Tečna a derivace

Tečna a derivace

Klára Drhová, 2014

Tečna v bodě s konečnou derivací

Má-li funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konečnou derivaci $f'(a)$ v bodě a, pak přímku s rovnicí

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

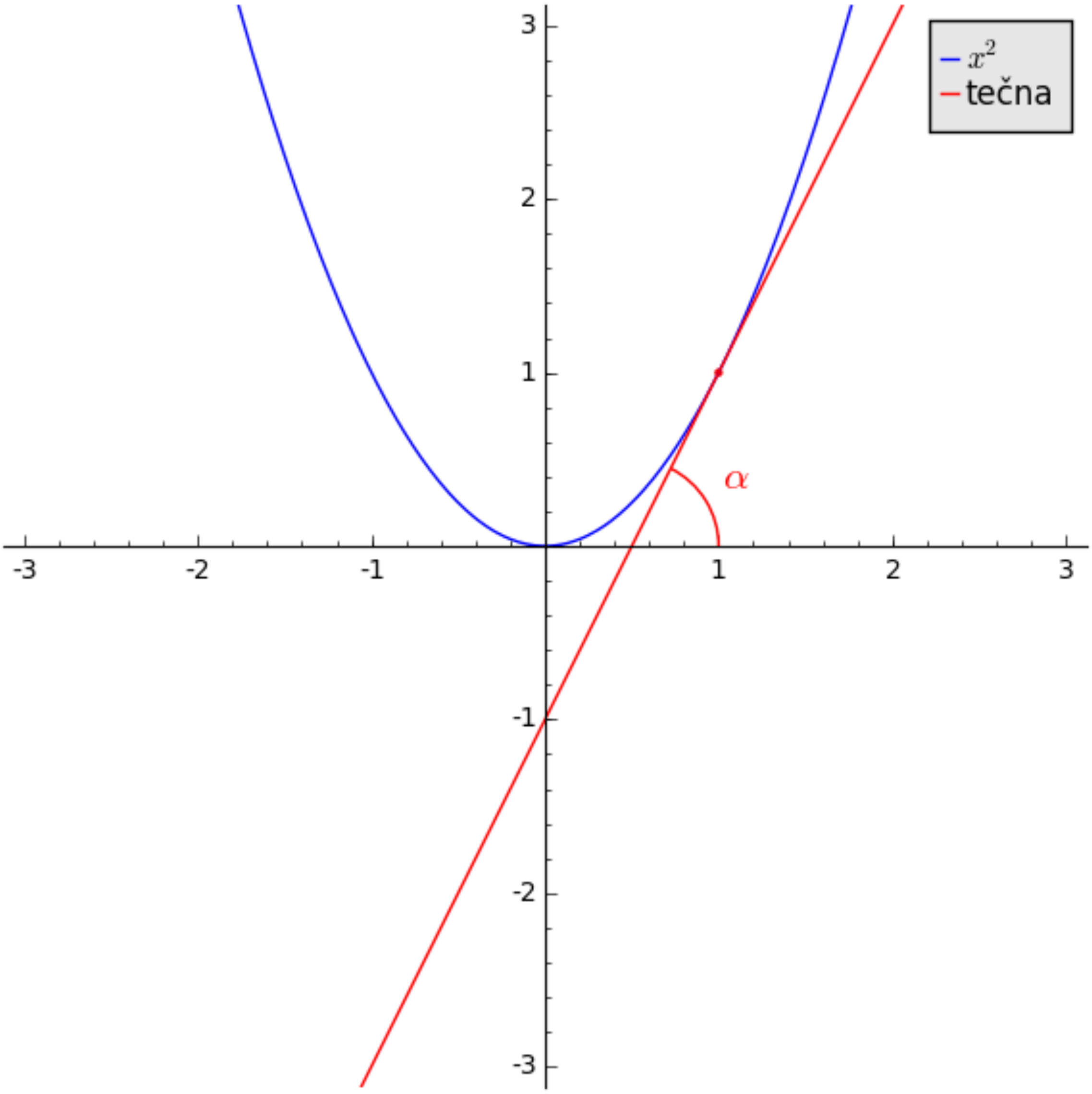
nazýváme tečnou grafu funkce f v bodě a.

Poznámka

To znamená, že číslo $f'(a)$ je směrnicí tečny funkce f v bodě a.

$k = f'(a) = \tan \alpha$, kde α je směrový úhel tečny v bodě a, tedy úhel svíraný tečnou funkce v bodě a a osou x.

```
graf = plot(x^2, (x, -3,3), legend_label = '$x^2$')
#tečna v bodě a: a^2 + 2*a*(x - a)
#tečna v bodě 1:   1 +   2*(x - 1)
graf+= plot(2*x-1, (x, -3, 3), legend_label = u'tečna', color
= 'red')
graf+= point([1, 1], color = 'red')
graf+= arc((0.5,0), 0.5, sector=(0, arctan(2)), color = 'red')
graf+= text("$\\alpha$", (1.1, 0.4), color = 'red', fontsize
= 15)
graf.show(aspect_ratio = 1, ymin = -3, ymax = 3)
```



Následující demonstrace ukazuje příklady tečen u různých funkcí.

```
print(table([['a','b'],[1,2]],frame=true))
```

```
+---+---+
| a | b |
+---+---+
| 1 | 2 |
+---+---+
```

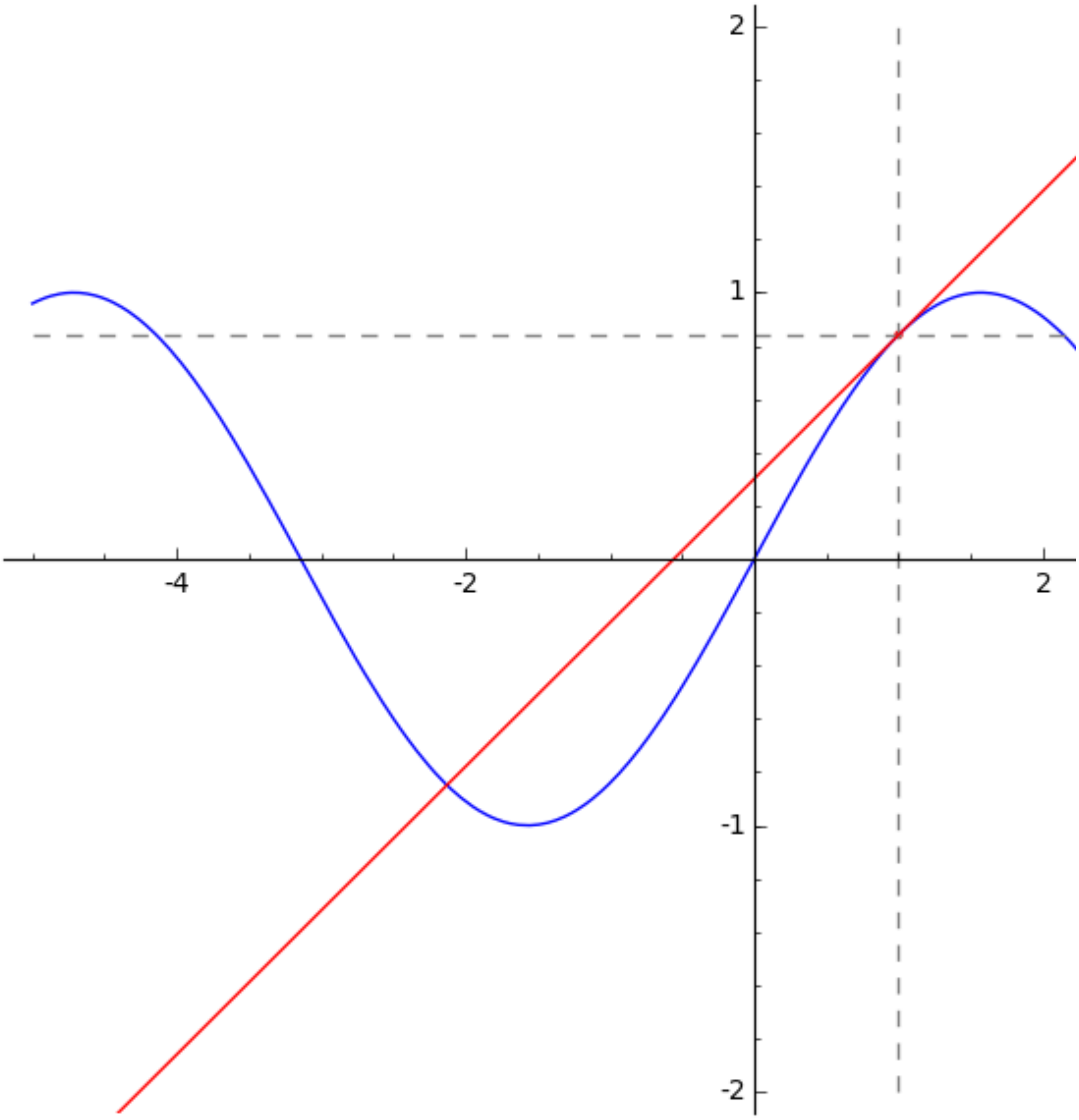
```
x = var('x')
@interact
def tecny(a = slider(range(-5, 5), default = 1, label = 'bod
$a$'), fun = selector(['sin(x)', '3/(2*(x^2+1))', 'e^x/2',
'x^2/4'], buttons = True, label = 'funkce')):
    if fun == 'sin(x)': # podle výběru je přiřazena funkce
        f = sin(x)
    if fun == '3/(2*(x^2+1))':
```

```
        f = 3/(2*(x^2+1))
    if fun == 'e^x/2':
        f = e^x/2
    if fun == 'x^2/4':
        f = x^2/4
    print(table([['funkce',f],['derivace',diff(f,x)],['tecna
v a',float(f(x=a)) + float(diff(f, x)(x=a))*(x - a)],['bod
dotyku','['+str(a)+','+str(f(x=a))+']' ]]))
    p = plot(f, (x, -5, 5))
    #pozn. diff() je derivace funkce
    tecna = f(x=a) + diff(f, x)(x=a)*(x - a)
    p+= line([(a, -2), (a, 2)], color = 'grey', linestyle =
'dashed')
    p+= line([(-5, f(x=a)), (5, f(x=a))], color = 'grey',
linestyle = 'dashed')
    p+= plot(tecna, (x, -5, 5), color = 'red')
    p+= point([a, f(x=a)], color = 'red')
    p.show(ymin = -2, ymax = 2)
```

bod a 1

funkce sin(x) 3/(2*(x^2+1)) e^x/2 x^2/4

```
funkce        sin(x)
derivace      cos(x)
tecna v a     0.5403023058681398*x + 0.30116867893975674
bod dotyku    [1,sin(1)]
```



Tečna v bodě s nekonečnou derivací

Má-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě a derivaci $f'(a)$ rovnou $+\infty$ nebo $-\infty$ a je v bodě a spojitá, pak přímku s rovnicí $x = a$ nazýváme tečnou grafu funkce f v bodě a.

Tento případ už se nešikovně ukazuje v interaktivní verzi, ukažme si několik statických obrázků.

Tečna grafu funkce $f(x) = (x-1)^{1/3} + 1$ v bodě $a = 1$

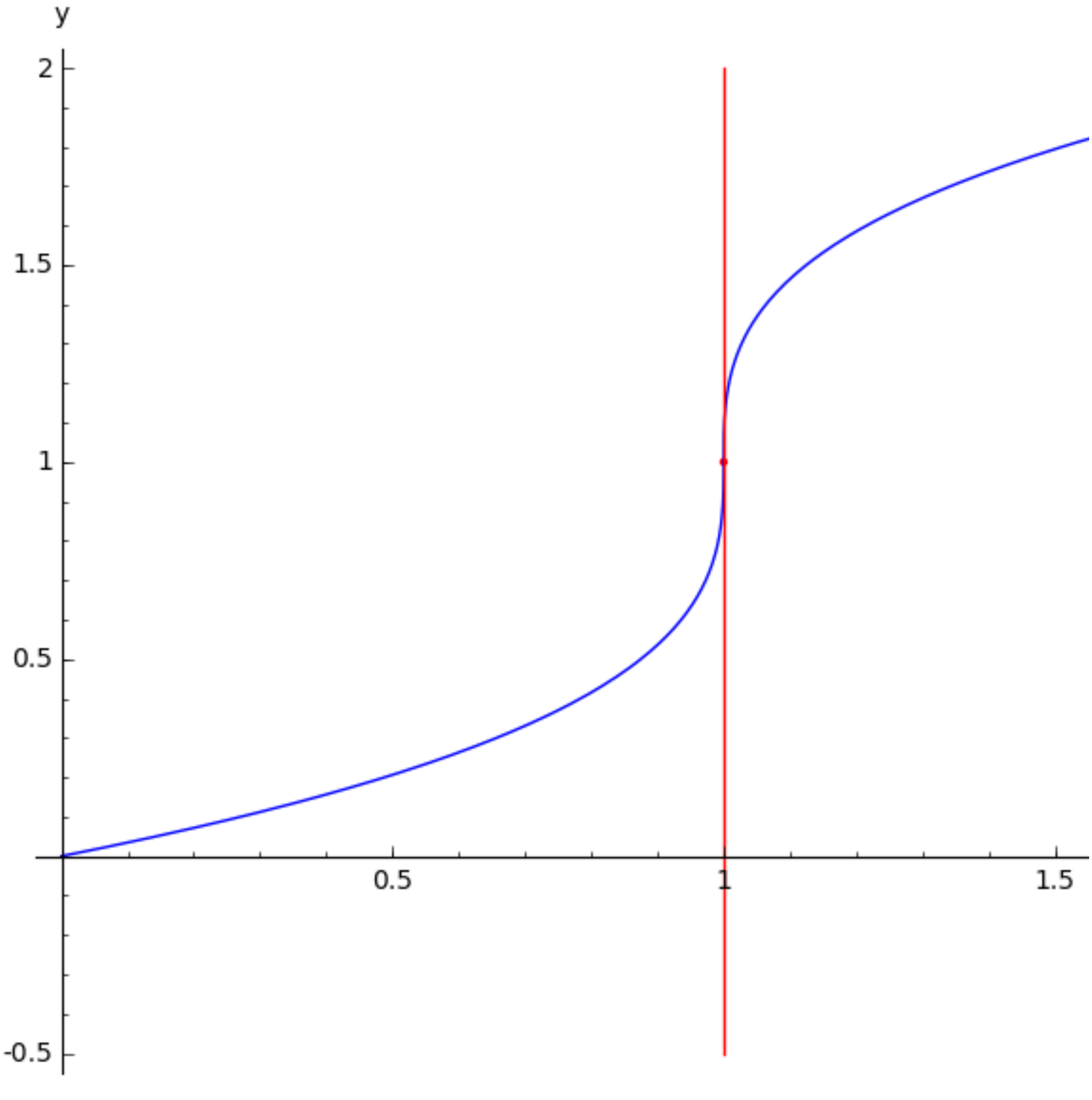
Derivací je skutečně kladné nekonečno, jak vypočetl Sage.

Graf této funkce je na následujícím obrázku.

```
def d(x):
    return (x-1)^(1/3)+1
limit((d(x)-d(1))/(x-1), x=1)
```

```
+Infinity
```

```
(plot(sgn(x-1)*abs((x-1))^(1/3)+1, (x, 0, 2), axes_labels =
['x', 'y']) + line([(1, -0.5),(1, 2)], color = 'red') +
point([1, 1], color = 'red')).show(ymin = -0.5, ymax = 2,
xmin = 0, xmax = 2)
```



Tečna grafu funkce $f(x) = -\mathrm{sgn}(x-1)\cdot|x-1|^{1/2}$ v bodě $a = 1$

Derivací je skutečně záporné nekonečno.

```
def e(x):
    return -sgn(x-1)*sqrt(abs(x-1))
limit((e(x)-e(1))/(x-1), x=1)
```

```
    -Infinity
```

```
(plot(-sgn(x-1)*sqrt(abs(x-1)), (x, 0.6, 1.5), axes_labels =
['x', 'y']) + line([(1, -0.5),(1, 0.5)], color = 'red') +
point([0, 1], color = 'red')).show(ymin = -0.5, ymax = 0.5,
xmin = 0.6, xmax = 1.5)
```