4.분할정복

4.5 점화식을 풀기 위한 마스터 방법

T(n) = aT(n/b) + f(n)

마스터 방법은 위와 같은 점화식을 푸는 기본 지침을 제공한다. 여기서 a≥1, b>1 인 상수이고 f(n)은 점근적으로 양인 함수다.

마스터 정리

정리 4.1 (마스터 정리)

a≥1, b>1 인 상수이고 f(n)이 양의 함수라 하고, 음이 아닌 정수에 대해 T(n)이 다음 점화식에 의해 정의된다고 하자.

T(n) = aT(n/b) + f(n)

여기서 n/b는 ⌈n/b⌉ 또는 ⌊n/b⌋을 뜻하는 것으로 이해한다. 그러면 T(n)의 점근적 한계는 다음과 같다.

$$1.\ \text{상수}\ e\text{에 대해}\ f(n) = O(n^{log_b a - e})\text{이면},\ T(n) = \Theta(n^{log_b a})\text{이다.}$$
$$2.\ f(n) = \Theta(n^{log_b a})\text{이면},\ T(n) = \Theta(n^{log_b a} log_2 n)\text{이다.}$$
$$3.\ \text{상수}e(>0)\text{에 대해}\ f(n) = \Omega(n^{log_b a + e})\text{이고 상수}\ c(<1)\text{와 충분히 큰 모든}\ n\text{에 대해}\ af(n/b) \le cf(n)\text{이면},\ T(n) = \Theta(f(n))\text{이다.}$$

세 경우 모두

$$\text{함수}\ f(n)\text{과 함수}\ n^{log_b a}$$

를 비교하고 있다. 경우 1과 같이 후자가 더 크다면 해는

$$T(n) = \Theta(n^{log_b a})$$

이다. 경우 3과 같이 함수 f(n)이 더 크다면 해는

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

이다. 경우 2와 같이 두 함수가 같은 크기라면 로그 성분을 곱해 해는

$$T(n) = \Theta(n^{log_b a} log_2 n) = \Theta(f(n) log_2 n)$$

이 된다.

참고 사항

경우 1

f(n)이 n^{log_ba}보다 작아야 할 뿐 아니라 다항식적으로 작아야 한다. 즉, f(n)은 점근적으로 상수 e > 0에 대해 1/n^e과 견줄만한 비율로 n^{log_ba}보다 작아야 한다.

경우 3

마찬가지로 f(n)이 다항식적으로 커야한다. 이에 더해 af(n/b) ≤ cf(n) 이라는 **정규(regularity)**조건을 만족시켜야 한다.

마스터 정리는 위 사항들로 인해 모든 가능성을 다루고 있지 않고 틈이 있다.

마스터 방법 사용하기

예시 1

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$
$$a = 9,\ \ b = 3,\ \ f(n) = n\text{이므로}\ \ n^{log_b a} = n^{log_3 9} = \Theta(n^2)$$
$$e = 1\text{일때}\ \ f(n) = O(n^{log_3 9 - e})\text{이므로 마스터 정리 경우 }1\text{을 적용하여}$$
$$T(n) = \Theta(n^2)$$

예시 2

$$2.\ \ T(n) = T(2n/3) + 1$$
$$a = 1,\ \ b = 3/2,\ \ f(n) = 1\ \text{이므로}\ \ n^{log_b a} = n^{log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$
$$f(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(1)\text{이므로 경우 }2\text{를 적용하면}$$
$$T(n) = \Theta(log_2 n)$$

예시 3

$$3.\ \ T(n) = 3T(n/4) + nlog_2 n$$
$$a = 3,\ \ b = 4,\ \ f(n) = nlog_2 n\text{이므로}\ \ n^{log_b a} = n^{log_4 3} = O(n^{0.793})$$
$$e < 1\text{일 때},\ \ f(n) = \Omega(n^{log_4 3 + e})\text{이다.}$$
$$af(n/b) = 3(n/4)log_2 n/4 \le (3/4)nlog_2 n = cf(n)\text{이므로}$$
$$c = 3/4\text{일때, 충분히 큰 }n\text{에 대해 정규 조건이 만족한다.}$$
$$\text{따라서},\ \ T(n) = \Theta(nlog_2 n)\text{이다.}$$

예시 4

$$T(n) = 2T(n/2) + nlog_2 n$$
$$a = 2,\ \ b = 2,\ \ f(n) = nlog_2 n\text{이고}\ \ n^{log_b a} = n\text{이지만 마스터 방법을 적용할 수 없다.}$$
$$f(n)/n^{log_b a} = (nlog_2 n)/n = log_2 n\text{의 비율은 어떤 양의 상수 }e\text{에 대해서도 점근적으로 }n^e\text{보다 작기 때문이다.}$$