4.분할정복

4.4 점화식을 풀기 위한 재귀 트리 방법

재귀 트리(recursion tree)에서는 각 노드가 재귀 호출되는 하위 문제 하나의 비용을 나타낸다. 트리의 각 레벨마다 그 비용을 합한 후 모든 레벨당 비용을 합한다.

예시: T(n) = 3T(n/4)+cn^2

T(n) 은 cn^2 + T(n/4) 3개로 이루어진다. 각 T(n/4)는 c(n/4)^2 + T(n/16) 3개 로 이루어 진다. 즉 맨 위부터 각 레벨은 cn^2 1개, c(n/4)^2 3개, c(n/16)^2 9개 .. 로 반복됨을 알 수있다. 이것이 어느정도 깊이까지 반복될까 ?크기를 살펴보면 n -> n/4 -> n/16 이므로 레벨 i 에서는 n/(4^i) 임을 유추할 수 있다. 따라서 4^i = n 일때까지 반복되므로 i = log_4(n) 이라는 정수일떄 까지 반복된다. i는 0단계부터 였으므로 총 횟수 log_4(n) + 1개 이다. 레벨 i = log_4(n) 이다.

위에서 말했듯 각 비용은 레벨이 0부터 cn^2 , (c(n/4)^2) x 3, (c(n/16)^2) x 9 , ... 의 형태를 보이는데, 정리하면 레벨이 증가하면서 3배씩 증가하므로 레벨 i에서 모든 노드의 총 비용은 (3/16)^i x cn^2 이다. 마지막 레벨인 i = log_4(n)일때를 합을 구해보면?

$$(3/16)^i * cn^2 = (3^i/4^{2i}) * cn^2, i = log_4 n \text{이므로}$$
$$(3^{log_4 n}/n^2) * cn^2 = c3^{log_4 n}$$
$$3^{log_4 n} = n^{log_4 3}\text{이기때문에}$$
$$c3^{log_4 n} = cn^{log_4 3}\text{이다. 따라서 마지막 레벨 } i = log_4 n\text{일때 총 비용은}$$
$$cn^{log_4 3}\text{이고}, \Theta(n^{log_4 3})\text{이라할수있다.}$$

위에서 쓰인 지수와 로그 법칙은 가장 아래에 설명해놨으니 참고하길 바란다. 넘어가서, 모든 레벨에서 합을 구해보자.

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + (\frac{3}{16})^2 cn^2 + ... + (\frac{3}{16})^{log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{log_4 3})$$
$$T(n) = \sum_{i=0}^{log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{log_4 3})$$
$$T(n) = \frac{(\frac{3}{16})^{log_4 n} - 1}{\frac{3}{16} - 1} cn^2 + \Theta(n^{log_4 3})$$

해를 구하기에 너무 복잡하기 때문에 무한 기하급수를 상한으로 사용한다.

$$\begin{aligned} T(n) = \sum_{i=0}^{log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{log_4 3}) &< \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{log_4 3}) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{3}{16}} cn^2 + \Theta(n^{log_4 3}) \\ &= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{log_4 3}) \\ &= O(n^2) \end{aligned}$$

오늘의 결론? 재귀 트리에서 각 레벨에서 노드들의 비용과 비용의 총합, 트리의 깊이 등을 통해 총 합을 구하여 점화식을 풀 수 있다는 것!

잘 쓰이지는 않는 지수와 로그 관계가 나왔는데 참고가 되길 바라며 추가한다.

$$c^{log_c a} = a \text{임을 증명해보자.}$$
$$x = log_c a \text{ 라고 가정하고 이 식의 양변에 } c\text{의 지수를 취하면,}$$
$$c^x = a\text{이다. } x = log_c a\text{이므로 대입하면}$$
$$a = c^x = c^{loc_c a}\text{이다. 따라서,}$$
$$c^{log_c a} = a\text{이다.}$$

이를 토대로 아래도 증명할 수 있다.

$$a^{log_c b} = b^{log_c a}\text{이다. 왜냐하면}$$
$$a = c^{log_c a}\text{이므로}$$
$$a^{log_c b} = (c^{log_c a})^{log_c b} = c^{log_c a * log_c b} = c^{log_c b * log_c a}$$
$$= b^{log_c a} \text{ 이기 때문이다.}$$

또한 T(n) 의 시그마(∑)는 공비가 3/16 인 등비수열의 합을 나타내고 있었다. 따라서 등비수열의 합 공식을 사용하였다.

$$\text{첫째항이 } a, \text{공비가 } r\text{인 등비수열 } a(n)\text{의 } n\text{항까지의 합 } S(n)\text{은}$$
$$S(n) = a\frac{r^n - 1}{r - 1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$