L.EIC
#1.2

Física I

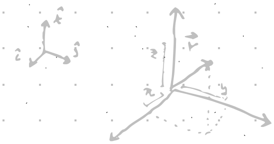
Apontamentos

1. Cinemática

Convenção de versores usada:

$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$

Ex: Vetor posição | $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$



Quantidades cinemáticas

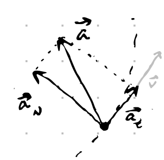
	Escalar	Vetorial	Propriedades
$\Delta\vec{r}$	$x_f - x_i$	$\vec{r}_f - \vec{r}_i$	—
$\vec{v}_{av}$	$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$	$\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	• // $\Delta\vec{r}$ • Se $\Delta t \to 0$, $\vec{v}_{av} = \vec{v}$
$\vec{v}$	$x'(t)$	$\vec{r}\,'$	• Tangente na posição $\vec{r}$ • Se $\vec{v} = \vec{0}$, então $\Delta\vec{r}$ constante
$\vec{a}_{av}$	$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$	$\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	• // $\Delta\vec{v}$ • Se $\Delta t \to 0$, $\vec{a}_{av} = \vec{a}$
$\vec{a}$	$v'(t)$	$\vec{v}\,'$	• Tangente a $\vec{v}$ • Mudança de direção implica aceleração

- Estas funções relacionam-se a partir de derivadas e integrais:

$$\vec{r}(t) \overset{\int \vec{v}\,dt}{\underset{\vec{r}\,'}{\longleftrightarrow}} \vec{v}(t) \overset{\int \vec{a}\,dt}{\underset{\vec{v}\,'}{\longleftrightarrow}} \vec{a}(t)$$

- Componentes da aceleração:
  → Aceleração normal / centrípeta | Mudança de direção ($\perp \vec{v}$)
  → Aceleração tangencial | Variação do módulo da velocidade ($// \vec{v}$)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$



- Equações do movimento com aceleração constante

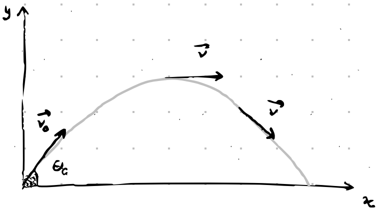
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad v = v_0 + a t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Fís. I

Movimentos curvilíneos

- Lançamento de projéteis ($\vec{a} = -g\hat{j}$, $\vec{v_0} \geq \vec{c}$)

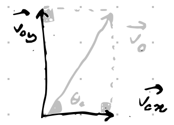


$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\vec{r}\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}\,t \\ y = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(*)



$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$
$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$

→ Tempo de subida | $v_y = 0$

$$t_{sub} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

→ Tempo de voo | $\Delta y = 0$

$$t_{voo} = \frac{2\,v_{0y}}{g} = \frac{2\,v_0 \sin\theta_0}{g} \quad (t_{voo} = 2\,t_{sub})$$

→ Alcance máximo | $t = t_{voo}$

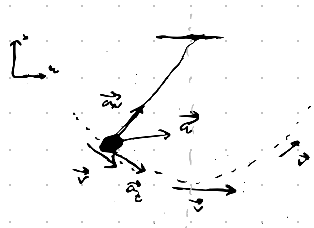
$$x_{máx.} = \frac{2\,v_{0x}\,v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0)$$

(*) Ângulo máximo : $\theta = 45°$, porque $\sin(2 \times 45) = 1$

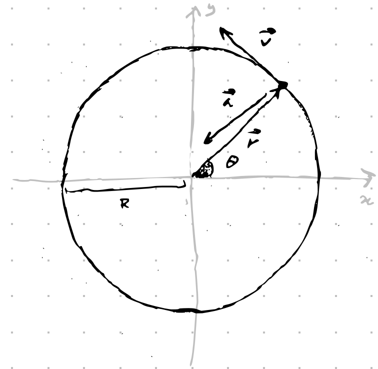
→ Altura máxima | $t = t_{sub}$

$$y_{máx.} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

- Pêndulo
  - ↳ Simetria no movimento
  - ↳ v varia por causa de a_t
  - ↳ $y_{máx.}$ → $v = 0$
  - ↳ $y_{mín.}$ → v máxima



Movimento circular (uniforme)



Assumindo $a_t = 0$, r e v são constantes, isto é, apenas são alterados as suas direções.

- Em função de x e y

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = -\frac{v_0^2}{R}\cos\theta \\ a_y = -\frac{v_0^2}{R}\sin\theta \end{cases} \longrightarrow a_N = \frac{v_c^2}{R}$$

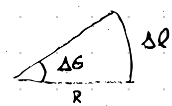
$$\vec{v}\begin{cases} v_x = -v_0 \sin\theta \\ v_y = v_0 \cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{r}\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin \end{cases}$$

- Velocidade em função de $\Delta\theta$:

$$v = \frac{\Delta\theta \cdot R}{\Delta t} \qquad \left(\text{Em voltas completas: } v = \frac{2\pi R}{T}\right)$$

$$\Delta l = \Delta\theta \cdot R$$



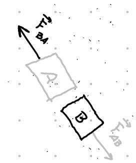
Leis de Newton

1. Lei da inércia

Se $\sum F = 0$, então v é constante e o corpo permanecerá em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

2. Lei da aceleração | Apenas válida corpo a corpo.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



3. Lei da ação - reação

Ações mútuas de dois corpos são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

Forças

- F_g, P | Peso de um corpo

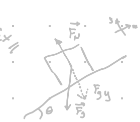
$$F_g = m \cdot g$$

Aceleração da gravidade
$g \simeq 9,81\ m/s^2$

- F_N, N | Normal à superfície de contacto

Par ação - reação com a força gravítica.

Ex:



$F_N = F_g \cos\theta$

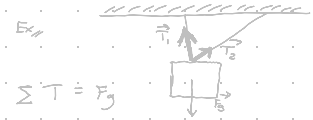
- **F_{elst} | Força elástica** / de restituição da mola

$$F_{elst} = -k\,x$$

⊛ k | Constante de elasticidade
x | Comprimento da mola

- **T | Tensão**

Semelhante à força normal, porém aplicada por cordas em vez de superfícies.



- **F_a | Força de atrito**

Tangente à superfície de contacto entre dois corpos

↳ **F_e | Atrito estático**

Varia entre 0 e $F_{e,max}$, dependendo da intensidade da força aplicada

Os corpos não estão em movimento entre si.

$$F_{e,max} = \mu_e \cdot N$$

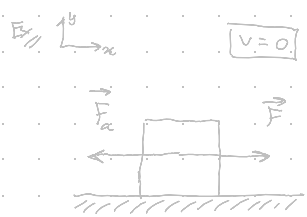
⊛ μ_e | Coeficiente de atrito estático $>$

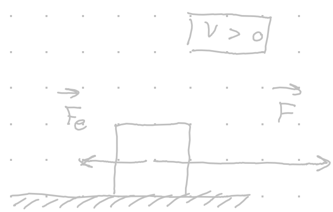
↳ **F_c | Atrito cinético / dinâmico**

Superior a $F_{e,max}$, logo existe movimento entre os corpos

$$F_c = \mu_c \cdot N$$

⊛ μ_c | Coeficiente de atrito cinético





2. Trabalho e energia

Trabalho

| Emergia transferida pela força

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \, dx = F \cos\theta \, \Delta x$$

⊕ Apenas para forças constantes

- **Potêmcia** [W] [J/s]

$$P = W' = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Uma componente perpendicular da força não realiza trabalho.

Emergias

- **E_c | Emergia cimética**

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

- $\Delta E_c = W$

- **E_{pg} | Emergia potencial gravítica**

$$E_{pg} = m g h$$

- **$E_{pelást}$ | Emergia potencial elástica**

$$E_{p_{elást}} = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "- \text{integral}"] & E_p \arrow[l, bend left, "- \text{derivada}"] \end{tikzcd}$$

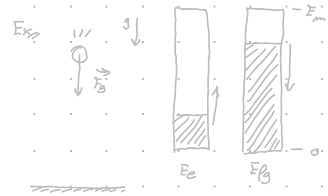
- **E_m | Emergia mecâmica**

$$E_m = E_c + E_{pg}$$

Forças Conservativas $\Delta E_m = 0$

- Percurso não interessa, mas sim apenas os pontos inicial e final.
- $\Delta E_c = -\Delta E_p$
- $W = -\Delta E_p$
- $W_{A-B} = -W_{B-A}$

Ex: Força gravítica e elástica



(*) Caso forças não conservativas sejam aplicadas ao sistema:

$$\Delta E_m = W_{F_{\text{não conservativa}}}$$

Equilíbrios

Pontos em que

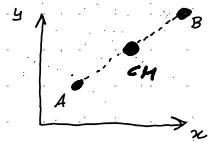
$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = F = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}$$

- > 0 | Equilíbrio estável
- $= 0$ | Equilíbrio neutro
- < 0 | Equilíbrio instável

3. Sistemas de partículas e colisões

Centro de massa



$$\underbrace{x_{CM} = \frac{\Sigma x_i \, m_i}{M} \; ; \quad y_{CM} = \frac{\Sigma y_i \, m_i}{M} \; ; \; \ldots}$$

- **Posição**
  $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\Sigma \vec{r}_i \, m_i}{M}$
- **Velocidade**
  $\vec{v}_{CM} = \dfrac{\Sigma \vec{v}_i \, m_i}{M}$
- **Aceleração**
  $\vec{a}_{CM} = \dfrac{\Sigma \vec{a}_i \, m_i}{M}$

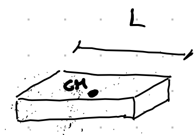
- **2ª lei de Newton**

$$M \vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{\text{exteriores}}$$

(*) Devido à 3ª lei de Newton, $\Sigma F_{\text{interiores}} = 0$, logo:
$\Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{F}_{ext.} + \underbrace{\Sigma \vec{F}_{int.}}_{=0} \iff \Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{F}_{\text{exteriores}}$

- **Cálculo do centro de massa homogéneo**

$$M \vec{r}_{CM} = \int_0^L \vec{r} \, dm \qquad \text{(para objetos contínuos)}$$



→ Homogéneo : λ e σ constantes

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{M}{L} = \dfrac{dm}{dx} \; ; \quad \sigma = \dfrac{M}{A} \\ \text{(1 dimensão)} \qquad\qquad \text{(2 dimensões)} \end{array}\right\} \; \vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma A_i \, \vec{r}_{CMi}}{\Sigma A_i}$$

Momento linear / Quantidade do movimento

$$\vec{p} = m \vec{v} \longrightarrow E_c = \frac{p^2}{2m}$$

(*) $\vec{p}_{\text{sistema}} = \Sigma \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$

- **Conservação da quantidade do movimento**

$$\Sigma \vec{F}_{\text{exteriores}} = \vec{0} \implies \vec{p} \text{ constante}$$

- **2ª lei de Newton**

$$\sum \vec{F}_{\text{exteriores}} = \frac{d \vec{p}_{\text{sistema}}}{dt}$$

Colisões

$$\sum \vec{F}_{\text{exteriores}} = \vec{0}$$, porque a $\vec{F}_g$ não afeta a colisão

- **Colisão elástica**

  Nenhum dos corpos se deformou ou dissipou energia após a colisão.
  A colisão é inelástica, caso contrário.

$$E_{e,\ \text{antes da colisão}} = E_{e,\ \text{após a colisão}} \longrightarrow \Delta E_e = 0 \longrightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_F$$

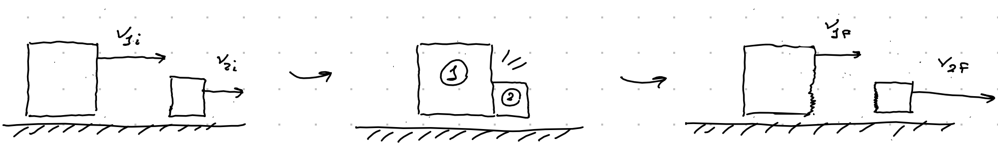
- **Coeficiente de impacto**

$$e = \frac{v_{\text{separação}}}{v_{\text{aproximação}}} = -\frac{v_{2F} - v_{1F}}{v_{2i} - v_{1i}}$$

- $e = 1$ | Colisão elástica
- $e < 1$ | Colisão inelástica
- $e = 0$ | Situação limite

Numa colisão elástica conclui-se que:

$$v_{2F} - v_{1F} = -\left(v_{2i} - v_{1i}\right)$$

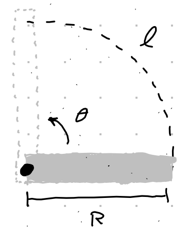


4. Rotação

Cinemática

$$\ell = \theta R$$

Condição de não deslizamento



- **Velocidade angular**

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- **Velocidade tangencial**

$$V_t = R\,\omega$$

- **Aceleração angular**

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$

- **Aceleração tangencial**

$$a_t = R\,\alpha$$

- **Aceleração centrípeta**

$$a_c = R\,\omega^2$$

- **Equações do movimento** (a constante)

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega &= \omega_0 + \alpha t \end{aligned}\right\} \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

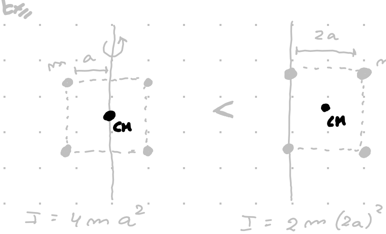
Momento de inércia

Mede o grau de dificuldade ao colocar um objeto a rodar ou quanta energia tem quando já está a rodar

$$I = \sum m_i\, r_i^2$$

$$I = \int_0^L x^2 \lambda\, dx \quad \text{(em sistemas contínuos)}$$

Ex:



Um menor I implica:

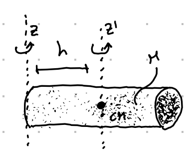
→ Maior facilidade a colocar a rodar o objeto;

→ Menor E_c quando já estiver a rodar;

→ Centro de massa mais próximo do eixo.

- **Teorema dos eixos paralelos**

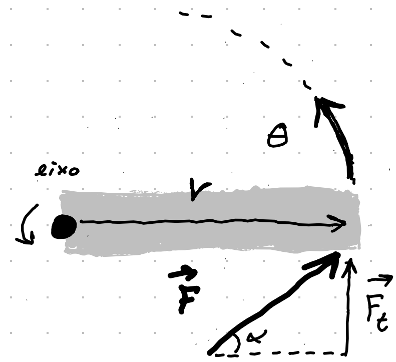
$$\underset{(z)}{I} = \underset{(z')}{I_{CM}} + M h^2$$



Fis. M

Torque / Momento da força

$$\tau_F = F_{tangencial} \cdot r = \vec{F} \times \vec{r}$$



$$F_t = F \sin \alpha$$

O torque é nulo quando:

→ A força é aplicada no eixo;

→ O ponto de aplicação da força é no eixo.

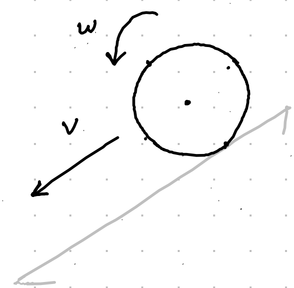
- **2ª lei de Newton**

$$r F_{tangencial} = I \alpha = \tau_F$$

Trabalho e energia

- **Energia cinética**

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{CM}^2}_{\text{translação}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}_{\text{rotação}}$$



- **Trabalho**

$$W = \int_0^{\theta} \tau \, d\theta \Leftrightarrow \tau = \frac{dW}{d\theta}$$

- **Potência**

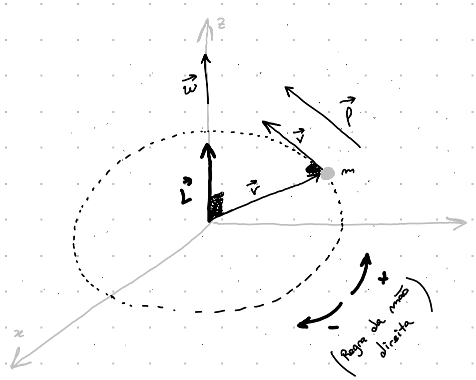
$$P = \tau \omega = \frac{dW}{dt}$$

(*) Mesmo que a força de atrito exista, a energia mecânica conserva-se, desde que $\vec{F_a}$ seja aplicado num ponto diferente em cada instante.

Momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= I \vec{\omega}$$



(*) O momento angular de uma $\underbrace{\text{partícula relativamente à } \textbf{origem}}$.

r : Distância entre a partícula e a **origem**.

- 2ª lei de Newton

$$\sum \vec{\tau}_{\text{exteriores}} = \frac{d\vec{L}_{\text{sistema}}}{dt}$$

(Momento angular constante quando $\sum \tau = 0$)

- Energia cinética

$$E_c = \frac{L^2}{2I}$$

Equilíbrio estático

Em qualquer ponto, é necessário garantir o equilíbrio de translação e de rotação:

$$\underbrace{\sum \vec{F} = 0}_{\text{Equilíbrio de translação}} \quad \wedge \quad \underbrace{\sum \vec{\tau} = 0}_{\text{Equilíbrio de rotação}}$$

5. Oscilações

Caraterísticas

- O somatório das forças sempre se opõem ao movimento, $\rightarrow a < 0$
- A frequência apenas depende das caraterísticas do sistema.

Frequência [Hz]

$$f = \frac{1}{T}$$

Período [s]

$$T = \frac{1}{f}$$

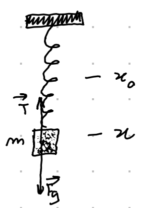
Frequência angular [rad/s]

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Situações

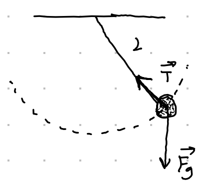
- **Mola**

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \; ; \; E_m = \frac{1}{2} k A^2$$



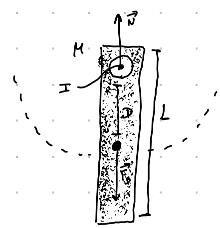
- **Pêndulo**

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$



- **Pêndulo Físico**

$$\omega^2 = \frac{MgD}{I}$$



Movimento harmónico simples

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (F \text{ é proporcional a } x)$$

- **Posição**

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

ou

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

- **Condições iniciais**

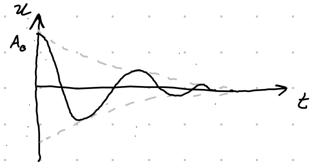
Sabendo que $x_0 = x(0)$ e $v_0 = v(0)$:

$$\begin{cases} x_0 = A \cos\delta \\ v_0 = -\omega A \sin\delta \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = v_0/\omega \end{cases}$$

Oscilações amortecidas



Deve-se à aplicação de forças dissipativas:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- **Posição**

$$x(t) = A_0\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_a t + \delta)$$

(*) b : Constante de atrito

$> b \rightarrow >$ decaimento

- **Tempo de decaimento**

$$\tau = \frac{m}{b}$$

- **Fator de qualidade**

$$Q = \omega_0 \tau \simeq \frac{2\pi}{(|\Delta E| / E)_{\text{por ciclo}}}$$

- **Amplitude**

$$A = A_0\, e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

- **Energia**

$$E = E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- **Frequência angular**

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{(2\tau)^2}}$$

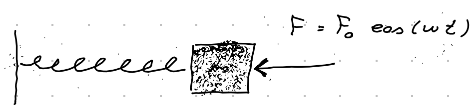
- **Fração de energia perdida num período**

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{2\pi}{\omega_a \tau}$$

Oscilações forçadas (sem atrito)

O oscilador é empurrado por uma força externa que varia no tempo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t)$$



(*) Resolução da equação diferencial:
Substituir pela solução do tipo

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

(*) ω_0 | Frequência própria de oscilação

ω | Frequência da força exterior

- **Fenómeno de ressonância**

Quando $\omega \simeq \omega_0$, $A \rightarrow \infty$

- **Amplitude** (sem atrito)

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Estrutura

* Capítulos por rever

[Temp]

30/3

1. Cinemática

- Quantidades cinemáticas
- Movimento curvilíneo
- Movimento circular
- Leis de Newton
- Forças
  - ↳ Peso de um corpo
  - ↳ De contacto
    - ↳ Normal
    - ↳ Elástica
    - ↳ Tensão
    - ↳ De atrito
      - ↳ estático (μ_e)
      - ↳ cinético (μ_c)

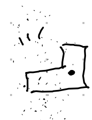
2. Trabalho e energia

- Trabalho
- Potência
- Energias
  - ↳ Cinética
  - ↳ Potencial
    - ↳ Gravítica
    - ↳ Elástica
  - ↳ Mecânica

Relação entre E_p e Forças: integral e derivadas

- Forças não conservativas e conservativas | Características
- Equilíbrio estável, instável e neutro ; Amplitude máxima

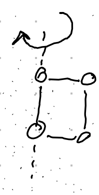
3. Sistemas de partículas e colisões



- Centro de massa
- Cálculo do centro de massa homogéneo
- Momento linear / Quantidade de movimento
- Posição, velocidade e aceleração do centro de massa
- Lei da conservação do momento linear
- Colisões ($\Sigma \vec{F}_{ext} = 0$)
  - ↳ colisão elástica
  - ↳ coeficiente de impacto

4. Rotação

* Por aplicar nas aulas TP



- Equações "do movimento" (L, ω, α em função de θ)
- Momento de inércia
- Teorema dos eixos paralelos
- 2ª lei de Newton para rotações
- Torque / momento da força
- Conservação de energia
- Momento angular
- 2ª lei de Newton para momento angular

5. Equilíbrio e oscilações

- Equilíbrio
- Movimento harmónico simples
- " " amortecido
- " " forçado

Tipos:

Mola, pêndulo de fio, pêndulo físico

Forças, energia

Fig. I