Přibližné výpočty

Přibližné výpočty

Jana Ernekerová & Tomáš Kalvoda, 2014

Taylorova řada pro sinus

Ukažme si přibližný výpočet funkce sin podle předem zadané přesnosti. Připomeňme tvar n-tého Taylorova polynomu funkce sin v bodě 0,

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \, \frac{x^{2k}}{(2n}$$

Stačí umět vypočítat funkci sin na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$. Pro odhad chyby po tomto $(2n+2)$-tém Taylorově polynomu na tomto intervalu platí

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n+3}, \quad x \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

```
# Výpočet funkčních hodnot funkce sinus v prvním kvadrantu
mypi = RR(pi)
def sin1q(x, eps):
    xx = RR(x)
    term = xx;
    odd = 3;
    ans = term; err = 1/6 * (mypi/2)^3
    while err > eps:
        term *= (-1)*xx^2/(odd*(odd-1))
        ans += term
        odd += 2
        err *= (mypi/2)^2/(odd*(odd-1))
    return ans
```

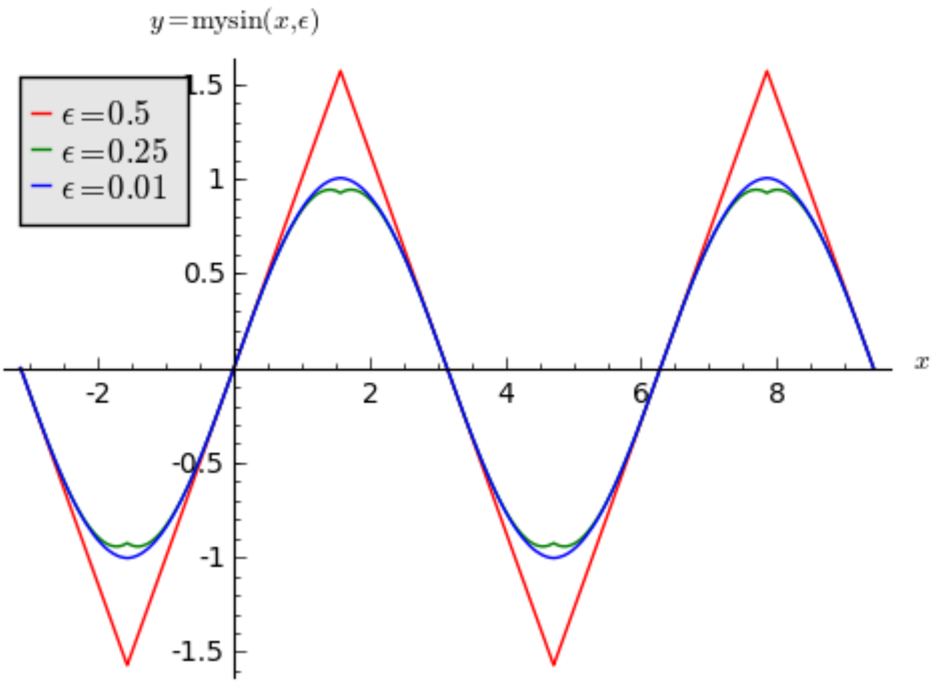
```
# Výpočet převodem do prvního kvadrantu
def mysin(x, eps):
    modx = x - 2*mypi*floor(x/(2*mypi))
    q = floor(modx/(pi/2))
    if q == 0:
        return sin1q(modx,eps)
    elif q == 1:
        return sin1q(mypi-modx,eps)
    elif q == 2:
```

```
        return -sin1q(modx-mypi,eps)
    else:
        return -sin1q(2*mypi-modx,eps)
```

```
# Jednoduchý test
print "sin(0.1)"
print mysin(0.1, 0.01)
print sin(0.1)
print "sin(1.1)"
print mysin(1.1, 0.01)
print sin(1.1)
```

```
sin(0.1)
0.0998334166666667
0.0998334166468282
sin(1.1)
0.891587583333333
0.891207360061435
```

```
p = plot(lambda x: mysin(x,1),-
pi,3*pi,color='red',legend_label='$\epsilon=0.5$',axes_labels=
['$x$','$y=\mathrm{mysin}(x,\epsilon)$'])
p += plot(lambda x: mysin(x,0.25),-
pi,3*pi,color='green',legend_label='$\epsilon=0.25$')
p += plot(lambda x: mysin(x,0.01),-
pi,3*pi,color='blue',legend_label='$\epsilon=0.01$')
p.show(figsize=5)
```




```
@interact
def _(eps=slider(0.0,1.0,default=0.5)):
    p = plot(lambda x: sin(x) -
```

```
mysin(x,eps),0,2*pi,legend_label='$\sin(x)-\mathrm{mysin}
(x,\epsilon)$')
    bounds = plot([eps,-
eps],0,2*pi,color='red',legend_label='$\pm\epsilon$')
    (p+bounds).show(figsize=5)
```

eps 0.498997995991984