odmocnovani

November 3, 2017

1 Odmocňování v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$

Jana Ernekerová, Tomáš Kalvoda, 2014, 2017

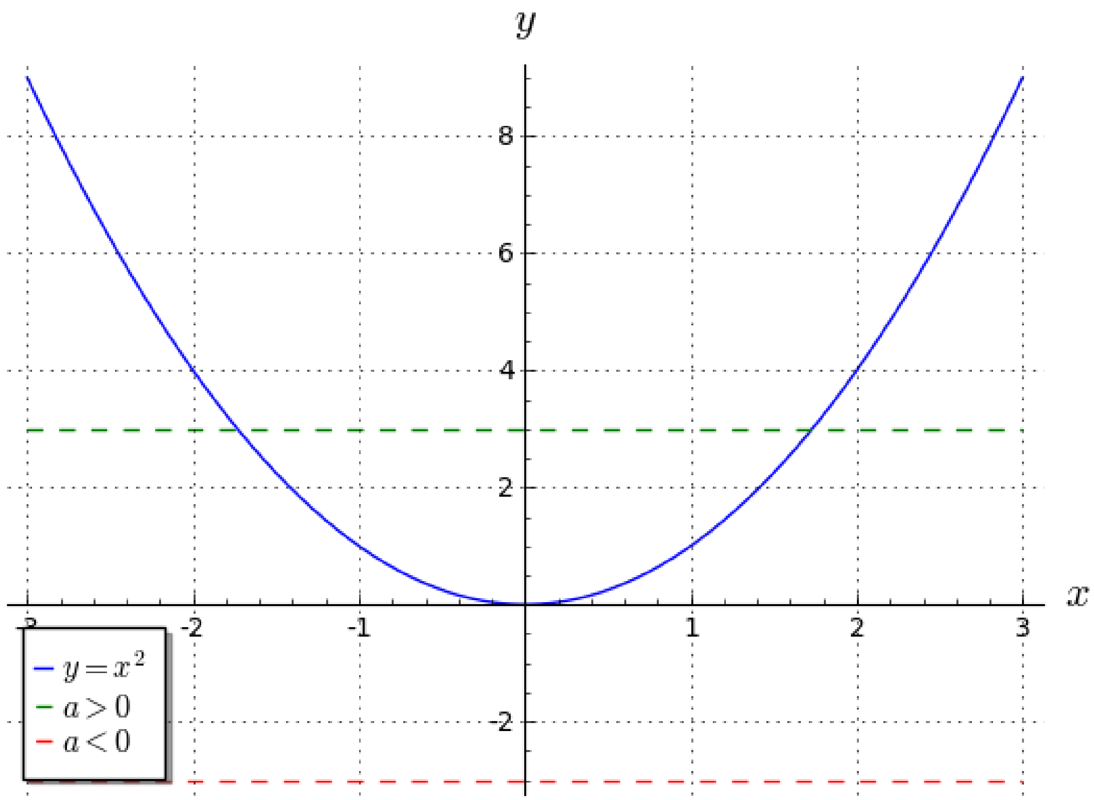
1.1 Odmocňování v $\mathbb{R}$

Definujeme **přirozené odmocniny**, ozn. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ jako jisté reálné řešení rovnice $x^n = a$ (viz dále). V závislosti na n rozlišujeme mezi následujícími případy:

1.1.1 Sudá odmocnina $\sqrt[2k]{x}$

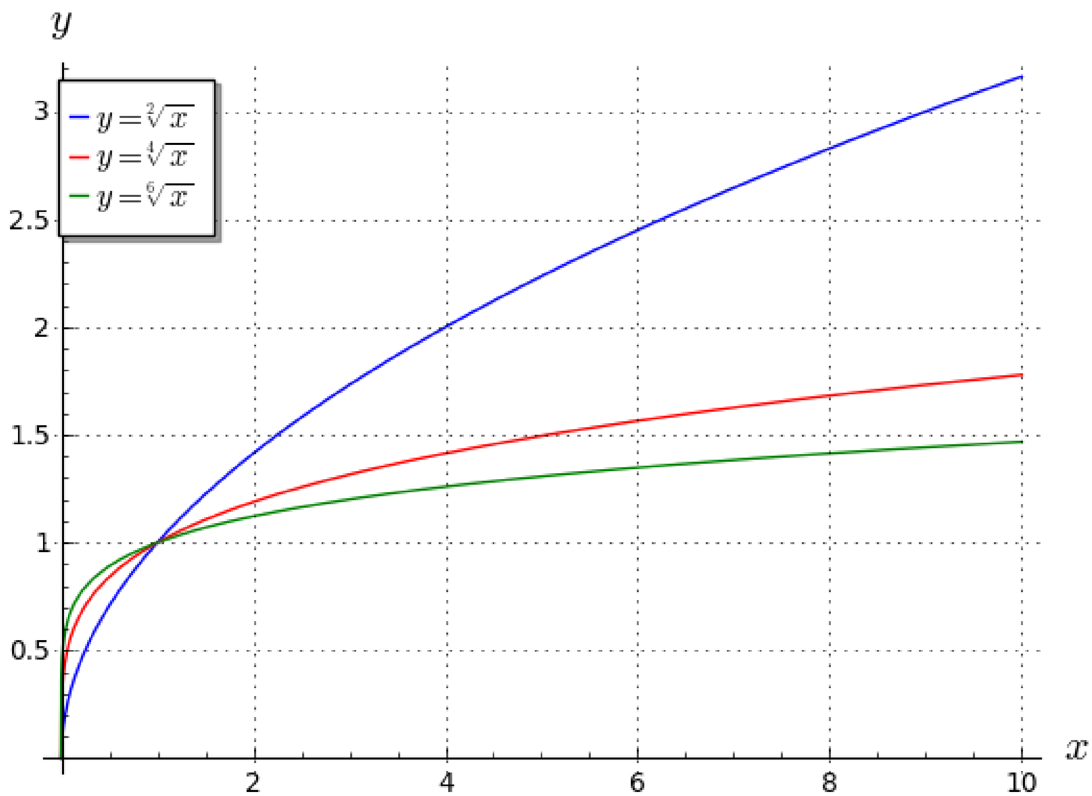
Je-li $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, **sudé**, pak $x^n \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což znamená, že rovnice $x^n = a$ má reálné řešení jen pro $a \geq 0$.

```
In [10]: g1 = plot(x^2, (x, -3, 3), legend_label='$y=x^2$')
         g2 = plot(3, (x, -3, 3), legend_label='$a>0$', linestyle='--', color='gree
         g3 = plot(-3, (x, -3, 3), legend_label='$a<0$', linestyle='--', color='rec
         (g1 + g2 + g3).show(gridlines=True, figsize=6, axes_labels=['$x$', '$y$'])
```



Pro $a > 0$ jsou tato řešení dvě, neboť $x^{2k} = (-x)^{2k}$. Sudou odmocninu $\sqrt[2k]{a}$ definujeme jako **nezáporné** řešení rovnice $x^{2k} = a$. Proto je $\sqrt{x^2}$ rovno $|x|$ a nikoli x.

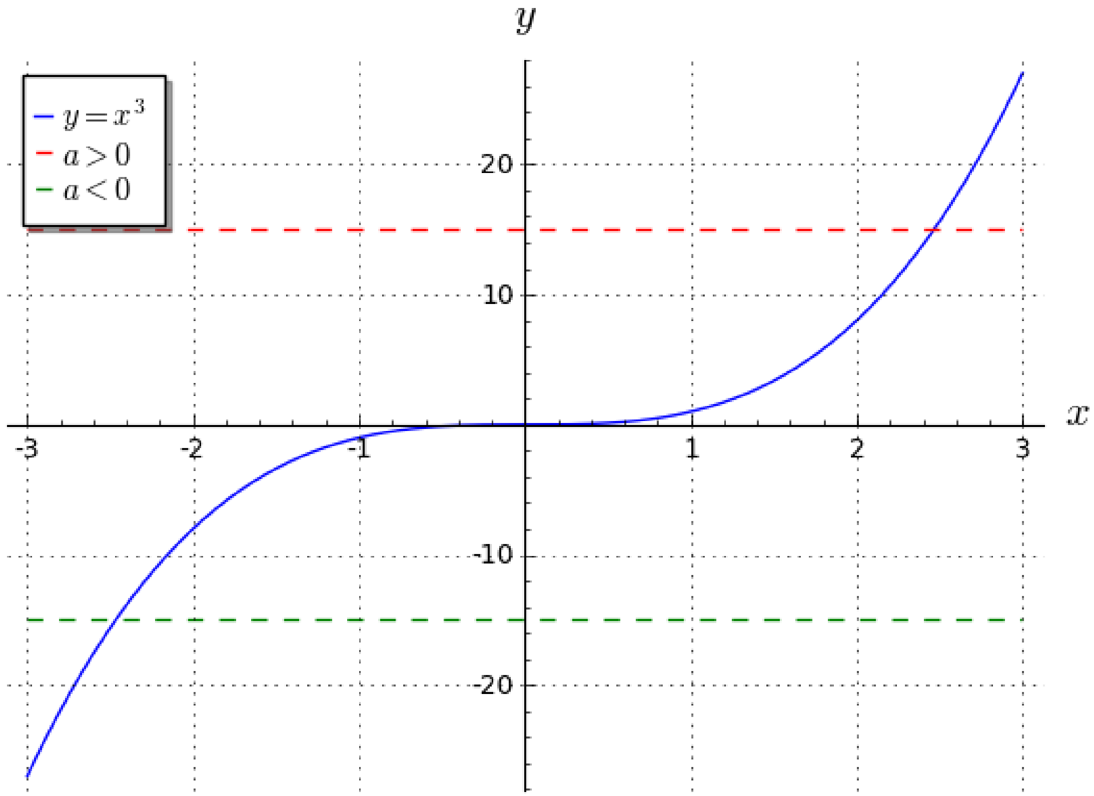
```
In [15]: g1 = plot(x^(1/2), (x, 0, 10), legend_label='$y=\sqrt[2]{x}$')
         g2 = plot(x^(1/4), (x, 0, 10), legend_label='$y=\sqrt[4]{x}$', color='red'
         g3 = plot(x^(1/6), (x, 0, 10), legend_label='$y=\sqrt[6]{x}$', color='gree
         (g1 + g2 + g3).show(figsize=6, gridlines=True, axes_labels=['$x$', '$y$'])
```



1.1.2 Lichá odmocnina $\sqrt[2k-1]{x}$

Je-li $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, **liché**, pak rovnice $x^{2k-1} = a$ má jediné řešení, které značíme $\sqrt[2k-1]{a}$. Například platí $\sqrt[3]{-8} = -2$.

```
In [13]: f1 = plot(x^3, (x, -3, 3), legend_label='$y=x^3$', figsize=4, )
         f2 = plot(15, (x, -3, 3), legend_label='$a>0$', linestyle='--', color='rec
         f3 = plot(-15, (x, -3, 3), legend_label='$a<0$', linestyle='--', color='gr
         (f1+f2+f3).show(figsize=6, axes_labels=['$x$','$y$'], gridlines=True)
```



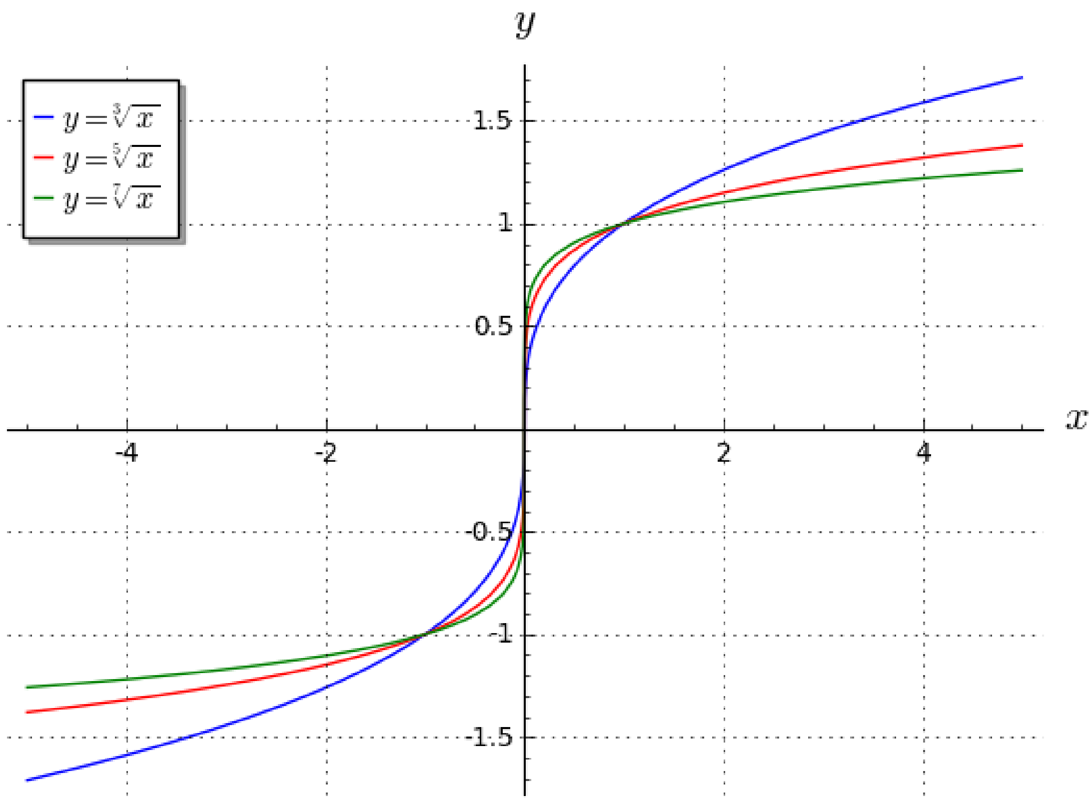
Z výše uvedeného je patrné, že třetí odmocnina $\sqrt[3]{x}$ je funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$. Jak je ale patrné z následujícího výpočtu, Sage se takto zavedeným odmocňováním neřídí. Implicitně pracuje v komplexním oboru. Tím se budeme zabývat níže.

```
In [12]: # Komplexní číslo! Ne očekávaná -1.
         n((-1)^(1/3))

Out[12]: 0.500000000000000 + 0.866025403784439*I
```

Chceme-li vykraslit graf liché odmocniny, stačí použít její alternativní vyjádření (rozmyslete!) $\sqrt[2k-1]{x} = \operatorname{sgn}(x) \cdot \sqrt[2k-1]{|x|}$.

```
In [17]: g1 = plot(sign(x)*abs(x)^(1/3), (x, -5, 5), legend_label='$y=\sqrt[3]{x}$'
         g2 = plot(sign(x)*abs(x)^(1/5), (x, -5, 5), legend_label='$y=\sqrt[5]{x}$'
         g3 = plot(sign(x)*abs(x)^(1/7), (x, -5, 5), legend_label='$y=\sqrt[7]{x}$'
         (g1 + g2 + g3).show(figsize=6, gridlines=True, axes_labels=['$x$', '$y$'])
```



1.2 Odmocňování v $\mathbb{C}$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $z \in \mathbb{C}$. Pak n**-tou odmocninou** z komplexního čísla z nazýváme každé číslo $x \in \mathbb{C}$, pro které platí $x^n = z$ a značíme $\sqrt[n]{z}$.

Rovnice

$$x^n = |a| \; (\cos\alpha + i \sin\alpha), \quad |a| \neq 0$$

má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů:

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Body x_k jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a s poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.

Co bychom jistě měli zmínit je základní věta algebry, jejíž důkaz si uvedeme později v lineární algebře a která říká, že *každý nekonstantní polynom, tedy polynom stupně $n \geq 1$, s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.*

V následující demonstraci si ukažme komplexní odmocniny z 1, tedy komplexní řešení rovnice $x^n = 1$. V dříve uvedeném vzorci proto máme $a = 1$ a $\alpha = 0$. Proto

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

```
In [19]: @interact
         def roots(n=slider(1,10, step_size=1)):
             roots = [ [cos(2*k*pi/n), sin(2*k*pi/n)] for k in range(n) ]
             pts = points(roots, size=30, color='red')
             circ = circle((0,0),1)
             show(circ + pts, figsize=6)
```

Odmocninu, kterou vrací Sage (nebo Mathematica) je ta s nejmenší $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$. Jde o tzv. hlavní hodnotou odmocniny.