Odmocňování v R a v C

Odmocňování v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$

Jana Ernekerová, 2014

Odmocňování v $\mathbb{R}$

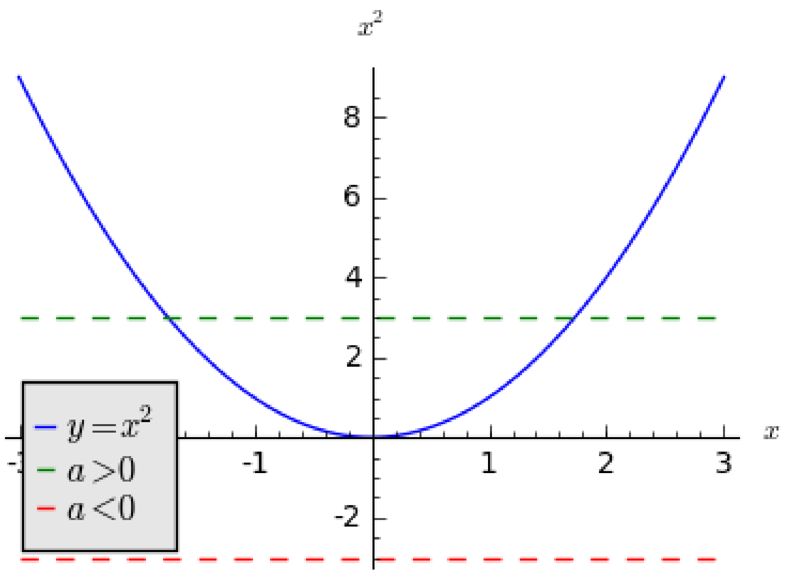
Definujeme **přirozené odmocniny**, ozn.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

jako reálné řešení rovnice $x^n = a$. V závislosti na n rozlišujeme mezi následujícími případy.

Je-li $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, **sudé**, pak $x^n \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což znamená, že rovnice $x^n = a$ má reálné řešení jen pro $a \geq 0$.

```
g1 = plot(x^2, (x, -3, 3), legend_label = '$y=x^2$', figsize=4,
axes_labels=['$x$','$x^2$'])
g2 = plot(3, (x, -3, 3), legend_label = '$a>0$', linestyle='--',
color='green')
g3 = plot(-3, (x, -3, 3), legend_label = '$a<0$', linestyle='--',
color='red')
g1+g2+g3
```

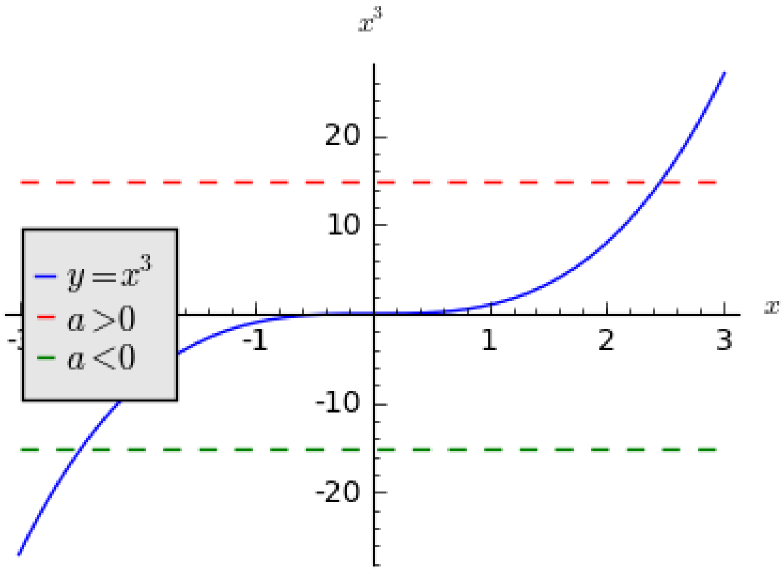


Pro $a > 0$ jsou tato řešení dvě, neboť $x^{2k} = (-x)^{2k}$. Sudou odmocninu $\sqrt[2k]{a}$ definujeme jako **nezáporné** řešení. Je proto $\sqrt{x^2} = |x|$ a nikoli x, protože nevíme, jestli je x kladné nebo záporné.

Je-li $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, **liché**, pak rovnice $x^{2k-1} = a$ má jediné řešení, které značíme $\sqrt[2k-1]{a}$. Například $\sqrt[3]{-8} = -2$.

```
f1 = plot(x^3, (x, -3, 3), legend_label = '$y=x^3$', figsize=4,
```

```
axes_labels=['$x$','$x^3$'])
f2 = plot(15, (x, -3, 3), legend_label = '$a>0$', linestyle='--',
color='red')
f3 = plot(-15, (x, -3, 3), legend_label = '$a<0$', linestyle='--
', color='green')
f1+f2+f3
```



Poznamenejme ještě, že často používáme zápis $\sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$.

Jak je ale patrné z následujícího výpočtu, Sage se takto zavedeným odmocňováním neřídí. Implicitně pracuje v komplexním oboru. Tím se budeme zabývat dále.

```
# Komplexní číslo! Ne očekávaná -1.
n((-1)^(1/3))
```

```
0.500000000000000 + 0.866025403784439*I
```

Odmocňování v $\mathbb{C}$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $z \in \mathbb{C}$. Pak n**-tou odmocninou** z komplexního čísla z nazýváme každé číslo $x \in \mathbb{C}$, pro které platí $x^n = z$ a značíme $\sqrt[n]{z}$.

Rovnice

$$x^n = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ \ |a| \neq 0,$$

má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů:

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Obrazy čísel x_k jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a s poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.

Co bychom jistě měli zmínit je základní věta algebry, jejíž důkaz si uvedeme později v lineární algebře a která říká, že každý nekonstantní polynom, tedy polynom stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.

V následující demonstraci si ukažme komplexní odmocniny z 1, tedy komplexní řešení rovnice $x^n = 1$. V dříve uvedeném vzorci proto máme $a = 1$ a $\alpha = 0$. Proto

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

```
@interact
def roots(n=slider(1,10,step_size=1)):
    roots = [ [cos(2*k*pi/n), sin(2*k*pi/n)] for k in range(n) ]
    pts = points(roots, size=30, color='red')
    circc = circle((0,0),1)
    show(circc + pts, figsize=4)
```

n 1