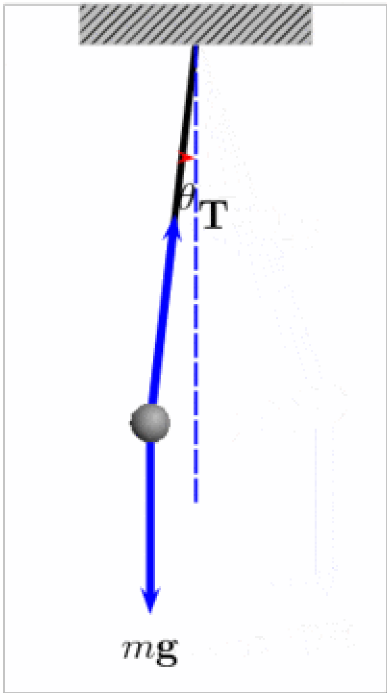
单摆

单摆是能够产生往复摆动的一种装置，将无重细杆或不可伸长的细柔绳一端悬于重力场内一定点，另一端固结一个重小球，就构成单摆。若小球只限于铅直平面内摆动，则为平面单摆，若小球摆动不限于铅直平面，则为球面单摆。

In[ ]:=
```
Import["E:\\Mathematica\\Image\\单摆.gif", "AnimatedImage"]
```
导入 自然常数 图像 动画图像

Out[ ]=



摆球的运动是周期性的，我们很容易联想到正弦（余弦）函数
假设摆球到铅垂线的水平距离为x，那么x随时间t的变化关系应当如下：

$$x=d\ \cos(t)$$

d是摆球到铅垂线的最大水平距离

根据勾股定理可以得到摆球在垂直方向上的位置

$$y = -\sqrt{l^2 - x^2}$$

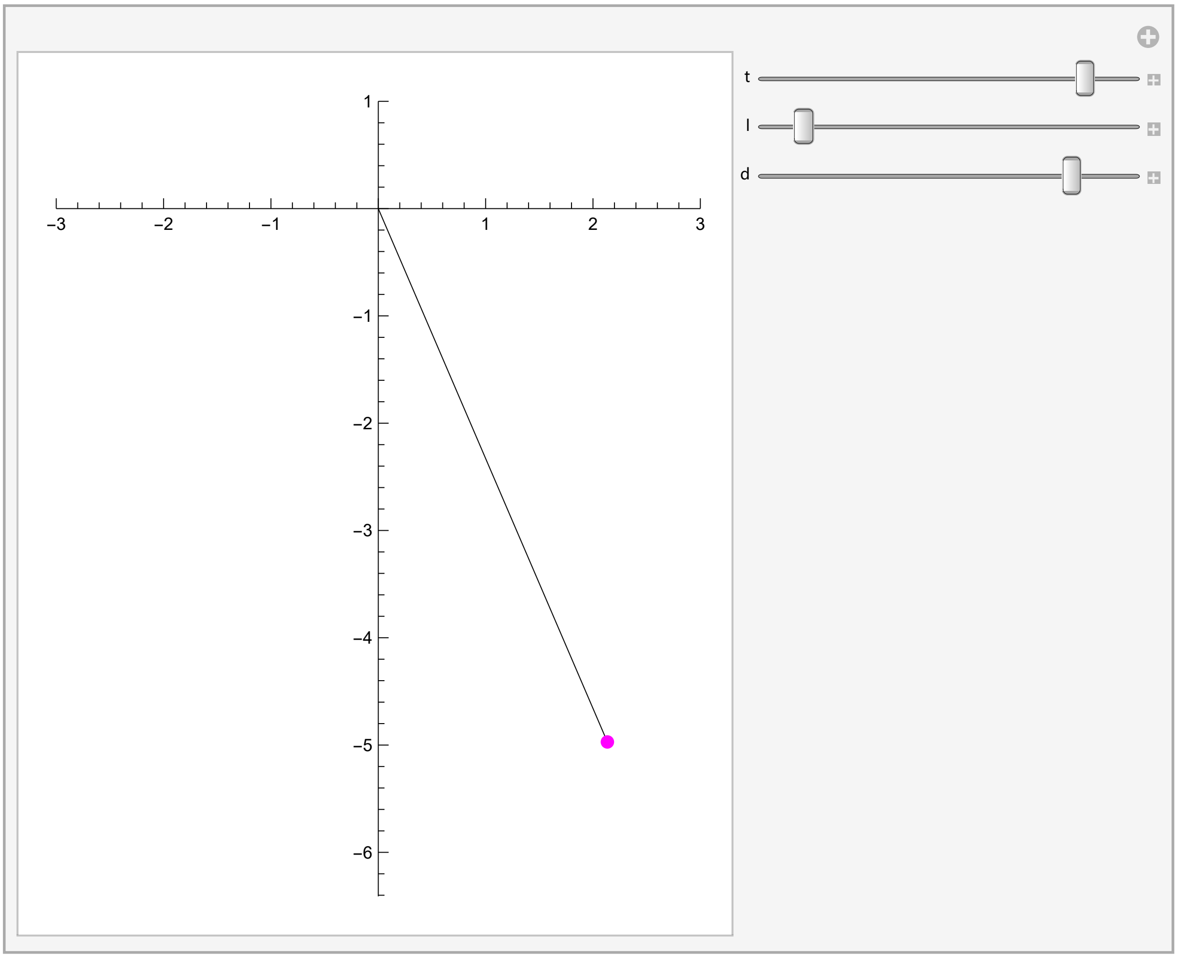
l是摆长

交互式可视化

In[ ]:=

```
Manipulate[pt = {d Cos[t], -√(l² - (d Cos[t])²)};
交互式操作              余弦
  Graphics[{Line[{{0, 0}, pt}], Magenta, PointSize[Large], Point[pt]}, Axes → True,
  图形       线段                品红色    点的大小    大          点          坐标轴  真
   PlotRange → {{-3, 3}, {-l - 1, 1}}], {t, 0, 2 π}, {l, 5, 10}, {d, 1, 3}]
   绘制范围
```

Out[ ]=



上面的做法有什么问题呢?

现实中，单摆的周期是跟随摆长变化的，而上面的角速度恒为1，这是很不合理的

在满足偏角小于10°的条件下，单摆的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

另外，角频率与周期有如下关系：

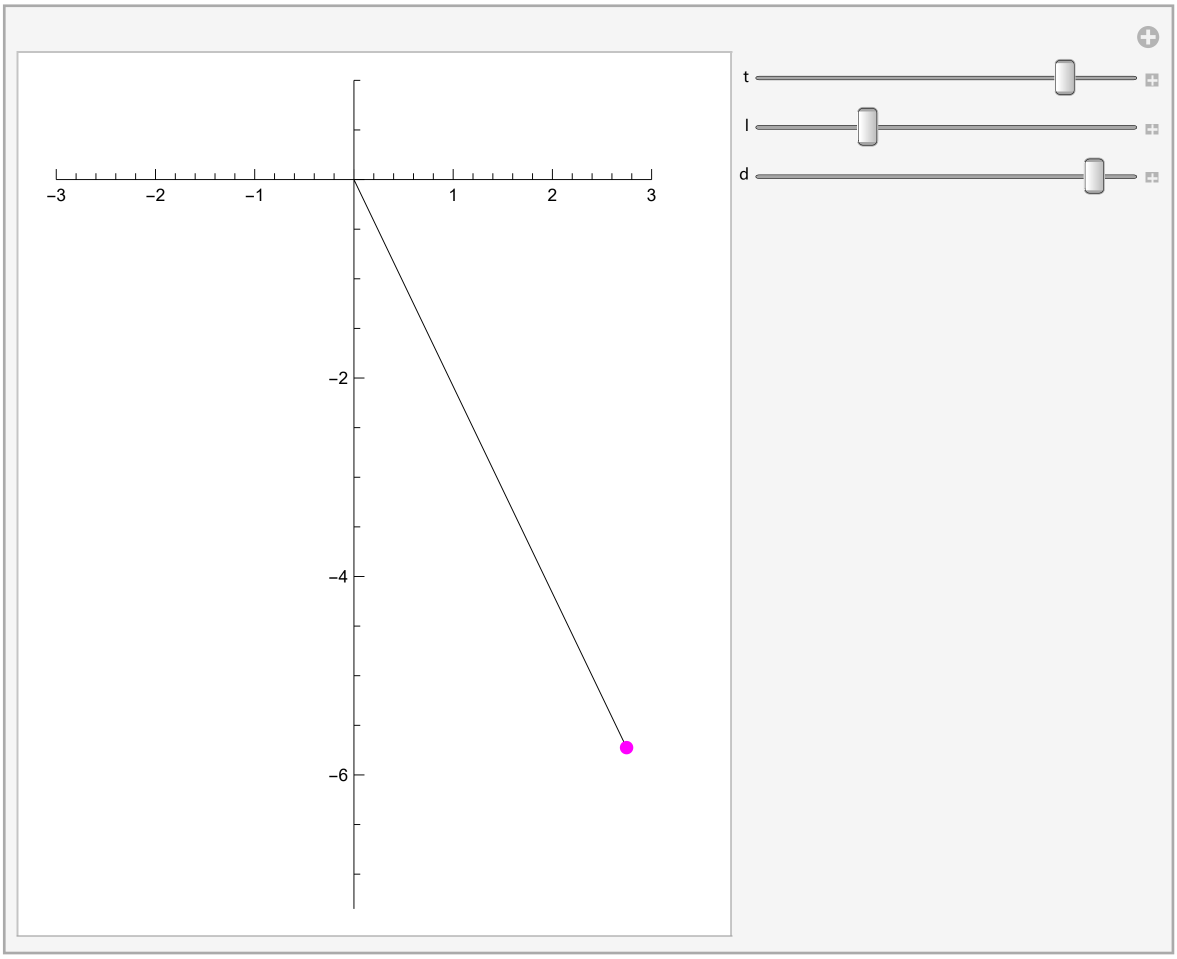
$$\omega = \frac{2\,\pi}{T}$$

In[∘]:=
```
g = 9.8;
```

根据单摆周期公式修改摆动的频率

In[∘]:=
```
Manipulate[pt = {x, -Sqrt[l^2 - x^2]} /. x → d Cos[Sqrt[g / l] t];
交互式操作                                 余弦
 Graphics[{Line[{{0, 0}, pt}], Magenta, PointSize[Large], Point[pt]},
 图形       线段                 品红色    点的大小    大       点
  Axes → True, PlotRange → {{-3, 3}, {-l - 1, 1}}], {t, 0, 2 π},
  坐标轴  真      绘制范围
 {l, 5, 10}, {d, 1, 3}, {pt, ControlType → None}, SaveDefinitions → True]
                              控件类型       无       保存定义             真
```

Out[∘]=

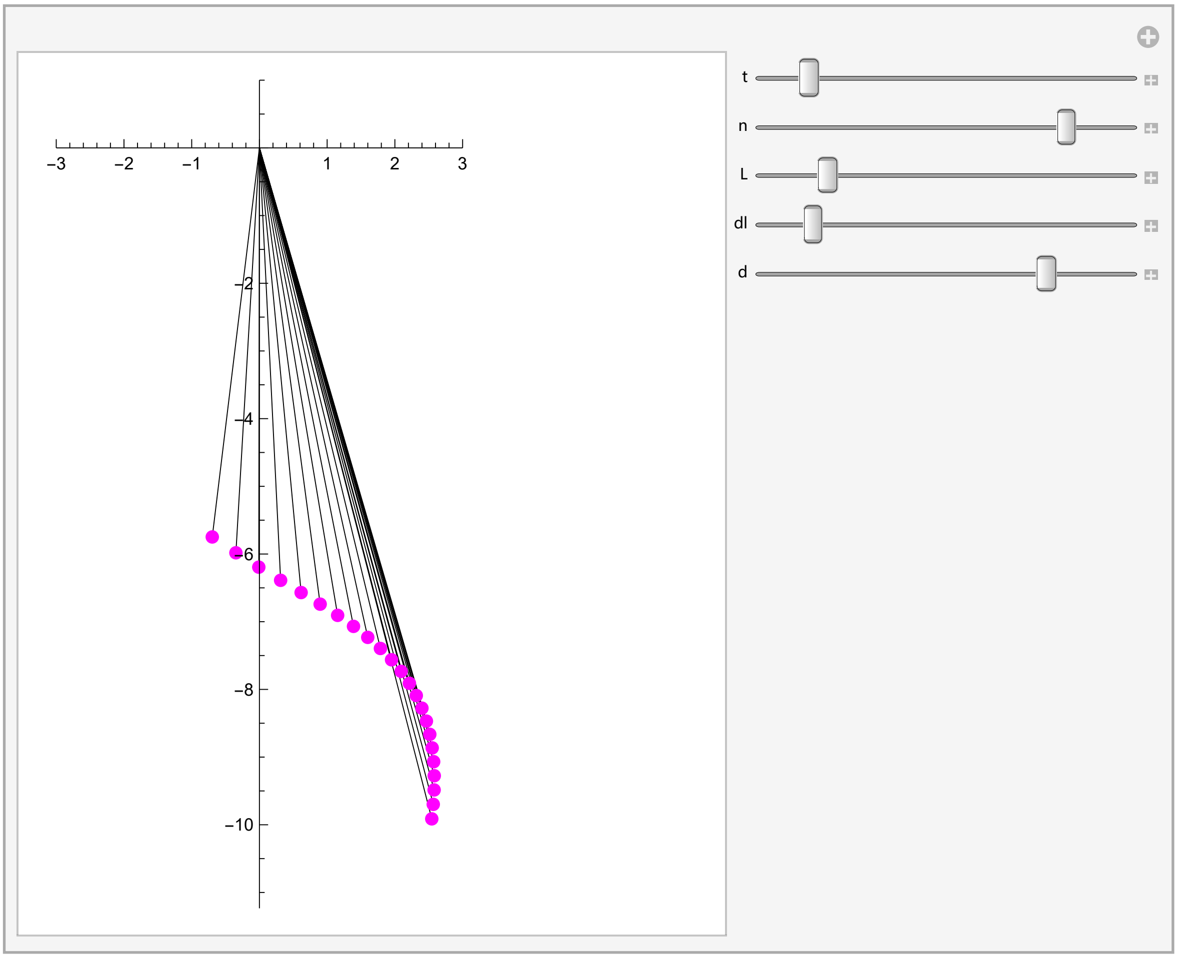


多个单摆

1. 在初始时刻，我们将多个摆球偏移相同的距离d

In[∘]:=
```
Manipulate[pts = Table[{x, - Sqrt[l^2 - x^2]} /. x → d Cos[Sqrt[g / l] t], {l, L, L + n dl, dl}];
交互式操作           表格                                    余弦
 Graphics[{Line[Distribute[{{{0, 0}}, pts}, List]], Magenta, PointSize[Large],
 图形          线段  分配                               列表      品红色     点的大小    大
   Point[pts]}, Axes → True, PlotRange → {{-3, 3}, {-L - n dl - 1, 1}}],
   点              坐标轴   真     绘制范围
 {t, 0, 60}, {n, 5, 25, 1}, {L, 5, 10}, {dl, 0.1, 1}, {d, 1, 3},
 {pts, ControlType → None}, SaveDefinitions → True]
       控件类型        无       保存定义            真
```

Out[∘]=

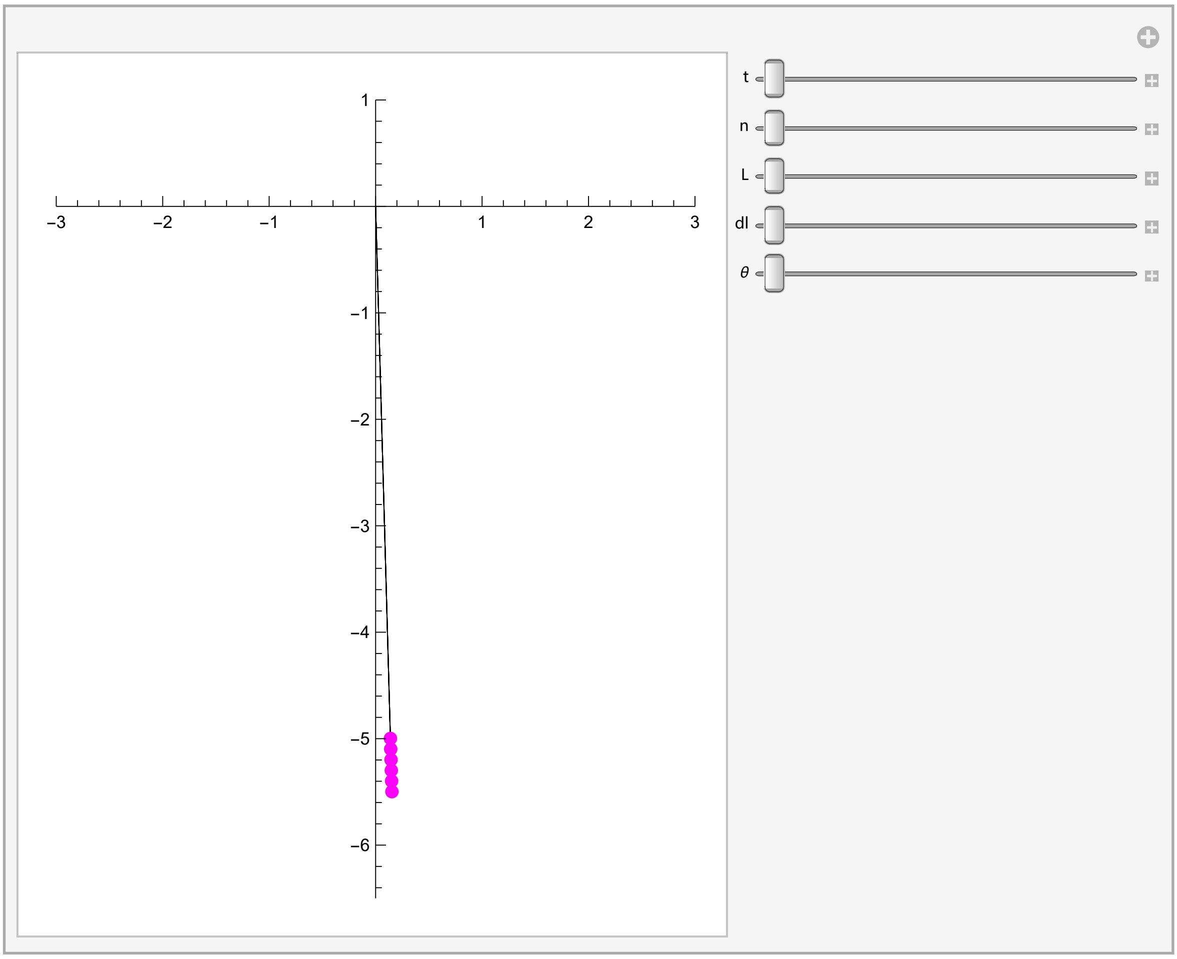


2. 在初始时刻，我们将多个摆球偏移相同的角度θ

为了效果明显，最大摆角设为20°

In[◦]:=
```
Manipulate[
交互式操作
 pts = Table[{x, -√(l^2 - x^2)} /. x → l Sin[θ / 180] Cos[√(g / l) t], {l, L, L + n dl, dl}];
       表格                              正弦             余弦
 Graphics[{Line[Distribute[{{{0, 0}}, pts}, List]], Magenta, PointSize[Large],
 图形         线段   分配                                列表       品红色      点的大小    大
   Point[pts]}, Axes → True, PlotRange → {{-3, 3}, {-L - n dl - 1, 1}}],
   点                坐标轴   真      绘制范围
 {t, 0, 120}, {n, 5, 25, 1}, {L, 5, 10}, {dl, 0.1, 1}, {θ, 5, 20},
 {pts, ControlType → None}, SaveDefinitions → True]
        控件类型          无       保存定义            真
```

Out[◦]=



任意角度下单摆的周期公式是怎样的呢？
考虑空气阻力的情况呢？
将摆绳换成弹簧呢？

球面单摆