論文内容の要旨

修士論文題目 Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term (Sobolev 臨界指数をもつ非斉次半線形楕円型偏微分方程式)

氏名 高橋 和音 (Kazune Takahashi)

本論文では，以下の方程式を考察する．

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\spadesuit$}_\lambda$$

ここで，$N \geq 3$，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界領域，境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 級とする．$p = (N+2)/(N-2)$ をソボレフ臨界指数とする．$f \in H^{-1}(\Omega)$ は，$f \geq 0$，$f \not\equiv 0$ をみたすとする．$a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする．κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ境界条件下の第 1 固有値とする．$a \geq \kappa$ in Ω をみたす $\kappa > -\kappa_1$ が存在すると仮定する．また，$b \geq 0$ in Ω，$b \not\equiv 0$ と仮定する．$\lambda > 0$ はパラメータである．

ソボレフ臨界指数を持つ半線形楕円型偏微分方程式の正値解の存在・非存在は，次元 N や領域の形状に依存していることが知られている．ブレジス – ニレンベルグ [BN83] が有名である．その中でも，パラメータ λ が非斉次項につく方程式の研究がなされている．タランテッロ [Tar92] では，自明解を持たないある方程式に対し，少なくとも 2 つの非自明正値解の存在が示された．

$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ とは $(\spadesuit)_\lambda$ の任意の解 u に対し，$u \geq \underline{u}_\lambda$ in Ω をみたすものである．minimal solution 以外の解を便宜上 second solution という．内藤 – 佐藤 [NS12] では，$(\spadesuit)_\lambda$ において $a = \kappa$，$b = 1$ としたものについて，以下の事実が証明された．

1. 全ての $N \geq 3$，$\kappa > -\kappa_1$ に対し，$0 < \overline{\lambda} < \infty$ が存在し，任意の $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，minimal solution が存在する．
2. $-\kappa_1 < \kappa \leq 0$ のとき，全ての $N \geq 3$ に対し，任意の $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，second solution が存在する．
3. $\kappa > 0$ のとき，$N = 3, 4, 5$ については，任意の $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，second solution が存在する．一方，$N \geq 6$ については，解が一意的である場合がある．

特に 3. は，領域の次元 N により解の存在・非存在が異なることを主張している．本論文は，内藤 – 佐藤 [NS12] の議論を踏襲し，$(\spadesuit)_\lambda$ を考察する．

$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution について以下の定理が従う．

定理 A (本論文 定理 1.1，1.2). 以下の (i) – (iii) をみたす $0 < \overline{\lambda} < \infty$ が存在する．

(i) $0 < \lambda \leq \overline{\lambda}$ において，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution を持つ．
(ii) $\lambda > \overline{\lambda}$ において，$(\spadesuit)_\lambda$ は弱解を持たない．
(iii) $b > 0$ in Ω ならば，$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の解は一意的である．

定理 A の証明では，陰関数定理と minimal solution における線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu p b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega,\ \phi \in H_0^1(\Omega)$$

が鍵となっている．

$(\spadesuit)_\lambda$ の second solution の結果を述べる．比較のため 内藤 – 佐藤 [NS12] の結果を $(\spadesuit)_\lambda$ に即して述べる．

定理 B ([NS12] Theorem 1.3). $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする．Ω 上 $a = \kappa$，$b = 1$ は定数とする．以下の (i), (ii) のいずれかの成立を仮定する．

(i) $-\kappa_1 < \kappa \leq 0$ かつ $N \geq 3$.
(ii) $\kappa > 0$ かつ $N = 3, 4, 5$.

このとき，$(\spadesuit)_\lambda$ は，minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H^1_0(\Omega)$ を持ち，$\overline{u}_\lambda > \underline{u}_\lambda$ in Ω が成立する．

本論文では，以下の定理を証明する．

定理 C (本論文 定理 1.4). $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする．b は Ω 上のある点 x_0 で最大値 $M = \|b\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$ を達成するものと仮定する．$r_0 > 0$ が存在し，$\{|x - x_0| < 2r_0\} \subset \Omega$，かつ，$\{|x - x_0| < r_0\}$ 上，b は連続であり a は

$$a(x) = m_1 + m_2|x - x_0|^q + o(|x - x_0|^q) \ \text{ in } \{|x - x_0| < r_0\} \tag{0.1}$$

であると仮定する．ここで $q > 0$，$m_1 > \kappa$，$m_2 \neq 0$ は定数である．さらに，以下の (i) – (iv) のいずれかの成立を仮定する．

(i) $m_1 < 0$，かつ，$N \geq 3$.
(ii) $m_1 > 0$，かつ，$N = 3, 4, 5$.
(iii) $m_1 = 0$，かつ，$m_2 < 0$，かつ，$N \geq 3$.
(iv) $m_1 = 0$，かつ，$m_2 > 0$，かつ，$3 \leq N < 6 + 2q$.

このとき，$(\spadesuit)_\lambda$ は，minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H^1_0(\Omega)$ を持ち，$\overline{u}_\lambda > \underline{u}_\lambda$ in Ω が成立する．

内藤 – 佐藤の定理 B では，$a = \kappa$ および $b = 1$ であるとき，κ が非正から正へと変化すると，$(\spadesuit)_\lambda$ の second solution が存在する次元 $N \geq 3$ が，$N < \infty$ から $N < 6$ へと段差的に変化することを示している．本論文では，a は定数ではなく関数であるため，定理 C (iv) のケースを検討することができる．$N < 6 + 2q$ において $(\spadesuit)_\lambda$ の second solution が存在するという結果は，「$N < \infty$」と「$N < 6$」の「中間部分」の結果に相当すると考えられる．a の零点における位数が大きいほど，second solution が存在する次元も大きくなる．証明では，(PS) 条件を課さない峠の定理と，タレンティー関数とソボレフ臨界指数の関係が重要な役割を果たす．

$(\spadesuit)_\lambda$ の second solution が $(0, \overline{\lambda})$ 上一様には存在しない場合もある．

定理 D (本論文, 定理 1.5).

1. $N \geq 3$ とする．$b > 0$ in Ω であると仮定する．このとき，$0 < \lambda^* < \overline{\lambda}$ が存在し，任意の $\lambda^* \leq \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda$ を持ち，$\overline{u}_\lambda > \underline{u}_\lambda$ in Ω が成立する．
2. $N \geq 6$ とする．$R > 0$ とし，$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$ と仮定する．$a = a(|x|)$，$b = b(|x|)$，$f = f(|x|)$ は Ω 上球対称とする．また，$0 < \alpha < 1$ とし，$a, b \in C^1([0, R])$，$f \in C^\alpha([0, R])$ であり，a は $[0, R]$ 上単調増加，b, f は $[0, R]$ 上単調減少と仮定する．また，$a(0), b(0) > 0$ とする．このとき，$0 < \lambda_*$ が存在し，任意の $0 < \lambda < \lambda_*$ に対し，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解を持たない．

定理 D.2 の証明では，球対称解のみ考慮すれば十分であることを示し，動径 r についての常微分方程式に議論を帰着させる．ポホザエフの議論から不等式を出し，十分小さい $\lambda > 0$ では不等式がみたされないことを示す．

参考文献

[BN83] Haïm Brézis and Louis Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 36, No. 4, pp. 437–477, 1983.

[NS12] Yūki Naito and Tokushi Sato. Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, Vol. 191, No. 1, pp. 25–51, 2012.

[Tar92] G. Tarantello. On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, Vol. 9, No. 3, pp. 281–304, 1992.