dy) - \Pi(Dv)|_H \leq k_1 |y-v|_H |Dy - Dv|_{H^n}$$

$$\leq \frac{k_1 \varepsilon}{2} |Dy - Dv|_H^2 + \frac{k_1}{2\varepsilon} |y-v|_H^2 \leq k_1 \frac{\varepsilon}{2} |y-v|_V^2 + \frac{k_1}{2\varepsilon} |y-v|_H^2$$

où  $\varepsilon$  est une constante arbitraire.

En choisissant  $\lambda$  et  $\varepsilon$  de façon à ce qu'il existe  $\alpha$  et  $\mu$  vérifiant :

$$\alpha - \frac{\varepsilon k_1}{2} = \beta > 0$$

$$\mu - \frac{k_1}{2\varepsilon} \geq 0$$

on obtient le résultat ■

. HEMICONINUITE

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} c_\lambda(y-\rho w, v) = c_\lambda(y, v)$$

immédiat d'après la propriété de Lipschitz de  $\Pi$ . ■

. BORNE

$c_\lambda(y, v)$  est borné sur tout borné de  $V \times V$  ; en effet :

$$(\Pi(Dy), v)_H \leq |\Pi(Dy)|_H |v|_H \leq M |v|_H (|y|_V + 1)$$

Enfin, les coefficients  $a_{ij}$  étant  $C^1(\bar{\Omega})$  donc bornés et à dérivées bornées, on obtient le résultat ■

. FAIBLE INF-COMPACITE DE  $c_\lambda(y, v)$

On a en effet :

$$\begin{aligned} (\Pi(Dy), y) &\leq \|\Pi(Dy)\|_H \|y\|_H \leq M \|y\|_H (\|Dy\|_H^{n+1}) \\ &\leq \frac{M\varepsilon}{2} \|y\|_V^2 + \frac{M}{2} + \left(\frac{M}{2} + \frac{M}{2\varepsilon}\right) \|y\|_H^2 \end{aligned}$$

et donc, en utilisant (8) :

$$\exists \lambda_0 \text{ et } \varepsilon \quad \forall \lambda \geq \lambda_0$$

$$c_\lambda(y, y) \geq \beta \|y\|_V^2 - \frac{M}{2}$$

en prenant :

$$\alpha - \frac{M\varepsilon}{2} = \beta > 0$$

$$M - \frac{M}{2\varepsilon} - \frac{M}{2} > 0 \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 1

Sous les hypothèses (1) (2) (3) (6) (7) (8), il existe  $\lambda$  tel que le problème

$$c_\lambda(y, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

ait une solution unique  $y \in V$

Cette proposition résulte de l'application du théorème 2.1. LIONS [12].

Remarque 1

Les hypothèses de régularité (6) (7) donne  $y \in H^2(\Omega)$  ; en effet,  $\Pi(Dy) \in L^2(\Omega)$  grâce à LIONS-MAGENES [14], on obtient le résultat.

Il peut être très utile de savoir que  $y \in C^0(\Omega)$  pour montrer que la solution de l'équation aux dérivées partielles est solution du problème de contrôle stochastique.

Les majorations obtenues dans BENOUSSAN-FRIEDMAN [3] montrent que  $y \in W^{2,p}(\Omega)$ ,  $p$  quelconque. On obtient alors la régularité  $C^0(\Omega)$  grâce au théorème de SOBOLEV (Cf. LIONS [13]). ■

### 3. - PROBLEME APPROCHE

Nous allons construire maintenant une approximation en dimension finie de (9).

Soit  $V_\xi$  un espace de dimension finie

$p_\xi$  un opérateur injectif continu de  $V_\xi$  dans  $V$

$r_\xi$  un opérateur de  $V$  dans  $V_\xi$

$p_\xi, r_\xi$  possédant la propriété suivante :

$$\forall v \in V \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} p_\xi r_\xi v = v \text{ dans } V \text{ fort.}$$

Du théorème de BANACH STEINHAUSS, on déduit que l'opérateur  $p_\xi r_\xi$  est borné indépendamment de  $\xi$ .

Le triplet  $(V_\xi, p_\xi, r_\xi)$  est appelé approximation interne de  $V$  AUBIN [1], TEMAM [19], CIARLET-RAVIART [5].

De même, soit :  $(H_n, q_n, s_n)$  une approximation interne de  $H$  telle que :

$$f_1 \geq f_2 \in H \Rightarrow q_n s_n f_1 \geq q_n s_n f_2$$

$(W_n, \bar{q}_n, \bar{s}_n)$  une approximation interne de  $W$  qui sera l'espace de  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$  avec  $2 < p < \infty$ . Ce sera l'espace contenant  $\mathcal{U}$  dans lequel on approximera les contrôles.

A ces deux dernières approximations on imposera de plus :

$$\Pi_n(z) = \min_{u \in \mathcal{U}} q_n s_n F(\cdot, \bar{q}_n \bar{s}_n u(\cdot), z(\cdot)) \text{ d'exister } \forall z \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \text{ en effet}$$

en situation générale, il peut être impossible de réaliser le minimum

$\forall x \in \Omega$ , il faudrait introduire une minimisation vectorielle qui supprimerait le caractère local à la minimisation dans l'équation de Bellman.

On définit alors le problème approché de (9)

$$(10) \quad a_\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi) - (\Pi_\eta(D(p_\xi y_\xi), p_\xi v_\xi)) = l(p_\xi v_\xi) \quad \forall v_\xi \in V_\xi$$

On notera :

$c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi)$  le premier membre de (10) ■

Donnons maintenant une estimation qui nous servira plusieurs fois dans la suite.

Notons :

$$\begin{aligned} F_\eta(u, z) &= F(\cdot, \bar{q}_\eta \bar{s}_\eta u(\cdot), z(\cdot)) \\ F(u, z) &= F(\cdot, u(\cdot), z(\cdot)) \end{aligned}$$

Lemme 2 :

$$\begin{aligned} (11) \quad &\exists C > 0 \text{ indépendante de } \eta \\ &|\Pi_\eta(z_1) - \Pi_\eta(z_2)|_H = |(I - q_\eta s_\eta) \Pi(z_2)|_H + C |z_2 - z_1|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} \\ &\quad + C |z_2|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} |(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I) u_2|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^m)} \\ &\quad + C |z_2|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} |(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I) u_2|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

$$p \geq 2 \quad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{2}{q} = 1$$

$$u_2 \text{ vérifiant } \Pi(z_2) = F(u_2, z_2)$$

Enfin :

$$(12) \quad |\Pi_\eta(z_1) - \Pi_\eta(z_2)|_H \leq C |z_2 - z_1|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

Démonstration

$$\exists u_1 \in \mathcal{U} : \Pi_\eta(z_1) = q_\eta s_\eta F_\eta(u_1, z_1)$$

$$(13) \quad \begin{aligned} |\Pi_\eta(z_1) - \Pi_\eta(z_2)|_H &= |q_\eta s_\eta F_\eta(u_1, z_1) - F(u_2, z_2)|_H \\ &\leq |q_\eta s_\eta (F(u_1, z_1) - F(u_2, z_2))|_H + |(I - q_\eta s_\eta)F(u_2, z_2)|_H \end{aligned}$$

or

$$(14) \quad \begin{aligned} |q_\eta s_\eta (F_\eta(u_1, z_1) - F(u_2, z_2))|_H &= \left| \left[ q_\eta s_\eta (F_\eta(u_1, z_1) - F(u_2, z_2)) \right]^+ \right|_H \\ &\quad + \left| \left[ q_\eta s_\eta (F_\eta(u_1, z_1) - F(u_2, z_2)) \right]^- \right|_H \\ &\leq |q_\eta s_\eta (F_\eta(u_2, z_1) - F(u_2, z_2))|_H + |q_\eta s_\eta (F_\eta(u_1, z_1) - F_\eta(u_1, z_2))|_H \end{aligned}$$

en effet l'approximation vérifie la propriété suivante :

$$f_1 \geq f_2 \implies q_\eta s_\eta f_1 \geq q_\eta s_\eta f_2$$

$$\text{D'autre part } |q_\eta s_\eta|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq M_1 \text{ et (14)} \implies$$

$$\begin{aligned} |q_\eta s_\eta (F_\eta(u_2, z_1) - F(u_2, z_2))|_H &\leq M_1 (|F_\eta(u_2, z_1) - F(u_2, z_2)|_H + \\ &\quad |F_\eta(u_2, z_1) - F_\eta(u_2, z_2)|_H) \end{aligned}$$

enfin  $\exists C > 0$

$$(15) \quad |F_n(u_2, z_1) - F_n(u_2, z_2)|_H \leq C |z_1 - z_2|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)}$$

d'autre part

$$|F_n(u_2, z_2) - F(u_2, z_2)|_H \leq |\varphi(\bar{q}_n \bar{s}_n u_2) - \varphi(u_2)|_H + |(b(\bar{q}_n \bar{s}_n u_2) - b(u_2)) \cdot z_2|_H$$

or en utilisant la propriété de Lipschitz de  $\varphi$

$$|\varphi(\bar{q}_n \bar{s}_n u_2) - \varphi(u_2)| \leq C |u_2 - \bar{q}_n \bar{s}_n u_2|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}$$

l'inégalité de Holder donne alors

$$|(b(\bar{q}_n \bar{s}_n u_2) - b(u_2)) \cdot z_2|_H \leq |z_2|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} |b(\bar{q}_n \bar{s}_n u_2) - b(u_2)|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$

la propriété de Lipschitz de  $b$  donne  $\exists C > 0$

$$|b(\bar{q}_n \bar{s}_n u_2) - b(u_2)|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq C |\bar{q}_n \bar{s}_n u_2 - u_2|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

d'où

$$\begin{aligned} |F_\eta(u_2, z_1) - F(u_2, z_2)|_H &\leq C|z_1 - z_2|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} + C|(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u_2|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)} \\ &\quad + C|z_2|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} |(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u_2|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^m)} \end{aligned}$$

avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$  d'où (11).

La démonstration de l'inégalité (12) provenant de (15) et de  
 $|F_\eta(u_1, z_2) - F_\eta(u_1, z_1)| \leq C|z_1 - z_2|$  avec  $\Pi_\eta(z_2) = q_\eta s_\eta F_\eta(u_2, z_2)$  cette fois. ■

#### 4. - EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME APPROCHE

Munissons  $V_\xi$  du produit scalaire euclidien habituel dans  $\mathbb{R}^n$  que nous noterons  $[ , ]$

(10) se réécrit

$$(16) \quad p_\xi^* A_\lambda p_\xi y_\xi - p_\xi^* \Pi_\eta(Dp_\xi y_\xi) = f_\xi$$

avec  $f_\xi$  définie par

$$[f_\xi, v_\xi] = 1(p_\xi v_\xi)$$

Nous noterons (16)

$$(17) \quad C_{\xi\eta}^\lambda y_\xi = f_\xi$$

Et donc (10) se ramène à la résolution du système non linéaire (17).

Nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution de (17). Pour cela on commence par étudier les propriétés de  $C_{\xi\eta}^\lambda$ .

Propriétés de l'opérateur  $C_{\xi\eta}^\lambda$  et de la forme  $c_\eta^\lambda$  :

. CONTINUITÉ DE  $C_{\xi\eta}^\lambda$

Il suffit de montrer ( $\mathbb{R}^n$  fort et faible sont identiques)  $y_\xi^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_\xi$  dans  $V_\xi \Rightarrow [C_{\xi\eta}^\lambda(y_\xi^n), v_\xi] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [C_{\xi\eta}^\lambda(y_\xi), v_\xi] \forall v_\xi \in V_\xi$  donc que :

$$c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi^n, p_\xi v_\xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi) \quad \forall v_\xi \in V_\xi$$

Le résultat découle de la continuité de l'application  $z \mapsto \Pi_\eta(z)$  et de la continuité de l'application  $p_\xi$ .  $\blacksquare$

.  $\exists \lambda_0, \chi, \beta > 0$  indépendantes de  $\xi$  et de  $\eta$  telles que  $\forall \lambda > \lambda_0$   
 $c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi) \geq \beta \|p_\xi y_\xi\|_V^2 - \chi$

$$(\Pi_\eta(Dp_\xi y_\xi), p_\xi y_\xi) \leq \|\Pi_\eta Dp_\xi y_\xi\|_H \|p_\xi y_\xi\|_H$$

$$\exists u \in U : \leq \|F_\eta(u, Dp_\xi y_\xi)\|_H \|p_\xi y_\xi\|_H$$

$$\leq \chi (\|Dp_\xi y_\xi\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} + 1) \|p_\xi y_\xi\|_H \leq \chi (\|p_\xi y_\xi\|_V + 1) \|p_\xi y_\xi\|_H$$

et la démonstration s'achève comme dans la démonstration de l'infcompacité de  $c_\eta^\lambda(y, y)$ .  $\blacksquare$

. MONOTONIE DE  $C_\eta^\lambda$

$$c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi y_\xi) - c_\eta^\lambda(p_\xi v_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi) \geq \beta \|p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi\|_V^2$$

$\beta$  indépendant de  $\xi$  et de  $\eta$ .

Le lemme 2 donne

$$|\Pi_\eta(Dp_\xi y_\xi) - \Pi_\eta(Dp_\xi v_\xi)| \leq |Dp_\xi y_\xi - Dp_\xi v_\xi| \chi$$

La démonstration s'achève comme dans la démonstration de la monotonie de  $C^\lambda$ . ■

. Il existe  $\lambda_0$  :  $\forall \lambda \geq \lambda_0 \exists k > 0 : |y_\xi|_{V_\xi} = k \Rightarrow [C_{\xi\eta}^\lambda y_\xi, y_\xi] - [f_\xi, y_\xi] \geq 0$

Utilisant (18) on obtient

$$c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi) \geq \beta |p_\xi y_\xi|_V^2 - \chi$$

et donc

$$\begin{aligned} [C_{\xi\eta}^\lambda y_\xi, y_\xi] - [f_\xi, y_\xi] &= c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi) - l(p_\xi y_\xi) \\ &\geq \beta |p_\xi y_\xi|_V^2 - \chi - |p_\xi y_\xi|_V \|l\|_V, \end{aligned}$$

d'où le résultat en utilisant l'injectivité de  $p_\xi$ . ■

### PROPOSITION 2

Il existe  $\lambda_0$  :  $\forall \lambda \geq \lambda_0$  le problème approché (10) admet une solution unique.

L'existence découle de la dernière propriété et du lemme 4.3 LIONS [12].

L'unicité :

La propriété de monotonie entraîne

$$c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi) - c_\eta^\lambda(p_\xi v_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi) \geq \beta |p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi|_V^2$$

soit alors deux solutions  $y_{1\xi}$  et  $y_{2\xi}$  notons  $w = y_{1\xi} - y_{2\xi}$

$$c_\eta^\lambda(p_\xi y_{1\xi}, p_\xi w_\xi) - c_\eta^\lambda(p_\xi y_{2\xi}, p_\xi w_\xi) = 0 \geq \beta |p_\xi y_{1\xi} - p_\xi y_{2\xi}|_V^2$$

d'où le résultat grâce à l'injectivité de  $p_\xi$ .

### 5. - CONVERGENCE DE LA SOLUTION APPROCHÉE MAJORIZATION D'ERREUR.

#### THEOREME 1

$\exists \lambda_0$  : Si  $y_\xi$  est solution de (10),  $y$  solution de (9) on a la majoration pour  $\lambda > \lambda_0$  : il existe  $C > 0$  indépendant de  $\xi, n$ :

$$\frac{c|y - p_\xi y_\xi|_V \leq |y - p_\xi r_\xi y|_V + |(I - q_n s_n) \Pi(Dy)| + |(I - q_n s_n)^{-1} u|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^m)} (1 + |y|_{H^2(\Omega)})}{}$$

avec  $q \geq n$  et  $\Pi(Dy) = F(Dy, u)$

et donc  $p_\xi y_\xi \xrightarrow{\text{fortement dans }} H^1(\Omega)$ .

#### Démonstration

Utilisant la monotonie des problèmes approchés.

$$(19) \quad c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y) - c_\eta^\lambda(p_\xi r_\xi y, p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y) \geq \beta |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y|_V^2$$

(10) et (9)  $\Rightarrow$

$$(20) \quad c_\eta^\lambda(y, p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y) - c_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y) = 0$$

(19) + (20)  $\Rightarrow$

$$(21) \quad c^\lambda(y, p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y) - c_n^\lambda(p_\xi r_\xi y, p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y) \geq \beta |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y|_V^2$$

$$(21) \text{ les définitions de } c^\lambda \text{ et de } c_n^\lambda \implies \exists M_2$$

$$(22) \quad M_2 |y - p_\xi r_\xi y|_V + |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y|_V + |\Pi_n(Dp_\xi r_\xi y) - \Pi(Dy)|_H |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y|_V$$

$$\geq \beta |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y|_V^2$$

$$(23) \quad M_2 |y - p_\xi r_\xi y|_V + |\Pi_n(Dp_\xi r_\xi y) - \Pi(Dy)|_H \geq \beta |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y|_V$$

qui donne une majoration de l'erreur discrète.

Utilisant l'inégalité triangulaire :

$$(24) \quad |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi y|_V \geq |p_\xi y_\xi - y|_V + |y - p_\xi r_\xi y|_V$$

(23) et (24) donnent une majoration de l'erreur dans  $V$ .

$$(25) \quad (M_2 + \beta) |y - p_\xi r_\xi y|_V + |\Pi_n(Dp_\xi r_\xi y) - \Pi(Dy)|_V \geq \beta |y - p_\xi y_\xi|_V$$

Utilisant le lemme 2 on obtient :

$$|\Pi_n(Dp_\xi r_\xi y) - \Pi(Dy)|_H \leq |(I - q_n s_n) \Pi(Dy)| + k(\|I - p_\xi r_\xi\| y|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

$$+ \|(\bar{q}_n \bar{s}_n - I)u\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)} + \|Dy\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} \|(\bar{q}_n \bar{s}_n - I)u\|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

$$\text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \text{ et } \Pi(Dy) = F(Dy, u).$$

Utilisant le résultat de régularité  $y \in H^2(\Omega)$

$$\exists c > 0 : |Dy|_{L^p(\Omega, R^n)} \leq c |Dy|_{(H^1)^n} \leq c |y|_{H^2}$$

à condition que  $\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$  si  $n > 2$

et donc en prenant  $q > n$  on obtient la majoration cherchée. ■

#### COROLLAIRE 1

De toute suite  $(\xi_n, \eta_n) \rightharpoonup (0,0)$  on peut extraire une sous suite encore notée  $(\xi_n, \eta_n)$  telle que :

$$b(\cdot, q_{\eta_n} u_{\eta_n}(\cdot)) \rightharpoonup b^*(\cdot) \text{ dans } \sigma(L^\infty, L^1)$$

$$\varphi(\cdot, q_{\eta_n} u_{\eta_n}(\cdot)) \rightharpoonup \varphi^*(\cdot) \text{ dans } \sigma(L^\infty, L^1)$$

avec  $b^* Dy^* + \varphi^* = \Pi(Dy^*)$

où  $y^*$  désigne la solution du problème continu (9).

D'autre part il existe une sous suite  $q_{\eta_n} u_{\eta_n} \rightharpoonup \bar{u}$  dans  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .  
En général  $\bar{u}$  n'est pas un contrôle optimal cependant si :

(24<sup>1</sup>)  $u(x)$  est convexe  $\forall x$

(24<sup>2</sup>)  $u \rightharpoonup b(x, u)$  est convexe sur  $\{x / Dy^* \geq 0\}$ , concave sur  $\{x / Dy^* \leq 0\}$

(24<sup>3</sup>)  $u \rightharpoonup \varphi(x, u)$  convexe  $\forall x$

alors  $u$  est un contrôle optimal.

Plus précisement la restriction de  $\bar{u}$  à l'ensemble des  $x$  sur lequel à la fois  $b(x, \cdot)$  convexe et  $Dy^* \geq 0$ , ou  $b(x, \cdot)$  concave et  $Dy^* \leq 0$  est optimale.

Démonstration

Soit une suite  $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{---}} (0,0)$

Appelons  $u_{\eta_n}^* \in \operatorname{Arg} \max_{\eta_n} \Pi_{\eta_n}(Dp_{\xi_n} y_{\xi_n})$

$b(\cdot, q_{\eta_n} u_{\eta_n}^*(\cdot))$  reste dans un borné de  $L^\infty(\Omega)$  par hypothèse.

Il existe alors une sous suite encore indéfinie par  $n$  convergente vers  $b^*$  dans  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .

Il en est de même pour  $\varphi(\cdot, q_{\eta_n} u_{\eta_n}^*(\cdot)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma(L^\infty, L^1)} \varphi^*$

D'autre part le théorème précédent nous permet d'affirmer que  $Dp_{\xi_n} y_{\xi_n} \xrightarrow{\text{---}} Dy^*$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ ,  $y^*$  étant solution de (9).

Soit alors  $\Psi$  appartenant à  $H^1(\Omega)$  on a :

$q_{\xi_n} s_{\xi_n} \Psi \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{---}} \Psi$  fortement dans  $H^1$

$s'_{\eta_n} q'_{\eta_n} q_{\xi_n} s_{\xi_n} \Psi \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{---}} \Psi$  fortement dans  $L^2$   $\star$

$$(24^4) \quad (b(\cdot, q_{\eta_n} u_{\eta_n}^*(\cdot)), Dp_{\xi_n} y_{\xi_n} + \varphi(\cdot, q_{\eta_n} u_{\eta_n}^*(\cdot)), s'_{\eta_n} q'_{\eta_n} q_{\xi_n} s_{\xi_n} \Psi)$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{---}} (b^* Dy^* + \varphi^*, \Psi)$$

$\star$ . Les " " désignent ici la transposition.

or :

$$(24^4) \quad l(p_{\xi_n} r_{\xi_n} \Psi) - a_\lambda(p_{\xi_n} y_{\xi_n}, p_{\xi_n} r_{\xi_n} \Psi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(\Psi) - a_\lambda(y^*, \Psi)$$

et donc :

$$(24^5) \quad b^* D y^* + \varphi^* = \Pi(D y^*)$$

Faisons maintenant les hypothèses  $(24^1)$ ,  $(24^2)$ ,  $(24^3)$  restant dans un borné de  $L^\infty$  converge vers  $\bar{u}$  pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .

$\mathcal{U}(x)$  étant convexe et fermé  $\forall x, \mathcal{U}$  est faiblement fermé et donc  $\bar{u} \in \mathcal{U}$ .

Soit alors  $\Psi > 0$ .

L'application  $u \mapsto (F(u, Dy^*), \Psi)$  est convexe fortement continue donc faiblement s.c.i. et donc :

$$(F(\bar{u}, Dy^*), \Psi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (b(., q_{\eta_n} u_{\eta_n}^*(.)) D y^* + \varphi(., q_{\eta_n} u_{\eta_n}^*), \Psi)$$

et donc grâce à  $(24^5)$  :

$$(F(\bar{u}, Dy^*), \Psi) \leq (b^* D y^* + \varphi^*, \Psi) = (\Pi(D y^*), \Psi), \forall \Psi \geq 0 \in L^2(\Omega)$$

et donc  $\bar{u}$  est optimal.

En prenant maintenant des  $\Psi$  ayant leurs supports inclus dans l'ensemble des  $x$  où  $(24^3)$  et  $(24^4)$  sont vérifiés on obtient la fin du corollaire.  $\square$

#### Remarque 1

Ce résultat améliore légèrement les résultats de KUSHNER CHEN FU YU [10] qui au moyen de technique purement probabiliste obtient un contrôle qui est meilleur que tout contrôle lipschitzien. Ici cette restriction est inutile.  $\square$

Remarque 2

Ce résultat montre clairement que seule la convergence des  $b$  et  $\phi$  est utile et non pas celle des  $u$  pour obtenir la convergence des coûts. On obtient le contrôle optimal par section après passage à la limite sur  $b$  et  $\phi$  et non pas directement sur les  $u$ , excepté hypothèses particulières. ■

6. - EXEMPLE D'APPROXIMATION

Dans ce paragraphe nous allons donner un exemple d'approximation.

Nous supposerons  $\Omega$  parallélépipédique. L'extension à  $\Omega$  polyèdre convexe est immédiate. Pour des domaines courbes on peut prendre les éléments isoparamétriques CIARLET RAVIART [5].

Nous nous donnons deux partitions  $\Omega_\xi$  et  $\Omega_\eta$  de  $\Omega$  en parallèles pipèdes.

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_\xi^i = \bigcup_j \Omega_\eta^j$$

Nous supposons que  $\Omega_\eta$  est une sous partition de  $\Omega_\xi$  c'est-à-dire que chaque élément  $\Omega_\eta^i$  de  $\Omega_\xi^i$  est une union de  $\Omega_\eta^j$ . En général on prendra  $\Omega_\xi = \Omega_\eta$ .

L'hypothèse  $\Pi_\eta(z) = \min_{u \in \mathcal{U}} q_\eta s_\eta F(., \bar{q}_\eta \bar{s}_\eta u(.), z(.))$  existe, nous impose le choix des approximations  $(H_\eta, q_\eta, s_\eta)$  et  $(W_\eta, \bar{q}_\eta, \bar{s}_\eta)$ .  $q_\eta s_\eta F$  devra être constante sur chaque élément  $\Omega_\eta^i$ . Il devra en être de même pour  $q_\eta s_\eta u$ . Il est alors clair que  $\Pi_\eta(z)$  existe. On voit alors que ce genre de discrétisation conserve au problème approché le caractère local de la minimisation. De plus nous ne connaissons pas d'autre type d'approximation assurant l'existence de  $\Pi_\eta(z)$  pour n'importe quelle fonction  $F$ .

Donc les éléments finis destinés à approximer le contrôle  $u$  serons les fonctions constantes sur les  $\Omega_\eta^j$ .

Pour l'approximation de  $V$  on peut prendre n'importe quel type d'élément. Cependant la majoration (18) montre qu'il est inutile de prendre des éléments plus compliqués que les éléments  $Q_1$  (fonctions de bases linéaires par rapport à chaque composante) la précision de l'approximation étant limitée par la qualité de l'approximation du contrôle.  $\blacksquare$

### 1 - Approximation de $V$ : $(V_\xi, p_\xi, r_\xi)$

$V_\xi = \mathbb{R}^N$  où  $N$  est le nombre de noeuds (sommet des parallélépipèdes de la partition) :

$$p_\xi : \mathbb{R}^N \dashrightarrow H^1(\Omega)$$

$$y_\xi \quad p_\xi(y_\xi) = \sum_{k=1}^N y^k \varphi^k(x)$$

avec  $\varphi^k(x)$  fonctions de base, linéaires par rapport à chacune des composantes, valant 1 au noeud  $k$ , 0 ailleurs.

$$r_\xi : H^1(\Omega) \dashrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$y \quad y_\xi : P_{(\varphi_k, k=1 \dots N)}^{H^1}(y) = \sum_i y^i \varphi^i(x)$$

$P_{(\varphi_k, k=1 \dots N)}^{H^1}$  désigne la projection au sens de la norme  $H^1$  sur l'espace engendré par  $(\varphi_k, k=1 \dots N)$ .  $\blacksquare$

#### Remarque

Si on veut approximer  $H^1(\Omega)$  il suffit de se restreindre à un sous espace de  $V_\xi$  obtenu en imposant les contraintes  $y^k = 0$   $k \in \Gamma$  (noeuds appartenant à la frontière).  $\blacksquare$

THEOREME 2

$$|y - p_\xi r_\xi y|_{H^1(\Omega)} \leq c \frac{\xi}{\rho}^2 |y|_{H^2}$$

avec :

. rayon de la plus grande boule circonscrite à un parallélépipède de la partition.

. ρ rayon de la plus petite boule inscrite dans les parallélépipèdes de la partition.

démonstration dans CIARLET RAVIART [5].

Le théorème précédent prouve que pour tout  $y \in H^2$  on a :  
 $\lim_{\xi \rightarrow 0} |y - p_\xi r_\xi y| \rightarrow 0$  dans  $H^1$ .

$$\frac{\xi}{\rho} \leq M$$

$H^2$  étant dense dans  $H^1$ ,  $I - p_\xi r_\xi$  étant un opérateur linéaire continu borné, on a le :

COROLLAIRE 2

$$\forall y \in H^1(\Omega)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} |y - p_\xi r_\xi y|_{H^1} = 0$$

$$\frac{\xi}{\rho} \leq M$$

2 - Approximation de H et de W

L'approximation de H est notée  $(H_\eta, q_\eta, s_\eta)$

L'approximation de W est notée  $(W_\eta, \bar{q}_\eta, \bar{s}_\eta)$

Avec  $H_\eta = R^{N_o}$ ,  $N_o$  est le nombre de parallélépipèdes de la partition  $\Omega_\eta$

$$W_\eta = (R^{N_o})^m$$

$$q_\eta : R^{N_o} \dashrightarrow L^2(\Omega)$$

$$y_\eta \quad y = \sum_{i=1}^{N_o} y_\eta^i \psi_i(x)$$

$$\psi_i(x) = \mathbf{1}_{\Omega_\eta^i}(x)$$

$$\bar{q}_\eta : (R^{N_o})^m \dashrightarrow L^p(\Omega, R^m)$$

$$u_\eta \quad u_i = \sum_{j=1}^{N_o} u_\eta^j, i \psi_j(x) \quad i = 1, \dots, m$$

$$s_\eta : L^2(\Omega) \dashrightarrow R^{N_o}$$

$$y \quad y_\eta$$

avec  $P_{(\psi_i, i=1 \dots N_o)}^{L^2}(y) = \sum_{j=1}^{N_o} y_\eta^i \psi_j(x)$

$$\bar{s}_\eta : L^p(\Omega, R^m) \dashrightarrow R^{N_o \times m}$$

$$u \quad u_\eta$$

avec  $P_{(\psi_i, i=1 \dots N_o)}^{L^2}(u_i) = \sum_{j=1}^{N_o} u_\eta^j, i \psi_j(x)$

On a alors les résultats de convergence suivant :

THEOREME 3

$$\|y - q_\eta s_\eta y\|_{L^2} \leq \frac{c\eta^2}{\theta} \|y\|_{H^1}$$

$$\|u - \bar{q}_\eta \bar{s}_\eta u\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} \leq \frac{c\eta^2}{\theta} \|u\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)}$$

avec :

. η rayon de la plus grande boule circonscrite aux parallélépipèdes de la partition Ω<sub>η</sub>.

. θ rayon de la plus petite boule inscrite dans les parallélépipèdes de la partition Ω<sub>η</sub>.

COROLLAIRE 3

$$\forall y \in L^2(\Omega)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|y - q_\eta s_\eta y\|_{L^2} = 0$$

$$\frac{\eta}{\theta} \leq M$$

$$\forall u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|u - q_\eta s_\eta u\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} = 0$$

$$\frac{\eta}{\theta} \leq M$$

3 - Une majoration d'erreur

Les théorèmes 1, 2, 3 et les corollaires 2 et 3 permettent alors d'affirmer :

COROLLAIRE 4

Si  $y$  est solution de (9) vérifie les conditions de régularité suivantes :

$$y \in H^2$$

$$\Pi(Dy) \in H^1$$

$\exists u$  réalisant  $\Pi(Dy) = F(Dy, u)$   $u \in W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  avec  $q > n$

Alors :

$$\|y - p_\xi y_\xi\|_{H^1} \leq c \left( \frac{\xi^2}{\rho} + \frac{\eta^2}{\theta} \right)$$

De plus si :

$$y \in H^1(\Omega)$$

$$\Pi(Dy) \in L^2$$

$$u \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

alors :  $\lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} \|y - p_\xi y_\xi\| = 0$

$$\frac{\xi}{\rho} < c \frac{\eta}{\theta} < c$$

Remarque

On obtient des résultats équivalents avec des éléments finis tétraédriques. Nous avons donné les résultats dans le cadre des éléments parallélépipédiques, car pour les applications que nous ferons (à l'économie) les domaines sont de forme simple.

4 - Exemple

$$\Omega = ]0, 1[$$

$$U = [m, M]$$

$$(25^1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\partial}{\partial x} a(x) \frac{\partial y}{\partial x} + \lambda y - \min_{u \in U} \{ b(x, u) \frac{\partial y}{\partial x} + \varphi(x, u) \} = f(x) \\ \frac{\partial y}{\partial x}(0) = g(0) \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1) = g(1) \end{array} \right.$$

Prenons  $\xi = \eta$  et  $n\xi = 1$ .

Le problème discréétisé se ramène à la résolution du système non linéaire suivant :

$$(25^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_\xi^0 \left( \frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi a(x) dx + \frac{\lambda \xi}{3} \right) + y_\xi^1 \left( \frac{-1}{\xi^2} \int_0^\xi a(x) dx + \frac{\lambda \xi}{6} \right) - \frac{1}{2} \min_{u_\xi^0} \frac{y_\xi^1 - y_\xi^0}{\xi} \int_0^\xi b(u_\xi^0, x) + \\ + \int_0^\xi \varphi(u_\xi^0, x) dx = \int_0^\xi f(x) \left( 1 - \frac{x}{\xi} \right) dx - a(0)g(0) \\ \text{pour } j = 1, \dots, N-1 \\ y_\xi^{j-1} \left( \frac{-1}{\xi^2} \int_{(j-1)\xi}^{j\xi} a(x) dx + \frac{\lambda \xi}{6} \right) + y_\xi^j \left( 2 \frac{\lambda \xi}{3} + \frac{1}{\xi^2} \int_{(j-1)\xi}^{(j+1)\xi} a(x) dx \right) + \\ + y_\xi^{j+1} \left( \frac{-1}{\xi^2} \int_{(j-1)\xi}^{j\xi} a(x) dx + \frac{\lambda \xi}{6} \right) - \frac{1}{2} \min_{u_\xi^{j-1}} \frac{y_\xi^j - y_\xi^{j-1}}{\xi} \int_{(j-1)\xi}^{j\xi} b(u_\xi^{j-1}, x) dx + \\ + \int_{(j-1)\xi}^{j\xi} \varphi(u_\xi^{j-1}, x) dx - \frac{1}{2} \min_{u_\xi^j} \frac{y_\xi^{j+1} - y_\xi^j}{\xi} \int_{j\xi}^{(j+1)\xi} b(u_\xi^j, x) dx + \int_{j\xi}^{(j+1)\xi} \varphi(u_\xi^j, x) dx = \\ = \int_{(j-1)\xi}^{j\xi} f \left( \frac{x}{\xi} - j+1 \right) dx + \int_{j\xi}^{(j+1)\xi} f \left( -\frac{x}{\xi} + j+1 \right) dx \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{aligned}
 & y_{\xi}^{n-1} \left( \frac{-1}{\xi^2} \int_{(n-1)\xi}^{n\xi} a(x) dx + \frac{\lambda \xi}{6} \right) + y_{\xi}^n \left( \frac{1}{\xi^2} \int_{(n-1)\xi}^{n\xi} a(x) dx + \frac{\lambda \xi}{3} \right) - \\
 & \frac{1}{2} \min_{\substack{u_{\xi}^{n-1} \\ u_{\xi}}} \frac{y_{\xi}^n - y_{\xi}^{n-1}}{\xi} \int_{(n-1)\xi}^{n\xi} b(u_{\xi}^{n-1}, x) dx + \int_{(n-1)\xi}^{n\xi} \varphi(u_{\xi}^{n-1}, x) dx = \\
 & = \int_{(n-1)\xi}^{n\xi} f(x) \left( \frac{x}{\xi} - n+1 \right) dx + a(1)g(1)
 \end{aligned} \right|$$

Nous remarquons la forme particulière du système qui peut s'interpréter comme un problème de Bellman discret.

#### 7. - ALGORITHME DE RESOLUTION

Le problème discrétisé obtenu étant non linéaire, il faut maintenant construire un algorithme pour le résoudre. En utilisant la remarque précédente sur l'interprétation du problème discrétisé, il vient immédiatement à l'esprit l'algorithme suivant :

##### Algorithme

Etape\_1 :  $u_o^n$  donné

Etape\_2 :  $u_n^n \dashrightarrow y_n^n$  par résolution de (26)

$$(26) \quad a_{\lambda}(p_{\xi} y_{\xi}^n, p_{\xi} v_{\xi}) - (q_{\eta} s_{\eta} F(Dp_{\xi} y_{\xi}^n, \bar{q}_{\eta} u_{\eta}^n), p_{\xi} v_{\xi}) = l(p_{\xi} v_{\xi})$$

Etape\_3 :  $y_{\xi}^n \dashrightarrow u_n^{n+1}$  par (27)

$$(27) \quad u_2^{n+1} \in J(y_{\xi}^n) \text{ où } J \text{ est défini par (28)}$$

$$(28) \quad \mathcal{J}(y_\xi^n) = \{\bar{u}_\eta^* : q_\eta s_\eta F(Dp_\xi y_\xi^n, \bar{q}_\eta \bar{u}_\eta^*) = \Pi_\eta(Dp_\xi y_\xi^n)\}$$

Etape 4 : retourner à l'étape 2 jusqu'à convergence.

Notons  $A_{\xi, \eta}^u$  la matrice définie par :

$$\begin{bmatrix} y_\xi, A_{\xi, \eta}^u v_\xi \end{bmatrix} = a_\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi) - (q_\eta s_\eta F(Dp_\xi y_\xi, \bar{q}_\eta u_\eta), p_\xi v_\xi) \quad \forall y_\xi, v_\xi \in V_\xi$$

Nous faisons l'hypothèse :

(29)  $A_{\xi, \eta}^u$  a tous ses termes hors diagonaux négatifs ou nuls

$$\forall u_\eta : \bar{q}_\eta u_\eta \in \mathcal{U}.$$

#### Remarque

Cette hypothèse est réalisée en dimension 1 ou 2 dès que  $\xi$  est suffisamment petit par le type d'approximation utilisé, pour un opérateur dont la partie principale est le Laplacien. En dimension 3 cela dépend des termes du premier ordre, en dimension supérieure elle n'est pas vérifiée. Pour plus de détails, on se reporterà à l'annexe 3.

Par contre les schémas différences finies possèdent cette propriété pour un pas suffisamment petit.

#### THEOREME 4

$\exists \lambda_0 : \forall \lambda \geq \lambda_0$  sous l'hypothèse (29) alors  $y_\xi^n$  tend en décroissant vers  $\bar{y}_\xi^*$  solution de (10), toute suite convergente de  $\{u_\eta^n\}$  converge vers un élément de  $\mathcal{J}(\bar{y}_\xi^*)$

Démonstration

$$a) \underline{y_\xi^{n+1}} \leq \underline{y_\xi^n}$$

En effet (26)  $\Rightarrow$

$$(30) \quad a(p_\xi(y_\xi^n - y_\xi^{n+1}), p_\xi v_\xi) + \lambda(p_\xi(y_\xi^n - y_\xi^{n+1}), p_\xi v_\xi)$$

$$-(q_\eta s_\eta(b(\bar{q}_\eta u_\eta^n) D p_\xi y_\xi^n - b(\bar{q}_\eta u_\eta^{n+1}) D p_\xi y_\xi^{n+1}) + \varphi(\bar{q}_\eta u_\eta^n) - \varphi(\bar{q}_\eta u_\eta^{n+1})), p_\xi v_\xi) = 0$$

$$\forall v_\xi \in V_\xi$$

d'autre part :

$$(31) \quad b(\bar{q}_\eta u_\eta^n) D p_\xi y_\xi^n - b(\bar{q}_\eta u_\eta^{n+1}) D p_\xi y_\xi^{n+1} = (b(\bar{q}_\eta u_\eta^n) - b(\bar{q}_\eta u_\eta^{n+1})) D p_\xi y_\xi^n$$

$$+ b(\bar{q}_\eta u_\eta^{n+1})(D p_\xi(y_\xi^n - y_\xi^{n+1}))$$

$$(32) \quad \theta_\xi^n = (b(\bar{q}_\eta u_\eta^n) - b(\bar{q}_\eta u_\eta^{n+1})) D p_\xi y_\xi^n + \varphi(\bar{q}_\eta u_\eta^n) - \varphi(\bar{q}_\eta u_\eta^{n+1}) \geq 0$$

Posons :

$$z_\xi^n = y_\xi^n - y_\xi^{n+1}$$

(30) (31) (32)  $\Rightarrow$

$$(33) \quad a(p_\xi z_\xi^n, p_\xi v_\xi) + \lambda(p_\xi z_\xi^n, p_\xi v_\xi) - (q_\eta s_\eta b(\bar{q}_\eta u_\eta^{n+1}) D p_\xi z_\xi^n, p_\xi v_\xi) = (\theta_\xi^n, p_\xi v_\xi)$$

$$\forall v_\xi \in V_\xi \quad \text{avec } \theta_\xi^n \geq 0$$

(33) se réécrit.

$$(34) \quad A_{\xi, n}^{u^{n+1}} z_{\xi}^n = \theta_{\xi}^n \quad \theta_{\xi}^n \geq 0$$

Montrons que  $z_{\xi}^n > 0$

Multiplications (34) par  $z_{\xi}^{n-}$

$$(35) \quad z_{\xi}^{n-} A_{\xi, n}^{u^{n+1}} z_{\xi}^n = -z_{\xi}^{n-} A_{\xi, n}^{u^{n+1}} z_{\xi}^{n-} + z_{\xi}^{n-} A_{\xi, n}^{u^{n+1}} z_{\xi}^{n+} = [\theta_{\xi}^n, z_{\xi}^{n-}]$$

Or l'hypothèse (29) :

$$z_{\xi}^{n-} A_{\xi, n}^{u^{n+1}} z_{\xi}^{n+} \leq 0$$

d'autre part la coercivité de  $A_{\xi, n}^{u^{n+1}}$  entraîne :

$$z_{\xi}^{n-} A_{\xi, n}^{u^{n+1}} z_{\xi}^{n-} \geq \alpha \| p_{\xi} z_{\xi}^{n-} \|_V^2$$

L'injectivité de  $p_{\xi}$  assure alors que (35) est vérifiée si et seulement si  $z_{\xi}^{n-} = 0$  d'où le résultat.

b) La suite  $\{y_{\xi}^n\}$  reste dans un borné de  $V_{\xi}$

$$(26) \implies \exists c > 0$$

$$c \| p_{\xi} y_{\xi}^n \|_V \leq \| 1 \|_V + \| q_{\eta} s_{\eta} \varphi(u_n) \|_H$$

or

$$(36) \quad \| q_{\eta} s_{\eta} \|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq M_1$$

$\varphi(u) \leq M$  indépendant de  $u$ .

L'injectivité de  $p_{\xi}$  donne alors le résultat.

c)  $y_\xi^n \dashrightarrow y_\xi^*$  solution du problème (10)

.  $y_\xi^n$ , étant une suite décroissante bornée de  $\mathbb{R}^n$ , converge vers un élément de  $\mathbb{R}^n$  noté  $y_\xi^*$ .

.  $p_\xi$  étant un opérateur continu de  $V_\xi \dashrightarrow V$

$Dp_\xi y_\xi^n \dashrightarrow Dp_\xi y_\xi^*$  dans  $H$

.  $\Pi_n$  étant continu comme opérateur de  $H \dashrightarrow H$

$\Pi_n(Dp_\xi y_\xi^n) \dashrightarrow \Pi_n(Dp_\xi y_\xi^*)$  dans  $H$

(26) peut se réécrire.

$$(37) a(p_\xi y_\xi^n, p_\xi v_\xi) + \lambda(p_\xi y_\xi^n, p_\xi v_\xi) - (\Pi_n(Dp_\xi y_\xi^{n-1}), p_\xi v_\xi)$$

$$- (q_n s_n b(\bar{q}_n u_n^n) (Dp_\xi y_\xi^n - Dp_\xi y_\xi^{n-1}), p_\xi v_\xi) = l(p_\xi v_\xi)$$

Or (36) et le fait que  $b(u)$  est uniformément borné en  $u$  entraîne en passant à la limite dans (37) que :

$$(38) a(p_\xi y_\xi^*, p_\xi v_\xi) + \lambda(p_\xi y_\xi^*, p_\xi v_\xi) - (\Pi_n(Dp_\xi y_\xi^*), p_\xi v_\xi) = l(p_\xi v_\xi)$$

et donc la première partie du théorème en découle.

d) Toute suite convergente de  $\{u_n^n\}$  converge vers un élément de  $J(y_\xi^*)$

. En effet l'application  $\mathbb{R} \times V_\xi \dashrightarrow \mathbb{R}$   
 $(u_n^i, y_\xi) \dashrightarrow s_n^i (b(\bar{q}_n u_n^i) Dp_\xi y_\xi + \varphi(\bar{q}_n u_n^i))$

est continue.

.  $s_n^i$  est fermé borné dans  $W_n$  donc compact et donc EKELAND [7]  
 l'application  $y_\xi \rightarrow J(y_\xi)$  est s.C.s d'où le résultat.

### 8. - TESTS NUMERIQUES

#### 1 - Exemple 1

Soit l'ouvert  $\Omega = ]0, 1[$

$$\mathcal{U} = [m, 0] \quad m < -2\lambda$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda y - \Delta y - \min_{u \in \mathcal{U}} \left[ u \frac{\partial y}{\partial x} + u^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1) = -2\lambda \end{array} \right.$$

(38) se discrétise en utilisant (25).

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_\xi^0 \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{\lambda}{3} \right) + y_\xi^1 \left( \frac{-1}{\xi^2} + \frac{\lambda}{6} \right) - \frac{1}{2} \min_{u_\xi^0} \left( \frac{y_\xi^1 - y_\xi^0}{\xi} u_\xi^0 + u_\xi^0^2 \right) = 0 \\ y_\xi^{j-1} \left( \frac{-1}{\xi^2} + \frac{\lambda}{6} \right) + y_\xi^j \left( \frac{2\lambda}{3} + \frac{2}{\xi^2} \right) + y_\xi^{j+1} \left( \frac{-1}{\xi^2} + \frac{\lambda}{6} \right) - \frac{1}{2} \min_{u_\xi^{j-1}} \left( \frac{y_\xi^j - y_\xi^{j-1}}{\xi} u_\xi^{j-1} + u_\xi^{j-1}^2 \right) = 0 \\ - \frac{1}{2} \min_{u_\xi^j} \left( \frac{y_\xi^{j+1} - y_\xi^j}{\xi} u_\xi^j + u_\xi^j^2 \right) = 0 \\ y_\xi^{n-1} \left( \frac{-1}{\xi^2} + \frac{\lambda}{6} \right) + y_\xi^n \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{\lambda}{3} \right) - \frac{1}{2} \min_{u_\xi^{n-1}} \left( \frac{y_\xi^n - y_\xi^{n-1}}{\xi} + u_\xi^{n-1} + u_\xi^{n-1}^2 \right) = \frac{-2\lambda}{3} \end{array} \right.$$

(39) a pour solution :

$$y = -\lambda x^2 - 2$$

$$u = -x\lambda$$

en effet (39) est équivalent au problème suivant :

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda y - \Delta y + \frac{1}{4} \frac{\partial y^2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1) = -2\lambda \end{array} \right.$$

Résultat numérique pour  $\lambda = 1$

i	y	$ y_{\xi}^i - y(i_{\xi}) $	u
0	-2.00	0.278E-2	0.05
1	-2.01	0.279E-2	0.15
2	-2.04	0.282E-2	0.25
3	-2.09	0.286E-2	0.35
4	-2.16	0.293E-2	0.45
5	-2.25	0.302E-2	0.549
6	-2.36	0.312E-2	0.649
7	-2.49	0.324E-2	0.749
8	-2.64	0.337E-2	0.849
9	-2.81	0.352E-2	0.949
10	-3	0.368E-2	

Si l'on fait la différence entre  $u_{\xi}^i$  et  $u(i\xi + \frac{\xi}{2})$  on obtient une erreur de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Pour un test de l'ordre de  $10^{-10}$ , pour la norme  $L_1$  de la différence de deux itérés successifs, de l'algorithme décrit au paragraphe précédent 4 itérations ont été nécessaires. Chaque itération coûte la résolution d'un système linéaire de dimension  $n$  et la résolution de  $n-1$  minimisations en dimension 1.

## 2 - Exemple 2

On fait ici un test en dimension 2, le contrôle étant lui même en dimension 2.

$$\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda y + \Delta y + \min_{u_1, u_2} \{ u_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} + u_1^2 + u_2^2 \} + g(x) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec } g(x) = (\lambda + 2\pi^2) \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 + \frac{1}{4} \pi^2 (\cos^2 \pi x_2 + \cos^2 \pi x_1)$$

La solution analytique de ce problème est :

$$V = \cos \pi x_1 \cos \pi x_2$$

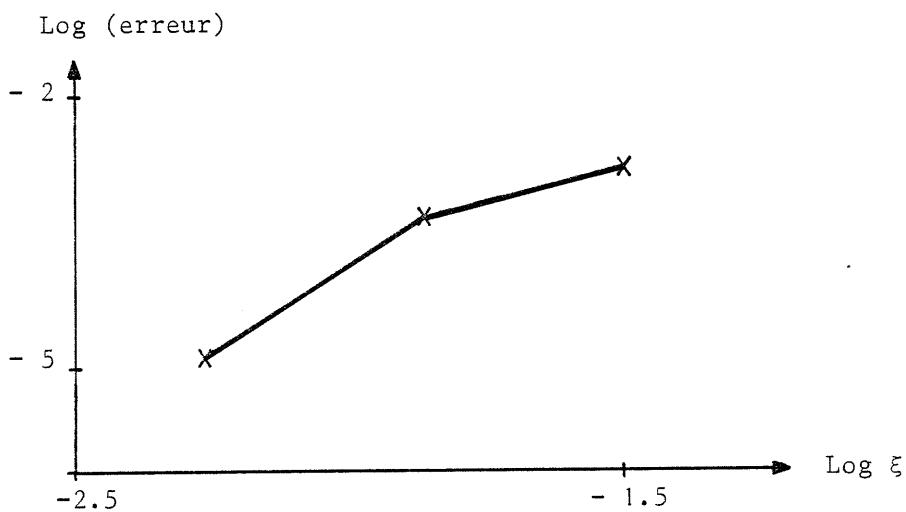
Pour un pas de discrétisation de  $1/10$  nous donnons les tableaux respectifs des erreurs pour la solution et les 2 composantes du contrôle.

1.49E-2	1.43E-2	1.22E-2	9.04E-3	4.94E-3	2.98E-4	-4.45E-3	-8.81E-3	-1.23E-2	-1.46E-2	-1.54E-2
1.43E-2	1.36E-2	1.17E-2	8.59E-3	4.67E-3	2.48E-4	-4.26E-3	-8.39E-3	-1.17E-2	-1.39E-2	-1.46E-2
1.22E-2	1.17E-2	9.95E-3	7.28E-3	3.89E-3	1.17E-4	-3.69E-3	-7.16E-3	-9.92E-3	-1.17E-2	-1.23E-2
9.04E-3	8.59E-3	7.28E-3	5.25E-3	2.72E-3	-4.56E-5	-2.78E-3	-5.23E-3	-7.16E-3	-8.39E-3	-8.81E-3
4.94E-3	4.67E-3	3.89E-3	2.72E-3	1.31E-3	-1.77E-4	-1.58E-3	-2.78E-3	-3.69E-3	-4.26E-3	-4.45E-3
2.98E-4	2.48E-4	1.17E-4	-4.56E-5	-1.77E-4	-2.27E-4	-1.77E-4	-4.56E-5	-1.17E-4	-2.48E-4	-2.98E-4
-4.45E-3	-4.26E-3	-3.69E-3	-2.78E-3	-1.58E-3	-1.77E-4	1.31E-3	2.72E-3	3.89E-3	4.67E-3	4.94E-3
-8.81E-3	-8.39E-3	-7.16E-3	-5.23E-3	-2.78E-3	-4.56E-5	2.72E-3	5.25E-3	7.28E-3	8.59E-3	9.04E-3
-1.23E-2	-1.17E-2	-9.92E-3	-7.16E-3	-3.69E-3	1.17E-4	3.89E-3	7.28E-3	9.95E-3	1.17E-2	1.22E-2
-1.46E-2	-1.39E-2	-1.17E-2	-8.39E-3	-4.26E-3	2.48E-4	4.67E-3	8.59E-3	1.17E-2	1.36E-2	1.43E-2
-1.54E-2	-1.46E-2	-1.23E-2	-8.81E-3	-4.45E-3	2.98E-4	4.94E-3	9.04E-3	1.22E-2	1.43E-2	1.49E-2

ERREUR SUR Y

-5.83E-4	-1.62E-3	-2.32E-3	-2.58E-3	-2.41E-3	-1.96E-3	-1.39E-3	-8.54E-4	-4.34E-4	-1.29E-4
-4.56E-4	-1.28E-3	-1.88E-3	-2.16E-3	-2.12E-3	-1.84E-3	-1.42E-3	-9.71E-4	-5.49E-4	-1.76E-4
-2.44E-4	-7.12E-4	-1.12E-3	-1.42E-3	-1.59E-3	-1.59E-3	-1.42E-3	-1.12E-3	-7.13E-4	-2.44E-4
-1.21E-5	8.09E-5	2.59E-4	-5.49E-4	-8.88E-4	-1.17E-3	-1.28E-3	-1.17E-3	-8.15E-4	-2.92E-4
1.75E-4	4.41E-4	4.90E-4	2.78E-4	1.29E-4	5.83E-4	-9.10E-4	-9.78E-4	-7.46E-4	-2.78E-4
2.78E-4	7.46E-4	9.78E-4	9.10E-4	5.83E-4	1.29E-4	2.78E-4	4.90E-4	4.41E-4	1.75E-4
2.92E-4	8.15E-4	1.17E-3	1.28E-3	1.17E-3	8.88E-4	5.49E-4	2.59E-4	8.09E-5	1.21E-5
2.44E-4	7.13E-4	1.12E-3	1.42E-3	1.42E-3	1.59E-3	1.59E-3	1.42E-3	7.12E-4	2.44E-4
1.76E-4	5.49E-4	9.71E-4	1.42E-3	1.84E-3	2.12E-3	2.16E-3	1.88E-3	1.28E-3	4.56E-4
1.29E-4	4.34E-4	8.54E-4	1.39E-3	1.96E-3	2.41E-3	2.58E-3	2.32E-3	1.62E-3	5.83E-4
-5.83E-4	-4.56E-4	-2.44E-4	-1.21E-5	1.75E-4	2.78E-4	2.92E-4	2.44E-4	1.76E-4	1.29E-4
-1.62E-3	-1.28E-3	-1.12E-4	-8.09E-5	4.41E-4	7.46E-4	8.15E-4	7.13E-4	5.49E-4	4.34E-4
-2.32E-3	-1.88E-3	-1.12E-3	-2.59E-4	4.90E-4	9.78E-4	1.17E-3	1.12E-3	9.71E-4	8.54E-4
-2.58E-3	-2.16E-3	-1.42E-3	-5.49E-4	2.78E-4	9.10E-4	1.28E-3	1.42E-3	1.42E-3	1.39E-3
-2.44E-3	-7.12E-3	-1.59E-3	-8.88E-4	-1.29E-4	5.83E-4	1.17E-3	1.59E-3	1.84E-3	1.96E-3
-1.96E-3	-1.84E-3	-1.59E-3	-1.17E-3	-5.83E-4	1.29E-4	8.88E-4	1.59E-3	2.12E-3	2.41E-3
-1.39E-3	-1.42E-3	-1.42E-3	-1.28E-3	-9.10E-4	-2.78E-4	5.49E-4	1.42E-3	2.16E-3	2.58E-3
-8.54E-4	-9.71E-4	-1.12E-3	-1.17E-3	-9.78E-4	-4.90E-4	2.59E-4	1.12E-3	1.88E-3	2.32E-3
-4.34E-4	-9.49E-4	-7.13E-4	-8.15E-4	-7.46E-4	-4.41E-4	8.09E-5	7.12E-4	1.28E-3	1.62E-3
-1.29E-4	-1.76E-4	-2.44E-4	-2.92E-4	-2.78E-4	-1.75E-4	1.22E-5	2.44E-4	4.56E-4	5.83E-4

Nous donnons maintenant un tableau indiquant l'évolution de l'erreur quadratique moyenne discrète en fonction du pas de discréétisation :



L'erreur est satisfaisante, la pente est d'environ 3. Or, l'erreur  $H^1(\Omega)$  étant en  $\xi$ , l'erreur  $L^2(\Omega)$  est en  $\xi^2$  par exemple CIARLET RAVIART [5]. On sait de plus DOUGLAS [6] qu'il y a super convergence aux noeuds.

#### Extrapolation de RICHARDSON

Nous avons essayé l'extrapolation de RICHARDSON sur cet exemple, à savoir :

Soit  $y_\xi$  la solution avec le pas  $\xi$ ,

Soit  $y_{\xi/2}$  la solution avec le pas  $\xi/2$ .

$$\tilde{y}_\xi = \frac{4y_\xi - y_{\xi/2}}{3}$$

L'erreur quadratique moyenne discrète de  $\tilde{y}_\xi$  est de l'ordre de  $10^{-4}$  pour des pas respectifs de  $1/10$  et  $1/5$  alors qu'elle est de l'ordre de  $10^{-2}$  pour  $y_\xi$ .

MARCHUK-SHAYDOUROV [16] donne des résultats théoriques pour d'autres équations.

3 - Exemple 3

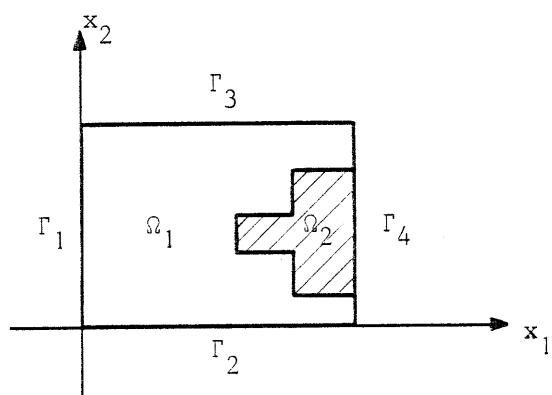
On se pose le problème de contrôle stochastique suivant : On considère le carré  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

La diffusion réfléchie contrôlée suivante :

$$dx_t^1 = u_t^1 dt + dw_t^1 + dA_t^1$$

$$dx_t^2 = u_t^2 dt + dw_t^2 + dA_t^2 - dA_t^3$$

$w_t^1$  et  $w_t^2$  indépendants.



Le contrôle  $u$  étant soumis aux contraintes :

$$U_{\min} \leq u_1 \leq U_{\max}$$

$$U_{\min} \leq u_2 \leq U_{\max}$$

On définit alors  $\tau$  comme le temps d'atteinte de la frontière  $\Gamma_4$ .

De plus on partitionne  $\Omega$  en deux zones  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On pénalisera les trajectoires passant dans  $\Omega_2$  par  $PEx$  temps passé dans  $\Omega_2$ .

Le problème consiste alors à réaliser :

$$\text{Min}_{(u_1, u_2)} E \left( \int_0^\tau PEx \mathbf{1}_{\Omega_2}(x_t) e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda \tau} \right)$$

compromis entre le temps d'atteinte de  $\Gamma_4$  et le coût de passage dans  $\Omega_2$ .

Nous donnons maintenant les résultats obtenus pour différentes valeurs des paramètres  $\lambda$ ,  $U_{\max}$ ,  $U_{\min}$ ,  $PE$ .

Les flèches dans les figures suivantes indiquent la direction du champ  $(u_1, u_2)$ , l'intensité étant toujours, à l'optimum, maximum dans la direction considérée.

#### 4 - Exemple 4

Application du contrôle stochastique à un problème de croissance de firme.

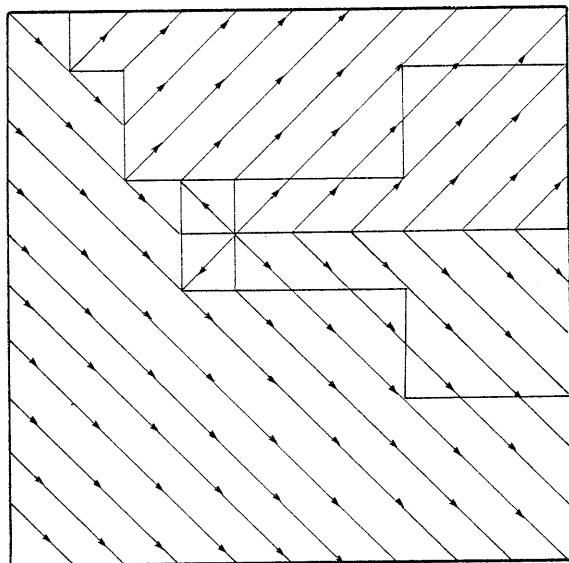
Nous donnons ici quelques résultats numériques sur un modèle de croissance de firme donné dans BENSOUSSAN LESOURNE [3].

#### Modèle

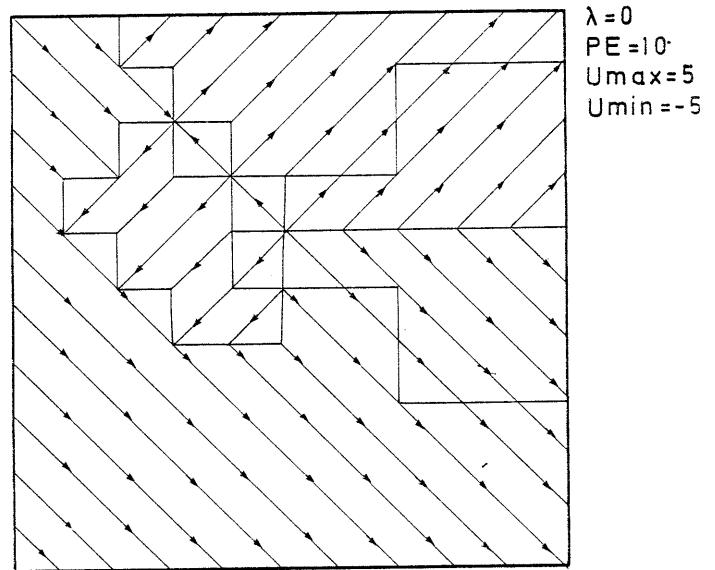
Les variables d'état sont :

$x(t)$  la trésorerie disponible à l'instant  $t$  ;

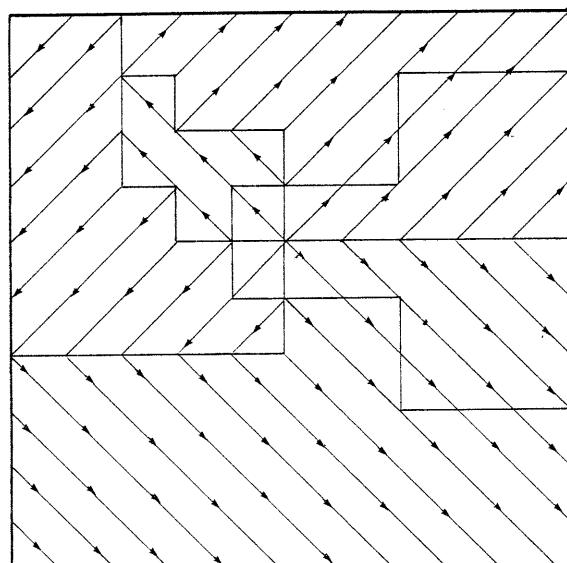
$y(t)$  capital investi à l'instant  $t$ .



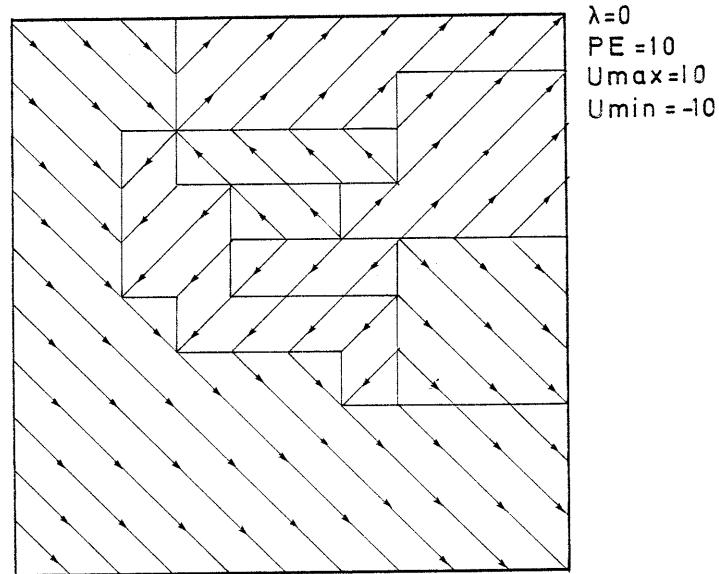
$\lambda = 0$   
PE = 10  
Umax = 1  
Umin = -1



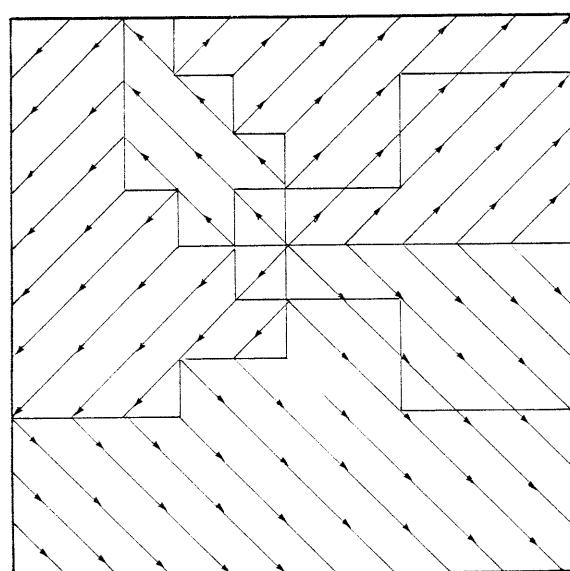
$\lambda = 0$   
PE = 10  
Umax = 5  
Umin = -5



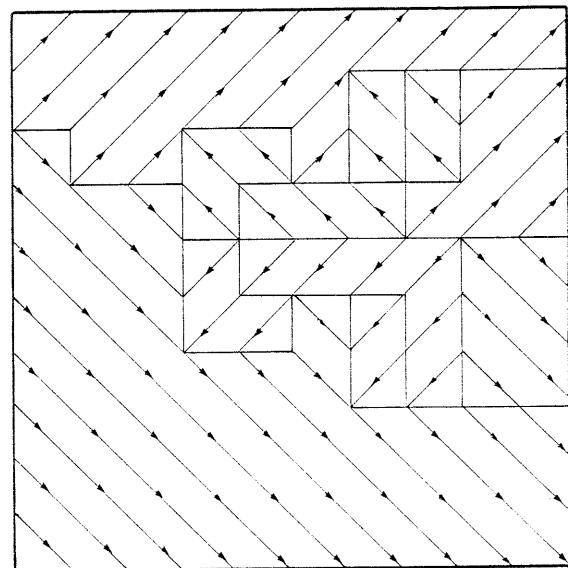
$\lambda = 0$   
PE = 100  
Umax = 1  
Umin = -1



$\lambda = 0$   
PE = 10  
Umax = 10  
Umin = -10



$\lambda = 0$   
PE = 105  
Umax = 1  
Umin = -1



$\lambda = 0$   
PE = 10  
Umax = 20  
Umin = -20

Les variables de contrôle sont :

$v(t)$  l'investissement par unité de temps ;

$w(t)$  dividendes distribués aux actionnaires.

Les contraintes :

$v \geq 0$  il est interdit de revendre le capital investi ;

$w \geq 0$  les dividendes sont toujours  $> 0$ .

Les équations d'évolution :

$$\begin{cases} dy_t = vdt \\ dx_t = (\lambda dt + \varepsilon dB_t) f(y_t) - (v_t + w_t)dt. \end{cases}$$

$(\lambda dt + \varepsilon dB_t) f(y_t)$  représente les dividendes rapportés par le capital investi qui sont supposés stochastiques ( $B_t$  est un brownien), à rendement décroissant  $f(y)$  du type  $1-\alpha e^{-\beta y}$

Les conditions initiales  $y_0$  et  $x_0$ .

On définit alors le temps d'arrêt (faillite) :

$$\tau = \inf(t: x(t) < 0)$$

On se pose alors le problème de la maximisation des dividendes versés :

$$\max_{v,w} J = E \int_0^\tau e^{-it} w(t) dt$$

sous la contrainte  $v_t + w_t \leq \lambda f(y_t)$  investissement + dividendes versés  $\leq$  dividendes moyens reçus.

On fait alors le changement de variables :

$$y_1 = f(y)$$

$$y_1 \epsilon]^{1-\alpha, 1[} \quad \text{et } y = \frac{-1}{\beta} \log \frac{1-y}{\alpha}$$

Le problème de contrôle se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \beta(1-y_1)v \\ \dot{x} = (\lambda + \varepsilon v)y_1 - v - w \quad v_t \text{ bruit blanc} \\ \text{Min} \int_0^{\tau} e^{-it} w dt \\ v \geq 0 \\ w \geq 0 \\ v+w \leq \lambda y_1 \end{array} \right.$$

L'équation de BELLMAN s'écrit :

$$-iV + \frac{\varepsilon^2}{2} y_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \lambda y_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \max_v \{ \beta \frac{\partial V}{\partial y_1} (1-y_1)v - \frac{\partial V}{\partial x} (v+w) + w \} = 0 ;$$

$$v(0, y_1) = 0$$

Faisons les changements de variable successifs suivants : (leur but étant de ne faire apparaître que des nombres sans dimension dans l'équation de BELLMAN).

Posons :

$$x_1 = 1 - e^{-x} \frac{\sqrt{i}}{\varepsilon} \quad x = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{i}} \log(1-x_1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{iV}{\lambda}$$

$$v_1 = \frac{v}{\lambda}$$

$$w_1 = \frac{w}{\lambda}$$

$$\Pi_1 = \frac{\lambda \beta}{i}$$

$$\Pi_2 = \frac{\lambda}{\varepsilon \sqrt{i}}$$

L'équation de BELLMAN devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -U + y_1^2(1-x_1)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial U}{\partial x_1} (1-x_1)y_1(\Pi_2 - y_1) + \max_{\substack{v_1 \geq 0 \\ v_1 + w_1 \leq y_1}} \frac{\partial U}{\partial x_1} \Pi_1 v_1 (1-y_1) \\ - \frac{\partial U}{\partial x_1} (1-x_1)(v_1 + w_1)\Pi_2 + w_1 = 0 \\ \\ U(0, y_1) = 0 \end{array} \right.$$

en effectuant les minimisations, on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} (1-y_1)\Pi_1 \geq \max\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} (1-x_1)\Pi_2, 1\right) \Rightarrow v_1 = y_1 \quad w_1 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} (1-x_1)\Pi_2 \geq \max(1, \frac{\partial U}{\partial y_1} (1-y_1)\Pi_1) \Rightarrow v_1 = 0 \quad w_1 = 0$$

$$1 \geq \max\left(\frac{\partial U}{\partial y_1} (1-y_1)\Pi_1, \frac{\partial U}{\partial x_1} (1-x_1)\Pi_2\right) \Rightarrow w_1 = y_1 \quad v_1 = 0$$

En supprimant les indices 1 on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -U + y^2(1-x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} (1-x)y^2 + y \max(1, \frac{\partial U}{\partial x} (1-x)\Pi_2, \frac{\partial U}{\partial y} (1-y)\Pi_1) = 0 \\ U(0, y) = 0 \\ \text{sur } 0 < x < 1 \\ 1-\alpha < y < 1 \end{array} \right.$$

Cas particulier  $\Pi_1 = 0$      $\Pi_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} -U + y^2(1-x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} (1-x)y^2 + y = 0 \\ U(0, y) = 0 \end{array} \right.$$

Ce système s'intègre facilement ; en conservant la solution bornée on obtient :

$$U = y(1-(1-x)^{\frac{1}{y}})$$

Cette solution analytique nous sert de test pour l'intégration numérique. Avec un pas en x et en y de 1/10 on obtient le tableau d'erreur suivant :

-2.95E-24	-4.50E-2	-2.99E-2	-2.83E-2	-2.83E-2	-2.87E-2	-2.88E-2	-2.89E-2	-2.89E-2	-2.89E-2	-2.89E-2	-2.89E-2
-2.58E-21	-8.44E-5	-1.42E-3	-4.00E-3	6.05E-3	-7.22E-3	-7.67E-3	-7.76E-3	-7.74E-3	-7.73E-3	-7.74E-3	-7.74E-3
-7.42E-20	2.67E-3	4.73E-3	5.57E-3	5.28E-3	4.37E-3	3.36E-3	2.58E-3	2.17E-3	2.07E-3	2.07E-3	2.08E-3
-8.83E-19	5.81E-4	1.26E-3	1.83E-3	2.13E-3	2.06E-3	1.62E-3	9.47E-4	2.16E-4	3.53E-4	3.53E-4	5.79E-4
-5.91E-19	5.21E-4	1.10E-3	1.65E-3	2.07E-3	2.32E-3	2.34E-3	2.34E-3	2.11E-3	1.64E-3	9.97E-4	3.08E-4
-3.27E-18	2.87E-4	6.44E-4	1.03E-3	1.41E-3	1.73E-3	1.95E-3	2.02E-3	1.91E-3	1.61E-3	1.18E-3	
-9.75E-18	1.72E-4	4.01E-4	6.69E-4	9.57E-4	1.24E-3	1.51E-3	1.72E-3	1.87E-3	1.98E-3	2.91E-3	
-6.80E-18	1.86E-4	4.14E-4	6.79E-4	9.72E-4	1.28E-3	1.61E-3	1.93E-3	2.27E-3	2.75E-3	5.63E-3	
-3.62E-18	1.64E-4	-2.91E-4	-3.81E-4	-4.37E-4	-4.60E-4	-4.50E-4	-4.02E-4	-2.87E-4	-7.55E-5	4.03E-3	
-1.49E-17	-8.73E-4	-1.76E-3	-2.67E-3	-3.58E-3	-4.51E-3	-5.46E-3	-6.41E-3	-7.39E-3	8.53E-3	1.27E-2	
-1.02E-17	-2.96E-3	-5.89E-3	-8.79E-3	-1.17E-2	-1.45E-2	-1.73E-2	-2.01E-2	-2.29E-2	-2.57E-2	-2.86E-2	

Stratégie optimale (dépendance avec  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ )

c  $\Leftrightarrow$  v=w=0 ; d  $\Leftrightarrow$  v=0 w=y ; i  $\Leftrightarrow$  w=y v=0

		0	1	1.2	1.5	2	3	4
		D	D	D	D	D	D	D
0	D	DDDDDD						
	D	DDDDDD						
	D	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDC	DDDDDD	DDDDDD
	D	DDDDDD	DDDDCC	DCCCCC	DCCCCC	CCCCCC	CCCCCC	CCCCCC
1	D	DDDDDD						
	D	DDDDDD						
	D	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDC	DDDDDD	DDDDDD
	D	DDDDDD	DDDC	DCCCCC	DCCCCC	CCCCCC	CCCCCC	CCCCCC
1.5	I	IIDDD						
	I	IDDD						
	D	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDC	DDDDDD	DDDDDD
	D	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDC	DDDDCC	DDDDCC
2	I	IIDDD						
	I	IDDD						
	I	IDDD						
	D	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	DDDDDD	IDCC	IDCCC	IDCCC
3	I	IIDDD						
	I	IDDD						
	I	IDDD	IDDD	IDDD	IDDD	IDDC	IDDC	IDDC
	I	IDDD	IDDD	IDDD	IDDD	IDCC	IDCC	IDCC
4	I	IIID						
	I	IDDD						
	I	IDDD	IDDD	IDDD	IDDD	IDDC	IDDC	IDDC
	I	IDDD	IDDD	IDDD	IDDD	IDCC	IDCC	IDCC
10	I	IIID						
	I	IDDD						
	I	IDDD	IDDD	IDDD	IDDD	IDDC	IDDC	IDDC
	D	DDDDDD	DDDDDD	DDDDCC	DCCCCC	CCCCCC	CCCCCC	CCCCCC
100	I	IIID						
	I	IDDD	IDDD	IDDD	IDDD	IDDC	IDDC	IDDC
	I	IDDD	IDDD	IDDD	IDDD	IDCC	IDCC	IDCC
	I	IDDD	IDDD	IDDD	IDDD	IDCC	IDCC	IDCC

— — → Capital investi

↑  
Trésorerie

## 9. - INTERPRETATION PROBABILISTE DES PROBLEMES DISCRETISES OBTENUS

Nous supposerons ici que la propriété (29) (condition suffisante pour que le principe du maximum discret soit vrai) est vérifiée.

Autrement dit nous serons capable d'interpréter de façon probabiliste les problèmes discrétisés que dans le cas où ils satisfont au PMD (principe du maximum discret).

Commençons par formaliser un peu ces problèmes discrétisés.

On considère :

$\mathcal{U}$  compact de  $\mathbb{R}^n$ .

$$(40) \begin{array}{ccc} A: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m & \dashrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ u & & A(u) \end{array} \text{ continue}$$

avec  $A(u)$  vérifiant le PMD et non singulière  $\forall u \in \mathcal{U}$

$$(41) \begin{array}{ccc} f: \mathcal{U} & \dashrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & & f(u) \end{array} \text{ continue positive.}$$

On suppose que  $(A, f)$  satisfait à la propriété :

$$(42) \begin{array}{ccc} y \geq 0 \in \mathbb{R}^n & \text{Max}_{u \in \mathcal{U}} A(u)y - f(u) \end{array}$$

existe pour la relation d'ordre usuelle de  $\mathbb{R}^n$  et est continue comme application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui à  $y \dashrightarrow \text{Max}_{u \in \mathcal{U}} A(u)y - f(u)$ .

### Proposition 1

Sous les hypothèses (40) (41) et (42) il existe  $y$  unique positif vérifiant.

$$(43) \quad \max_u (A(u)y - f(u)) = 0$$

Démonstration

1) Existence

On reprend la démonstration de convergence de l'algorithme du chapitre 7.

2) Unicité

Soit  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de (43).

Soit alors  $u_1$  (resp.  $u_2$ )  $\operatorname{Argmax} A(u)y_1 - f(u)$  (resp.  $\operatorname{Argmax} A(u)y_2 - f(u)$ ).

On a :

$$A(u_1)y_1 - f(u_1) = 0$$

$$A(u_2)y_2 - f(u_2) = 0$$

et donc :

$$A(u_1)y_1 - A(u_2)y_2 + f(u_2) - f(u_1) = 0$$

$$A(u_1)(y_1 - y_2) + y_2(A(u_1) - A(u_2)) + f(u_2) - f(u_1) = 0$$

or :

$$A(u_2)y_2 - f(u_2) \geq A(u_1)y_2 - f(u_1)$$

ce qui prouve  $y_1 - y_2 \geq 0$

De même en intervertissant le rôle de  $y_1$  et  $y_2$  on obtient  $y_2 \geq y_1$  d'où l'unicité.



En utilisant la condition suffisante pour qu'une matrice satisfasse au PMD (annexe 2) le résultat précédent s'applique aux matrices :

$D - S^t(u)$  avec  $D$  diagonale  $> I$  (dont les éléments  $\neq 0$  sont notés  $d_k$ )  
 $S(u)$  stochastique satisfaisant à (42).

Le problème (43) s'interprète alors comme le problème de contrôle suivant :

$$\underset{u \in \mathcal{U}}{\text{Min}} E \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j \leq i} \left( \frac{1}{1+d_{k(j)}} \right) f(u)_{k(i)}$$

La loi de probabilité étant définie par la chaîne de Markov dont les états sont les indices  $k=1 \dots n$  de probabilité de transition  $S(u)$ , partant du point  $k(0) = k_0$ .

Et donc :

Les problèmes discrétisés qui possèdent la propriété (29) s'interprètent comme des problèmes de contrôle de chaîne de Markov, l'algorithme du chapitre 7 comme l'algorithme de HOWARD [20] associé.

#### Remarque

En général la propriété (42) est assurée grâce au fait que pour chaque  $i$   $S_{.i}$  (probabilités de transition) dépend de composantes différentes du contrôle. Le problème (10) bien que vérifiant (42) ne vérifie pas cette propriété de dépendance. ■

Il est alors naturel de penser que la chaîne de Markov ainsi obtenue approxime la diffusion initiale, et qu'il existe donc des méthodes purement probabilistes pour montrer la convergence des problèmes approchés vers le problème initial. KUSHNER CHEN FU YU [10] utilise cette approche pour des diffusions arrêtées et pour des discrétisations du type différence finie. Montrons que cette méthode s'applique ici également. Nous le ferons sur l'exemple du chapitre 6 diffusion réfléchie en dimension 1, approximation par éléments finis.

Reprendons donc l'exemple du chapitre 6 avec  $f = 0$ ,  $g = 0$ .

Notons :

$$a_{\xi}^i = \frac{1}{\xi} \int_{i\xi}^{(i+1)\xi} a(x) dx$$

$$b_{\xi}^i(u_{\xi}^i) = \frac{1}{\xi} \int_{i\xi}^{(i+1)\xi} b(u_{\xi}^i, x) dx$$

$$\varphi_{\xi}^i(u_{\xi}^i) = \int_{i\xi}^{(i+1)\xi} (u_{\xi}^i, x) dx$$

Les équations (25<sup>2</sup>) se réécrivent.

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{\xi}^0 \left( \frac{a_{\xi}^0}{\xi} + \frac{\lambda \xi}{3} \right) + y_{\xi}^1 \left( \frac{-a_{\xi}^0}{\xi} + \frac{\lambda \xi}{6} \right) - 1/2 \min_{u_{\xi}^0} ((y_{\xi}^1 - y_{\xi}^0) b_{\xi}^0(u_{\xi}^0) + \varphi_{\xi}^0(u_{\xi}^0)) = 0 \\ \\ y_{\xi}^{i-1} \left( \frac{-a_{\xi}^{i-1}}{\xi} + \frac{\lambda \xi}{6} \right) + y_{\xi}^i \left( \frac{a_{\xi}^{i-1}}{\xi} + \frac{a_{\xi}^i}{\xi} + 2 \frac{\lambda \xi}{3} \right) + y_{\xi}^{i+1} \left( \frac{-a_{\xi}^i}{\xi} + \frac{\lambda \xi}{6} \right) \\ - 1/2 \min_{u_{\xi}^{i-1}} ((y_{\xi}^i - y_{\xi}^{i-1}) b_{\xi}^{i-1}(u_{\xi}^{i-1}) + \varphi_{\xi}^{i-1}(u_{\xi}^{i-1})) \\ - 1/2 \min_{u_{\xi}^i} ((y_{\xi}^{i+1} - y_{\xi}^i) b_{\xi}^i(u_{\xi}^i) + \varphi_{\xi}^i(u_{\xi}^i)) = 0 \\ \\ y_{\xi}^{n-1} \left( \frac{-a_{\xi}^{n-1}}{\xi} + \frac{\lambda \xi}{6} \right) + y_{\xi}^n \left( \frac{a_{\xi}^{n-1}}{\xi} + \frac{\lambda \xi}{3} \right) - 1/2 \min_{u_{\xi}^{n-1}} ((y_{\xi}^n - y_{\xi}^{n-1}) b_{\xi}^{n-1}(u_{\xi}^{n-1}) + \varphi_{\xi}^{n-1}(u_{\xi}^{n-1})) = 0 \end{array} \right.$$

Définissons la matrice stochastique  $S_i^{\xi, \omega}(u_{\xi})$  par :

$$S_{i,i-1}^{\xi, \omega}(u_{\xi}) = \frac{\frac{a_{\xi}^{i-1}}{\xi} - \frac{\lambda \xi}{6} - 1/2 b_{\xi}^{i-1}(u_{\xi}^{i-1})}{\frac{a_{\xi}^{i-1}}{\xi} + \frac{a_{\xi}^i}{\xi} + \frac{\omega}{\omega}}$$

$$S_{i,i}^{\xi, \omega}(u_{\xi}) = \frac{\frac{\omega}{\omega} + \frac{\lambda \xi}{3} - 1/2(b_{\xi}^i(u_{\xi}^i) - b_{\xi}^{i-1}(u_{\xi}^{i-1}))}{\frac{a_{\xi}^{i-1}}{\xi} + \frac{a_{\xi}^i}{\xi} + \frac{\omega}{\omega}}$$

$$S_{i,i+1}^{\xi, \omega}(u_{\xi}) = \frac{\frac{a_{\xi}^i}{\xi} - \frac{\lambda \xi}{6} + 1/2 b_{\xi}^i(u_{\xi}^i)}{\frac{a_{\xi}^{i-1}}{\xi} + \frac{a_{\xi}^i}{\xi} + \frac{\omega}{\omega}}$$

$$S_{o,o}^{\xi, \omega}(u_{\xi}) = \frac{\frac{\omega}{\omega} + \frac{\lambda \xi}{6} - 1/2 b_{\xi}^o(u_{\xi}^o)}{\frac{a_{\xi}^o}{\xi} + \frac{\omega}{\omega}}$$

$$S_{o,1}^{\xi, \omega}(u_{\xi}) = \frac{\frac{a_{\xi}^o}{\xi} - \frac{\lambda \xi}{6} + 1/2 b_{\xi}^o(u_{\xi}^o)}{\frac{a_{\xi}^o}{\xi} + \frac{\omega}{\omega}}$$

$$S_{n,n}^{\xi, \omega}(u_{\xi}) = \frac{\frac{\omega}{\omega} + \frac{\lambda \xi}{6} + 1/2 b_{\xi}^{n-1}(u_{\xi}^{n-1})}{\frac{a_{\xi}^{n-1}}{\xi} + \frac{\omega}{\omega}}$$

$$S_{n-1, n}^{\xi, \omega}(u_\xi) = \frac{\frac{a_\xi^{n-1}}{\xi} - \frac{\lambda \xi}{6} - 1/2 b_\xi^{n-1}(u_\xi^{n-1})}{\frac{a_\xi^{n-1}}{\xi} + \frac{\omega}{\xi}}$$

On remarque que  $\tilde{S}_{n-1, n}^{\xi, \omega}(u_\xi)$  ainsi définie est bien stochastique. D'autre part (44) se réécrit :

$$\max_{u_\xi} ((1 + \tilde{\lambda}_{\xi, \omega}) I - S(u_\xi)) y - f_{n-1}^{\xi, \omega}(u_\xi) = 0$$

avec  $f_i^{\xi, \omega}(u_\xi)$  et  $\tilde{\lambda}_{\xi, \omega}$  définis par :

$$f_i^{\xi, \omega}(u_\xi) = \frac{1/2 \varphi_{\xi}^{i-1}(u_\xi^{i-1}) + 1/2 \varphi_{\xi}^i(u_\xi^i)}{\frac{a_\xi^{i-1}}{\xi} + \frac{a_\omega^i}{\xi} + \frac{\omega}{\xi}}$$

$$f_0^{\xi, \omega}(u_\xi) = \frac{1/2 \varphi_{\xi}^0(u_\xi^0)}{\frac{a_\xi^0}{\xi} + \frac{\omega}{\xi}}$$

$$f_n^{\xi, \omega}(u_\xi) = \frac{1/2 \varphi_{\xi}^{n-1}(u_\xi^{n-1})}{\frac{a_\xi^{n-1}}{\xi} + \frac{\omega}{\xi}}$$

$$\tilde{\lambda}_i^{\xi, \omega} = \frac{\lambda \xi^2}{a_\omega^{i-1} + a_\xi^i + \omega}$$

$$\hat{\lambda}_{\xi}^0, \omega = \frac{\lambda \xi^2}{a_{\xi}^0 + \omega}$$

$$\hat{\lambda}_{\xi}^n, \omega = \frac{\lambda \xi^2}{a_{\xi}^n + \omega}$$

On considère la chaîne de Markov  $X_j$  de probabilité de transition  $s^{\xi, \omega}(u_\xi)$  et d'états  $[0, \xi, 2\xi, \dots, n\xi]$ .

Nousoublieronsdanslasuite,lorsqu'iln'yapasd'ambiguité,lesindices  
 $\xi$  et  $\omega$ . Notons :

$$\bar{b}_\xi^i(u_\xi) = \frac{1}{\xi^2} E^{X_j=i\xi} (X_{j+1} - X_j) = (\xi s_{i,i+1} - \xi s_{i,i-1})/\xi^2$$

$$= \frac{\frac{1}{\xi}(a_\xi^i - a_\xi^{i-1}) + 1/2b_\xi^i(u_\xi^i) + 1/2b_\xi^{i-1}(u_\xi^{i-1})}{a_\xi^{i-1} + a_\xi^i + \omega}$$

$$\bar{a}_\xi^i(u_\xi) = \frac{1}{\xi^2} E^{X_j=i\xi} (X_{j+1} - X_j)^2 = \frac{(a_\xi^{i-1} + a_\xi^i) + \frac{\lambda \xi^2}{3} + (b_\xi^i - b_\xi^{i-1})\xi}{a_\xi^{i-1} + a_\xi^i + \omega}$$

$$\Delta_\xi^i(u_\xi) = \frac{1}{\xi^2} E^{X_j=i} (|X_{j+1} - X_j|^3) = \xi \bar{a}_\xi^i(u_\xi)$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$\bar{b}_\xi^0(u_\xi) = \frac{a_\xi^0}{\xi} - \frac{\lambda \xi}{6} + 1/2b_\xi^0$$

$$\bar{a}_\xi^0(u_\xi) = \xi \bar{b}_\xi^0$$

$$\Delta_\xi^0(u_\xi) = \xi^2 \bar{b}_\xi^0$$

$$\bar{b}_\xi^n(u_\xi) = - \frac{\frac{a_\xi^{n-1}}{\xi} - \frac{\lambda_\xi}{6} - 1/2 b_\xi^{n-1}}{a_\xi^{n-1} + \omega}$$

$$a_\xi^n(u_\xi) = -\xi \bar{b}_\xi^n$$

$$\Delta_\xi^n(u_\xi) = -\xi^2 \bar{b}_\xi^n$$

On définit alors les fonctions  $\bar{a}, \bar{b}, \Delta$  de  $\mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$  par interpolation des coefficients  $\bar{a}^i, \bar{b}^i, \Delta^i$ .

#### Remarque 1

Notons :

$$\rho_{\xi, u_\xi}(\theta i \xi + (1-\theta)(i+1)\xi, \xi \theta. + (1-\theta)\xi.) = \theta S_{., i} + (1-\theta)S_{., i+1}$$

Les fonctions  $\bar{a}_{\xi, u_\xi}^\xi$  (resp.  $\bar{b}_{\xi, u_\xi}^\xi$ ) (resp.  $\Delta_{\xi, u_\xi}^\xi$ ) s'interprètent comme  $\int (y-x) \rho_{\xi, u_\xi}(x, dy)$  (resp  $\int (y-x)^2 \rho_{\xi, u_\xi}(x, dy)$ ) (resp  $\int |(y-x)|^3 \rho_{\xi, u_\xi}(x, dy)$ ). ■

On note  $P_T^{\xi, u_\xi}$  la mesure sur  $D(0, T; [0, 1])$  engendrée par le processus de Markov  $X_{\xi, u_\xi}(t)$  constant par morceaux ( $X_{\xi, u_\xi}(t) = X_{\xi, u_\xi}^\xi((t/\xi^2) + 1)\xi^2$ ) les probabilités de transition étant  $\rho_{\xi, u_\xi}$  et  $X_{\xi, u_\xi}^0(o) = x_o$ .

On a le :

Théorème 5

La suite  $P_T^{\xi, u_\xi}$  est étroitement relativement compacte comme mesures sur  $D(0, T; [0, 1])$ .  
De plus toute limite de  $P_T^{\xi, u_\xi}$  lorsque  $\xi \rightarrow 0$  à son support contenu dans  $C(0, T; (0, 1))$ .

Démonstration

Il suffit de remarquer que :

$$\limsup_{\xi \rightarrow 0} \sup_x \Delta^{\xi, u_\xi}(x) \rightarrow 0$$

et d'appliquer le théorème 6.1. de STROOK VARADHAN [18]. ■

Supposons que :

$b(x, u)$  est uniformément lipschitzienne en  $x$  et  $u$ ,

$a(x)$  est  $C^1$  et de dérivée uniformément lipschitzienne,

$(\xi_n, u_n) \rightarrow (0, u)$  où  $u \in \mathcal{U}$  ensemble des fonctions uniformément lipschitziennes de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\xi_n \in \mathbb{R}$ .

On a alors les majorations suivantes :

$\exists k$  indépendante de  $n$  telle que :

$$\sup_x \left| \overline{a}_{\xi_n} - \frac{2a(x)}{2a(x) + \omega} \right| \leq k \xi_n$$

$$\sup_x |\bar{b}_{\xi_n}, \bar{q}_{\xi_n} \bar{s}_{\xi_n} u_n(x) - \frac{a'(x) + b(x, u(x))}{2a(x) + \omega}| \leq k(\xi_n + \sup_x |u_n(x) - u(x)|)$$

Et donc lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

$$\bar{a}_{\xi_n}, \bar{q}_{\xi_n} \bar{s}_{\xi_n} u_n \rightharpoonup \frac{2a}{2a + \omega} \quad \text{uniformément en } x$$

$$\bar{b}_{\xi_n}, \bar{q}_{\xi_n} \bar{s}_{\xi_n} u_n \rightharpoonup \frac{a' + b(., u(.))}{2a + \omega} \quad \text{uniformément en } x$$

$$\text{SI } x_0^{\xi_n} \rightharpoonup x_0 \text{ on a alors :}$$

Théorème 6 - STROOK VARADHAN [18] th. 6.3.

La suite  $P_T^{\xi_n}, \bar{q}_{\xi_n} \bar{s}_{\xi_n} u_n$   $\rightharpoonup P_T^u$  étroitement avec  $P_T^u$  solution du problème de surmartingale  $(x_0, \frac{a' + b(., u(.))}{2a + \omega}, \frac{2a}{2a + \omega})$  de temps passé sur la frontière nul.

#### Remarque

Le problème de surmartingale signifie ici qu'en munissant  $C(0, T; [0, 1])$  de la mesure de probabilité  $P_T^u$ , il existe  $W_t$  brownien tel que le processus canonique sur  $C(0, T; (0, 1))$  soit une diffusion réfléchie du type :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx_t = \frac{a'(x_t) + b(x_t, u(x_t))}{2a(x_t) + \omega} dt + \sqrt{\frac{2a(x_t)}{2a(x_t) + \omega}} dW_t + d\alpha_t^1 - d\alpha_t^2 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

Avec  $\alpha_t^1$  (resp.  $\alpha_t^2$ ) continus croissants, croissants strictement lorsque  $x(t) = 0$  (resp.  $x(t) = 1$ ). ■

Remarque

Si l'on effectue le changement de temps suivant :

$$d\tau = \frac{dt}{2a(x_t) + \omega}$$

et si l'on pose :

$$\sigma(x) = \sqrt{2a(x)}$$

(45) devient :

$$\left| \begin{array}{l} dx_\tau = (a'(x_\tau) + b(x_\tau, u(x_\tau))d\tau + \sigma(x_\tau)dW_\tau + d\alpha_\tau^1 - d\alpha_\tau^2 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

qui est bien la diffusion réfléchie que l'on voulait contrôler. ■

Montrons brièvement que la méthode purement probabiliste, utilisée par KUSHNER-CHEN-FU-YU [10], pour montrer la convergence du coût optimal du problème discréétisé vers celui du problème continu, s'applique ici.

Nous ferons les abus de notation suivants :

$$u_\xi = s_\xi u$$

$$X(j\xi^2) = X(j)$$

$$P_T^{\xi_n, u_n} = P_T^{\xi_n, \bar{q}_n} s_{\xi_n}^{-62} (u_n)$$

$$\lambda_i^{\xi, \omega} = \lambda_i^{\omega}$$

$$f_{s_\xi u}^{\xi, \omega} = f_u^\xi$$

Notons  $J(T, \xi, u)$  la variable aléatoire sur  $D(0, T; (0, 1))$

$$X \rightarrow J(T, \xi, u) = \sum_{i=0}^{[T/\xi^2]} \prod_{j \leq i} \left( \frac{1}{1 + \lambda_{X(j)}} \right) f_u^\xi(X(i))$$

ce qui peut se réécrire :

$$J(T, \xi, u) = \int_0^{[T/\xi^2]} \prod_{j \leq i} \left( \frac{1}{1 + \lambda_{X(j)}} \right) f_u^\xi(X(t)) dt$$

D'autre part notons  $J(T, u)$  la variable aléatoire sur  $D(0, T; (0, 1))$

$$X \rightarrow J(T, u) = \int_0^T e^{-\int_0^t \frac{\lambda}{2a(X_s) + \omega} ds} \frac{f_u(X, u(X_s)) ds}{2a(X_s) + \omega}$$

### Lemme 3

$$\boxed{E_P^T J(T, \xi, u^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{--} E_P^T J(T, u)}.$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} & |E_P^T J(T, \xi, u^n) - E_P^T J(T, u)| \leq |E_P^T [J(T, \xi, u^n) - J(T, u)]| \\ & + |E_P^T J(T, u) - E_P^T J(T, u)| \end{aligned}$$

Or  $\exists k(T) :$

$$\left| E_{P_T}^{\xi_n, u_n} [J(T, \xi, u^n) - J(T, u)] \right| \leq k(T) (\xi + \sup_n \sup_{x \in [0, l]} |u^n(x) - u(x)|)$$

D'autre part :

$$E_{P_T}^{\xi_n, u_n} J(T, u) - E_{P_T}^u J(T, u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

car :  $-P_T^{\xi_n, u_n} \xrightarrow{\text{étroitement}} P_T^u$

- la fonctionnelle  $X \rightarrow J(T, u)$  est continue bornée de  $D(0, T; (0, 1)) \rightarrow \mathbb{R}$

Le lemme montre donc que l'application  $(\xi, u) \rightarrow E_{P_T}^{\xi, u} J(T, \xi, u)$  est continue.

Et donc l'application  $\xi \rightarrow V(T, \xi) = \inf_{u \in \mathcal{U}} E_{P_T}^{\xi, u} J(T, \xi, u)$  est continue, grâce au théorème du maximum EKELAND [7].

Et donc on a :

#### Lemme 4

$$\liminf_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ u \in \mathcal{U}}} E_{P_T}^{\xi, S_\xi u} J(T, \xi, u) = \inf_u E_{P_T}^u J(T, u)$$

Montrons maintenant la convergence des coûts optimaux stationnaires.

Appelons  $\alpha = \inf a(x)$

Comme on a :  $\exists M$  indépendante de  $T$  et  $\xi$  :

$$\inf_u V(T, \xi, u) + M \left[ \frac{1}{(2\alpha + \omega)} \right]^{[T/\xi^2]} \geq \inf_u V(\infty, \xi, u) \geq \inf_u V(T, \xi, u)$$

et :

$$\inf_u V(T, u) + M e^{-(2\alpha + \omega)T} \geq \inf_u V(\infty, u) \geq \inf_u V(T, u)$$

Il vient :

$$|\inf_u V(\infty, \xi, u) - \inf_u V(\infty, u)| \leq |\inf_u V(T, \xi, u) - \inf_u V(T, u)|$$

$$+ M \sup \left( \left( \frac{1}{2\alpha + \omega} \right)^{[T/\xi^2]}, e^{-(2\alpha + \omega)T} \right) \forall T$$

et donc :

$$\inf_u V(\infty, \xi, u) \xrightarrow[\xi \rightarrow 0]{--} \inf_u V(\infty, u)$$

### Théorème 7

On a convergence du coût optimal des problèmes discréétisés vers le coût optimal du problème continu pour le problème (25) avec  $f=0$   $g=0$  lorsqu'on se restreint aux feedbacks lipschitzien uniformément sous les hypothèses.

Les fonctions  $(x, u) \rightarrow \varphi(x, u)$ ,  $b(x, u)$ ,  $a'(x)$  sont uniformément lipschitzienne,  $a(\cdot) \in C^1$

Remarque

Cette démonstration s'étend au cas où les schémas vérifient la propriété (29).

On remarque que le résultat obtenu ici est moins fort que celui obtenu par l'analyse fonctionnelle. Ici on est obligé de se restreindre à un ensemble de feedback lipschitzien pour pouvoir appliquer le théorème du maximum et le théorème de STROOK VARADHAN. Cependant certains problèmes dégénérés sont résolus par la méthode probabiliste KUSHNER CHEN FU YU [10] alors que les méthodes d'analyse fonctionnelle appliquées sont inutilisables.

Il est à remarquer que les méthodes d'analyse fonctionnelle sont plus simples lorsqu'elles s'appliquent.

Les résultats probabilistes obtenus ici sont améliorables en utilisant par exemple les techniques de la deuxième partie de cette thèse.

### CONCLUSION

Deux méthodes nous semblent possibles pour résoudre numériquement les problèmes de contrôle stochastique de diffusion :

- l'approximation de la diffusion par une chaîne de Markov KUSHNER - CHEN FU YU [10] ,
- les méthodes d'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

L'avantage de la seconde méthode (celle étudiée ici) est l'obtention aisée des majorations d'erreurs, d'une démonstration de la convergence du problème discrétilisé. Son inconvénient (au moins pour l'approximation interne) est la perte dans certain cas de la propriété 29 (elle revient à dire que le problème approximé s'interprète en terme de chaîne de Markov) assurant la convergence de l'algorithme de résolution.

Il est à remarquer également l'extrême rapidité de convergence de l'algorithme de Howard qui est beaucoup plus rapide que celui consistant à rechercher la solution asymptotique du problème évolutif associé ; ce dernier problème étant résolu par la programmation dynamique appliquée aux chaînes de Markov.

On remarque également que les résultats obtenus par l'analyse fonctionnelle sont plus forts que ceux obtenus par la méthode probabiliste. On converge dans  $H^1(\Omega)$  vers le coût optimal. La méthode probabiliste donne la convergence simple vers un coût meilleur que tous ceux obtenus au moyen de feedbacks lipschitziens KUSHNER-CHEN FU YU [10].

ANNEXE 1

Démonstration des propriétés de mesurabilité énoncées dans le lemme 1 EKELAND [7].

a)  $\Pi$  est universellement mesurable

$A \equiv \{(x, p) / \Pi(x, p) \leq \lambda\}$  est la projection sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n$  de

$$B = \{(x, p, u) / u \in \mathcal{U}(x)\} \cap \{(x, p, u) / F(x, p, u) \leq \lambda\}$$

or  $B$  est borélien comme intersection de boréliens et donc  $A$  est souslinien comme projection de borélien et donc  $\Pi$  est universellement radon mesurable.

b)  $\exists u^*(x, p)$  boréienne vérifiant  $\Pi(x, p) = F(x, u^*(x, p), p)$  up.p. où  $\mu$  désigne une mesure de radon qcq sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n$ .

Munissons  $\Omega \times \mathbb{R}^n$  d'une mesure de radon  $\mu$ , d'après a)  $\exists N$  borélien  $\mu(N) = 0$ ,  $\Pi'(x, p) = \Pi(x, p) \forall (x, p) \notin N$  avec  $\Pi(\cdot, \cdot)$  boréienne.

L'ensemble  $\Omega \times \mathbb{R}^n - N$  est borélien donc souslinien, on peut alors introduire l'ensemble :

$$C \equiv \{(x, p, u) / F(x, u, p) = \Pi'(x, p)\} \cap \{(x, p, u) / (x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n - N\} \cap \{(x, p, u) / u \in \mathcal{U}(x)\}$$

Cet ensemble est souslinien car intersection de 3 ensembles, dont les 2 premiers sont boréliens et le dernier est souslinien (lorsque  $\mathcal{U}$  est souslinienne).

Et donc si l'on désigne par  $\Sigma$  la multi-application

$$(x, p) \dashrightarrow \{u / (x, p, u) \in C\}$$

elle est de graphe souslinien et donc admet une section universellement radon mesurable  $\tilde{u} : (x, p) \rightarrow \{u / (x, p, u) \in C\}$ .

Il existe donc un borélien  $N' \mu(N') = 0$  et  $u^*(x, p)$  boréienne telle que  $u^*(x, p) = \tilde{u}(x, p) \forall (x, p) \notin N'$ .

ANNEXE 2

$\Pi : L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \dashrightarrow L^p(\Omega)$  est bien définie.

Soit  $z \in L^p(\Omega)$  admet un représentant  $\tilde{z} \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  borélien.

En notant :

$v$  la mesure de Lebesgue sur  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$

$v_z$  la mesure induite par  $\tilde{z}$  sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

i l'application identité de  $\Omega \dashrightarrow \Omega$

on a le schéma suivant :

$(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, v) \xrightarrow{(i, \tilde{z})} (\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathcal{B}_\Omega \otimes \mathcal{B}^n, v \otimes v_z)$

D'autre part  $\Pi$  est universellement radon mesurable grâce au lemme 1 et donc :  $\exists N, \Pi'$  avec  $v \otimes v_z(N) = 0$   $\Pi'$  borélienne et  $\Pi(x, p) = \Pi'(x, p) \forall x, p \notin N$  et donc

$\Pi^0(i, \tilde{z})$  est borélienne comme  $v \otimes v_z(N) = v((i, \tilde{z})^{-1}(N))$  on a le résultat. 

ANNEXE 3

PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET

(pour une étude complète des M matrices, on pourra se reporter à PLEMMONS-BERMAN [25] par exemple).

Définition 1

Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  non singulière.

On dira que A satisfait au principe du maximum discret (PMD) si  $f \geq 0$  et  $Au=f \Rightarrow u \geq 0$ . ■

Il revient au même de dire que  $A^{-1}$  envoie le cône positif de  $\mathbb{R}^n$  sur le cône positif.

Proposition 1

Une CNS pour que A satisfasse au PMD est que  $A^{-1}$  ait tous ses coefficients positifs.

La démonstration est immédiate. ■

Soit B une matrice dont tous les coefficients sont positifs, notons  $D(B)$  la matrice diagonale définie par :

$$d_{ii} = \sum_j b_{ji}$$

Alors la matrice  $S=BD^{-1}(B)$  est stochastique ( $s_{ij} \geq 0 \quad \sum_i s_{ij} = 1$ ).

Proposition 2

Une CNS pour que A satisfasse au PMD est que A se factorise sous la forme  $DS^{-1}$  avec D diagonale positive S stochastique. ■

Malheureusement cette proposition n'est pas très utilisable. Donnons maintenant une CS plus maniable qui n'est rien d'autre que la propriété (29).

Proposition 3

Une CS pour que  $A$  satisfasse au PMD est qu'elle se factorise sous la forme  $D(I-\lambda S^t)$  avec  $D$  diagonale positive,  $S$  stochastique  $\lambda < 1$

Démonstration

En effet :

$$(D(I-\lambda S^t))^{-1} = (I-\lambda S^t)^{-1} D^{-1} = \left( \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda S^t)^i \right) D^{-1}$$

et cette dernière matrice a forcément tous ses coefficients positifs. 

Remarque 1

On peut également utiliser la démonstration faite dans celle de l'algorithme du chapitre 8 pour obtenir la proposition 3. 

Utilisons cette CS pour montrer que dans le cas où la partie principale de l'opérateur est le Laplacien les matrices  $A_{\xi,\eta}^\lambda$  de la propriété (29) satisfont au PMD.

Commençons par rappeler la définition d'une matrice de rigidité d'un élément fini  $\Omega_i$  pour une forme  $a:VxV \rightarrow \mathbb{R}$ .

Appelons  $A|_{\Omega_i}$  la restriction à  $\Omega_i$  de la forme  $a$ .

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$  les vecteurs de base de  $p_\xi V_\xi$  ayant un support d'intersection non vide avec  $\Omega_i$ .

Définition 2

On appelle matrice de rigidité de l'élément  $\Omega_i$  pour la forme  $a$ , la matrice  $R^i$  nxn définie par :

$$R_{kl}^i = a|_{\Omega_i}(\varphi_k, \varphi_l) \quad k, l = 1, \dots, n$$

On remarque alors que les éléments apparaissant hors de la diagonale dans la matrice  $A_{\xi,\eta}^u$  sont des sommes d'éléments hors diagonaux des matrices de rigidité associée à la forme  $a_\lambda(y,v) - (q_\eta s_\eta F_\eta(Dy), v)$ . Et donc il suffira que toutes les matrices de rigidité aient leurs éléments hors diagonaux négatifs pour que  $A_{\xi,\eta}^u$  satisfasse au PMD.

D'autre part la contribution de la partie principale de l'opérateur est prépondérante car ses termes sont en  $\frac{1}{\xi^2}$  alors que les autres termes ont des contributions en  $\frac{1}{\xi}$ . Et donc :

Proposition 4

Une CS pour que  $A_{\xi,\eta}^u$  satisfasse au PMD pour  $\xi$  suffisamment petit est que les matrices de rigidité pour tous les éléments finis, pour la forme  $a$  (associée à la partie principale de l'opérateur) aient tous leurs éléments hors diagonaux strictement négatifs. ■

Remarque 2

Les éléments diagonaux seront strictement positifs à cause de la coercivité de  $a$ .

L'élément diagonal est dominant. ■

Nous donnons maintenant les matrices de rigidité d'un élément fini  $(0,!)^n$  (où  $n$  désigne la dimension de l'espace auquel appartient) pour la forme associée au Laplacien :

Dimension 1

1	-1
-1	1

Dimension 2

(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	
2/3	-1/6	-1/6	-1/3	(0,0)
-1/6	2/3	-1/3	-1/6	(0,1)
-1/6	-1/3	2/3	-1/6	(1,0)
-1/3	-1/6	-1/6	2/3	(1,1)

Dimension 3

(000)	(001)	(010)	(011)	(100)	(101)	(110)	(111)	
1/3	0	0	-1/12	0	-1/12	-1/12	-1/12	(000)
0	1/3	-1/12	0	-1/12	0	-1/12	-1/12	(001)
0	-1/12	1/3	0	-1/12	-1/12	0	-1/12	(010)
-1/12	0	0	1/3	-1/12	-1/12	-1/12	0	(011)
0	-1/12	-1/12	-1/12	1/3	0	0	-1/12	(100)
-1/12	0	-1/12	-1/12	0	1/3	-1/12	-1/12	(101)
-1/12	-1/12	0	-1/12	0	-1/12	1/3	0	(110)
-1/12	-1/12	-1/12	0	-1/12	-1/12	0	1/3	(111)

En dimension 4 des termes hors diagonaux positifs apparaissent. Et donc dans le cas où la partie principale de l'opérateur est le Laplacien, en dimension 1 et 2 les matrices  $A_{\xi,\eta}^u$  vérifieront le PMD, en dimension 3 la condition suffisante 3 n'est déjà plus vérifiée.

Remarque 3

Pour des opérateurs dont la partie principale s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} a_1(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} a(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

on peut donner des conditions sur le pas de discrétisation pour que la proposition 4 puisse s'appliquer.

ANNEXE 4

APPROXIMATION EXTERNE

Nous avons vu que l'approximation interne du problème à un problème approché dont on n'est pas toujours sur qu'il vérifie l'hypothèse (29) (assurant la convergence de l'algorithme de résolution du problème discret).

Nous allons construire ci-dessous une approximation externe du problème dont on saura que, pour un pas suffisamment petit, elle vérifie l'hypothèse (29). Pour cela nous utiliserons AUBIN [1].

Soit le schéma suivant :

$$\cap V_i = V \xrightarrow{\omega} \bar{V} = \Pi V \xrightarrow{C^\lambda} \bar{V}' \xrightarrow{\omega'} V'$$

$$V_i = \{y / y \in L^2(\Omega) \text{ et } D_i y \in L^2(\Omega)\} \quad V_o = L^2(\Omega)$$

$(p_\xi y_\xi)_i$  sera une fonction linéaire par morceaux pour la composante  $i$  et constante par morceaux pour les autres coordonnées où  $y_\xi \in V_\xi^N = \mathbb{R}^N$ ,  $i=1 \dots n$  ;  $(p_\xi y_\xi)_o$  constantes par morceaux  $r_\xi$  désigne la restriction optimale c'est-à-dire la projection sur  $p_\xi V_\xi$  au sens  $\bar{V}$  :

$\omega$  l'injection canonique

$\bar{V}^{C^\lambda}$  l'opérateur à approximer.

On supposera que  $(V_\xi, p_\xi, \hat{r}_\xi)$  forme une approximation externe de  $V$  c'est-à-dire :

$$\cdot (I - p_\xi \hat{r}_\xi)y \rightarrow 0 \text{ fortement } \forall \bar{y} \in \bar{V}$$

$$\cdot p_\xi y_\xi \rightarrow \bar{y} \text{ faiblement dans } \bar{V} \Rightarrow \bar{y} \in V.$$

On définit alors la forme sur  $\bar{V}$  :

$$\bar{c}^\lambda(\bar{y}, \bar{v}) = \sum_{ij} \bar{a}_{ij}(\bar{y}_i, \bar{v}_j) + \lambda(\bar{y}_o, \bar{v}_o) + (\Pi(\bar{Dy}), \bar{v})$$

avec :

$$\bar{Dy} = \begin{bmatrix} D_1 \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ D_n \bar{y}_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{ij}(y, v) = \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i y \cdot D_j v \, d\Omega$$

Définissons de même :

$$\bar{c}_\eta^\lambda(\bar{y}, \bar{v}) = \sum_{ij} \bar{a}_{ij}(\bar{y}_i, \bar{v}_j) + (\bar{y}_o, \bar{v}_o) + (\Pi_\eta(\bar{Dy}), \bar{v})$$

avec :

$$\Pi_\eta(\bar{z}) = \min_u q_\eta s_\eta F(z, \bar{q}_\eta \bar{s}_\eta u)$$

Si on définit  $\bar{l}$  par :

$$l = \omega' \bar{l}$$

on a le problème approché :

$$(10') \quad \bar{c}_\eta^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi) = \bar{l}(p_\xi^0 v_\xi) \quad \forall v_\xi \in V_\xi$$

Ce problème se réécrit :

$$\bar{c}_\xi^\lambda \bar{C} \bar{p}_\xi = \bar{C}_{n,\xi}^\lambda y_\xi = g_\xi$$

On peut alors montrer la propriété de monotonie :

$$\bar{c}_n^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi) - \bar{c}_n^\lambda(p_\xi v_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi) \geq \alpha |p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi|_{V_\xi}^2.$$

On peut également montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème approché.

#### Majoration d'erreur

Donnons maintenant une majoration de l'erreur entre la solution du problème approché et celle du problème exacte.

Remarquons que la monotonie entraîne la "stabilité" de l'approximation  $\bar{C}_{\xi,n}^\lambda$  de  $\bar{C}^\lambda$ . En effet :

$$\bar{c}_n^\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi y - p_\xi r_\xi \bar{y}) - \bar{c}_n^\lambda(p_\xi r_\xi y, p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi \bar{y}) \geq \alpha |p_\xi y - p_\xi r_\xi \bar{y}|_{V_\xi}^2$$

La définition de  $\bar{C}_n^\lambda$  entraîne :

$$(p_\xi' \bar{C}_n^\lambda p_\xi y_\xi - p_\xi' \bar{C}_n^\lambda p_\xi r_\xi \bar{y}, y_\xi - r_\xi \bar{y}) \geq \alpha |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi \bar{y}|_{V_\xi}^2 \implies$$

$$|p_\xi' \bar{C}_n^\lambda p_\xi y_\xi - p_\xi' \bar{C}_n^\lambda p_\xi r_\xi \bar{y}|_{V_\xi'} \geq \alpha |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi \bar{y}|_{V_\xi} = \alpha |y_\xi - r_\xi \bar{y}|_{V_\xi}$$

car on a muni  $V_\xi$  de la norme  $|p_\xi y_\xi|_{V_\xi} = |y_\xi|_{V_\xi}$  et  $V_\xi'$  de la norme  $|\hat{r}_\xi' y_\xi|_{V_\xi'} = |y_\xi|_{V_\xi}$

on a donc le résultat souhaité :

$$\frac{|p_\xi' \bar{C}_\eta^\lambda p_\xi y_\xi - p_\xi' \bar{C}_\eta^\lambda p_\xi r_\xi \bar{y}|}{|y_\xi - r_\xi y|_{V_\xi}} > \alpha$$

$\alpha$  indépendante de  $\xi$  et  $\eta$  (stabilité).

### Majoration de l'erreur

Soit  $y$  solution de (9),  $\bar{y} = wy$  et  $y_\xi$  solution de (10').

L'inégalité précédente se réécrit :

$$|\hat{r}_\xi' p_\xi' \bar{C}_\eta^\lambda p_\xi y_\xi - \hat{r}_\xi' p_\xi' \bar{C}_\eta^\lambda \bar{y}|_{\bar{V}}, + |\hat{r}_\xi' p_\xi' \bar{C}_\eta^\lambda \bar{y} - \hat{r}_\xi' p_\xi' \bar{C}_\eta^\lambda p_\xi r_\xi \bar{y}|_{\bar{V}}, > \alpha |p_\xi y_\xi - p_\xi r_\xi \bar{y}|_{\bar{V}}$$

$$\geq -\alpha |\bar{y} - p_\xi r_\xi \bar{y}|_{\bar{V}} + \alpha |p_\xi y_\xi - \bar{y}|_{\bar{V}}$$

$$|\hat{r}_\xi' p_\xi' \bar{1} - \hat{r}_\xi' p_\xi' \bar{C}_\eta^\lambda \bar{y}|_{\bar{V}}, + \alpha |\bar{y} - p_\xi r_\xi \bar{y}|_{\bar{V}} + |\hat{r}_\xi' p_\xi' (\Pi(\bar{D}y) - \Pi_\eta(\bar{D}p_\xi r_\xi \bar{y}))|_{\bar{V}} \geq \alpha |p_\xi y_\xi - \bar{y}|_{\bar{V}}$$

En utilisant le lemme 2 on obtient :

$$\begin{aligned} |\Pi(\bar{D}y) - \Pi_\eta(\bar{D}p_\xi r_\xi \bar{y})|_H &\leq |(I - q_\eta s_\eta) \Pi(\bar{D}y)|_H + C |\bar{y} - p_\xi r_\xi \bar{y}|_{\bar{V}} \\ &+ C \|(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)} + C \|y\|_{H^2} \|(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)} \end{aligned}$$

D'où la majoration d'erreur :

$$\begin{aligned} \alpha |\bar{y} - p_\xi y_\xi|_{\bar{V}} &\leq C |\bar{y} - p_\xi r_\xi \bar{y}|_{\bar{V}} + |\hat{r}_\xi' p_\xi' \bar{C}_\eta^\lambda \bar{y}|_{\bar{V}} + |(I - q_\eta s_\eta) \Pi(\bar{D}y)|_H \\ &+ C \|(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)} (1 + \|y\|_{H^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

Utilisant AUBIN [1] on obtient :

$$|\bar{y} - p_\xi r_\xi y|_{\bar{V}} \leq c\xi \quad \text{et} \quad |\hat{r}'_\xi p'_\xi (\bar{1} - \bar{C}^\lambda \bar{y})|_V \leq c\xi .$$

Il vient alors un résultat analogue au corollaire 4.

On peut également montrer que l'hypothèse (29) est toujours vérifiée pour un pas  $\xi$  suffisamment petit (la partie principale de l'opérateur vérifie cette hypothèse et "absorbe" les autres termes lorsque le pas décroît) pour ce type d'approximation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUBIN - Approximation of elliptic boundary value problems Wiley interscience.
- [2] BENOUSSAN FRIEDMAN - Nonlinear variationnal inequalities and differential games with stoppin times.  
Journal of fonctionnal analysis - Juillet 1974.
- [3] BENOUSSAN-LESOURNE - Un irreversible investissement Cahiers des Math. de la Décision, Paris IX, 76.
- [4] BENOUSSAN-LIONS - Application des inéquations variationnelles en contrôle stochastique. Dunod, Paris, 78.
- [5] CIARLET-RAVIART - Cours sur les éléments finis, Paris 6, 1972.
- [6] DOUGLAS - Some superconvergent result for  $H^1$  galerkin procedure for heat equation, congrès IRIA, décembre 1973.
- [7] EKELAND - Théorie des jeux, Cahier des mathématiques de la décision, Paris 9.
- [8] FLEMING - RISHEL - Optimal deterministic and stochastic control. Springer Verlag, 75.
- [9] FELLER - . The parabolic differential equations and the associated semi-group of transformations, Annals of mathematics, may 1952.  
. Diffusion process in one dimension.
- [10] KUSHNER CHEN FU YU - Approximation existence and numerical procedure for optimal stochastic control, Report 1973, Brown university.
- [11] GIKHMAN-SKOROHOD - Sochastic differential equation, Springer Verlag 1972.

- [12] LIONS - Quelques problèmes aux limites non linéaires, Dunod 1969.
- [13] LIONS - Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Presses de l'université de Montreal.
- [14] LIONS-MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes, Dunod 1968.
- [15] MANDL - One dimensionnal Markov processes, Springer Verlag 1968.
- [16] MARCHUK-SHAYDOUROV - Increase of accuracy of projective difference schemes, Congrès IRIA, décembre 1973.
- [17] RISHEL - Weak solution of a partial differential equation of dynamic programming SIAM, J. control Novembre 1971.
- [18] STROOK-VARADHAN - Diffusion process with boundary condition. Comm. on pure and applied math. 1971.
- [19] TEMAM - Analyse numérique, collection sup., Presses universitaires de France 1970.
- [20] HOWARD - Dynamic programming and Markov process M.I.T. 1960.
- [21] YVON - Contrôle optimal - Cours ENSI Toulouse.
- [22] RAVIART - Thèse Paris.
- [23] CORTEY-DUMONT - Thèse à paraître.
- [24] P.L. LIONS - Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1979.
- [25] BERMANN-PLEMMONS - Non negative matrices in mathematical Sciences, 1980.
- [26] KUSHNER - Probability methods in stochastic control and for elliptic equations. Academic Press 77.