

# rBAS 使用文档

王江宇

2018-09-01



# 目录

<b>第一章 R 以及 rBAS 安装</b>	<b>7</b>
1.1 R 安装 . . . . .	7
1.2 Rstudio 安装 . . . . .	7
1.3 rBAS 安装 . . . . .	9
<b>第二章 算法原理</b>	<b>11</b>
2.1 BAS . . . . .	11
2.1.1 算法流程 . . . . .	11
2.1.2 不足与改进 . . . . .	12
2.2 BSAS . . . . .	13
2.2.1 与 BAS 不同之处 . . . . .	13
2.2.2 不足与改进 . . . . .	14
2.3 BAS-WPT . . . . .	15
2.3.1 与 BAS 不同之处 . . . . .	15
2.3.2 约束问题抽象形式 . . . . .	16
2.3.3 不足与改进 . . . . .	17
<b>第三章 混合算法</b>	<b>19</b>
3.1 BSO . . . . .	19
3.1.1 粒子群算法流程 . . . . .	19

3.1.2	与 BAS 的结合 . . . . .	20
3.1.3	总结 . . . . .	22
3.1.4	算法调用说明 . . . . .	22
<b>第四章</b>	<b>函数使用</b>	<b>25</b>
4.1	BASoptim . . . . .	25
4.1.1	BASoptim 参数说明 . . . . .	26
4.1.2	BASoptim 简单案例 . . . . .	27
4.2	BSASoptim . . . . .	30
4.2.1	BSASoptim 参数说明 . . . . .	31
4.2.2	BSASoptim 取值摸索 . . . . .	32
4.2.3	BSASoptim 案例 . . . . .	33
4.3	BSAS-WPT . . . . .	39
4.3.1	BSAS-WPT 参数说明 . . . . .	40
4.3.2	BSAS-WPT 案例 . . . . .	40
4.4	BSO . . . . .	42
4.4.1	BSO 参数说明 . . . . .	42
4.4.2	BSO 案例 . . . . .	43
<b>第五章</b>	<b>用户界面</b>	<b>47</b>
5.1	调用语句 . . . . .	47
5.2	使用案例 . . . . .	48
5.2.1	Michalewicz function . . . . .	48
5.2.2	Pressure Vessel function . . . . .	49
5.3	Authors 界面 . . . . .	56

<b>第六章 BAS 案例一: 多杆机构优化问题</b>	<b>57</b>
6.1 背景	57
6.1.1 四连杆机构 (Four-bar linkage mechanism)	57
6.1.2 六连杆机构 (Stephenson III Six-bar linkage mechanism)	58
6.2 优化问题	60
6.2.1 四连杆机构	60
6.2.2 六连杆机构	61
6.3 优化理论	61
6.4 优化结果	62
6.4.1 Case1 无规定时间内轨迹生成 (Path generation without prescribed timing)	62
6.4.2 Case2 有规定时间的轨迹生成 (with prescribed timing)	63
6.4.3 Case3 规定时间内路径生成 (Path generation with prescribed timing)	64
6.4.4 Case4 规定时间路径生成问题	66
6.4.5 Case5 规定时间内路径生成问题	68
6.4.6 Case6 六杆机构路径生成	70
6.4.7 Case7 无规定时间的路径生成	72
6.4.8 Case8 无规定时间的路径生成	75
<b>第七章 更新及维护计划</b>	<b>77</b>
7.1 待加入的功能	77
7.2 联系方式	78
<b>附录</b>	<b>79</b>



# 表格

6.1	case1 各算法结果对比 . . . . .	64
6.2	case2 各算法结果对比 . . . . .	65
6.3	case3 各算法结果对比 . . . . .	67
6.4	case4 各算法结果对比 . . . . .	68
6.5	case5 各算法结果对比 . . . . .	70
6.6	case6 各算法结果对比 . . . . .	73
6.7	case7 各算法结果对比 . . . . .	74
6.8	case8 各算法结果对比 . . . . .	76





# 插图

1.1	R 界面 . . . . .	8
1.2	Rstudio 界面 . . . . .	8
1.3	devtools 手动安装示意图 . . . . .	9
2.1	BAS 寻优过程示意 . . . . .	14
2.2	BSAS 寻优过程示意 . . . . .	14
4.1	Michalewicz 函数示意 . . . . .	27
4.2	Michalewicz 函数示意 . . . . .	29
4.3	为什么我们孜孜不倦改算法 . . . . .	46
5.1	shiny interface . . . . .	49
5.2	optimization progress 栏信息 . . . . .	50
5.3	Optimization Parameters 栏信息 . . . . .	51
5.4	Progress Plot 栏信息 . . . . .	52
5.5	BSAS-WPT 参数调整 . . . . .	53
5.6	BSAS-WPT 优化结果 . . . . .	54
5.7	BSAS-WPT 优化过程可视化 . . . . .	55
5.8	用户界面作者信息 . . . . .	56
6.1	四连杆机构示意 . . . . .	58

6.2 六连杆机构示意 . . . . .	59
6.3 各算法优化轨迹 . . . . .	63
6.4 各算法优化轨迹 . . . . .	65
6.5 各算法优化轨迹 . . . . .	66
6.6 各算法优化轨迹 . . . . .	68
6.7 各算法优化轨迹 . . . . .	69
6.8 各算法优化轨迹 . . . . .	72
6.9 各算法优化角度 . . . . .	72
6.10 各算法优化轨迹 . . . . .	74
6.11 各算法优化轨迹 . . . . .	76

# 前言

## 手册内容概述

本手册是为了大家更好地使用 **rBAS** (Wang et al., 2018) 包而撰写，内容如下：

- 第 **一** 章介绍了如何安装 R 语言的环境，来使用 **rBAS** 包。不用担心，R 的语法很简单，各种功能是按照自身的需要安装各种 **packages**，所以比 **matlab** 体积更小，入门时间成本也较低。哪怕你无意于 R 的学习，也可以看看本手册的原理篇 (第 **二** 章)，应用篇 (第 **六** 章) 以及后续的更新计划 (第 **七** 章)，来了解算法的原理，出现了哪些变种，以及有着什么样的工程应用。
- 第 **二** 章介绍了 **BAS** 算法以及在其基础上出现的各种改进算法的原理，当然，随着算法的不断改进和发展，这个文档还需要随之不断更新。
- 第 **四** 章讲述了如何在 R 中使用 **rBAS** 包调用收录的算法的对应函数，以及一些简单的案例（大部分是 **BAS** 相关文献中的算例和 **benchmark functions**）。每一句出现的代码我都会尽我所能去注释，让大家了解每一步的意义，以及 R 的简单易用。我也希望，自己的语言能尽力通俗，对于其他工具的使用者来说。
- 第 **六** 章主要介绍的是 **BAS** 及变体算法在各种领域的应用，当然，少不了对应的案例描述和代码。可能有些涉及到各位作者的研究，不会做到完全的开源，但在李帅老师的组织下，我相信这会是最完善全面的 **BAS** 应用大全。

- 第 五 章介绍了 `rBAS` 中的用户界面的调用，以及运行。
- 第 七 章讲述了 `rBAS` 包的开发和使用手册更新的计划。因为算法总是会不断地推陈出新，所以 `rBAS` 包也必须和目前的研究保持一致。如果你有好的想法，可以看此章的内容，然后把自己的建议传达给我们。

好了，冗长的章节介绍完毕。大家可以开始浏览正文了。

## 夹带私货

如果你对这本手册本身的撰写环境感兴趣的话，那我可能还要啰嗦两句。

第一句：照搬 Yihui<sup>1</sup> 的一句话：我用了两个 R 包编译这本书，分别是 `knitr` (Xie, 2015) 和 `bookdown` (Xie, 2018)。

第二句：感谢 Yihui。嗯...，因为这个男人，R 用户的读书笔记，文章，学位论文，个人网站等等都可以在 R 里面撰写或者开发。不得不感慨他的天才和对需求的把握。

## 致谢

感谢提倡者李帅老师，以及姜向远博士。他们是 `BAS` 的提出者，也在算法原理与改进上，给了我这个做暖通的门外汉以启发。

此外，还感谢李晓晓，王甜甜，莫小娟，阮月同学贡献自己的算法代码和应用案例，他（她）们改进了算法，并且让其应用部分变得更加丰富。

当然，还得感谢 Yihui 的 `bookdown`。

老实讲，2018/07，也就是一个月以前，我刚开始用 R 编写这个算法，然后用在自己的建筑系统辨识研究中，没想到 ... 所以，这个手册是比较仓促的产物，再加之自身关于优化算法理论水平较低，如果大家发现了本手册的各种问题，欢迎在 QQ 群 (437958608) 内留言，或者是在 `rBAS` 的 github 上提出 issues<sup>2</sup>。

总之，谢谢上述老师及同学，也谢谢未来给我提供问题或建议的同学，你们的帮助，让手册更加完善。

---

<sup>1</sup><http://yihui.name/>

<sup>2</sup><https://github.com/jywang2016/rBAS/issues>

王江宇  
2018/08/18  
华中科技大学



# 作者简介

- 包作者

- 王江宇: BSAS 算法, 创建维护 rBAS 包。Github<sup>3</sup>
- 李帅: 提出 BAS 以及 BAS-WPT 算法。个人主页<sup>4</sup> & 谷歌学术<sup>5</sup>
- 姜向远: 提出 BAS 以及 BAS-WPT 算法。

- 贡献者

- 李晓晓: 二阶 BAS
- 王甜甜: 天牛群体优化算法 BSO
- 阮月: Binary-BAS
- 莫小娟: 多杆机构优化问题

---

<sup>3</sup><https://github.com/jywang2016/rBAS>

<sup>4</sup><http://www4.comp.polyu.edu.hk/~cssli/>

<sup>5</sup><http://scholar.google.com/citations?hl=zh-CN&user=H8UOWqoAAAAJ>





# 第一章 R 以及 rBAS 安装

R 以及其集成开发环境 (IDE) `Rstudio` 加起来都不到 200M, 所以大家放心下载安装, 不会是需要 10+G 的庞然大物。当然, `matlab` 也是很好的科学计算软件, 这里仅仅是说明安装的大小。

总体来说, R 的安装十分简单, 类似于把大象装进冰箱只需要三步。

## 1.1 R 安装

Step1: 进入 R 的网站 <https://www.r-project.org/>, 然后点击左上角 Download 底下的 CRAN。

Step2: 选择并点击 China 底下的镜像网址, 方便下载。然后点击 Download R for windows, 出现的界面右上角有 install R for the first time, 点击即可下载。

Step3: 安装, 不需要各种复杂的配置, 按照给定提示操作即可。

但是, 打开 R, 你会发现是如图1.1这样过于简洁的界面。

这并不符合新手的操作和开发习惯。因此, 你可能需要一个集成开发环境, 最好是有函数、变量的提示, 方便浏览代码和结果等等优势的软件。那么, 我想你说的应该是 `Rstudio`。

## 1.2 Rstudio 安装

Step1: 进入下载页面 <https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>。

Step2: 选择 free 版本的下载。

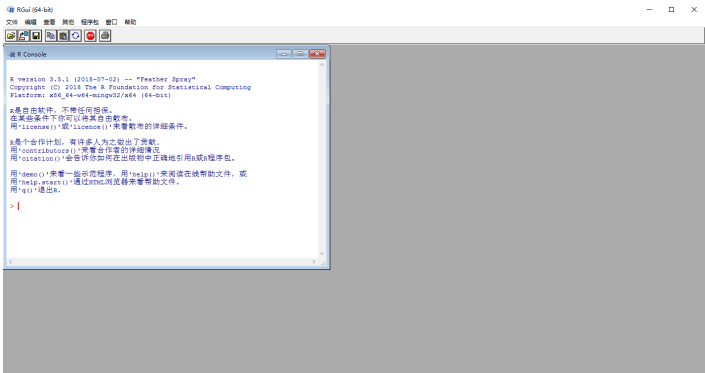


图 1.1: R 界面

Step3: 安装，无需配置特别的环境变量等。

那么，打开 Rstudio 后，会看到如图1.2这样的界面。

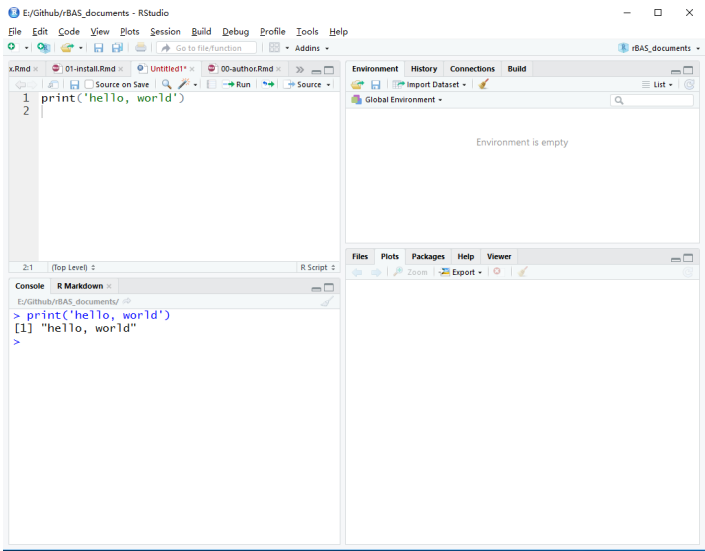


图 1.2: Rstudio 界面

左上角是撰写代码脚本的区域，左下角是结果输出的窗口。右下角的 files 可以查看工作路径下的文件，和 matlab 左侧的栏目是类似的；plots 用于查看使用代码绘制的图像，packages 可以用于安装 CRAN 上发布，或者是本地的 packages，也就类似 matlab 的 toolbox；help 则是用来显示各个函数的帮助文档；Viewer 则是用来预览 R 生成的交互图像（比如 plotly 绘制的图），生成的网页（比如我现在正在使用

bookdown 包来写本手册，那就可以预览生成的 gitbook 电子书的内容) 等等。右上角的 Environment 显示被加载进来的函数，变量等信息，和 matlab 的 workspace 是类似的。剩下的和本手册无关，可以在后面的开发中慢慢了解。

## 1.3 rBAS 安装

在 Rstudio 的 Console 框内输入：

```
install.packages('devtools')
```

因为目前 rBAS 包还不在于 CRAN 内，所以需要通过 devtools 包，来从 github 上安装。所以我们在本地安装 devtools 包。如果觉得代码敲的累，那么有个更直观的方式，如图1.3:

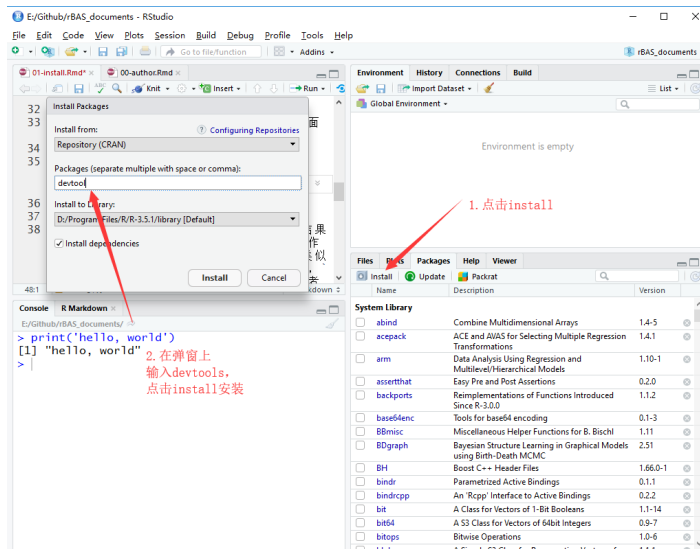


图 1.3: devtools 手动安装示意图

最后，有了 devtools 包，我们可以从 github 上安装 rBAS 包了。

```
# 不加载 devtools, 只调用其中的函数  
devtools::install_github("jywang2016/rBAS")
```

接下来，我们可以使用 rBAS 的函数了。

## 第二章 算法原理

本章讲述目前 rBAS 集成的三种算法，即 BAS, BSAS, BSAS-WPT 的原理。如有错漏，还请指出。此外，本章所述的算法，在原始的 BAS 基础上，并没有过多地改变根本上的东西。第三章的算法，则是 BAS 和其他一些算法的结合，又或者，有更多根本性改动。如王糖糖同学提出的 BSO，很典型地 BAS 和 PSO 的结合，则不在此章节。

### 2.1 BAS

关于 BAS，主要的参考资料为姜向远博士和李帅老师在 arXiv 上的论文，BAS: beetle antennae search algorithm for optimization problems<sup>1</sup>。而我是在知乎上看到一篇文章<sup>2</sup>后，才开始复现 BAS 算法。

#### 2.1.1 算法流程

1. 随机生成方向向量，标准化

$$\vec{\mathbf{b}} = \frac{\text{rnd}(n, 1)}{\|\text{rnd}(n, 1)\|} \quad (2.1)$$

其中， $n$  是待优化参数的维度。

2. 计算左右须的坐标

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r &= \mathbf{x}^t + d^t \vec{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x}_l &= \mathbf{x}^t - d^t \vec{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/1710.10724>

<sup>2</sup><https://zhuanlan.zhihu.com/p/30742461>

其中,  $\mathbf{x}^t$  为  $t$  时刻天牛的位置,  $d^t$  则是  $t$  时刻, 质心到须的距离。

3. 根据两须对应函数值, 决定天牛下一时刻移动位置

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^{t-1} + \delta^t \vec{\mathbf{b}} \text{sign}(f(\mathbf{x}_r) - f(\mathbf{x}_l)) \quad (2.3)$$

其中,  $\delta^t$  为  $t$  时刻的步长,  $f$  为待优化目标函数。

4. 步长与搜索距离更新

$$d^t = \eta_d d^{t-1} + d_0 \quad (2.4)$$

$$\delta^t = \eta_\delta \delta^{t-1} \quad (2.5)$$

其中,  $d_0$  是人为设定的距离的常数,  $\eta_d$  与  $\eta_\delta$  分别是搜索距离和步长的更新衰减系数。

为了避免参数过多, 姜向远博士在 BAS-WPT 算法中是按照式(2.6)来更新搜索距离和步长的。其中,  $c_2$  是人为设定的常数。

$$\begin{aligned} \delta^t &= \eta_\delta \delta^{t-1} \\ d^t &= \frac{\delta^t}{c_2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 2.1.2 不足与改进

在对 BAS 算法的复现与案例应用中, 我个人认为, 其可能存在如下的缺点。

- 步长更新策略（反馈）
  - 缺点: 无论每一步得到的结果是否变得更优, 步长总会衰减;
  - 改进: 带有反馈的步长更新, 在无法找到更优的位置时, 才进行步长的更新;
  - 关键: 反馈
- 初始步长选取（参数标准化）

- 缺点：对于多参数且量纲相差较大的问题，步长  $\delta$  的初始值并不好选取；
- 改进：标准化参数后，再进行调节，这也是 BAS-WPT 的技巧所在；
- 关键：标准化
- 群体寻优
  - 缺点：1 只天牛在随机方向上搜索更优的位置，容易迷失；
  - 改进：多只天牛寻优，设定的回合内无法找到更优位置，再考虑步长更新；
  - 关键：群体智能
- 约束处理能力不足
  - 缺点：在约束边界上优化目标突变问题的处理上表现不佳
  - 改进：二阶 BAS
  - 关键：暂时没有能力归纳，有待学习二阶 BAS

## 2.2 BSAS

在2.1.2节中提及，BAS 可能在步长更新和群体寻优两个方面的策略上有一定的不足。因此，我比较莽撞地改出一个粗糙的算法，那就是所谓的 BSAS，即 beetle swarm antennae search。在 BSAS: Beetle Swarm Antennae Search Algorithm for Optimization Problems<sup>3</sup>中，我给出了更为详细的材料。至于具体和王甜甜同学的 BSO，即 beetle swarm optimization 有何不同，我需要进一步研究她的论文材料。

### 2.2.1 与 BAS 不同之处

此部分没有公式，因为和 BAS 算法核心公式思路是一致的。而图2.1与图2.2描述了一种假设的寻优场景，能比较清晰地体现 BSAS 与 BAS 之间的不同。

假定，天牛要找到图中最蓝的点。图2.1 中，天牛的起点在距离最优点较远处。由于位置更新只与时间有关，也就是每一步，天牛的步长都会缩

---

<sup>3</sup><https://arxiv.org/abs/1807.10470>

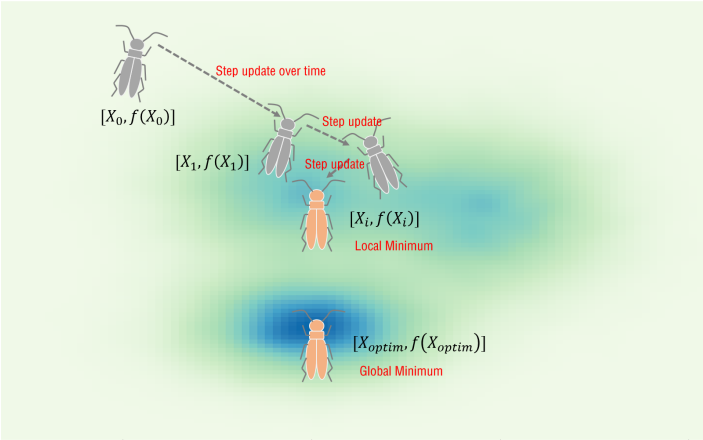


图 2.1: BAS 寻优过程示意

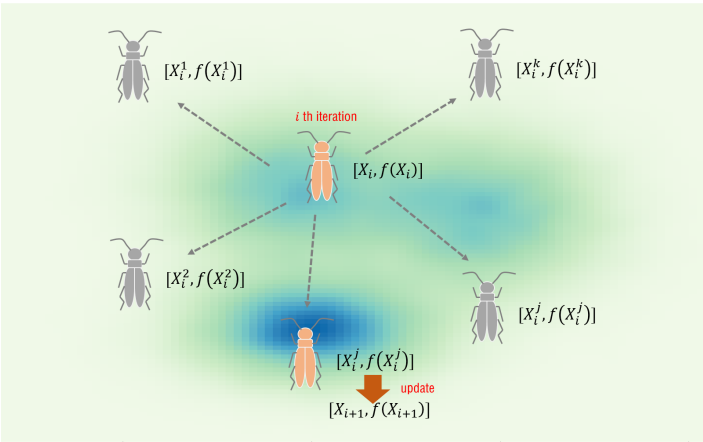


图 2.2: BSAS 寻优过程示意

减（为了可视化效果，天牛的大小我并没有缩放）。如果初始位置距离最优优点较远，那在给定的步长缩减情况下，天牛只能在一个局部最优优点处收敛。而图2.2中，每回合天牛会派出  $k$  只天牛在外试探，如果有更优的点，那么更新天牛位置。这样天牛可以更好地到达全局最优点。

2.2.2 不足与改进

虽然解决了步长更新和群体寻优的策略问题，但是还有两点并未解决。



- 初始步长选取（参数标准化）
  - 缺点：对于多参数且量纲相差较大的问题，步长  $\delta$  的初始值并不好选取；
  - 改进：标准化参数后，再进行调节，这也是 BAS-WPT 的技巧所在；
- 约束处理能力不足
  - 缺点：在约束边界上优化目标突变问题的处理上表现不佳
  - 改进：二阶 BAS

好的是，在 rBAS 0.1.5 中，我们吸收了 BAS-WPT 中参数标准化的想法，加入了 BSAS-WPT 算法，来解决步长调参的问题，并取得了一定的改进效果。

## 2.3 BAS-WPT

相比于2.1.1节中描绘的 BAS, Beetle Antennae Search without Parameter Tuning (BAS-WPT) for Multi-objective Optimization<sup>4</sup>一文给出了改进后的 BAS 是如何处理步长调节和约束问题抽象的。

### 2.3.1 与 BAS 不同之处

BAS-WPT 的小尾巴 without parameter tuning 已经说明了两者之间的区别，即 BAS-WPT 是不需要进行参数调节的。当然，按照我现在的理解，是 BAS-WPT 一方面简化了每回合搜索距离 (质心到须的距离) 的更新，不需要再额外设定与调节诸如  $d_0$ ,  $\eta_d$  等参数，用户只需要按照式(2.6)来设置  $c_2$  便可；另一方面，参数标准化，让存在量级差异的参数之间不必再像 BAS 一样，共享一个你不知道该怎么设定的步长  $\delta^t$  (步长过大，小的参数可能经常处于在边界的状态；步长过小，大的参数可能搜索范围达不到)。

那么上述两方面的优势归纳起来是什么呢，那就是你可以设置一个在 1 附近  $\delta$ ，然后设定一个衰减率  $\eta_\delta$ ，以及步长与搜索距离之比  $c_2$ ，那么你的天牛就不会出太大的岔子，并且方便调整调节。也就是说，WPT 不是让你不用调参，而是减轻了调参的负担。

<sup>4</sup><https://arxiv.org/abs/1711.02395>

“不必就纠结归一化处理，之所以这么处理，仅仅是为了调参方便”

— 姜向远

果然，偷懒催生了这一技巧的诞生。不过，我还得再次啰嗦一句标准化的好（是不是我没有接触这个领域，所以喜欢大惊小怪.....）。我们在之后，压力容器约束问题（混合整型规划）中，可以看到，待优化参数存在量级差异时，标准化技巧下的步长会比原始的 BAS 步长设定要更加合理。

### 2.3.2 约束问题抽象形式

此外，BAS-WPT 还为 BAS 引入了约束问题处理的手段。不过，这和我做模型预测控制时候看到的抽象方式是相同的。我觉得 BAS 的用户们应该都早已了解，此处就照本宣科。

#### 2.3.2.1 约束问题一般形式

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Minimize}}{\text{Maximize}} f(\mathbf{x}) \\ & s.t. g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, K \\ & x_i^{\max} \leq x_i \leq x_i^{\min}, i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.7)$$

$g_j(\mathbf{x}) \leq 0$  和  $x_i^{\max} \leq x_i \leq x_i^{\min}$  表示了参数本身的范围和更为精细具体的不等式约束控制。在 rBAS 包中，我们会有很直观和简便的方式，来设置这些约束。

#### 2.3.2.2 惩罚函数

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^K h_j(\mathbf{x}) g_j(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & g_j(\mathbf{x}) > 0 \\ 0, & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

其中，式(2.8)中的  $\lambda$  表示约束违背的惩罚因子，选取尽量大的正数。而后的  $h_j(\mathbf{x})$  为 Heaviside 函数，即不等式约束满足时，该函数为 0，反之为 1。

### 2.3.3 不足与改进

- 约束处理能力不足
  - 缺点：在约束边界上优化目标突变问题的处理上表现不佳
  - 改进：二阶 BAS

此处的不足，还需要考虑步长反馈和群体搜索的问题。不过，既然 BSAS 把姜博的 WPT 给窃来了，摇身变为了 BSAS-WPT，那就不说上述两个问题了。等他日有闲，再去整合李晓晓同学的二阶 BAS。



## 第三章 混合算法

在第 2 章中说明过，在基本 BAS 算法及变体的基础上，做出了大的改动的算法在本章说明。

### 3.1 BSO

关于 BSO，主要的参考资料为王糖糖同学的论文 Beetle Swarm Optimization Algorithm: Theory and Application<sup>1</sup>。作为一个捣鼓了两天算法的能源人，论文对我而言很是吃力。因为我此前只听说过粒子群算法，却从未了解过其原理。在囫圇看过几篇入门粒子群算法的博文后，再阅读上述的论文，就看到了很多有意思的地方。

首先，假设大家都阅读过第 2 章，对 BAS 有了一定的了解。那么，接下来就能看看，BSO 是如何把 BAS 和 PSO 结合起来的。此处，只把我的认知写在此处，如有问题，还请大家指出。

#### 3.1.1 粒子群算法流程

我们先说一下标准的粒子群算法的几个核心更新关系。

粒子在第  $k + 1$  回合中，其速度与第  $k$  回合的速度关系如式(3.1):

$$v_{i,k+1} = \omega v_{i,k} + c_1 * rand_1 * (pbest_i - x_{i,k}) + c_2 * rand_2 * (gbest_k - x_{i,k}) \quad (3.1)$$

那么第  $k + 1$  回合中粒子位置如式(3.2)更新。

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/1808.00206>

$$x_{i,k} = x_{i,k} + v_{i,k} \quad (3.2)$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, S$ ,  $S$  为设定的粒子数目。而  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  为设定的最大循环数。 $\omega$  表示粒子速度的惯性, 也就是本回合速度对下回合速度更新的影响。 $c_1, c_2$  则是学习因子,  $pbest_i - x_{i,k}$  表示粒子  $i$  当前的位置和其历史最优的位置的差距, 而  $gbest_k - x_{i,k}$  则表示, 粒子  $i$  当前的位置和历史全局最优的粒子的位置 (所有粒子在历史时间跨度中最好的位置) 的差距。

那么, 这样更新了粒子的位置之后, 自然要计算这一回合的适应度, 也就是目标函数的值。如果存在适应度比自身历史或全局历史更优, 那么就相应地更新  $pbest$  和  $gbest$ 。然后, 就重复上述过程, 直到设定的终止条件满足。

$\omega$  动态变化, 能取得好的效果, 一般, 它如式(3.3)所示变化。

$$\omega = \omega_{max} - (\omega_{max} - \omega_{min}) \frac{k}{n} \quad (3.3)$$

当然, 如果  $k$  取 0, 也就是初始回合, 那么  $\omega = \omega_{max}$ 。如果  $k$  取  $n$  (也就是最终的回合), 那么  $\omega = \omega_{min}$ 。所以, 这也是个权重线性递减的过程。

### 3.1.2 与 BAS 的结合

我们假想一下, 要把 PSO 和 BAS 结合, 从什么方向入手呢?

作为门外汉, 我可能会想, 那就多放置几只天牛, 让它们像粒子一样, 信息共享, 但是本身的更新寻优还按照 BAS 的来 (后面会讲, 这类似于 BSAS, 但不是 BSO)。

不过呢, BSO 给了一种很丰满和交错的方式, 让 BAS 和 PSO 不是那么的泾渭分明。

首先, 位置更新时, 按照 PSO 和 BAS 的方式各自更新后加权得到新的位置。也就是, 利用了 BAS 的触须方向和步长, 同时也利用了粒子 (在 BSO 中就是天牛) 的速度。如式(3.4):

$$X_s^{k+1} = X_s^k + \lambda V_s^k + (1 - \lambda) \xi_s^k \quad (3.4)$$

第一项  $X_s^k$  自然是表明粒子  $s$  在  $k$  回合的位置了，第二项  $\lambda V_s^k$  也就是 PSO 中的天牛速度乘以权重  $\lambda$ 。那么第三项中的  $\xi_s^k$  应该是 BAS 中的步长乘以方向向量才对。但是，**方向并不是 BAS 中随机生成的方向**。

我们看看  $\xi_s^k$  怎么得到。在文中，给出了式(3.5)。

$$\xi_s^{k+1} = \delta^k V_s^k \text{sign}(f(X_{rs}^k) - f(X_{ls}^k)) \quad (3.5)$$

这就是我们熟悉的 BAS 更新的方式，不过，把随机生成的天牛方向，换为了粒子速度  $V_s^k$ 。在 BSO 中，并没有 BAS 中成方向的操作。有同学可能会问，既然没有随机方向，那么天牛的左右须坐标怎么来的呢？和式(3.5)中使用**速度替代方向**的操作相同，计算左右须坐标时，也是用的速度，来代替方向。即，如式(3.6)。

$$\begin{aligned} X_{rs}^k &= X_s^k + V_s^k \frac{d}{2} \\ X_{ls}^k &= X_s^k - V_s^k \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

这样，就完成了 BSO 算法的更新过程。里面的速度，和粒子群算法的更新方式相同。

注明，原文中使用的上一回合的左右须坐标，更新这回合的左右须坐标。但是根据代码来看，是文章存在了脚标的小错误，应该用天牛坐标，更新须坐标。

王糖糖同学还给出了一个动态的（BAS）步长更新系数，如式(3.7)：

$$\eta = \omega_{\delta_1} \left( \frac{\omega_{\delta_1}}{\omega_{\delta_0}} \right)^{1/(1+10k/n)} \quad (3.7)$$

默认参数为  $\omega_{\delta_1} = 0.4$ ， $\omega_{\delta_0} = 0.9$ 。即，步长在回合初始，衰减最快，回合临终时，衰减最慢。

### 3.1.3 总结

此前，在写 BSAS 算法说明的时候，我把 BSO 加入到了待完成列表内。看了双方的英文名，是在是太巧了。BSAS 是 **Beetle Swarm Antennae Search**，而 BSO 是 **Beetle Swarm Optimization**。彼时，我还不知晓 PSO 是啥含义。现在看来，这样的名称所包含的意义是千差万别的。后来，在复现 BSO 的过程中（此句为马后炮，毕竟是有了王糖糖同学提供的代码），也深刻地体会到两者的不同，下面我们来做一下罗列。

- 区别

- BSAS: 是 BAS 的衍生，移动和搜索的方式也很 BAS。一言蔽之，BSAS 就像天牛有了 k 对须而不是一对，在每回合，它必须要沿着这些须的方向都探索一遍。所谓的 **Swarm**，是因为每回合有 k 只（虚拟的）天牛在探索这 k 对须的方向。
- BSO: 在粒子群算法的大框架下，由速度的更新（PSO）和步长的更新（BAS）共同决定下一步的天牛位置。这其中的 **Swarm**，可以视作是真正独立的群体，它们间共享信息。

- 联系

- BSO 和 BSAS 保留着 BAS 的搜寻和移动方式
- BSO 和 BSAS 都是意图通过每回合搜索更多的位置（也可以视为方向），达到更优的效果。

### 3.1.4 算法调用说明

```
BSOptim(fn, init = NULL, constr = NULL,  
        lower = c(-50, -50), upper = c(50, 50), n = 300,  
        s = floor(10 + 2 * sqrt(length(lower))),  
        w = c(0.9, 0.4),  
        w_vs = 0.4,  
        step = 10,  
        step_w = c(0.9, 0.4),  
        c = 8,
```



```

v = c(-5.12, 5.12),
trace = T,
seed = NULL,
pen = 1e+06)

```

在本节写函数调用，是因为函数内有部分参数和本节的公式变量名称有出入。上面的代码是函数的默认调用形式，其中  $s$  表示设定的天牛或者粒子数目， $w$  也就是式(3.3)中提到的  $\omega_{max}$  和  $\omega_{min}$ 。  $w_{vs}$  是  $\lambda$ ，也就是式(3.4)中天牛速度和移动步长之间的权重，直观地理解为 **weight between velocity and step-size**。  $step$  和  $c$  仍然是表示步长和步长与须距离之比。而  $step_w$  为一个向量，表示的是式(3.7)中的  $\omega_{\delta_1} = 0.4$ ， $\omega_{\delta_0} = 0.9$ 。

一个简单的例子如下：

```

library(rBAS)
mich <- function(x){
y1 <- -sin(x[1])*(sin((x[1]^2)/pi))^20
y2 <- -sin(x[2])*(sin((2*x[2]^2)/pi))^20
return(y1+y2)
}
result <-
  BSOoptim(fn = mich,
           init = NULL,
           lower = c(-6,0),
           upper = c(-1,2),
           n = 100,
           step = 5,
           s = 10,seed = 1, trace = F)
result$par; result$value

```

```
## [1] -4.965998  1.570796
```

```
## [1] -1.967851
```



## 第四章 函数使用

首先, 加载 `rBAS` 包, 然后在4.1节到4.3节中, 我们详细讲述每个参数的含义。如果可能的话, 我会加上调参时的经验 (可能只对我的问题有用)。

```
library(rBAS)
```

打开网址<sup>1</sup>, 可以看到托管在 `github` 上的 `rBAS` 文档。大家可以通过 `Reference` 来访问里面所有函数的帮助文档, 通过 `Changelog` 来看每次包的更新及 `bugs` 修复记录。

文档网页是由 `pkgdown`<sup>2</sup>包制作而成, logo 由 `hexSticker`<sup>3</sup>包制作。

### 4.1 BASoptim

除了通过访问函数文档网站外, 还可以在 `R` 中输入下面的命令, 来查看文档。

```
help(BASoptim)
```

---

<sup>1</sup><https://jywang2016.github.io/rBAS/>

<sup>2</sup><http://pkgdown.r-lib.org/>

<sup>3</sup><https://github.com/GuangchuangYu/hexSticker>

### 4.1.1 BASoptim 参数说明

BASoptim 函数<sup>4</sup>(对应 BAS 算法) 调用的格式如下:

```
BASoptim(fn,
  init = NULL,
  lower = c(-6, 0), upper = c(-1, 2),
  constr = NULL, pen = 1e+05,
  d0 = 0.001, d1 = 3, eta_d = 0.95,
  l0 = 0, l1 = 0, eta_l = 0.95,
  step = 0.8, eta_step = 0.95,
  n = 200, steptol = 0.01,
  seed = NULL, trace = T )
```

由于英文蹩脚, 所以大家看起包自带的文档会比较吃力。因此, 在此处给出中文说明。

- 已知条件: 目标函数与约束
  - fn 待优化的目标函数
  - init 参数初始值, 默认为 NULL, 即在上下限内随机选取, 也可以自行指定
  - constr 不等式约束
  - lower/upper 上下限
  - pen 惩罚因子  $\lambda$
- BAS 待调参数
  - d0 参见式(2.4)中所述的搜索距离(也就是质心到须的距离)参数, 一个比较小的值, 默认为 0.001
  - d1 初始的搜索距离, 默认为 3
  - eta\_d 搜索距离的衰减系数
  - l0/l1/eta\_l 这一系列关于  $l$  的参数, 来源于 BAS (Jiang Xiangyuan, 2017a) 论文中给出的 matlab 代码。其作用在于每回合位置更新时, 产生一个随机抖动  $x = x - step * dir * sign(fn(left) - fn(right)) + l * random(npars)$

<sup>4</sup><https://jywang2016.github.io/rBAS/reference/BASoptim.html>

- step/eta\_step 步长以及步长的衰减率
- steptol 停止更新的步长临界值
- n 回合数或者迭代次数
- 其他
  - seed 给定随机种子，用来固定寻优结果。不同的种子，对结果的影响非常大。
  - trace 是否显示寻优过程信息

### 4.1.2 BASoptim 简单案例

这里采用 **BAS** (Jiang Xiangyuan, 2017a) 一文中给出的测试函数，即 Michalewicz function 与 Goldstein-Price function。

#### 4.1.2.1 Michalewicz function

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d=2} \sin(x_i) \left[ \sin\left(\frac{ix_i^2}{\pi}\right) \right]^{20}$$

图4.1为 Michalewicz 函数在给定的约束范围的三维示意图。可以看到，最小值在  $x = -5, y = 1.5$  的附近。

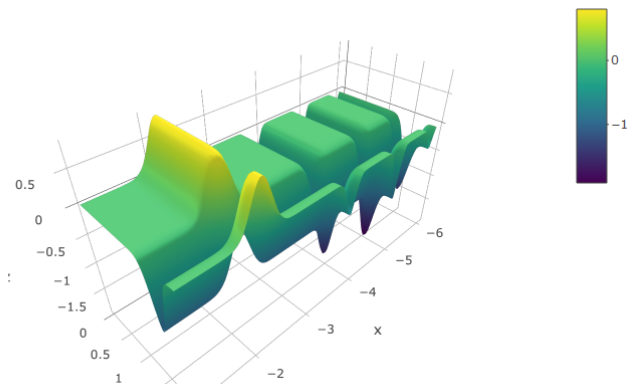


图 4.1: Michalewicz 函数示意

我们先在 R 的脚本中构建出函数：

```
# <- 可以视作 = 即用等于号在此处也是可以的
mich <- function(x){
  y1 <- -sin(x[1])*(sin((x[1]^2)/pi))^20
  y2 <- -sin(x[2])*(sin((2*x[2]^2)/pi))^20
  return(y1+y2)
}
```

然后利用 rBAS 包中的 BASoptim 函数求解:

```
# 把 BASoptim 的寻优结果赋值给 test
test<-
  BASoptim(fn = mich,
    lower = c(-6,0), upper = c(-1,2),
    seed = 1, n = 100,trace = FALSE)

test$par
```

```
## [1] -4.964687  1.575415
```

```
test$value
```

```
## [1] -1.966817
```

可以看到, BAS 在 100 个回合内找到了全局的最小值。非 R 用户可能对上下限的声明有点陌生, `c(-6,0)` 中 `c()`, 其实是声明了一个向量, 这也是 R 里面最基本的数据类型, 和 matlab 里面的 `[-6 0]` 效果类似。整体看来, 代码还是很简洁的。

## 4.1.2.2 Goldstein-Price function

$$f(x) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)][30 + (2x_1 - 3x_2)^2(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)]$$

图4.2为 Goldstein-Price 函数在给定的约束范围的三维示意图。可以看到，最小值在  $x = -5, y = 1.5$  的附近。图4.1与4.2均使用 `plotly`<sup>5</sup>绘制。

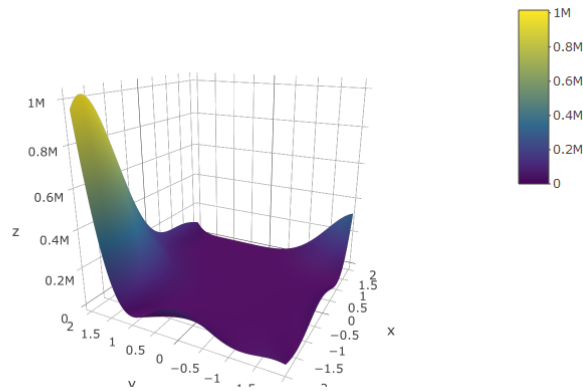


图 4.2: Michalewicz 函数示意

函数构造:

```
gold <- function(x){
  x1 <- x[1]
  x2 <- x[2]
  y1 <- 1 + (x1 + x2 + 1)^2*
    (19 - 14*x1+3*x1^2 - 14*x2 + 6*x1*x2 + 3*x2^2)
  y2 <- 30 + (2*x1 -3*x2)^2*
    (18 - 32*x1 + 12*x1^2+48*x2-36*x1*x2 + 27*x2^2)
```

<sup>5</sup><https://plot.ly/r/>

```
    return(y1*y2)
}
```

其中, `x[1]` 表示向量 `x` 的第一个元素。举例, `x = c(1,2)`, 那么 `x[1]` 等于 1, `x[2]` 等于 2。索引从 1 开始, 并不是从 0 开始 (python 和 C++ 用户可能需要注意)。

优化代码:

```
test<-
  BASoptim(fn = gold,
           lower = c(-2,-2), upper = c(2,2),
           seed = NULL, n = 100, trace = F)

test$par
```

```
## [1] 0.001870855 -0.996496153
```

```
test$value
```

```
## [1] 3.004756
```

同样, 结果也是给出了全局最优点 (或在此附近, 继续迭代下去, 可能会有更精确更小的值)。

## 4.2 BSASoptim

BSASoptim 函数<sup>6</sup>(对应 BSAS 算法), 在 BAS 的基础上, 加入了步长反馈和群体策略。调用的格式如下:

---

<sup>6</sup><https://jywang2016.github.io/rBAS/reference/BSASoptim.html>



```
BSASoptim(fn,
          init = NULL, constr = NULL,
          lower = c(-6, 0), upper = c(-1, 2),
          k = 5, pen = 1e+05,
          d0 = 0.001, d1 = 3, eta_d = 0.95,
          l0 = 0, l1 = 0, eta_l = 0.95,
          step = 0.8, eta_step = 0.95, steptol = 0.01,
          n = 200, seed = NULL, trace = T,
          p_min = 0.2, p_step = 0.2, n_flag = 2)
```

### 4.2.1 BSASoptim 参数说明

与 BAS 相比, BSAS 在下面几处不同参数:

- $k$  每回合的外出试探的天牛数目, 越多结果会越稳定 (多次执行, 结果更接近), 但是计算时长会相应增长。适当选取天牛数目, 有助于避免随机的初始值和方向带来影响的同时, 计算时长也可以接受。
- $p\_min$  当  $k$  只外出的天牛存在超过 1 只找到了更优的位置, 也就是比当前的最佳值要更小。那是否需要更新到那  $k$  只天牛中最优的那一只所在的位置呢? 经过一些尝试, 我片面地认为, 未必是每次都最佳, 最后的位置一定最佳。因此, 给定一个概率  $p_{min}$ 。当有 2 只或以上的天牛找到更好的位置时, 会在  $[0,1]$  间生成一个随机数, 如果大于  $p_{min}$ , 那么就选  $k$  只天牛里最优天牛作为下次的更新位置牛; 如果小于  $p_{min}$ , 那么就在找到了更好的位置的天牛里面, 随机选出一只天牛, 作为下次的更新位置。
- $p\_step$  想法与  $p\_min$  类同, 用于控制步长反馈策略。在  $k$  只天牛找不到更优位置时, 算法认为是步长过大, 下一回合天牛位置不更新, 且会减小步长。反之, 则更新天牛位置, 并保持当前步长直至不能找到更优位置。那么, 是否存在由于随机方向的原因, 或者是  $k$  过小, 导致在当前步长条件下, 存在更优位置, 但是找不到。这个时候, 我们设置一个更新概率  $p_{step}$ , 即在找不到更优的天牛位置下, 步长有  $p_{step}$  概率不更新, 继续寻找。
- $n\_flag$  为了防止设定过大的  $p\_step$ , 让数次产生的随机数都小于  $p\_step$ , 影响迭代的效率。我们给定了这个参数, 默认为 2, 只要

在同一个步长上的无效搜索 (因为找不到更优位置而反复搜索) 次数保持 3 次及以上, 则会强制更新步长。

### 4.2.2 BSASoptim 取值摸索

好吧, 用中文说明都这么绕口, 何况是我撰写的可怜的英文文档。有同学会问了, 为什么要后面那几个概率和什么次数的参数, 这不是画蛇添足吗? 回答是, 这几个参数**来源于生活**...

我在做建筑阻容模型系统辨识时, 每回合的寻优, 都是在用龙哥库塔法求解一次常微分方程组 (ODEs)。在我的问题规模下, 每回合纯粹的 R 代码要**耗费 0.25s 左右**来求解一次这样的 ODEs。也就是说, 在求解目标函数上, 程序耗费的时间就有  $k * n * 0.25$ , 还不算其他的计算开销。(换言之, 用遗传算法, 会带来更大的计算开销, 因为每回合至少计算  $10 * \text{参数个数}$  次的目标函数)

所以, 我必须要结果较好的同时, 尽量减少不必要的计算。因此,  $k$  不能太大, 但是这又会在随机方向的影响下, **错失一些优化的位置**, 那就需要 `p_step` 参数了。但是初始位置或者说中间位置附近的最优, **不代表在这附近或方向上, 有全局最优**, 所以我还需要 `p_min` 来保证, 我有那么一丝可能, 跳出**每次都找最优, 可是收敛结果与全局最优背离**的怪圈。至于 `n_flag`, 是因为我之前设置了 `p_step` 为 0.5, 所以算法效率极低, 几乎每个找不到更优的夜, 这些天牛都悲伤地多做数次运行, 所以我设置了这个参数。

还是需要强调, 在我的问题里, 这些参数起到了较好的效果。但是换成大家的研究, 这些参数可能就是被害妄想症的产物了。有意思的是, 我在默认参数下执行 50 次 Michalewicz 函数的寻优, 效果并没有 BSASoptim 好。但在 RC 模型辨识上, BSASoptim 远好于 BASoptim。

接下来就是这几个参数的调节的一些小技巧了。

- 设置  $k$  为 1, 那就是带步长反馈的 BAS 了
- 如果求解目标函数速度快, 可以设置较大的  $k$
- `p_step` 设置为 0, 只要  $k$  只天牛找不到最优位置, 步长就会更新; 不存在不更新继续找的可能

- `p_step` 设置为 1, 那算法会在一个步长下一直执行, 直到找到更优的位置, 才会更新步长
- `p_min` 设置为 0, 在 `k` 只出去试探的天牛中找到了更优的位置时, 那么当前时刻的天牛, 总会选择这 `k` 只中最好的一只的位置来作为下一时刻的位置
- `p_min` 设置为 1, 下一时刻的位置是 `k` 只中更优天牛的位置的随机选择
- 为了求解效率, `p_step` 会选择较小的值; `p_min` 我还没有摸清楚个规律, 但是在我的研究对象中, 为 0 得到的结果在多次试验中, 整体看来没有为较小值 0.2 好。

上述是我在自身研究方向上摸出的规律, 可能问题的类型不同, 需要做的取舍也不同。大家可以保持默认参数, 然后进行符合自身情况的微调。更为详细的结果可以参见 **BSAS** (Wang Jiangyu, 2018) 论文。

### 4.2.3 BSASoptim 案例

#### 4.2.3.1 Michalewicz function

不做过多的阐述对于此案例, 可以参看4.1.2.1节。

```
library(rBAS)
mich <- function(x){
  y1 <- -sin(x[1])*(sin((x[1]^2)/pi))^20
  y2 <- -sin(x[2])*(sin((2*x[2]^2)/pi))^20
  return(y1+y2)
}
result <- BSASoptim(fn = mich,
                    lower = c(-6,0), upper = c(-1,2),
                    seed = 1, n = 100,k=5,step = 0.6,
                    trace = FALSE)
result$par
```

```
## [1] -4.970202 1.578791
```

```
result$value
```

```
## [1] -1.963534
```

#### 4.2.3.2 Pressure Vessel function

使用 **BAS-WPT**([Jiang Xiangyuan, 2017b](#)) 论文中压力容器优化函数来测试 BSASoptim 处理约束的能力。问题背景如下：

$$\begin{aligned}
 \text{minimize } f(\mathbf{x}) &= 0.6224x_1x_3x_4 + 1.7781x_2x_3^2 \\
 &\quad + 3.1661x_1^2x_4 + 19.84x_1^2x_3 \\
 \text{s.t. } g_1(\mathbf{x}) &= -x_1 + 0.0193x_3 \leq 0 \\
 g_2(\mathbf{x}) &= -x_2 + 0.00954x_3 \leq 0 \\
 g_3(\mathbf{x}) &= -\pi x_3^2x_4 - \frac{4}{3}\pi x_3^3 + 1296000 \leq 0 \\
 g_4(\mathbf{x}) &= x_4 - 240 \leq 0 \\
 x_1 &\in \{1, 2, 3, \dots, 99\} \times 0.0625 \\
 x_2 &\in \{1, 2, 3, \dots, 99\} \times 0.0625 \\
 x_3 &\in [10, 200] \\
 x_4 &\in [10, 200]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

构造一个列表，也就是 `list()`。其中包含有 2 个函数，一个是我们的目标函数 `obj`，一个是我们的不等式约束函数 `con`。为了方便起见，我并没有写每一个函数的返回值，那么，R 会自动返回计算的最后一个对象。比如，在 `obj` 函数中，是 `result` 变量（标量）被返回。而在 `con` 函数中，是由 `c()` 声明的向量被返回。

```
pressure_Vessel <- list(
  obj = function(x){
    x1 <- floor(x[1])*0.0625
```

```

x2 <- floor(x[2])*0.0625
x3 <- x[3]
x4 <- x[4]
result <- 0.6224*x1*x3*x4 +
          1.7781*x2*x3^2 +
          3.1611*x1^2*x4 +
          19.84*x1^2*x3
},
con = function(x){
  x1 <- floor(x[1])*0.0625
  x2 <- floor(x[2])*0.0625
  x3 <- x[3]
  x4 <- x[4]
  c(# 把所有的不等式约束, 全部写为小于等于 0 的形式
    0.0193*x3 - x1,
    0.00954*x3 - x2,
    750.0*1728.0 - pi*x3^2*x4 - 4/3*pi*x3^3
  )
}
)

```

使用 `BSASoptim` 函数进行优化。需要注意的是, `pressure_Vessel` 是一个列表, 对于其中包含的元素, 使用 `$` 符号进行访问。也可以使用 `[[` 符号, 即 `pressure_Vessel$obj` 等价于 `pressure_Vessel[[1]]`。

```

result <- BSASoptim(fn = pressure_Vessel$obj,
                    k = 5,
                    lower = c( 1, 1, 10, 10),
                    upper = c(100, 100, 200, 200),
                    constr = pressure_Vessel$con,
                    n = 200,
                    step = 100,
                    d1 = 5,

```

```
pen = 1e6,  
steptol = 1e-6,  
n_flag = 2,  
seed = 2, trace = FALSE)  
  
result$par
```

```
## [1] 14.92195 7.87620 43.51377 159.87104
```

```
result$value
```

```
## [1] 6309.406
```

可以看到结果与论文 **BAS-WPT**([Jiang Xiangyuan, 2017b](#)) 中 TABLE 1 给出的优化值还是有一定的差距。不过,这也让我意识到了,对于复杂的优化问题,调试其中的参数是个困难的活。歧路亡羊呀!

好在,改进后的 **BSAS-WPT** 能够比较好地得到不逊于 **BAS-WPT**([Jiang Xiangyuan, 2017b](#)) 中的结果(在4.3.2节可以看到)。更多更优地结果,等待你去调参,如果你还有勇气的话。

## 4.2.3.3 Himmelblau function

$$\begin{aligned}
\text{minimize } f(\mathbf{x}) &= 5.3578547x_3^2 + 0.8356891x_1x_5 \\
&\quad + 37.29329x_1 - 40792.141 \\
s.t. \quad g_1(\mathbf{x}) &= 85.334407 + 0.0056858x_2x_5 \\
&\quad + 0.00026x_1x_4 - 0.0022053x_3x_5 \\
g_2(\mathbf{x}) &= 80.51249 + 0.0071317x_2x_5 \\
&\quad + 0.0029955x_1x_2 + 0.0021813x_3^2 \\
g_3(\mathbf{x}) &= 9.300961 + 0.0047026x_3x_5 \\
&\quad + 0.0012547x_1x_3 + 0.0019085x_3x_4 \\
g_1(\mathbf{x}) &\in [0, 92] \\
g_2(\mathbf{x}) &\in [90, 110] \\
g_3(\mathbf{x}) &\in [20, 25] \\
x_1 &\in [78, 102] \\
x_2 &\in [33, 45] \\
x_3 &\in [27, 45] \\
x_4 &\in [27, 45] \\
x_5 &\in [27, 45]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

构造优化目标函数和约束：

```

himmelblau <- list(
  obj = function(x){
    x1 <- x[1]
    x3 <- x[3]
    x5 <- x[5]
    result <- 5.3578547*x3^2 +
      0.8356891*x1*x5 +
      37.29329*x[1] -

```

```

40792.141
},
con = function(x){
  x1 <- x[1]
  x2 <- x[2]
  x3 <- x[3]
  x4 <- x[4]
  x5 <- x[5]
  g1 <- 85.334407 + 0.0056858*x2*x5 +
    0.00026*x1*x4 - 0.0022053*x3*x5
  g2 <- 80.51249 + 0.0071317*x2*x5 +
    0.0029955*x1*x2 + 0.0021813*x3^2
  g3 <- 9.300961 + 0.0047026*x3*x5 +
    0.0012547*x1*x3 + 0.0019085*x3*x4
  c(
    -g1,
    g1-92,
    90-g2,
    g2 - 110,
    20 - g3,
    g3 - 25
  )
}
)

```

使用 BSASoptim 函数进行优化:

```

result <- BSASoptim(fn = himmelblau$obj,
  k = 5,
  lower = c(78,33,27,27,27),
  upper = c(102,45,45,45,45),
  constr = himmelblau$con,
  n = 200,

```



```

        step = 100,
        d1 = 10,
        pen = 1e6,
        steptol = 1e-6,
        n_flag = 2,
        seed = 11, trace = FALSE)

result$par

```

```
## [1] 78.01565 33.00000 27.07409 45.00000 44.95878
```

```
result$value
```

```
## [1] -31024.17
```

这个结果，比 **BAS-WPT**(Jiang Xiangyuan, 2017b) 中 TABLE 2 记载的结果都要好。但只要你愿意调差，嘿嘿，总有更好的。

## 4.3 BSAS-WPT

在进行 BSAS-WPT 参数讲解的这一部分前，我想问个问题。在式(4.1)和式(4.2)中，我们可以看到，有些  $x_i$  的约束范围较小，有的较大。比如，压力容器中， $x_1$  和  $x_2$  就偏小，只是经过提取出 0.0625，勉强能达到  $x_3$  和  $x_4$  的一半。那么，如果某些优化问题，其参数约束范围之间，相差了量级，该如何选择步长呢？这就是 WPT 的便捷之处了。

BSAS-WPT 函数<sup>7</sup>(对应 BSAS-WPT 算法) 调用的格式如下：

```

BSAS_WPT(fn,
          init = NULL,
          lower = c(-6, 0), upper = c(-1, 2),

```

<sup>7</sup>[https://jywang2016.github.io/rBAS/reference/BSAS\\_WPT.html](https://jywang2016.github.io/rBAS/reference/BSAS_WPT.html)

```

k = 5, constr = NULL, pen = 1e+05,
c2 = 5,
step = 1, eta_step = 0.95, steptol = 0.001,
n = 200, seed = NULL, trace = T,
p_min = 0.2, p_step = 0.2, n_flag = 2)

```

### 4.3.1 BSAS-WPT 参数说明

与 BSAS 相比，除去我人为略去的抖动部分，减少了搜索距离  $d$  相关的参数，这些用  $c2$  来替代。而初始步长  $step$ ，我们可以设定为一个在 1 附近的数。由于算法先标准化了参数，然后根据式(2.3)在计算位置后，再根据上下限进行反标准化，而后导入目标函数。所以，你可以认为，BSAS 中，把  $step$  变成一个  $n$  维的向量，假设  $n$  是参数个数，每个步长元素都根据参数的约束范围大小来设定，那么算法就会变成 BSAS-WPT。

总之，现在要调节的参数，主要有 2 个，即  $c2$  和  $step$ 。

### 4.3.2 BSAS-WPT 案例

我们使用和 BSASoptim 函数相同的例子来对比效果。但是，这些效果都是不固定的，即给定不同的参数，结果也会不同，所以不能根据一次结果评价算法的优劣。

#### 4.3.2.1 Pressure Vessel function

```

result <- BSAS_WPT(fn = pressure_Vessel$obj,
                  k = 8,
                  lower = c( 1, 1, 10, 10),
                  upper = c(100, 100, 200, 200),
                  constr = pressure_Vessel$con,
                  c2 = 10, n = 200, step = 2,
                  seed = 1,

```

```

        n_flag = 3,
        trace = FALSE,
        steptol = 1e-6)
result$par

```

```
## [1] 13.882270 7.434164 42.094999 176.932890
```

```
result$value
```

```
## [1] 6065.478
```

#### 4.3.2.2 Himmelblau function

```

result <- BSAS_WPT(fn = himmelblau$obj,
                  k = 10,
                  lower = c(78,33,27,27,27),
                  upper = c(102,45,45,45,45),
                  constr = himmelblau$con,
                  c2 = 5, n = 200, step = 1.6,
                  pen = 1e5, trace = FALSE, seed = 11)

```

```
## ----step < steptol-----stop the iteration-----
```

```
result$par
```

```
## [1] 78.00000 33.00000 27.07176 45.00000 44.96713
```

```
result$value
```

```
## [1] -31025.47
```

BSAS-WPT 没有做过多的参数调节，即可获得更畅快地优化体验。举例，在对 Himmelblau 函数进行优化时，我仅仅设定了随机种子 `seed`，然后把 `step` 从 1 调到了 2，看了看效果的变化。发现都不错，最后每隔 0.1 选取 `step`，试探最好的效果在哪里，于是就成了上面的例子。如果把这一套，放在 `BSASoptim` 函数上，对于复杂的优化问题，就成了一种折磨。

## 4.4 BSO

### 4.4.1 BSO 参数说明

由于 BSO 参数与原理中的公式较为复杂。因此，在讲述其原理时，对函数的参数也进行了说明。故大家可以参考 `@ref(#BSOparms)` 节。此处，仅仅复制该内容。

```
BSOptim(fn, init = NULL, constr = NULL,
        lower = c(-50, -50), upper = c(50, 50), n = 300,
        s = floor(10 + 2 * sqrt(length(lower))),
        w = c(0.9, 0.4),
        w_vs = 0.4,
        step = 10,
        step_w = c(0.9, 0.4),
        c = 8,
        v = c(-5.12, 5.12),
        trace = T,
        seed = NULL,
        pen = 1e+06)
```

上面的代码是函数的默认调用形式，其中 `s` 表示设定的天牛或者粒子数目，`w` 也就是式(3.3)中提到的  $\omega_{max}$  和  $\omega_{min}$ 。`w_vs` 是  $\lambda$ ，也就

是式(3.4)中天牛速度和移动步长之间的权重，直观地理解为 **weight between velocity and step-size**。step 和 c 仍然是表示步长和步长与须距离之比。而  $step_w$  为一个向量，表示的是式(3.7)中的  $\omega_{\delta_1} = 0.4$ ,  $\omega_{\delta_0} = 0.9$ 。

#### 4.4.2 BSO 案例

##### 4.4.2.1 Michalewicz function

一个简单的例子 (Michalewicz function) 如下：

```
library(rBAS)
mich <- function(x){
  y1 <- -sin(x[1])*(sin((x[1]^2)/pi))^20
  y2 <- -sin(x[2])*(sin((2*x[2]^2)/pi))^20
  return(y1+y2)
}
result <-
  BSOoptim(fn = mich,
           init = NULL,
           lower = c(-6,0),
           upper = c(-1,2),
           n = 100,
           step = 5,
           s = 10, seed = 1, trace = F)
result$par; result$value
```

```
## [1] -4.965998  1.570796
```

```
## [1] -1.967851
```

## 4.4.2.2 Pressure Vessel function

```

pressure_Vessel <- list(
  obj = function(x){
    x1 <- floor(x[1])*0.0625
    x2 <- floor(x[2])*0.0625
    x3 <- x[3]
    x4 <- x[4]
    result <- 0.6224*x1*x3*x4 + 1.7781*x2*x3^2 + 3.1611*x1^2*x4 + 19.84*x1^2*x3
  },
  con = function(x){
    x1 <- floor(x[1])*0.0625
    x2 <- floor(x[2])*0.0625
    x3 <- x[3]
    x4 <- x[4]
    c(
      0.0193*x3 - x1, #<=0
      0.00954*x3 - x2,
      750.0*1728.0 - pi*x3^2*x4 - 4/3*pi*x3^3
    )
  }
)

```

```

result<-
BSOptim(fn = pressure_Vessel$obj,
  init = NULL,
  constr = pressure_Vessel$con,
  lower = c( 1, 1, 10, 10),
  upper = c(100, 100, 200, 200),
  n = 1000,
  w = c(0.9,0.4),
  w_vs = 0.9,

```

```

    step = 100,
    step_w = c(0.9,0.4),
    c = 35,
    v = c(-5.12,5.12),
    trace = F,seed = 1,
    pen = 1e6)
result$par

```

```
## [1] 13.955250 7.550179 42.098446 176.636596
```

```
result$value
```

```
## [1] 6059.131
```

得到的结果十分好（甚至比论文(?)还要高出那么一点点）。但是，这是调参调出来的结果。

总的来说，我自己的经验是：

- 调节最大迭代次数 `n`
- 调节步长 `step` 和步长与须距离比值 `c`（让搜索距离的尺度尽量在迭代后不要太大）
- 调节 `w_vs`，该值越大，粒子群算法更新方式所占的比重越大。

而王糖糖同学给出的建议是：

“在试验的时候发现，当维度提高时，步长和迭代次数也要相应的提高”

—王糖糖

最后呢，我们为什么要改算法！

开个玩笑，祝大家周末愉快，学业顺心。



图 4.3: 为什么我们孜孜不倦改算法



## 第五章 用户界面

用户界面基于 shiny<sup>1</sup>包开发。核心思想是，把目标函数或者约束在 R 的脚本中预先定义好，然后调用 `run_BAS_App(func = ..., constr = ..., theme = ...)` 函数来人为调节参数，运行以及可视化。

### 5.1 调用语句

```
run_BAS_App(func = Your-objective-func,  
             constr = Your-constraint-func,  
             theme = 'united')
```

其中：

- `func` 指的是，需要优化的目标函数
- `constr` 则是不等式约束，至于上下限约束，可以直接在用户界面里面定义
- `theme` 也就是界面主题，即皮肤，默认的主题是 `united`。可以使用 `help(run_BAS_App)` 语句来看可选的主题样式都有哪些，如 `superhero`, `cosmo`, `paper`, `journal` 等主题。这些主题是调用 `shinythemes`<sup>2</sup>而来。

---

<sup>1</sup><https://github.com/rstudio/shiny>

<sup>2</sup><https://github.com/rstudio/shinythemes>

## 5.2 使用案例

### 5.2.1 Michalewicz function

先在代码中预定义函数：

```
mich <- function(x){
  y1 <- -sin(x[1])*(sin((x[1]^2)/pi))^20
  y2 <- -sin(x[2])*(sin((2*x[2]^2)/pi))^20
  return(y1+y2)
}
```

然后调用用户界面：

```
run_BAS_App(func = mich)
```

*#run\_BAS\_App(func = mich, theme = 'paper')* 可以尝试下 *paper* 或是其他的主题

出现了如图5.1的界面：

左边是固定的参数调节栏，最上方有目前的收录的三种算法可供选择，以及本包的作者信息。右侧也有三个选项，分别是优化过程信息，优化参数结果以及优化结果可视化。

按照你的需要，调节好左边的参数信息（第一个参数，也就是初始值 *init*，默认为空，也可以指定），然后点击左下方的 **Run BAS** 键，即可看到如图5.2的内容：

由于回合数较大，因此只截取了部分内容显示。

分别点击 **Optimization Parameters** 和 **Progress Plot** 键，可以看到最后的结果，以及可视化信息，分别如图5.3与 5.4所示。

可以看到，窗口的 *\$par* 显示的是参数的优化结果，而 *\$value* 则是对应的目标函数值。

BAS 与其他两种算法有着不同的可视化结果，其并不是基于反馈来控制步长的。因此，图中的两条曲线，红色的为每一回合的目标函数值，而蓝色的为此前回合中最优的目标函数值。

Shiny interface for BAS algorithms

BAS BSAS BSAS-WPT Authors

Initial parameters-init:

Lower of params-lower:

-6,0

Upper of params-upper:

-1,2

Smallest antenna length-d0:

0.001

Initial antenna length-d1:

3

Attenuation constant-eta\_d:

0.95

Beetle step length-step:

0.8

Attenuation constant for step-eta\_step:

0.95

Iteration numbers-n:

200

Random seed-seed:

1

Step tolerance-steptol:

0.01

penalty coefficient(A lager positive number):

100000

Run BAS

Optimization Progress Optimization Parameters Progress Plot

Optimization Progress:

图 5.1: shiny interface

### 5.2.2 Pressure Vessel function

这次，我们在 BSAS-WPT 栏下进行界面使用。先在代码中预定义目标函数和约束：

```
pressure_Vessel <- list(
  obj = function(x){
    x1 <- floor(x[1])*0.0625
    x2 <- floor(x[2])*0.0625
    x3 <- x[3]
```

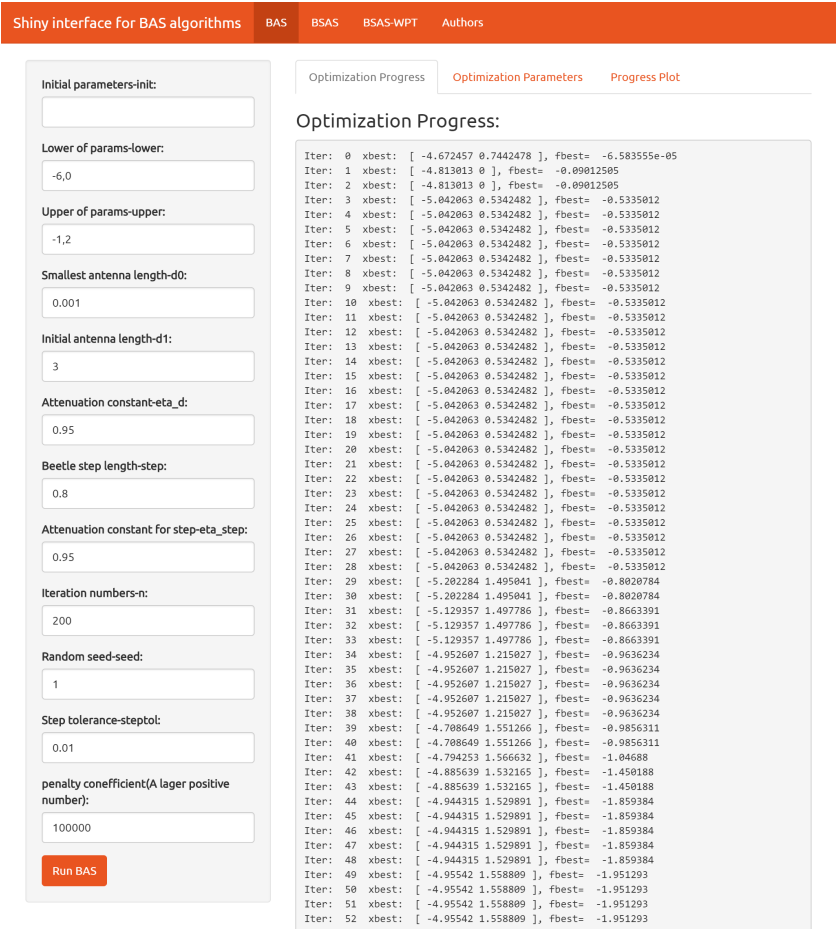


图 5.2: optimization progress 栏信息

```
x4 <- x[4]
result <- 0.6224*x1*x3*x4 +
1.7781*x2*x3^2 +
3.1611*x1^2*x4 +
19.84*x1^2*x3
},
con = function(x){
x1 <- floor(x[1])*0.0625
x2 <- floor(x[2])*0.0625
```

Shiny interface for BAS algorithms
BAS
BSAS
BSAS-WPT
Authors

Initial parameters-init:

Lower of params-lower:

Upper of params-upper:

Smallest antenna length-d0:

Initial antenna length-d1:

Attenuation constant-eta\_d:

Beetle step length-step:

Attenuation constant for step-eta\_step:

Iteration numbers-n:

Random seed-seed:

Step tolerance-steptol:

penalty coefficient(A lager positive number):

Run BAS

Optimization Progress

Optimization Parameters

Progress Plot

Optimization Parameters:

```

$par
[1] -4.964687  1.575415

$value
[1] -1.966817

```

图 5.3: Optimization Parameters 栏信息

```

x3 <- x[3]
x4 <- x[4]
c(
  0.0193*x3 - x1, #<=0
  0.00954*x3 - x2,
  750.0*1728.0 - pi*x3^2*x4 - 4/3*pi*x3^3
)
}

```

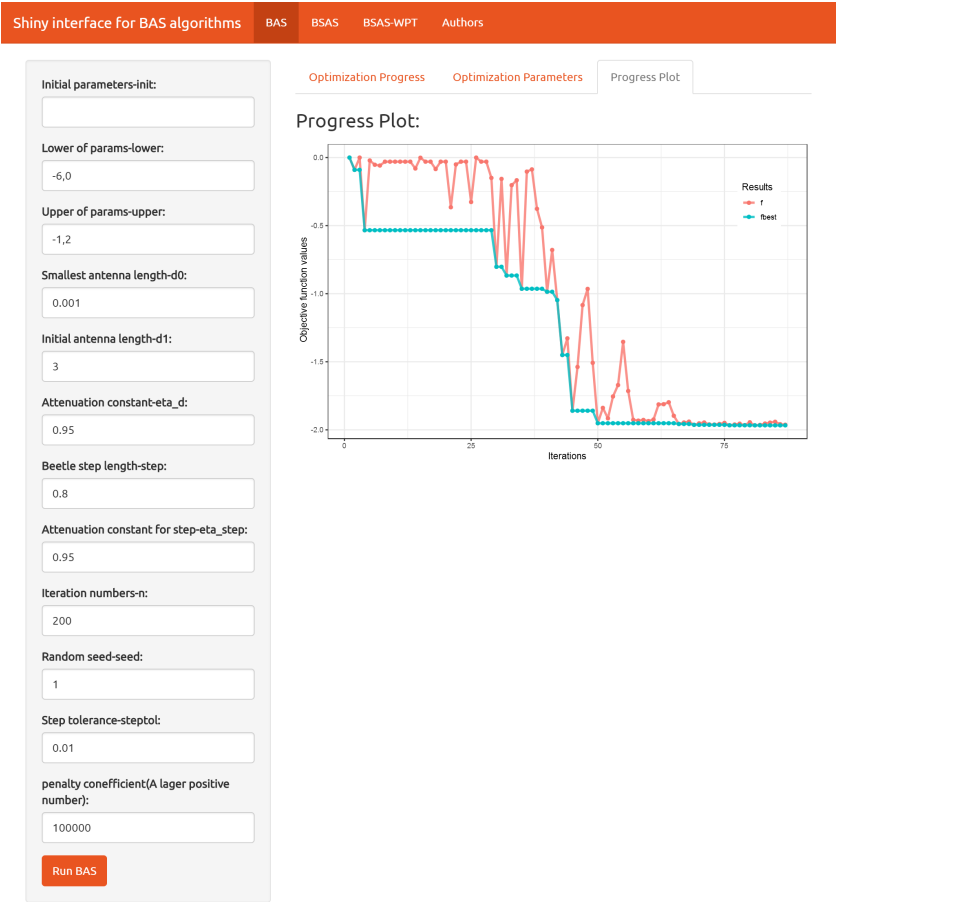


图 5.4: Progress Plot 栏信息

)

调用用户界面，注意此时多出了 `constr`，也就是约束函数，`$` 符号在索引列表中的元素时使用：

```
run_BAS_App(func = pressure_Vessel$obj,  
             constr = pressure_Vessel$con)
```

自行调整参数后，用户界面如图5.5所示：

Shiny interface for BAS algorithms

BAS

BSAS

BSAS-WPT

Authors

Initial parameters-init:

Lower of params-lower:

1, 1, 10, 10

Upper of params-upper:

100, 100, 200, 200

ratio of step-size and searching distance C2:

10

Beetle step length-step:

2

Attenuation constant for step-eta\_step:

0.95

Iteration numbers-n:

200

Random seed-seed:

1

Step tolerance-steptol:

0.000001

Number of beetles-k:

8

p\_min(in [0,1]):

0.2

p\_step(in [0,1]):

0.2

n\_flag(positive integer):

3

penalty coefficient(A lager positive number):

100000

Run BAS-WPT

Optimization Progress

Optimization Parameters

Progress Plot

Optimization Progress:

图 5.5: BSAS-WPT 参数调整

点击 Run BAS-WPT 之后，选择 optimization Parameters 栏目，可以看到优化结果如图5.6所示：

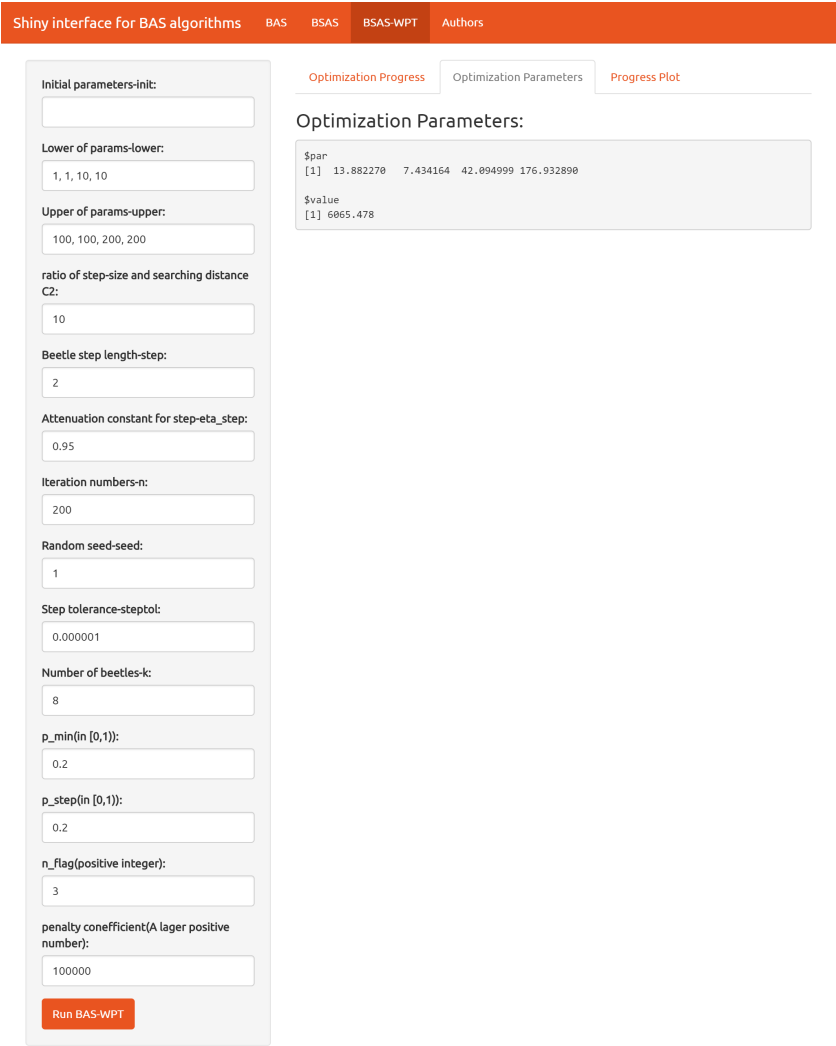


图 5.6: BSAS-WPT 优化结果

选择 Progress Plot 栏目，过程可视化如图5.7所示：



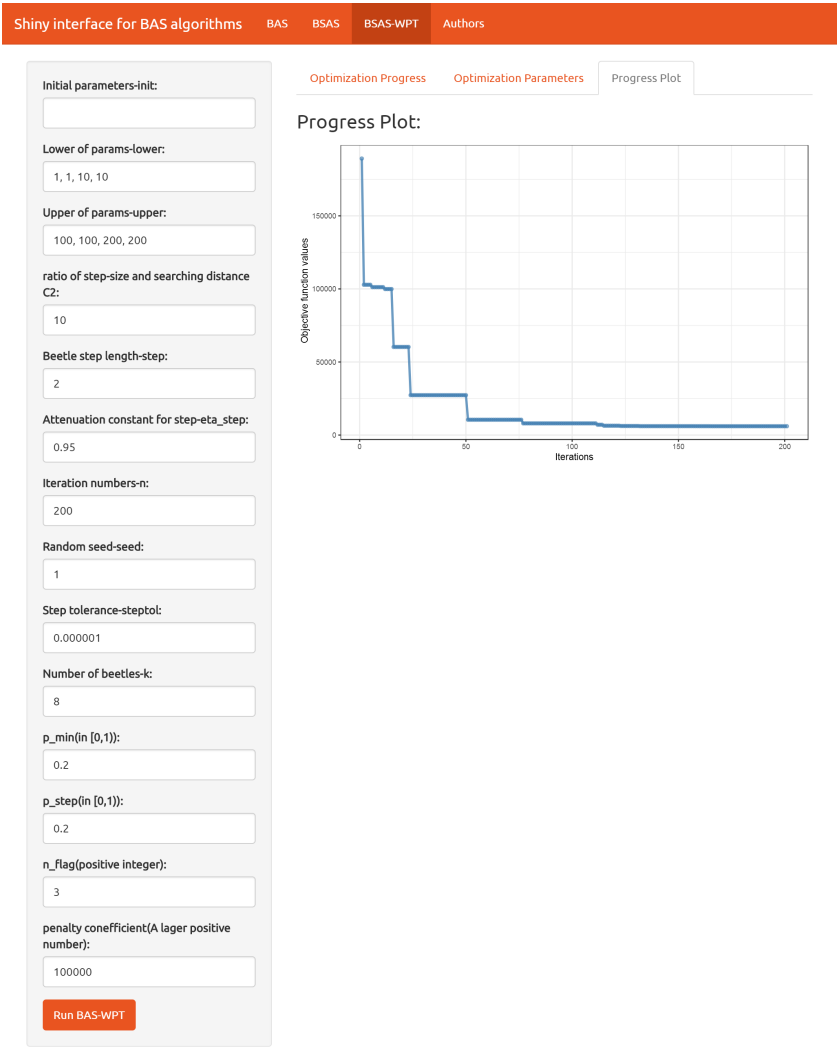


图 5.7: BSAS-WPT 优化过程可视化

## 5.3 Authors 界面

如果并不想执行任何函数优化，则可以不指定函数和约束。在 R 里面输入以下代码：

```
library(rBAS) # 加载 rBAS 包
run_BAS_App() # 直接调用函数
```

可以看到 rBAS 的用户界面，里面有关于 rBAS 的作者信息，如图5.8所示。

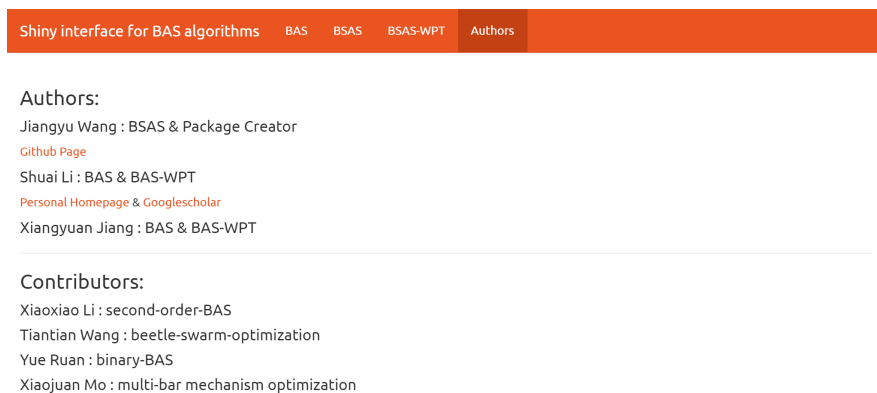


图 5.8: 用户界面作者信息

如果大家对该项目有兴趣，参与了包的开发，或者 BAS 算法应用案例的提出。我会在征得当事人同意的情况下，将名字加入该界面:)

# 第六章 BAS 案例一：多杆机构 优化问题

说明：由于自身专业知识局限，在整理转述各位研究者或贡献者所提供的材料时，我可能无法准确地表达出对应领域的知识要点。避免言多必失，我仅仅做简要的翻译或者是介绍。对于读者而言，如果觉得并不能解你之疾，或没有挠到痒处，建议直接和对应的作者联系。对于贡献者而言，如果我表述有误，欢迎提出建议，或者在 github 上 `pull request`。

由群友莫小娟博士研究生提供案例。

由于案例均为各位热心的同学提供，均为自己的研究。因此，希望大家要引用其中的结果时，可以引用对应同学的文章。此外，也请大家转载时注明来源。

## 6.1 背景

### 6.1.1 四连杆机构 (Four-bar linkage mechanism)

四连杆机构如图6.1所示：

基于闭环矢量方程，推导出节点位置。推导过程如式(6.1)至式(6.4)：

$$\text{Loop: } r_1 e^{i\theta_0} + r_4 e^{i\theta_4} - r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} = 0 \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} r_1 \cos(\theta_0) + r_4 \cos(\theta_4) - r_2 \cos(\theta_2) - r_3 \cos(\theta_3) = 0 \\ r_1 \sin(\theta_0) + r_4 \sin(\theta_4) - r_2 \sin(\theta_2) - r_3 \sin(\theta_3) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

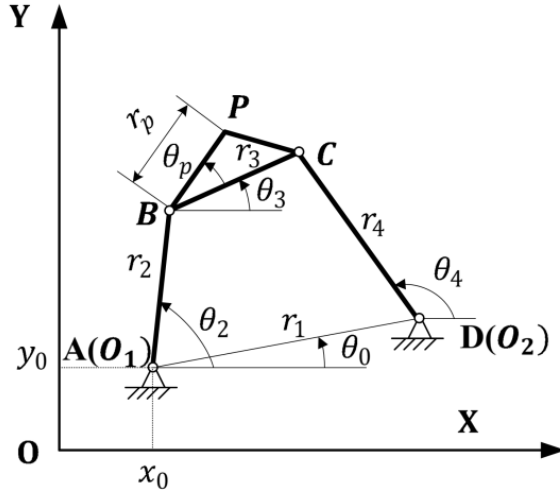


图 6.1: 四连杆机构示意

$$\theta_3 = 2 \operatorname{atan}\left(\frac{-A \pm \sqrt{2A^2 - 4BC}}{2B}\right) + \theta_0$$

$$A = \cos(\theta_2 - \theta_0) - K_1 + K_2 \cos(\theta_2 - \theta_0) + K_3 \quad (6.3)$$

$$B = -2\sin(\theta_2 - \theta_0), F = K_1 + (K_2 - 1)\cos(\theta_2 - \theta_0) + K_3$$

$$K_1 = r_1/r_2, K_2 = r_1/r_3, K_3 = (r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)/(2r_2r_3)$$

$$\begin{cases} x_p = x_0 + r_2 \cos(\theta_2) + r_p \cos(\theta_3 + \theta_p) \\ y_p = y_0 + r_2 \sin(\theta_2) + r_p \sin(\theta_3 + \theta_p) \end{cases} \quad (6.4)$$

### 6.1.2 六连杆机构 (Stephenson III Six-bar linkage mechanism)

六连杆机构如图6.2所示:

基于闭环矢量方程, 推导出节点位置和外部链接角度。推导过程如式(6.5)至式(6.6):

$$\begin{aligned} \text{Loop1: } r_1 e^{i\theta_0} + r_4 e^{i\theta_4} - r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} &= 0 \\ \text{Loop2: } r'_1 e^{i\theta'_0} + r_6 e^{i\theta_6} - r_2 e^{i\theta_2} - r_p e^{i(\theta_3 + \theta_p)} - r_5 e^{i\theta_5} &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

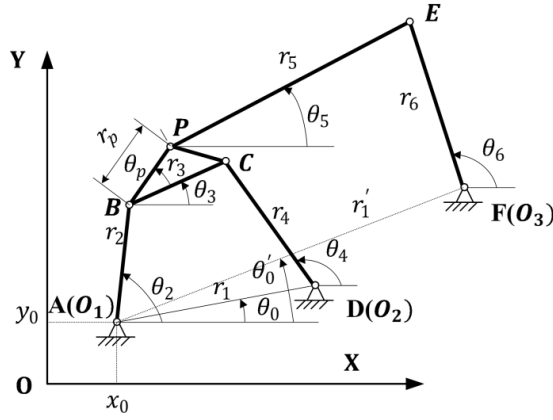


图 6.2: 六连杆机构示意

Loop1:

$$\alpha = r_2 \cos(\theta_2) - r_1 \cos(\theta_0), \beta = r_2 \sin(\theta_2) - r_1 \sin(\theta_0)$$

$$\gamma = (r_4^2 + \alpha^2 + \beta^2 - r_3^2) / (2r_4), \lambda = \text{atan2}(\alpha, \beta)$$

$$\theta_4 = \text{atan}(\cos(\lambda)\gamma/\beta, \{1 - (\cos(\lambda)\gamma/\beta)^2\}^{1/2}) - \lambda$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(r_4 \sin(\theta_4) - \beta, r_4 \cos(\theta_4) - \alpha)$$

Loop2:

(6.6)

$$\alpha_1 = r_2 \cos(\theta_2) + r_p \cos(\theta_3 + \theta_p) - r_6 \cos(\theta_6)$$

$$\beta_1 = r_2 \sin(\theta_2) + r_p \sin(\theta_3 + \theta_p) - r_6 \sin(\theta_6)$$

$$\gamma_1 = (r_6^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_5^2) / (2r_6), \lambda_1 = \text{atan2}(\alpha_1, \beta_1)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(\cos(\lambda)\gamma_1/\beta_1, -\{1 - (\cos(\lambda)\gamma_1/\beta_1)^2\}^{1/2}) - \lambda_1$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(r_6 \sin(\theta_6) - \beta_1, r_6 \cos(\theta_6) - \alpha_1)$$

于是, 可以得到节点位置如式(6.7):

$$\begin{cases} x_A = x_0, y_A = y_0 \\ x_D = x_0 + r_1 \cos(\theta_0), y_D = y_0 + r_1 \sin(\theta_0) \\ x_F = x_0 + r'_1 \cos(\theta'_0), y_F = x_0 + r'_1 \sin(\theta'_0) \\ x_p = x_0 + r_2 \cos(\theta_2) + r_p \cos(\theta_3 + \theta_p) \\ y_P = y_0 + r_2 \sin(\theta_2) + r_p \sin(\theta_3 + \theta_p) \end{cases} \quad (6.7)$$

## 6.2 优化问题

### 6.2.1 四连杆机构

四杆机构的优化问题可以用式(6.8)表示。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N [(P_{Xd}^i - P_X^i)^2 + (P_{Yd}^i - P_Y^i)^2] + M_1 h_1(x) + M_2 h_2(x) \\ \text{where } & x_i \in [l_{min}^i, l_{max}^i] \quad \forall x_i \in X, \\ & X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \theta_p, \theta_0, x_0, y_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^N] \end{aligned} \quad (6.8)$$

其中,

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{the Grashof condition false} \\ 0, & \text{the Grashof condition true} \end{cases} \quad (6.9)$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{the sequence condition of the crank angle false} \\ 0, & \text{the sequence condition of the crank angle true} \end{cases} \quad (6.10)$$

$h_1(X)$  和  $h_2(X)$  分别用于评估曲柄存在条件 (**Grashof Condition**) 以及曲柄角度 (顺时针或逆时针) 的顺序情况。  $M_1$  和  $M_2$  分别是对应的惩罚系数。  $X$  为设计参数。

### 6.2.2 六连杆机构

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^N [(P_{Xd}^i - P_X^i)^2 + (P_{Yd}^i - P_Y^i)^2] + \sum_{i=1}^M [(\theta_{6d}^i - \theta_6^i)^2] \\
& + M_1 h_1(x) + M_2 h_2(x) + M_3 h_3(X) \\
\text{where } & x_i \in [l_{min}^i, l_{max}^i] \quad \forall x_i \in X, \\
& X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_p, \theta_p, \theta_0, x_0, y_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^N]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

其中,  $h_1(X)$  与  $h_2(X)$  同式(6.9)与(6.10),  $h_3(X)$  如式(6.12):

$$h_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{non-violation of transmission angle false} \\ 0, & \text{non-violation of transmission angle true} \end{cases} \tag{6.12}$$

$h_3(X)$  所表示的是, 是否没有违背传动角 (超过  $20^\circ$ ) 的约束。同样地,  $M_3$  为对应的惩罚系数。

## 6.3 优化理论

案例所使用的算法是**标准化的群体天牛算法**。有意思的是, 此处群体天牛算法, 和 **rBAS** 包的 **BSASoptim** 的算法极为类似。这也说明, 加入群体智能策略, 会使得 **BAS** 对于复杂问题寻优能力增强。

联系在于: 此案例使用的群体天牛, 是在每回合, 对于天牛探索方向数的提升。即, 每回合生成多个随机的方向, 在这些方向上, 派出天牛进行试探。这点和 **BSAS** 保持一致, 可以理解为, 如果天牛不止有一对须, 而是有多对, 那每回合探索的方向也会有多个。大致的原理如式(6.13):

$$\begin{aligned}
x_{ri} &= x_t + d^t \vec{b}_i, \quad i = 1, \dots, q \\
x_{li} &= x_t - d^t \vec{b}_i, \\
x_{ti} &= x_{t-1} - \delta^t \vec{b}_i \text{sign}(f(x_{ri}) - f(x_{li}))
\end{aligned} \tag{6.13}$$

区别在于: 并未使用基于结果反馈的步长调节策略。

对于轨迹优化问题, 莫小娟同学给出的参数建议是,  $d_0 = 0.10, \delta_0 = 0.05, c_1 = 0.9998, c_2 = 0.5, q = 40, T_{max} = 50000$ 。部分同学可能看过手册的**二**节, 对于步长  $d$  和须到质心距离  $\delta$  的更新, 即式(2.6)中有所提及。此处, 参数的含义如式(6.14)所示。部分参数与式(2.6)类同, 也有同名但含义冲突的, 大家复现时需要注意这些地方。

$$\begin{aligned} d^t &= c_1 d^{t-1} \\ \delta^t &= c_2 d^t \end{aligned} \quad (6.14)$$

## 6.4 优化结果

此处, 莫小娟同学提供了 8 个案例, 并且与其他的经典算法(指多杆机构优化问题中多用的算法)进行了优化效果的对比。

### 6.4.1 Case1 无规定时间内轨迹生成 (Path generation without prescribed timing)

本案例是四杆机构的路径(6 个点)在一条垂直的线上(没有规定时间)。通过式(6.8)计算得到误差。

设计参数为:

$$X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \theta_p, \theta_0, x_0, y_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^6]$$

目标点坐标:

$$\{C_d^i\} = \{(20, 20), (20, 25), (20, 30), (20, 40), (20, 45)\}$$

参数约束:

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \in [0, 60] \quad r_p, x_0, y_0 \in [-60, 60] \quad \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_2^6, \theta_p \in [0, 2\pi]$$

算法参数为  $d_0 = 0.10, \delta_0 = 0.05, c_1 = 0.9998, c_2 = 0.5, q = 40, T_{max} = 50000$ , 动画结果如图??。



[img/case1.gif](#)

与其他算法对比结果如图6.3和表6.1。

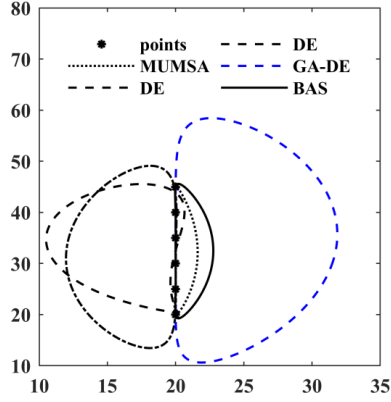


图 6.3: 各算法优化轨迹

#### 6.4.2 Case2 有规定时间的轨迹生成 (with prescribed timing)

本案例四杆机构的路径为 5 个没有对齐的点（规定时间）。通过式(6.8)计算得到误差。

设计参数为：

$$X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \theta_p]$$

目标点坐标：

$$\begin{aligned} \{C_d^i\} &= \{(3, 3), (2.759, 3.363), (2.759, 3.363), (1.890, 3.862), (1.355, 3.943)\} \\ \{\theta_2^1, \theta_2^2, \theta_2^3, \theta_2^4, \theta_2^5\} &= \{\pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12, \pi/2\} \end{aligned} \quad (6.15)$$

参数约束：

表 6.1: case1 各算法结果对比

	MUMSA	GA	DE	GA.DE	BAS
\$r_1\$	31.788264	28.771330	35.020740	13.2516000	19.4920810
\$r_2\$	8.204647	5.000000	6.404196	5.9407800	6.2644716
\$r_3\$	24.932131	35.365480	31.607220	58.3118000	20.1001631
\$r_4\$	31.385926	59.136810	50.599490	53.7207000	19.0219161
\$r_p\$	37.108246	14.850370	46.461261	61.3011560	39.8538048
\$_p\$	0.398977	1.570796	1.106544	-1.3002600	0.3679660
\$_0\$	4.015959	5.287474	0.000000	0.1960760	4.4245619
\$x_0\$	-6.366519	29.913290	60.000000	-35.3621000	-13.0300715
\$y_0\$	56.836760	32.602280	18.077910	36.7704000	51.1796666
\$_2^1\$	1.366547	6.283185	6.283185	1.6601500	5.9699819
\$_2^2\$	2.330773	0.318205	0.264935	2.0468400	0.4554995
\$_2^3\$	2.871039	0.638520	0.500377	2.4281100	1.0202707
\$_2^4\$	3.394591	0.979950	0.735321	2.8090100	1.5550696
\$_2^5\$	3.970960	1.412732	0.996529	3.1900900	2.1117409
\$_2^6\$	4.963490	2.076254	1.333549	3.5737900	2.8839248
\$Error\$	0.002057	1.101697	0.122738	0.0000172	0.0000124

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \in [0, 5] \quad r_p \in [-5, 5] \quad \theta_p \in [0, 2\pi]$$

算法参数为  $d_0 = 0.10, \delta_0 = 0.05, c_1 = 0.9998, c_2 = 0.5, q = 40, T_{max} = 10000$ ，动画结果如图??。

[img/case2.gif](#)

与其他算法对比结果如图6.4和表6.2。

6.4.3 Case3 规定时间内路径生成 (Path generation with prescribed timing)

本案例四杆机构需要在规定时间内通过一个闭环。通过式(6.8)计算得到误差。

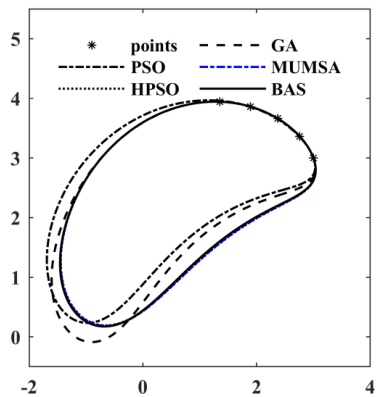


图 6.4: 各算法优化轨迹

表 6.2: case2 各算法结果对比

	PSO	HPSO	GA	MUMSA	BAS
\$r_1\$	3.0576200	3.7877200	3.0630424	3.7732686	3.7135255
\$r_2\$	1.8618400	1.9984200	1.9959624	2.0000040	1.9978745
\$r_3\$	3.8459100	4.1331300	3.3058230	4.1169710	4.0469527
\$r_4\$	2.9706300	2.7451300	2.5247060	2.7461567	2.7192391
\$r_p\$	2.4968270	2.3697220	2.3721479	2.3684374	2.3702974
\$\_p\$	0.7243557	0.7841479	0.8044176	0.7831567	0.7865371
\$Error\$	0.0005860	0.0009860	0.0000018	0.0000018	0.0000007

设计参数为:

$$X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \theta_p, \theta_0, x_0, y_0, \theta_2^1, \cdots, \theta_2^6]$$

目标点坐标:

$$\begin{aligned}
\{C_d^i\} &= \{(0.5, 1.1), (0.4, 1.1), (0.3, 1.1), (0.2, 1.0), (0.1, 0.9), (0.05, 0.75), \\
&\quad (0.02, 0.6), (0, 0.5), (0, 0.4), (0.03, 0.3), (0.1, 0.25), (0.15, 0.2), \\
&\quad (0.2, 0.3), (0.3, 0.4), (0.4, 0.5), (0.5, 0.7), (0.6, 0.9), (0.6, 1.0)\} \\
\{\theta_2^i\} &= \{\theta_2^1, \theta_2^1 + 20 \cdot i/\pi\}, \quad i = 1, \dots, 17
\end{aligned} \tag{6.16}$$

参数约束:

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \in [0, 5] \quad r_p, x_0, y_0 \in [-5, 5] \quad \theta_0, \theta_2^1, \theta_p \in [0, 2\pi]$$

算法参数为  $d_0 = 0.10, \delta_0 = 0.05, c_1 = 0.9998, c_2 = 0.5, q = 8, T_{max} = 50000$ , 动画结果如图??。

[img/case3.gif](#)

与其他算法对比结果如图6.5和表6.3。

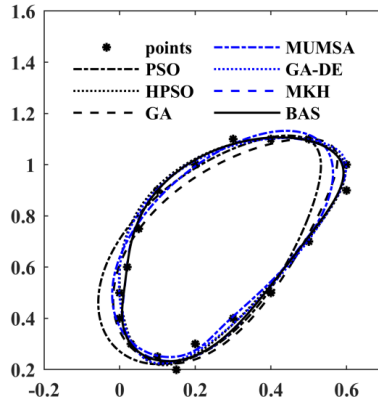


图 6.5: 各算法优化轨迹

#### 6.4.4 Case4 规定时间路径生成问题

第四个案例同样是一个规定时间的路径生成问题。六个优化点由一个 semi-archer 弧构成, 问题定义如下。

表 6.3: case3 各算法结果对比

	PSO	HPSO	GA	MUMSA	GA.DE	MKH	
\$r_1\$	2.926100	2.850000	3.057878	4.453772	47.4379000	1.0042900	1
\$r_2\$	0.487700	0.370000	0.237803	0.297057	0.3247700	0.4218000	0
\$r_3\$	2.909900	2.904800	4.828954	3.913095	0.4728570	0.8782100	0
\$r_4\$	2.150300	0.500000	2.056465	0.849372	47.3093000	0.5801300	0
\$r_p\$	1.493947	1.973700	2.003475	2.651983	0.3412513	0.5234000	0
\$_p\$	-0.332546	1.027396	1.177913	2.464734	-1.2153827	0.8147728	0
\$_0\$	0.719000	0.760000	1.002168	2.738736	3.3202900	0.2929400	0
\$x_0\$	-0.384600	0.940000	1.776808	-1.309243	0.5269880	0.2688600	0
\$y_0\$	-0.675200	-1.171200	-0.641991	2.806964	0.7239300	0.1771500	0
\$_2^1\$	0.215900	0.513400	0.226186	4.853543	3.5123300	0.8859500	1
\$Error\$	0.049200	0.011100	0.033700	0.019600	0.0108613	0.0091100	0

设计参数为:

$$X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \theta_p, \theta_0, x_0, y_0]$$

目标点坐标:

$$\begin{aligned} \{C_d^i\} &= \{(0, 0), (1.9098, 5.8779), (6.60989, 5.106), (13.09, 9.5106), (18.09, 5.8779), (20, 0)\} \\ \{\theta_2^1, \theta_2^2, \theta_2^3, \theta_2^4, \theta_2^5\} &= \{\pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi\} \end{aligned} \tag{6.17}$$

参数约束:

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \in [0, 50] \quad r_p, x_0, y_0 \in [-50, 50] \quad \theta_0, \theta_p \in [0, 2\pi]$$

算法参数为  $d_0 = 0.10, \delta_0 = 0.05, c_1 = 0.9997, c_2 = 0.5, q = 40, T_{max} = 30000$ ，动画结果如图??。

[img/case4.gif](#)

表 6.4: case4 各算法结果对比

	MUMSA	GA	PSO	GA.DE	BAS
\$r_1\$	50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	47.2345017
\$r_2\$	5.0000000	5.0000000	5.0000000	5.0000000	8.8473992
\$r_3\$	7.0310470	6.9700900	7.0310200	5.905343	25.0474709
\$r_4\$	48.1341830	48.1993000	48.1342000	50.0000000	50.0000000
\$r_p\$	21.3533558	21.2191204	21.3532819	18.819312	50.0000000
\$_p\$	0.6517294	0.6380060	0.6517238	0.0000000	5.7107187
\$_0\$	0.0428247	0.0508453	0.0428286	0.463633	0.8225945
\$x_0\$	12.1974940	12.2377000	12.1975000	14.373772	16.5531171
\$y_0\$	-15.9982030	-15.8332000	-15.9981000	-12.444295	-48.1473786
\$Error\$	2.5803500	2.5828600	2.5803600	2.349649	0.7863680

与其他算法对比结果如图6.6和表6.4。

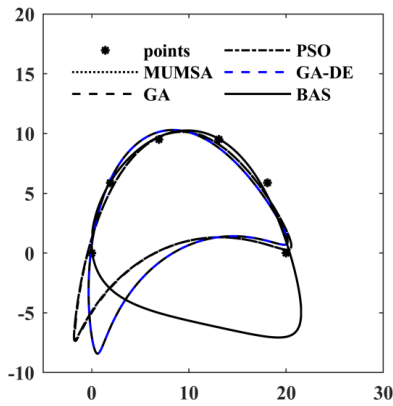


图 6.6: 各算法优化轨迹

6.4.5 Case5 规定时间内路径生成问题

这个例子是一个椭圆路径生成问题，没有规定的时间，其中轨迹是由 10 个点定义的。问题定义如下。

设计参数为:

$$X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \theta_p, \theta_0, x_0, y_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^{10}]$$

目标点坐标:

$$\{C_d^i\} = \{(20, 10), (17.66, 15.142), (11.736, 17.878), (5, 16.928), (0.60307, 12.736), \\ (0.60307, 7.2638), (5, 3.0718), (11.736, 2.1215), (17.66, 4.8577), (20, 0)\} \quad (6.18)$$

参数约束:

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \in [0, 80] \quad r_p, x_0, y_0 \in [-80, 80] \quad \theta_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^{10}, \theta_p \in [0, 2\pi]$$

算法参数为  $d_0 = 0.10, \delta_0 = 0.05, c_1 = 0.9998, c_2 = 0.5, q = 40, T_{max} = 40000$ , 动画结果如图??。

[img/case5.gif](#)

与其他算法对比结果如图6.7和表6.5。

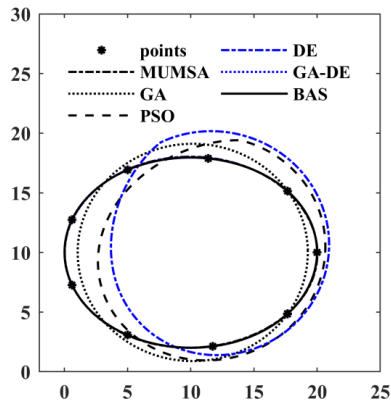


图 6.7: 各算法优化轨迹

表 6.5: case5 各算法结果对比

	MUMSA	GA	PSO	DE	GA.DE	BAS
\$r_1\$	79.5160680	79.981513	52.535162	54.360893	80.0000000	71.8681225
\$r_2\$	9.7239730	9.109993	8.687886	8.683351	8.4203200	9.2618623
\$r_3\$	45.8425240	72.936511	36.155078	34.318634	51.3426000	44.4542963
\$r_4\$	51.4384800	80.000000	80.000000	79.996171	42.4532000	43.0533508
\$r_p\$	8.7289390	0.000000	1.481055	1.465250	10.6530404	8.7820722
\$_p\$	-0.3452264	0.000000	1.570796	1.570669	2.6465448	1.6362575
\$_0\$	5.5969445	0.026149	1.403504	2.129650	4.2817700	1.6011655
\$x_0\$	2.0211090	10.155966	11.002124	10.954397	5.5337200	16.7540360
\$y_0\$	13.2165878	10.000000	11.095585	11.074534	0.4771830	15.2986682
\$_2^1\$	0.6376873	6.283185	6.282619	6.283185	2.0935000	0.1258416
\$_2^2\$	1.3255329	0.600745	0.615302	0.616731	2.8129100	0.8167208
\$_2^3\$	2.0080339	1.372812	1.305421	1.310254	3.5160500	1.5351326
\$_2^4\$	2.6955659	2.210575	2.188053	2.193570	4.2063800	2.1811489
\$_2^5\$	3.3845794	2.862639	2.913049	2.917170	4.8905100	2.8753839
\$_2^6\$	4.0829376	3.420547	3.499313	3.490746	5.5739800	3.5728072
\$_2^7\$	4.7984548	4.072611	4.125586	4.132017	6.2645800	4.2854058
\$_2^8\$	5.5117056	4.910373	4.919977	4.922075	0.6761980	5.0016208
\$_2^9\$	6.2127919	5.682440	5.685021	5.695372	1.3830700	5.7133417
\$_2^{\{10\}}\$	0.6371866	6.283185	6.282323	6.282970	2.0934800	0.1258290
\$Error\$	0.0047000	2.281273	1.971004	1.952326	0.0006022	0.0004252

6.4.6 Case6 六杆机构路径生成

这个案例我也看不懂。大概意思是，六杆问题，在规定时间内让轨迹耦合目标点，并且 `output link` 在停顿位置 (`dwell portion`? 我翻译不下去了.....) 保持在一个精确的角度。大家看底下的原文靠谱一点。

“This case is a path and function combined synthesis problem with prescribed timing in which the coupler of six-bar mechanism has to the precision points and its output link has to



maintain an accuracy angle in the dwell portion.”

— Xiaojuan Mo

设计参数为:

$$X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_p, \theta_p, r'_1, \theta_0, \theta'_0, x_0, y_0, \theta_2^1]$$

目标点坐标:

$$\begin{aligned} \{C_d^i\} = & \{(-0.5424, 2.3708), (0.2202, 2.9871), (0.9761, 3.4633), \\ & (1.0618, 3.6380), (0.8835, 3.7226), (0.5629, 3.7156), \\ & (0.1744, 3.6128), (-0.2338, 3.4206), (-0.6315, 3.1536), \\ & (-1.0, 2.8284), (-1.3251, 2.4600), (-1.5922, 2.0622), \\ & (-1.7844, 1.6539), (-1.8872, 1.2654), (-1.8942, 0.9448), \\ & (-1.8096, 0.7665), (-1.6349, 0.8522), (-1.1587, 1.6081)\} \\ \{\theta_2^i\} = & \{0, 15, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, \\ & 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 345\} \\ \rightarrow \theta_2^i = & \theta_2 + \delta_2^i \end{aligned} \quad (6.19)$$

在停顿位置处的输入输出角度的关联如下:

$$\begin{aligned} \theta_2^i &= \theta_2^1 + \{160, 180, 200, 220\} \rightarrow \theta_6^i = 210 \\ \theta_2^i &= \theta_2^1 + \{345, 0, 15\} \rightarrow \theta_6^i = 225 \end{aligned} \quad (6.20)$$

注意, 上述涉及到角度的数值单位均为 deg, 而非弧度。

算法参数为  $d_0 = 0.05, \delta_0 = 0.025, c_1 = 0.9999, c_2 = 0.5, q = 10, T_{max} = 50000$ , 动画结果如图??。

[img/case6.gif](#)

与其他算法对比结果如图6.8, 图6.9和表6.6。

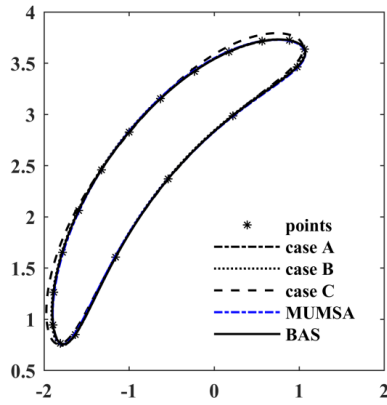


图 6.8: 各算法优化轨迹

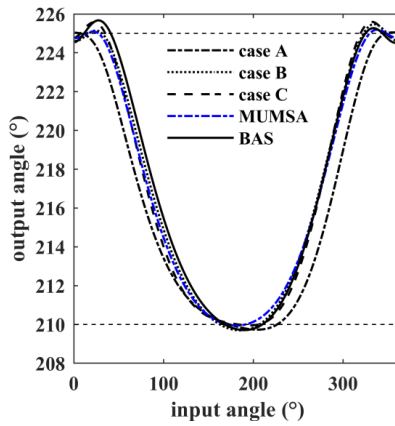


图 6.9: 各算法优化角度

#### 6.4.7 Case7 无规定时间的路径生成

本案例为一个‘8’型路径生成问题，轨迹由 12 个点规定。

设计参数为：

$$X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \theta_p, \theta_0, x_0, y_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^{12}]$$

目标点坐标：

表 6.6: case6 各算法结果对比

	DE.A	DE.B	DE.C	MUMSA	BAS
\$r_1\$	1.8145	1.8065	2.0926	1.713529	1.83805848
\$r_2\$	0.9911	0.9826	1.1464	0.92602	1.00609769
\$r_3\$	1.9995	2.0177	1.989	1.991373	1.99780064
\$r_4\$	2.0315	2.0009	1.9727	1.848672	2.00847216
\$r_5\$	4.3674	5.7769	6.6633	5.35498	6.10658672
\$r_6\$	2.4924	2.5296	2.5517	2.54979	2.55149219
\$r_p\$	2.8174	2.8711	2.7178	2.975936132	2.81504127
\$_p\$	0.7776	0.783712	0.845246	0.831651258	0.78386985
\$_0\$	6.269879	0.011582	6.242260827	0.067677	6.27742775
\$r_1'\$	4.4158	5.2817	6.2907	4.87374	5.63828226
\$_0'\$	0.235595	0.0170309	6.18118303	0.0967027	6.25786389
\$x_0\$	0.0115	0.0415	-0.2729	0.175257	-0.0138493
\$y_0\$	0.0157	-0.0377	0.0931	-0.1187032	0.01159197
\$_2^{1}\$	0.00052	0.003648	-0.04062	6.222361	6.28176824
\$Evaluations\$	53310	93405	93405	93405	50000
\$Error\$	0.000250876	0.005653158	0.03537533	0.0014	0.00019521

$$\{C_d^i\} = \{(4.15, 2.21), (4.50, 2.18), (4.53, 1.83), (4.13, 1.68), (3.67, 1.58), (2.96, 1.33), \\ (2.67, 1.06), (2.63, 0.82), (2.92, 0.81), (3.23, 1.07), (3.49, 1.45), (3.76, 1.87)\} \quad (6.21)$$

参数约束:

$$r_1 \in [0, 5] \quad r_2, r_3, r_4 \in [0, 10] \quad r_p \in [0, 14], \\ x_0, y_0 \in [-80, 80] \quad \theta_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^{12}, \theta_p \in [0, 2\pi] \quad (6.22)$$

表 6.7: case7 各算法结果对比

	PSO	HPSO	MKH	BAS
\$r_1\$	4.550300	4.535900	2.8764500	2.8162769
\$r_2\$	1.101300	1.113300	1.1464400	1.1382629
\$r_3\$	3.955800	14.738100	4.4077300	4.0509922
\$r_4\$	3.933000	16.801700	4.7571300	4.1957758
\$r_p\$	3.941572	3.941866	2.6665746	2.6682801
\$_p\$	-0.539171	-1.521104	-1.1363513	5.1910788
\$_0\$	0.000000	0.000000	0.1650200	0.2070603
\$x_0\$	0.000000	0.000000	1.1426500	1.1226995
\$y_0\$	0.000000	0.000000	0.4823700	0.5246662
\$\_2^1\$	-0.201400	-0.181600	-0.3139900	6.1191060
\$Error\$	0.171600	0.096400	0.0001597	0.0000994

算法参数为  $d_0 = 0.05, \delta_0 = 0.025, c_1 = 0.9995, c_2 = 0.5, q = 40, T_{max} = 20000$ ，动画结果如图??。

[img/case7.gif](#)

与其他算法对比结果如图6.10和表6.7。

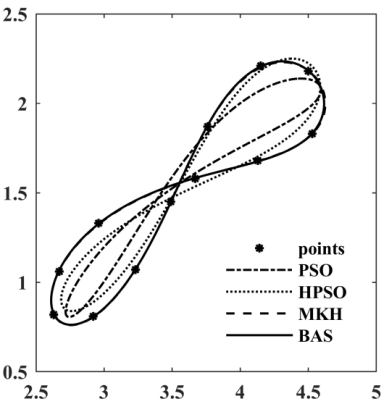


图 6.10: 各算法优化轨迹

### 6.4.8 Case8 无规定时间的路径生成

本案例为一个叶形路径生成问题（无规定时间），轨迹由 25 个点规定。

设计参数为：

$$X = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \theta_p, \theta_0, x_0, y_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^{25}]$$

目标点坐标：

$$\begin{aligned} \{C_d^i\} = \{ & (7.03, 5.99), (6.95, 5.45), (6.77, 5.03), (6.4, 4.6), (5.91, 4.03), \\ & (5.43, 3.56), (4.93, 2.94), (4.67, 2.6), (4.38, 2.2), (4.04, 1.67), \\ & (3.76, 1.22), (3.76, 1.97), (3.76, 2.78), (3.76, 3.56), (3.76, 4.34), \\ & (3.76, 4.91), (3.76, 5.47), (3.8, 5.98), (4.07, 6.4), (4.53, 6.75), \\ & (5.07, 6.85), (5.05, 6.84), (5.89, 6.83), (6.41, 6.8), (6.92, 6.58)\} \end{aligned} \quad (6.23)$$

参数约束：

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \in [0, 5] \quad r_p, x_0, y_0 \in [-5, 5] \quad \theta_0, \theta_2^1, \dots, \theta_2^{25}, \theta_p \in [0, 2\pi]$$

算法参数为  $d_0 = 0.05, \delta_0 = 0.025, c_1 = 0.99975, c_2 = 0.5, q = 40, T_{max} = 50000$ ，动画结果如图??。

[img/case8.gif](#)

与其他算法对比结果如图6.11和表6.8。

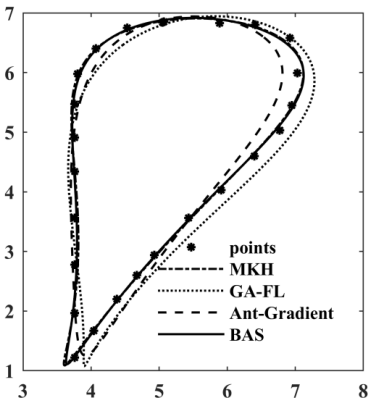


图 6.11: 各算法优化轨迹

表 6.8: case8 各算法结果对比

	MKH	GA.FL	Ant.Gradient	BAS
\$r_1\$	9.99432	9	13.08	9.6132193
\$r_2\$	1.93027	3.01	1.89	1.9459840
\$r_3\$	4.57242	8.8	8.41	4.9080817
\$r_4\$	7.36674	8.8	6.75	6.6768279
\$r_p\$	8.04254	11.0995	14.45	8.6409226
\$_p\$	0.187430	-0.681	0.195	0.1694076
\$_0\$	-0.61763	0.489	-0.3815	5.7260733
\$x_0\$	-2.31301	-2.4	-8.77	-2.9214626
\$y_0\$	2.86189	-4	1.20	2.7190256
\$_2^{1}\$	*	*	*	0.4529787
\$Error\$	0.03916	0.9022	0.5504	0.0397777

## 第七章 更新及维护计划

### 7.1 待加入的功能

算法:

- ~~加入 BSAS~~
- ~~加入 BSAS-WPT~~
- 加入 binary BAS (阮月)
- 加入二阶 BAS (李晓晓)
- ~~add BS0(Beetle Swarm Optimizaiton)~~ (王甜甜)
- ...

应用:

- 工程应用:
  - 多杆件机构优化 (莫小娟)
  - 建筑系统阻容模型辨识
  - 装配路径规划
  - 批量问题 (binary BAS)
  - ...
- 基准测试
  - 计划超过 20 个基准测试
  - ...

用户界面:

- 基本界面
  - 基本的 `shiny` 界面
  - 更新子约束处理功能
  - ...
- 自动文档
  - 基于 `rmarkdown`<sup>1</sup> 的自动文档报告生成
  - 文档导出
  - ...

算法部分与用户界面将会在 `rBAS` 包中不断更新。应用方面虽然有计划, 但是除却基准测试外, 更多的需要各位同学们的贡献。这部分暂时会选择几个重要的应用集成在 `rBAS` 包的案例库中, 全部内容则会在本手册中更新。

## 7.2 联系方式

1. 大家可以加入 QQ 群 (437958608) 来讨论涉及 `BAS` 算法的各种问题。
2. 更进一步, 如果大家有意愿将自己的研究纳入 `rBAS` 包或者是手册的应用案例上, 欢迎大家给我发送邮件 ([jywang2016@hust.edu.cn](mailto:jywang2016@hust.edu.cn)) 或者群内私信。具体的代码 (如果大家愿意开源的话) 或者文档形式 (没有代码也是十分欢迎的) 都可以具体商议。我也会尽量尝试将大家的 `matlab` 或者 `python` 代码复现为 `R`, 所以“语言阻碍”暂时还不是问题。
3. 如果对 `rBAS` 有什么建议, 或者 `bugs`, 欢迎大家在 `issues`<sup>2</sup> 上发表评论。

---

<sup>1</sup><https://github.com/rstudio/rmarkdown>

<sup>2</sup><https://github.com/jywang2016/rBAS/issues>



## 结语

暂无

