Taylorova věta

Taylorova věta

Klára Drhová, 2014

Teoretické shrnutí

Definice

Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme **n-tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

Poznámka

Tato definice nám říká, jak se původní funkce f a její n-tý Taylorův polynom liší (a to konkrétně o $R_{n,a}$).

Taylorova věta

Nechť existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ lze pro každé $x \in H_0$ zapsat ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x a 0. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

Poznámka

Tato věta nám umožňuje **odhadnout** o kolik se může maximálně lišit původní funkce f a její n-tý Taylorův polynom.

Ukázka

Postup při odhadu chyby

Mějme funkci $f(x) = x^5 + 3x^3 - 2x + 3$ a její třetí Taylorův polynom v bodě 0, T_3. Odhadněme chybu mezi funkčními hodnotami funkce f a hodnotami její taylorova polynomu T_3 pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Poznámka - viz přednáška

Pokud $a = 0$, budeme pro jednoduchost místo $T_{n,0}$ psát pouze T_n a podobně i pro zbytek $R_n = R_{n,0}$.

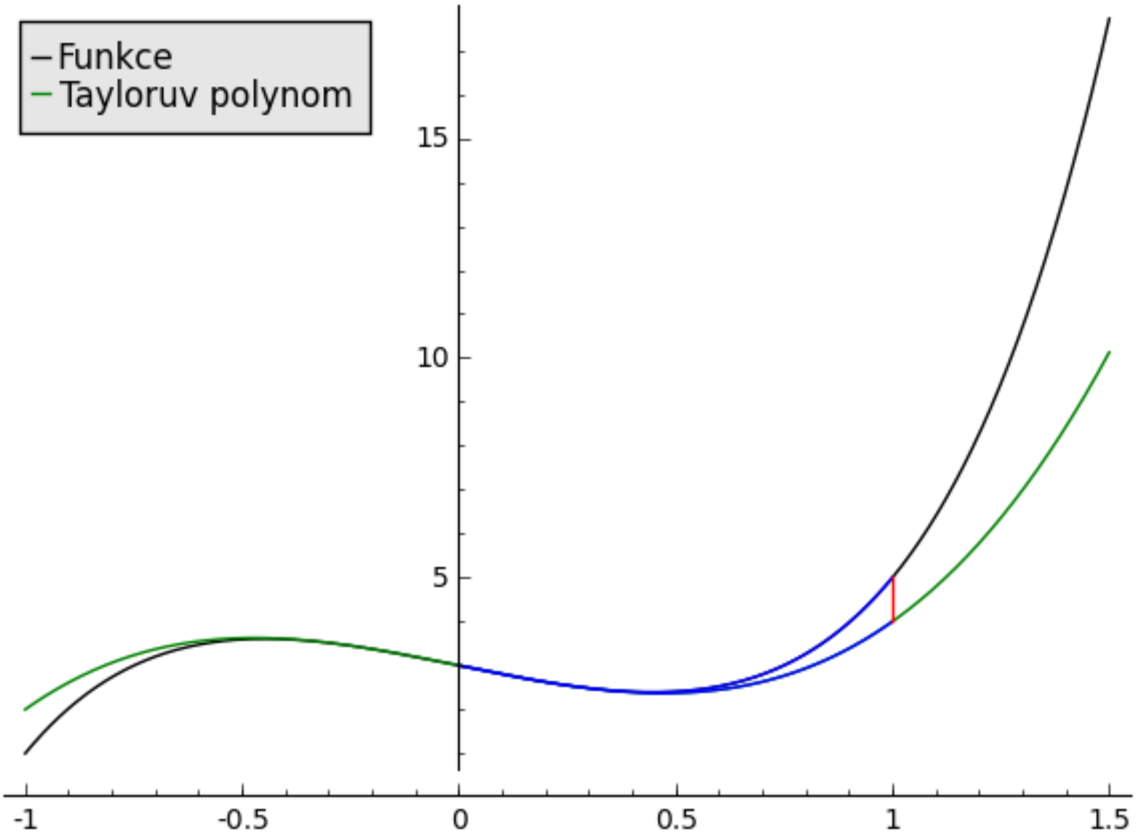
```
show('T_3(x):\ ' + latex(taylor(x^5 +3*x^3 - 2*x + 3, x, 0,
3))) #výpočet Taylorova polynomu funkce, vypsáno v Latexu
```

$$T_3(x):\ 3\,x^3 - 2\,x + 3$$

Odhadněme chybu na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

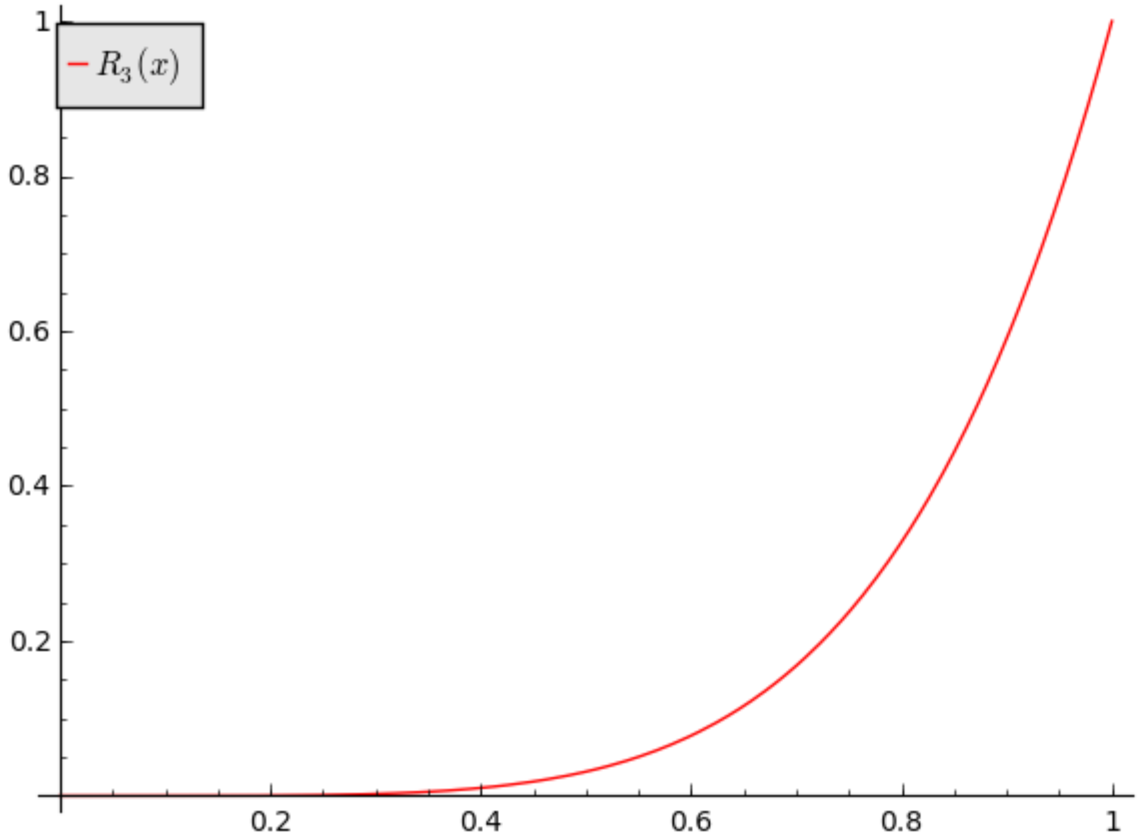
Podívejme se nejprve na graf:

```
funkce = x^5 +3*x^3 - 2*x + 3
taypol = taylor(x^5 +3*x^3 - 2*x + 3, x, 0, 3)
p = plot(funkce, (x, -1, 1.5), color = 'black', legend_label
= 'Funkce')
p+= plot(taypol, (x, -1, 1.5), color = 'green', legend_label
= 'Tayloruv polynom')
p+= plot(funkce, (x, 0, 1), color = 'blue') # zkoumaný
interval
p+= plot(taypol, (x, 0, 1), color = 'blue') # zkoumaný
interval
p+= line([(1, funkce(x=1)),(1, taypol(x=1))] , color = 'red')
#chyba v bode 1
p.show(figsize=6)
```



Chyba na tomto intervalu vypadá následovně. Jsme schopni ji vykreslit, protože umíme počítat $f(x)$ (v našem příkladě polynom). To obecně není vždy pravda.

```
plot(funkce - taypol, (x,0,1), color='red',
legend_label='$R_3(x) = f(x) - T_3(x)$',figsize=6)
```



Z grafu je patrné, že v okolí bodu 0 jsou oba grafy téměř shodné, ale čím dále se od 0 díváme, tím je odchylka větší.

Zkusme tedy odhadnout velikost této odchylky. Potřebujeme znát vzorec z Taylorovy věty:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

V našem případě je $n = 3$ a $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Máme **třetí** Taylorův polynom, tedy

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\, x^4, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dále potřebujeme znát čtvrtou derivaci funkce f v bodě x: $f^{(4)}(x)$, kterou poté dosadíme do vzorce.

```
show('f^{(4)}(x):\ ' + latex( (x^5 +3*x^3 - 2*x + 3).diff(x, 4) )) #výpočet čtvrté derivace funkce, vypsáno v Latexu
```

$$f^{(4)}(x):\ 120\,x$$

Po dosazení:

$$R_3(x) = \frac{120\xi}{4!}\,x^4 = \frac{120\xi}{24}\,x^4 = 5\xi x^4.$$

Protože x uvažujeme z intervalu $\langle 0,1\rangle$, pak odhadem chyby je

$$|R_3(x)| \leq 5\xi.$$

Na pravé straně nám zbylo ξ a z Taylorovy věty víme pouze to, že leží někde v intervalu $\langle 0,1\rangle$, proto jsme nemuseli psát absolutní hodnotu. Jak se můžeme ξ zbavit? Chceme opět provést horní odhad, ξ může být nejvíce rovno 1 a proto

$$|R_3(x)| \leq 5$$

Můžeme tedy říct, že chyba mezi třetím Taylorovým polynomem a funkcí f na intervalu $\langle 0,1\rangle$ je nejhůře 5. Z předchozího příkladu vidíme, že odhad je poměrně hrubý, ale každopádně pravdivý.