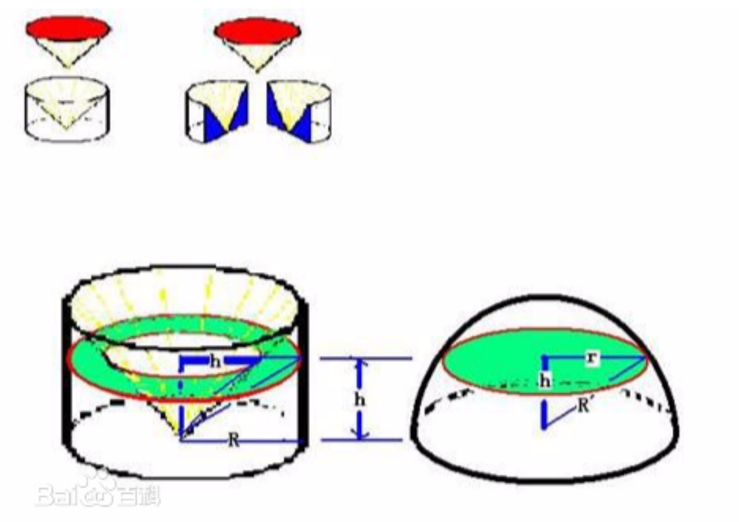
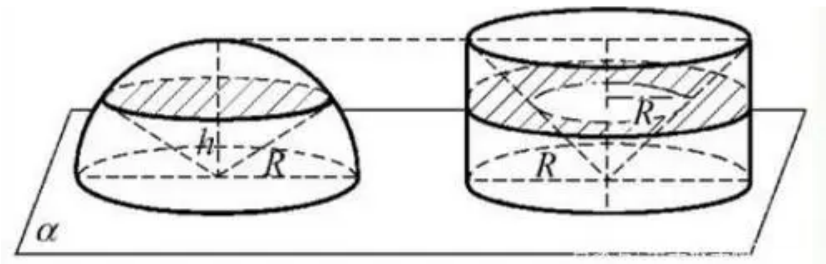
祖暅原理

祖暅原理也称祖氏原理，一个涉及几何求积的著名命题。公元656年，唐代李淳风注《九章算术》时提到祖暅的开立圆术。祖暅在求球体积时，使用一个原理："幂势既同，则积不容异"。"幂"是截面积，"势"是立体的高。意思是两个同高的立体，如在等高处的截面积相等，则体积相等。更详细点说就是，界于两个平行平面之间的两个立体，被任一平行于这两个平面的平面所截，如果两个截面的面积相等，则这两个立体的体积相等。上述原理在中国被称为祖暅原理，国外则一般称之为卡瓦列利原理。



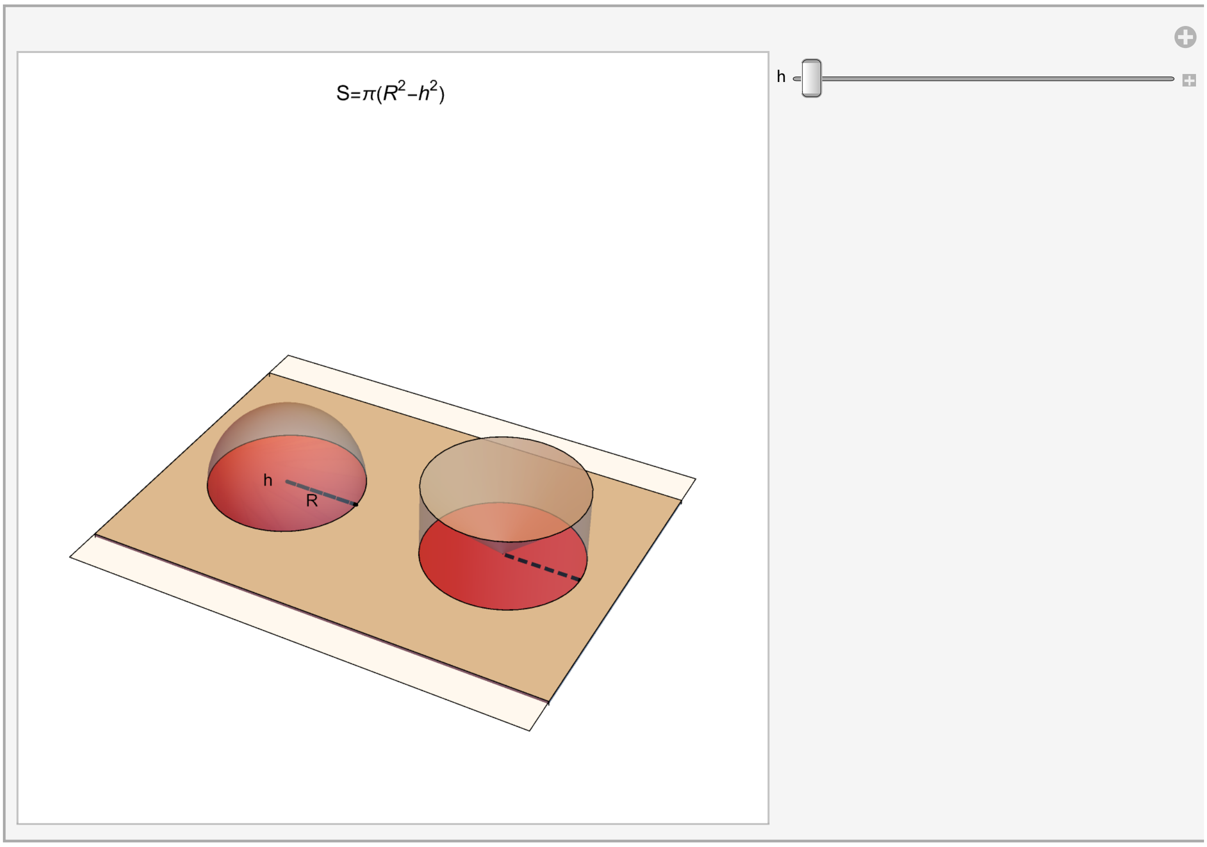


我们来交互式的感受一下

In[ ]:=

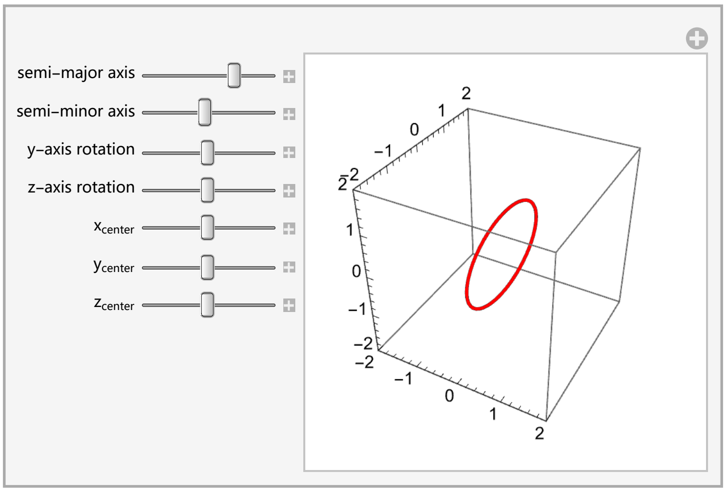
```
With[{ℛ1 = Cuboid[{-1.5, -2, -1}, {4.5, 2, -0.001}],
With循环    长方体
  ℛ2 = Ball[], ℛ3 = Cylinder[{{3, 0, 0}, {3, 0, 1 + 0.0015}}],
       实心球         圆柱体
  ℛ4 = Cone[{{3, 0, 1 + 0.003}, {3, 0, 0}}], ℛ5 = Cylinder[{{0, 0, 0}, {0, 0, 0.0001}}],
       圆锥                                      圆柱体
  R = 1, d = 0.0001, Disk3D = ResourceFunction["Disk3D"]},
                              资源函数
 Manipulate[Graphics3D[{{GrayLevel[0.8], ℛ1, Opacity[0.5], ℛ2, ℛ5, Opacity[0.3],
 交互式操作  三维图形       灰度级                不透明度              不透明度
     ℛ3, Opacity[0.4], ℛ4}, {Opacity[0.7], Red, Disk3D[{0, 0, h}, √(R^2 - h^2)],
         不透明度             不透明度      红色
     Disk3D[{3, 0, h}], Opacity[0.8], White, Disk3D[{3, 0, h + d}, h]},
                        不透明度      白色
    {Opacity[0.2], InfinitePlane[{0, 0, h - d}, {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}}]},
     不透明度      无限大平面
    {Thick, Dashed, Line[{{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, h}, {√(R^2 - h^2), 0, h}, {0, 0, 0}}],
     粗     虚线    线段
     Line[{{4, 0, 0}, {3, 0, 0}, {3, 0, h}, {4, 0, h}}]},
     线段
    {Text["R", {0.5, -0.2, 0}], Text["h", {-0.2, -0.1, h / 2}]}
     文本                       文本
   }, Boxed → False, ImageSize → Medium, PlotRange →
      边界框   假     图像尺寸    中       绘制范围
    {{-1.5, 4.5}, {-2.5, 2.5}, {-0.02, 2}}, PlotLabel → "S=π(R^2-h^2)"], {h, 2 d, 1 - d}
                                            绘图标签
 ]]
```

Out[ ]=



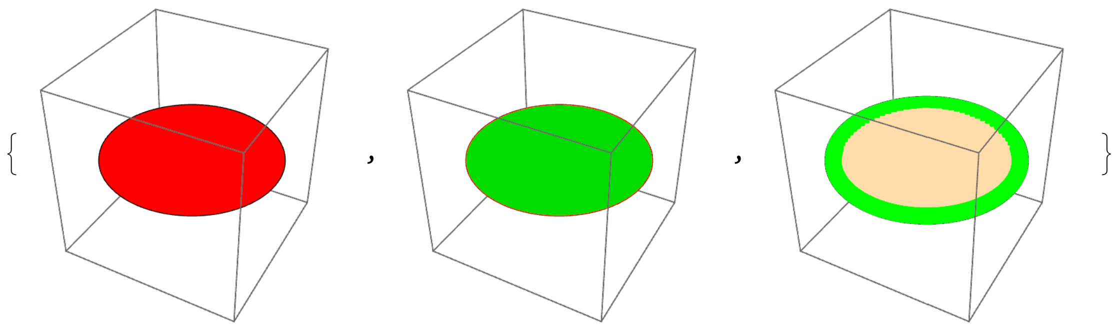
In[ ]:=
```
Manipulate[Graphics3D[
  {Red, Thickness[.01], ResourceFunction["Circle3D"][{x, y, z}, {a, b}, ψ, ξ]},
  Axes → True, PlotRange → 2, ImageSize → Small],
 {{a, 1.5, "semi-major axis"}, .1, 2, ImageSize → Tiny},
 {{b, 1, "semi-minor axis"}, .1, 2, ImageSize → Tiny},
 {{ψ, 0, "y-axis rotation"}, -π, π, ImageSize → Tiny},
 {{ξ, 0, "z-axis rotation"}, -π, π, ImageSize → Tiny},
 {{x, 0, Subscript["x", "center"]}, -1, 1, ImageSize → Tiny},
 {{y, 0, Subscript["y", "center"]}, -1, 1, ImageSize → Tiny},
 {{z, 0, Subscript["z", "center"]}, -1, 1, ImageSize → Tiny}, ControlPlacement → Left]
```
交互式操作 三维图形 红色 粗细 资源函数 坐标轴 真 绘制范围 图像尺寸 小 图像尺寸 微小 下角标 控件位置 左

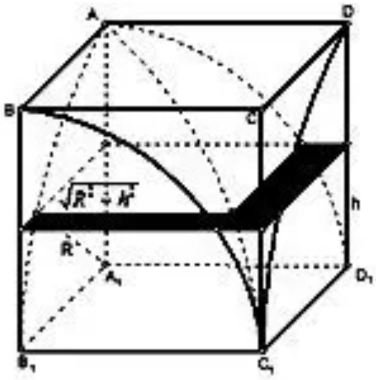
Out[ ]=

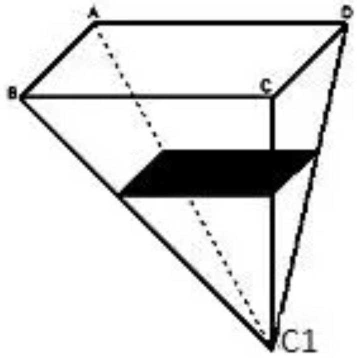


In[ ]:=
```
Table[Graphics3D[{d, ResourceFunction["Disk3D"][]}],
 {d, {FaceForm[Red], Directive[Green, EdgeForm[Red]],
   EdgeForm[Directive[Green, Thickness[.05]]]}}]
```
表格 三维图形 资源函数 表面样式 红色 指令 绿色 边的格式 红色 边的格式 指令 绿色 粗细

Out[ ]=







那么对上图，截面积是多少呢？

显而易见，左边：$a^2-(a^2-h^2)=h^2$。右边：h^2

与祖暅原理的描述相符。