

# 管状曲面

参考

<https://mathworld.wolfram.com/Tube.html>

曲线路径

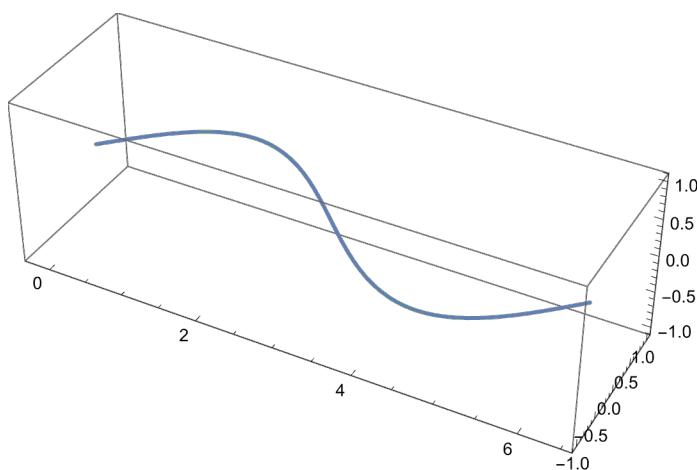
```
In[ ]:= f[x_] := {x, Sin[x], 0};
```

[正弦](#)

```
ParametricPlot3D[f[x], {x, 0, 2 π}]
```

[绘制三维参数图](#)

Out[ ]:=



计算曲线上某点的切线，法线，副法线

```
In[ ]:= fss[t_] = FrenetSerretSystem[f[t], t] // Simplify
```

[弗莱纳系统](#)

[化简](#)

```
tnb[t_] := fss[t][[-1]];
```

Out[ ]:=

$$\left\{ \left\{ \frac{\text{Abs}[\text{Sin}[t]]}{(1 + \text{Cos}[t]^2)^{3/2}}, 0 \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Cos}[t]^2}}, \frac{\text{Cos}[t]}{\sqrt{1 + \text{Cos}[t]^2}}, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\text{Cos}[t] \text{Sin}[t]}{\text{Abs}[\text{Sin}[t]] \sqrt{1 + \text{Cos}[t]^2}}, -\frac{\text{Sin}[t]}{\text{Abs}[\text{Sin}[t]] \sqrt{1 + \text{Cos}[t]^2}}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, -\frac{\text{Sin}[t]}{\text{Abs}[\text{Sin}[t]]} \right\} \right\}$$

```
In[ ]:= Manipulate[fss[t] // N // Column, {t, 0.1, 2 π}, SaveDefinitions -> True]
```

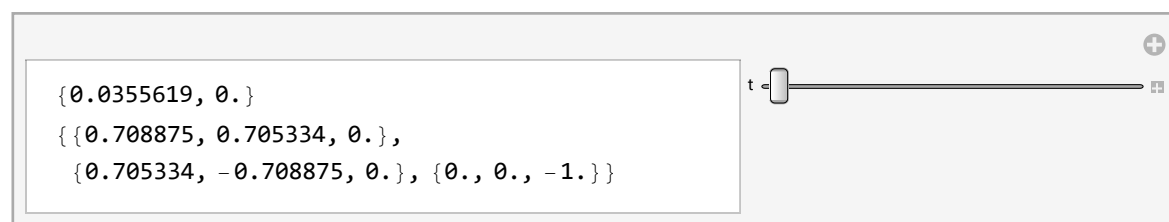
[交互式操作](#)

[...](#) [列](#)

[保存定义](#)

[真](#)

Out[ ]:=



基于法线和副法线确定的平面画圆

管状曲面方程可表示为：

$$S(t, \theta) = \gamma(t) + r[-\hat{\mathbf{N}}(t) \cos \theta + \hat{\mathbf{B}}(t) \sin \theta],$$

$\hat{\mathbf{N}}$ 表示法向量

$\hat{\mathbf{B}}$ 表示副法向量

```
In[*]:= p[t_, r_] := ParametricPlot3D[
    {f[x], f[t] + r {-Cos[x], Sin[x]}. (tnb[t] [[2 ;;]]), {x, 0, 2 π}, PlotRange → All];
    {余弦 正弦 绘制范围 全部}

g[t_, r_] := Graphics3D[Join[{Thick},
    {Purple, Magenta, Pink} ~Riffle~ (Arrow[{f[t], f[t] + r #} & /@ tnb[t] )]];
    {三维图形 连接 粗 紫色 品红色 粉色 交互插入 箭头}

Manipulate[Show[p[t, r], g[t, r]], {{t, 2, "位置"}, 0, 2 π},
    {r, 0.5, "半径"}, 0.1, 1.5}, SaveDefinitions → True]
    {交互式操作 显示 保存定义 真}
```

Out[\*]=



```
In[*]:= p[t_, r_] := ParametricPlot3D[
    {f[x], f[t] + r {-Cos[x], Sin[x]}. (tnb[t] [[2 ;;]]), {x, 0, 4 π}, PlotRange → All];
    {余弦 正弦 绘制范围 全部}

Manipulate[Show[p[t, r], ParametricPlot3D[
    f[u] + r {Cos[v], Sin[v]}. (tnb[u] [[2 ;;]]), {u, 0, t}, {v, 0, 2 π}, PlotPoints → 30}],
    {余弦 正弦 绘图点}

    {{t, 2, "位置"}, 0, 4 π}, {{r, 0.5, "半径"}, 0.1, 1.5}, SaveDefinitions → True]
    {交互式操作 显示 绘制三维参数图 保存定义 真}
```

Out[\*]=



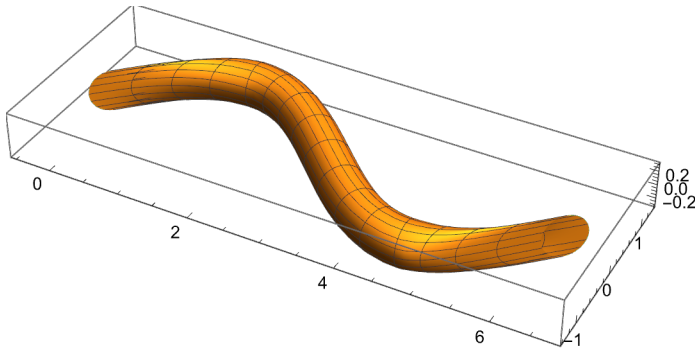
例如当 $t = \pi$ 时，曲率为零，法向量计算出错，且法向量的方向会突变，导致绘制存在问题

## 如何解决

### 1. 排除曲率为0的点，不理想

```
In[ ]:= ParametricPlot3D[f[u] + 0.3 {Cos[v], Sin[v]}.Abs@(tnb[u] [[2 ;;]]),
|绘制三维参数图 |余弦 |正弦 |绝对值
|u, 0, 2 π}, {v, 0, 2 π}, PlotPoints → 30, Exclusions → None]
|绘图点 |排除 |无
```

Out[ ]:=



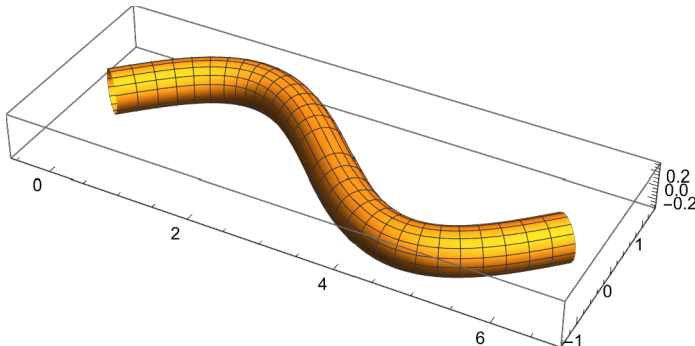
### 2. 分段，不理想

```
In[ ]:= p1 = ParametricPlot3D[f[u] + 0.3 {Cos[v], Sin[v]}.(tnb[u] [[2 ;;]]),
|绘制三维参数图 |余弦 |正弦
|u, 0, π}, {v, 0, 2 π}, PlotPoints → 30];
|绘图点

p2 = ParametricPlot3D[f[u] + 0.3 {Cos[v], Sin[v]}.(tnb[u] [[2 ;;]]),
|绘制三维参数图 |余弦 |正弦
|u, π, 2 π}, {v, 0, 2 π}, PlotPoints → 30];
|绘图点

Show[p1, p2, PlotRange → All]
|显示 |绘制范围 |全部
```

Out[ ]:=



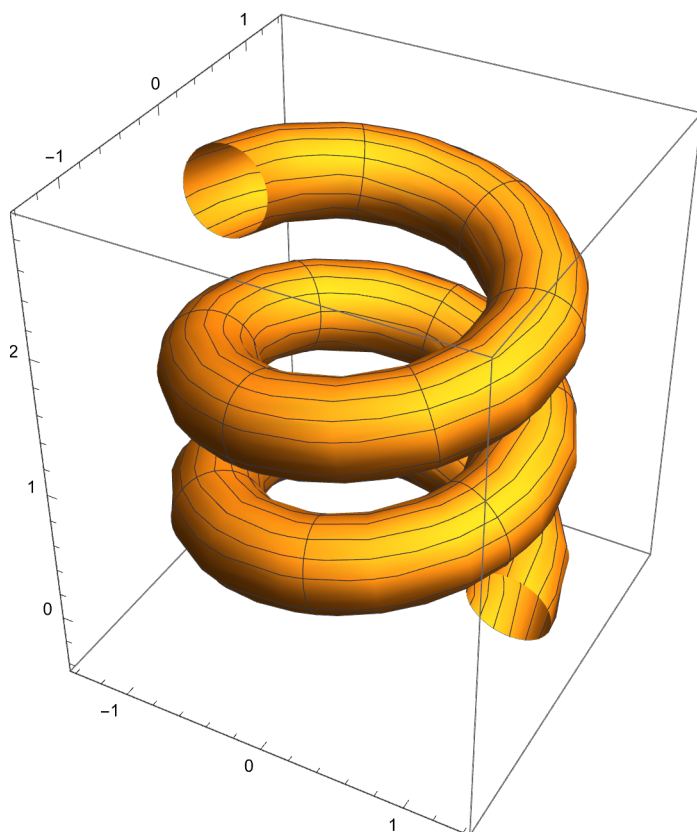
## 将其包装为函数

```

In[ ]:= drawTube[f_, r_, u_, v_, op_ : (PlotPoints → 10)] :=
    Block[{nb = FrenetSerretSystem[f, u[[1]]][[-1, 2 ;;]],
    ParametricPlot3D[f + r {-Cos[v[[1]]], Sin[v[[1]]} . nb, u, v, op]]
drawTube[{Cos[t], Sin[t],  $\frac{t}{2\pi}$ }, 0.3, {t, 0, 5\pi}, {v, 0, 2\pi}]

```

Out[ ]:=

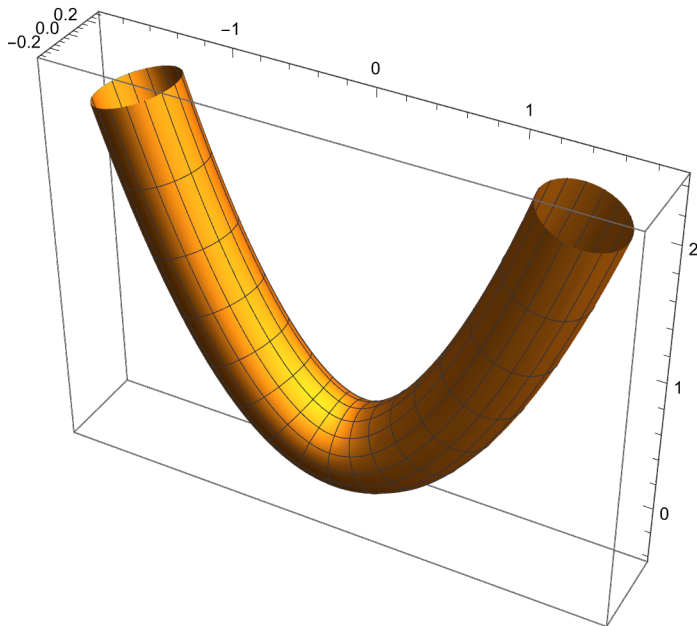


In[ ]:=

```
◎ drawTube[{t, 0, t^2}, 0.3, {t, -1.5, 1.5}, {v, 0,  $\frac{6\pi}{3}$ }, PlotPoints -> 50]
```

[绘图点](#)

Out[ ]:=

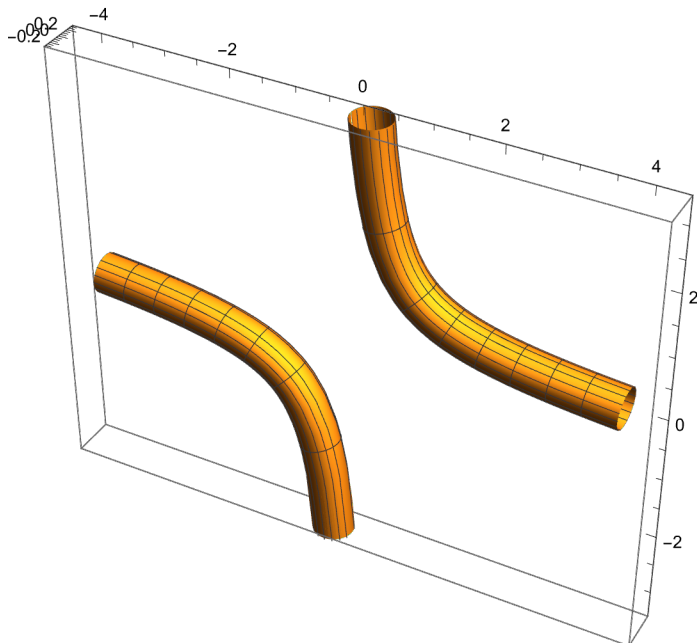


In[ ]:=

```
◎ drawTube[{t, 0, t^-1}, 0.3, {t, -4, 4}, {v, 0,  $\frac{6\pi}{3}$ }, PlotPoints -> 50]
```

[绘图点](#)

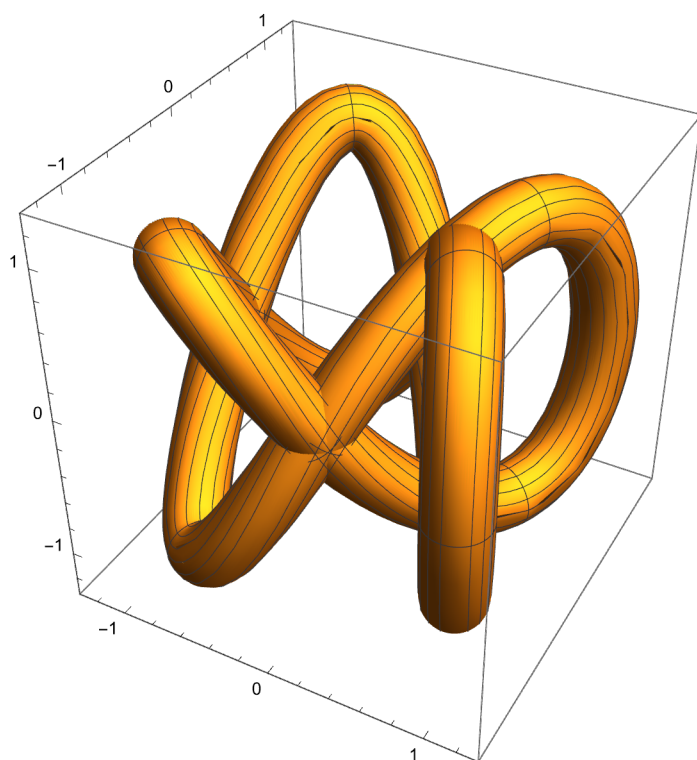
Out[ ]:=



In[ ]:=

```
◎ drawTube[| Cos[2 t], Cos[3 t], Sin[4 t] |, 0.2, {t, 0, 2 π}, {v, 0,  $\frac{6 \pi}{3}$ }, PlotPoints → 50]
```

Out[ ]:=



## 扭结的管

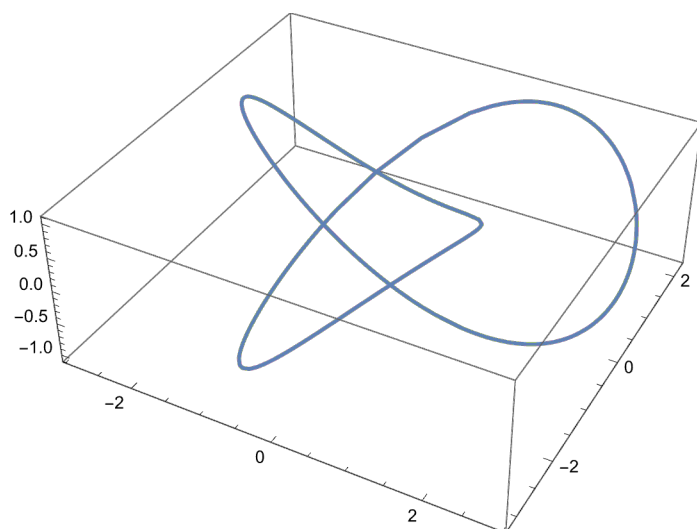
In[ ]:= KnotData["Trefoil", "SpaceCurve"][t]  
| 纽结数据

Out[ ]:=

```
{Sin[t] + 2 Sin[2 t], Cos[t] - 2 Cos[2 t], -Sin[3 t]}
```

In[ ]:= ParametricPlot3D[{Sin[t] + 2 Sin[2 t], Cos[t] - 2 Cos[2 t], -Sin[3 t]}, {t, 0, 2 π}]  
| 绘制三维参数图 | 正弦 | 正弦 | 余弦 | 余弦 | 正弦

Out[ ]:=



```

In[ ]:= drawTube[ {Sin[t] + 2 Sin[2 t], Cos[t] - 2 Cos[2 t], -Sin[3 t]},
                  |正弦      |正弦      |余弦      |余弦      |正弦
                  0.5, {t, 0, 2 π}, {v, 0,  $\frac{6\pi}{3}$ }, PlotPoints -> 50]
                  |绘图点

```

Out[ ]:=

