DFT学习 - 从信号采样出发

信号采样

假设有某段时间的有k个周期的sin信号的n个采样点
先来写个这样的函数

In[ ]:=
```
signData[k_, n_, φ_ : 0] := Table[Sin[k 2 π (t - 1) / n + φ], {t, n}]
                            表格   正弦
signData2[k_, n_, φ_ : 0] := Sin[k 2 π # / n + φ] & /@ Range[0, n - 1]
                             正弦                       范围
signData3[k_, n_, φ_ : 0] := Sin /@ (k Subdivide[2 π, n][[ ;; n]] + φ)
                             正弦       等分划分
signData33[k_, n_, φ_ : 0] := Sin /@ (k Subdivide[2 π, n][[ ;; -2]] + φ)
                              正弦       等分划分
```

上面的表达式都是等价的

In[ ]:=
```
Grid@Table[sd[2, 10, π / 3], {sd, {signData, signData2, signData3, signData33}}]
格子  表格
```

Out[ ]=

$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{15}\right]$	$-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{15}\right]$	$-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{15}\right]$	$-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{15}\right]$	$-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{15}\right]$	$-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{15}\right]$	$-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{15}\right]$	$-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{15}\right]$	$-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{30}\right]$	$-\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]$

再结合上一步写个绘制采样信号的函数

In[ ]:=
```
sg[k_, n_, φ_ : 0] := Block[{sd, pts, lines}, sd = Table[Sin[k 2 π (r - 1) / n + φ], {r, n}];
                      块                          表格   正弦
   (*pts=Table[{r-1,sd[[r]]},{r,n}];*)
         表格
  lines = Chop@Table[{{r - 1, 0}, {r - 1, sd[[r]]}}, {r, n}];
          近…   表格
  Graphics[{{Line@lines},
  图形       线段
     {Magenta, PointSize[Medium], Point@lines[[All, 2]] (*pts*)}}, Axes → True,
      品红色    点的大小   中       点           全部                 坐标轴  真
   AxesOrigin → {0, 0}, AspectRatio → 0.5, PlotLabel → StringForm["k=``, φ=``", k, φ],
   坐标轴原点             宽高比               绘图标签        字符串形式
   GridLines → Automatic, GridLinesStyle → Directive[Orange, Dotted]]]
   网格线       自动         网格线样式          指令       橙色     点线
```

```
sg1[k_, n_, φ_ : 0] := DiscretePlot[Chop@Evaluate@Sin[2 π k x / n + φ], {x, 0, n - 1},
                       离散图           近…   计算          正弦
  PlotLabel → StringForm["k=``, φ=``", k, φ], PlotStyle → Directive[Magenta],
  绘图标签      字符串形式                          绘图样式      指令          品红色
  GridLines → Automatic, GridLinesStyle → Directive[Orange, Dotted]]
  网格线        自动          网格线样式          指令        橙色     点线
```

交互式观察不同周期和采样对应的图形

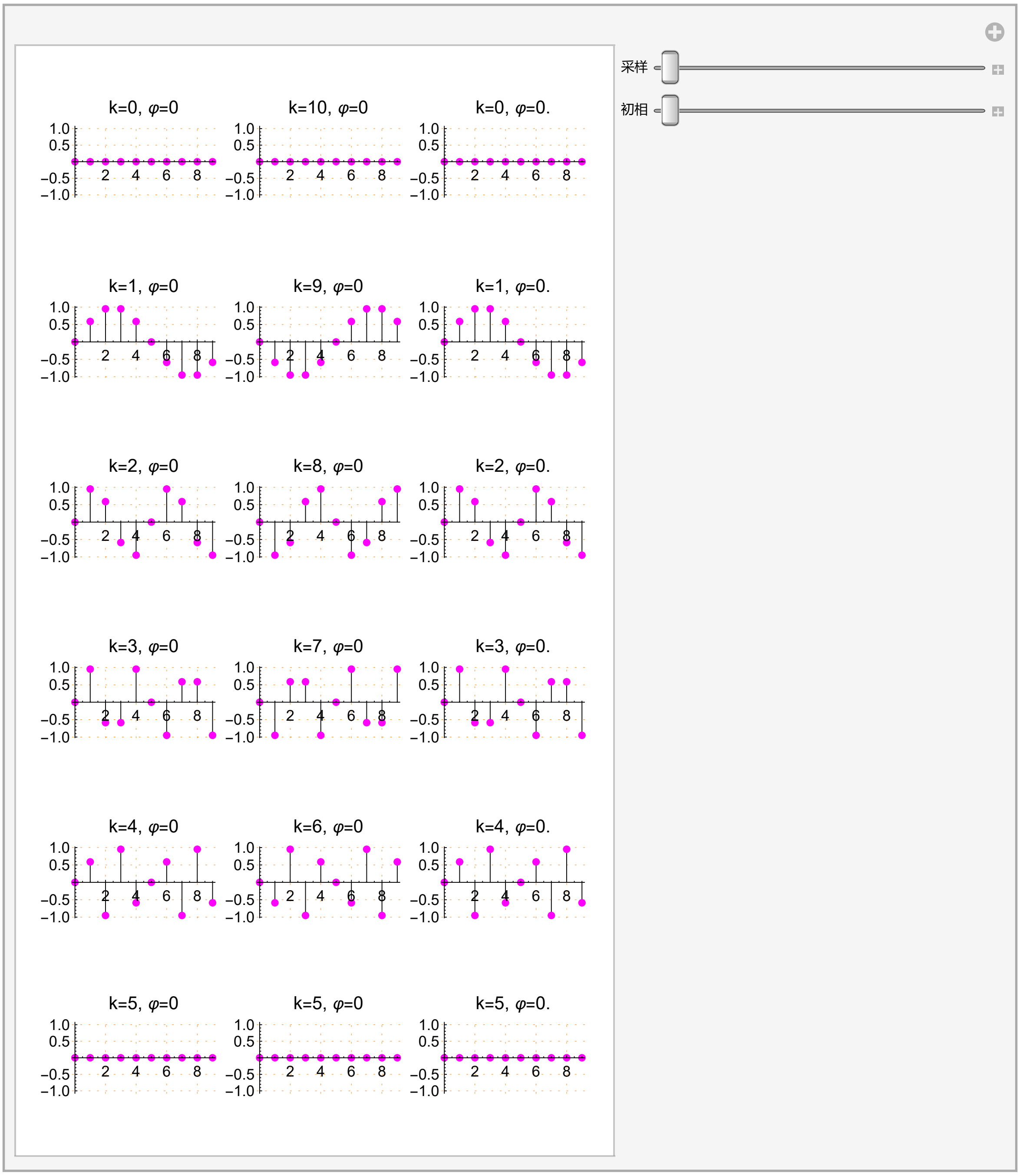
In[ ]:=
```
Manipulate[sg[k, n, φ], {{k, 2, "周期"}, 0, n, 1},
交互式操作
 {{n, 20, "采样"}, Max[k, 10], 50, 1}, {{φ, 0, "初相"}, 0, 2 π}]
                   最大值
```

Out[ ]=

对照观察各频率采样，Floor[n/2]等价于Ceiling[(n-1)/2]

In[ ]:=
```
Manipulate[Grid@Table[{sg[k, n], sg[n - k, n], sg[k, n, ϕ]}, {k, 0, Floor[n / 2]}],
 {{n, 10, "采样"}, 10, 20, 1}, {{ϕ, 0, "初相"}, 0, 2 π}, SaveDefinitions → True]
```
交互式操作 格子 表格 向下取整 保存定义 真

Out[ ]=



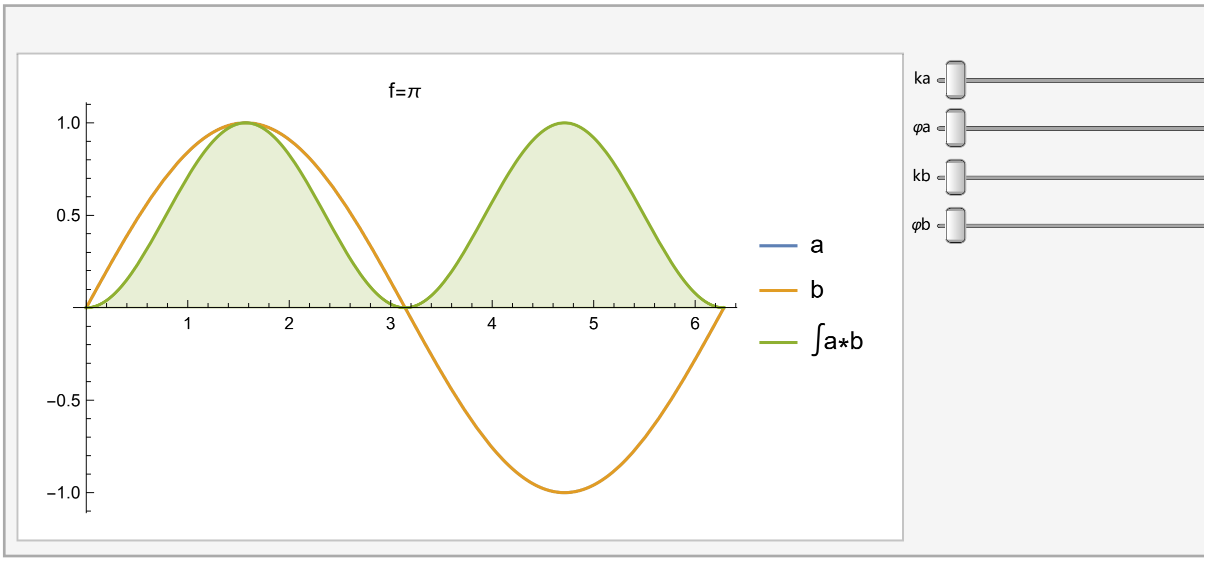
貌似具有某些对称性，比如周期为k和n-k的信号采样关于x轴对称，周期为k和周期也为k但初相为π的信号采样关于x轴对称。

其反应出一个现象，较高频率的采样和对应的较低频率移相π的采样是一样的，
也可以理解成：-sin(x)=sin(x±π)

信号相关性

In[ ]:=
```
Manipulate[Plot[{Sin[ka x + φa], Sin[kb x + φb], Sin[ka x + φa] Sin[kb x + φb]}, {x, 0, 2 π},
   Filling → {3 → Axis}, PlotLegends → {"a", "b", "∫a∗b"},
   PlotLabel →
    StringForm["f=``", Chop@Integrate[Sin[ka x + φa] Sin[kb x + φb], {x, 0, 2 π}]]],
  {ka, 1, 10, 1}, {φa, 0, 2 π}, {kb, 1, 10, 1}, {φb, 0, 2 π}]
```
交互式操作 绘图 正弦 正弦 正弦 正弦 填补 轴 绘图的图例 绘图标签 字符串形式 近··· 积分 正弦 正弦

Out[ ]=



离散傅里叶变换

内置函数Fourier：长度为 n 的一个列表 u_r 的离散傅里叶变换 v_s 在默认情况下定义为 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{r=1}^{n} u_r\, e^{2\pi i (r-1)(s-1)/n}$

粗浅解释：离散傅里叶变换就是分别用周期数为0，1，2，3，…，n-2，n-1的基信号与原信号对比，计算方式为对应离散值相乘再相加，得到与该频率的相关性
但也要注意，后半部分有较高周期数的基信号应当理解为带有相位π的低

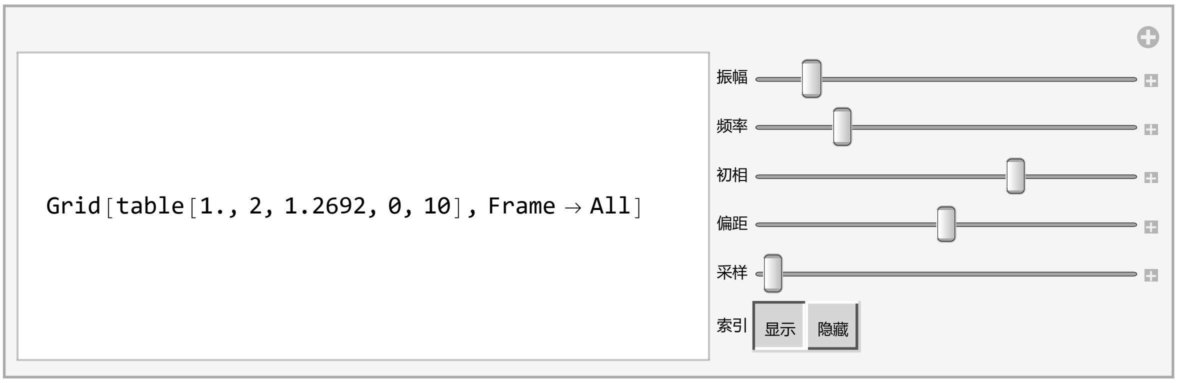
频信号
这里我们并不关心时间，可以将周期数理解为频率

交互式计算信号采样的离散傅里叶变换

In[◦]:=

```
table[A_, ω_, φ_, b_, n_] :=
 Block[{f, len, p, q, l}, l = Table[A Sin[ω 2 π (r - 1) / n + φ] + b, {r, n}];
  f = Chop@Fourier@l;
  len = Length@f;
  p = Ceiling[len / 2];
  q = Floor[len / 2];
  {l, f, (Norm /@ f) / √n, Arg /@ f, Range[0, len - 1], Range[-len, -1],
   Range[0, p - 1] ~Join~ Range[p - len, -1], Range[0, q] ~Join~ Range[q - len + 1, -1]}]

Manipulate[t = table[A, ω, φ, b, n];
 Grid[If[showIndex, t, t[[{1, 2, 3, -2, -1}]]], Frame → All], {{A, 1, "振幅"}, 0.5, 5}, {{ω,
   2, "频率"}, 0, n, 1}, {{φ, 0, "初相"}, -π, π}, {{b, 0, "偏距"}, -2, 2}, {{n, 10, "采样"},
  Max[ω, 10], 20, 1}, {{showIndex, True, "索引"}, {True → "显示", False → "隐藏"}}]
```

Out[◦]=



1：离散傅里叶变换的结果
2：结果的模
3：结果的辐角
4：索引-1，前半部分对应周期数(频率)
5：反向索引，后半部分对应负的(反向旋转)周期数(频率)
6：频率（周期）
7：频率（周期）

变换后的结果显示出某种对称性
每一项可以理解为关于某个频率信号的相关性

第一个频率为0，第二个频率为1，后面的频率一次加一
最后一个频率为-1，最后第二个频率为-2，依次递推
原因呢，就在上一节，较高频信号的采样结果会与有初相的低频信号一样

可以看到，频率（周期）为k和-k处是有值的，而且共轭，其余都为0
那么是不是离散傅里叶变换结果的一半就足以描述原信号了呢?

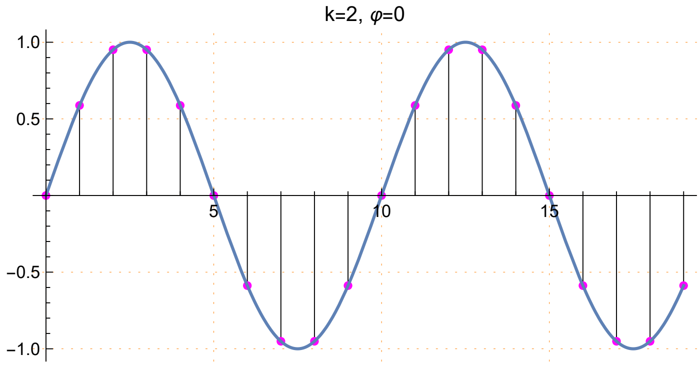
关于离散傅里叶变换结果

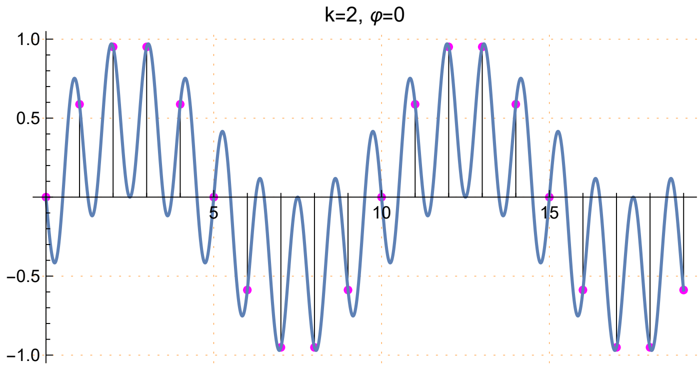
对于变换结果中某个频率的复数值，其模长表示振幅，辐角表示初相(相对余弦)

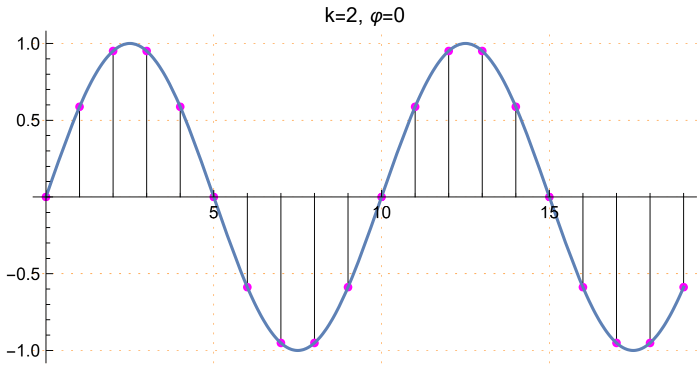
使用DFT还原信号

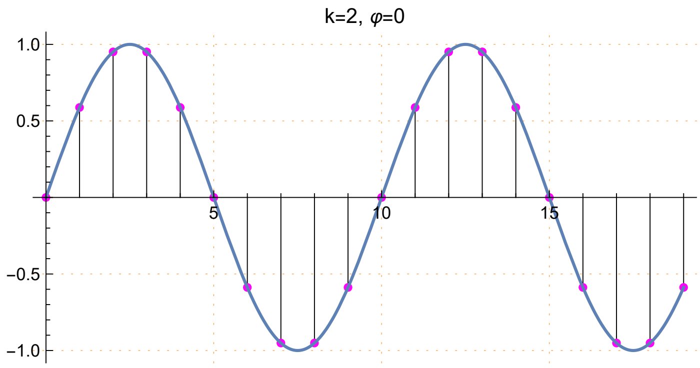
```
In[ ]:= len = 20;
f = Chop@Fourier@Table[Sin[2 × 2 π (n - 1) / len], {n, len}];
      近…    傅立叶      表格    正弦

p1 = Plot[Sum[(2 Norm[f[[n]]]/Sqrt[len]) Cos[((n - 1) 2 π/len) t - Arg[f[[n]]]], {n, len / 2}], {t, 0, len - 1}];
     绘图  求和                          余弦                      辐角

p2 = Plot[Sum[(Norm[f[[n]]]/Sqrt[len]) Cos[((n - 1) 2 π/len) t - Arg[f[[n]]]], {n, len}], {t, 0, len - 1}];
     绘图  求和                        余弦                      辐角

p3 = Plot[Sum[fn = f[[Mod[n + len, len] + 1]] / Sqrt[len];
     绘图  求和              模余
    Norm[fn] Cos[(n 2 π/len) t - Arg[fn]], {n, -5, 4}], {t, 0, len - 1}];
    模       余弦               辐角

p4 = Plot[Sum[fn = f[[Mod[n + len, len] + 1]] / Sqrt[len];
     绘图  求和              模余
    -Norm[fn] Cos[(n 2 π/len) t + Arg[fn]], {n, -5, 4}], {t, 0, len - 1}];
     模       余弦               辐角

Column@Table[Show[sg[2, 20], p, ImageSize → Medium], {p, {p1, p2, p3, p4}}]
列      表格  显示                 图像尺寸      中
```

Out[ ]=


k=2, φ=0
1.0
0.5
−0.5
−1.0
5
10
15


k=2, φ=0
1.0
0.5
−0.5
−1.0
5
10
15


k=2, φ=0
1.0
0.5
−0.5
−1.0
5
10
15


k=2, φ=0
1.0
0.5
−0.5
−1.0
5
10
15

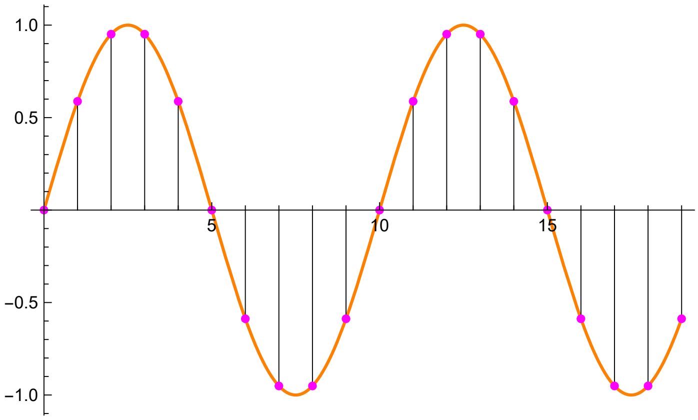
包装成函数

In[∘]:=

```
dftPlot[k_, n_, φ_ : 0] :=
 Block[{f = Chop@Fourier@signData[k, n, φ], func, p, c}, p = Ceiling[n / 2];
  func = Sum[c = f[[Mod[r + n, n] + 1]] / √n;
    Norm[c] Cos[(2 π r)/n x - Arg[c]], {r, p - n, p - 1}];
  Show[Plot[func, {x, 0, n - 1}, PlotStyle → Orange, PlotRange → All], sg[k, n, φ]]]
```

```
dftPlot[2, 20]
```

Out[∘]=



In[∘]:=

```
Manipulate[dftPlot[ω, n, φ], {{ω, 2, "频率"}, 0, n, 1},
 {{φ, 0, "初相"}, -π, π}, {{n, 10, "采样"}, Max[ω, 10], 50, 1}]
```

Out[∘]=

好了到目前为止我们研究了对单一频率的信号采样计算DFT
后面我们再深入研究多个频率的信号复合时计算DFT