uvod_do_sage

October 13, 2017

1 Jemný úvod do Sage

Tomáš Kalvoda, KAM FIT ČVUT, 2014, 2017

1.1 Povídání o Sage

Sage je open-source matematický software vyvýjený od roku 2005 zejména Williamem Steinem, profesorem matematiky na University of Washington. Cíle Sage nejsou nikterak malé, dle oficiální stránky:

Mission: Creating a viable free open source alternative to Magma, Maple, Mathematica and Matlab.

Všechny podstatné informace o Sage může zájemce nalézt na oficiální stránce https://www.sagemath.org. Zejména je zde k dispozici podrobná dokumentace a instalační balíčky ke stažení.

K Sage lze přistupovat několika způsoby. První možností je stáhnout si balíček a nainstalovat Sage na svém PC (nově i pro platformu Windows). Sage lze pak spustit z příkazové řádky, což však pro rozsáhlejší práci není příliš pohodlné. Příkazem

```
sage --notebook=jupyter
```

lze však spustit interaktivnější rozhranní k Sage využívající Jupyter Notebook běžící v prohlížeči. Uživatelské prostředí je velmi inspirovnáno programem Mathematica. Uživatel pracuje se sešitem rozděleným na buňky, které mohou obsahovat kód, výsledky výpočtů, text nebo i matematické výrazy vkládané pomocí matematické syntaxe LaTeXu.

Další možností jak vyzkoušet Sage je použít cloudovou službu https://cocalc.com (dříve SageMathCloud). Tato služba aktuálně nabízí bezplatný účet pro základní použití. Po registraci uživatel získává možnost vytvářet projekty (plnohodnotné linuxové virtuální stroje) v nichž může provádět své výpočty. K Sage lze přistupovat buď pomocí Sage Worksheet nebo IPython/Jupyter Notebook. Cloudová služba umožňuje ale daleko širší spektrum možností. Lze například přehledně editovat LaTeX soubory, projekty sdílet a pracovat tak kooperativně, nebo využívat příkazovou řádku virtuálního linuxového stroje.

1.2 Python

Sage je založen na rozšířeném programovacím jazyku Python. Díky tomu Sage obsahuje celou řadu zajímavých matematických balíčků (knihoven) napsaných v tomto jazyce (např. NumPy, SymPy a další). Sage obsahuje i celou řadu matematických knihoven a programů napsaných v C/C++ k nimž vytváří jednotné uživatelské rozhranní napsané právě v Pythonu.

V tomto odstavci shrneme jenom to nejnutnější minimum týkající se jazyka Python, aby případný čtenář neměl problém chápat a orientovat se v ukázkách. Čtenář prahnoucí po hlubším proniknutí do tohoto programovacího jazyka nebude mít problém nalézt zajímavé studijní zdroje na internetu (např. https://docs.python.org/2/tutorial/, nebo http://naucse.python.cz/).

Není potřeba deklarovat typ proměnných, k inicializaci se používá standardní symbol přiřazení =. Obsah buňky s kódem vyhodnotíte stejně jako v Mathematica stisknutím `SHIFT+ENTER`.

```
In [1]: a = 4
        print(a)
        a = 'Hello world!'
        print(a)
```

```
4
Hello world!
```

Často používanou datovou strukturou je tzv. *list*, či pole. Pokud chceme list zadat explicitně používáme k tomu hranaté závorky a prvky oddělujeme čárkami. K prvkům pole pak přistupujeme pomocí indexu běžícího od nuly.

```
In [2]: a = [1, 'B', pi ]
        print(a[1])
        print(len(a))      # len(a) vrátí počet prvků v listu `a`
```

```
B
3
```

Nyní se podívejme na jednu specifickou a pro nováčka potenciálně matoucí vlastnost Pythonu. K oddělení bloku kódu se nepoužívá klíčových slov, ani závorek, ale **odsazení**. Demonstrujme tento jev na ukázce *if-else* podmínky.

```
In [3]: if pi > 3:         # `pi` je o trochu větší než 3
            print('Ano!')
        else:
            print('Ne!')
```

```
Ano!
```

Podobně se chová známá *for* konstrukce (pod `range(4)` je dobré představovat množinu přirozených indexů od 0 do 3, tedy délky 4).

```
In [4]: for k in range(4):   # `k` probíhá od 0 do 3
            y = k^2          # položme `y` rovno `k` na druhou
            print y          # vypiš `y`
```

```
0
1
4
9
```

Pokud chceme definovat vlastní funkci, použijeme pro to klíčové slovo `def`. Všimněte si opět odsazení.

```
In [5]: def f(x):       # definice
            y = 4*x     # velmi složitý výpočet
            return y    # návratová hodnota
```

Dále je dobré zdůraznit, že u argumentů funkcí není potřeba udávat jejich typ. Naše funkce bude "fungovat" na všech objektech, pro které lze provést operace uvedené v těle funkce.

```
In [6]: show(f(4))        # `show` je trochu hezčí `print`, zejména co
        show(f(pi))       # se matematických výrazů týče
        show(f('Ahoj!'))
```

```
16
```

```
4*pi
```

```
'Ahoj!Ahoj!Ahoj!Ahoj!'
```

Pyhon je objektový jazyk. Všechna prostředí podporující Sage nabízí kontextovou nápovědu snadno vyvolatelnou pomocí klávesy `TAB`. Zkuste nastavit kurzor za tečku a stisknout klávesu `TAB`. Například níže vytvoříme objekt reprezentující celé číslo 9 ne jako pythonovský `int`, ale jako prvek okruhu celých čísel.

```
In [7]: # malé celé číslo
        a = 9
```

K dispozici pak máme celou řadu metod, které obyčejný pythonovský `int` nemá. Například:

```
In [8]: print 'Je prvočíslo?'
        print a.is_prime()
        print 'Faktorizace:'
        show(a.factor())
```

```
Je prvočíslo?
False
Faktorizace:
```

```
3^2
```

Pokud si nevíme rady s jistou funkcí, můžeme vyvolat nápovědu pomocí otazníku za názvem funkce (dva otazníky zobrazí zdrojový kód funkce). Buňku je potřeba vyhodnotit. Stejně se Sage chová i v příkazové řádce.

```
In [9]: factorial?
```

1.3 Číselné množiny v Sage

1.3.1 Celá čísla $\mathbb{Z}$

Množina celých čísel je v Sage skryta pod objektem `ZZ`.

```
In [10]: print ZZ
         show(ZZ)
```

```
Integer Ring


Integer Ring
```

Okruh (*ring*) je množina s definovaným sčítáním a násobením (kde navíc platí známe asociativní, komutativní a distributiní zákony). Jak zadat konkrétní celé číslo? Existuje několik ekvivalentních způsobů:

```
In [10]: j = 1           # ekvivalentní způsoby vytvoření obektu typy Sage Integer
         k = ZZ(1)
         l = Integer(1)
         print(j == k)
         print(k == l)
         type(j)
```

```
True
True


Out[10]: <type 'sage.rings.integer.Integer'>
```

Sageovská celá čísla jsou daleko mocnější než obyčejné Pythonovské analogy. Prozkoumejte dostupné metody na objektech tohoto typu (viz `TAB`). Sage dokáže efektivně pracovat i s velmi velkými celočíselnými hodnotami.

1.3.2 Racionální čísla $\mathbb{Q}$

Racionální čísla se ukrývají pod zkratkou `QQ`.

```
In [11]: print QQ
         show(QQ)
```

```
Rational Field
```

```
Rational Field
```

Jak víme z přednášky, racionální čísla tvoří tzv. těleso (v angličtině se používá termín `field`). Racionální čísla lze opět vytvářet různými způsoby. Zápis pomocí zlomku je velmi přímočarý.

```
In [13]: j = QQ(1.5)
         k = 3/2
         print(j == k)
         print j
```

```
True
3/2
```

Sage si velmi dává pozor, aby algebraické operace fungovali tak jak v matematice očekáváme. Pokud ho nutíme sečist celé číslo a racionální číslo nemá s tím problém a vrátí nám výsledek ve tvaru racionálního čísla:

```
In [15]: a = ZZ(2)
         b = QQ(3/2)
         show(a + b)
         print(type(a + b))
```

```
7/2
```

```
<type 'sage.rings.rational.Rational'>
```

1.3.3 Reálná čísla (v dané přesnosti)

Přesněji řečeno, nejde o reálná čísla ale o jejich numerickou aproximaci. Sage nám naštěstí umožnuje explicitně zadat přesnost, v jaké počítáme. V tom se poměrně podstatně liší od Mathematica, kde se s těmito tzv. strojovými číslay pracuje zcela jiným způsobem.

```
In [17]: print RR
         show(RR)
```

```
Real Field with 53 bits of precision
```

```
Real Field with 53 bits of precision
```

Slovíčko "*field*" je zde lehce úsměvné.

```
In [18]: x = RR(-1.345)
         type(x)
```

```
Out[18]: <type 'sage.rings.real_mpfr.RealLiteral'>
```

```
In [23]: s, m, ex = x.sign_mantissa_exponent()
         print(s, m, ex)
```

```
(-1, 6057341498813317, -52)
```

```
In [25]: n(s * m * 2^ex )
```

```
Out[25]: -1.34500000000000
```

Odmocnina je definována stejně (pro středoškoláky překvapivě) jako v Mathematica.

```
In [27]: y = (-1.0)^(1/3)
         print y
         type(y)
```

```
0.500000000000000 + 0.866025403784439*I
```

```
Out[27]: <type 'sage.rings.complex_number.ComplexNumber'>
```

Pokud chceme počítat ve vyšší přesnosti, není problém:

```
In [30]: F = RealField(100)
         F
```

```
Out[30]: Real Field with 100 bits of precision
```

```
In [33]: print(F(pi))
         print(RR(pi))
```

```
3.1415926535897932384626433833
3.14159265358979
```

Eulerovo číslo.

```
In [21]: show(e)
         type(e)
```

```
e
```

```
Out[21]: <type 'sage.symbolic.constants_c.E'>
```

```
In [35]: print N(e, digits=10) # N, případně n, je funkce vypisující přibližnou hod
         print N(e, prec=32)   # symbolického výsledku
```

```
2.718281828
2.71828183
```

Ludolfovo číslo.

```
In [23]: show(pi)
         type(pi)
```

```
pi
```

```
Out[23]: <type 'sage.symbolic.expression.Expression'>
```

```
In [36]: print N(pi, digits=10)
         print N(pi, prec=32)
```

```
3.141592654
3.14159265
```

1.3.4 Komplexní čísla $\mathbb{C}$

S komplexními čísly v BI-ZMA do styku příliš nepřijdeme. Zmiňme alespoň imaginární jednotku i.

```
In [25]: I
         type(I)
```

```
Out[25]: <type 'sage.symbolic.expression.Expression'>
```

```
In [26]: I^2
```

```
Out[26]: -1
```

1.3.5 Symbolický okruh

Často je potřeba pracovat s čísly (a dalšími objekty) v absolutní přesnosti, resp. pracovat se symbolickými výrazy. K tomu v Sage slouži symbolický okruh.

```
In [27]: SR
```

```
Out[27]: Symbolic Ring
```

Pokud Sage dáme symbolický výraz (bez proměnné, o nich níže), automaticky ho interpretuje jako prvek `SR`.

```
In [37]: a = sqrt(2)
         b = log(pi)/sqrt(8)
         show(a*b)
         print(type(a))
```

```
1/2*log(pi)
```

```
<type 'sage.symbolic.expression.Expression'>
```

1.4 Algebra a symbolické výrazy

Sage umožňuje pracovat i se symbolickými proměnnými a výrazy. Nejprve je potřeba vytvořit proměnnou, s kterou budeme pracovat.

```
In [38]: var('x')
```

```
Out[38]: x
```

Poté můžeme vytvořit výraz, který nás zajímá.

```
In [39]: expr = x^2 + sin(x) / (x^2 + 1)
         show(expr)
```

```
x^2 + sin(x)/(x^2 + 1)
```

```
In [31]: # jakého typu je tento objekt?
         type(expr)
```

```
Out[31]: <type 'sage.symbolic.expression.Expression'>
```

Často chceme za proměnnou dosadit konkrétní hodnotu. K tomu lze použít několik způsobů.

```
In [41]: # pomocí rovnosti
         show(expr(x = pi/2))
         # pomocí slovniku (substituce, podobné nahrazovacímu pravidlu v Mathematic
         show(expr({x:pi/2}))
```

```
1/4*pi^2 + 4/(pi^2 + 4)
```

```
1/4*pi^2 + 4/(pi^2 + 4)
```

Ukažme si základní algebraické úpravy.

```
In [42]: expr = (x+4)^5
         show(expr)
```

```
(x + 4)^5
```

Roznásobení.

```
In [43]: expr = expr.expand()
         show(expr)
```

```
x^5 + 20*x^4 + 160*x^3 + 640*x^2 + 1280*x + 1024
```

A naopak faktorizace polynomu, tedy známá úprava na kořenové činitele.

```
In [44]: expr = expr.factor()
         show(expr)
```

```
(x + 4)^5
```

Sage umí pracovat nejen s polynomy. Můžeme provádět i úpravy trigonometrických výrazů.

```
In [47]: expr = sin(4*x)
         show(expr)
```

```
sin(4*x)
```

```
In [48]: expr = expr.trig_expand()
         show(expr)
```

```
4*cos(x)^3*sin(x) - 4*cos(x)*sin(x)^3
```

```
In [49]: expr = expr.trig_reduce()
         show(expr)
```

```
sin(4*x)
```

Užitečnými metodami fungujícími i na složitějších symbolických výrazech jsou `simplify` a `full_simplify`.

1.5 Sumace a Řady

V BI-ZMA budeme často pracovat s částečnými součty a řadami. S některými součty nám může Sage pomoci.

```
In [50]: var('k,n,x')
```

```
Out[50]: (k, n, x)
```

Známý součet prvních n přirozených čísel, tedy

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

```
In [53]: expr = sum(k, k, 1, n)
         show(expr)
```

```
1/2*n^2 + 1/2*n
```

Součet prvních n členů jisté geometrické posloupnosti.

```
In [54]: expr = sum(x^k, k, 0, n-1) # všimněte si, že Sage (Mathematica také) ignor
         show(expr)
```

```
(x^n - 1)/(x - 1)
```

Obskurnější součet.

```
In [43]: expr = sum(k^2, k, 1, n)
         show(expr)
```

```
1/3*n^3 + 1/2*n^2 + 1/6*n
```

Nyní se pokusme sečíst některé mocninné řady. O nich se čtenář doví více později v semestru.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

```
In [55]: sum(x^k / factorial(k), k, 0, infinity)

Out[55]: e^x
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \ln(x+1)$$

```
In [56]: sum((-1)^k*x^(k+1)/(k+1),k, 0, infinity)

Out[56]: log(x + 1)
```

Pozor, log je (stejně jako v Mathematica) přirozený, ne dekadický, logaritmus.

```
In [59]: log(e) # přirozený logaritmus Eulerova čísla je 1

Out[59]: 1
```

Naopak, zadáme-li funkci, pak se ji můžeme pokoušet v mocninnou Taylorovu řadu rozvíjet Tedy počítat zadané Taylorovy polynomy zadaných funkcí.

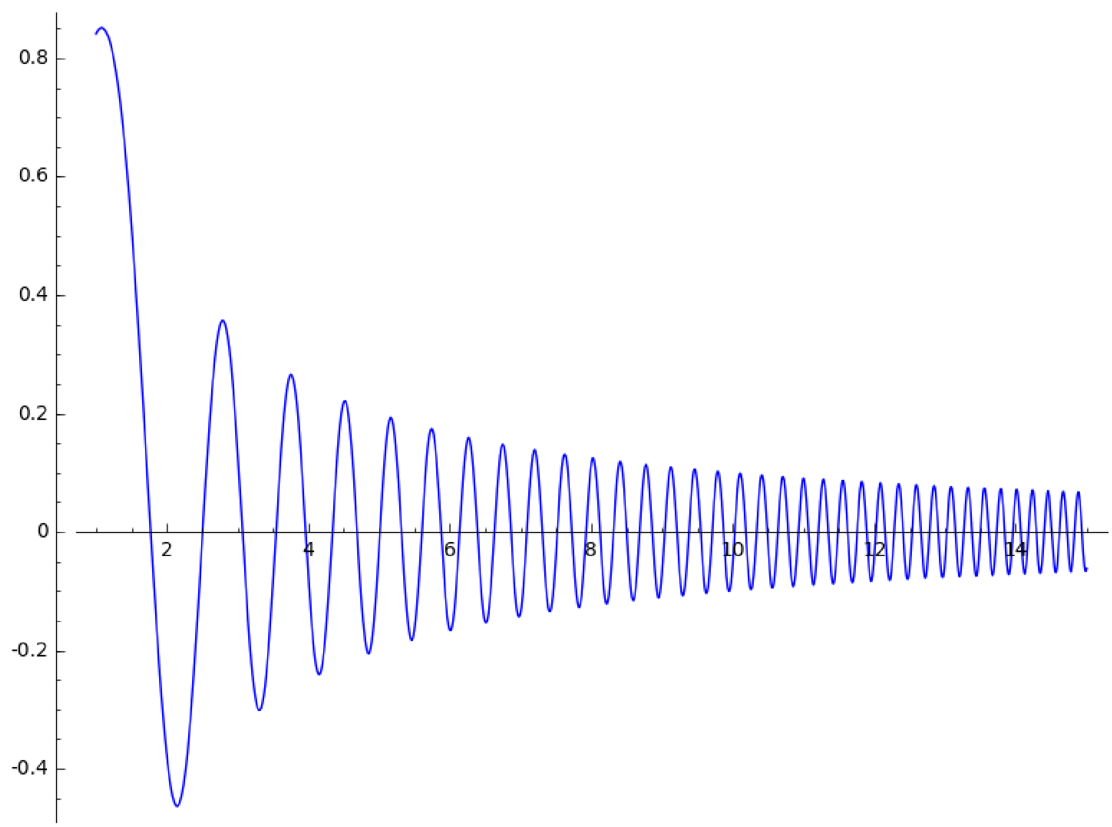
```
In [46]: taylor(sin(x), x, 0, 10)

Out[46]: 1/362880*x^9 - 1/5040*x^7 + 1/120*x^5 - 1/6*x^3 + x

In [47]: taylor(exp(x), x, 0, 10)

Out[47]: 1/3628800*x^10 + 1/362880*x^9 + 1/40320*x^8 + 1/5040*x^7 + 1/720*x^6 + 1/1
```

1.6 Funkce a jejich grafy

Sage podporuje mnoho způsobů jak vytvářet všemožné typy grafů. Nejjednodušším způsobem je asi vytvoření symbolického výrazu s jednou symbolickou proměnnou a použití příkazu `plot`. Předveďme si tento postup na jednoduchém příkladě.

```
In [60]: # Bud x symbolicka promenna.
         var('x')
         # Graf funkce 1/x*sin(x^2) pro x z intervalu <1,15>.
         plot(1/x*sin(x^2), (x, 1, 15))
```

```
Out[60]:
```

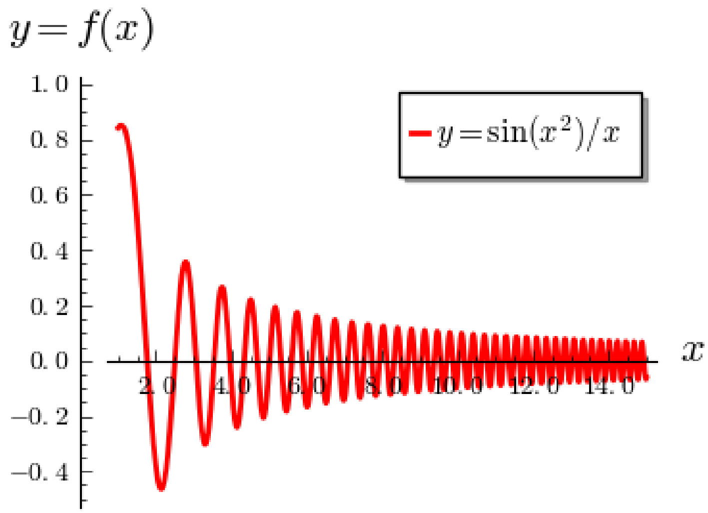


Na předchozím obrázku jsme jen specifikovali funkci a rozsah nezávisle proměnné. Sage nám umožňuje vyladit i ostatní parametry grafu. V následující ukázce si ukážeme několik užitečných parametrů. Interně Sage k tvorbě grafů využívá Pythonovskou knihovnu matplotlib.

```
In [49]: plot(1/x*sin(x^2), (x, 1, 15),
              ymin=-0.5, ymax=1,                    # rozsah svislé osy
              thickness=2,                          # tloušt'ka křivky
              rgbcolor='red',                       # barva
              axes_labels=['$x$','$y=f(x)$'],       # popisky os, lze využívat LaTeX
              tick_formatter='latex',               # cejchování os stejným fontem jak
```

```
              legend_label='$y = \\sin(x^2)/x$',  # legenda (vhodné při kombinování
              figsize=4)                          # velikost výsledného obrázku
```

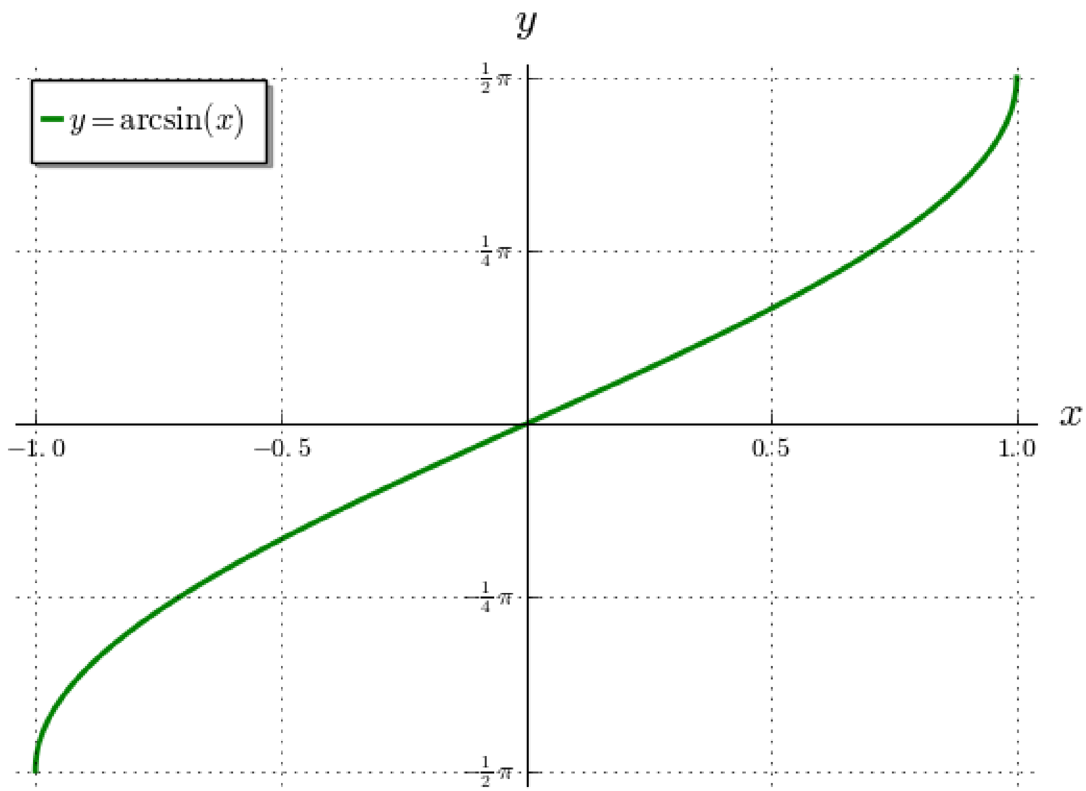
Out[49]:



Občas je potřeba přesně specifikovat na kterých místech se mají osy cejchovat (typicky u goniometrických funkcí). V následující ukázce grafu funkce arcsin si ukážeme jak na to.

```
In [61]: plot(arcsin(x),(x,-1,1),
              ymin=-pi/2, ymax=pi/2,
              thickness=2, rgbcolor='green',
              axes_labels=['$x$','$y$'], tick_formatter='latex',
              legend_label='$y = \\arcsin(x)$',
              ticks=[[-1, -1/2, 1/2, 1], [-pi/2, -pi/4, pi/4, pi/2]], # cejchování o
              gridlines=True,                                         # souřadná mř
              figsize=6)
```

Out[61]:



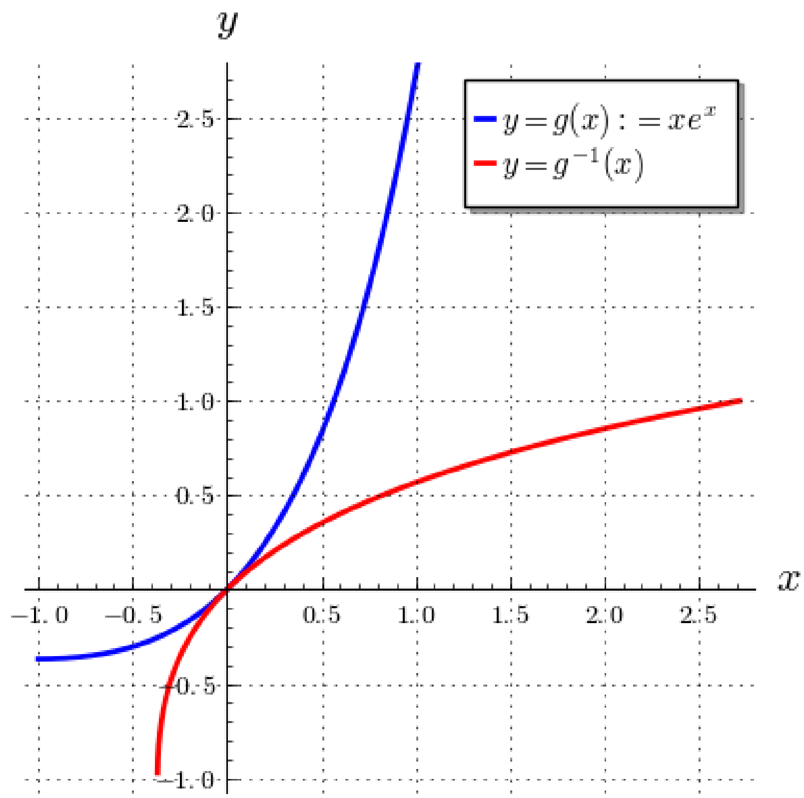
Funkce `plot` akceptuje i obyčejnou Pythonovskou funkci, která vrací číselné výsledky. Syntaxe je jen nepatrně odlišná (neuvádí se nezávisle proměnná).

```
In [62]: def lambert(z):
             """
                 Naivní implementace Lambertovy funkce, tedy inverze k g(w) = w*exp
                 Výpočet pomocí Newtonovy metody s očekávanou přesností na 5 cifer
             """

             # Je argument "z" z definičního oboru?
             if z <= -1/e:
                 raise ValueError('Argument neni v definicnim oboru Lambertovy funk

             # Přesnost a iterátor rekurentní posloupnosti.
             eps = 1e-6
             newton = lambda w: w - (w*exp(w) - z) / (exp(w) + w*exp(w))

             # První nástřel.
             if z < 0:
                 y1 = -0.5
             elif z > 0:
                 y1 = z/2
```

```
    else:
        return 0

    # Iterativní výpočet.
    y2 = newton(z)
    while abs(y1 - y2) > eps:
        y1, y2 = y2, newton(y2)

    return y2
```

A nakonec graf s oběma funkcemi. Zde také ukazujeme, jak kombinovat více grafických objektů do jednoho. K tomu slouží operátor "+". Případně lze obrázek samozřejmě uložit do souboru i ve vektorovém formátu. Různa nastavení grafiky (osy, velikost obrázku, atp.) stačí uvést jednou v prvním grafickém objektu.

```
In [63]: fig1 = plot(x*exp(x), (x, -1, e),
             ymin=-1, ymax=e,
             thickness=2, rgbcolor='blue',
             axes_labels=['$x$','$y$'], tick_formatter='latex',
             legend_label='$y = g(x) := x e^x$', gridlines=True,
             figsize=6,aspect_ratio=1)

         fig2 = plot(lambert, (-1/e, e),
             thickness=2, rgbcolor='red',
             legend_label='$y = g^{-1}(x)$')

         fig1 + fig2

Out[63]:
```



1.7 Limity posloupností a funkcí

Pokud chceme pomocí Sage (ale i Mathematica) počítat limity posloupností je nutné dát CAS na vědomí, že počítáme s diskrétní celočíselnou proměnnou.

```
In [64]: var('n,x')
         assume(n,'integer')
```

Aktuální seznam předpokladů si lze případně vypsat pomocí metody `assumptions`. Pokud chceme všechny předpoklady zapomenout, lze k tomu použít metodu `forget`.

```
In [66]: assumptions()

Out[66]: [n is integer]
```

O proměnné x jsme žádný předpoklad neučinili. O n předpokládáme, že je celočíselná.

```
In [67]: limit(sin(pi*n),n=+infinity)

Out[67]: 0
```

Pro každé celoříselné n totiž platí $\sin(n\pi) = 0$. Sage nám proto dal dobrý výsledek pro limitu posloupnosti $\big(\sin(n\pi)\big)_{n=1}^{\infty}$.

```
In [57]: limit(sin(pi*x), x=+infinity)
```

```
Out[57]: ind
```

Pokud o proměnné neučiníme žádný předpoklad, Sage automaticky počítá s reálnou funkcí. Funkce $\sin(\pi x)$ je periodická nekonstatní a očividně nemá v nekonečnu limitu.

Ověřme z přednášky známé limity. Čili se také jedná o dobrý výsledek, ovšem z pohledu limity funkce.

```
In [69]: limit((1+1/n)^n, n=infinity)
```

```
Out[69]: e
```

```
In [70]: limit((e^x - 1)/x, x=0)
```

```
Out[70]: 1
```

```
In [71]: limit(ln(x+1)/x, x=0)
```

```
Out[71]: 1
```

```
In [72]: limit(ln(x+1)/x, x=0)
```

```
Out[72]: 1
```

Pomocí nepovinného argumentu `dir` (*direction*, směr) můžeme kontrolovat i to, zda-li počítáme limitu funkce zleva či zprava.

```
In [64]: limit(1/x, x=0, dir='right')
```

```
Out[64]: +Infinity
```

```
In [66]: limit(1/x, x=0, dir='left')
```

```
Out[66]: -Infinity
```

```
In [67]: limit(sign(x), x=0, dir='right')
```

```
Out[67]: 1
```

```
In [68]: limit(sign(x), x=0, dir='left')
```

```
Out[68]: -1
```

Povšimněte si, že Sage vrací i výsledek pro oboustranou limitu této funkce v 0.

```
In [69]: limit(1/x, x=0)
```

```
Out[69]: Infinity
```

Nekonečno je zde myšleno jako komplexní. Uvedená funkce je totiž chápána jako $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1.8 Derivace

Ukažme si, jak Sage použít k výpočtu derivací funkcí. Prvním krokem je definovat symbolickou proměnnou x, která bude odpovídat naší nezávislé proměnné.

```
In [70]: var('x')
```

```
Out[70]: x
```

Dále definujeme funkci, kterou chceme derivovat.

```
In [71]: f(x) = sin(x)
```

Všimněte si, že Sage korektně rozlišuje mezi funkcí f a její funkční hodnotou $f(a)$ v bodě a.

```
In [72]: show(f)
         show(f(pi/2))
```

```
x |--> sin(x)


1
```

Derivaci funkce f můžeme získat několika ekvivalentními způsoby. Prvním je zavolání metody derivative přímo na objektu odpovídajícímu funkci f.

```
In [73]: g = f.derivative()
         show(g)
         show(g(x))
```

```
x |--> cos(x)


cos(x)
```

Druhou možností je použití funkce `diff`.

```
In [74]: g = diff(f)
         show(g)
         show(g(x))
```

```
x |--> cos(x)


cos(x)
```

Často bývá potřeba výsledný symbolický výraz ještě zjednodušit. K tomu Sage poskytuje několik funkcí.

```
In [75]: f(x) = arctan(x) + arctan(1/x)
         expr = diff(f(x))
         # po derivaci
         show(expr)
         # zjednoduseni
         show(expr.simplify_full())
```

```
1/(x^2 + 1) - 1/(x^2*(1/x^2 + 1))
```

```
0
```

1.9 Integrace

Opět definujme funkci f s nezávislou proměnnou x.

```
In [76]: var('x')
         f(x) = sin(x)
```

Primitivní funkci můžeme spočítat následujícím příkazem.

```
In [77]: F(x) = integrate(f(x),x)
         show(F(x))
```

```
-cos(x)
```

Projistotu si tvrzení Sage ověřme. Musí platít $F' = f$.

```
In [78]: (f(x) - diff(F(x))).simplify_full()
```

```
Out[78]: 0
```

Určitý integrál vypočteme stejným příkazem a udáním integračního oboru (resp. mezí). Snadno si tento výsledek můžeme ověřit pomocí výše napočtené primitivní funkce.

```
In [79]: print(integrate(f(x),(x,0,pi)))
         print(F(pi) - F(0))
```

```
2
2
```

Ihned ale dodejme, že primitivní funkci k řadě funkcí nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Například:

```
In [80]: f(x) = exp(-x^2)
         show(f(x))
```

```
e^(-x^2)
```

```
In [81]: F(x) = integrate(f(x),x)
         show(F(x))
```

```
1/2*sqrt(pi)*erf(x)
```

Sage vrací výsledek vyjádřený pomocí jisté speciální funkce (`erf`, viz BI-PST). Tato funkce je definována předpisem

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Její hodnotu můžeme počítat přímo i pomocí numerické integrace.

```
In [82]: erf(2.0)

Out[82]: 0.995322265018953

In [83]: numerical_integral(2/sqrt(pi)*exp(-x^2),0,2.0)

Out[83]: (0.9953222650189529, 1.1050296955461036e-14)
```

1.10 Další poznámky

V textu výše jsme se soustředili na Sage funkce užitečné v BI-ZMA. Sage nabízí ale celou řadu funkcí pro práci s objekty Lineární algebry, teorie grafů, teorie čísel a dalších. Těmi se zde nebudeme zabývat.

Další inspiraci lze načerpat v oficiální dokumentaci.