

# 镂空曲面 - RegionFunction

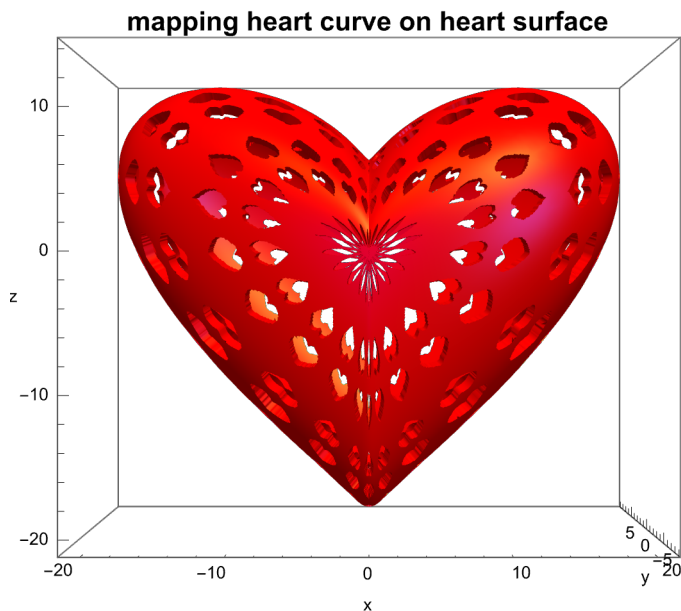
<https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/2142619>

$a = 0.65;$

$\text{expression} = (x^2 + y^2 - a^2)^3 - a x^2 y^3 /. \{x \rightarrow \sin[12 u^2], y \rightarrow \cos[12 v^2]\}$   
正弦 余弦

`In[*]:= ParametricPlot3D[{Sin[v] (15 Sin[u] - 4 Sin[3 u]), 8 Cos[v],  
绘制三维参数图 正弦 正弦 正弦 余弦  
Sin[v] (15 Cos[u] - 5 Cos[2 u] - 2 Cos[3 u] - Cos[2 u])}, {u, - $\pi$ ,  $\pi$ }, {v, 0,  $\pi$ },  
正弦 余弦 余弦 余弦 余弦  
Mesh  $\rightarrow$  None, Boxed  $\rightarrow$  True, Axes  $\rightarrow$  True, PlotStyle  $\rightarrow$  {Red, Specularity[White, 80]},  
网格 无 边界框 真 坐标轴 真 绘图样式 红色 反射度 白色  
MaxRecursion  $\rightarrow$  4, PlotPoints  $\rightarrow$  80, RegionFunction  $\rightarrow$  Function[{x, y, z, u, v},  
最大递归 绘图点 区域函数 纯函数  
-0.75` Cos[12 v]^3 Sin[12 u]^2 + (-0.5625` + Cos[12 v]^2 + Sin[12 u]^2)^3  $\geq$  0},  
PlotTheme  $\rightarrow$  "ThickSurface", ViewPoint  $\rightarrow$  Front, AxesLabel  $\rightarrow$  {"x", "y", "z"},  
绘图主题 视点 前面 坐标轴标签  
PlotLabel  $\rightarrow$  Style["mapping heart curve on heart surface", 14, Bold],  
绘图标签 样式 粗体  
ImageSize  $\rightarrow$  350 {1, 1}]  
图像尺寸`

`Out[*]=`



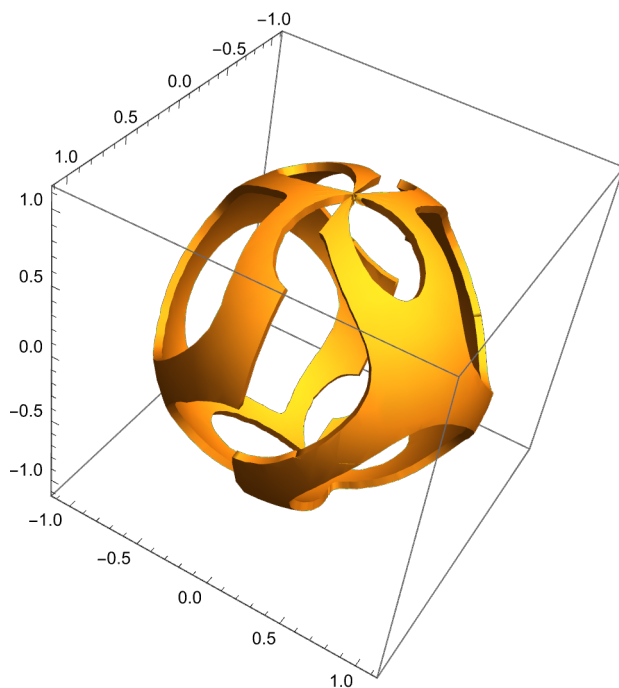
## 其中的思路

```

In[ ]:= ParametricPlot3D[{Cos[u] Cos[v], Sin[u] Cos[v], Sin[v]},
  |绘制三维参数图 |余弦 |余弦 |正弦 |余弦 |正弦
  {u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi}, PlotTheme -> "ThickSurface",
  |圆周率 |... |绘图主题
  RegionFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, -.5 < Cos[3 u] + Sin[3 v] < 0.5]]
  |区域函数 |纯函数 |余弦 |正弦

Out[ ]:=

```



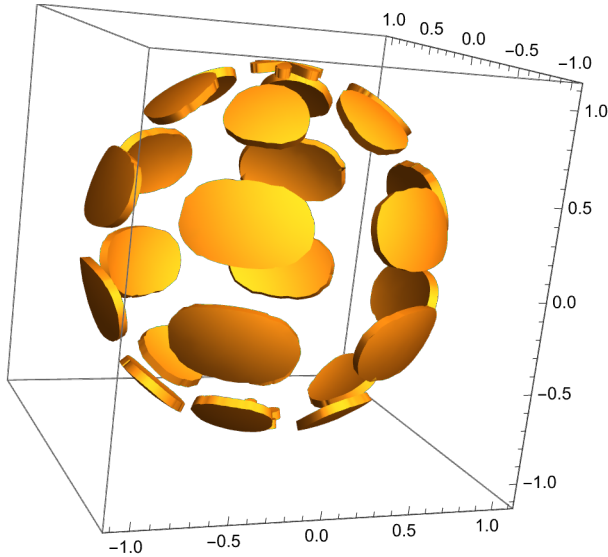
注意下面u的范围

```

In[ ]:= ParametricPlot3D[{Cos[u] Cos[v], Sin[u] Cos[v], Sin[v]},
|绘制三维参数图 |余弦 |余弦 |正弦 |余弦 |正弦
{u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi}, PlotTheme -> "ThickSurface",
|圆周率 |... |绘图主题
RegionFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, Cos[3 u] Sin[5 v] > 0.5], PlotPoints -> 50]
|区域函数 |纯函数 |余弦 |正弦 |绘图点

```

Out[ ]:=



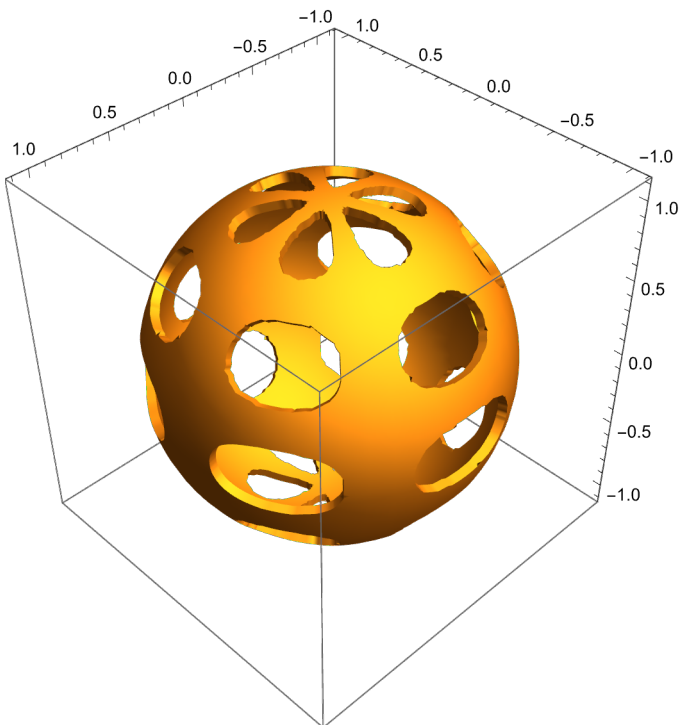
修改参数表达式

```

In[ ]:= ParametricPlot3D[{Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v]},
|绘制三维参数图 |余弦 |正弦 |正弦 |正弦 |余弦
{u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi}, PlotTheme -> "ThickSurface",
|圆周率 |... |绘图主题
RegionFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, -.5 < Cos[3 u] Sin[5 v] < 0.5], PlotPoints -> 50]
|区域函数 |纯函数 |余弦 |正弦 |绘图点

```

Out[ ]:=

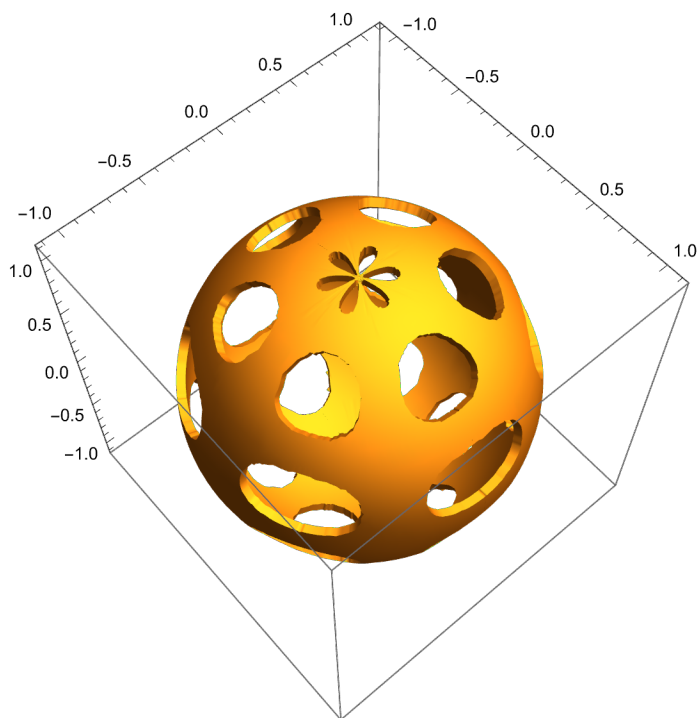


```

In[ ]:= p3d = ParametricPlot3D[{Cos[u] Cos[v], Sin[u] Cos[v], Sin[v]},
  绘制三维参数图 余弦 余弦 正弦 余弦 正弦
  {u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi}, PlotTheme -> "ThickSurface",
  圆周率 绘图主题
  RegionFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, -.5 < Cos[3 u] Sin[5 v] < .5], PlotPoints -> 50]
  区域函数 纯函数 余弦 正弦 绘图点

```

Out[ ]:=

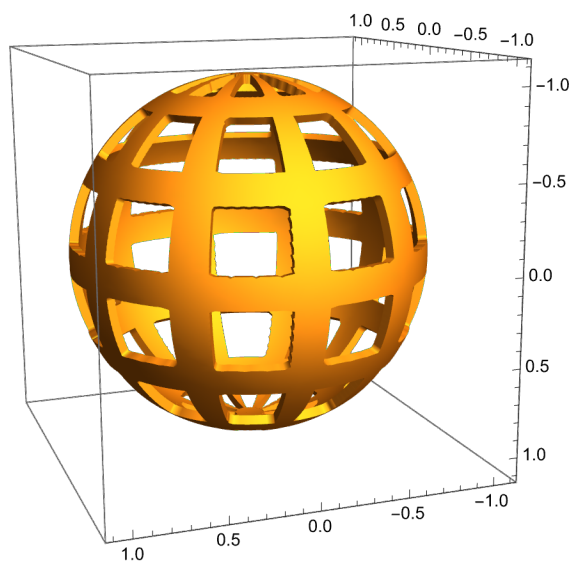


```

In[ ]:= ParametricPlot3D[{Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v]},
  绘制三维参数图 余弦 正弦 正弦 余弦 余弦
  {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi}, PlotTheme -> "ThickSurface", RegionFunction ->
  圆周率 绘图主题 区域函数
  Function[{x, y, z, u, v}, -.5 < Cos[5 u] < .5 || -.5 < Sin[6 v] < .5], PlotPoints -> 50]
  纯函数 余弦 正弦 绘图点

```

Out[ ]:=

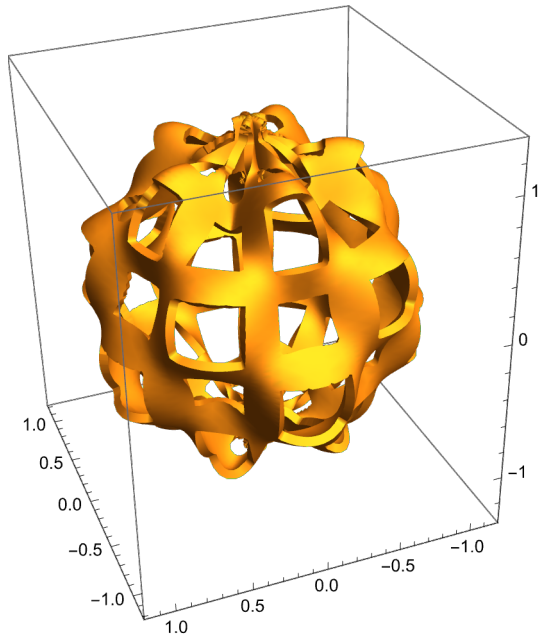


```

In[ ]:= ParametricPlot3D[{Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v]} (1 + 0.2 Cos[5 u] Cos[5 v]),
  绘制三维参数图 余弦 正弦 正弦 正弦 余弦 余弦 余弦
  {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi}, PlotTheme -> "ThickSurface", RegionFunction ->
  圆周率 ... 绘图主题 区域函数
  Function[{x, y, z, u, v}, -.5 < Cos[5 u] < .5 || -.5 < Sin[6 v] < .5], PlotPoints -> 50]
  纯函数 余弦 正弦 绘图点

```

Out[ ]:=

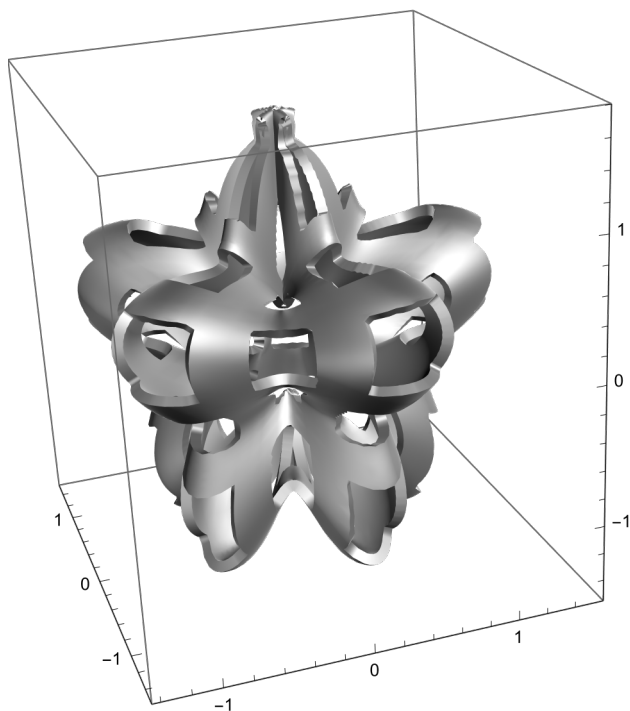


```

In[ ]:= ParametricPlot3D[{Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v]} (1 + 0.3 Cos[5 u] + 0.3 Cos[5 v]),
  绘制三维参数图  余弦  正弦  正弦  正弦  余弦  余弦  余弦
  {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi}, PlotTheme -> "ThickSurface",
  圆周率  绘图主题
  RegionFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, -.5 < Cos[5 u] < .5 || -.5 < Sin[6 v] < .5],
  区域函数  纯函数  余弦  正弦
  PlotPoints -> 50, PlotStyle -> MaterialShading["Silver"], Lighting -> "ThreePoint"]
  绘图点  绘图样式  材质效果图  光照

```

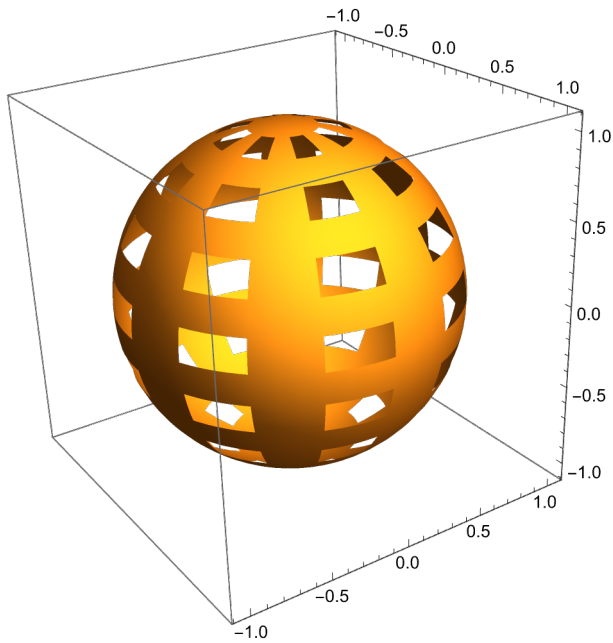
Out[ ]:=



## 使用MeshFunction

```
In[ ]:= ParametricPlot3D[{Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v]}, {u, 0, 2 Pi},
|绘制三维参数图 |余弦 |正弦 |正弦 |正弦 |余弦 |圆周率
|v, 0, Pi}, MeshShading -> {{Automatic, Automatic}, {Automatic, None}},
|... |网格着色 |自动 |自动 |自动 |无
PlotPoints -> 50, PlotStyle -> Thick, MeshStyle -> Transparent]
|绘图点 |绘图样式 |粗 |网格样式 |透明
```

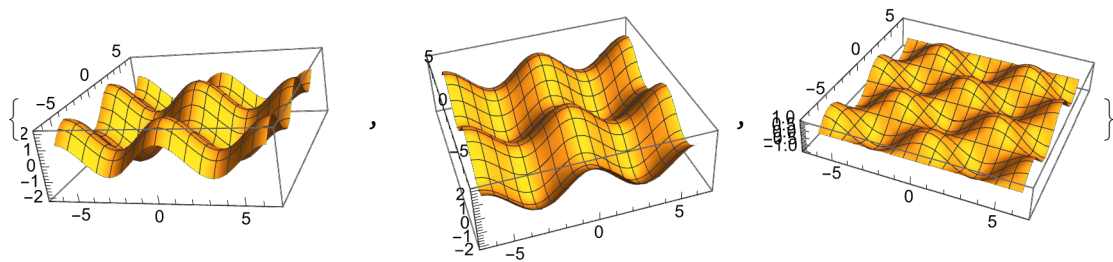
Out[ ]:=



壳

```
In[ ]:= Table[ParametricPlot3D[{x, y, Cos[x] ~op~ Sin[y]}, {x, -2 Pi, 2 Pi}, {y, -2 Pi, 2 Pi}],
|表格 |绘制三维参数图 |余弦 |正弦 |... |圆周率 |... |圆周率
|op, {Plus, Subtract, Times}}]
|加 |减 |乘
```

Out[ ]:=

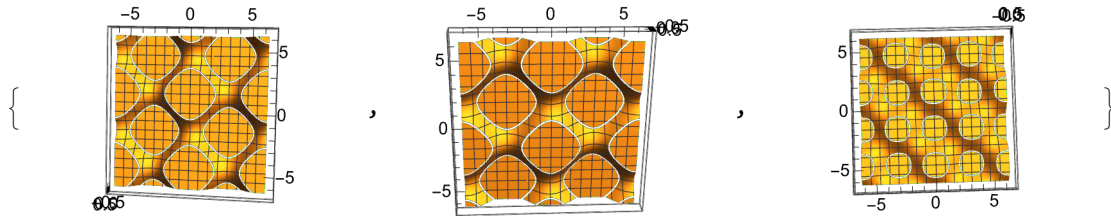


```

In[ ]:= Table[ParametricPlot3D[{x, y, Clip[Cos[x] ~op~ Sin[y], {- .5, .5}]}],
  {x, -2 Pi, 2 Pi}, {y, -2 Pi, 2 Pi}, {op, {Plus, Subtract, Times}}]

```

Out[ ]:=

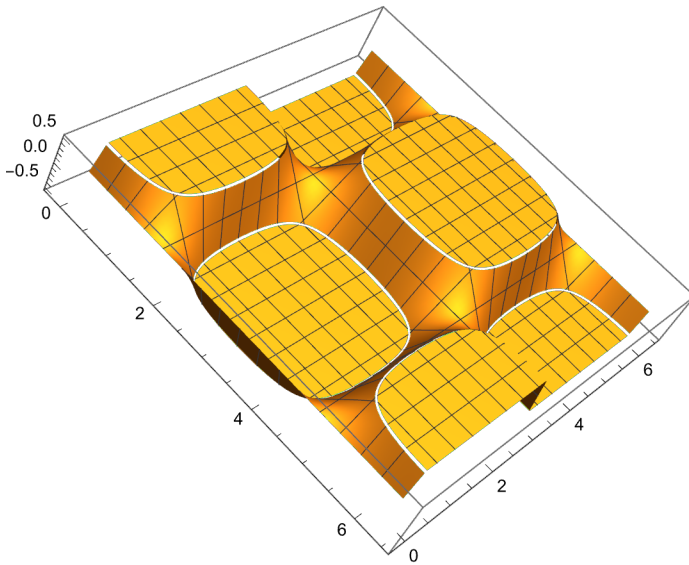


```

In[ ]:= ParametricPlot3D[{x, y, Clip[3 Cos[x] Sin[y], {- .5, .5}]}],
  {x, 0, 2 Pi}, {y, 0, 2 Pi}, PlotPoints -> 90]

```

Out[ ]:=



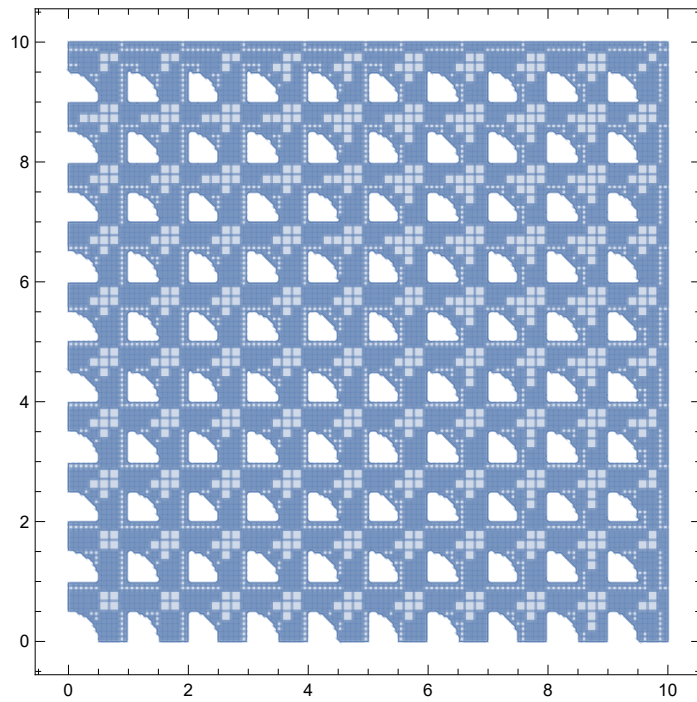


```

In[ ]:= ParametricPlot[{u, v}, {u, 0, 10}, {v, 0, 10}, RegionFunction →
  Function[{x, y, u, v}, Norm[{Floor[u], Floor[v]} - {u, v}] > 0.5], PlotPoints → 60]

```

Out[ ]:=



In[ ]:= **Manipulate**[**ParametricPlot**[{u, v}, {u, 0, 10}, {v, 0, 10},

[交互式操作](#) [绘制参数图](#)

**RegionFunction** → **Function**[{x, y, u, v}, **Norm**[{**Round**[u, a], **Round**[v, a]} - {u, v}] > r],

[区域函数](#)

[纯函数](#)

[模](#)

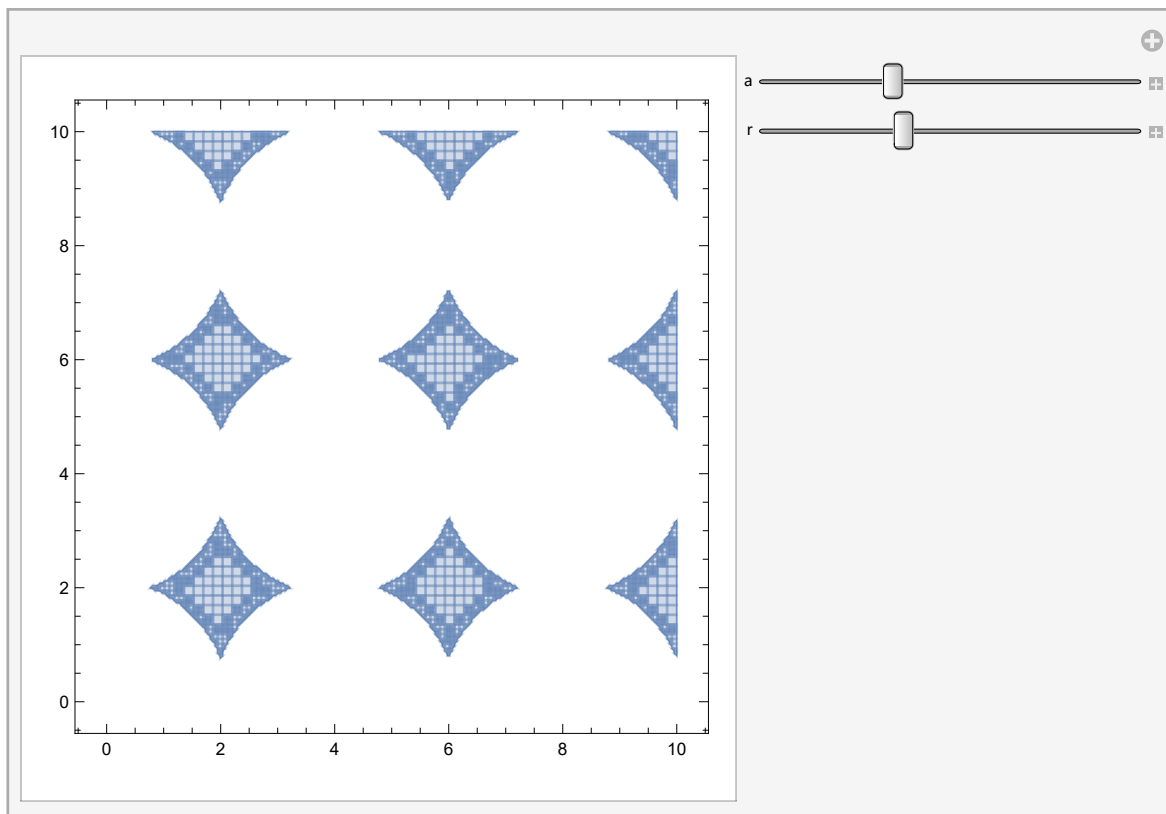
[舍入](#)

[舍入](#)

**PlotPoints** → 60], {a, 1, 10, 1}, {r, 0.5, 5}]

[绘图点](#)

Out[ ]:=



## 我们可以根据仰角来调整小圆的半径

```
In[ ]:= s[u_, v_, r_ : 1] := r {Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v]}
```

[余弦](#) [正弦](#) [正弦](#) [正弦](#) [余弦](#)

```
Manipulate[ParametricPlot3D[s[u, v, r],
```

[交互式操作](#) [绘制三维参数图](#)

```
{u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi}, RegionFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
```

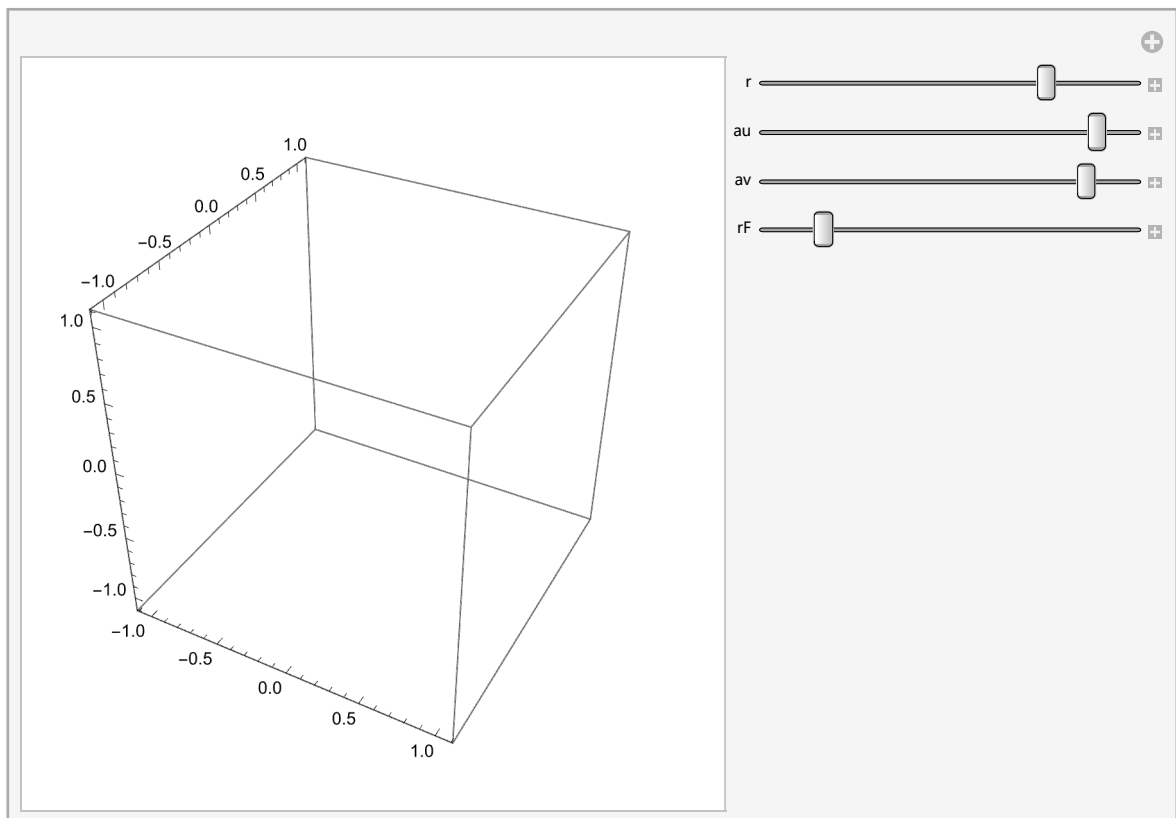
[圆周率](#) [...](#) [区域函数](#) [纯函数](#)

```
Norm[s[Round[u, au], Round[v, av], r] - s[u, v, r]] > rF Sin[v]], PlotPoints -> 60],
```

[模](#) [舍入](#) [舍入](#) [正弦](#) [绘图点](#)

```
{{r, 5}, 1, 10}, {{au, 1}, 3, 0.1, -0.1}, {{av, 1}, 3, 0.1, -0.1}, {{rF, 0.5}, 0.1, 5}]
```

Out[ ]:=

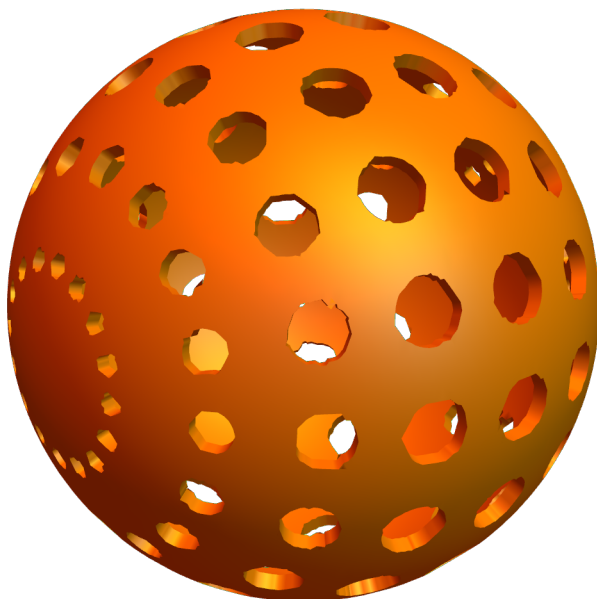


```

In[ ]:= s[u_, v_] := 9 {Sin[u] Sin[v], Cos[u] Sin[v], Cos[v]}
                               |正弦 |正弦 |余弦 |正弦 |余弦
ParametricPlot3D[s[u, v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi}, RegionFunction →
|绘制三维参数图 |圆周率 |... |区域函数
    ({x, y, z, u, v} ↦ Norm[s[Round[u, Pi / 8], Round[v, .35]] - s[u, v]] > Sin[v]),
                               |模 |舍入 |圆周率 |舍入 |正弦
    PlotPoints → 60, PlotTheme → {"ThickSurface", "NoAxes"},
|绘图点 |绘图主题
    PlotStyle → {Orange, Specularity[Pink, 30]}]
|绘图样式 |橙色 |反射度 |粉色

```

Out[ ]:=



如何使得每一层的圆孔数量自动的调整，其半径不变

先来思考一个这样的问题

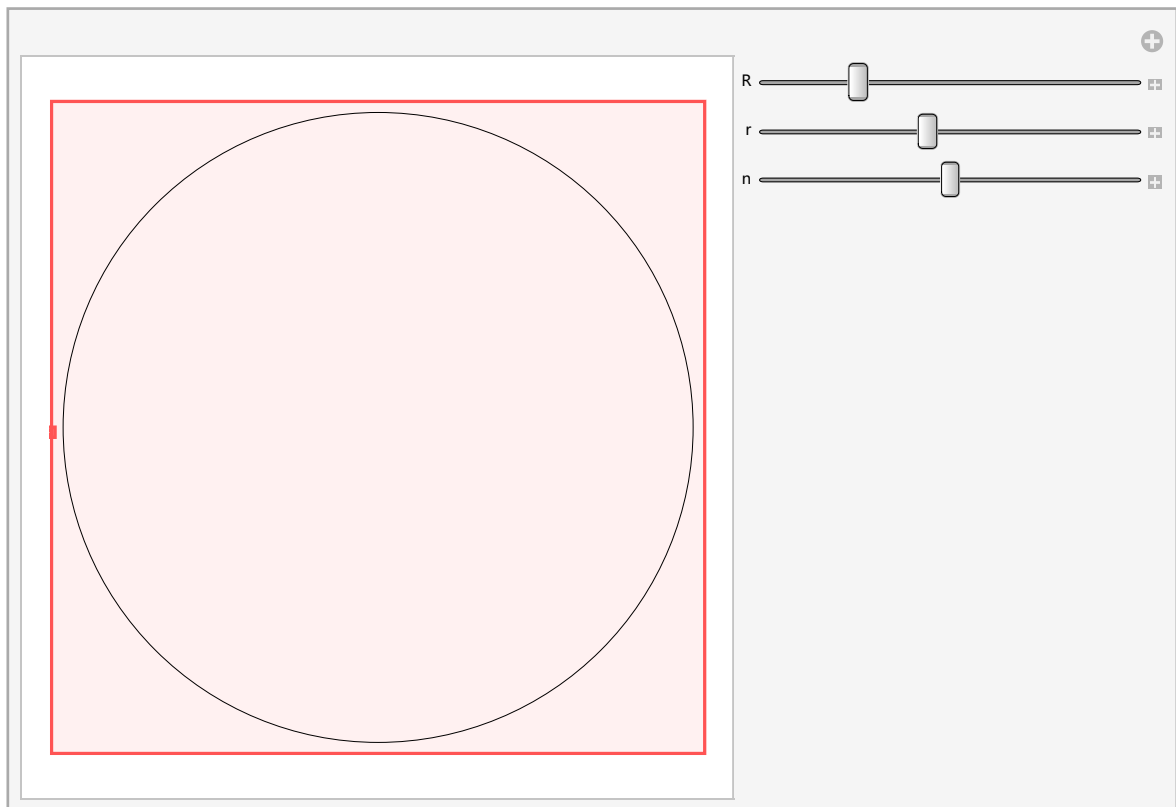
对于给定的圆半径R和弦长的一半r，不会交叉的弦的最大数量n是多少？

```

In[ ]:= pts[R_, r_, n_] := Block[{θ, φ, l}, θ = 2 ArcSin[r/R];
                                [块]          [反正弦]
                                φ = 2 π / n - θ;
                                l = Riffle[Table[θ, n], φ];
                                [交互插入] [表格]
                                (* (RotationMatrix[#].{1,0}&/@Prepend[Accumulate[l],0]) *)
                                [旋转矩阵]          [加在前面] [累加]
                                FoldList[RotationMatrix[#2].#1 &, {1, 0}, l]
                                [折叠列表] [旋转矩阵]
Manipulate[p = pts[R, r, n];
            [交互式操作]
            Graphics[{Circle[], Thick, Orange, Line[Partition[p, 2]], Magenta,
            [图形] [圆] [粗] [橙色] [线段] [划分] [品红色]
            PointSize[Large], Point@p}], {{R, 1}, r, 5}, {{r, .5}, .1, R}, {{n, 3}, 2, 10, 1}]
            [点的大小] [大] [点]

```

Out[ ]:=



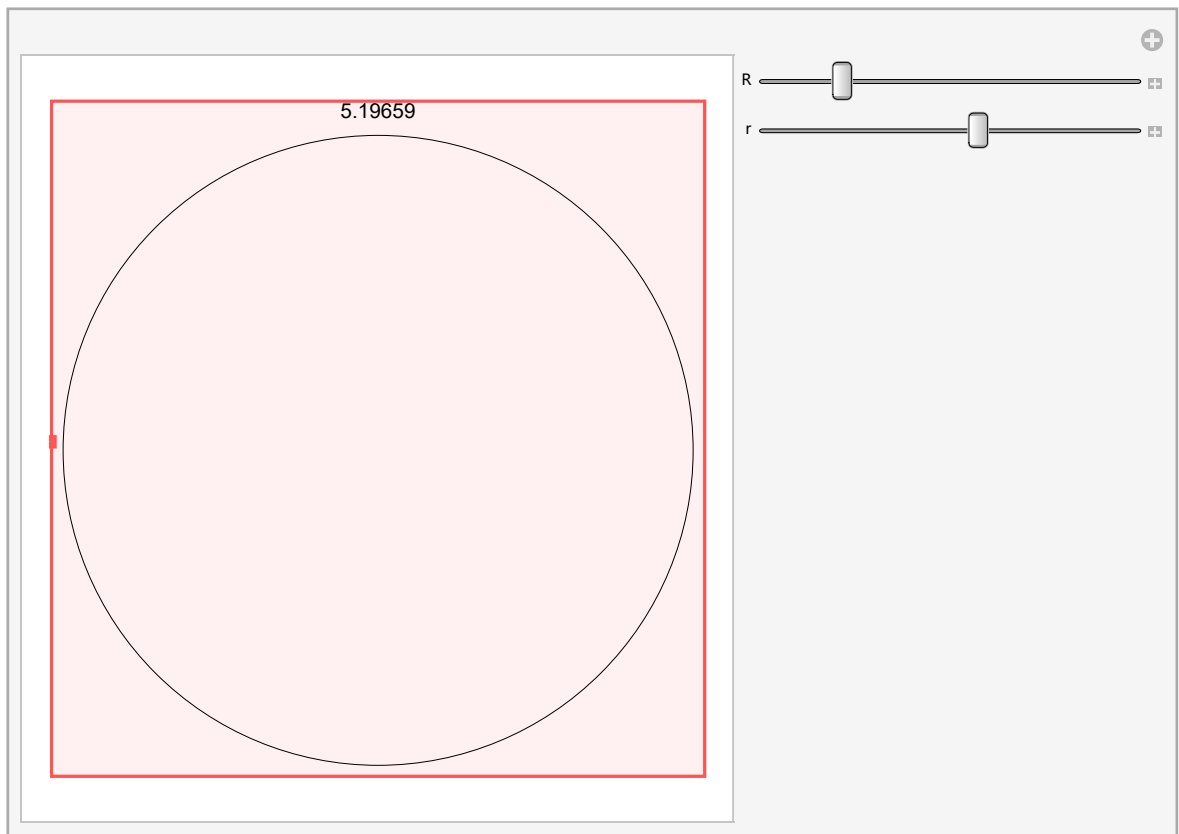
我在纸上推导出他们的关系应为  $n = \text{Floor}[R\pi/r]$

```

In[ ]:= DynamicModule[{p}, Manipulate[p = pts[R, r, Floor[R  $\frac{\pi}{r}$ ]];
    Graphics[{Circle[], Thick, Orange, Line[Partition[p, 2]], Magenta,
    PointSize[Large], Point@p}, PlotLabel  $\rightarrow R \frac{\pi}{r}$ , {{R, 1}, r, 5}, {{r, .5}, .1, R}]]

```

Out[ ]:=



看来还不够理想，那么问题出现在哪里呢？

根据逻辑关系列出如下不等式

$$2rn < 2R\pi < 2r(n+1)$$

$$\text{可得出 } \frac{R\pi}{r} - 1 < n < \frac{R\pi}{r}$$

因为n是整数，所以得出  $n = \text{Floor}[\frac{R\pi}{r}]$

但存在这样一种情况，弦刚刚发生交叉，而弦长之和并未超过圆的周长

一种正确的思路

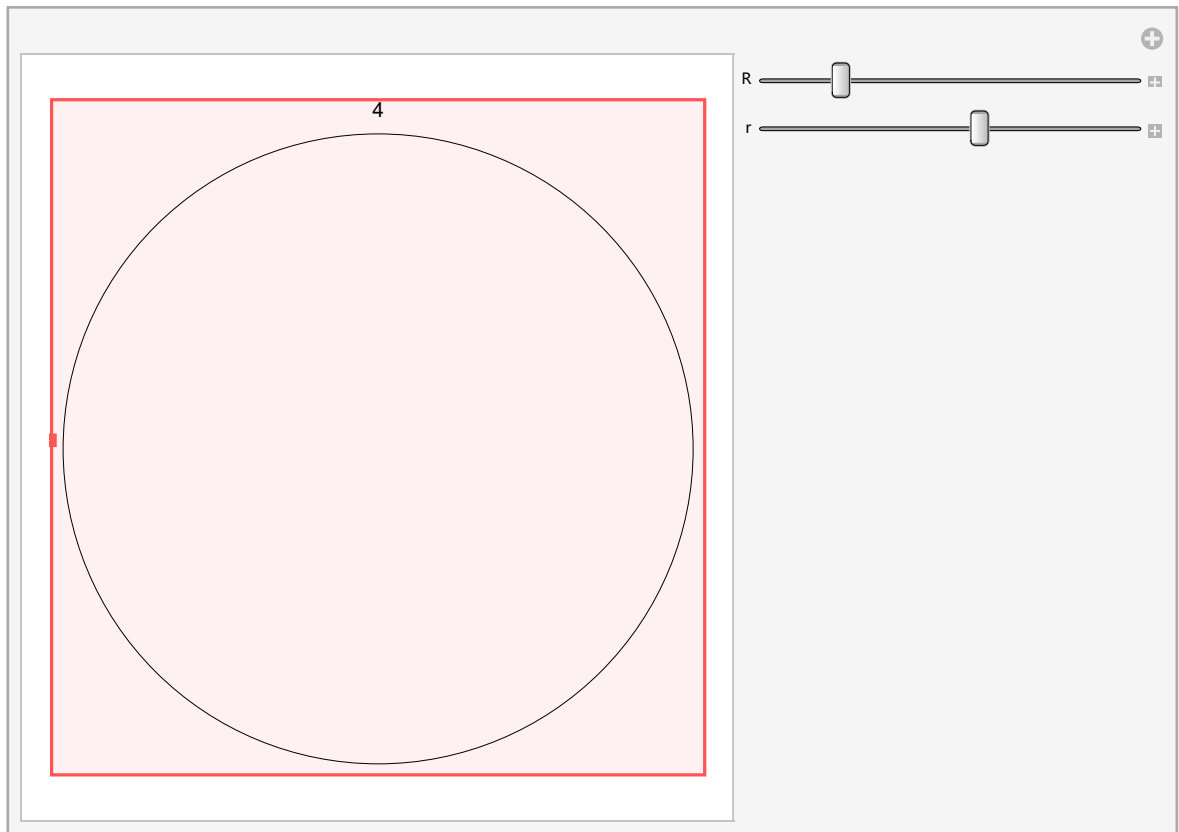
$$n = \text{Floor}\left[\frac{\pi}{\text{ArcSin}\left[\frac{r}{R}\right]}\right]$$

```

In[ ]:= DynamicModule[{p, n}, Manipulate[n = Floor[ $\frac{\pi}{\text{ArcSin}[\frac{r}{R}]}$ ];
  p = pts[R, r, n];
  Graphics[{Circle[], Thick, Orange, Line[Partition[p, 2]], Magenta,
    PointSize[Large], Point@p}, PlotLabel -> n], {{R, 1}, r, 5}, {{r, .5}, .1, R}]]

```

Out[ ]:=



现在，我们可以继续在球面上挖洞了

暂时让小孔的半径为1

```

In[ ]:= s[u_, v_] := 9 {Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v]}
           [余弦] [正弦] [正弦] [正弦] [余弦]
ParametricPlot3D[s[u, v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi}, RegionFunction ->
  [绘制三维参数图] [圆周率] [椭圆函数]
    ( {x, y, z, u, v} -> Norm[s[Round[u, 4 Pi / Floor[Pi / ArcSin[1 / (9 Sin[v] + 0.001)]]],
           [模] [舍入] [向下取整] [反正弦]
          Round[v, .35] - s[u, v]] > Sin[v] ), PlotPoints -> 60,
           [舍入] [正弦] [绘图点]
    PlotTheme -> {"NoAxes"}, PlotStyle -> {Orange, Specularity[Pink, 30]} ]
           [绘图主题] [绘图样式] [橙色] [反射度] [粉色]

... Power: 碰到无穷表达式 1/0.
... Power: 碰到无穷表达式 1/0.
... Power: 碰到无穷表达式 1/0.
... General: 在本次计算中, Power::infty 的进一步输出将被抑制.

```

Out[ ]:=

