א 3 מ'ה

סמסטר א' תשע"ו.

מבחן אלגברה לינארית 1

המרצה: דר' יולי אידלמן, פרופ' סמיון אלסקר.

המתרגלים: אור ברוך, אופיר גורודצקי, אדוה מונד, גיא מושקוביץ, סלע פריד.

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים ודף נוסחאות אחד A4. יש לכתוב את הפתרון המלא בדף המתאים לשאלה.

משך הבחינה: 3 שעות. המחברת היא טיוטה ולא תיבדק.

שאלה 1. (א)(18) יהיו $\varphi,\psi \in V^*$. נניח כי $Ker(\varphi) \subset Ker(\psi)$. הוכיחו כי קיים סקלר λ כך ש- $\psi = \lambda \cdot \varphi$.

(ב) (18) תהי $\underset{n\times n}{A}$ מטריצה הפיכה עם מקדמים שלמים. הוכיחו כי A^{-1} היא גם עם מקדמים שלמים אם ורק אם $\det(A) = \pm 1$.

שאלה 2. (א)(18) נסמן $P = span\left\{\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$, $Q = span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$. הוכיחו ש- $\mathbb{R}^3 = P \oplus Q$ ועבור וקטור $v = \begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$ מצאו הצגה $\overset{v}{x} = p+q$ כאשר $p \in P, q \in Q$.

(ב) (18) חישבו את הדטרמיננטה
$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

שאלה 3. (א)(18) מצאו את המטריצה ההופכית למטריצה הבאה
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

(ב) (18) יהיו $T: V \to W, S: V \to Z$ טרנספורמציות לינאריות של מ"ו נוצרים סופית כך ש- $Ker(S) \subset Ker(T)$. הוכיחו שקיימת ט"ל $R: Z \to W$ כך ש- $T = R \circ S$.

בהצלחה !!!

סמסטר א׳ תשע״ו.

<u>מבחן אלגברה לינארית 1</u>

<u>המרצה: דר׳ יולי אידלמן, פרופ׳ סמיון אלסקר.</u>

<u>המתרגלים: אור ברוך, אופיר גורודצקי, אדוה מונד, גיא מושקוביץ, סלע פריד.</u>

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים ודף נוסחאות אחד A4. יש לכתוב את הפתרון המלא בדף המתאים לשאלה.

משך הבחינה: 3 שעות. המחברת היא טיוטה ולא תיבדק.

ציונים:

1	2	3	4	5	6	7	8
14	18	18	17	18	15		

ציון סופי: 100

שאלה 1א.

יהיו $\varphi,\psi\in V^*$ הניחו כי $\ker\varphi\subset\ker\psi$ כי קיים סקלר λ כך ש- $\psi=\lambda\varphi$. V נוצר סופית.

נשלים את φ לבסיס של V^*. נשים לב כי $\dim V^*=\dim V=n$.

$B=\{\varphi, f_2,\dots f_n\}$ בסיס של V^*.

נבחר $V_1,\dots,V_n$ להיות בסיס של V כך ש- B הינו הבסיס הדואלי שלו.

מתקיים: $\varphi(v_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=1\\ 0 & i\neq 1\end{cases}$.

מכאן ש- $V_2,\dots,V_n\in\ker\varphi$. לכן $V_2,\dots,V_n\in\ker\psi$ מהנתון.

נשלים את $V_2,\dots,V_n$ לבסיס נוסף של V ע"י V_1', ~~נשים לב~~ ~~כי $V_1'=\sum_{i=1}^n\lambda_iV_i$ לכן $V_1'\in V$~~. כך שהבסיס $V_1',V_2,\dots,V_n$ הדואלי שלו הינו $\{\psi,f_2,\dots,f_n\}$ למה? יש להסביר (-1)

נשים לב כי מתקיים $\psi(V_1')=1$, $\underset{2\le i\le n}{\psi(v_i)=0}$.

כמו כן, $V_1'\in V$ לכן $V_1'=\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i$

$$\varphi(V_1')=\varphi\sum_{i=0}^n\lambda_iV_i\underset{\text{לינאריות}}{=}\sum_{i=0}^n\lambda_i\varphi(v_i)=\lambda_1\overset{1}{\varphi(V_1)}=\lambda_1=\lambda_1\psi(V_1')$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(V_1')=\lambda_1\psi(V_1')$$

$$\lambda_1^{-1}\cdot\varphi=\psi\qquad\left(\underset{2\le i\le n}{\varphi(v_i)=0=\psi(v_i)}\right)$$

יש להסביר (-3)

14/18

17/18 יפה!

שאלה 1ב. $A_{n\times n}$ הפיכה עם ~~[illegible]~~ מקדמים שלמים.

צ"ל: A^{-1} עם מקדמים שלמים אמ"מ $\det A = \pm 1$.

⇐ נניח כי A^{-1} עם מקדמים שלמים.

ידוע כי $A\cdot A^{-1}=I_n$ לכן $\det A\cdot \det A^{-1}=\det I_n$ ⇐ $\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$

$\det A$ מתקבלת מהכפלות, מפעולות חיבור וכפל של מקדמי המטריצה A. מכיוון שמקדמים אלו שלמים, גם $\det A$ שלמה (מ-$\mathbb{Z}$)

מכיוון ש-A^{-1} בעלת מקדמים שלמים, מאותו הנימוק גם $\det A^{-1}$ שלמה (מ-$\mathbb{Z}$).

לסיכום, שני השלמים היחידים אשר יכולים לקיים את השוויון $\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$

הם ± 1. כאשר $\det A = 1$ ⇐ $\det A^{-1}=1$.

" $\det A = -1$ ⇐ $\det A^{-1} = -1$. כנדרש. ✓

⇒ נניח כי $\det A = \pm 1$.

ידוע כי $[\operatorname{adj} A]_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot \det M_{ji}(A)$.

מכיוון שמקדמי A שלמים, $\det M_{ji}(A)$ (דטרמיננטה של A ללא שורה j ועמודה i) מורכבת מפעולות חיבור וכפל על מספרים שלמים, ולכן שלמה.

מכאן, שכל מקדמי $\operatorname{adj} A$ הינם שלמים גם כן. כיוון ש-A הפיכה, מתקיים:

$$A\cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot I_n$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A.$$

$\operatorname{adj} A$ - בעלת מקדמים שלמים ו- $\det A = \pm 1$, לכן A^{-1} הינה גם כן בעלת מקדמים שלמים. כנדרש. ✓

שאלה 2א.

$P=Sp\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$, $Q=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$ הוכיחו כי $\mathbb{R}^3=P\oplus Q$ ועבור $V=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$

מצאו הצגה $V=p+q$ כאשר $p\in P$, $q\in Q$

נוכיח כי $\mathbb{R}^3=P\oplus Q$.

נמצא בסיס ל-Q. נבדוק האם הוקטורים תלויים לינארית ואם כן, נמצא בסיס אשר פורש את Q. נעשה זאת ע"י הצבת הוקטורים כשורות מטריצה ונדרג מטריצה זו.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-3&2&0\\-2&3&1\end{pmatrix}\underset{=}{\xrightarrow[R_3\to R_3+2R_1]{R_2\to R_2+3R_1}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&5&3\\0&5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&5&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

שלושת הוקטורים הנתונים ת"ל, וקיבלנו שני וקטורים בת"ל המקיימים: $Q=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$.

כעת נוכיח כי $P\cap Q=\{0\}$.

יהי $x\in P\cap Q$. מכאן ש- $x\in Q$, אזי $x=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$.

" " $x\in P$, אזי $x=\gamma\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

$$\Leftarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\quad \begin{aligned}\alpha+0\beta&=0\gamma\\ \alpha+5\beta&=3\gamma\\ \alpha+3\beta&=\gamma\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\alpha+0\beta-0\gamma&=0\\ \alpha+5\beta-3\gamma&=0\\ \alpha+3\beta-\gamma&=0\end{aligned}$$

נבדוק עבור אלו α,β,γ הדבר מתקיים:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&5&-3\\1&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&-3\\0&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{3}{5}\\0&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{3}{5}\\0&0&-\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כלומר הדבר מתקיים רק כאשר $\alpha=\beta=\gamma=0$ כלומר $x=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. מכאן ש- $P\cap Q=\{0\}$, $\dim(P\cap Q)=0$. נשים לב כי $\dim P=1$, $\dim Q=2$ ולנוסחת המימדים:

$$\dim(P+Q)=\dim Q+\dim P-\dim(P\cap Q)=2+1-0=3$$

ידוע כי $\dim\mathbb{R}^3=3$ וכן $P+Q\subseteq\mathbb{R}^3$. לכן מכך ש- $\dim(P+Q)=\dim\mathbb{R}^3=3$ נובע: $P+Q=\mathbb{R}^3$. בנוסף לכך ש- $P\cap Q=0$,

מקבלים $P\oplus Q=\mathbb{R}^3$ כנדרש.

נתון $V=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$. נמצא הצגה $V=p+q$ כך ש- $p\in P$, $q\in Q$.

$p=\gamma\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, $q=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$

המשך בדף האחורי

$$\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}}_{q \Downarrow \text{II}} + \underbrace{\gamma\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}_{p} \quad \Leftarrow \quad V = p + q$$

$$\begin{aligned} \alpha + 0\beta + 0\gamma &= 1 \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma &= 4 \\ \alpha + 3\beta + \gamma &= 1 \end{aligned}$$

נעביר לצורה מדורגת קנונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - R_1}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{R_2 \to \frac{R_2}{3}}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{R_3 \to R_3 - 5R_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 3 \end{pmatrix} \overset{R_3 \to R_3 \cdot \frac{3}{4}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - \frac{R_3}{3}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \gamma &= \frac{9}{4} \\ \beta &= -\frac{3}{4} \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

לכן:

$$V = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \underbrace{1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}}_{q \in Q} + \underbrace{\frac{9}{4} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}_{p \in P}$$

$$V = \underset{q}{\begin{pmatrix}1\\-\frac{11}{4}\\-\frac{5}{4}\end{pmatrix}} + \underset{p}{\begin{pmatrix}0\\\frac{27}{4}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}}$$

כנדרש.

18/18

שאלה 12ב. חשבו את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

נשים לב! לדטרמיננטה אשר לה שורת אפסים, שווה לאפס. כמו כן $|A|=|A^t|$ לכן גם כאשר יש עמודת אפסים, הדטרמיננטה שווה לאפס.
$(|A|=|A^t|)$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & d^2+2d+1 & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix} = (*)$$

~~מתכונות הדטרמיננטה~~

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 & c^2 \\ d^2 & d^2 & d^2 & d^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 2a & 4a & 6a \\ b^2 & 2b & 4b & 6b \\ c^2 & 2c & 4c & 6c \\ d^2 & 2d & 4d & 6d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4 & 9 \\ b^2 & 1 & 4 & 9 \\ c^2 & 1 & 4 & 9 \\ d^2 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$C_3 \to C_3 - C_2$; $C_3 \to C_3 - 2C_2$; $C_3 \to C_3 - 4C_2$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & b^2 & 0 & b^2 \\ c^2 & c^2 & 0 & c^2 \\ d^2 & d^2 & 0 & d^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 2a & 0 & 6a \\ b^2 & 2b & 0 & 6b \\ c^2 & 2c & 0 & 6c \\ d^2 & 2d & 0 & 6d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 0 & 9 \\ b^2 & 1 & 0 & 9 \\ c^2 & 1 & 0 & 9 \\ d^2 & 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

עמודת אפסים   עמודת אפסים   עמודת אפסים

$$0 + 0 + 0 = 0$$

(עמודה) $C_4 \to C_4 + C_1 - C_2 - C_3$

$$(*) = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 & 5 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 & 5 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 & 5 \\ d^2 & d^2+2d+1 & d^2+4d+4 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_3 \to C_3 - 2C_2 + C_1}{=}$$

פעולה לגיטימית
לא משנה את ה-$\det$.

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & 2 & 5 \\ b^2 & b^2+2b+1 & 2 & 5 \\ c^2 & c^2+2c+1 & 2 & 5 \\ d & d^2+2d+1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_3 \to C_3 - \frac{2}{5}C_4}{=} \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & 0 & 5 \\ b^2 & b^2+2b+1 & 0 & 5 \\ c^2 & c^2+2c+1 & 0 & 5 \\ d^2 & d^2+2d+1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{עמודת אפסים}}{=} 0$$

שאלה 3א.

מצאו את המטריצה ההופכית למטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

אנו יודעים כי על מנת למצוא את המטריצה ההופכית, יש לדרג את המטריצה עד למטריצת היחידה, כאשר יש לעשות את אותן הפעולות על מטריצת היחידה. כלומר, כשנקבל את מטריצת היחידה מהפעולות שעשינו, המטריצה שנקבל מביצוע אותן הפעולות על מטריצת היחידה, הינה המטריצה ההופכית. לדוגמא:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{A}{\uparrow} \qquad\qquad\qquad \underset{A^{-1}}{\uparrow}$$

נשים לב כי על מנת לדרג את המטריצה שקיבלנו, יש לחסר מכל שורה ~~[illegible]~~ את השורה שמתחתיה, החל מהשורה הראשונה ועד השורה הלפני אחרונה. נקבל:

$R_i \to R_i - R_{i+1}$
החל מ- $i=1$ ועד $i=n-1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\qquad A \qquad\qquad\qquad I_n$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & 0 & 1 & -1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & -1 \\ & & & & & 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

לכן ההופכית הינה

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15/18 ~~18/18~~

$\dim Z=m$

שאלה 3ב.

יהיו $S:V\to Z$, $T:V\to W$ ה"ל של מ"ו נוצרים סופית $\ker(S)\subseteq \ker T$. נניח כי $\dim V=n$

צ"ל: קיימת $R:Z\to W$ כך ש- $T=R\circ S$

נבחר בסיס של $\ker S$: $v_1,\dots,v_s$. נשלים אותו לבסיס של $\ker T$ (כיוון ש $\ker S\subseteq \ker T$ מהנתון)

$v_1,\dots,v_s,v_{s+1},\dots,v_T$. נשלים אותו לבסיס של V (כיוון ש- $\ker T\subseteq V$):

$v_1,\dots,v_s,v_{s+1},\dots v_T,v_{T+1},\dots v_n$.

נשים לב כי מכיוון ש $v_1,\dots,v_s\in\ker S$, $\operatorname{Img}S=Sp\{S(v_{s+1}),\dots S(v_T),S(v_{T+1}),\dots,S(v_n)\}$.

כמו כן, $\operatorname{Img}S\subseteq Z$.

נגדיר בסיס ל- $\operatorname{Img}S$ - $z_1,\dots,z_s$ ונשלים אותו לבסיס של Z:

$z_1,\dots,z_s,z_{s+1},\dots z_m$.

נגדיר את R באופן הבא: $R(0)=0$ (תנאי הכרחי).

לכל $S(v_i)$ $s+1\le i\le T$, $R(S(v_i))=0$.

לכל $S(v_i)$ $T+1\le i\le n$, $R(S(v_i))=T(v_i)$

לכל z_j $s+1\le j\le m$. $R(z_j)=1$.

מה זה 1? הרי $R(z_j)$ זה וקטור מ-W.

נשים לב כי

$$\operatorname{Img}S=Sp\{\underbrace{z_1,\dots,z_s}_{P}\}=Sp\{\underbrace{S(v_{s+1}),\dots,S(v_T),S(v_{T+1}),\dots S(v_n)}_{Q}\}$$

אנו יודעים כי $SpP=SpQ$ ⇐ כל וקטור ב-P ניתן להציג כוקטור מ-Q. (*)(הוכחה בדף השני של האמון)

לכן R מוגדרת היטב. כאשר מכיוון שכל וקטור מ- $z_1,\dots z_s$ ניתן להציג כצירוף לינארי של $S(v_{s+1}),\dots,S(v_T),S(v_{T+1}),\dots,S(v_n)$ (ועבור וקטורים אלו R מוגדרת).

לכן R מוגדרת על בסיס ⇐ מוגדרת היטב.

נבדוק כעת האם $T=R\circ S$. עבור v_i $1\le i\le s$:

$v_1,\dots,v_T\in\ker T$

$$R\circ S(v_i)=R(S(v_i))=R(0)=0=T(v_i)$$

עבור v_i $s+1\le i\le T$:

$$R\circ S(v_i)=R(S(v_i))=0=T(v_i)$$

עבור v_i $T+1\le i\le n$:

$$R\circ S(v_i)=R(S(v_i))=T(v_i)$$

לכן עבור כל וקטור מהבסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ של V מתקיים: $T(v_i)=R\circ S(v_i)$ לכן $T=R\circ S$ כנדרש.

$$\mathrm{Img}\,S = Sp\overset{P}{(z_1,\dots,z_s)} = Sp\overset{Q}{\big(S(v_{s+1}),\dots S(v_T), S(v_{T+1}),\dots S(v_n)\big)}$$

<u>צ"ל</u>: כל וקטור מ- P ~~Sp(P)~~ ניתן להציג כצירוף לינארי של וקטורים מ- Q.

נבחר z_i $1 \le i \le s$. $z_i \in Sp(z_1,\dots,z_s)$ לכן ~~[illegible]~~ $z_i \in \mathrm{Img}\,S$.

$z_i \in Sp\,Q$.

לכן ניתן להציג את z_i כצירוף לינארי של וקטורים מ- Q.

<u>מש"ל</u>

דף חירום