

Weierstrassova funkce

Spojité funkce nemající derivaci ani v jednom bodě

David Bernhauer, 2014

Teoretické shrnutí

Spojitosť funkce v bodě

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce

- f je **spojitá v bodě a** , pokud

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- f je **spojitá v bodě a zprava**, pokud

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

- f je **spojitá v bodě a zleva**, pokud

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

Spojitosť funkce na intervalu

Funkce f je

- **spojitá na intervalu (a, b)** , právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$** , právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu $(a, b]$** , právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- **spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$** , právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Weierstrassova funkce

Důležitou otázkou je vztah mezi 'diferencovatelností' a 'spojitostí' funkce. Připomeňme, že funkce f je diferencovatelná v bodě a , právě když existuje konečná derivace funkce f v bodě a . Z diferencovatelnosti funkce f v bodě a plyne její spojitost v bodě a . Ačkoliv to může být pro nezasvěceného špatně představitelné, opačné tvrzení neplatí. Spojitost funkce neimplikuje diferencovatelnost. Nyní si ukážeme funkci, která je spojitá na celém \mathbb{R} , ale nemá derivaci ani v jednom bodě.

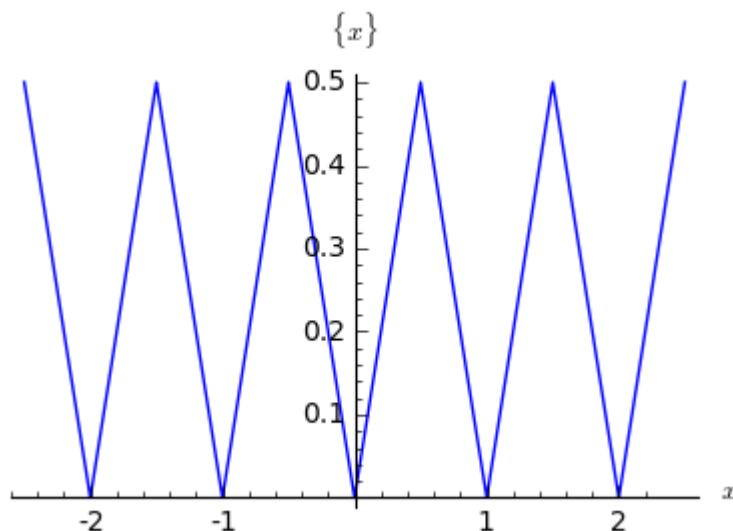
Označme $\{x\}$ vzdálenost čísla x od nejbližšího celého čísla a uvažme funkci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\{4^n \cdot x\}}{2^n}$$

```
var('x')

def distx ( x ):
    return min(x-floor(x), floor(x)+1-x)

plot(distx,(x,-2.5,2.5), figsize=4, axes_labels=['$x$', '$\\{x\\}$'])
```



```
def funcx ( x, depth ):
    sum = 0.0
    for n in range( 0, depth ):
        sum += distx( 4.0^n * x ) / 2.0^n
    return sum

@interact
def _( depth=(1..10), _x=1.00000 ):
    def tempFunction ( x ):
        return funcx( x, depth )
    show( plot( tempFunction, 0, _x ) )
```

depth

_x 1.0000000000000000

