



laboria

Institut de Recherche
d'Informatique
et d'Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105 78150 - Le Chesnay
France
Tél.: 954 90 20

laboratoire de recherche
en informatique
et automatique

**ANALYSE NUMÉRIQUE
D'INÉQUATIONS
QUASI-VARIATIONNELLES
ÉLLIPTIQUES ASSOCIÉES
A DES PROBLÈMES
DE CONTRÔLE IMPULSIONNEL**

M. GOURSAT, J. P. QUADRAT

Rapport de Recherche N° 186

Août 1976

ANALYSE NUMÉRIQUE D'INÉQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES ELLIPTIQUES ASSOCIÉES A DES PROBLEMES DE CONTROLE IMPULSIONNEL

M. Goursat, J.P. Quadrat

Résumé :

Dans une première partie nous posons l'inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V.) stationnaire associée au problème de contrôle impulsionnel en gestion de stocks. Nous faisons ensuite l'analyse numérique d'une classe d'I.Q.V. (s'interprétant en termes de contrôle impulsionnel) pour laquelle nous construisons des problèmes approchés et montrons la convergence. Dans la troisième partie nous montrons que l'I.Q.V. initiale peut être approchée par une suite d'I.Q.V. de la classe précédente. Nous donnons enfin des résultats numériques pour des exemples tests.

Abstract :

The first part is devoted to the formulation of the stationary quasi-variational inequality (Q.V.I.) related to the impulse control problem in inventory control. Then we present the numerical analysis of a class of Q.V.I. (the interpretation of which can be given in terms of impulse control) and we prove the convergence of the approximation. In the third part we show the first Q.V.I. can be approximated by a sequence of Q.V.I. in the previous class. At last we give numerical results for some test examples.

INTRODUCTION

Considérons le problème de gestion de stock dans lequel la demande est modélisée par une diffusion stochastique et dont le contrôle est le réapprovisionnement. Le problème est de minimiser le coût de gestion : coût de stockage, de rupture de stock et de réapprovisionnement. Nous supposons que le seul fait de commander entraîne un coût : il apparaît alors clairement que l'on n'aura pas intérêt à commander de façon continue. Le problème sera alors de déterminer les instants de commande et les quantités commandées à ces instants. Ce problème a fait l'objet d'études récentes (A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [3], A. BENSOUSSAN - M. GOURSAT - J.L. LIONS [4]) dans lesquelles il est montré que la résolution d'un système d'inégalités aux dérivées partielles particulier appelé inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V) donne la solution.

En fait les I.Q.V ont un intérêt beaucoup plus général car elles résolvent de nombreux problèmes :

- contrôle impulsif en économie et en mécanique : gestion de stock, contrôle de files d'attente, lancement de production, démarrage de centrales thermiques (A. BRETON - C. LEGUAY [5] ; M. GOURSAT - G. MAAREK [8] ; C. LEGUAY [13] ; M. ROBIN [15]).
- problèmes de frontière libre (C. BAILOCCHI [2]).

Nous nous proposons ici de faire l'analyse numérique du problème stationnaire. La première partie est consacrée à la position du problème. Dans la formulation obtenue intervient un opérateur non linéaire M lié à l'origine du problème. Dans la seconde partie nous construisons un problème approché dont nous montrons la convergence pour une classe d'I.Q.V (sous certaines hypothèses pour l'opérateur M). La troisième partie est l'application au problème de gestion de stocks : elle nécessite la régularisation de l'opérateur M considéré. Nous terminons par la résolution des problèmes approchés en donnant un algorithme de résolution et quelques résultats numériques.

Le plan adopté est le suivant :

1. POSITION DU PROBLEME.

1.1. Hypothèses - notations	3
1.2. Le problème de contrôle impulsif	3
1.3. L'I.Q.V à résoudre	5
1.4. Formulation précise de l'I.Q.V	7
1.5. Existence et unicité de la solution de l'I.Q.V.	9

2. APPROXIMATION D'UNE CLASSE D'I.Q.V.

2.1. Approximation et algorithme de résolution	10
2.2. Existence et unicité de la solution approchée	11
2.3. Convergence des solutions approchées	14

3. APPROXIMATION DE L'I.Q.V INITIALE - REGULARISATION.

3.1. L'I.Q.V régularisée - propriétés de l'I.Q.V régularisée.	20
3.2. Convergence de la solution de l'I.Q.V. régularisée et résultat d'approximation.	21

4. RESULTATS NUMERIQUES.

4.1. Exemple d'approximation	28
4.2. Algorithme de résolution	29
4.3. Exemples tests	29

1. POSITION DU PROBLEME.

1.1. Hypothèses - notations.

(1.1) Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ suffisamment régulière.

(1.2) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W_t)$ un mouvement brownien R^n .

(1.3) b une application $R^n \rightarrow R^n$ lipschitzienne, bornée.

(1.4) $\sigma : R^n \rightarrow \mathcal{L}(R^n, R^n)$ de classe C^1 , telle que $\forall \xi \in R^n$

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{avec} \quad \alpha \geq \alpha_0 > 0$$

$$a_{ij} \text{ défini par } a_{ij} = (\frac{1}{2} \sigma \sigma^*)_ij$$

(1.5) $\gamma(x) = a(x) n(x)$ pour $x \in \Gamma$ un champ de vecteurs où $n(x)$ désigne la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de l'ouvert Ω .

On note alors $x(t)$ la diffusion réfléchie définie par :

(1.6) $dx(t) = b(x(t))dt + \sigma(x(t))dW_t - \gamma(x(t)) d\eta_t$

(1.7) $x(0) = x_0 \in \bar{\Omega}$

où η_t est un processus croissant continu, croissant strictement lorsque $x(t) \in \Gamma$.

1.2. Le problème de contrôle impulsional.

On considère S un ouvert de $\bar{\Omega}$ appelé ensemble de continuation et une application

$\xi : \bar{\Omega} \rightarrow R_+^n$ mesurable telle que :

$$\forall x \in \bar{\Omega} \quad x + \xi(x) \in \bar{\Omega}$$

A partir de $x(t)$ définie par (1.6) (1.7), avec \mathbf{S} et ξ on définit la diffusion réfléchie contrôlée par :

$$\theta_1 = \inf \{ t / x(t) \notin \mathbf{S} \} \quad x(t) \text{ définie par (1.6) (1.7)}$$

$$(1.8) \quad x(\theta_1^+) = x(\theta_1) + \xi_1 \quad \text{avec} \quad \xi_1 = \xi(x(\theta_1))$$

Puis

$$\theta_2 = \inf \{ t / x(t) \notin \mathbf{S} \}$$

$x(t)$ diffusion réfléchie définie par (1.6) (1.8)

$$x(\theta_2^+) = x(\theta_2) + \xi_2 \quad \xi_2 = \xi(x(\theta_2)) .$$

et on définit de manière identique $\theta_3, \theta_4 \dots$

Pour la construction correcte d'un tel processus nous renvoyons à A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [3].

On note

$$(1.9) \quad \mathbf{S} = (\mathbf{s}, \xi) \quad \text{le contrôle impulsif.}$$

Le coût associé à ce contrôle est

$$(1.10) \quad J_x(\mathbf{S}) = E^x \left\{ \int_0^\infty f(x(t)) \exp(-a_0 t) dt + \sum_i k \exp(-a_0 \theta_i) \right\}$$

avec

- * x condition initiale de la diffusion réfléchie contrôlée.
- * $k > 0$ est le coût associé aux sauts (coût de commande en gestion de stocks). Pour simplifier nous prenons ici $k = \text{constante}$.
- * f est le coût continu : coût de stockage si $x(t) \geq 0$, de rupture de stock si $x(t) < 0$; f positive bornée.
- * $a_0 > 0$ est le coefficient d'actualisation.

Le problème de contrôle est donc :

trouver S^* tel que

$$(1.11) \quad J_x(S^*) = \min_S J_x(S)$$

1.3. L'inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V) à résoudre

On note A l'opérateur défini par :

$$(1.12) \quad Au = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u$$

et M l'opérateur :

$$(1.13) \quad Mu(x) = k + \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \bar{\Omega}}} u(x + \xi)$$

Soit y la solution du système d'inéquations suivant :

$$(1.14) \quad \begin{cases} Ay - f \leq 0 \\ y - My \leq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ (Ay - f)(y - My) = 0 \end{cases}$$

$$(1.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \gamma} \leq 0 \\ y - My \leq 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial y}{\partial \gamma} (y - My) = 0 \end{cases}$$

On pose alors

$$(1.16) \quad S^* = \{ x \in \bar{\Omega} ; y(x) < My(x) \}$$

(1.17) ξ^* une sélection mesurable de la multiapplication

$$\Lambda(x) = \{\xi \in \mathbb{R}_+^n ; My(x) = k + y(x+\xi) \quad x + \xi \in \bar{\mathcal{O}}\}$$

Alors $S^* = (g^*, \xi^*)$ est un contrôle impulsif optimal et nous avons

$$(1.18) \quad y(x) = J_x(S^*) = \min_S J_x(S) \quad \forall x \in \bar{\mathcal{O}}$$

Formellement la démonstration de ce résultat se fait de la manière suivante :

Soit S un contrôle impulsif quelconque : on applique la formule de Ito généralisée à $\exp(-a_0 t)y(x)$ pour le processus $x(t)$ contrôlé par S avec $x(0) = x$; on obtient

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} -y(x) = E \left\{ \int_0^\infty [-a_0 e^{-a_0 t} y(x(t)) + e^{-a_0 t} \sum_i b_i(x(t)) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right. \right. \\ \quad \left. \left. + e^{-a_0 t} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 y(x(t))}{\partial x_i \partial x_j} \right] dt - \int_0^\infty \mathbb{1}_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \gamma} d\eta \right. \\ \quad \left. + \sum_i e^{-a_0 \theta_i} [y(x(\theta_i^+)) - y(x(\theta_i^-))] \right\} \end{array} \right.$$

soit

$$-y(x) = E \left\{ \int_0^\infty -e^{-a_0 t} Ay dt + \sum_i e^{-a_0 \theta_i} [y(x(\theta_i^+)) - y(x(\theta_i^-))] \right. \\ \quad \left. - \int_0^\infty \mathbb{1}_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \gamma} d\eta \right\}$$

en utilisant

$$Ay \leq f \quad y(x) \leq k + y(x + \xi) \quad \frac{\partial y}{\partial \gamma} \leq 0 \quad \text{successivement}$$

dans le second membre on obtient

$$(1.20) \quad -y(x) \geq -E \left\{ \int_0^\infty e^{-a_0 t} f(x(t)) dt - \sum_i k e^{-a_0 \theta_i} \right\}$$

Soit

$$y(x) \leq J_x^*(S)$$

Par le même raisonnement on montre que l'on a

$$y(x) = J_x^*(S^*) \text{ d'où le résultat.}$$

Remarque 1.1

Ce raisonnement formel est justifié si la formule de Ito généralisée s'applique, c'est à dire si y est suffisamment régulière. Le résultat n'a d'intérêt que si la régularité nécessaire peut s'obtenir dans (1.14) (1.15) sous les hypothèses "raisonnables". On montre dans A. BENOUSSAN - J.L. LIONS [3] que l'on a le résultat pour $y \in C^0(\bar{\Omega})$, $Ay \in L^2(\Omega)$.

1.4. Formulation précise de l'I.Q.V à résoudre.

Soient les espaces

$$V \subset H \subset V'$$

$$\text{avec } H = L^2(\Omega) \quad V = H^1(\Omega) \quad (\text{ou } H_0^1(\Omega))$$

$|\cdot|$ et $\|\cdot\|$ désignent respectivement les normes dans H et V .

On définit la forme bilinéaire suivante :

$$(1.21) \quad a(y, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_i a_i \frac{\partial y}{\partial x_i} v + a_0 y v \right) dx$$

avec

$$a_i = b_i + \sum_j \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_j}$$

On suppose qu'il existe λ et $\alpha > 0$ tels que

$$(1.22) \quad a(y, y) + \lambda |y|^2 \geq \alpha \|y\|^2$$

On considère d'autre part la forme linéaire

$$(1.23) \quad l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad f \geq 0 \quad f \in L^\infty(\Omega)$$

(on pourrait prendre également $l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma$)

et l'opérateur M vérifiant :

$$(1.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} M : V \cap L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega) \\ \text{i)} \quad \forall v \geq 0 \quad Mv \geq 0 \\ \text{ii)} \quad \text{si } u \geq v \geq 0 \quad \text{p.p. alors } Mu \geq Mv \\ \text{iii)} \quad \text{si } v^n \rightarrow v \text{ dans } V \text{ faible avec } v \in V \cap L^\infty(\Omega), \quad v^n \rightarrow v \text{ p.p} \\ \quad \quad \quad v^n \downarrow v, \quad v^n \rightarrow v \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ fort} \quad \forall p \text{ fini} \\ \quad \quad \quad \text{alors } Mv^n \rightarrow \chi \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ fort et } \chi \leq Mv \\ \text{iv)} \quad \forall \alpha \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad \forall u \geq 0 \quad u \in V \cap L^\infty(\Omega) \\ \quad \quad \quad \exists \beta \quad \alpha < \beta < 1 \quad \text{tel que } \beta M(u) \leq M(\alpha u) \end{array} \right.$$

Le problème s'écrit alors :

trouver $y \in V \cap L^\infty(\Omega)$ solution de :

$$(1.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \leq My \\ a(y, v-y) - l(v-y) \geq 0 \quad \forall v \in V \quad v \leq My \end{array} \right. \quad (P)$$

Si $V = H^1(\Omega)$ le problème (1.25) est équivalent à (1.14) (1.15). Si l'on prend M défini par (1.13) on retrouve donc le problème de contrôle impulsif de gestion de stocks initial. On montre aisément que M donné par (1.13) vérifie les hypothèses de (1.24).

Si on prend $V = H_0^1(\Omega)$ alors l'interprétation opérationnelle de (1.25) est :

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ay - f \leq 0 \\ y - My \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ (Ay - f)(y - My) = 0 \end{array} \right.$$

$$(1.27) \quad y \Big|_{\Gamma} = 0$$

Cette I.Q.V résout le problème de contrôle impulsionnel (défini en 1.2 pour M donné par (1.13)) pour des diffusions arrêtées sur Γ au lieu d'être réfléchies sur cette frontière.

1.5. Existence et unicité de la solution de l'I.Q.V.

Théorème 1.1.

Sous les hypothèses précédentes le problème (1.25) admet une solution unique.

Pour la démonstration cf. A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [3] et T. LAETSCH [12]. L'existence est obtenue par construction d'une suite d'I.V. Construction que nous reprendrons pour les problèmes approchés.

Remarque 1.2.

On peut montrer par des méthodes probabilistes que l'on a $y \in C^0(\bar{\mathcal{O}})$ pour $f \in C^0(\bar{\mathcal{O}})$ (cf. A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [3]).

2. APPROXIMATION D'UNE CLASSE D'I.Q.V.

Dans ce paragraphe nous allons faire l'analyse numérique d'une classe d'I.Q.V. : le problème à résoudre est donc (1.25) avec M vérifiant (1.24) et l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$(2.1) \quad M \text{ est continu de } L^2(\mathcal{O}) \text{ dans } L^\infty(\mathcal{O}).$$

2.1. Approximation et algorithme de résolution.

On considère (V_h, p_h, r_h) une approximation interne convergente de V avec $p_h V_h \subset C(\bar{\Omega}) \quad \forall h$.

p_h injective transforme le cône positif en le cône positif.

L'I.Q.V approchée (P_h) s'écrit :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y_h \in V_h \text{ tel que} \\ p_h y_h \leq M p_h y_h \\ a(p_h y_h, p_h(v_h - y_h)) - l(p_h(v_h - y_h)) \geq 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad p_h v_h \leq M p_h y_h \end{array} \right. \quad (P_h)$$

L'algorithme de résolution de (2.2) est le suivant :

On construit par récurrence une suite (y_h^n) de solutions d'inéquations variationnelles de la manière suivante :

$$(2.3) \quad y_h^0 = \frac{1}{a_0} \sup_x f(x)$$

y_h^{n-1} étant calculée, y_h^n est donnée par :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_h^n \in V_h \quad p_h y_h^n \leq M p_h y_h^{n-1} \\ a(p_h y_h^n, p_h(v_h - y_h^n)) + \lambda(p_h y_h^n, p_h(v_h - y_h^n)) \geq l(p_h(v_h - y_h^n)) \\ + \lambda(p_h y_h^{n-1}, p_h(v_h - y_h^n)) \quad \forall v_h \in V_h, \quad p_h v_h \leq M p_h y_h^{n-1} \end{array} \right.$$

Le problème (2.4) est une I.V que l'on sait résoudre numériquement (cf. par exemple R. GLOWINSKI - J.L. LIONS - R. TREMOLIERES [7]).

On note A_h la matrice définie par :

$$(2.5) \quad [A_h y_h, v_h] = a(p_h y_h, p_h v_h) \quad \forall y_h, v_h \in V_h$$

où $[,]$ désigne le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^N , N étant la dimension de V_h .

On fait alors l'hypothèse suivante :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la matrice } A_h \text{ a tous ses termes hors diagonaux négatifs} \\ \text{ou nuls} \end{array} \right.$$

Remarque 2.1.

Cette hypothèse est suffisante pour que A_h satisfasse au principe du maximum discret c'est-à-dire :

$$A_h y_h = f_h \quad f_h \geq 0 \Rightarrow y_h \geq 0 .$$

Remarque 2.2.

L'hypothèse (2.6) est réalisée par exemple en dimension 1 ou 2 pour h suffisamment petit pour le type d'approximation que nous choisissons (éléments finis Q_1 . cf. J.P. QUADRAT [15]) et pour un opérateur dont la partie principale est le laplacien.

2.2. Existence et unicité de la solution approchée.

Lemme 2.1.

Sous l'hypothèse (2.6) on a

$$y_h^0 \geq y_h^1 \geq \dots \geq y_h^n \geq \dots \geq 0 \quad \text{où } y_h^n \text{ est la solution de } (2.4)_n .$$

La démonstration est analogue à celle de A. BENOUESSAN - J.L. LIONS [3] pour le problème (1.25).

Dans (2.4)₁ on prend :

$$v_h - y_h^1 = -(y_h^0 - y_h^1)^- \quad \text{soit } v_h = \inf(y_h^0, y_h^1) \text{ ce qui est loisible}$$

et on obtient :

$$a(p_h y_h^0 - p_h y_h^1, p_h (y_h^0 - y_h^1)^-) + \lambda(p_h (y_h^0 - y_h^1), p_h (y_h^0 - y_h^1)^-) \geq 0$$

compte tenu de

$$v_h \geq 0 \quad (\text{démonstration ci dessous})$$

$$\text{donc } p_h v_h \geq 0$$

et de

$$(2.7) \quad a(p_h y_h^0, p_h v_h) = \int_{\Omega} a_0 p_h y_h^0 \cdot p_h v_h \, dx = \int_{\Omega} p_h (\sup_x f) \cdot p_h v_h \, dx \\ = \int_{\Omega} \sup_x f \cdot p_h v_h \, dx \geq \int_{\Omega} f p_h v_h \, dx$$

on écrit $y_h^0 - y_h^1 = (y_h^0 - y_h^1)^+ - (y_h^0 - y_h^1)^-$

en utilisant les hypothèses (2.6), (1.22) et l'injectivité de p_h on obtient $(y_h^0 - y_h^1)^- = 0$ soit $y_h^1 \leq y_h^0$.

D'autre part dans (2.4)₁ en prenant $v_h = y_h^{1+}$ on obtient

$$(2.8) \quad a(p_h y_h^{1+}, p_h y_h^{1-}) - a_h(p_h y_h^{1+}, p_h y_h^{1-}) + \lambda(p_h y_h^{1+}, p_h y_h^{1-}) \\ - \lambda(p_h y_h^{1-}, p_h y_h^{1-}) \geq l(p_h y_h^{1-}) + \lambda(p_h y_h^0, p_h y_h^{1-}) \\ \geq 0 \quad \text{car} \quad y_h^0 \geq 0$$

les mêmes arguments que ci-dessus donnent $y_h^{1-} = 0$ c'est-à-dire $y_h^1 \geq 0$.

Ensuite par récurrence on prend :

$$v_h - y_h^n = -(y_h^{n-1} - y_h^n)^- \quad \text{dans } (2.4)_n \quad \text{c'est-à-dire} \quad v_h = \inf(y_h^{n-1}, y_h^n)$$

et

$$v_h - y_h^{n-1} = (y_h^{n-1} - y_h^n)^- \quad \text{dans } (2.4)_n \quad \text{c'est-à-dire} \quad v_h = \sup(y_h^{n-1}, y_h^n)$$

Le premier choix de v_h est évidemment loisible; le second l'est aussi grâce à l'hypothèse de récurrence $y_h^n \leq y_h^{n-1}$ et à la croissance de l'opérateur M .

Le même raisonnement qu'en (2.7) donne $y_h^{n-1} \geq y_h^n$.

En prenant ensuite $v_h = y_h^n$ dans (2.4)_n on obtient $y_h^n \geq 0$ d'où le résultat du lemme.

Théorème 2.1.

Sous les hypothèses précédentes le problème (P_h) défini par (2.2) admet une solution unique.

Démonstration.

a) existence.

$\{y_h^n\}$ est décroissante positive : elle converge vers y_h .

On prend alors v_h telle que $p_h v_h \leq M p_h y_h$

or M est croissant (hypothèse (ii) de (1.24)) donc

$p_h v_h \leq M p_h y_h^n \quad \forall n$; ce qui permet de passer à la limite dans (2.4). On obtient :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(p_h y_h, p_h v_h - p_h y_h) \geq l(p_h v_h - p_h y_h) \\ \forall v_h \in V_h \quad p_h v_h \leq M p_h y_h \end{array} \right.$$

on a donc l'existence de la solution grâce à (2.9) et à (iii) de (1.24) qui donne $p_h y_h \leq M(p_h y_h)$.

b) Unicité (cf. T. LAETSCH [12]).

Soient y_h^1 et y_h^2 deux solutions

Soit γ le plus grand réel tel que :

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad \gamma y_h^1 \leq y_h^2$$

Supposons que $\gamma < 1$: alors d'après l'hypothèse (iv) de (1.24) on a : $\exists \delta$ tel que

$$(2.10) \quad \gamma < \delta \leq 1 \quad \delta M(p_h y_h^1) \leq M(p_h(\gamma y_h^1))$$

Remarque 2.3.

Dans le cas où M est donné par (1.13) il suffit de prendre

$$\frac{1-\delta}{\delta-\gamma} \geq \frac{1}{k} \sup_x \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \bar{\Omega}}} p_h y_h^1(x+\xi)$$

Dans ces conditions on a :

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(p_h(\delta y_h^1), p_h v_h - p_h(\delta y_h^1)) \geq \delta l(p_h v_h - \delta y_h^1) \\ p_h \delta y_h^1 \leq \delta M p_h y_h^1 \quad \forall v_h \in V_h \quad p_h v_h \leq \delta M p_h y_h^1 \end{array} \right.$$

et

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(p_h y_h^2, p_h v_h - p_h y_h^2) \geq l(p_h v_h - p_h y_h^2) \\ p_h y_h^2 \leq M p_h y_h^2 \quad \forall v_h \in V_h \quad p_h v_h \leq M p_h y_h^2 \end{array} \right.$$

mais on a

$$\delta l \leq l \text{ et } \delta M(p_h y_h^1) \leq M(p_h(\gamma y_h^1)) \leq M(p_h y_h^2) \text{ d'après (2.10)} \\ \text{et la croissance de } M.$$

Grâce au théorème de comparaison des solutions d'inéquations variationnelles et à l'hypothèse (2.6) on obtient :

$$\delta y_h^1 \leq y_h^2 \text{ ce qui contredit la maximalité de } \gamma \text{ et donc } \gamma = 1$$

$$\text{ce qui entraîne } y_h^1 \leq y_h^2 \text{ et par symétrie } y_h^1 = y_h^2.$$

2.3. Convergence des solutions approchées.

Nous allons montrer maintenant que la solution du problème approché (P_h) défini par (2.2) converge lorsque $h \rightarrow 0$ vers la solution de l'I.Q.V.

Pour cela nous allons utiliser l'hypothèse (2.1) de continuité de $L^2(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ de l'opérateur M .

On note :

$$(2.13) \quad Q^n = \{ v \in V \mid v \leq Mu^n \text{ p.p} \}$$

$$(2.14) \quad Q = \{ v \in V \mid v \leq Mu \text{ p.p} \}$$

$\overline{Q^{L^\infty}} = \text{adhérence de } Q \text{ au sens de la topologie de } L^\infty.$

Lemme 2.2.

Sous l'hypothèse (2.1) si $u^n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ alors $Q \subset \liminf Q^n$ et $\liminf Q^n$ est convexe.

Démonstration.

Soit $v \in Q$.

$$\text{On pose } \varepsilon_N = \sup_{n \geq N} \| (M(u) - M(u^n))^+ \|_{L^\infty}$$

On a donc :

$$v - \varepsilon_N \leq M(u^n) \quad \forall n \geq N \quad \text{c'est-à-dire} \quad v - \varepsilon_N \in \liminf Q^n$$

Mais d'autre part :

$u^n \rightarrow u$ dans L^2 et M vérifie (2.1) donc

$\varepsilon_N \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ donc

$v \in \liminf Q^n$.

Enfin Q^n étant convexe $q^N = \bigcap_{n \geq N} Q^n$ est convexe; les q^N forment une suite croissante de convexes \rightarrow la réunion est convexe et il en est de même pour l'adhérence donc $\liminf Q^n$ est convexe.

Remarque 2.4.

Dans cet article nous travaillons avec $V = H^1(\Omega)$, les résultats sont identiques pour $H_0^1(\Omega)$ à quelques modifications mineures près par exemple remplacer ci-dessus $v - \varepsilon_N$ par $(v - \varepsilon_N)^+$.

Lemme 2.3.

Si K est un convexe borné dans $W^{m,p}(\Omega)$ alors
 $\overline{K}^{L^\infty} = \overline{K}^{W^{m,p}}$.

Démonstration :

Soit $v \in \overline{K}^{L^\infty}$: alors il existe une suite $v^n, v^n \in K$, $v^n \xrightarrow{L^\infty} v$; mais alors v^n est bornée dans $W^{m,p}$: il existe donc une sous suite qui converge vers v dans $W^{m,p}$ faible. Or comme toute suite faiblement convergente converge vers v , toute la suite converge et d'autre part K étant convexe, on a

$$\overline{K}^{\sigma(W^{m,p}, W^{m,p})} = \overline{K}^{W^{m,p}} \text{ d'où le résultat.}$$

■

Proposition 2.1.

Si $u^n \rightarrow u$ dans L^2 ; K borné de $W^{m,p}$ alors

$$Q \cap K \subset \liminf Q^n \cap K^{W^{m,p}}.$$

La démonstration est immédiate, ceci est une conséquence des lemmes 2.2 et 2.3.

On note maintenant Π_h l'opérateur d'interpolation

$$(2.15) \quad \Pi_h : H^1(\Omega) \rightarrow p_h V_h \subset H^1(\Omega).$$

Lemme 2.4.

$\forall v \in W^{2,p}$ on a

$$\| \Pi_h v - v \|_{H^1} \leq h \| v \|_{W^{2,p}} \text{ pour } p \text{ suffisamment grand.}$$

Ceci est un résultat classique d'approximation dont on peut trouver la démonstration par exemple dans Ph. CIARLET - P.A. RAVIART [6].

On pose :

$$(2.16) \quad Q_h^n = \{ v \in V \mid p_h v_h \leq M(u^n); \quad v = p_h v_h \}$$

Proposition 2.2.

$$\left| \begin{array}{l} u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2 \text{ alors} \\ \forall v \in W^{2,p} \cap Q \quad \exists v_h^n \in Q_h^n \quad \| p_h v_h^n - v \| \rightarrow 0 \\ \text{lorsque } h \rightarrow 0 \text{ et } n(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty \end{array} \right.$$

Démonstration.

Soit $v \in W^{2,p} \cap Q$

On note $K = \{w / w \in W^{2,p} \quad \| w \|_{W^{2,p}} \leq \| v \|_{W^{2,p}}\}$

D'après la proposition 2.1 :

$$\exists v^n \in K \cap Q \quad v^n \rightarrow v \text{ dans } W^{2,p}$$

On considère alors la suite

$$\Pi_h v^{n(h)}, \quad n(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$$

$\Pi_h v^{n(h)} - 2\omega(v^{n(h)}, h) \in Q_h^{n(h)}$ où $\omega(v, h)$ désigne le module de continuité de v

D'après le Lemme 2.4

$$(2.17) \quad \| \Pi_h v^{n(h)} - v^{n(h)} \| \leq h \| v^{n(h)} \|_{W^{2,p}} \leq h \| v \|_{W^{2,p}}$$

et d'autre part :

$$(2.18) \quad \| v^{n(h)} - v \| \rightarrow 0$$

$$(2.18^1) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \omega(v^{n(h)}, h) \rightarrow 0 \quad \text{car la suite } \{v^{n(h)}\} \text{ étant bornée dans } W^{2,p} \text{ suffisamment grand forme un ensemble équicontinu de fonctions}$$

et donc grâce à (2.17), (2.18), (2.18¹) la suite $\{\Pi_h v^{n(h)} - 2\omega(v^{n(h)}, h)\}$ convient.

Théorème 2.2.

Soit y_h solution du problème approché (P_h) défini par (2.2); y la solution de l'I.Q.V (1.25) ; M vérifiant l'hypothèse (2.1). On a $p_h y_h \rightarrow y$ dans V fort.

Démonstration.

On a $\| p_h y_h \| \leq \frac{\| f \|_V}{\alpha}$ et donc

$$p_h y_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} y^* \text{ dans } V \text{ faible, } H \text{ fort.}$$

D'après 2.1, on a donc :

$$M(p_h y_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} M(y^*) \text{ dans } L^\infty$$

La proposition 2.2. donne :

$$\forall v \in W^{2,p} \quad v \leq M(y^*) \quad \exists \tilde{v}_h \quad p_h \tilde{v}_h \leq M(p_h y_h) \quad p_h \tilde{v}_h \rightarrow v \text{ dans } V \text{ fort.}$$

on peut donc reporter $p_h \tilde{v}_h$ dans (2.2)

$$(2.19) \quad a(p_h y_h, p_h (\tilde{v}_h - y_h)) \geq l(p_h (\tilde{v}_h - y_h))$$

et par passage à la limite en utilisant le fait que $a(\dots)$ est faiblement s.c.i on obtient :

$$a(y^*, v - y^*) \geq l(v - y^*) \quad \forall v \leq M(y^*) \quad v \in V \quad (\text{par densité})$$

On a d'autre part :

$$p_h y_h \leq M(p_h y_h)$$

mais $p_h y_h \rightarrow y^*$ dans $L^2(\Omega)$ donc d'après (2.1) $M(p_h y_h) \rightarrow M(y^*)$ dans L^∞ et donc $y^* \leq M(y^*)$.

On a donc montré que $p_h y_h \rightarrow y$ dans V faible, montrons maintenant la convergence forte : d'après la convergence dans L^2 de $p_h y_h \rightarrow y$ avec la proposition 2.2. :

$$\exists v_h \quad p_h v_h \leq M(p_h y_h) \quad p_h v_h \rightarrow y \text{ dans } V \text{ fort.}$$

d'après (1.22) : $\exists \lambda \quad \alpha > 0$

$$(2.20) \quad a(p_h v_h - p_h y_h, p_h v_h - p_h y_h) + \lambda |p_h v_h - p_h y_h|^2 \geq \alpha \|p_h v_h - p_h y_h\|^2$$

$$\|p_h v_h - p_h y_h\|^2 \geq \|y - p_h y_h\|^2 - \|y - p_h v_h\|^2$$

(2.20) devient :

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(p_h v_h, p_h v_h - p_h y_h) - a(p_h y_h, p_h v_h - p_h y_h) + \lambda |p_h v_h - p_h y_h|^2 \\ \quad + \alpha \|y - p_h v_h\|^2 \geq \alpha \|y - p_h y_h\|^2 \end{array} \right.$$

mais d'autre part comme $p_h v_h \leq M(p_h y_h)$

$$(2.22) \quad - a(p_h y_h, p_h v_h - p_h y_h) \leq - l(p_h v_h - p_h y_h)$$

et $- l(p_h(v_h - y_h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ puisqu'on a montré que $p_h y_h \rightarrow y$ dans V faible.

Ce qui donne pour (2.21) :

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda |p_h(v_h - y_h)|^2 + \alpha \|y - p_h v_h\|^2 - l(p_h(v_h - y_h)) + a(p_h v_h, p_h v_h - p_h y_h) \\ \geq \alpha \|y - p_h y_h\|^2 \end{array} \right.$$

ce qui donne le résultat car le membre de gauche tend vers 0.

■

3. APPROXIMATION DE L'I.Q.V INITIALE - REGULARISATION.

Pour le problème de contrôle impulsional en gestion de stocks l'opérateur M défini par (1.13) ne possède pas la propriété (2.1) (continuité de $L^2(\mathcal{O})$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$).

Nous allons définir un opérateur M_ε régularisé de l'opérateur M , auquel va correspondre une I.Q.V régularisée (P_ε) . Nous allons montrer que y_ε solution de (P_ε) converge en décroissant vers la solution de l'I.Q.V.

3.1. L'I.Q.V régularisée - Propriétés de M_ε .

Soit μ_ε la mesure de probabilité de loi uniforme sur le cube $[-\varepsilon, 0]^n$. On définit alors :

$$(3.1) \quad \mathcal{O}_\varepsilon = \{x/x + \varepsilon \in \mathcal{O}\} \cap \mathcal{O} \quad (x + \varepsilon = (x_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon, \dots))$$

$$(3.2) \quad C_\varepsilon = \bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_\varepsilon$$

et l'opérateur M_ε par :

$$(3.3) \quad M_\varepsilon(y)(x) = \begin{cases} k + \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \mathcal{O}}} y * \mu_\varepsilon(x+\xi) & \text{pour } x \in \mathcal{O}_\varepsilon \\ N = \frac{1}{a_0} \sup_{\tau \in \mathcal{O}} f(\tau) & \text{pour } x \in C_\varepsilon \end{cases}$$

Le problème régularisé (P_ε) est alors :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y_\varepsilon \in V \\ y_\varepsilon \leq M_\varepsilon y_\varepsilon \\ a(y_\varepsilon, v - y_\varepsilon) \geq l(v - y_\varepsilon) \quad \forall v \in V \quad v \leq M_\varepsilon y_\varepsilon \end{array} \right. \quad (P_\varepsilon)$$

Montrons que M_ε vérifie (2.1) :

Lemme 3.1.

M_ε défini par (3.3) est continu de $L^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ transformant le cône positif en le cône positif.

Démonstration :

L'application

$$y \in L^2(\Omega) \rightarrow (y * \mu_\varepsilon)|_{\Omega_\varepsilon} \in L^\infty(\Omega_\varepsilon) \text{ est continue.}$$

donc l'application

$$y \in L^2(\Omega) \rightarrow z \in L^\infty(\Omega) \begin{cases} = y * \mu_\varepsilon & \text{pour } x \in \Omega_\varepsilon \\ = N & \text{pour } x \in C_\varepsilon \end{cases}$$

est continue.

D'autre part :

$$z \in L^\infty(\Omega) \rightarrow u(x) = \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \Omega}} z(x+\xi) \quad u \in L^\infty(\Omega)$$

est continue et on obtient donc le résultat du lemme par composition.

■

3.2. Convergence de la solution de l'I.Q.V régularisée et résultat d'approximation.

Nous commençons par donner un résultat de comparaison de solutions qui permettra d'obtenir la convergence par décroissance.

Lemme 3.2.

y_ε désigne la solution de (P_ε) défini en (3.4); on a :

$$y_{\varepsilon/2} \leq y_\varepsilon$$

Démonstration :

a) nous allons commencer par montrer que :

$$(3.5) \quad \forall u \in L^2(\mathcal{O}), \quad u \leq N \quad \text{on a} \quad M_\varepsilon u \geq M_{\varepsilon/2} u$$

Nous allons simplement faire la démonstration en dimension 2, l'extension à \mathbb{R}^n étant évidente :

$$\text{posons } t = (t_1, t_2) \quad t + \varepsilon = (t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon)$$

$$M_\varepsilon u(x) \leq \begin{cases} k + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^{t+\varepsilon} u(s) ds & \forall t \geq x \quad t \in \mathcal{O}_\varepsilon \quad x \in \mathcal{O}_\varepsilon \\ N & x \in C_\varepsilon \end{cases}$$

• Pour $x \in \mathcal{O}_\varepsilon$

$$\exists t \geq x \quad M_\varepsilon u(x) = u * \mu_\varepsilon(t) \quad \text{car} \quad u \leq N$$

$$(2.6) \quad M_{\varepsilon/2} u(x) \leq \inf \{u * \mu_{\varepsilon/2}(t), u * \mu_{\varepsilon/2}(t_1 + \varepsilon/2, t_2), u * \mu_{\varepsilon/2}(t_1, t_2 + \varepsilon/2),$$

$$u * \mu_{\varepsilon/2}(t + \varepsilon/2)\}$$

$$\leq u * \mu_\varepsilon(t) = M_\varepsilon u(x)$$

• Pour $x \in C_{\varepsilon/2}$

$$\text{on a } M_\varepsilon u = M_{\varepsilon/2} u = N$$

• Pour $x \in C_{C_\varepsilon}$

$$u \leq N \quad \text{et donc} \quad M_{\varepsilon/2} u \leq N = M_\varepsilon u$$

b) En utilisant (3.5) montrons maintenant que $y_{\varepsilon/2} \leq y_\varepsilon$: on procède par récurrence sur les suites d'inéquations variationnelles donnant respectivement les solutions de (P_ε) et $(P_{\varepsilon/2})$

$$(3.7) \quad a(\varphi^p, v-\varphi^p) \geq l(v-\varphi^p) \quad \forall v \leq M_{\varepsilon/2} \varphi^{p-1}$$

$$(3.8) \quad a(\Psi^p, v-\Psi^p) \geq l(v-\Psi^p) \quad \forall v \leq M_\varepsilon \Psi^{p-1}$$

avec

$$(3.9) \quad \varphi_0 = \Psi_0 = N \quad (\text{majorant de la solution, défini en (3.3)})$$

grâce à (3.5) et à la monotonie des I.V par rapport à l'obstacle on obtient

$$\varphi_1 \leq \Psi_1 \leq N$$

La monotonie de M_ε entraîne

$$M_\varepsilon \varphi_1 \leq M_\varepsilon \Psi_1$$

donc d'après (3.5)

$$M_{\varepsilon/2} \varphi_1 \leq M_\varepsilon \varphi_1 \leq M_\varepsilon \Psi_1$$

et donc par récurrence

$$\varphi_p \leq \Psi_p$$

Mais Ψ^p (resp φ^p) converge en décroissant vers y_ε (resp $y_{\varepsilon/2}$) (cf. démonstration d'existence A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [3]) et donc $y_{\varepsilon/2} \leq y_\varepsilon \leq N$.

Dans la suite on note

$$y_{\varepsilon_n} = y_{\varepsilon/2^n}.$$

Théorème 3.1.

La suite $\{y_{\varepsilon_n}\}$ solution de (P_{ε_n}) défini par (3.4) converge, en décroissant, dans V faible vers y^* solution de l'I.Q.V.

Démonstration.

$$\text{On a } \|y_{\varepsilon_n}\| \leq \frac{\|f\|_V}{\alpha}$$

donc il existe une sous suite encore notée y_{ε_n} qui converge vers y^* dans V faible et H fort, en décroissant grâce au lemme 3.2.

$\{y_{\varepsilon_n}\}$ est décroissante et M croissante, étant s.c.i on obtient à la limite

$$a(y^*, v - y^*) \geq l(v - y^*) \quad \forall v \leq M(y^*)$$

Il reste à montrer que $y^* \leq My^*$ p.p.

On note

$$z_{\varepsilon_n}(x) = \begin{cases} \mu_{\varepsilon_n} * y_{\varepsilon_n}(x) & x \in \mathcal{O}_{\varepsilon_n} \\ N & x \in C_{\varepsilon_n} \end{cases}$$

On a

$$y_{\varepsilon_n}(x) \leq k + z_{\varepsilon_n}(s) \quad \text{p.p.} \quad \forall x \leq s$$

Montrons que $z_{\varepsilon_n} \rightarrow y^*$ dans $L^2(\mathcal{O})$

$$\|y^*\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leq N \quad \text{donc}$$

$$\|z_{\varepsilon_n} - y^*\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \|z_{\varepsilon_n} - y^*\|_{L^2(\mathcal{O}_{\varepsilon_n})} + N \sqrt{\varepsilon_n}$$

Mais d'autre part

$$z_{\varepsilon_n} \Big|_{\Omega_{\varepsilon_n}} = y_{\varepsilon_n} * \mu_{\varepsilon_n}$$

$$\begin{aligned} |z_{\varepsilon_n} - y^*|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})} &= |y_{\varepsilon_n} * \mu_{\varepsilon_n} - y^* * \mu_{\varepsilon_n} + y^* * \mu_{\varepsilon_n} - y^*|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})} \\ &\leq |y_{\varepsilon_n} * \mu_{\varepsilon_n} - y^* * \mu_{\varepsilon_n}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})} + |y^* * \mu_{\varepsilon_n} - y^*|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})} \end{aligned}$$

mais

$$|y_{\varepsilon_n} * \mu_{\varepsilon_n} - y^* * \mu_{\varepsilon_n}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})} \leq |\mu_{\varepsilon_n}|_{L^1(\Omega_{\varepsilon_n})} |y_{\varepsilon_n} - y^*|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})}$$

(cf. par exemple J.P. AUBIN [1])

donc

$$|z_{\varepsilon_n} - y|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})} \leq |y_{\varepsilon_n} - y^*|_{L^2(\Omega)} + |y^* * \mu_{\varepsilon_n} - y^*|_{L^2(\Omega)}$$

$|y^* * \mu_{\varepsilon_n} - y^*|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ pour tout y^* continue puis par densité pour tout $y^* \in L^2(\Omega)$.

$|z_{\varepsilon_n} - y^*|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ donc il existe une sous suite.

$z_{\varepsilon_n} \rightarrow y^*$ p.p. et donc $y^* \leq M(y^*)$ p.p.

■

Corollaire 3.1.

La suite $\{y_{\varepsilon_n}\}$ converge vers y dans V fort en décroissant.

Démonstration

$\exists \lambda \quad \alpha > 0$ tels que

$$(3.10) \quad a(y-y_{\varepsilon_n}, y-y_{\varepsilon_n}) + \lambda |y-y_{\varepsilon_n}|^2 \geq \alpha \|y-y_{\varepsilon_n}\|^2$$

$\{y_{\varepsilon_n}\}$ est décroissante donc

$$y \leq M y \leq M_{\varepsilon_n} (y_{\varepsilon_n}) \quad \text{donc}$$

$$-a(y_{\varepsilon_n}, y-y_{\varepsilon_n}) \leq -l(y-y_{\varepsilon_n})$$

(3.10) s'écrit

$$\lambda |y-y_{\varepsilon_n}|^2 + a(y, y-y_{\varepsilon_n}) - a(y_{\varepsilon_n}, y-y_{\varepsilon_n}) \geq \alpha \|y-y_{\varepsilon_n}\|^2$$

mais $y_{\varepsilon_n} \rightarrow y$ dans V faible donc

$$a(y, y-y_{\varepsilon_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$l(y-y_{\varepsilon_n}) \rightarrow 0 \quad \lambda |y-y_{\varepsilon_n}|^2 \rightarrow 0$$

et par conséquent

$$\|y-y_{\varepsilon_n}\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Remarque 3.2.

Sur l'interprétation probabiliste du problème régularisé : ce problème correspond au cas où les impulsions du contrôle ne font pas sauter l'état d'un point en un point mais d'un point à une zone, celle-ci correspondant au support de μ_ε , la loi du saut étant uniforme.

Le problème régularisé a donc un intérêt pratique aussi grand que celui du problème initial.

A partir du théorème 2.2 et du corollaire 3.1 nous pouvons maintenant donner le résultat global d'approximation du problème initial :

Corollaire 3.2.

Il existe une suite $\{\varepsilon_n, h_n\}$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ $h_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ telle que si y_h^ε est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} a(p_h y_h^\varepsilon, p_h(v_h - y_h^\varepsilon)) \geq l(p_h(v_h - y_h^\varepsilon)) \\ p_h y_h^\varepsilon \leq M_\varepsilon(p_h y_h^\varepsilon) \quad \forall v_h : p_h v_h \leq M_\varepsilon(p_h y_h^\varepsilon) \end{array} \right.$$

avec M_ε défini par (3.3) alors

$$p_h y_h^\varepsilon \rightarrow y \text{ dans } V, \text{ } y \text{ solution de l'I.Q.V (1.25).}$$

Remarque 3.3.

. On n'obtient ici la convergence $p_h y_h^\varepsilon \rightarrow y$ que pour certaines suites $\{\varepsilon_n, h_n\}$ que l'on ne sait pas expliciter; le résultat plus complet serait évidemment $p_h y_h^\varepsilon \rightarrow y$ lorsque ε et $h \rightarrow 0$ indépendamment, on explicite une suite $\{\varepsilon_n, h_n\}$ pour laquelle la convergence a lieu.

Corollaire 3.3.

Si y désigne la solution de l'I.Q.V (P) pour M défini par (1.13)

y^h désigne la solution de l'I.Q.V discrétisée correspondante (P^h)

on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} p_h y_n \leq y$$

démonstration :

Le corollaire 3.2 montre qu'il existe une suite $\{\varepsilon_n, h_n\}$ telle que

$$y^{\varepsilon_n, h_n} \rightarrow y$$

d'autre part une démonstration analogue à celle du théorème 3.1 montre que

$$y^{\varepsilon, h} \downarrow y^h \quad \forall h \text{ fixé}$$
$$\varepsilon \downarrow 0$$

et donc $y^{\varepsilon, h} \geq y^h \quad \forall h \quad \forall \varepsilon > 0$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} y^{h_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y^{\varepsilon_n, h_n} = y$

■

Remarque 3.4.

Pratiquement on résout le problème (P^h) plus simple que $P^{\varepsilon, h}$ le corollaire (3.3) donne un résultat de semi continuité pour la suite (P^h) .

4. RESOLUTION NUMERIQUE.

4.1. Exemple d'approximation.

On prend une approximation par éléments finis Q_1 sur un ouvert Ω parallélépipédique.

Les éléments finis Q_1 sont des éléments finis parallélépipèdiques; les fonctions de base $\{e_i\}$ sont linéaires par élément par rapport à chacune des composantes

$$V_h = \mathbb{R}^N \quad \text{avec } N = \text{nombre de noeuds}$$

$$p_h : \mathbb{R}^N \rightarrow V.$$

$$y_h = \sum_{i=1}^N y_h^i e_i(x) \quad (e_i(x) = x_1 x_2 \text{ sur l'élément } [0,1] \times [0,1])$$

$$r_h : V \cap C^0(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$y \qquad \qquad \qquad y(ih)$$

4.2. Algorithme de résolution.

Nous utilisons l'algorithme décrit en 2.1 : résolution d'une suite d'I.V : chaque I.V est résolue par une méthode de relaxation avec projection (cf. par exemple R. GLOWINSKI - J.L. LIONS - R. TREMOLIERES [7]).

4.3. Exemples tests.

4.3.1. exemple 1.

$$\mathcal{O} =]0,1[\times]0,1[$$

Le problème à résoudre est

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y + y - f \leq 0 \\ y - 1 - \inf_{x \in \mathcal{O}} y(x) \leq 0 \quad x \in \mathcal{O} \\ (-\Delta y + y - f)(y - 1 - \inf_{x \in \mathcal{O}} y(x)) = 0 \end{array} \right.$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial n} \leq 0 \\ y - 1 - \inf_{x \in \mathcal{O}} y(x) \leq 0 & x \in \Gamma = \partial \mathcal{O} \\ \frac{\partial y}{\partial n} (y - 1 - \inf_{x \in \mathcal{O}} y(x)) = 0 \end{cases}$$

On note

$$f_1 = \cos \frac{4\pi}{3}(x_1 - \frac{1}{4})$$

$$f_2 = \cos \frac{4\pi}{3}(x_2 - \frac{1}{4})$$

On prend alors :

$$(4.3) \quad f = \begin{cases} 2 & \text{si } x_1 \in [0, \frac{1}{4}] \quad x_2 \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2}(1+f_2) + \frac{1}{2}(\frac{4\pi}{3})^2 f_2 & \text{si } x_1 \in [0, \frac{1}{4}] \quad x_2 \in [\frac{1}{4}, 1] \\ \frac{1}{2}(1+f_1) + \frac{1}{2}(\frac{4\pi}{3})^2 f_1 & \text{si } x_1 \in [\frac{1}{4}, 1] \quad x_2 \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{4}(1+f_1)(1+f_2) + \frac{1}{4}(\frac{4\pi}{3})^2 (f_1(1+f_2) + f_2(1+f_1)) & \text{si } x_1 \in [\frac{1}{4}, 1] \quad x_2 \in [\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

La solution de (4.1) (4.2) pour f donné par (4.3) est alors :

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \in [0, \frac{1}{4}] \quad x_2 \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2}(1+f_2) & \text{si } x_1 \in [0, \frac{1}{4}] \quad x_2 \in [\frac{1}{4}, 1] \\ \frac{1}{2}(1+f_1) & \text{si } x_1 \in [\frac{1}{4}, 1] \quad x_2 \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{4}(1+f_1)(1+f_2) & \text{si } x_1 \in [\frac{1}{4}, 1] \quad x_2 \in [\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

Pas de discréétisation $h = (h_1, h_2)$ avec $h_1 = h_2 = \frac{1}{20}$

initialisation de la suite d'I.V : $y_0 = 2$

Test d'arrêts :

- pour la relaxation (résolution d'une I.V) : $2,5 \cdot 10^{-6}$ (norme L^1 discrète).
- pour la comparaison des solutions de deux I.V successives : $2,5 \cdot 10^{-5}$ (norme L^1 discrète).

Nombre d'I.V résolues : 17.

Nombre global d'itérations de relaxation : 1300.

Remarque.

Le nombre d'I.V à résoudre est fonction décroissante de λ (taux d'actualisation). Le domaine de continuation est obtenu beaucoup plus rapidement que la solution de l'I.Q.V.

La figure 1 représente une coupe de la solution calculée (pour $x_1 = x_2$) et la figure 2 représente l'erreur pour la coupe précédente.

4.3.2. Exemple 2.

$$\Omega = [0,1] \times [0,1]$$

Le problème à résoudre est

$$(4.5) \quad \begin{cases} -\Delta y + y - f \leq 0 \\ y - \frac{39}{64} - \int_{\Omega} y(x) dx \leq 0 \\ (-\Delta y + y - f)(y - \frac{39}{64} - \int_{\Omega} y(x) dx) = 0 \end{cases}$$

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial n} \leq 0 \\ y - \frac{39}{64} - \int_{\Omega} y(x) dx \leq 0 \\ \frac{\partial y}{\partial n}(y - \frac{39}{64} - \int_{\Omega} y(x) dx) = 0 \end{cases}$$

Prenons cette fois

$$(4.7) \quad \begin{cases} f_1 = \cos \frac{8\pi}{3} (x_1 - \frac{1}{4}) \\ f_2 = \cos \frac{8\pi}{3} (x_2 - \frac{1}{4}) \end{cases}$$

Prenons f défini par (4.3) alors y défini par (4.4) est solution de (4.5)
 (4.6) pour f défini par (4.3) f_1 et f_2 par (4.7). Les courbes 1 des figures 3 et 4 donnent respectivement une coupe de la solution calculée et de l'erreur.

4.3.3. Exemple 3.

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[$$

Le problème à résoudre est

$$(4.8) \quad \begin{cases} -\Delta y + y - f \leq 0 \\ y - 1 - \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \Omega}} y(x+\xi) \leq 0 \\ (-\Delta y + y - f)(y - 1 - \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \Omega}} y(x+\xi)) = 0 \end{cases}$$

$$(4.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial n} \leq 0 \\ y - 1 - \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \Omega}} y(x+\xi) \leq 0 \\ \frac{\partial y}{\partial n} (y - 1 - \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \Omega}} y(x+\xi)) = 0 \end{cases}$$

Si on prend le même f que dans l'exemple 2, y solution de l'exemple 2 est solution.

Les courbes 2 des figures 5 et 6 sont respectivement une coupe de la solution approchée et une coupe de l'erreur.

CONCLUSION.

Cet article est un prolongement de l'analyse numérique des I.V (R.GLOWINSKI - J.L. LIONS - R. TREMOLIERES [7] et M. GOURSAT - J.P. QUADRAT [11]) il reste à obtenir des majorations d'erreurs.

Ce genre de méthode peut s'appliquer aux I.Q.V paraboliques et aux I.Q.V elliptiques et paraboliques non linéaires provenant d'un problème de contrôle stochastique.

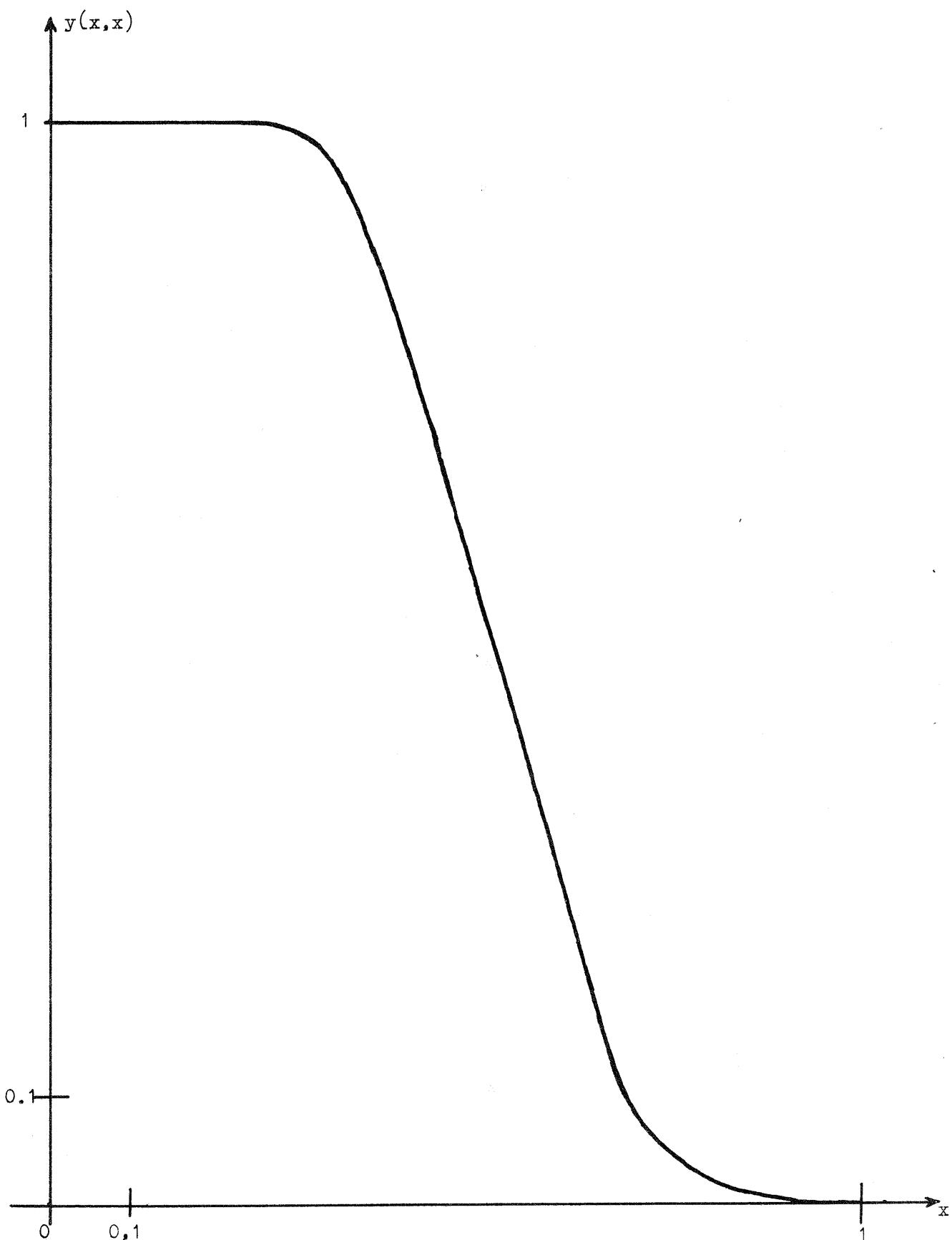


Figure 1

Coupe de la solution calculée $y(x_1, x_2)$

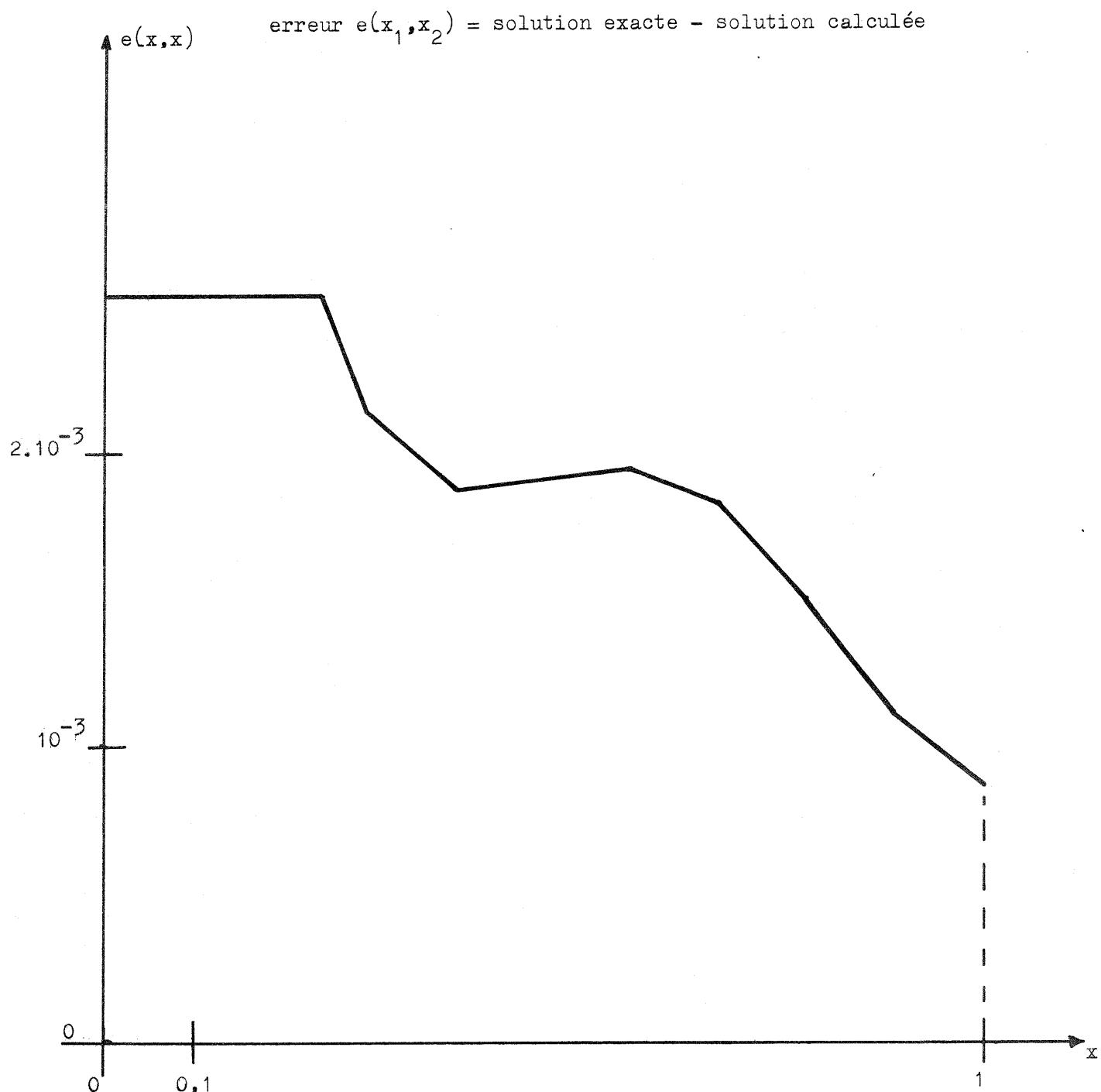


Figure 2

Coupe de l'erreur $e(x_1, x_2)$

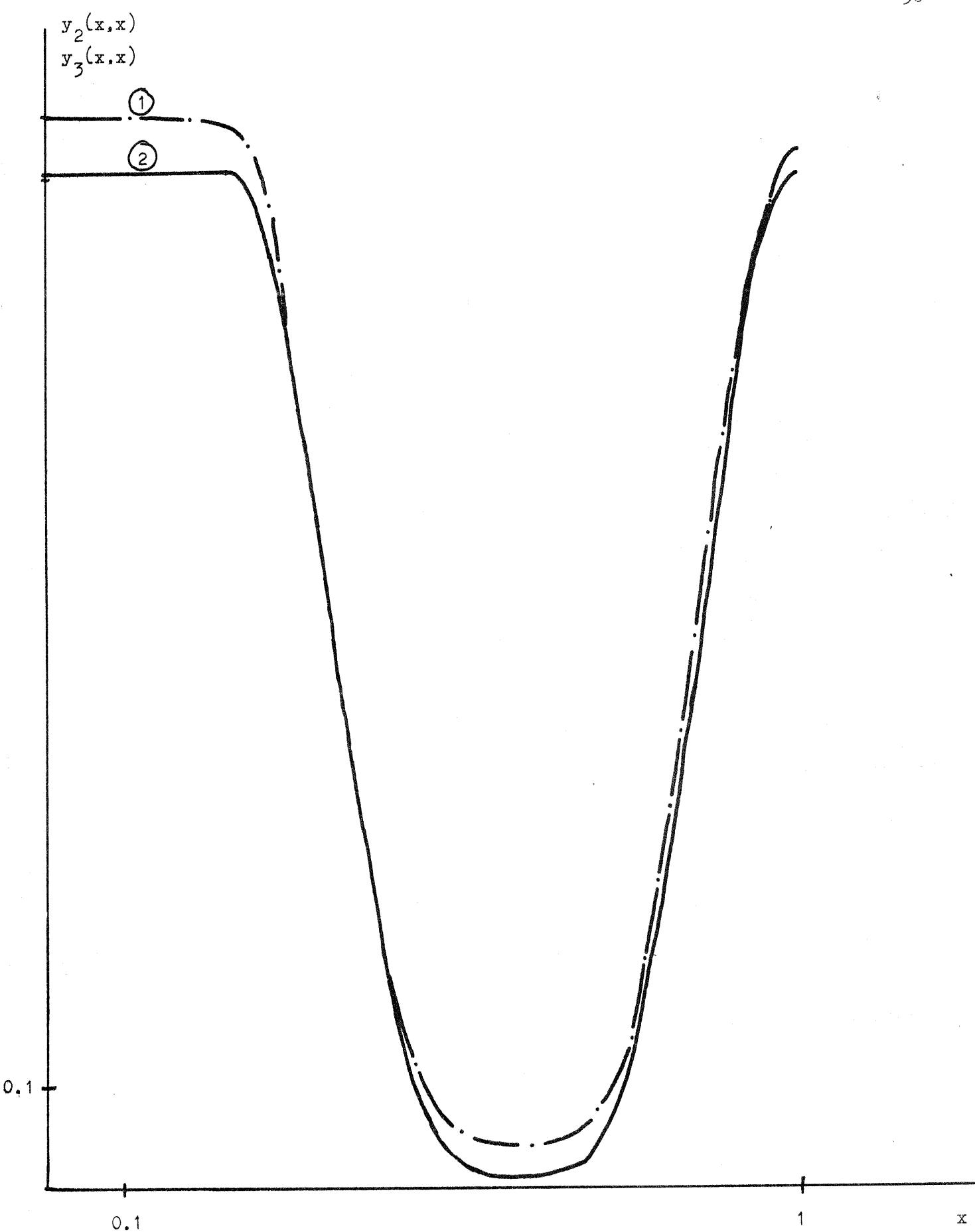


Figure 3

coupes de solutions

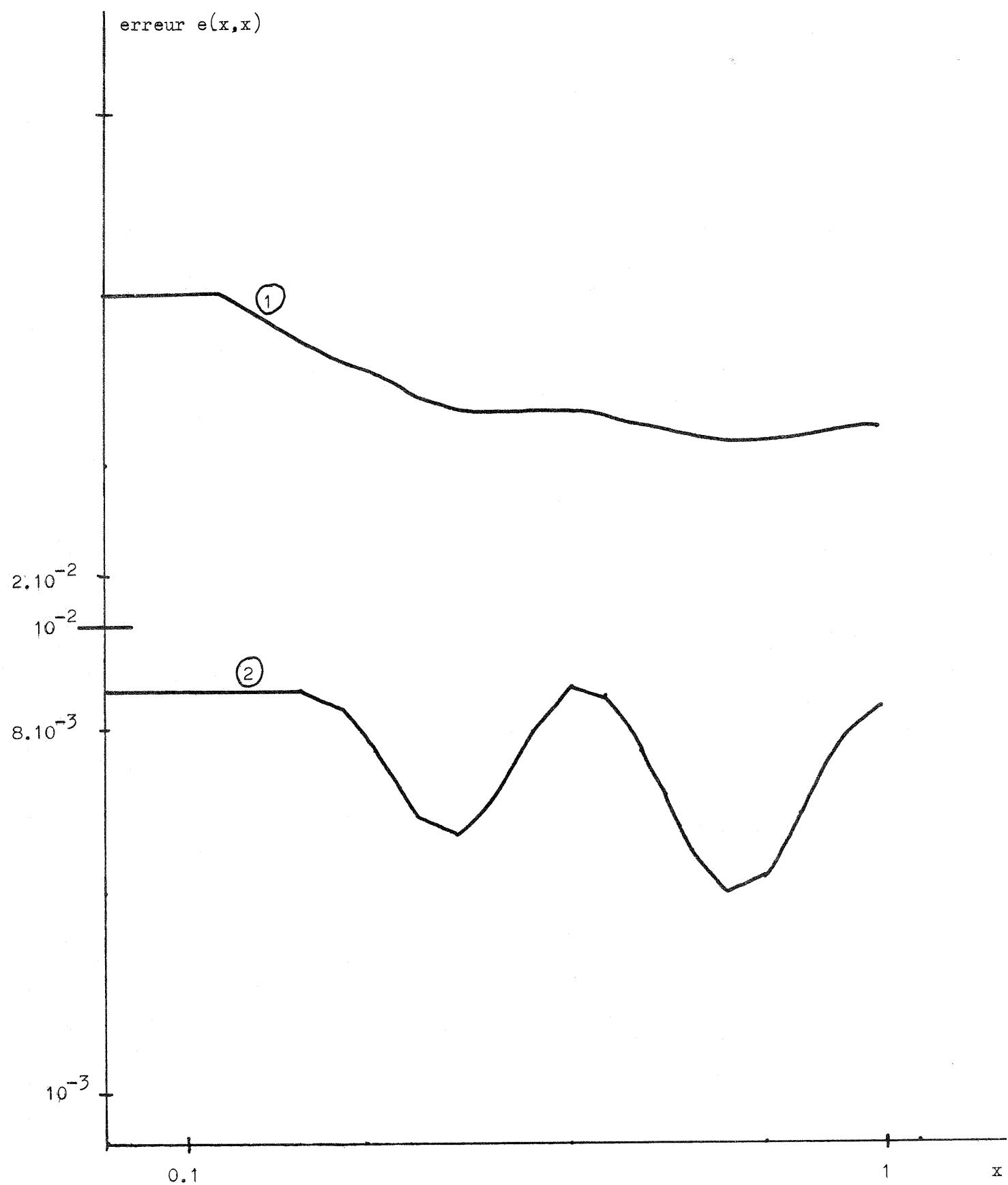


Figure 4

Coupe des erreurs

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. AUBIN , Approximation of elliptic boundary value problems
Wiley Interscience, 1972.
- [2] C. BAIOCCHI , 1) Note au C.R.A.S t.278 (1974) pp. 1201-1204
2) Conférence Congrès ICM Vancouver Août 1974.
- [3] A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS , Ouvrage en préparation.
- Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris -
1) t.276 (1973) pp. 1189-1193
2) t.276 pp. 1333-1337
3) t.278 (1974) pp. 675- 679
4) t.278 pp. 747- 751
5) t.280 (1975) pp. 989- 992
6) t.280 pp. 1049-1053
- [4] A. BENSOUSSAN - M. GOURSAT - J.L. LIONS, C.R.A.S. t.276 pp. 1279-1284
- [5] A. BRETON - C. LEGUAY , Application du contrôle stochastique à la
gestion des centrales thermiques et hydrauliques.
Colloque IRIA Théorie du Contrôle 1974.
- [6] Ph. CIARLET - P.A. RAVIART , Cours sur les éléments finis , Paris VI,
1972.
- [7] R. GLOWINSKI - J.L. LIONS - R. TREMOLIERES , Analyse numérique des
Inéquations variationnelles. Dunod.
- [8] M. GOURSAT - G. MAAREK , Nouvelle approche des problèmes de gestion
de stocks. - Comparaison avec les méthodes classiques.
Rapport Laboria n° 148.

[9] M. GOURSAT - S. MAURIN , Méthodes de résolution des I.Q.V.
Colloque IRIA Théorie du Contrôle. 1974.

[10] M. GOURSAT - J. SZPIRGLAS ,

- Une application du contrôle impulsif à un problème de maintenance. 2ème Congrès National de Fiabilité. 1974.
- Quelques problèmes de maintenance optimale d'un central téléphonique. Annales Télécom. 1976.

[11] M. GOURSAT - J.P. QUADRAT , Analyse numérique d'inéquations associées à des problèmes de temps d'arrêt optimaux en contrôle stochastique. Rapport Laboria n° 154.

[12] T. LAETSCH , A uniqueness theorem for elliptic quasi - variationnal inequalities. J. of Funct. Anal. 18 286-287 (1975).

[13] C. LEGUAY , Application du contrôle stochastique à un problème de gestion optimale d'énergie. Thèse Docteur Ingénieur, Paris IX, 1975.

[14] S. MAURIN , Méthodes de décomposition appliquées aux problèmes de contrôle impulsif. Congrès IFIP Nice Sept. 1975.
à paraître Springer Verlag.

[15] J.P. QUADRAT , Analyse numérique de l'équation de Bellman associée aux problèmes de contrôle de diffusion. Rapport Laboria.

[16] M. ROBIN ,

- Contrôle optimal de files d'attente. Rapport Laboria n°117
- Optimal policy for semi-markovian replacement models. AICQ, Venise Sept. 1975.

