

# Formelsammlung Tarif Lebensversicherung

Reinhold Kainhofer (reinhold@kainhofer.com)

29. Mai 2016

Bemerkung: Sämtliche Barwerte werden rekursiv bestimmt, daher werden alle Formeln in ihrer rekursiven Form angegeben. Teilweise wird aus informativen Gründen davor die entsprechende Summenformel angegeben, diese wird jedoch nicht zur tatsächlichen Berechnung benutzt.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Definitionen sämtlicher Variablen</b>	<b>3</b>
1.1	Vertragsdetails (vertragsspezifische Werte)	3
1.2	Tarifdetails (identisch für alle Verträge)	3
1.3	Leistungen	3
1.4	Kosten	4
1.5	Barwerte	4
1.6	Prämien und Prämienzerlegung	5
1.7	Absolutwerte der Cashflows und Barwerte	5
1.8	Rückstellungen	6
1.9	Werte nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung	6
<b>2</b>	<b>Kosten</b>	<b>7</b>
2.1	Abschlusskosten ( $\alpha$ -Kosten) / Zillmerkosten (Z-Kosten)	7
2.2	Inkassokosten ( $\beta$ -Kosten)	7
2.3	Verwaltungskosten ( $\gamma$ -Kosten)	7
2.4	Stückkosten $StkK$	7
2.5	Übersicht	7
2.6	Kosten-Cashflows	8
<b>3</b>	<b>Normierte Cashflows (auf Einheitswerte)</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Barwerte</b>	<b>10</b>
4.1	Prämienbarwert	10
4.2	Barwert garantierter Zahlungen:	10
4.3	Erlebensleistungsbarwert:	10
4.4	Unterjährige Auszahlung der Erlebenszahlungen	10
4.4.1	Vorschüssige $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen	10
4.4.2	Nachschüssige $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen	10
4.4.3	Allgemeine $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen	11
4.5	Ablebensbarwert	11
4.5.1	Barwert der künftig noch zu erwerbenden Prämienrückgewähr (an BP)	11
4.6	Disease-Barwert	11
4.7	Leistungsbarwert	11
4.8	Kostenbarwerte	12
4.9	Darstellung der Barwerte in Vektor-/Matrixform	12
<b>5</b>	<b>Prämien</b>	<b>13</b>
5.1	Nettoprämie:	13
5.2	Zillmerprämie (gezillmerte Nettoprämie):	13
5.3	Bruttoprämie:	13
5.4	Ablebensleistung im Jahr $t$ :	13
5.5	Koeffizienten in Vektorschreibweise	13
<b>6</b>	<b>Zuschläge und Abschläge, Vorgeschriebene Prämie</b>	<b>13</b>

<b>7</b>	<b>Prämienzerlegung</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Absolute Cash-Flows und Barwerte</b>	<b>17</b>
<b>9</b>	<b>Rückstellungen und Reserven</b>	<b>18</b>
9.1	Deckungskapital / Reserve . . . . .	18
9.1.1	Nettodeckungskapital prämienpflichtig: . . . . .	18
9.1.2	Zillmerreserve prämienpflichtig: . . . . .	18
9.1.3	Reserve prämienpflichtig: . . . . .	18
9.1.4	Bruttoreserve prämienpflichtig: . . . . .	18
9.2	Verwaltungskostenreserve: . . . . .	18
9.3	Reserve prämienfrei: . . . . .	18
9.4	Verwaltungskostenreserve prämienfrei: . . . . .	18
<b>10</b>	<b>Spar- und Risikoprämie</b>	<b>18</b>
10.1	Sparprämie . . . . .	18
10.2	Risikoprämie . . . . .	19
<b>11</b>	<b>Bilanzreserve</b>	<b>19</b>
11.1	prämienpflichtig . . . . .	19
11.2	prämienfrei . . . . .	19
<b>12</b>	<b>Prämienfreistellung und Rückkauf</b>	<b>20</b>
12.1	Umrechnungsreserve . . . . .	20
12.2	Rückkaufswert (prämienpflichtig) . . . . .	20
12.3	Stornogebühr bei Rückkauf . . . . .	21
12.4	Prämienfreistellung . . . . .	21
12.5	Reserven nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung . . . . .	21
12.5.1	Reserve außerplanmäßig prämienfrei: . . . . .	21
12.6	Verwaltungskostenreserve außerplanmäßig prämienfrei: . . . . .	22
12.7	Reserve prämienfrei: . . . . .	22
12.8	Verwaltungskostenreserve prämienfrei: . . . . .	22
12.9	Umrechnungsreserve außerplanmäßig prämienfrei . . . . .	22

# 1 Definitionen sämtlicher Variablen

## 1.1 Vertragsdetails (vertragsspezifische Werte)

$VS$	Versicherungssumme	<code>contract\$params\$sumInsured</code>
$\widetilde{VS}$	Versicherungssumme nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung	
$x$	Eintrittsalter der versicherten Person	<code>contract\$params\$age</code>
$n$	Versicherungsdauer	<code>contract\$params\$policyPeriod</code>
$l$	Aufschubdauer des Versicherungsschutzes	<code>contract\$params\$deferral</code>
$m$	Prämienzahlungsdauer	<code>contract\$params\$premiumPeriod</code>
$k$	Prämienzahlungsweise ( $k$ -tel jährlich)	<code>contract\$params\$premiumFrequency</code>
$g$	Garantiedauer (für Renten)	<code>contract\$params\$guaranteed</code>
$f$	Prämienfreistellungszeitpunkt	
$YOB$	Geburtsjahr der versicherten Person (bei Benutzung von Generationentafeln)	<code>contract\$params\$YOB</code>
$Beg$	Versicherungsbeginn (Datum, TODO)	
$q_{x+t}$	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der versicherten Person (aus $YOB$ und $x$ bestimmt)	<code>contract\$params\$transitionProbabilities\$q</code>
$i_{x+t}$	einjährige Erkrankungswahrscheinlichkeit (z.B. Dread Disease, Krebs, etc.)	<code>contract\$params\$transitionProbabilities\$i</code>
$p_{x+t}$	einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit als Aktiver, $p_{x+t} = 1 - q_{x+t} - i_{x+1}$	<code>contract\$params\$transitionProbabilities\$p</code>
$\omega$	Höchstalter gemäß der benutzten Sterbetafel	<code>getOmega(tarif\$mortalityTable)</code>
$k_{Ausz}$	unterjährige Auszahlung der Erlebensleistungen (nur Renten)	<code>contract\$params\$benefitFrequency</code>
$y$	Eintrittsalter der 2. versicherten Person (TODO)	

## 1.2 Tarifiedetails (identisch für alle Verträge)

$i$	Rechnungszins	<code>tarif\$i</code>
$v$	Diskontierungsfaktor $v = \frac{1}{1+i}$	<code>tarif\$v</code>
$\rho$	Sicherheitszuschlag auf die Prämie	<code>tarif\$loadings\$security</code>
$\rho^{RG}$	Risikosumme (relativ zu DK) im Ablebensfall bei Prämienrückgewähr	<code>tarif\$premiumRefundLoading</code>
$uz(k)$	Unterjährigkeitszuschlag bei $k$ -tel jährlicher Prämienzahlung (in % der Prämie)	<code>tarif\$premiumFrequencyLoading</code>
$O(k)$	Ordnung der Unterjährigkeitsrechnung der Erlebenszahlungen (0./1./1,5./2. Ordnung)	<code>tarif\$benefitFrequencyOrder</code>

## 1.3 Leistungen

$\Pi_t$	(Netto-)Prämie zum Zeitpunkt $t$ (vorschüssig), $\Pi_t^{nachschr.}$ für nachschüssige Prämienzahlungsweise, normiert auf 1	<code>contract\$cashFlows\$premiums_advance</code>
$\Pi_t^{nachschr.}$	(Netto-)Prämie zum Zeitpunkt $t$ (nachschüssig), normiert auf 1	<code>contract\$cashFlows\$premiums_arrears</code>

$PS_t$	Bruttoprämiensumme bis zum Zeitpunkt $t$ : $PS_t = \sum_{j=0}^t \Pi_t^a$	
$PS$	Bruttoprämiensumme über die gesamte Vertragslaufzeit	contract\$premiumSum
$\ddot{e}_t$	vorschüssige Erlebenszahlung zum Zeitpunkt $t$ (normiert auf 1)	contract\$cashFlows\$survival_advance
$e_t$	nachschüssige Erlebenszahlung zum Zeitpunkt $t$ (normiert auf 1)	contract\$cashFlows\$survival_arrears
$\ddot{e}_t^*$	vorschüssige garantierte Zahlung zum Zeitpunkt $t$ (normiert auf 1)	contract\$cashFlows\$guaranteed_advance
$e_t^*$	nachschüssige garantierte Zahlung zum Zeitpunkt $t$ (normiert auf 1)	contract\$cashFlows\$guaranteed_arrears
$a_t$	Ablebensleistung proportional zur Versicherungssumme (nachschüssig)	contract\$cashFlows\$death_sumInsured
$a_t^{(RG)}$	Ablebensleistung für Prämienrückgewähr (normiert auf Prämie 1, relativ zu Prämiensumme $PS$ )	contract\$cashFlows\$death_GrossPremium
$\tilde{a}_t$	Ablebensleistung nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung proportional zur Versicherungssumme (nachschüssig)	contract\$cashFlows\$death_PremiumFree
$\overrightarrow{CF}_t^B$	Leistungscashflow (relativ zur jeweiligen Basis, sowie vor-/nachschüssig) als Matrix dargestellt	

## 1.4 Kosten

Mögliche Basen für die Kostenfestsetzung sind:

$$\begin{array}{l}
 \text{Basis} = \begin{cases} \text{VS ... Versicherungssumme ("SumInsured")} \\ \text{PS ... gesamte Prämiensumme ("SumPremiums")} \\ \text{BP ... Bruttojahresprämie ("GrossPremium")} \end{cases}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Dauer} = \begin{cases} 1 \text{ ... einmalig bei Abschluss ("once")} \\ \text{PD ... Prämienzahlungsdauer ("PremiumPeriod")} \\ \text{Prf ... Nach Ablauf der Prämienzahlungsdauer ("PremiumFree")} \\ \text{LZ ... gesamte Laufzeit ("PolicyPeriod")} \end{cases}
 \end{array}$$

$\alpha_t^{\text{Basis,Dauer}}$	Abschlusskostensatz relativ zu Basis über die angegebene Dauer	tarif\$costs["alpha",,]
$Z_t^{\text{Basis,Dauer}}$	Zillmerkostensatz relativ zu Basis über die angegebene Dauer	tarif\$costs["Zillmer",,]
$\beta_t^{\text{Basis,Dauer}}$	Inkassokostensatz relativ zu Basis über die angegebene Dauer	tarif\$costs["beta",,]
$\gamma_t^{\text{Basis,Dauer}}$	Verwaltungskostensatz relativ zu Basis über die angegebene Dauer	tarif\$costs["gamma",,]
$\tilde{\gamma}_t^{\text{Basis,Dauer}}$	Verwaltungskostensatz nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung relativ zu Basis über die angegebene Dauer	tarif\$costs["gamma_nopremiums",,]
$\alpha_t^{\text{Basis}}$	Abschlusskosten-Cash Flow relativ zu Basis zu $t$	contract\$cashFlowsCosts[, "alpha", Basis]
$Z_t^{\text{Basis}}$	Zillmerkosten-Cash Flow relativ zu Basis zu $t$	contract\$cashFlowsCosts[, "Zillmer", Basis]
$\beta_t^{\text{Basis}}$	Inkassokosten-Cash Flow relativ zu Basis zu $t$	contract\$cashFlowsCosts[, "beta", Basis]
$\gamma_t^{\text{Basis}}$	Verwaltungskosten-Cash Flow relativ zu Basis zu $t$	contract\$cashFlowsCosts[, "gamma", Basis]
$\tilde{\gamma}_t^{\text{Basis}}$	Verwaltungskosten-Cash Flow nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung relativ zu Basis zu $t$	contract\$cashFlowsCosts[, "gamma_nopremiums", Basis]
$\overrightarrow{CF}_t^C$	Kostencashflows (relativ zur jeweiligen Basis) als Matrix dargestellt	contract\$cashFlowsCosts["t",,]

## 1.5 Barwerte

$P_{x:\overline{n}}(t)$	BW der zuk. Prämienzahlungen (mit Prämie 1) zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$presentValues\$premiums</code>
$E_{x:\overline{n}}^*(t)$	BW der zuk. garantierten Zahlungen (mit VS 1) zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$presentValues\$guaranteed</code>
$E_{x:\overline{n}}(t)$	BW der zuk. Erlebenszahlungen (mit VS 1) zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$presentValues\$survival</code>
$E_{x:\overline{n}}^{(k)}(t)$	BW der zuk. Erlebenszahlungen (mit VS 1) bei $k$ -tel jährlicher Auszahlung zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$presentValues\$survival</code>
$\alpha(k), \beta(k)$	Unterjährigkeitskorrektur bei $k$ -tel jährlicher Auszahlung	
$A_{x:\overline{n}}(t)$	BW der zuk. Ablebensleistungen (mit VS 1) zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$presentValues\$death_SumInsured</code>
$A_{x:\overline{n}}^{prf}(t)$	BW der zuk. Ablebensleistungen (mit VS 1) zum Zeitpunkt $t$ nach Prämienfreistellung	<code>contract\$presentValues\$death_GrossPremium</code>
$A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(t)$	BW der zuk. Ablebensleistungen aus Prämienrückgewähr (mit BP 1) zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$presentValues\$death_PremiumFree</code>
$PV_{x:\overline{n}}^{B1}(t)$	BW aller zuk. Leistungen (ohne Prämienrückgewähr) zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$presentValues\$benefits</code>
$PV_{x:\overline{n}}^B(t)$	BW aller zuk. Leistungen (inkl. Prämienrückgewähr) zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$presentValues\$benefitsAndRefund</code>

KOSTEN (TODO)

## 1.6 Prämien und Prämienzerlegung

ca	$\Pi_{x:\overline{n}}^1$	Nettoprämie auf VS 1	<code>contract\$premiums[["unit.net"]]</code>
	$\Pi_{x:\overline{n}}^{1,Z}$	Zillmerprämie auf VS 1	<code>contract\$premiums[["unit.Zillmer"]]</code>
	$\Pi_{x:\overline{n}}^{1,a}$	Bruttoprämie (“adequate” bzw. “expense-load premium”) auf VS 1	<code>contract\$premiums[["unit.gross"]]</code>
	$\Pi_{x:\overline{n}}$	Nettoprämie	<code>contract\$premiums[["net"]]</code>
	$\Pi_{x:\overline{n}}^Z$	Zillmerprämie	<code>contract\$premiums[["Zillmer"]]</code>
	$\Pi_{x:\overline{n}}^a$	Bruttoprämie (“adequate” bzw. “expense-load premium”)	<code>contract\$premiums[["gross"]]</code>
	$\Pi_{x:\overline{n}}^\alpha$	$\alpha$ -Kostenprämie (Abschlusskostenprämie)	
	$\Pi_{x:\overline{n}}^\beta$	$\beta$ -Kostenprämie (Inkassokostenprämie)	
	$\Pi_{x:\overline{n}}^\gamma$	$\gamma$ -Kostenprämie (Verwaltungskostenprämie)	
	$\Pi_{x:\overline{n}}^{\text{inv.}}$	Inventarprämie (Netto- plus Verwaltungskostenprämie)	
	$\Pi_{x:\overline{n}}^s$	Sparprämie (zum Aufbau des Nettodeckungskapitals investierter Teil der Prämie)	
	$\Pi_{x:\overline{n}}^r$	Risikoprämie (zur Deckung des einjährigen Ablebensrisikos benutzter Teil der Prämie)	
	$\Pi_{x:\overline{n}}^v$	verrechnete Prämie (Bruttoprämie inkl. Rabatte, Zuschläge, Stückkosten und Steuer)	<code>contract\$premiums[["written"]]</code>
	$\Pi_{x:\overline{n}}^{\text{tax}}$	Versicherungssteuer	<code>contract\$premiums[["tax"]]</code>

## 1.7 Absolutwerte der Cashflows und Barwerte

TODO

## 1.8 Rückstellungen

${}_tV_{x:\overline{m}}$	Nettodeckungskapital zum Zeitpunkt $t$	<code>contract\$reserves[, "net"]</code>
${}_tV_{x:\overline{m}}^a$	Brutto-Deckungskapital ("adequate" bzw. "expense-loaded reserve")	<code>contract\$reserves[, "adequate"]</code>
${}_tV_{x:\overline{m}}^Z$	Zillmerreserve bei Zillmerung	<code>contract\$reserves[, "SZillmer"]</code>
${}_tV_{x:\overline{m}}^\alpha$	Abschlusskostenreserve	<code>contract\$reserves[, "TODO"]</code>
${}_tV_{x:\overline{m}}^\beta$	Inkassokostenreserve (typischerweise = 0)	<code>contract\$reserves[, "TODO"]</code>
${}_tV_{x:\overline{m}}^\gamma$	Verwaltungskostenreserve	<code>contract\$reserves[, "gamma"]</code>
${}_tV_{x:\overline{m}}^{Um}$	Umrechnungsreserve (Basis für Vertragskonvertierungen und Prämienfreistellung), inkl. anteiliger Abschlusskostenrückerstattung bei Beendigung innerhalb von fünf Jahren	<code>contract\$reserves[, "reduction"]</code>
$AbskErh(t)$	Anteilmäßige Rückerstattung der Abschlusskosten bei Kündigung innerhalb von fünf Jahren	<code>contract\$reserves[, "alphaRefund"]</code>
$BilRes_{t+u}$	Bilanzreserve (Interpolation aus ${}_tV_{x:\overline{m}}^x$ und ${}_{t+1}V_{x:\overline{m}}^x$ )	

## 1.9 Werte nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung

Werte nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung werden durch ein  $\sim$  über dem jeweiligen Symbol angezeigt.

## 2 Kosten

### 2.1 Abschlusskosten ( $\alpha$ -Kosten) / Zillmerkosten (Z-Kosten)

- ) Einmalig (bei Vertragsabschluss)
  - an Versicherungssumme
  - an Brutto-Prämiensumme<sup>1</sup>
  - an Barwert der Versicherungsleistungen (z.B. Rentenbarwert)
- ) Laufend (während Prämienzahlungsdauer)<sup>2</sup>
  - an Bruttoprämie
  - an Brutto-Prämiensumme
- ) Laufend (über gesamte Laufzeit des Vertrags)
  - an Bruttoprämie
  - an Brutto-Prämiensumme

### 2.2 Inkassokosten ( $\beta$ -Kosten)

- ) Laufend an Bruttoprämie während Prämienzahlungsdauer (einmalig bei Einmalerlag)

### 2.3 Verwaltungskosten ( $\gamma$ -Kosten)

Laufend während der gesamten Laufzeit verrechnet:

- ) an Versicherungssumme (prämienpflichtig)
- ) an Versicherungssumme (planmäßig/außerplanmäßig prämienfrei)
- ) an Leistungsbarwert / Rentenbarwert (=Deckungskapital) (prämienfrei)
- ) an Prämiensumme (prämienpflichtig) (=am Rentenbarwert zu Vertragsbeginn bei sof.beg.LR mit EE)
- ) an Prämiensumme (planmäßig/außerplanmäßig prämienfrei)
- ) am Ablösekaptial während Aufschubzeit
- ) an jeder Erlebenszahlung/Rente (während Liquiditätsphase)
- ) am Deckungskapital

### 2.4 Stückkosten $StkK$

- ) Stückkosten (Absolutbetrag)  $StkK$  pro Jahr während Prämienzahlungsdauer (bzw. einmalig bei Einmalprämie)

### 2.5 Übersicht

Die häufigsten Kostentypen sind **markiert**.

Typ	Dauer	an VS	an PS	an JBP <sup>3</sup>	
Abschluss $\alpha$	einmalig	$\alpha^{VS,once}$			
	Prämiendauer			$\alpha^{BP,PrD}$	
	Prämienfrei		$\alpha^{PS,LZ4}$	$\alpha^{BP,LZ}$	
	Vertragsdauer				
Zillmer $z$	einmalig	$z^{VS,once}$	$z^{PS,once}$		
	Prämiendauer				
	Prämienfrei		$z^{PS,LZ}$		
	Vertragsdauer				
Inkasso $\beta$	einmalig			$\beta^{BP,PrD}$	
	Prämiendauer				
	Prämienfrei				
	Vertragsdauer				
Verwaltung $\gamma$	einmalig				
	Prämiendauer	$\gamma^{VS,PrD}$	$\gamma^{PS,PrD}$		

<sup>1</sup>Entspricht Einmalprämie bei Einmalerlag

<sup>2</sup>Bei Einmalerlag sind einmalige  $\alpha$ -Kosten und laufende  $\alpha$ -Kosten auf die Prämie während der Prämienzahlungsdauer ident.

<sup>3</sup>während der gesamten Prämienzahlungsdauer

<sup>4</sup>evt. mit jährlicher faktorieller Aufwertung, evt. mit Obergrenze)

	Prämienfrei Vertragsdauer	$\gamma^{VS,fr}$ $\gamma^{VS,LZ}$	$\gamma^{PS,LZ}$		$\gamma^{BP,Erl}$ (an ErlZ)
Verwaltung $\tilde{\gamma}$ (außerplanm. prämienfrei)	einmalig Prämiendauer Prämienfrei Vertragsdauer				
		$\tilde{\gamma}^{VS,LZ}$			

## 2.6 Kosten-Cashflows

Jede Kostenart ( $\alpha$ /Zillmer/ $\beta$ / $\gamma$ / $\tilde{\gamma}$ ) und Bemessungsgrundlage (VS/PS/JBP) erzeugt aus den verschiedenen Kostendauern einen Cash-Flow-Vektor in folgender Art, der diskontiert den gesamten Kostenbarwert der jeweiligen Kostenart und Bmgl. liefert:

$$X_t^{Bmgl} = \begin{cases} X^{Bmgl,once} + X^{Bmgl,PrD} + X^{Bmgl,LZ} & \text{für } t = 0 \\ X^{Bmgl,PrD} + X^{Bmgl,LZ} & \text{für } 0 < t \leq m \\ X^{Bmgl,fr} + X^{Bmgl,LZ} & \text{für } m < t \leq n \end{cases}$$



### 3 Normierte Cashflows (auf Einheitswerte)

	Beschreibung	LR	ALV	ELV	T-F	DD
$pr_t \dots$	Prämienzahlungen (vorschüssig) zu $t$	$t < m$	$t < m$	$t < m$	$t < m$	$t < m$
$PS$	Prämiensumme, $PS = \sum_{t=0}^n pr_t$					
$\ddot{e}_t \dots$	Erlebenszahlungen vorschüssig zu $t$	$(l+g)\dots n$	0	$t = n$	0	0
$e_t \dots$	Erlebenszahlungen nachschüssig zu $t+1$	$(l+g)\dots n$	0	$t = n$	0	0
$\ddot{e}_t^* \dots$	garantierte Zahlungen vorschüssig zu $t$	$(l+g)\dots n$	0	0	$t = n$	0
$e_t^* \dots$	garant. Zahlungen nachschüssig zu $t+1$	$(l+g)\dots n$	0	0	0	0
$a_t \dots$	Ablebenszahlung zu $t+1$	0	$l\dots n$	0	0	0
$d_t \dots$	Zahlung zu $t+1$ bei Eintritt der Erkrankung zwischen $t$ und $t+1$	0	0	0	0	$l\dots n$
$a_t^{(RG)}$	Ablebenszahlungen für PRG zu $t+1$ (Ableben im Jahr $t$ )	$\min(t+1, m, f)$	0	$\min(t+1, m, f)$	0	0

Die Cash-Flows können auch in Matrixform dargestellt werden:

$$\overrightarrow{CF}_t^L = \begin{pmatrix} pr_t & \ddot{e}_t^* & \ddot{e}_t & 0 & 0 & 0 \\ pr_t^{(nachsch)} & e_t^* & e_t & a_t & d_t & a_t^{(RG)} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CF}_t^K = \begin{pmatrix} \alpha_t^{(VS)} & \alpha_t^{(PS)} & \alpha_t^{(BP)} \\ z_t^{(VS)} & z_t^{(PS)} & - \\ - & - & \beta_t \\ \gamma_t^{(VS)} & \gamma_t^{(PS)} & - \\ \hat{\gamma}_t^{(VS)} & - & - \end{pmatrix}$$

## 4 Barwerte

### 4.1 Prämienbarwert

$$\begin{aligned} P_{x:\overline{m}}(t) &= \sum_{j=t}^n pr_{t+j} \cdot v^{j-t} \cdot {}_{j-t}p_{x+t} \\ &= pr_t + v \cdot p_{x+t} \cdot P_{x:\overline{m}}(t+1) \end{aligned}$$

### 4.2 Barwert garantierter Zahlungen:

Garantierte Erlebensleistungen (wenn Aufschubzeit überlebt wurde):

$$\begin{aligned} E_{x:\overline{m}}^*(t) &= \begin{cases} {}_{l-t}p_{x+t} \cdot v^{l-t} \cdot \sum_{j=l}^n \{\ddot{e}_{j-t}^* + v \cdot e_{j-t}^*\} v^{j-t} & \text{für } t < l \text{ (Aufschubzeit)} \\ \sum_{j=t}^n \{\ddot{e}_{j-t}^* + v \cdot e_{j-t}^*\} v^{j-t} & \text{für } t \geq l \text{ (Liquiditätsphase)} \end{cases} \\ &= \ddot{e}_t^* + \{E_{x:\overline{m}}^*(t+1) + e_t^*\} \cdot v \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } t < l \text{ (Aufschubzeit)} \\ p_{x+t} & \text{für } t \geq l \text{ (Liquiditätsphase)} \end{cases} \end{aligned}$$

### 4.3 Erlebensleistungsbarwert:

$$\begin{aligned} E_{x:\overline{m}}(t) &= \sum_{j=t}^n (\ddot{e}_{t+j} \cdot v^{j-t} {}_{j-t}p_{x+t} + e_{t+j} \cdot v^{j+1-t} {}_{j+1-t}p_{x+t}) \\ &= \ddot{e}_t + v \cdot p_{x+t} \cdot \{e_t + E_{x:\overline{m}}(t+1)\} \end{aligned}$$

### 4.4 Unterjährige Auszahlung der Erlebenszahlungen

Analog zu (bei konstanter Rente)

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{m}}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_n p_x \cdot v^n \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \\ \ddot{a}_x^{(m)} &= \alpha(m) \ddot{a}_x - \beta(m) \end{aligned}$$

mit

$$\alpha(m) = \frac{d \cdot i}{d^{(m)} \cdot i^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)} \cdot i^{(m)}}$$

und  $d = \frac{i}{1+i}$ ,  $i^{(m)} = m \cdot ((1+i)^{1/m} - 1)$  und  $d^{(m)} = i^{(m)} / (1 + i^{(m)}/m)$  bzw. approximativ mit

	0.Ord.	1.Ord.	1,5-te Ord.	2.Ord.
$\alpha(m) =$	1			$+\frac{m^2-1}{12m^2}i^2 \quad \dots$
$\beta(m) =$	$\frac{m-1}{2m}$	$+\frac{m^2-1}{6m^2}i$	$\left[+\frac{1-m^2}{12 \cdot m^2} \cdot i^2\right]$	$+\frac{1-m^2}{24m^2}i^2 \quad \dots$

ergibt sich auch für allgemeine unterjährige Erlebenszahlungen  $\ddot{e}_t$  eine Rekursionsgleichung.

#### 4.4.1 Vorschüssige $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen

$$\begin{aligned} E_{x:\overline{m}}^{(m)}(t) &= \ddot{e}_t \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{1}}^{(m)} + v \cdot p_{x+t} \cdot E_{x:\overline{m}}^{(m)}(t+1) \\ &= \ddot{e}_t \cdot \{\alpha(m) - \beta(m) \cdot (1 - p_{x+t} \cdot v)\} + v \cdot p_{x+t} \cdot E_{x:\overline{m}}^{(m)}(t+1) \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Nachschüssige $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen

$$\begin{aligned} E_{x:\overline{m}}^{(m)}(t) &= e_t \cdot a_{x+t:\overline{1}}^{(m)} + v \cdot p_{x+t} \cdot E_{x:\overline{m}}^{(m)}(t+1) \\ &= e_t \cdot \left\{ \alpha(m) - \left( \beta(m) + \frac{1}{m} \right) \cdot (1 - p_{x+t} \cdot v) \right\} + v \cdot p_{x+t} \cdot E_{x:\overline{m}}^{(m)}(t+1) \end{aligned}$$

#### 4.4.3 Allgemeine $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen

$$\begin{aligned} E_{x:\overline{m}}^{(m)}(t) &= \ddot{e}_t \cdot \{\alpha(m) - \beta(m) \cdot (1 - p_{x+t} \cdot v)\} + \\ &e_t \cdot \left\{ \alpha(m) - \left( \beta(m) + \frac{1}{m} \right) \cdot (1 - p_{x+t} v) \right\} + \\ &v \cdot p_{x+t} \cdot E_{x:\overline{m}}^{(m)}(t+1) \end{aligned}$$

#### 4.5 Ablebensbarwert

##### Prämienpflichtiger Ablebensbarwert

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{m}}(t) &= \sum_{j=t}^n j-t p_{x+t} \cdot q_{x+j} \cdot v^{j-t+1} \cdot a_j \\ &= q_{x+t} \cdot v \cdot a_t + p_{x+t} \cdot v \cdot A_{x:\overline{m}}(t+1) \end{aligned}$$

##### Prämienfreier Ablebensbarwert

$$A_{x:\overline{m}}^{(prf)}(t) = q_{x+t} \cdot v \cdot a_t^{(prf)} + p_{x+t} \cdot v \cdot A_{x:\overline{m}}^{(prf)}(t+1)$$

##### Barwert der gesamten Prämienrückgewähr (an BP)

$$A_{x:\overline{m}}^{(RG)}(t) = q_{x+t} \cdot v \cdot a_t^{(RG)} + p_{x+t} \cdot v \cdot A_{x:\overline{m}}^{(RG)}(t+1)$$

##### Barwert der bisher bereits erworbenen Prämienrückgewähr (an BP)

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{m}}^{(RG-)}(t) &= a_{t-1}^{(RG)} \cdot A_{x:\overline{m}}^{(RG-,1)}(t) \\ A_{x:\overline{m}}^{(RG-,1)}(t) &= q_{x+t} \cdot v \cdot 1 + p_{x+t} \cdot v \cdot A_{x:\overline{m}}^{(RG-,1)}(t+1) \end{aligned}$$

##### 4.5.1 Barwert der künftig noch zu erwerbenden Prämienrückgewähr (an BP)

$$A_{x:\overline{m}}^{(RG+)}(t) = A_{x:\overline{m}}^{(RG)}(t) - A_{x:\overline{m}}^{(RG-)}(t)$$

Dieser Wert ist rekursiv nicht darstellbar.

#### 4.6 Disease-Barwert

$$A_{x:\overline{m}}^d(t) = i_{x+t} \cdot v \cdot d_t + p_{x+t} \cdot v \cdot A_{x:\overline{m}}^d(t+1)$$

#### 4.7 Leistungsbarwert

$$\begin{aligned} BW_{x:\overline{m}}^L(t) &= E_{x:\overline{m}}(t) + A_{x:\overline{m}}(t) + A_{x:\overline{m}}^d(t) && \text{ohne Prämienrückgewähr} \\ BW_{x:\overline{m}}^{L,RG}(t) &= BW_{x:\overline{m}}^L(t) + (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{m}}^{(RG)}(t) \cdot BP_{x:\overline{m}} && \text{inkl. Prämienrückgewähr} \end{aligned}$$

## 4.8 Kostenbarwerte

Abschlusskostenbarwerte:

$$\begin{aligned} AK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t) &= \alpha_t^{VS} + v \cdot p_{x+t} \cdot AK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t+1) \\ AK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(t) &= \alpha_t^{PS} + v \cdot p_{x+t} \cdot AK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(t+1) \\ AK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(t) &= \alpha_t^{BP} + v \cdot p_{x+t} \cdot AK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(t+1) \end{aligned}$$

Zillmerkostenbarwerte:

$$\begin{aligned} ZK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t) &= z_t^{VS} + v \cdot p_{x+t} \cdot ZK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t+1) \\ ZK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(t) &= z_t^{PS} + v \cdot p_{x+t} \cdot ZK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(t+1) \end{aligned}$$

Inkassokostenbarwerte:

$$IK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(t) = \beta_t^{BP} + v \cdot p_{x+t} \cdot IK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(t+1)$$

Verwaltungskostenbarwerte:

$$\begin{aligned} VK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t) &= \gamma_t^{VS} + v \cdot p_{x+t} \cdot VK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t+1) \\ VK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(t) &= \gamma_t^{PS} + v \cdot p_{x+t} \cdot VK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(t+1) \\ \widetilde{VK}_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t) &= \widetilde{\gamma}_t^{VS} + v \cdot p_{x+t} \cdot \widetilde{VK}_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t+1) \end{aligned}$$

## 4.9 Darstellung der Barwerte in Vektor-/Matrixform

Die Leistungs- und Kostenbarwerte können (wie auch die Cashflows zu einem Zeitpunkt) in Matrixform dargestellt werden (aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier bei allen Termen der Subscript  $x:\overline{n}$  unterlassen):

$$\overrightarrow{BW}^L(t) = (P(t), \quad BW^L(t), \quad A^{(RG)}(t)) \quad \overrightarrow{BW}^K(t) = \begin{pmatrix} AK^{(VS)}(t) & AK^{(PS)}(t) & AK^{(BP)}(t) \\ ZK^{(VS)}(t) & ZK^{(PS)}(t) & - \\ - & - & IK^{(BP)}(t) \\ VK^{(VS)}(t) & VK^{(PS)}(t) & - \\ \widetilde{VK}^{(VS)}(t) & - & - \end{pmatrix}$$

## 5 Prämien

Da die Prämienrückgewähr auf die Bruttoprämie gewährt wird, wird für die Bestimmung der Netto- und Zillmerprämie die Bruttoprämie benötigt. Es wird daher die Formel für unabhängige Bestimmung der Bruttoprämie hergeleitet, aus der dann die Netto- und Zillmerprämie berechnet werden können.

### 5.1 Nettoprämie:

$$NP_{x:\overline{n}} = \frac{BW_{x:\overline{n}}^L(0) + (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(0) \cdot BP_{x:\overline{n}}}{P_{x:\overline{n}}(0)} \cdot (1 + \rho)$$

### 5.2 Zillmerprämie (gezillmerte Nettoprämie):

$$\begin{aligned} ZP_{x:\overline{n}} &= \frac{\overbrace{\left( BW_{x:\overline{n}}^L(0) + (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(0) \cdot BP_{x:\overline{n}} \right)}^{= NP_{x:\overline{n}} \cdot P_{x:\overline{n}}(0)} \cdot (1 + \rho) + ZK_{x:\overline{n}}(0)}{P_{x:\overline{n}}(0)} \\ &= NP_{x:\overline{n}} + \frac{ZK_{x:\overline{n}}(0)}{P_{x:\overline{n}}(0)} \end{aligned}$$

mit dem gesamten Barwert der Zillmerkosten:

$$ZK_{x:\overline{n}}(t) = ZK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t) + ZK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(t) \cdot BP_{x:\overline{n}} \cdot PS + ZK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(t) \cdot BP_{x:\overline{n}}.$$

Varianten:

- )  $\beta$ - und  $\gamma$ -Kosten auch in die Zillmerprämie eingerechnet. Einziger Unterschied zur Bruttoprämie ist dann, dass nur die Zillmerkosten statt der  $\alpha$ -Kosten aufgeteilt werden.

$$\begin{aligned} ZP_{x:\overline{n}} &= \left[ BW_{x:\overline{n}}^{L, RG}(0) \cdot (1 + \rho) + \left( ZK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + IK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + VK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) \right) + \right. \\ &\quad \left( ZK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(0) + IK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(0) + VK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(0) \right) \cdot BP_{x:\overline{n}} \cdot PS + \\ &\quad \left. \left( ZK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(0) + IK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(0) + VK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(0) \right) \cdot BP_{x:\overline{n}} \right] / (P_{x:\overline{n}}(0)) \end{aligned}$$

- ) Prämienrückgewähr proportional zu Zillmerprämie (für Berechnung der Zillmerprämie):

$$\begin{aligned} ZP_{x:\overline{n}} &= \frac{BW_{x:\overline{n}}^L(0) + (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(0) \cdot ZP_{x:\overline{n}}}{P_{x:\overline{n}}(0)} \cdot (1 + \rho) \\ ZP_{x:\overline{n}} &= \frac{BW_{x:\overline{n}}^L(0)}{P_{x:\overline{n}}(0) - (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(0) \cdot (1 + \rho)} \cdot (1 + \rho) \end{aligned}$$

### 5.3 Bruttoprämie:

$$BP_{x:\overline{n}} = \frac{BW_{x:\overline{n}}^L(0) \cdot (1 + \rho) + \left( AK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + IK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + VK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) \right)}{P_{x:\overline{n}}(0) - A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(1 + \rho^{RG})(1 + \rho) - AK_{x:\overline{n}}^{(BP)} - IK_{x:\overline{n}}^{(BP)} - VK_{x:\overline{n}}^{(BP)} - \left( AK_{x:\overline{n}}^{(PS)} + IK_{x:\overline{n}}^{(PS)} + VK_{x:\overline{n}}^{(PS)} \right) PS}$$

Wie man deutlich sehen kann, ist die Kostenursache ( $\alpha$ ,  $\beta$  oder  $\gamma$ ) für die Prämienbestimmung irrelevant. Es werden die Barwerte aller drei Kostenarten jeweils bei der entsprechenden Bemessungsgrundlage aufaddiert.

### 5.4 Ablebensleistung im Jahr $t$ :

$$Abl(t) = \left\{ a_t + a_t^{(RG)} \cdot BP_{x:\overline{n}} \right\} \cdot VS$$

### 5.5 Koeffizienten in Vektorschreibweise

Für die Berechnung der Prämien können die Koeffizienten der jeweiligen Barwerte auch mittels der Vektor-/Matrixschreibweise dargestellt werden (siehe Tabelle 5.5).

## 6 Zuschläge und Abschläge, Vorgeschriebene Prämie

	Leistungen		Kosten	
Terme	$\left( \begin{array}{cc} P_{x:\overline{m}}(t) & BW_{x:\overline{m}}^L(t) \end{array} \right)$	$A_{x:\overline{m}}^{(RG)}(t)$	$\left( \begin{array}{cc} AK_{x:\overline{m}}^{(VS)}(t) & AK_{x:\overline{m}}^{(PS)}(t) \\ ZK_{x:\overline{m}}^{(VS)}(t) & ZK_{x:\overline{m}}^{(PS)}(t) \\ - & - \\ VK_{x:\overline{m}}^{(VS)}(t) & VK_{x:\overline{m}}^{(PS)}(t) \\ VK_{x:\overline{m}}^{frei}(t) & - \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} AK_{x:\overline{m}}^{(BP)}(t) & - \\ - & IK_{x:\overline{m}}(t) \\ - & - \end{array} \right)$
Nettoprämie	$\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 + \rho \\ 1 & 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} (1 + \rho^{RG}) \cdot BP_{x:\overline{m}} \cdot (1 + \rho) & 0 \end{array} \right)$	-	-
Zillmerprämie	$\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 + \rho \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} (1 + \rho^{RG}) \cdot BP_{x:\overline{m}} \cdot (1 + \rho) & 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & BP_{x:\overline{m}} \cdot PS \\ [1] & [BP_{x:\overline{m}} \cdot PS] \\ [1] & [BP_{x:\overline{m}} \cdot PS] \\ 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & BP_{x:\overline{m}} \\ [BP_{x:\overline{m}}] & [BP_{x:\overline{m}}] \\ [BP_{x:\overline{m}}] & 0 \end{array} \right)$
Bruttoprämie	$\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 + \rho \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -PS \\ 0 & 0 \\ 0 & -PS \\ 0 & -PS \\ 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$
	$\left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} - & (1 + \rho^{RG}) \cdot (1 + \rho) \end{array} \right)$		

Tabelle 9: Koeffizienten der einzelnen Barwerte zur Berechnung der Prämien

$oUZu \dots$	Zuschlag für Vertrag ohne ärztliche Untersuchung
$SuRa = SuRa(VS) \dots$	Summenrabatt (von Höhe der VS abhängig)
$VwGew \dots$	Vorweggewinnbeteiligung in Form eines %-uellen Rabattes auf die Bruttoprämie
$StkK \dots$	Stückkosten pro Jahr (während Prämienzahlungsdauer, einmalig bei Einmalprämien)
$PrRa = PrRa(BP) \dots$	Prämienrabatt (von Höhe der Bruttoprämie abhängig)
$VwGew_{StkK} \dots$	Vorweggewinnbeteiligung in Form eines Rabattes auf die Prämie nach Zu-/Abschlägen (insbesondere nach Stückkosten)
$PartnerRa \dots$	Partnerrabatt auf Prämie nach Zu-/Abschlägen (z.B. bei Abschluss mehrerer Verträge), additiv zu $VwGew_{StkK}$
$uz(k) \dots$	Zuschlag für unterjährige Prämienzahlung ( $k$ mal pro Jahr)

$$uz(k) = \left\{ \begin{array}{ll} uk_1 & \text{für jährliche} \\ uk_2 & \text{für halbjährliche} \\ uk_4 & \text{für quartalsweise} \\ uk_{12} & \text{für monatliche} \end{array} \right\} \text{Prämienzahlung}$$

$VSt \dots$  Versicherungssteuer (in Österreich 4% oder 11%)

Vorgeschriebene Prämie (jährlich):

$$PV_{x:\overline{n}|} = \{(BP_{x:\overline{n}|} + oUZu - SuRa) \cdot VS \cdot (1 - VwGew) + StkK\} \cdot (1 - PrRa - VwGew_{StkK} - PartnerRa) \cdot (1 + uz(k)) \cdot (1 + VSt)$$

Vorgeschriebene Prämie (pro Zahlungsperiode):

$$PV_{x:\overline{n}|}^{(k)} = \frac{PV_{x:\overline{n}|}}{k}$$

## 7 Prämienzerlegung

Für die Prämienzerlegung (nach Bestimmung der Höhe der Bruttoprämie) kann man die Formel zur Bruttoprämie auch umformen zu

$$\begin{aligned} BP_{x:\overline{n}|} &= \frac{BW_{x:\overline{n}|}^L(0) \cdot (1 + \rho) + BP_{x:\overline{n}|} \cdot A_{x:\overline{n}|}^{(RG)} (1 + \rho^{RG}) (1 + \rho)}{P_{x:\overline{n}|}(0)} \\ &+ \frac{AK_{x:\overline{n}|}^{(VS)}(0) + BP_{x:\overline{n}|} \cdot AK_{x:\overline{n}|}^{(BP)} + BP_{x:\overline{n}|} \cdot PS \cdot AK_{x:\overline{n}|}^{(PS)}}{P_{x:\overline{n}|}(0)} \\ &+ \frac{IK_{x:\overline{n}|}^{(VS)}(0) + BP_{x:\overline{n}|} \cdot IK_{x:\overline{n}|}^{(BP)} + BP_{x:\overline{n}|} \cdot PS \cdot IK_{x:\overline{n}|}^{(PS)}}{P_{x:\overline{n}|}(0)} \\ &+ \frac{VK_{x:\overline{n}|}^{(VS)}(0) + BP_{x:\overline{n}|} \cdot VK_{x:\overline{n}|}^{(BP)} + BP_{x:\overline{n}|} \cdot PS \cdot VK_{x:\overline{n}|}^{(PS)}}{P_{x:\overline{n}|}(0)} \\ &= NP_{x:\overline{n}|} + \underbrace{\frac{AK_{x:\overline{n}|}(0)}{P_{x:\overline{n}|}(0)}}_{=\Pi_{x:\overline{n}|}^{\alpha}} + \underbrace{\frac{IK_{x:\overline{n}|}(0)}{P_{x:\overline{n}|}(0)}}_{=\Pi_{x:\overline{n}|}^{\beta}} + \underbrace{\frac{VK_{x:\overline{n}|}(0)}{P_{x:\overline{n}|}(0)}}_{=\Pi_{x:\overline{n}|}^{\gamma}} \\ &= NP_{x:\overline{n}|} + \underbrace{\frac{ZK_{x:\overline{n}|}(0)}{P_{x:\overline{n}|}(0)}}_{=\Pi_{x:\overline{n}|}^{\alpha,Z}} + \underbrace{\frac{AK_{x:\overline{n}|}(0) - ZK_{x:\overline{n}|}(0)}{P_{x:\overline{n}|}(0)}}_{=\Pi_{x:\overline{n}|}^{\alpha,n o Z}} + \Pi_{x:\overline{n}|}^{\beta} + \Pi_{x:\overline{n}|}^{\gamma} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\Pi_{x:\overline{n}|}^Z} \end{aligned}$$

und damit die Bruttoprämie in die einzelnen Kostenprämien zerlegen.

Es ergibt sich somit folgende Zerlegung der verrechneten Prämie:

- verrechnete Prämie (jährlich)  $\Pi_{x:\overline{n}|}^v$ 
  - + Versicherungssteuer  $\Pi_{x:\overline{n}|}^{tax}$
  - + Unterjährigkeitszuschlag

- Prämienrabatt
- Vorweggewinnbeteiligung (inkl. Stückkosten)
- Partnerrabatt
- + Stückkosten
- Vorweggewinnbeteiligung (vor Stückkosten)
- Summenrabatt
- + Zuschlag ohne ärztliche Untersuchung
- + Bruttoprämie  $\Pi_{x:\overline{n}}^a$ 
  - + Nettoprämie  $\Pi_{x:\overline{n}}$ 
    - + Risikoprämie (netto)  $\Pi_{x:\overline{n}}^r$
    - + Sparprämie (netto)  $\Pi_{x:\overline{n}}^s$
  - + gezillmerter Teil der  $\alpha$ -Prämie  $\Pi_{x:\overline{n}}^{\alpha,Z}$
  - + ungezillmerter Teil der  $\alpha$ -Prämie  $\Pi_{x:\overline{n}}^{\alpha,noZ}$
  - +  $\beta$ -Prämie  $\Pi_{x:\overline{n}}^\beta$
  - +  $\gamma$ -Prämie  $\Pi_{x:\overline{n}}^\gamma$

Die Zillmerprämie (Nettoprämie  $\Pi_{x:\overline{n}}$  + gezillmerter Teil der  $\alpha$ -Prämie  $\Pi_{x:\overline{n}}^{\alpha,Z}$ ) kann wie die Nettoprämie in Spar- und Risikoprämie zerlegt werden:

- Zillmerprämie  $\Pi_{x:\overline{n}}^Z$ 
  - + gezillmerte Risikoprämie
  - + gezillmerte Sparprämie
    - +  $\alpha$ -Tilgung (Tilgung der Zillmerkosten)
    - + echte Sparprämie (zum Aufbau des nicht-negativen Deckungskapitals)



## 8 Absolute Cash-Flows und Barwerte

TODO

## 9 Rückstellungen und Reserven

### 9.1 Deckungskapital / Reserve

#### 9.1.1 Nettodeckungskapital prämienpflichtig:

$$V_{x:\overline{m}}(t) = \{BW_{x:\overline{m}}^L(t) \cdot (1 + \rho) - NP_{x:\overline{m}} \cdot P_{x:\overline{m}}(t)\} \cdot VS$$

#### 9.1.2 Zillmerreserve prämienpflichtig:

TODO!

$$\begin{aligned} V_{x:\overline{m}}(t) &= \{BW_{x:\overline{m}}^L(t) \cdot (1 + \rho) - ZP_{x:\overline{m}} \cdot P_{x:\overline{m}}(t)\} \cdot VS = \\ &= \left\{ BW_{x:\overline{m}}^L(t) \cdot (1 + \rho) - NP_{x:\overline{m}} \cdot P_{x:\overline{m}}(t) - ZK_{x:\overline{m}}(0) \cdot BP_{x:\overline{m}}(t) \cdot \frac{P_{x:\overline{m}}(t)}{P_{x:\overline{m}}(0)} \right\} \cdot VS \end{aligned}$$

#### 9.1.3 Reserve prämienpflichtig:

Entspricht bei Zillmerung der Zillmerreserve

$$V_{x:\overline{m}}(t) = \{BW_{x:\overline{m}}^L(t) \cdot (1 + \rho) - ZP_{x:\overline{m}} \cdot P_{x:\overline{m}}(t)\} \cdot VS$$

#### 9.1.4 Bruttoreserve prämienpflichtig:

$$V_{x:\overline{m}}^{(b)}(t) = \{BW_{x:\overline{m}}^L(t) \cdot (1 + \rho) + -ZP_{x:\overline{m}} \cdot P_{x:\overline{m}}(t)\} \cdot VS$$

### 9.2 Verwaltungskostenreserve:

$$V_{x:\overline{m}}^{VwK}(t) = \left\{ VK_{x:\overline{m}}^{(VS)}(t) - \left( \frac{VK_{x:\overline{m}}^{(VS)}(0)}{P_{x:\overline{m}}(0)} \right) \cdot P_{x:\overline{m}}(t) \right\} \cdot VS$$

### 9.3 Reserve prämienfrei:

$$V_{x:\overline{m}}^{frei}(t) = \left\{ (E_{x:\overline{m}}(t) + A1_{x:\overline{m}}(t)) \cdot \widetilde{VW} + TODO \cdot \min(f, m) \cdot BP_{x:\overline{m}}(x, n) \cdot VS \right\} \cdot (1 + \rho)$$

### 9.4 Verwaltungskostenreserve prämienfrei:

$$V_{x:\overline{m}}^{WvK, frei}(t) = VK4_{x:\overline{m}}(t) \cdot \widetilde{VS}$$

## 10 Spar- und Risikoprämie

$$P_{x:\overline{m}}(t) = SP_{x:\overline{m}}(t) + RP_{x:\overline{m}}(t)$$

### 10.1 Sparprämie

$$SP_{x:\overline{m}}(t) = V_{x:\overline{m}}(t+1) \cdot v - V_{x:\overline{m}}(t) + (\ddot{e}_t + v \cdot e_t) \cdot VS$$

gezillmert:

$$SP_{x:\overline{m}}^Z(t) = V_{x:\overline{m}}^Z(t+1) \cdot v - V_{x:\overline{m}}^Z(t) + (\ddot{e}_t + v \cdot e_t) \cdot VS$$

## 10.2 Risikoprämie

$$RP_{x:\overline{m}}(t) = v \cdot q_{x+t} \cdot \{Abl(t) - V_{x:\overline{m}}(t+1)\}$$

gezillmert:

$$RP_{x:\overline{m}}^Z(t) = v \cdot q_{x+t} \cdot \{Abl(t) - V_{x:\overline{m}}^Z(t+1)\}$$

## 11 Bilanzreserve

- BegDatum* ...    Beginndatum des Vertrags  
*BilDatum* ...    Bilanzstichtag des Unternehmens  
*baf* ...    Bilanzabgrenzungsfaktor (Jahresanteil zwischen Abschlussdatum und Bilanzstichtag)
- 30/360:  $baf = \frac{Monat(BilDatum+1) - Monat(BegDatum)+1}{12} \mod 1$
  - Taggenau:  $baf = \frac{BilDatum - BegDatum + 1}{TageImJahr(BilDatum)} \mod 1$
  - etc.

### 11.1 prämienpflichtig

Bilanzreserve für Versicherungsleistungen:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{(L)}(t) = (1 - baf) \cdot V_{x:\overline{m}}(t) + baf \cdot V_{x:\overline{m}}(t+1)$$

Verwaltungskosten-Bilanzreserve:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{(VwK)}(t) = (1 - baf) \cdot V_{x:\overline{m}}^{(VwK)}(t) + baf \cdot V_{x:\overline{m}}^{(VwK)}(t+1)$$

Gesamte Bilanzreserve:

$$BilRes_{x:\overline{m}}(t) = BilRes_{x:\overline{m}}^{(L)}(t) + BilRes_{x:\overline{m}}^{(VwK)}(t)$$

### 11.2 prämienfrei

Bilanzreserve für Versicherungsleistungen, prämienfrei:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{(L),frei}(t) = (1 - baf) \cdot V_{x:\overline{m}}^{frei}(t) + baf \cdot V_{x:\overline{m}}^{frei}(t+1)$$

Verwaltungskosten-Bilanzreserve, prämienfrei:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{(VwK),frei}(t) = (1 - baf) \cdot V_{x:\overline{m}}^{VwK,frei}(t) + baf \cdot V_{x:\overline{m}}^{VwK,frei}(t+1)$$

Gesamte Bilanzreserve, prämienfrei:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{frei}(t) = BilRes_{x:\overline{m}}^{(L),frei}(t) + BilRes_{x:\overline{m}}^{(VwK),frei}(t)$$

## 12 Prämienfreistellung und Rückkauf

Verteilung der  $\alpha$ -Kosten auf  $r$  Jahre für den Rückkauf bzw. die Vertragskonversion ist nicht bei allen Tarifen oder in allen Jurisdiktionen vorgesehen. => FLAG

### 12.1 Umrechnungsreserve

Sowohl Prämienfreistellung als auch Rückkauf starten von der Umrechnungsreserve, die sich aus der Zillmerreserve, den Kostenrückstellungen sowie der Verteilung der  $\alpha$ -Kosten auf 5 Jahre ergibt:

$$V_{x:\overline{n}|}^{Umr} = (V_{x:\overline{n}|}(t) + V_{x:\overline{n}|}^{VwK}(t) + AbsKErh(t)) \cdot (1 - VwGew(TODO))$$

wobei  $AbsKErh(t)$  die anteilmäßige Rückzahlung der Abschlusskosten bei Rückkauf innerhalb der ersten  $n(=5)$  Jahre gemäß §176 öVersVG bezeichnet:

$$AbsKErh(t) = \max \left( \sum_{j=0}^t Zillm(j) - \frac{t}{5} \sum_{j=0}^n Zillm(j), 0 \right) \quad (\text{Abschlusskostenerhöhungsbetrag})$$

$$Zillm(t) = z_t^{(VS)} + z_t^{(BP)} \cdot BP_{x:\overline{n}|} + z_t^{(PS)} \cdot BP_{x:\overline{n}|} \cdot \sum_{j=0}^n pr_j \quad (\text{Zillmerprämienanteil/-cashflow im Jahr } j)$$

Varianten:

- Verteilung auf 5 Jahre nicht linear ( $t/5$ ), sondern als 5-jährige Leibrente bewertet, deren Rest noch ausständig ist.

$$AbsKErh(t) = \max \left( \sum_{j=0}^t Zillm(j) - \left( 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{r-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right) \frac{t}{5} \sum_{j=0}^n Zillm(j), 0 \right)$$

- Bei zahlreichen Tarifen wird die Abschlusskostenerhöhung erst NACH dem Rückkaufsabschlag addiert, sodass diese Erhöhung nicht vom Abschlag betroffen ist => FLAG

### 12.2 Rückkaufswert (prämienpflichtig)

Zahlreiche Tarife sind NICHT rückkaufsfähig => FLAG

$$Rkf(t) = f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots)$$

Die Abschläge von der Umrechnungsreserve auf den Rückkaufswert sind im Allgemeinen nicht standardisiert, sondern variieren je nach Versicherungsunternehmen stark. Mögliche Abschläge sind:

#### Prozentualer Rückkaufsabschlag

Prozentualer Abschlag auf die Umrechnungsreserve, z.B. 2% oder 5%:  $RkfFakt = 0.95$

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = RkfFakt \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr} \quad \text{mit } RkfFakt = 0.98 \text{ oder } 0.95$$

#### Lineare Erhöhung des prozentualen Rückkaufsabschlags

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = RkfFakt(t) \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr}$$

$$RkfFakt(t) = \min(k_1 + t \cdot \delta k; k_2) \quad \text{mit z.B. } k_1 = 0.9, \delta k = 0.005 \text{ und } k_2 = 0.98$$

Alternativ:

$$RkfFakt(t) = \begin{cases} 0.95 & 1 \leq t \leq 3 \\ 0.95 + 0.003 \cdot (t - 3) & 3 < t \leq 13 \\ 0.98 & 13 < t \end{cases}$$

#### Prozentualer Abschlag mit Mindestabschlag

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = \min(0.95 \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, Abl(t), V_{x:\overline{n}|}^{Umr} - 0.15 \cdot BP_{x:\overline{n}|} \cdot VS \cdot (1 - VwGew))$$

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = \min(0.95 \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, Abl(t))$$

## Prozentualer Abschlag mit Mindestabschlag (Mindesttodesfallsumme als Grenze)

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = \min(0.95 \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, MTS(m, t))$$

$$MTS(m, t) = \dots$$

## Abschlag proportional zum Deckungskapital

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = V_{x:\overline{n}|}^{Umr} \cdot \left( s_f + \max(0.97 - s_f, 0) \cdot \frac{V_{x:\overline{n}|}^{Umr}}{VS} \right)$$

$$s_f = \begin{cases} 0.92 & \text{für } t < \max(10, n - 5) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

TODO: Weitere mögliche Rückkaufsabschläge rausfinden

## 12.3 Stornogebühr bei Rückkauf

Manche Tarife sehen eine fixe Stornogebühr bei Rückkauf (z.B. nur in den ersten 24 Monaten) vor:

$$StoGeb = \min \left( \max \left( 0.15 \cdot PV(x, n) \cdot \frac{pz}{1 - uz(pz)} \cdot \frac{1}{1 + VS_t}, 30 \right), 300 \right)$$

Ansonsten:  $StoGeb = 0$ .

## 12.4 Prämienfreistellung

Der Vertrag wird zum Zeitpunkt  $f$  prämienfrei gestellt, d.h. ab  $f$  wird keine Prämie mehr bezahlt, die Höhe des Versicherungsschutzes bestimmt sich aus dem zu  $f$  vorhandenen Deckungskapital und den Kostenreserven (Umrechnungsreserve). Bei Prämienrückgewähr wird nur die tatsächlich bezahlte Prämiensumme rückgewährt. Aus

$$V_{x:\overline{n}|}^{Umr}(f) - StoGeb = \underbrace{BW_{x:\overline{n}|}^L(f) \cdot (1 + \rho) \cdot \widetilde{VS} + BW_{x:\overline{n}|}^{RG, frei}(f) \cdot (1 + \rho) \cdot BP_{x:\overline{n}|} \cdot VS}_{=V_{x:\overline{n}|}^{frei}(f)} + \underbrace{VK_{x:\overline{n}|}^{frei}(f)}_{=V_{x:\overline{n}|}^{VwK, frei}(f)}$$

mit

$$BW_{x:\overline{n}|}^{RG, frei}(f) = A_{x:\overline{n}|}^{(RG)}(t) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{f-1} pr_j}_{=\min(f, m) \text{ bei lfd. konst. Prämie}} \quad (\text{BW zukünftiger Prämienrückgewähr})$$

ergibt sich die neue Versicherungssumme  $\widetilde{VS}(f)$  nach Prämienfreistellung zum Zeitpunkt  $f$ :

$$\widetilde{VS}(f) = \frac{V_{x:\overline{n}|}^{Umr}(f) - BW_{x:\overline{n}|}^{RG, frei}(f) \cdot (1 + \rho) \cdot BP_{x:\overline{n}|} \cdot VS - StoGeb}{BW_{x:\overline{n}|}^L(f) \cdot (1 + \rho) + VK_{x:\overline{n}|}^{frei}(f)}$$

## 12.5 Reserven nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung

Nettodeckungskapital außerplanmäßig Prämienfrei zu  $f$

$$V_{x:\overline{n}|}^{(n), prf, f}(t) = \left\{ BW_{x:\overline{n}|}^L, prf(t) \cdot (1 + \rho) \right\} \cdot \widetilde{VS}(f)$$

### 12.5.1 Reserve außerplanmäßig prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}|}^{prf, f}(t) = \left\{ BW_{x:\overline{n}|}^L, pr(t) \cdot (1 + \rho) + BW_{x:\overline{n}|}^{RG, frei, f}(t) \right\} \cdot \widetilde{VS}(f)$$

## 12.6 Verwaltungskostenreserve außerplanmäßig prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}}^{VwK,prf,f}(t) = \left\{ VK_{x:\overline{n}}^{(VS),prf.}(t) + VK_{x:\overline{n}}^{(PS),prf.}(t) \cdot PS(f) \right\} \cdot \widetilde{VS}(f)$$

TOCHECK:

## 12.7 Reserve prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}}^{frei}(t) = \left\{ (E_{x:\overline{n}}(t) + A1_{x:\overline{n}}(t)) \cdot \widetilde{VW} + TODO \cdot \min(f, m) \cdot BP_{x:\overline{n}}(x, n) \cdot VS \right\} \cdot (1 + \rho)$$

## 12.8 Verwaltungskostenreserve prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}}^{WvK,frei}(t) = VK4_{x:\overline{n}}(t) \cdot \widetilde{VS}$$

## 12.9 Umrechnungsreserve außerplanmäßig prämienfrei

$$V_{x:\overline{n}}^{Umr,prf,f}(t) = \left( V_{x:\overline{n}}^{prf,f}(t) + V_{x:\overline{n}}^{VwK,prf,f}(t) \right) \cdot (1 - VwGew.TODO)$$