Elementární funkce

Vlastnosti elementárních funkcí

Klára Drhová, 2014

Polynomy

Polynomem nazýváme libovolnou funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, x \in \mathbb{R}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $a_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$ Stupněm polynomu nazýváme nejvyšší index k pro nějž $a_k \neq 0$. Pokud žádný takový index neexistuje, tj. $f(x) = 0$ pro každé reálné x, pak o f mluvíme jako o nulovém polynomu a jeho stupeň nedefinujeme.

Zdůrazněme, že podle předchozího odstavce je 'polynom nulového stupně' **nenulová** konstantní funkce.

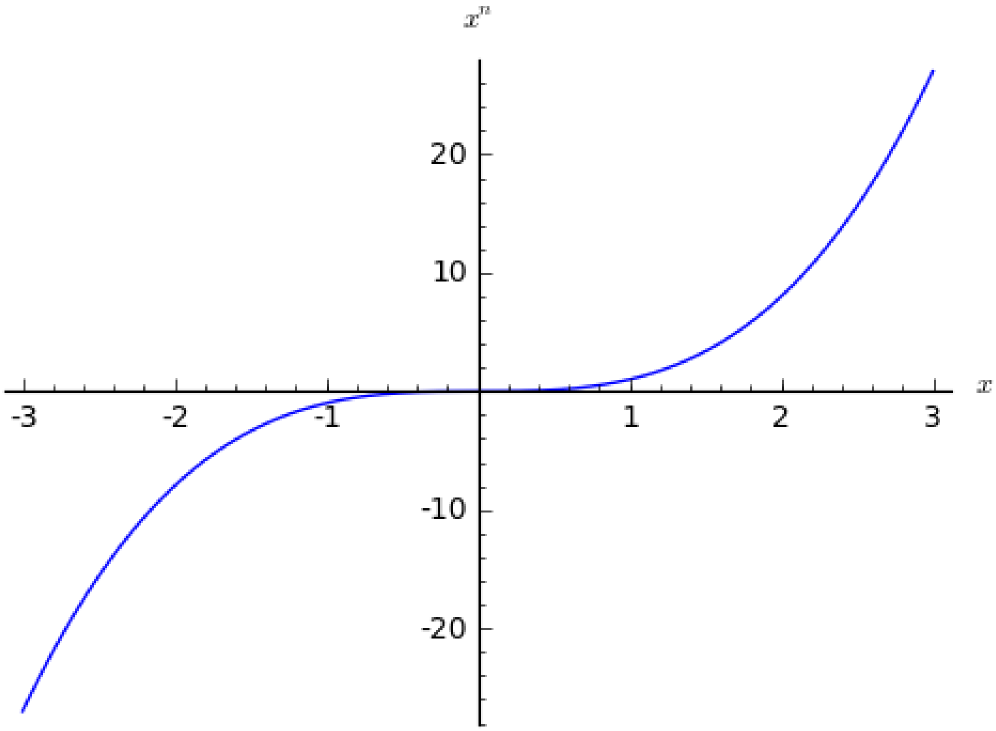
Příklad:

Pro $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$ je $n = 3, a_3 = 4, a_2 = 0, a_1 = -2$ a $a_0 = 5$. Stupeň tohoto polynomu je 3.

```
x = var('x')
@interact
def polynom(n = slider(range(0, 10), default = 1, label='$n$')):
    print('Grafy mononomů')
    p = plot(x^n, (x, -3, 3), axes_labels = ['$x$', '$x^n$'],
figsize=5)
    p.show()
```

n 1

```
Grafy mononomů
```



Důležitým polynomem je polynom druhého stupně $p(x) = ax^2 + bx + c$. Jeho **kořeny** (tj. hodnoty $x \in \mathbb{R}$ pro něž $p(x) = 0$) lze vyjádřit pomocí známého vzorce. Pokud je diskriminant $D = b^2 - 4ac$ nezáporný, platí

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Vrchol paraboly je v bodě $-\frac{b}{2a}$, což je průměr kořenů (existují-li):

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

```
@interact
def parabola(a = slider(range(-10, 10), default = 1,
label='$a$'), b = slider(range(-10, 10), default = 4,
label='$b$'), c = slider(range(-10, 10), default = -6,
label='$c$')):
    D = b*b - 4*a*c #výpočet diskriminantu
    print 'D = ', D
    print 'x1 = ', float((-b+sqrt(D))/2*a)
    print 'x2 = ', float((-b-sqrt(D))/2*a)
    V = float(-b/(2*a)) #x-ová souřadnice vrcholu
    print 'Vrchol paraboly: [', V, ', ', a*V^2+b*V+c, ']'
    p = plot(a*x^2+b*x+c, (x, -10, 10), axes_labels = ['$x$',
'$ax^2+bx+c$'], ymin = -10, ymax = 10,figsize=6) #parabola
    p+= plot(a*V^2+b*V+c, (x,-10, 10), linestyle = 'dashed',
color = 'grey')
```

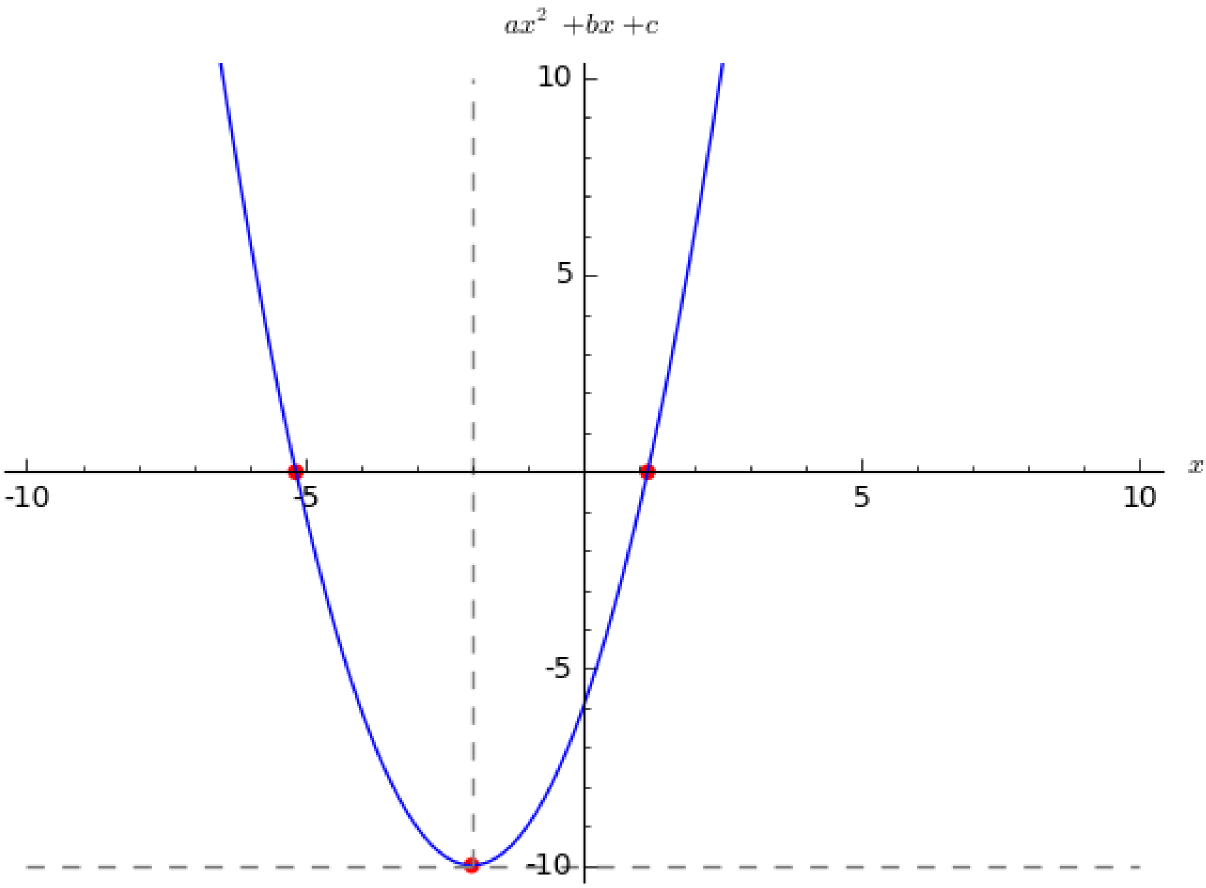
```
    p+= line([(V,-10), (V,10)], linestyle = 'dashed', color = 'grey')
    p+= point(((-b+sqrt(D))/2*a,0), color = 'red', size = 30) #průsečík
    p+= point(((-b-sqrt(D))/2*a,0), color = 'red', size = 30) #průsečík
    p+= point((V,a*V^2+b*V+c), color = 'red', size = 30) #vrchol
    p.show()
```

a 1

b 4

c -6

```
D =  40
x1 =  1.16227766017
x2 =  -5.16227766017
Vrchol paraboly: [ -2.0 ,  -10.0 ]
```



Poznámka k hledání kořenů

Pro kořeny polynomů stupně 1,2,3,4 existují explicitní vzorce. Pro polynomy stupně 5 a výše už takovéto vzorce neexistují. Přesněji, pomocí teorie grup lze dokázat, že vzorce pro kořeny polynomů stupně pátého a vyššího neexistují. Uvádíme přehled vzorců pro polynomy stupně 1 až 4.

Polynom prvního stupně: $ax + b = 0$

```
a, b, c, d, e = var('a, b, c, d, e')
show(solve(a*x+b==0, x))
```

$$\left[x = -\frac{b}{a}\right]$$

Polynom druhého stupně: $ax^2 + bx + c = 0$

```
show(solve(a*x^2+b*x+c==0, x))
```

$$\left[x = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}, x = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}\right]$$

Polynom třetího stupně: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

```
roots = solve(a*x^3+b*x^2+c*x+d==0, x)
for j in range(len(roots)):
    show(roots[j])
```

$$x = -\frac{1}{2}\,\left(i\,\sqrt{3} + 1\right)\left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,\left(2\,b^3 - 9\,abc}}{6\,a^2}\right.$$

$$x = -\frac{1}{2}\,\left(-i\,\sqrt{3} + 1\right)\left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,\left(2\,b^3 - 9\,ab}}{6\,a^2}\right.$$

$$x = \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,\left(2\,b^3 - 9\,abc\right)d}}{6\,a^2} - \frac{2}{}\right.$$

Polynom 4. stupně: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

```
# tyto vzorce jsou již příliš komplikované a nemá smysl je
vypisovat.
#solve(a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e==0, x)
```

Pro polynom pátého stupně už Sage nevrací žádný konkrétní výsledek.

```
f = var('f')
solve(a*x^5+b*x^4+c*x^3+d*x^2+e*x+f==0, x)
```

```
[0 == a*x^5 + b*x^4 + c*x^3 + d*x^2 + _e*x + f]
```

Trigonometrické funkce

Mezi trigonometrické funkce zahrnujeme funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens ($\sin$, cos, tg a cotg) a jejich inverzní funkce.

Sinus, kosinus a jednotková kružnice

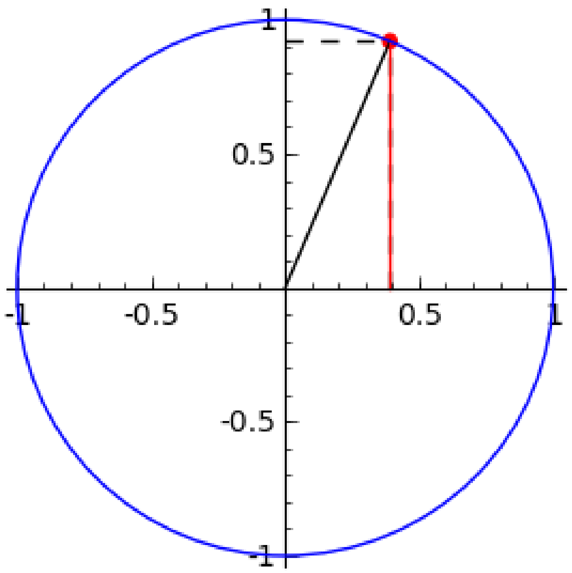
Funkce sinus a kosinus lze snadno definovat pomocí jednotkové kružnice. Viz následující demonstrace.

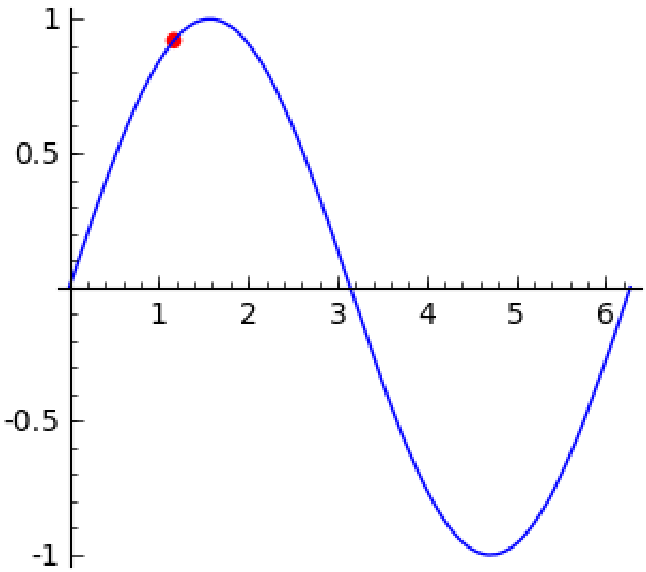
```
@interact
def sincos(jaky = selector(['Sin', 'Cos'], buttons = True, label
= 'Graf'), fi = slider(range(0, 360), default = 45, label='Uhel
[stupne]')):
    uhel = fi*pi/180 # úhel v radiánech
    # jednotková kružnice
    kruznice = circle((0,0), 1)
    kruznice += line([(0,0),(cos(uhel), sin(uhel))], color =
'black')
    kruznice += line([(0,sin(uhel)),(cos(uhel), sin(uhel))],
color = 'black', linestyle = 'dashed')
    kruznice += line([(cos(uhel),0),(cos(uhel), sin(uhel))],
color = 'black', linestyle = 'dashed')
    # sinus
    if jaky=='Sin':
```

```
        kruznice+= line([(cos(uhel),0),(cos(uhel), sin(uhel))], color = 'red')
    else: # kosinus
        kruznice += line([(0,sin(uhel)),(cos(uhel), sin(uhel))], color = 'red')
    kruznice += point((cos(uhel), sin(uhel)), color = 'red', size = 30) #bod
    # graf funkce
    if jaky=='Sin':
        graf = plot(sin(x), (x, 0, 2*pi), aspect_ratio = 3)
        graf += point((uhel, sin(uhel)), color = 'red', size = 30) #bod
    else: # kosinus
        graf = plot(cos(x), (x, 0, 2*pi), aspect_ratio = 3)
        graf += point((uhel, cos(uhel)), color = 'red', size = 30) #bod
    kruznice.show(figsize=4)
    graf.show(figsize=4)
```

Graf Sin Cos

Uhel [stupne] 45





Vlastnosti

Sinus i kosinus jsou funkce s definičními obory $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$ a obory hodnot $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1\rangle$. Obě funkce jsou periodické s periodou $T = 2\pi$. Sinus je funkce lichá a kosinus funkce sudá,

$$\sin(-x) = -\sin(x),\ \ \cos(-x) = \cos(x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Vzhledem k definici pomocí jednotkové kružnice není překvapením, že podle Pythagorovy věty platí

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Vzorce pro dvojnásobný argument:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Součtové vzorce:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Význačné funkční hodnoty:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

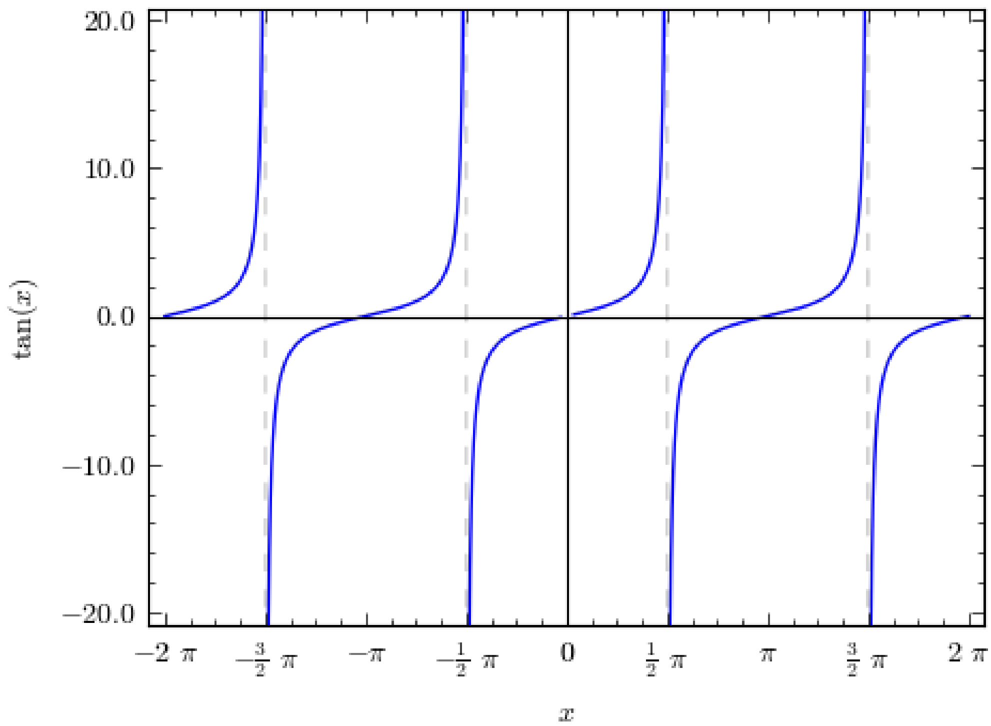
Tangens a kotangens

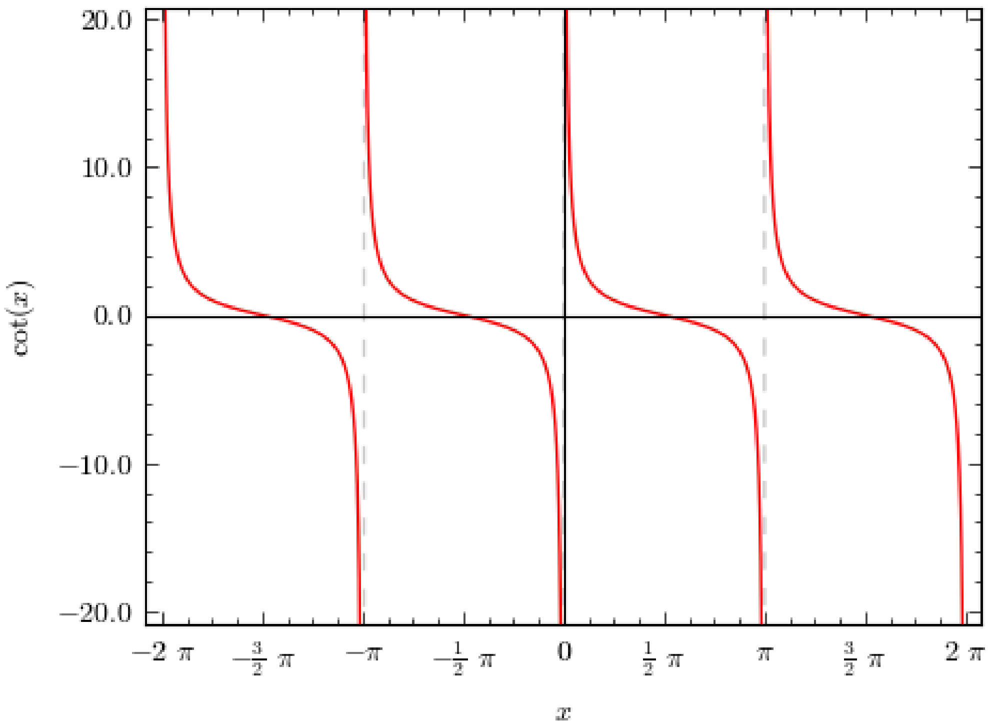
Funkce tangens a kotangens jsou definovány vztahy

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ , \ \ \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ .$$

Vzhledem k vlastnostem funkcí sinus a kosinus platí $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $H_{\tan} = H_{\cot} = \mathbb{R}$.

```
tg = plot(tan(x), (x, -2*pi, 2*pi), detect_poles='show',
axes_labels=['$x$','$\\tan(x)$'], figsize=5,
tick_formatter=pi,ticks=pi/2)
cotg = plot(cot(x), (x, -2*pi, 2*pi), color = 'red',
detect_poles='show', axes_labels=
['$x$','$\\cot(x)$'],figsize=5,tick_formatter=pi, ticks=pi/2)
tg.show(frame = True, ymin=-20, ymax=20)
cotg.show(frame = True, ymin=-20, ymax=20)
```





Významné funkční hodnoty jsou snadno odvoditelné z hodnot sinus a kosinus.

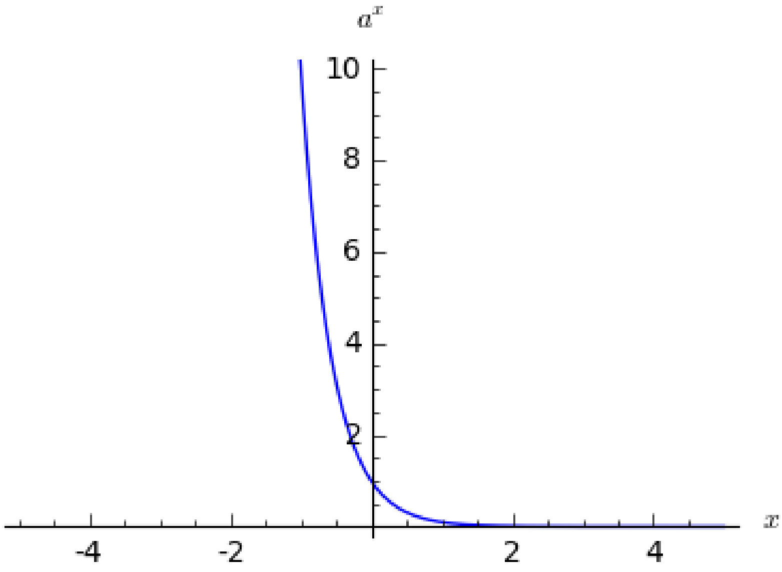
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot(x)$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Exponenciální funkce

Funkci $f(x) = a^x$, kde $1 \neq a > 0$ a $x \in D_f = \mathbb{R}$ nazýváme exponenciální funkcí o základu a. Oborem hodnot je množina $H_f = (0, +\infty)$. Funkce f je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a < 1$. Pokud $a = e$ (Eulerovo číslo), mluvíme zkrázeně o f jako o exponenciále.

```
@interact
def expon(a = slider([0.1, 0.25, 0.5, 2, 4, 10], label='$a$')):
    p = plot(a^x, (x, -5, 5), axes_labels = ['$x$', '$a^x$'],
figsize=4)
    p.show(ymax = 10)
```

a 0.100000000000000



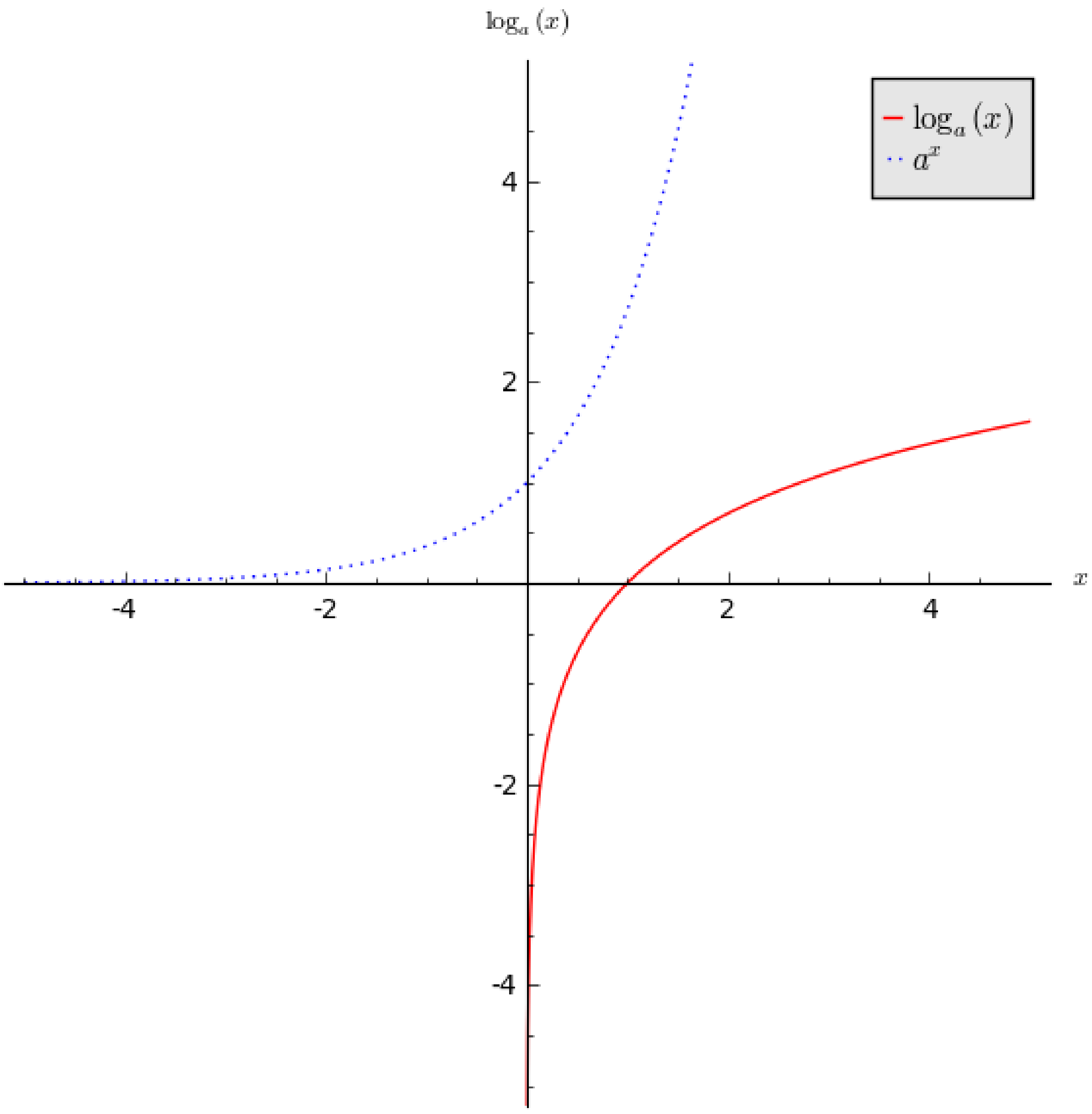
Pro $a > 0$ platí

$$a^x a^y = a^{x+y},\ (a^x)^y = a^{x\cdot y},\ \frac{1}{a^x} = a^{-x},\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Exponenciální funkce je prostá a existuje tedy její inverzní funkce, kterou nazýváme logaritmem o základu a a značíme $\log_a$. Definičním oborem logaritmu je množina $(0, +\infty)$ a oborem hodnot je celé $\mathbb{R}$.

```
z = var('z')
@interact
def logar(a = slider([0.1, 0.25, 1/e, 0.5, 2, e, 4, 10], default
= e, label='$a$')):
    p = plot(log(z, a), (z, 0, 5), axes_labels = ['$x$',
'$\log_a(x)$'], color = 'red', legend_label = '$\log_a(x)$',
plot_points = 1000) #logaritmus
    p+= plot(a^z, (z, -5, 5), linestyle = 'dotted', color =
'blue', legend_label = '$a^x$') #exponenciála
    p.show(ymax = 5, ymin = -5, xmin = -5, xmax = 5, aspect_ratio
= 1, figsize=8)
```

a e



Analogicky platí vzorce:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),\ x, y > 0,$$

$$\log_a(a) = 1,\ a > 0, a \neq 1,$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x),\ x > 0, y \in \mathbb{R}.$$

Hyperbolické funkce

S exponenciálou e^x úzce souvisí tzv. hyperbolické funkce. Definujem hyperbolický sinus a kosinus předpisy

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

```
hyp = plot(sinh(x), (x, -3, 3), legend_label = '$\sinh(x)$')
hyp+= plot(cosh(x), (x, -3, 3), legend_label = '$\cosh(x)$',
color = 'red')
hyp.show(ymin = -3, ymax = 3, aspect_ratio = 1)
```