L.EIC
#1.2

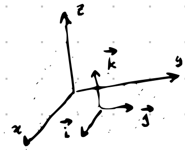
Análise Matemática II

Apontamentos

1. Funções vetoriais

Formalização de vetores

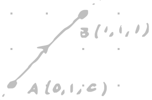
ou $\vec{F}(t) = \begin{cases} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{cases}$



$$\vec{F}(t) = F_1(t) \cdot \vec{i} + F_2(t) \cdot \vec{j} + F_3(t) \cdot \vec{k} = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$$

- **Parametrização** | Limitar o domínio de uma função

Ex:



$$\vec{F}(t) = A + \vec{AB} \cdot t, \ t \in [0,1]$$

$$= (t, 1, t), \ t \in [0,1]$$

- **Relação entre funções vetoriais e escalares**

$$\vec{F}(t) = (\underbrace{t}_{\text{Variável}}, \underbrace{F(t)}_{\text{Expressão escalar}}, 0) \rightarrow$$ Nulo, se a função tiver apenas 2 dimensões.

- **Produto entre uma função escalar e vetorial**

$$\vec{F}(g(x)) = (F_1(g(x)), F_2(g(x)))$$

Ex: $\left.\begin{array}{l} \vec{F}(t) = (1, t^2) \\ g(x) = \ln x \end{array}\right\} \ \vec{F}(g(x)) = (1, \ln^2 x)$

- **Derivadas e integrais** | Aplicar a todas as componentes

Ex: $\int \vec{F}(t)\, dt = (t, -\cos t, \frac{t^2}{2})$ $\quad \vec{F}(t) = (1, \operatorname{sen} t, t)$ $\quad \vec{F}'(t) = (0, \cos t, 1)$

- **Limites**

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{a} \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \|\vec{F}(t)\| = \|\vec{a}\|$$

- **Produto vetorial** (*) Desenvolvimento da matriz na 1ª linha

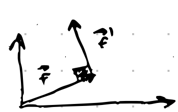
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

↳ $(\vec{F}(t) \cdot g(t))' = \vec{F}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{g}'(t)$ $\quad$ ↳ $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \operatorname{sen} \alpha$

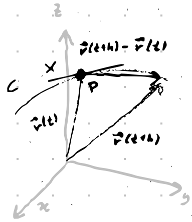
- **Teorema**

$$\vec{F}'(t) \cdot \vec{F}(t) = 0$$

(*) $\vec{F}$ é vetorial diferenciável; $\|\vec{F}\|$ constante



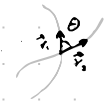
Curvas no espaço



- Tangente a uma curva | $\vec{r}\,'(t)$ será o vetor diretor da tangente

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

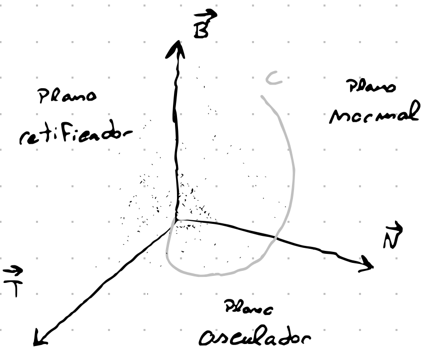
$$X(u) = P + \vec{r}\,'(t) \cdot u \,, \quad u \in \mathbb{R}$$



- Ângulo formado por duas curvas

$$\cos \theta = \frac{|\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(u)|}{\|\vec{r}_1(t)\| \cdot \|\vec{r}_2(u)\|}$$

Triedro de Frenet



- Versor da tangente

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

- Versor normal (principal)

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{\|\vec{T}\,'(t)\|}$$

Aponta sempre para o centro da curvatura.

- Versor binormal

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

- Plano osculador

$$X(u,v) = P + u\,\vec{T}(t) + v\,\vec{N}(t) \,, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

- Plano normal

$$X(u,v) = P + u\,\vec{N}(t) + v\,\vec{B}(t) \,, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

- Plano retificador

$$X(u,v) = P + u\,\vec{T}(t) + v\,\vec{B}(t) \,, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

$\boxed{*}$ É possível calcular $\vec{r}''(t)$ a partir dos versores:

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\| \, \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \, \|\vec{T}'(t)\| \, \vec{N}(t)$$

Arcos e curvas

- **Comprimento do arco C**

$$L(C) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| \, dt \quad \text{ou} \quad s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(t)\| \, dt$$

$\boxed{*}$ Uma função vetorial pode ser parametrizada em relação ao comprimento s:

Ex: $\vec{f}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t, 0), \; t \in [0, 2\pi]$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{(-2\,\text{sen}\, t)^2 + (2\cos t)^2} \, dt = 2 \Big|_0^t = 2t \iff t = \frac{S}{2}$$

$\therefore \vec{f}(s) = (2\cos(\frac{S}{2}), 2\,\text{sen}(\frac{S}{2}), 0), \; S \in [0, 4\pi]$ //

- **Curvatura de uma curva** (variação da direção de $\vec{T}$)

$$k = \left\| \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} \right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

- $k \geq 0$

- **Raio de curvatura**

$$\rho = \frac{1}{k}$$

- $\rho \to \infty \mid k \to 0 \mid$ Curva tende para uma linha reta
- $\rho \to 0 \mid k \to \infty \mid$ Curva tende para um ponto

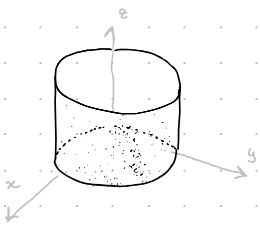
- **Centro do círculo osculador**

$$C_0(t) = \vec{r}(t) + \rho(t) \cdot \vec{N}(t)$$

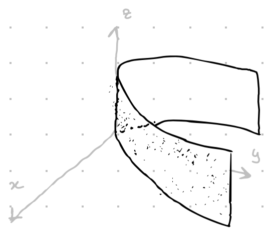
2. Funções escalares

Superfícies esféricas

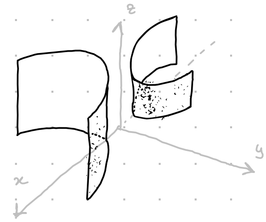
- **Cilindro elíptico**
  $x^2 + y^2 = 1$



- **Cilindro parabólico**
  $x^2 = y$

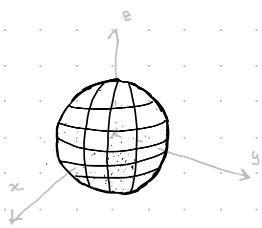


- **Cilindro hiperbólico**
  $x^2 - y^2 = 1$

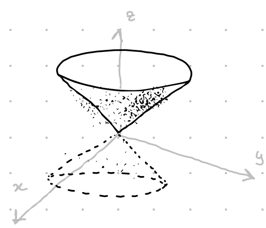


Estas 3 superfícies são a base para as outras superfícies mais complexas:

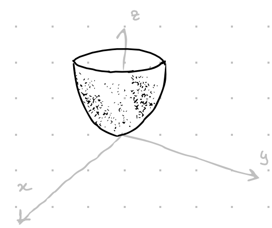
- **Elipsoide**
  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



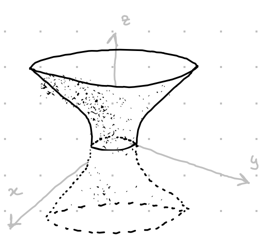
- **Cone**
  $z^2 = x^2 + y^2$



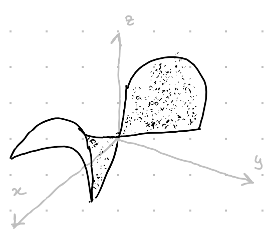
- **Parabolóide elíptico**
  $z = x^2 + y^2$



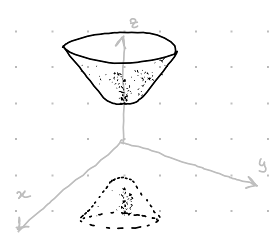
- **Hiperboloide de uma folha**
  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$



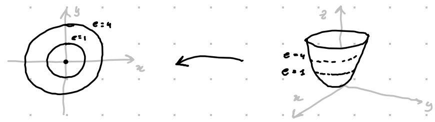
- **Paraboloide hiperbólico**
  $z = x^2 - y^2$



- **Hiperboloide de duas folhas**
  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$



(*) Curvas e superfícies de nível são úteis para visualizar mais facilmente uma função de 3 ou mais variáveis.



Derivadas parciais

Derivar como se as restantes variáveis fossem constantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

Ex// $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 4$

$f_x = -2x$

$f_y = -2y$

- **Derivadas de segunda ordem**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

(*) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

- A existência de derivadas parciais num ponto não garante a **continuidade** da função nesse ponto.

Limites

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = L$$

A função tem o mesmo limite em todas as direções de $\vec{x}$ (x,y).

- Para provar que uma função **não tem limite** num ponto, basta encontrar duas direções que não tendam para o mesmo valor.

Ex// $f(x,y) = \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$ $\therefore$ Conclui-se que f não tem limite em $(0,0)$//

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x^3}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{2} = \frac{1}{2}$$

Gradiante

$$\nabla f(x,y) = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}$$

- Se $\nabla f(\vec{x})$ existe, então f é contínua em $\vec{x}$.
- As operações entre gradiantes são semelhantes aos vetores.
- A função cresce mais rapidamente na direção de $\nabla f(\vec{x})$.
- $\nabla f(\vec{x})$ é perpendicular à sua curva de nível.

- **Reta tangente à curva**

$$\vec{t} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Derivada direcional

(*) θ | Ângulo formado entre os vetores $\nabla f(x,y)$ e $\vec{u}$.

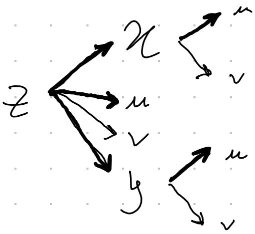
$$f'_{\vec{u}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x,y)\| \cos\theta$$

- $\vec{u}$ é um versor (vetor normalizado : $\|\vec{u}\| = 1$) representado no plano xOy (em duas variáveis)
- Maior crescimento | direção de $\nabla f(x,y)$
- Menor crescimento | direção oposta a $\nabla f(x,y)$

Regra da cadeia

Ex.: $z = f(u, x, y, v)$
↳ $x(u, v)$
↳ $y(u, v)$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$



Derivação implícita

Derivar "y" em função de "x", porém é impossível colocar "y" em evidência
Seja $g(x,y) = 0$ e $y = f(x)$, então:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

(*) Também é possível derivar ambos os lados da equação $g(x,y) = 0$ e colocar $\frac{\partial y}{\partial x}$ em evidência.

Extremos locais

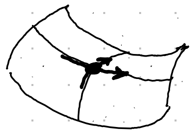
Uma função f possui um extremo local se $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ ou não existe

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad D = AC - B^2$$

Se:

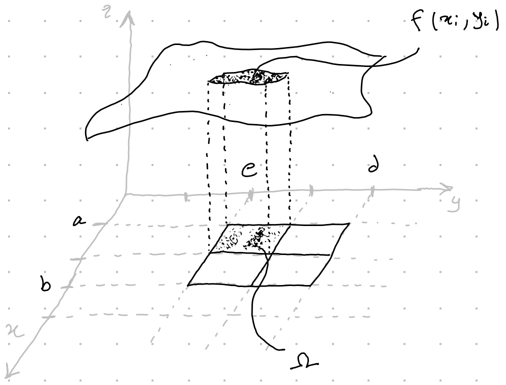
$\nabla f = \vec{0}$

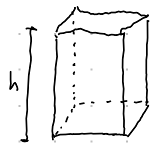
$D > 0$	A ou C > 0	Mínimo
	A ou C < 0	Máximo
$D < 0$		Ponto de sela
$D = 0$		Inconclusivo



- **Ponto de sela** | Parece um mínimo ou um máximo, dependendo da direção

3. Integrais duplos



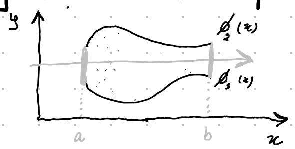


$$V = \overset{\Omega}{A_\square} \cdot \overset{f(x,y)}{h}$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Tipos de regiões

I Verticalmente simples

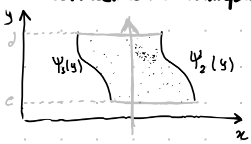


$a \leq x \leq b$

$\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

II Horizontalmente simples



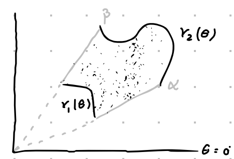
$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$

$c \leq y \leq d$

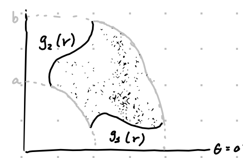
$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Coordenadas polares:

I



II



Jacobianos da mudança de variável

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

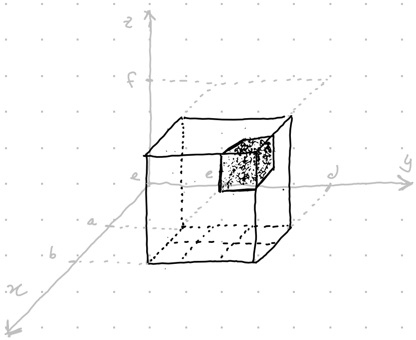
(*) $(u,v) \rightarrow (x,y)$

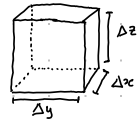
Ex: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$ $J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$$\therefore \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Gamma f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, \boxed{r}\, dr\,d\theta$$

4. Integrais triplos

(*) Impossível visualizar uma função de 4 variáveis no espaço





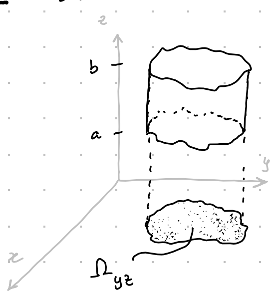
"Altura"

"Volume da partição"

$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Tipos de regiões

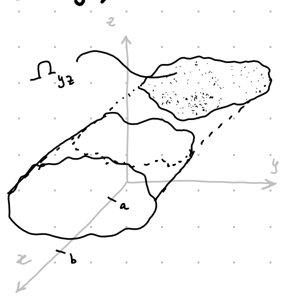
I Projeção em xy



$a \leq z \leq b$

$$\iint_{\Omega_{yz}} \int_a^b f(x,y,z)\; dz \cdot dx\, dy$$

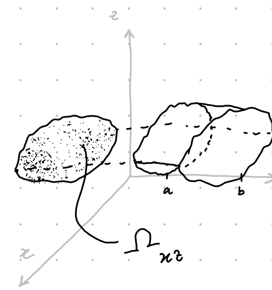
II Projeção em yz



$a \leq x \leq b$

$$\iint_{\Omega_{yz}} \int_a^b f(x,y,z)\; dx \cdot dy\, dz$$

III Projeção em xz



$a \leq y \leq b$

$$\iint_{\Omega_{xz}} \int_a^b f(x,y,z)\; dy \cdot dx\, dz$$

Outros referenciais

- **Coordenadas cilíndricas** (r, θ, z)

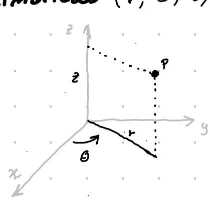
$x = r \cos\theta$

$y = r \sin\theta$

$z = z$

(*) $r \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$



$J(r, \theta, z) = r$

- **Coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ)

$x = \rho \sin\phi \cos\theta$

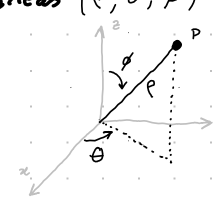
$y = \rho \sin\phi \sin\theta$

$z = \rho \cos\phi$

(*) $\rho \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

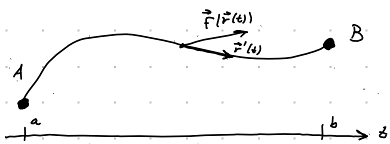
$0 \leq \phi \leq \pi$



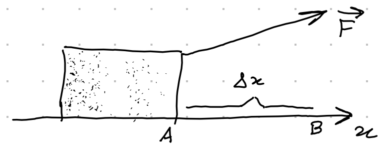
$J(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin\phi$

5. Integrais de linha

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$



$$W = \int \vec{F}\; \partial x$$



Analogia ao conceito de trabalho mencionado em Física I.

Notações

- $\int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$

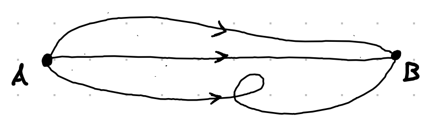
  $= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

  $= \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

- $\int_C g(x, y, z)\, ds$ — Comprimento de arco

  $= \int_C g(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$

Teorema fundamental



$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

- $\nabla \varphi(x, y, z) = f(x, y, z)$
- Apenas válido se $\vec{F}$ for gradiante.

- **Gradiante** O integral de linha é independente do caminho
  - ↳ Condição para 2 dimensões:

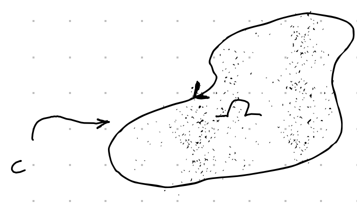
    $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

  - ↳ Condições para 3 dimensões:

    $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \;;\; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \;;\; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Teorema de Green

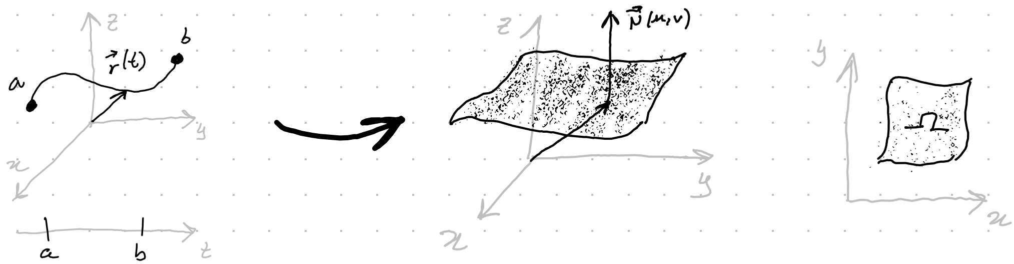
$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\; \partial x\, \partial y$$



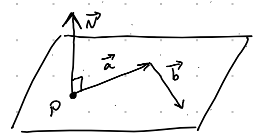
- Assume-se o sentido direto: ↺

  O sentido oposto (↻) resultará no valor simétrico.
- Nulo, se $\vec{F}$ for gradiante.

6. Superfícies



Equação vetorial de um plano



$$\vec{r}(u,v) = P + u\vec{a} + v\vec{b}$$

Produto vetorial fundamental

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$$

Área de uma superfície

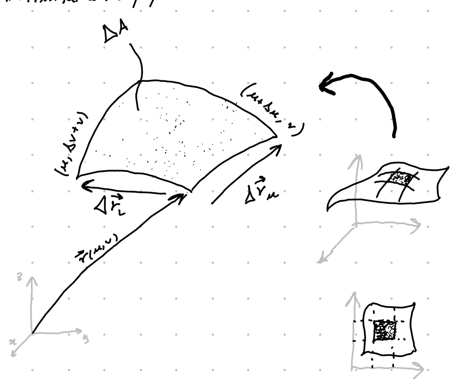
$$A(S) = \iint_\Omega \|\vec{N}(u,v)\| \, du \, dv$$

Demonstração: Área como o somatório de retângulos infinitamente pequenos:

$$\Delta A = \|\Delta \vec{r}_u \times \Delta \vec{r}_v\| \qquad \begin{bmatrix} \Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0 \end{bmatrix}$$

$$\partial A = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \right\|$$

$$= \|\vec{N}(u,v)\| \, du \, dv$$



$$\therefore A(S) = \iint_S \|\vec{N}(u,v)\| \, du \, dv$$