

学习麦克斯韦方程组

从麦克斯韦方程组导出磁场的波动方程.

以自然洛伦兹 - 亥维赛单位输入麦克斯韦方程组.

```
In[*]:= Inactivate[{gaussE = Div[ $\mathcal{E}$ [x, y, z, t], {x, y, z}] ==  $\rho$ [x, y, z, t],
不激活 散度
gaussB = Div[ $\mathcal{B}$ [x, y, z, t], {x, y, z}] == 0,
散度
faraday = Curl[ $\mathcal{E}$ [x, y, z, t], {x, y, z}] == -D[ $\mathcal{B}$ [x, y, z, t], t], ampere =
旋度 偏导
Curl[ $\mathcal{B}$ [x, y, z, t], {x, y, z}] == j[x, y, z, t] + D[ $\mathcal{E}$ [x, y, z, t], t]}, Div | Curl | D];
旋度 偏导 散度 旋度 偏导
```

创建清晰格式的方程组表格.

```
In[*]:= Grid[Transpose[{"Gauss's Law for Electricity",
格子 转置
"Gauss's Law for Magnetism", "Faraday's Law", "Ampere's Law"}, %]],
Alignment -> Left, Dividers -> All, Spacings -> {4, 2}] // TraditionalForm
对齐 左 分隔线 全部 间隔 传统格式
```

Out[*]//TraditionalForm=

Gauss's Law for Electricity	$\nabla_{\{x,y,z\}} \cdot \mathcal{E}(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t)$
Gauss's Law for Magnetism	$\nabla_{\{x,y,z\}} \cdot \mathcal{B}(x, y, z, t) = 0$
Faraday's Law	$\nabla_{\{x,y,z\}} \times \mathcal{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \mathcal{B}(x,y,z,t)}{\partial t}$
Ampere's Law	$\nabla_{\{x,y,z\}} \times \mathcal{B}(x, y, z, t) = \frac{\partial \mathcal{E}(x,y,z,t)}{\partial t} + j(x, y, z, t)$

在真空 (j=0和ρ=0) 状态提取安培定律的旋度.

```
In[*]:= Inactive[Curl][#, {x, y, z}] & /@ ampere /. j -> (0 &)
闲置 旋度
```

```
Out[*]=  $\nabla_{\{x,y,z\}} \times \left( \nabla_{\{x,y,z\}} \times \mathcal{B}[x, y, z, t] \right) == \nabla_{\{x,y,z\}} \times \partial_t \mathcal{E}[x, y, z, t]$ 
```

替换微分顺序.

```
In[*]:= % /. Inactivate[Curl][D[v_, t_], x_] -> D[Curl[v, x], t]
不激活 旋度 偏导 旋度
```

```
Out[*]=  $\nabla_{\{x,y,z\}} \times \left( \nabla_{\{x,y,z\}} \times \mathcal{B}[x, y, z, t] \right) == \partial_t \left( \nabla_{\{x,y,z\}} \times \mathcal{E}[x, y, z, t] \right)$ 
```

代入法拉第定律.

```
In[*]:= % /. Solve[faraday, Inactive[Curl][ $\mathcal{E}$ [x, y, z, t], {x, y, z}]][[1]]
解方程 闲置 旋度
```

```
Out[*]=  $\nabla_{\{x,y,z\}} \times \left( \nabla_{\{x,y,z\}} \times \mathcal{B}[x, y, z, t] \right) == \partial_t \left( -\partial_t \mathcal{B}[x, y, z, t] \right)$ 
```

激活磁场波动方程中的方程结果.

```
In[ ]:= wave = Activate[%]
      | 激活
```

```
Out[ ]:=  $\mathcal{B}^{(0,0,2,0)}[x, y, z, t] + \mathcal{B}^{(0,2,0,0)}[x, y, z, t] + \mathcal{B}^{(2,0,0,0)}[x, y, z, t] == -\mathcal{B}^{(0,0,0,2)}[x, y, z, t]$ 
```

用传统符号表示的方程.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{B}(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{B}(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{B}(x, y, z, t)}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{B}(x, y, z, t)}{\partial t^2}$$

方程的平面波解可以用简单的替代验证.

```
In[ ]:= wave /. B -> (A Exp[{kx, ky, kz} . {#1, #2, #3} - I Sqrt[kx^2 + ky^2 + kz^2] #4] &) // Simplify
      | 指数形式      | 平方根      | 化简
```

```
Out[ ]:= True
```